

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ОГЛАВЛЕНИЕ

От редакторов серии	8
ЧАСТЬ I	8
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	
Введение	9
Глава 1. Дифференциальные уравнения первого порядка	15
§ 1. Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной	15
§ 2. Уравнения с разделяющимися переменными	19
§ 3. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными	24
§ 4. Линейные уравнения первого порядка	27
§ 5. Уравнения в полных дифференциалах	32
§ 6. Теоремы существования и единственности решения уравнения $dy/dx=f(x,y)$	39
§ 7. Приближенные методы интегрирования уравнений первого порядка	61
§ 8. Простейшие типы уравнений, не разрешенных относительно производной	68
§ 9. Теорема существования и единственности для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной. Особые решения	75
<i>Задачи к главе 1</i>	82
Глава 2. Дифференциальные уравнения порядка выше первого	85
§ 1. Теорема существования и единственности для дифференциального уравнения $n$ -го порядка	85
§ 2. Простейшие случаи понижения порядка	87
§ 3. Линейные дифференциальные уравнения $n$ -го порядка	93
§ 4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами и уравнения Эйлера	107
§ 5. Линейные неоднородные уравнения	113
§ 6. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и уравнения Эйлера	124
§ 7. Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи рядов	137
§ 8. Метод малого параметра и его применение в теории квазилинейных колебаний	147
§ 9. Понятие о краевых задачах	159
<i>Задачи к главе 2</i>	165
Глава 3. Системы дифференциальных уравнений	168
§ 1. Общие понятия	168
§ 2. Интегрирование системы дифференциальных уравнений путем сведения к одному уравнению более высокого порядка	171

§ 3. Нахождение интегрируемых комбинаций	178
§ 4. Системы линейных дифференциальных уравнений	181
§ 5. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	192
§ 6. Приближенные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений и уравнений $n$ -го порядка	199
<i>Задачи к главе 3</i>	201
Глава 4. Теория устойчивости	203
§ 1. Основные понятия	203
§ 2. Простейшие типы точек покоя	206
§ 3. Второй метод А. М. Ляпунова	215
§ 4. Исследование на устойчивость по первому приближению	221
§ 5. Признаки отрицательности действительных частей всех корней многочлена	227
§ 6. Случай малого коэффициента при производной высшего порядка	230
§ 7. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях	234
<i>Задачи к главе 4</i>	238
Глава 5. Уравнения в частных производных первого порядка	241
§ 1. Основные понятия	241
§ 2. Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка	243
§ 3. Уравнения Пфаффа	255
§ 4. Нелинейные уравнения первого порядка	260
<i>Задачи к главе 5</i>	278

## ЧАСТЬ II

### ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Введение	280
Глава 6. Метод вариаций в задачах с неподвижными границами	284
§ 1. Вариация и ее свойства	284
§ 2. Уравнение Эйлера	292
§ 3. Функционалы вида $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx$	305
§ 4. Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка	308
§ 5. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных	312
§ 6. Вариационные задачи в параметрической форме	317
§ 7. Некоторые приложения	320
<i>Задачи к главе 6</i>	324
Глава 7. Вариационные задачи с подвижными границами и некоторые другие задачи	327
§ 1. Простейшая задача с подвижными границами	327
§ 2. Задача с подвижными границами для функционалов вида	334

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx$$

§ 3. Экстремали с угловыми точками	338
§ 4. Односторонние вариации	346
<i>Задача к главе 7</i>	349
Глава 8. Достаточные условия экстремума	351
§ 1. Поле экстремалей	351
§ 2. Функция $E(x, y, p, y')$	357
§ 3. Преобразование уравнений Эйлера к каноническому виду	368
<i>Задачи к главе 8</i>	373
Глава 9. Вариационные задачи на условный экстремум	375
§ 1. Связи вида $\varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$	375
§ 2. Связи вида $\varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0$	382
§ 3. Изопериметрические задачи	385
<i>Задачи к главе 9</i>	393
Глава 10. Прямые методы в вариационных задачах	394
§ 1. Прямые методы	394
§ 2. Конечно-разностный метод Эйлера	395
§ 3. Метод Ритца	397
§ 4. Метод Канторовича	406
<i>Задачи к главе 10</i>	412
Ответы и указания к задачам	414
Рекомендуемая литература	421
Предметный указатель	422

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Асимптотически устойчивое решение	327—350
204	Вариационное исчисление 281
Бернулли уравнение 30	— —, основная лемма 295
Бесселя уравнение 139	Вариационный принцип 281, 320
— функции 141—143	Вариация 284, 288, 289, 309, 313
Бигармоническое уравнение 317	Вейерштрасса функция 359
Близость кривых 285, 286	Векторная линия 245
Брахистохрона 281, 304, 332, 364	— поверхность 244
Вариации постоянной метод 28	Взаимности принцип 388
Вариационная задача 281	Влияния функция 123, 161 — 165
— — в параметрической форме	Вронского определитель 97, 185
317—320	Галеркина метод 410
— — на условный экстремум 375—	Гамильтона — Якоби уравнение 370
393	Гамма-функция 140
— —, прямые методы решения 394—	Геодезическая линия 282, 381
413	Голономные связи 382
— — с подвижными границами	Граничная задача 13, 159

- Грина функция 161 — 165
- Гурвица теорема 227
- Дикритический узел 211
- Динамическая система 170
- Дирихле задача 315
- Дифференциальное уравнение 9
- — Бернулли 30
- — Бесселя 139
- — в полных дифференциалах 32
- Дифференциальное уравнение в частных производных 10
- — — — — первого порядка 241—279
- — высшего порядка 85—167
- —, интеграл 20
- —интегрирование 10
- —,— с помощью рядов 137—146
- — Клеро 73
- — Лагранжа 73
- — линейное высшего порядка 93—106, 113—124
- — — — — неоднородное с постоянными коэффициентами 124—136
- — — — — однородное с постоянными коэффициентами 107—110
- — — — — первого порядка 27
- — — — —, фундаментальная система решений 100
- — — — —, не решенное относительно производной 68
- — — — —, общее решение 15, 86
- — — — —, общий интеграл 20, 32
- — — — — обыкновенное 10
- — — — — однородное 25
- — — — —, операторный метод решения 129—136
- — — — —, особое решение 57, 78
- — — — —, периодические решения 143—146
- — — — —, порядок 10
- — — — — Пфаффа 255
- — — — —, решение 10, 169
- — — — — Риккати 31
- — — — — с разделенными переменными 19
- — — — — с разделяющимися переменными 21
- — — — —, теорема существования и единственности решения 39—61, 75—82, 85—87
- — — — — Эйлера 110—113, 136
- Изоклины 17
- Изопериметрическая задача 282, 317, 385
- Изопериметрические условия 282, 386
- Интеграл дифференциального уравнения 20
- — первый 89, 179
- — полный 261
- Интегральная кривая 16, 169
- — особая 78
- — поверхность 261, 268
- Интегрируемая комбинация 178
- Интегрирующий множитель 35
- Канторовича метод 406—412
- Квазилинейное уравнение в частных производных 243
- Клеро уравнение 73
- Ковалевской теорема 242
- Коши задача 13
- — метод 121, 268
- Краевая задача 13, 159
- Лагранжа уравнение 73
- Лагранжа — Шарли метод 264
- Лагранжиан 324
- Лапласа уравнение 315
- Лежандра условие 362
- Линейная зависимость 96, 185
- — система дифференциальных уравнений 181—192
- — — — — с постоянными коэффициентами 192—199
- Линейное дифференциальное уравнение 27
- — — — — в частных производных

неоднородное 243  
— — — — — однородное 243  
— — — высших порядков 93—106,  
113—124  
— — — с постоянными  
коэффициентами 107—110,  
124—136  
— — —, фундаментальная система  
решений 100  
Линейный дифференциальный  
оператор 94—183  
— функционал 287  
Липшица условие 40  
Ляпунова второй метод 215  
— теорема 215, 217  
— функция 215  
Максимум функционала 289  
— — сильный 290  
— — слабый 290  
— — строгий 289  
Малкина теорема 235  
Малого параметра метод 147—158  
Метрическое пространство 48  
Минимум функционала 289  
Минимум функционала сильный 290  
— — слабый 290  
Наклон поля 351  
Наложения принцип 114, 189  
Начальная задача 13  
Неголономные связи 382  
Непрерывный функционал 285, 286  
Неустойчивое решение 204  
Неустойчивый предельный цикл 226  
— узел 208, 211  
— фокус 209  
Общее решение дифференциального  
уравнения 15, 86  
Общий интеграл дифференциального  
уравнения 20  
Обыкновенное дифференциальное  
уравнение 10  
Огибающая 74  
Оператор линейный

дифференциальный 94, 183  
Операторный метод решения  
дифференциальных уравнений  
129—136  
— многочлен 129  
Определитель Вронского 97, 185  
Оптимальная функция 391  
Оптимальное управление 391  
Особая интегральная кривая 78  
— точка 57  
Особое решение дифференциального  
уравнения 57, 78  
Остроградского уравнение 314  
Остроградского — Гамильтона  
принцип 320  
Остроградского — Лиувилля  
формула 106  
Первого приближения система  
уравнений 221  
Первый интеграл 89, 179  
Периодические решения  
дифференциального уравнения  
143—146  
Периодичности условия 157  
Плотность функции Лагранжа 324  
Покая точка 171, 205  
Поле собственное 351  
— центральное 351  
— экстремалей 352  
Полная интегрируемость уравнения  
Пфаффа 256  
Полное пространство 48  
Полный интеграл 261  
Полуустойчивый предельный цикл  
226  
Порядок дифференциального  
уравнения 10  
Последовательных приближений  
метод 199  
Предельный цикл 23, 226  
— — неустойчивый 226  
— — полуустойчивый 226  
— — устойчивый 226

Пространство метрическое 48  
— полное 48  
— равномерной сходимости 50  
— фазовое 12, 170  
Прямые методы в вариационном  
исчислении 394—413  
Пуассона уравнение 315  
Пфаффа уравнение 255  
Равномерной сходимости  
пространство 50  
Расстояние 48  
Резонанс 145, 152  
Риккати уравнение 31  
Ритца метод 397—406  
Рунге метод 64, 201  
Связи голономные 382  
— неголономные 382  
Связный экстремум 282  
Седло 59, 208  
Сжатых отображений принцип 48  
Сильный экстремум 290, 360  
Системы дифференциальных  
уравнений 168—202  
— линейных дифференциальных  
уравнений 181—192  
— — — — с постоянными  
коэффициентами 192—199  
Слабый экстремум 290, 359, 360  
Собственное поле 351  
Специальные решения 253  
Стационарного действия принцип  
320  
Строгий экстремум 290  
Суперпозиции принцип 114, 189  
Трансверсальности условие 331, 336  
Узел 58  
— дикритический 211  
— неустойчивый 208, 211  
— устойчивый 207, 211  
Управление оптимальное 391  
Управляющая функция 391  
Уравнения в частных производных

— — — — первого порядка 241 —  
279  
Уравнивание 61  
Условный экстремум 282, 375—393  
Устойчивое' решение (по Ляпунову)  
204  
— — по отношению к постоянно  
действующим возмущениям  
236  
Устойчивый предельный цикл 222  
— узел 207, 211  
— фокус 209  
Фазовая траектория 170  
Фазовое пространство 12, 170  
Фокус 59  
— неустойчивый 209  
— устойчивый 209  
Фундаментальная система решений  
100  
Функционал 280, 284  
— линейный 287  
— непрерывный 285, 286  
Характеристик метод 268  
Характеристики 245, 248, 254, 268,  
269, 273  
Характеристическая полоса 269, 273  
Характеристическое уравнение 107,  
194  
Центр 59, 210  
Центральное поле 351  
Цикл предельный 23, 226  
Четаева теорема 218  
Штермера метод 62, 200  
Эйлера дифференциальное уравнение  
110—113, 136  
— конечно-разностный метод 395—  
397  
— ломаная 13, 40  
— метод 39, 61, 199  
— уравнение (в вариационном  
исчислении) 297, 306, 368, 377  
Эйлера — Пуассона уравнение 310  
Экстремаль 297, 310

Экстремум связанный 282  
— условный 282, 375—393  
— функционала 290  
— — сильный 290, 360

— — слабый 290, 359, 360  
Якоби первый метод 277  
— уравнение 356  
— условие 355

## ОТ РЕДАКТОРОВ СЕРИИ

В качестве третьего выпуска серии редакция приняла переиздание (с некоторыми изменениями) книг Л. Э. Эльсгольца по соответствующим разделам.

### ПРЕДИСЛОВИЕ

Третий выпуск «Курса высшей математики и математической физики» для физических и физико-математических факультетов содержит теорию дифференциальных уравнений и вариационное исчисление. В основу книги положены лекции, которые автор в течение ряда лет читал на физическом факультете Московского ордена Ленина государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Излагаемый материал хотя и близок к содержанию книг автора «Дифференциальные уравнения» (М., Гостехиздат, 1957) и «Вариационное исчисление» (М., Гостехиздат, 1958), однако по совету редакторов Курса в него внесен ряд изменений. **За эти советы автор выражает им свою искреннюю признательность.**

*Л. Э. Эльсгольц*

# ЧАСТЬ I

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

---

### ВВЕДЕНИЕ

При изучении физических явлений часто не удается непосредственно найти законы, связывающие величины, характеризующие физическое явление, но в то же время легко устанавливается зависимость между теми же величинами и их производными или дифференциалами. При этом мы получаем уравнения, содержащие неизвестные функции или вектор-функции под знаком производной или дифференциала.

Уравнения, в которых неизвестная функция или вектор-функция входит под знаком производной или дифференциала, называются *дифференциальными уравнениями*. Приведем несколько примеров дифференциальных уравнений:

1)  $\frac{dx}{dt} = -kx$  — уравнение радиоактивного распада ( $k$  — постоянная распада,  $x$  — количество неразложившегося вещества в момент времени  $t$ , скорость распада  $\frac{dx}{dt}$  пропорциональна количеству распадающегося вещества).

2)  $m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \left( t, \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)$  — уравнение движения точки массы  $m$  под влиянием силы  $\mathbf{F}$ , зависящей от времени, положения точки, определяемого радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ , и ее скорости  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ . Сила равна произведению массы на ускорение.

3)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4\pi\rho(x, y, z)$  — уравнение Пуассона, которому, например, удовлетворяет потенциал  $u(x, y, z)$  электростатического поля,  $\rho(x, y, z)$  — плотность зарядов.

Зависимость между искомыми величинами будет найдена, если будут указаны методы нахождения неизвестных функций, определяемых дифференциальными уравнениями. Нахождение неизвестных функций, определяемых дифференциальными уравнениями, и является основной задачей теории дифференциальных уравнений.

Если в дифференциальном уравнении неизвестные функции или вектор-функции являются функциями одной переменной, то дифферен-

циальное уравнение называется *обыкновенным* (например, уравнения 1) и 2)). Если же неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, является функцией двух или большего числа независимых переменных, то дифференциальное уравнение называется *уравнением в частных производных* (например, уравнение 3)).

*Порядком* дифференциального уравнения называется максимальный порядок входящей в уравнение производной (или дифференциала) неизвестной функции.

*Решением* дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в дифференциальное уравнение обращает его в тождество.

Например, уравнение радиоактивного распада

$$\frac{dx}{dt} = -kx \quad (\text{B.1})$$

имеет решение

$$x = ce^{-kt}, \quad (\text{B.1}_1)$$

где  $c$  — произвольная постоянная.

Очевидно, что дифференциальное уравнение (B.1) еще не полностью определяет закон распада  $x = x(t)$ . Для его полного определения надо знать количество распадающегося вещества  $x_0$  в некоторый начальный момент  $t_0$ . Если  $x_0$  известно, то, принимая во внимание условие  $x(t_0) = x_0$  из (B.1<sub>1</sub>), находим закон радиоактивного распада:

$$x = x_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием дифференциального уравнения*. В рассмотренном примере мы легко нашли точное решение, однако в более сложных случаях очень часто приходится применять приближенные методы интегрирования дифференциальных уравнений. Эти приближенные методы еще недавно приводили к утомительным вычислениям, но теперь быстродействующие вычислительные машины способны выполнять эту работу со скоростью в несколько десятков или даже сотен тысяч операций в секунду.

Рассмотрим несколько подробнее упомянутую выше более сложную задачу о нахождении закона движения  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  материальной точки массы  $m$  под действием заданной силы  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ . По закону Ньютона

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}). \quad (\text{B.2})$$

Следовательно, задача сводится к интегрированию этого дифференциального уравнения. Очевидно, что закон движения еще не вполне

определяется заданием массы  $m$  и силы  $\mathbf{F}$ , надо еще знать начальное положение точки

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 \quad (\text{B.2}_1)$$

и начальную скорость

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \dot{\mathbf{r}}_0. \quad (\text{B.2}_2)$$

Укажем весьма естественный приближенный метод решения уравнения (B.2) с начальными условиями (B.2<sub>1</sub>) и (B.2<sub>2</sub>), причем идея этого метода может служить и для доказательства существования решения рассматриваемой задачи.

Разделим отрезок времени  $t_0 \leq t \leq T$ , на котором требуется определить решение уравнения (B.2), удовлетворяющее начальным условиям (B.2<sub>1</sub>) и (B.2<sub>2</sub>), на  $n$  равных частей длины  $h = \frac{T-t_0}{n}$ :

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, T],$$

где

$$t_k = t_0 + kh \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

В пределах каждого из этих малых (при больших значениях  $n$ ) отрезков времени сила  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  мало изменяется (вектор-функция  $\mathbf{F}$  предполагается непрерывной), поэтому приближенно ее можно считать на каждом отрезке  $[t_{k-1}, t_k]$  постоянной, например, равной ее значению в левой граничной точке каждого отрезка. Точнее, на отрезке  $[t_0, t_1]$  сила  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  считается постоянной и равной  $\mathbf{F}(t_0, \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0)$ . При этом допущении из уравнения (B.2) и начальных условий (B.2<sub>1</sub>) и (B.2<sub>2</sub>) легко определяется закон движения  $\mathbf{r}_n(t)$  на отрезке  $[t_0, t_1]$  (движение будет равномерно переменным) и, следовательно, в частности, известны значения  $\mathbf{r}_n(t_1)$  и  $\dot{\mathbf{r}}_n(t_1)$ . Тем же методом приближенно определяем закон движения  $\mathbf{r}_n(t)$  на отрезке  $[t_1, t_2]$ , считая силу  $\mathbf{F}$  на этом участке постоянной и равной  $\mathbf{F}(t_1, \mathbf{r}_n(t_1), \dot{\mathbf{r}}_n(t_1))$ . Продолжая этот процесс, определим приближенное решение  $\mathbf{r}_n(t)$  поставленной задачи с начальными значениями для уравнения (B.2) на всем отрезке  $[t_0, T]$ .

Интуитивно ясно, что при  $n \rightarrow \infty$  приближенное решение  $\mathbf{r}_n(t)$  должно стремиться к точному решению.

Заметим, что векторное уравнение (B.2) второго порядка может быть заменено эквивалентной системой двух векторных уравнений первого порядка, если рассматривать скорость  $\mathbf{v}$  как вторую неизвестную вектор-функцию:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}). \quad (\text{B.3})$$

Каждое векторное уравнение в трехмерном пространстве может быть заменено путем проектирования на оси координат тремя

скалярными уравнениями. Следовательно, уравнение (В.2) эквивалентно системе трех скалярных уравнений второго порядка, а система (В.3) эквивалентна системе шести скалярных уравнений первого порядка.

Наконец, можно одно векторное уравнение (В.2) второго порядка в трехмерном пространстве заменить одним векторным уравнением первого порядка в шестимерном пространстве, координатами в котором служат координаты  $r_x, r_y, r_z$  радиуса-вектора  $\mathbf{r}(t)$  и координаты  $v_x, v_y, v_z$  вектора-скорости  $\mathbf{v}$ . Такое пространство физики называют *фазовым*. Радиус-вектор  $\mathbf{R}(t)$  в этом пространстве имеет координаты  $(r_x, r_y, r_z, v_x, v_y, v_z)$ . В таких обозначениях система (В.3) имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \Phi(t, \mathbf{R}(t)) \quad (\text{В.4})$$

(проекции вектора  $\Phi$  в шестимерном пространстве служат соответствующие проекции правых частей системы (В.3) в трехмерном пространстве).

При такой интерпретации начальные условия (В.2<sub>1</sub>) и (В.2<sub>2</sub>) заменяются условием

$$\mathbf{R}(t_0) = \mathbf{R}_0. \quad (\text{В.4}_1)$$

Решением уравнения (В.4)  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$  будет фазовая траектория, каждой точке которой будет соответствовать некоторое мгновенное состояние движущейся точки — ее положение  $\mathbf{r}(t)$  и ее скорость  $\mathbf{v}(t)$ .

Если к уравнению (В.4) с начальным условием (В.4<sub>1</sub>) применить изложенный выше приближенный метод, то на первом отрезке  $[t_0, t_1]$  вектор-функцию  $\Phi(t, \mathbf{R}(t))$  надо считать постоянной и равной  $\Phi(t_0, \mathbf{R}(t_0))$ . Итак, при  $t_0 \leq t \leq t_0 + h$

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \Phi(t_0, \mathbf{R}(t_0)),$$

откуда, умножая на  $dt$  и интегрируя в пределах от  $t_0$  до  $t$ , получим линейную вектор-функцию  $\mathbf{R}(t)$ :

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t_0) + \Phi(t_0, \mathbf{R}(t_0))(t - t_0).$$

В частности, при  $t = t_1$  будем иметь

$$\mathbf{R}(t_1) = \mathbf{R}(t_0) + h\Phi(t_0, \mathbf{R}(t_0)).$$

Повторяя то же рассуждение на следующих участках, получим

$$\mathbf{R}(t_2) = \mathbf{R}(t_1) + h\Phi(t_1, \mathbf{R}(t_1)),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\mathbf{R}(t_k) = \mathbf{R}(t_{k-1}) + h\Phi(t_{k-1}, \mathbf{R}(t_{k-1})),$$

$$\dots \dots \dots$$

Применяя эти формулы  $n$  раз, дойдем до значения  $\mathbf{R}(T)$ .

В этом методе искомое решение  $\mathbf{R}(t)$  приближенно заменяется кусочно линейной вектор-функцией, графиком которой служит некоторая ломаная, называемая *ломаной Эйлера*.

Для уравнения (В.2) нередко в приложениях встречается и иная постановка задачи — дополнительные условия задаются не в одной, а в двух точках. Такая задача, в отличие от задачи с условиями (В.2<sub>1</sub>) и (В.2<sub>2</sub>), называемой задачей с начальными условиями или задачей Коши, носит название *краевой* или *граничной*.

Пусть, например, требуется, чтобы материальная точка массы  $m$ , движущаяся под действием силы  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t))$ , находившаяся в начальный момент  $t = t_0$  в положении  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ , попала бы в момент  $t = t_1$  в положение  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ , т. е. надо решить уравнение (В.2) с граничными условиями  $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1$ . К этой граничной задаче сводятся многие баллистические задачи, причем очевидно, что решение здесь часто может быть не единственным, так как из точки  $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$  можно попасть в точку  $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1$  по настильной и по навесной траекториям.

Точное или приближенное решение задач с начальными условиями и граничных задач является основной задачей теории дифференциальных уравнений, однако иногда требуется выяснить или приходится ограничиваться выяснением лишь некоторых свойств решений. Например, часто требуется установить, существуют ли периодические или колеблющиеся решения, оценить быстроту возрастания или убывания решений, выяснить, сильно ли меняется решение при малом изменении начальных значений.

Остановимся несколько подробнее на последнем из этих вопросов применительно к уравнению движения (В.2). В прикладных задачах начальные значения  $\mathbf{r}_0$  и  $\dot{\mathbf{r}}_0$  почти всегда являются результатом измерения и, следовательно, неизбежно определены с некоторой погрешностью. Поэтому естественно возникает вопрос о влиянии малого изменения начальных значений на искомое решение.

Если сколь угодно малые изменения начальных значений способны вызвать значительные изменения решения, то решение, определяемое неточными начальными значениями  $\mathbf{r}_0$  и  $\dot{\mathbf{r}}_0$ , обычно не имеет никакого прикладного значения, так как оно даже приближенно не описывает движение рассматриваемого тела. Следовательно, возникает важный для приложений вопрос о нахождении условий, при которых малое изменение начальных значений  $\mathbf{r}_0$  и  $\dot{\mathbf{r}}_0$  вызывает лишь малое изменение определяемого ими решения  $\mathbf{r}(t)$ .

Аналогичный вопрос возникает и в задачах, в которых требуется выяснить, с какой точностью надо задавать начальные значения  $\mathbf{r}_0$  и  $\dot{\mathbf{r}}_0$ , чтобы движущаяся точка с заданной точностью вышла на требуемую траекторию или попала бы в данную область.

Столь же большое значение имеет вопрос о влиянии на решение малых слагаемых в правой части уравнения (В.2) -- малых, но постоянно действующих сил.

В некоторых случаях эти малые силы, действующие в течение большого промежутка времени, способны сильно исказить решение и ими нельзя пренебречь. В других случаях изменение решения под действием этих сил незначительно, и если оно не превосходит требуемой точности вычисления, то малыми возмущающими силами можно пренебречь.

Ниже излагаются методы интегрирования дифференциальных уравнений и простейшие способы исследования их решений.

---

## ГЛАВА I

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

#### § 1. Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка первой степени можно, разрешив относительно производной, представить в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Простейший пример такого уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

рассматривается в курсе интегрального исчисления. В этом простейшем случае решение

$$y = \int f(x) dx + c$$

содержит произвольную постоянную, которая может быть определена, если известно значение  $y(x_0) = y_0$ , тогда

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x) dx.$$

В дальнейшем будет доказано, что при некоторых ограничениях, налагаемых на функцию  $f(x, y)$ , уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

также имеет единственное решение, удовлетворяющее условию  $y(x_0) = y_0$ , а его *общее решение*, т. е. множество решений, содержащее все без исключения решения, зависит от одной произвольной постоянной.

Дифференциальное уравнение  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  устанавливает зависимость между координатами точки и угловым коэффициентом касательной  $\frac{dy}{dx}$  к графику решения в той же точке. Зная  $x$  и  $y$ , можно вычислить  $\frac{dy}{dx}$ . Следовательно, дифференциальное уравнение рассма-

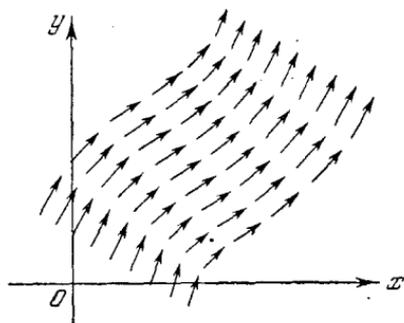


Рис. 1.1.

триваемого вида определяет поле направлений (рис. 1.1) и задача интегрирования дифференциального уравнения заключается в том, чтобы найти кривые, называемые *интегральными кривыми*, направление касательных к которым в каждой точке совпадает с направлением поля.

Пример 1.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

В каждой точке, отличной от точки  $(0, 0)$ , угловым коэффициентом касательной к искомой интегральной кривой равен отношению  $\frac{y}{x}$ , т. е. совпадает с угловым коэффициентом прямой, направленной из начала координат в ту же

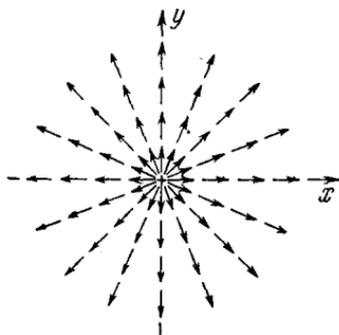


Рис. 1.2.

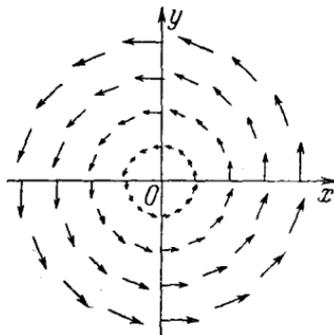


Рис. 1.3.

точку  $(x, y)$ . На рис. 1.2 стрелками изображено поле направлений, определяемое рассматриваемым уравнением. Очевидно, что интегральными кривыми в данном случае будут прямые  $y = cx$ , так как направления этих прямых всюду совпадают с направлением поля

Пример 2.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Замечаем, что угловой коэффициент касательной к искомым интегральным кривым  $-\frac{x}{y}$  и угловой коэффициент касательной  $\frac{y}{x}$  к интегральным кривым примера 1 в каждой точке удовлетворяют условию ортогональности:  $-\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = -1$ . Следовательно, поле направлений, определяемое рассматриваемым дифференциальным уравнением, ортогонально полю направлений, изображенному на рис. 1.2. Очевидно, что интегральными кривыми уравнения  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$  являются окружности с центром в начале координат  $x^2 + y^2 = c^2$  (рис. 1.3) (точнее, полуокружности  $y = \sqrt{c^2 - x^2}$  и  $y = -\sqrt{c^2 - x^2}$ ).

Пример 3.

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Для построения поля направлений найдем геометрическое место точек, в которых касательные к искомым интегральным кривым сохраняют постоянное направление. Такие линии называются *изоклинами*. Уравнение изоклин получим, считая  $\frac{dy}{dx} = k$ , где  $k$  — постоянная;  $\sqrt{x^2 + y^2} = k$  или  $x^2 + y^2 = k^2$ . Следовательно, в данном случае изоклинами являются окружности с центром в начале координат, причем угловой коэффициент касательной к искомым

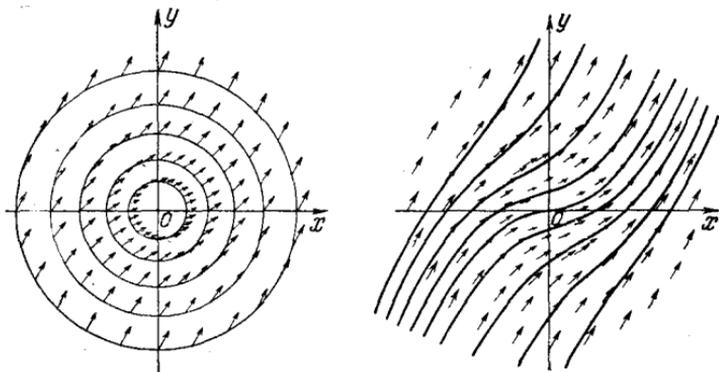


Рис. 1.4.

интегральным кривым равен радиусу этих окружностей. Для построения поля направлений дадим постоянной  $k$  некоторые определенные значения (см. рис. 1.4 слева). Теперь можно уже приблизительно провести искомые интегральные кривые (см. рис. 1.4 справа).

Пример 4.

$$y' = 1 + xy.$$

Изоклинами являются гиперболы  $k = xy + 1$  или  $xy = k - 1$ , причем при  $k = 1$  гипербола распадается на пару прямых  $x = 0$  и  $y = 0$  (рис. 1.5). При  $k = 0$  получаем изоклину  $1 + xy = 0$ ; эта гипербола разбивает плоскость на части, в каждой из которых  $y'$  сохраняет постоянный знак (рис. 1.6). Интегральные кривые  $y = y(x)$ , пересекая гиперболу  $1 + xy = 0$ , переходят из области возрастания функции  $y(x)$  в области ее убывания или, наоборот,

из области убывания в область возрастания, и следовательно, на ветвях этой гиперболы расположены точки максимума и минимума интегральных кривых.

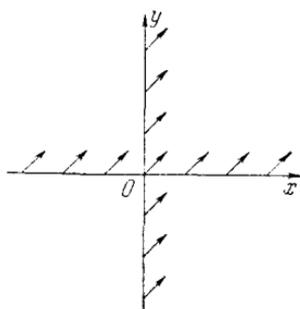


Рис. 1.5.

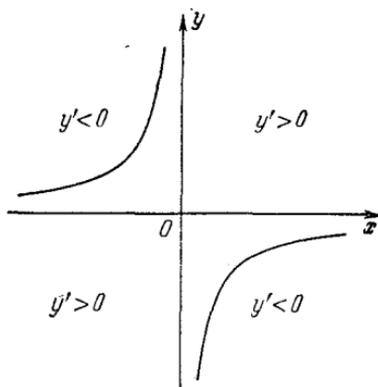


Рис. 1.6.

Определим теперь знаки второй производной в различных областях плоскости:

$$y'' = xy' + y \text{ или } y'' = x(1 + xy) + y = x + (x^2 + 1)y.$$

Кривая  $x + (x^2 + 1)y = 0$  или

$$y = -\frac{x}{1 + x^2} \quad (1.1)$$

(рис. 1.7) разбивает плоскость на две части, в одной из которых  $y'' < 0$ , и следовательно, интегральные кривые выпуклы вверх, а в другой  $y'' > 0$ , и значит, интегральные кривые вогнуты вверх. При переходе через кривую (1.1) интегральные кривые переходят от выпуклости к вогнутости, и следовательно, на этой кривой расположены точки перегиба интегральных кривых.

В результате проведенного исследования известны области возрастания и

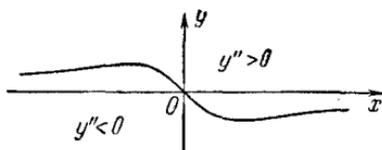


Рис. 1.7.

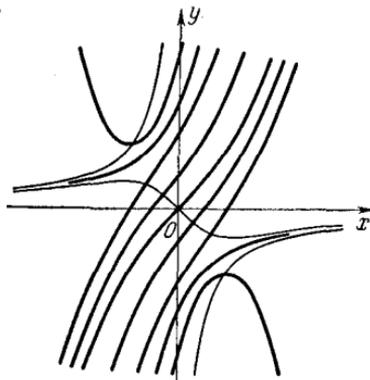


Рис. 1.8.

убывания интегральных кривых, известно расположение точек максимума и минимума, известны области выпуклости и вогнутости и расположение точек перегиба, известна изоклина  $k = 1$ . Этих сведений вполне достаточно для того, чтобы сделать набросок расположения интегральных кривых

(рис. 1.8), но можно было бы вычертить еще несколько изоклин, что позволило бы уточнить расположение интегральных кривых.

Во многих задачах, в частности почти во всех задачах геометрического характера, переменные  $x$  и  $y$  совершенно равноправны. Поэтому в таких задачах, если они сводятся к решению дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1.2)$$

естественно наряду с уравнением (1.2) рассматривать также уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}. \quad (1.3)$$

Если оба эти уравнения имеют смысл, то они эквивалентны, так как если функция  $y = y(x)$  является решением уравнения (1.2), то обратная функция  $x = x(y)$  является решением уравнения (1.3), и следовательно, уравнения (1.2) и (1.3) имеют общие интегральные кривые.

Если же в некоторых точках одно из уравнений (1.2) или (1.3) теряет смысл, то в таких точках естественно его заменять другим из этих уравнений.

Например, уравнение  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$  теряет смысл при  $x = 0$ . Заменяя его уравнением  $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$ , правая часть которого уже не теряет смысла при  $x = 0$ , находим в дополнение к ранее найденным решениям  $y = cx$  (см. стр. 16) еще одну интегральную кривую  $x = 0$  этого уравнения.

## § 2. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальные уравнения вида

$$f_2(y) dy = f_1(x) dx \quad (1.4)$$

называются *уравнениями с разделенными переменными*. Функции  $f_1(x)$  и  $f_2(y)$  будем считать непрерывными.

Предположим, что  $y(x)$  является решением этого уравнения, тогда при подстановке  $y(x)$  в уравнение (1.4) получим тождество, интегрируя которое, будем иметь:

$$\int f_2(y) dy = \int f_1(x) dx + c, \quad (1.5)$$

где  $c$  — произвольная постоянная.

Мы получили конечное уравнение (1.5), которому удовлетворяют все решения уравнения (1.4), причем каждое решение уравнения (1.5)

является решением уравнения (1.4), так как если некоторая функция  $y(x)$  при подстановке обращает уравнение (1.5) в тождество, то, дифференцируя это тождество, обнаружим, что  $y(x)$  удовлетворяет и уравнению (1.4).

Конечное уравнение  $\Phi(x, y) = 0$ , которое определяет решение  $y(x)$  дифференциального уравнения как неявную функцию  $x$ , называется *интегралом* рассматриваемого дифференциального уравнения.

Если это конечное уравнение определяет все без исключения решения данного дифференциального уравнения, то оно называется *общим интегралом* рассматриваемого дифференциального уравнения. Следовательно, уравнение (1.5) является общим интегралом уравнения (1.4). Для того чтобы уравнение (1.5) определяло  $y$  как неявную функцию  $x$ , достаточно потребовать, чтобы  $f_2(y) \neq 0$ .

Вполне возможно, что в некоторых задачах неопределенные интегралы  $\int f_1(x) dx$  и  $\int f_2(y) dy$  нельзя будет выразить в элементарных функциях, тем не менее мы и в этом случае будем считать задачу интегрирования дифференциального уравнения (1.4) выполненной в том смысле, что мы свели ее к более простой и уже изученной в курсе интегрального исчисления задаче вычисления неопределенных интегралов — квадратур \*).

Если надо выделить частное решение, удовлетворяющее условию  $y(x_0) = y_0$ , то оно, очевидно, определится из уравнения

$$\int_{y_0}^y f_2(y) dy = \int_{x_0}^x f_1(x) dx,$$

которое получим из

$$\int_{y_0}^y f_2(y) dy = \int_{x_0}^x f_1(x) dx + c,$$

воспользовавшись начальным условием  $y(x_0) = y_0$ .

Пример 1.

$$x dx + y dy = 0.$$

Переменные разделены, так как коэффициент при  $dx$  является функцией только  $x$ , а коэффициент при  $dy$  является функцией только  $y$ . Интегрируя, получим

$$\int x dx + \int y dy = c \text{ или } x^2 + y^2 = c_1^2$$

---

\* Так как термин «интеграл» в теории дифференциальных уравнений часто применяется в смысле интеграла дифференциального уравнения, то во избежание недоразумений для интегралов функций  $\int f(x) dx$  обычно применяется термин «квadrатура».

— семейство окружностей с центром в начале координат (сравните с примером 2, стр. 16—17).

Пример 2.

$$e^{x^2} dx = \frac{dy}{\ln y}.$$

Интегрируя, получаем

$$\int e^{x^2} dx = \int \frac{dy}{\ln y} + c.$$

Интегралы  $\int e^{x^2} dx$  и  $\int \frac{dy}{\ln y}$  не берутся в элементарных функциях, тем не менее исходное уравнение считается проинтегрированным, так как задача доведена до квадратур.

Уравнения вида

$$\varphi_1(x) \psi_1(y) dx = \varphi_2(x) \psi_2(y) dy,$$

в которых коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от  $x$  и только от  $y$ , называются дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными, так как путем деления на  $\psi_1(y) \varphi_2(x)$  они приводятся к уравнению с разделенными переменными:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} dx = \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)} dy.$$

Заметим, что деление на  $\psi_1(y) \varphi_2(x)$  может привести к потере частных решений, обращающих в нуль произведение  $\psi_1(y) \cdot \varphi_2(x)$ , а если функции  $\psi_1(y)$  и  $\varphi_2(x)$  могут быть разрывными, то возможно появление лишних решений, обращающих в нуль множитель

$$\frac{1}{\psi_1(y) \varphi_2(x)}.$$

Пример 3.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (\text{сравните с примером 1, стр. 16}).$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln c, \quad c > 0.$$

Потенцируя, получим  $|y| = c|x|$ . Если речь идет только о гладких решениях, то уравнение  $|y| = c|x|$ , где  $c > 0$ , эквивалентно уравнению  $y = \pm cx$  или  $y = c_1x$ , где  $c_1$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения, но  $c_1 \neq 0$ . Если же принять во внимание, что при делении на  $y$  мы потеряли решение  $y = 0$ , то можно считать, что в решении  $y = c_1x$  постоянная  $c_1$  принимает и значение  $c_1 = 0$ , при котором мы получаем потерянное ранее решение  $y = 0$ .

З а м е ч а н и е. Если в примере 3 считать переменные  $x$  и  $y$  равноправными, то уравнение  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ , теряющее смысл при  $x = 0$ , надо дополнить

уравнением  $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$  (см. стр. 19), которое, очевидно, имеет еще решение  $x = 0$ , не содержащееся в найденном выше решении  $y = c_1 x$ .

Пример 4.

$$x(1+y^2) dx - y(1+x^2) dy = 0.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{y dy}{1+y^2} = \frac{x dx}{1+x^2}; \quad \int \frac{y dy}{1+y^2} = \int \frac{x dx}{1+x^2} + c;$$

$$\ln(1+y^2) = \ln(1+x^2) + \ln c; \quad 1+y^2 = c_1(1+x^2).$$

Пример 5.

$$\frac{dx}{dt} = 4t\sqrt{x}.$$

Найти решение  $x(t)$ , удовлетворяющее условию  $x(1) = 1$ .

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int_1^x \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \int_1^t 2t dt, \quad \sqrt{x} = t^2, \quad x = t^4.$$

Пример 6. Как уже упоминалось во введении, установлено, что скорость радиоактивного распада пропорциональна количеству  $x$  еще не распавшегося вещества. Найти зависимость  $x$  от времени  $t$ , если в начальный момент при  $t = t_0$  будет  $x = x_0$ .

Коэффициент пропорциональности  $k$ , называемый постоянной распада, предполагается известным. Дифференциальное уравнение процесса будет иметь вид

$$\frac{dx}{dt} = -kx \quad (1.6)$$

(знак  $-$  указывает на уменьшение  $x$  при возрастании  $t$ ,  $k > 0$ ). Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{dx}{x} = -k dt; \quad \ln|x| - \ln|x_0| = k(t - t_0),$$

откуда

$$x = x_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

Определим еще период полураспада  $\tau$  (т. е. время, в течение которого распадается  $\frac{1}{2} x_0$ ). Полагая  $t - t_0 = \tau$ , получим  $\frac{1}{2} x_0 = x_0 e^{-k\tau}$ , откуда

$$\tau = \frac{\ln 2}{k}.$$

Не только радиоактивный распад, но и любая другая мономолекулярная реакция на основании закона действующих масс описывается уравнением  $\frac{dx}{dt} = -kx$ , где  $x$  — количество еще не прореагировавшего вещества.

Уравнение

$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad k > 0, \quad (1.7)$$

отличающееся лишь знаком правой части от уравнения (1.6), описывает многие процессы «размножения», например «размножение» числа нейтронов в цепных ядерных реакциях или размножение числа бактерий в предположении, что условия среды для них предельно благоприятны и поэтому скорость их размножения пропорциональна наличному числу бактерий.

Решение уравнения (1.7), удовлетворяющее условию  $x(t_0) = x_0$ , имеет вид  $x = x_0 e^{\rho(t-t_0)}$  и, в отличие от решений уравнения (1.6),  $x(t)$  не убывает, а возрастает по показательному закону с возрастанием  $t$ .

Пример 7.

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho(\rho - 2)(\rho - 4).$$

Начертить интегральные кривые, не интегрируя уравнения;  $\rho$  и  $\varphi$  — полярные координаты.

Уравнение имеет очевидные решения  $\rho = 0$ ,  $\rho = 2$  и  $\rho = 4$ . При  $0 < \rho < 2$   $\frac{d\rho}{d\varphi} > 0$ ; при  $2 < \rho < 4$   $\frac{d\rho}{d\varphi} < 0$  и при  $\rho > 4$   $\frac{d\rho}{d\varphi} > 0$ .

Следовательно, интегральными кривыми являются окружности  $\rho = 2$  и  $\rho = 4$  и спирали, наматывающиеся при возрастании  $\varphi$  на окружность  $\rho = 2$  и разматывающиеся с возрастанием  $\varphi$  с окружности  $\rho = 4$ . Замкнутые интегральные кривые, в достаточно малых окрестностях которых интегральными кривыми являются спирали, называются *предельными циклами*. В данном примере окружности  $\rho = 2$  и  $\rho = 4$  являются предельными циклами.

Пример 8. Найти ортогональные траектории семейства парабол  $y = ax^2$ .

*Ортогональными траекториями* заданного семейства кривых называются линии, пересекающие под прямым углом линии данного семейства. Угловые коэффициенты  $y'_1$  и  $y'_2$  касательных к кривым данного семейства и к искомым ортогональным траекториям должны в каждой точке удовлетворять условию ортогональности  $y'_2 = -\frac{1}{y'_1}$ . Для семейства парабол  $y =$

$= ax^2$  находим  $y' = 2ax$ , или так как  $a = \frac{y}{x^2}$ , то  $y' = \frac{2y}{x}$ . Следовательно, дифференциальное уравнение искомым ортогональных траекторий имеет вид  $y' = -\frac{x}{2y}$ .

Разделяя переменные, находим  $2y dy + x dx = 0$  и, интегрируя, получим семейство эллипсов

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = c^2$$

(рис. 1.9).

Пример 9. Пусть  $u = xy$  — потенциал скоростей плоскопараллельного течения жидкости. Найти уравнение линий тока.

Линии тока являются ортогональными траекториями семейства эквипотенциальных линий  $xy = c$ . Находим угловой коэффициент касательной к эквипотенциальным линиям:  $xy' + y = 0$ ,  $y' = -\frac{y}{x}$ . Следовательно, дифференциальное уравнение линий тока имеет вид  $y' = \frac{x}{y}$  или  $y dy = x dx$ ; интегрируя, получаем  $x^2 - y^2 = c$  — семейство гипербол.

Пример 10. Полый однородный металлический шар, имеющий внутренний радиус  $r_1$ , а внешний  $r_2$  находится в стационарном тепловом

состоянии, причем температура на его внутренней поверхности равна  $T_1$ , а на наружной  $T_2$ . Найти температуру  $T$  на расстоянии  $r$  от центра шара,  $r_1 \leq r \leq r_2$ .

Из соображений симметрии следует, что  $T$  является функцией только  $r$ .

Так как между двумя concentрическими сферами с центрами в центре шара (их радиусы могут изменяться от  $r_1$  до  $r_2$ ) количество тепла остается неизменным, то через каждую сферу протекает одно и то же количество тепла  $Q$ . Следовательно, дифференциальное уравнение, описывающее рассматриваемый процесс, имеет вид

$$-4\pi k r^2 \frac{dT}{dr} = Q,$$

где  $k$  — коэффициент теплопроводности. Разделяя переменные и интегрируя, получим искомую зависимость  $T$  от  $r$ :

$$4\pi k dT = -\frac{Q dr}{r^2};$$

$$4\pi k \int_{T_1}^T dT = -Q \int_{r_1}^r \frac{dr}{r^2},$$

$$4\pi k (T - T_1) = Q \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right).$$

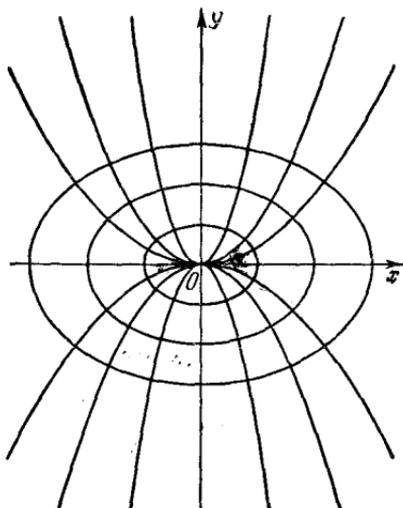


Рис. 1.9.

Для определения  $Q$  используем условие: при  $r = r_2$ ,  $T = T_2$

$$Q = \frac{4\pi k (T_2 - T_1)}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}} = \frac{4\pi k (T_2 - T_1) r_1 r_2}{r_1 - r_2}.$$

### § 3. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными

Многие дифференциальные уравнения путем замены переменных могут быть приведены к уравнениям с разделяющимися переменными. К числу таких уравнений относятся, например, уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by),$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные величины, которые заменой переменных  $z = ax + by$  преобразуются в уравнения с разделяющимися переменными. Действительно, переходя к новым переменным  $x$  и  $z$ , будем иметь

$$\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz}{dx} = a + bf(z),$$

или

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx,$$

и переменные разделились. Интегрируя, получим

$$x = \int \frac{dz}{a + bf(z)} + c.$$

Пример 1.

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y.$$

Полагая  $z = 2x + y$ , будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2, \quad \frac{dz}{dx} - 2 = z.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{dz}{z+2} = dx, \quad \ln|z+2| = x + \ln c, \quad z = -2 + ce^x, \\ 2x + y = -2 + ce^x, \quad y = ce^x - 2x - 2.$$

Пример 2.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 1.$$

Полагая  $x - y = z$ , получим

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dz}{dx}, \quad 1 - \frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} + 1; \\ \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z}, \quad z dz = -dx, \quad z^2 = -2x + c, \quad (x-y)^2 = -2x + c.$$

К уравнениям с разделяющимися переменными приводятся и так называемые *однородные дифференциальные уравнения первого порядка*, имеющие вид

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Действительно, после подстановки  $z = \frac{y}{x}$  или  $y = xz$  получим

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dz}{dx} + z, \quad x \frac{dz}{dx} + z = f(z), \quad \frac{dz}{f(z)-z} = \frac{dx}{x}, \\ \int \frac{dz}{f(z)-z} = \ln|x| + \ln c, \quad x = ce^{\int \frac{dz}{f(z)-z}}.$$

Заметим, что правая часть однородного уравнения является однородной функцией переменных  $x$  и  $y$  нулевой степени однородности, поэтому уравнение вида

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

будет однородным, если  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$  являются однородными функциями  $x$  и  $y$  одинаковой степени однородности, так как в этом случае

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Пример 3.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

Полагая  $y = xz$ ,  $\frac{dy}{dx} = x \frac{dz}{dx} + z$  и подставляя в исходное уравнение получим

$$x \frac{dz}{dx} + z = z + \operatorname{tg} z, \quad \frac{\cos z \, dz}{\sin z} = \frac{dx}{x},$$

$$\ln |\sin z| = \ln |x| + \ln c, \quad \sin z = cx, \quad \sin \frac{y}{x} = cx.$$

Пример 4.

$$(x + y) dx - (y - x) dy = 0.$$

Полагая  $y = xz$ ,  $dy = x dz + z dx$ , получим

$$(x + xz) dx - (xz - x)(x dz + z dx) = 0,$$

$$(1 + 2z - z^2) dx + x(1 - z) dz = 0,$$

$$\frac{(1 - z) dz}{1 + 2z - z^2} + \frac{dx}{x} = 0, \quad \frac{1}{2} \ln |1 + 2z - z^2| + \ln |x| =$$

$$= \frac{1}{2} \ln c, \quad x^2(1 + 2z - z^2) = c, \quad x^2 + 2xy - y^2 = c.$$

Уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \quad (1.8)$$

преобразуются в однородные уравнения путем переноса начала координат в точку пересечения  $(x_1, y_1)$  прямых

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{и} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Действительно, свободный член в уравнениях этих прямых в новых координатах  $X = x - x_1$ ,  $Y = y - y_1$  будет равен нулю, коэффициенты при текущих координатах остаются неизменными, а  $\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$ , и уравнение (1.8) преобразуется к виду

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right)$$

или

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{Y}{X}}{a_2 + b_2 \frac{Y}{X}}\right) = \varphi\left(\frac{Y}{X}\right)$$

и является уже однородным уравнением.

Этот метод нельзя применить лишь в случае параллельности прямых  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$  и  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ . Но в этом случае коэффициенты при текущих координатах пропорциональны  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$ , и уравнение (1.8) может быть записано в виде

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = F(a_1x + b_1y),$$

и следовательно, как указано на стр. 24, замена переменных  $z = a_1x + b_1y$  преобразует рассматриваемое уравнение в уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 5.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}.$$

Решая систему уравнений  $x - y + 1 = 0$ ,  $x + y - 3 = 0$ , получим  $x_1 = 1$ ,  $y_1 = 2$ . Полагая  $x = X + 1$ ,  $y = Y + 2$ , будем иметь

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y}.$$

Замена переменных  $z = \frac{Y}{X}$  или  $Y = zX$  приводит к уравнению с разделяющимися переменными

$$z + X \frac{dz}{dX} = \frac{1 - z}{1 + z}, \quad \frac{(1 + z) dz}{1 - 2z - z^2} = \frac{dX}{X},$$

$$-\frac{1}{2} \ln|1 - 2z - z^2| = \ln|X| - \frac{1}{2} \ln c,$$

$$(1 - 2z - z^2) X^2 = c, \quad X^2 - 2XY - Y^2 = c,$$

$$x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = c_1.$$

#### § 4. Линейные уравнения первого порядка

*Линейным дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение линейное относительно неизвестной функции и ее производной. Линейное уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x), \quad (1.9)$$

где  $p(x)$  и  $f(x)$  в дальнейшем будем считать непрерывными функциями  $x$  в той области, в которой требуется проинтегрировать уравнение (1.9).

Если  $f(x) \equiv 0$ , то уравнение (1.9) называется линейным однородным. В линейном однородном уравнении переменные разделяются:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$

и, интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} \ln|y| &= - \int p(x) dx + \ln c_1, \quad c_1 > 0, \\ y &= ce^{-\int p(x) dx}, \quad c \neq 0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

При делении на  $y$  мы потеряли решение  $y \equiv 0$ , однако оно может быть включено в найденное семейство решений (1.10), если считать что  $c$  может принимать и значение 0.

Для интегрирования неоднородного линейного уравнения

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \quad (1.9)$$

может быть применен так называемый *метод вариации постоянной*. При применении этого метода сначала интегрируется соответствующее (т. е. имеющее ту же левую часть) однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0,$$

общее решение которого, как указано выше, имеет вид

$$y = ce^{-\int p(x) dx}.$$

При постоянном  $c$  функция  $ce^{-\int p(x) dx}$  является решением однородного уравнения. Попробуем теперь удовлетворить неоднородному уравнению, считая  $c$  функцией  $x$ , т. е. по существу совершая замену переменных

$$y = c(x)e^{-\int p(x) dx},$$

где  $c(x)$  — новая неизвестная функция  $x$ .

Вычисляя производную

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx} e^{-\int p(x) dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x) dx}$$

и подставляя в исходное неоднородное уравнение (1.9), получим

$$\frac{dc}{dx} e^{-\int p(x) dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x) dx} + p(x)c(x)e^{-\int p(x) dx} = f(x)$$

или

$$\frac{dc}{dx} = f(x)e^{\int p(x) dx},$$

откуда, интегрируя, находим

$$c(x) = \int f(x)e^{\int p(x) dx} dx + c_1,$$

а следовательно,

$$y = c(x) e^{-\int p(x) dx} = c_1 e^{-\int p(x) dx} + e^{-\int p(x) dx} \int f(x) e^{\int p(x) dx} dx. \quad (1.11)$$

Итак, общее решение неоднородного линейного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения

$$c_1 e^{-\int p(x) dx}$$

и частного решения неоднородного уравнения

$$e^{-\int p(x) dx} \int f(x) e^{\int p(x) dx} dx,$$

получающегося из (1.11) при  $c_1 = 0$ .

Заметим, что в конкретных примерах нецелесообразно пользоваться громоздкой и трудно запоминаемой формулой (1.11), значительно легче каждый раз повторять все приведенные выше вычисления.

Пример 1.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2.$$

Интегрируем соответствующее однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \ln|y| = \ln|x| + \ln c, \quad y = cx.$$

Считаем  $c$  функцией  $x$ , тогда  $y = c(x)x$ ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx}x + c(x)$  и, подставляя в исходное уравнение, после упрощения получаем

$$\frac{dc}{dx}x = x^2 \text{ или } dc = x dx, \quad c(x) = \frac{x^2}{2} + c_1.$$

Следовательно, общее решение

$$y = c_1 x + \frac{x^3}{2}.$$

Пример 2.

$$\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x.$$

Интегрируем соответствующее однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = 0, \quad \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} dx,$$

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + \ln c, \quad y = c \sin x.$$

Варьируем постоянную

$$y = c(x) \sin x, \quad y' = c'(x) \sin x + c(x) \cos x.$$

Подставляя в исходное уравнение, получим

$$\begin{aligned} c'(x) \sin x + c(x) \cos x - c(x) \cos x &= 2x \sin x, \\ c'(x) &= 2x, \quad c(x) = x^2 + c_1, \\ y &= x^2 \sin x + c_1 \sin x. \end{aligned}$$

**Пример 3.** В электрической цепи с самоиндукцией происходит процесс установления переменного тока. Напряжение  $U$  является заданной функцией времени  $U = U(t)$ , сопротивление  $R$  и самоиндукция  $L$  постоянны, начальная сила тока  $I(0) = I_0$  задана. Найти зависимость силы тока  $I = I(t)$  от времени.

Пользуясь законом Ома для цепи с самоиндукцией, получим

$$U - L \frac{dI}{dt} = RI.$$

Решение этого линейного уравнения, удовлетворяющее начальному условию  $I(0) = I_0$ , согласно (1.11) имеет вид

$$I = e^{-\frac{R}{L}t} \left[ I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t U(t) e^{\frac{R}{L}t} dt \right]. \quad (1.12)$$

При постоянном напряжении  $U = U_0$  получим

$$I = \frac{U_0}{R} + \left( I_0 - \frac{U_0}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Интересен случай синусоидального переменного напряжения  $U = A \sin \omega t$ . При этом согласно (1.12) получим

$$I = e^{-\frac{R}{L}t} \left( I_0 + \frac{A}{L} \int_0^t e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt \right)$$

Стоящий в правой части интеграл легко вычисляется.

Многие дифференциальные уравнения путем замены переменных могут быть сведены к линейным. Например, уравнение Бернулли, имеющее вид

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n, \quad n \neq 1,$$

или

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = f(x), \quad (1.13)$$

заменой переменных  $y^{1-n} = z$  сводится к линейному уравнению. Действительно, дифференцируя  $y^{1-n} = z$ , находим  $(1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$  и, подставляя в (1.13), получим линейное уравнение

$$\frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + p(x)z = f(x).$$

Пример 4.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}, \\ 2y \frac{dy}{dx} &= \frac{y^2}{x} + x^2, \quad y^2 = z, \quad 2y \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}, \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{z}{x} + x^2 \end{aligned}$$

и далее, как в примере 1 стр. 29.

Уравнение

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y + q(x)y^2 = f(x),$$

называемое *уравнением Риккати*, в общем виде не интегрируется в квадратурах, но может быть заменой переменных преобразовано в уравнение Бернулли, если известно одно частное решение  $y_1(x)$  этого уравнения. Действительно, полагая  $y = y_1 + z$ , получим

$$y_1' + z' + p(x)(y_1 + z) + q(x)(y_1 + z)^2 = f(x)$$

или, так как  $y_1' + p(x)y_1 + q(x)y_1^2 \equiv f(x)$ , будем иметь уравнение Бернулли

$$z' + [p(x) + 2q(x)y_1]z + q(x)z^2 = 0.$$

Пример 5.

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{2}{x^2}.$$

В этом примере нетрудно подобрать частное решение  $y_1 = \frac{1}{x}$ . Полагая  $y = z + \frac{1}{x}$ , получим  $y' = z' - \frac{1}{x^2}$ ,  $z' - \frac{1}{x^2} = \left(z + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{2}{x^2}$ , или  $z' = z^2 + 2\frac{z}{x} - \frac{2}{x^2}$  — уравнение Бернулли.

$$\frac{z'}{z^2} = \frac{2}{xz} + 1, \quad u = \frac{1}{z}, \quad \frac{du}{dx} = -\frac{z'}{z^2},$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{2u}{x} - 1, \quad \frac{du}{u} = -\frac{2dx}{x},$$

$$\ln|u| = -2 \ln|x| + \ln c, \quad u = \frac{c}{x^2}, \quad u = \frac{c(x)}{x},$$

$$\frac{c'(x)}{x^2} = -1, \quad c(x) = -\frac{x^3}{3} + c_1$$

$$u = \frac{c_1}{x^2} - \frac{x}{3}, \quad \frac{1}{z} = \frac{c_1}{x^2} - \frac{x}{3}, \quad \frac{1}{y - \frac{1}{x}} = \frac{c_1}{x^2} - \frac{x}{3},$$

$$y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{c_2 - x^3}.$$

### § 5. Уравнения в полных дифференциалах

Может случиться, что левая часть дифференциального уравнения

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (1.14)$$

является полным дифференциалом некоторой функции  $u(x, y)$ :

$$du(x, y) = M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

и, следовательно, уравнение (1.14) принимает вид

$$du(x, y) = 0.$$

Если функция  $u(x)$  является решением уравнения (1.14), то

$$du(x, y(x)) \equiv 0,$$

и, следовательно,

$$u(x, y(x)) = c, \quad (1.15)$$

где  $c$  — постоянная, и наоборот, если некоторая функция  $u(x)$  обращает в тождество конечное уравнение (1.15), то, дифференцируя полученное тождество, получим  $du(x, y(x)) = 0$ , и следовательно,  $u(x, y) = c$ , где  $c$  произвольная постоянная, является общим интегралом исходного уравнения.

Если даны начальные значения  $u(x_0) = u_0$ , то постоянная  $c$  определяется из (1.15)  $c = u(x_0, y_0)$  и

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) \quad (1.15_1)$$

является искомым частным интегралом. Если  $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \neq 0$  в точке  $(x_0, y_0)$ , то уравнение (1.15<sub>1</sub>) определяет  $u$  как неявную функцию  $x$ .

Для того чтобы левая часть уравнения (1.14)

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

являлась полным дифференциалом некоторой функции  $u(x, y)$ , как известно, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \quad (1.16)$$

Если это условие, впервые указанное Эйлером, выполнено, то уравнение (1.14) легко интегрируется. Действительно,

$$du = M dx + N dy.$$

С другой стороны,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y),$$

откуда

$$u(x, y) = \int M(x, y) dx + c(y).$$

При вычислении интеграла  $\int M(x, y) dx$  величина  $y$  рассматривается как постоянная, поэтому  $c(y)$  является произвольной функцией  $y$ .

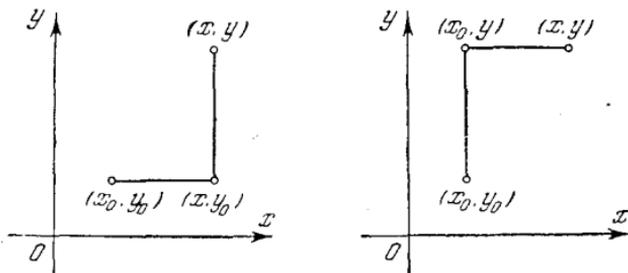


Рис. 1.10.

Для определения функции  $c(y)$  дифференцируем найденную функцию  $u(x, y)$  по  $y$  и, так как  $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \int M(x, y) dx \right) + c'(y) = N(x, y).$$

Из этого уравнения определяем  $c'(y)$  и, интегрируя, находим  $c(y)$ .

Как известно из курса математического анализа, еще проще можно определить функцию  $u(x, y)$  по ее полному дифференциалу  $du = M(x, y) dx + N(x, y) dy$ , взяв криволинейный интеграл от  $M(x, y) dx + N(x, y) dy$  между некоторой фиксированной точкой  $(x_0, y_0)$  и точкой с переменными координатами  $(x, y)$  по любому пути:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M(x, y) dx + N(x, y) dy.$$

Чаще всего в качестве пути интегрирования удобно брать ломаную, составленную из двух звеньев, параллельных осям координат (рис. 1.10); в этом случае

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M dx + N dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} M dx + \int_{(x, y_0)}^{(x, y)} N dy$$

или

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M dx + N dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_0, y)} N dy + \int_{(x_0, y)}^{(x, y)} M dx.$$

Пример 1.

$$(x + y + 1) dx + (x - y^2 + 3) dy = 0.$$

Левая часть уравнения является полным дифференциалом некоторой функции  $u(x, y)$ , так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x + y + 1)}{\partial y} &= \frac{\partial(x - y^2 + 3)}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= x + y + 1, \quad u = \frac{x^2}{2} + xy + x + c(y), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= x + c'(y), \quad x + c'(y) = x - y^2 + 3, \\ c'(y) &= -y^2 + 3, \quad c(y) = -\frac{y^3}{3} + 3y + c_1, \\ u &= \frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y + c_1. \end{aligned}$$

Следовательно, общий интеграл имеет вид

$$3x^2 + 6xy + 6x - 2y^3 + 18y = c_2. \quad (1.17)$$

Можно применить и другой метод определения функции  $u(x, y)$ :

$$u(x, y) = \int_{(x_1, y_0)}^{(x, y)} (x + y + 1) dx + (x - y^2 + 3) dy.$$

За начальную точку  $(x_0, y_0)$  выбираем, например, начало координат, в качестве пути интегрирования — изображенную на рис. 1.11 ломаную. Тогда

$$u(x, y) = \int_{(0, 0)}^{(x, 0)} (x + 1) dx + \int_{(x, 0)}^{(x, y)} (x - y^2 + 3) dy = \frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y$$

и общий интеграл имеет вид

$$\frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y = c$$

или как в (1.17).

В некоторых случаях, когда левая часть уравнения

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (1.14)$$

не является полным дифференциалом, легко удается подобрать функцию  $\mu(x, y)$ , после умножения на которую левая часть уравнения (1.14) превращается в полный дифференциал

$$du = \mu M dx + \mu N dy.$$

Такая функция  $\mu$  называется *интегрирующим множителем*. Запомним, что умножение на интегрирующий множитель  $\mu(x, y)$  может привести к появлению лишних частных решений, обращающих этот множитель в нуль.

Пример 2.

$$x dx + y dy + (x^2 + y^2) x^2 dx = 0.$$

Очевидно, что после умножения на множитель  $\mu = \frac{1}{x^2 + y^2}$  левая часть превращается в полный дифференциал. Действительно, после умножения на  $\mu = \frac{1}{x^2 + y^2}$  получим

$$\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + x^2 dx = 0$$

или, интегрируя,  $\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \frac{x^3}{3} = \ln c_1$ . Умножая на 2 и потенцируя, будем иметь

$$(x^2 + y^2) e^{\frac{2}{3} x^3} = c.$$

Конечно, далеко не всегда интегрирующий множитель подбирается столь легко. В общем случае для нахождения интегрирующего множителя надо подобрать хотя бы одно не равное тождественно нулю частное решение уравнения в частных производных

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x},$$

или в развернутом виде

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \frac{\partial N}{\partial x} \mu,$$

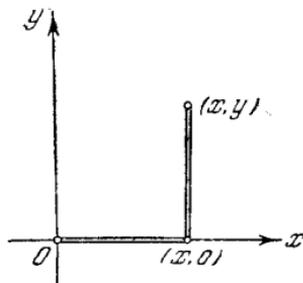


Рис. 1.11.

которое после деления на  $\mu$  и переноса некоторых членов в другую часть равенства приводится к виду

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} M - \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \quad (1.18)$$

В общем случае интегрирование этого уравнения в частных производных является задачей отнюдь не более простой, чем интегрирование исходного уравнения, однако в некоторых случаях подбор частного решения уравнения (1.18) не представляет затруднений.

Кроме того, считая, что интегрирующий множитель является функцией только одного аргумента (например, является функцией только  $x + y$  или только  $x^2 + y^2$ , или функцией только  $x$ , или только  $y$  и т. д.), можно уже без труда проинтегрировать уравнение (1.18) и

указать условия, при которых интегрирующий множитель рассматриваемого вида существует. Тем самым выделяются классы уравнений, для которых интегрирующий множитель легко может быть найден.

Например, найдем условия, при которых уравнение  $M dx + N dy = 0$  имеет интегрирующий множитель, зависящий только от  $x$ ,  $\mu = \mu(x)$ . При этом уравнение (1.18) упрощается и приобретает вид

$$-\frac{d \ln \mu}{dx} N = \frac{\partial N}{dx} - \frac{\partial M}{\partial y},$$

откуда, считая  $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$  непрерывной функцией  $x$ , получим

$$\begin{aligned} \ln \mu &= \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx + \ln c, \\ \mu &= ce^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Можно считать  $c = 1$ , так как достаточно иметь лишь один интегрирующий множитель.

Если  $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$  является функцией только  $x$ , то интегрирующий множитель, зависящий лишь от  $x$ , существует и равен (1.19), в противном случае интегрирующего множителя вида  $\mu(x)$  не существует.

Условие существования интегрирующего множителя, зависящего только от  $x$ , выполнено например, для линейного уравнения

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \text{ или } [p(x)y - f(x)] dx + dy = 0.$$

Действительно,  $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = p(x)$  и, следовательно,  $\mu = e^{\int p(x) dx}$ .

Совершенно аналогично могут быть найдены условия существования интегрирующих множителей вида

$$\mu(y), \quad \mu(x \pm y), \quad \mu(x^2 \pm y^2), \quad \mu(x \cdot y), \quad \mu\left(\frac{y}{x}\right) \text{ и т. д.}$$

Пример 3. Имеет ли уравнение

$$x dx + y dy + x dy - y dx = 0 \tag{1.20}$$

интегрирующий множитель вида  $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ ?

Обозначим  $x^2 + y^2 = z$ . Уравнение (1.18) при  $\mu = \mu(x^2 + y^2) = \mu(z)$  принимает вид

$$2(My - Nx) \frac{d \ln \mu}{dz} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y},$$

откуда

$$\ln |\mu| = \frac{1}{2} \int \varphi(z) dz + \ln c$$

или

$$\mu = ce^{\frac{1}{2} \int \varphi(z) dz}, \quad (1.21)$$

где

$$\varphi(z) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{My - Nx}.$$

Для существования интегрирующего множителя заданного вида необходимо и в предположении непрерывности  $\varphi(z)$  достаточно, чтобы  $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{My - Nx}$  была функцией только  $x^2 + y^2$ . В данном случае

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{My - Nx} = -\frac{2}{x^2 + y^2},$$

следовательно, интегрирующий множитель  $\mu = \mu(x^2 + y^2)$  существует и равен (1.21). При  $c = 1$  получим

$$\mu = e^{-\int \frac{dz}{z}} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Умножая уравнение (1.20) на  $\mu = \frac{1}{x^2 + y^2}$ , приведем его к виду

$$\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0$$

или

$$\frac{\frac{1}{2} d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} + \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = 0,$$

$$\frac{1}{2} d \ln(x^2 + y^2) + d \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0.$$

Интегрируя, получим

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = -\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln c,$$

и после потенцирования будем иметь

$$\sqrt{x^2 + y^2} = ce^{-\operatorname{arctg} \frac{y}{x}},$$

или в полярных координатах  $\rho = ce^{-\varphi}$  — семейство логарифмических спиралей.

**Пример 4.** Найти форму зеркала, отражающего параллельно данному направлению все лучи, выходящие из заданной точки.

Поместим начало координат в заданную точку и направим ось абсцисс параллельно заданному в условиях задачи направлению. Пусть луч падает на зеркало в точке  $M(x, y)$ . Рассмотрим изображенное на рис. 1.12 сечение зеркала плоскостью  $Oxy$ , проходящее через ось абсцисс и точку  $M$ . Проведем касательную  $MN$  к рассматриваемому сечению поверхности зеркала в точке  $M(x, y)$ . Так как угол падения луча равен углу отражения, то треугольник  $MNO$  равнобедренный. Следовательно,

$$\operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Полученное однородное уравнение легко интегрируется заменой переменных

$$\frac{x}{y} = z,$$

но еще проще, освободившись от иррациональности в знаменателе, переписать его в виде

$$x dx + y dy = \sqrt{x^2 + y^2} dx.$$

Уравнение имеет очевидный интегрирующий множитель

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = dx, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = x + c, \quad y^2 = 2cx + c^2$$

(семейство парабол).

**Замечание.** Эта задача еще проще решается в координатах  $x$  и  $\rho$ , где  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , при этом уравнение сечения искомым поверхностям приобретает вид

$$dx = d\rho, \quad \rho = x + c.$$

Можно доказать существование интегрирующего множителя, или, что то же самое, существование ненулевого решения уравнения в частных производных (1.18) (см. стр. 35) в некоторой области, если функции  $M$  и  $N$  имеют непрерывные производные и по крайней мере одна из этих функций не обращается в нуль. Следовательно, метод интегрирующего множителя можно рассматривать как общий метод интегрирования уравнений вида

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0,$$

однако ввиду трудности нахождения интегрирующего множителя этот метод чаще всего применяется лишь в тех случаях, когда интегрирующий множитель очевиден.

## § 6. Теоремы существования и единственности решения

$$\text{уравнения } \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Класс интегрирующихся в квадратурах дифференциальных уравнений весьма узок, поэтому уже со времени Эйлера приближенные методы в теории дифференциальных уравнений приобрели большое значение.

В настоящее время в связи с быстрым развитием вычислительной техники приближенные методы приобретают еще несравненно большее значение.

Теперь часто целесообразно применять приближенные методы даже в тех случаях, когда уравнение интегрируется в квадратурах. Более того, если даже решение может быть несложно выражено в элементарных функциях, то нередко использование таблиц этих функций оказывается более трудоемким, чем приближенное интегрирование уравнения на быстродействующей машине. Однако, для того чтобы применять тот или иной метод приближенного интегрирования дифференциального уравнения, надо прежде всего быть уверенным в существовании искомого решения, а также и в единственности решения, так как при отсутствии единственности остается неясным, какое именно решение требуется приближенно определить.

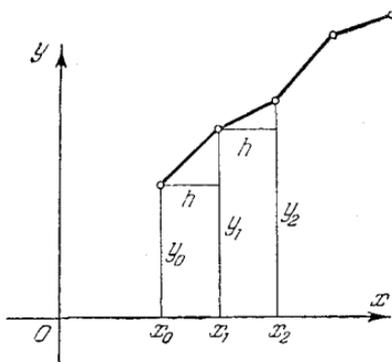


Рис. 1.13.

Чаще всего доказательство теорем существования решения одновременно дает и метод точного или приближенного нахождения решения, что еще более увеличивает значение теорем существования. Например, доказываемая ниже теорема 1.1 дает обоснование *метода Эйлера* приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, который заключается в том, что искомая интегральная кривая дифференциального уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ , проходящая через точку  $(x_0, y_0)$ , заменяется ломаной, состоящей из прямолинейных отрезков (рис. 1.13), каждое звено которой касается интегральной кривой в одной из своих граничных точек. При применении этого метода для приближенного вычисления значения искомого решения  $y(x)$  в точке  $x = b$ , отрезок  $x_0 \leq x \leq b$  (если  $b > x_0$ ) делится на  $n$  равных частей точками  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ , где  $x_n = b$ . Длина каждой части  $x_{i+1} - x_i = h$  называется *шагом вычисления*. Приближенные значения искомого решения в точках  $x_i$  обозначаем  $y_i$ .

Для вычисления  $y_1$  заменяем на отрезке  $x_0 \leq x \leq x_1$  искомую интегральную кривую отрезком ее касательной в точке  $(x_0, y_0)$ . Следовательно,  $y_1 = y_0 + hy'_0$ , где  $y'_0 = f(x_0, y_0)$  (см. рис. 1.13).

Аналогично вычисляем:

$$y_2 = y_1 + hy'_1, \text{ где } y'_1 = f(x_1, y_1);$$

$$y_3 = y_2 + hy'_2, \text{ где } y'_2 = f(x_2, y_2);$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_n = y_{n-1} + hy'_{n-1}, \text{ где } y'_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Если  $b < x_0$ , то схема вычислений остается прежней, но шаг  $h$  отрицателен.

Естественно ожидать, что при  $h \rightarrow 0$  ломаные Эйлера приближаются к графику искомой интегральной кривой, и следовательно, с уменьшением шага  $h$  метод Эйлера дает все более и более точное значение искомого решения в точке  $b$ . Доказательство этого утверждения одновременно приведет нас к следующей фундаментальной теореме о существовании и единственности решения уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  с начальным условием  $y(x_0) = y_0$  при весьма общих достаточных условиях, наложенных на функцию  $f(x, y)$ .

**Теорема 1.1 (о существовании и единственности решения).**  
Если в уравнении

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.22}$$

функция  $f(x, y)$  непрерывна в прямоугольнике  $D$ :

$$x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \quad y_0 - b \leq y \leq y_0 + b,$$

и удовлетворяет в  $D$  условию Липшица:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N |y_1 - y_2|,$$

где  $N$  — постоянная, то существует единственное решение  $y = \bar{y}(x)$ ,  $x_0 - H \leq x \leq x_0 + H$ , уравнения (1.22), удовлетворяющее условию  $y(x_0) = y_0$ , где

$$H < \min \left( a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N} \right),$$

$$M = \max f(x, y) \text{ в } D.$$

Условия теоремы нуждаются в некоторых пояснениях. Нельзя утверждать, что искомое решение  $y = \bar{y}(x)$  уравнения (1.22), удовлетворяющее условию  $y(x_0) = y_0$ , будет существовать при  $x_0 - a \leq x \leq x_0 + a$ , так как интегральная кривая  $y = \bar{y}(x)$  может выйти

из прямоугольника  $D$  через его верхнюю или нижнюю стороны  $y = y_0 \pm b$  (рис. 1.14) при некотором значении  $x = x_1$ ,  $x_0 - a < x_1 < x_0 + a$ , и тогда, если  $x_1 > x_0$ , при  $x > x_1$  решение уже может быть не определено (если  $x_1 < x_0$ , то решение может быть не определено при  $x < x_1$ ). Можно гарантировать, что интегральная кривая  $y = \bar{y}(x)$  не выйдет за пределы области  $D$  при  $x$ , изменяющемся на

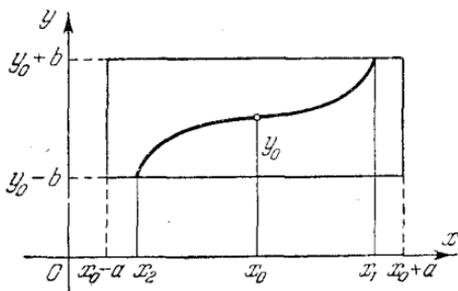


Рис. 1.14.

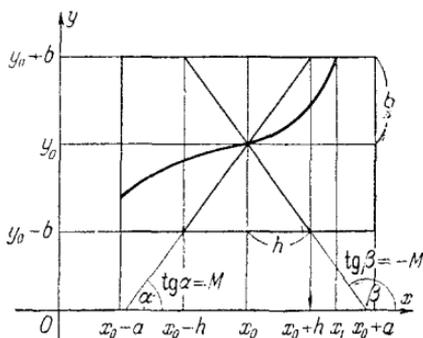


Рис. 1.15.

отрезке  $x_0 - H \leq x \leq x_0 + H$ , где  $H$  — наименьшее из двух чисел  $a$ ,  $\frac{b}{M}$  (рис. 1.15), так как угловой коэффициент касательной к искомой интегральной кривой заключен между угловыми коэффициентами  $M$  и  $-M$  прямых, изображенных на рис. 1.15. Если эти прямые, между которыми заключена искомая интегральная кривая, выходят за пределы прямоугольника  $D$  через его горизонтальные стороны  $y = y_0 \pm b$ , то абсциссы точек пересечения этих сторон будут  $x_0 \pm \frac{b}{M}$ , следовательно, абсцисса точки выхода интегральной кривой из прямоугольника  $D$  может быть лишь меньше или равна  $x_0 + \frac{b}{M}$  и больше или равна  $x_0 - \frac{b}{M}$ .

Можно доказать существование искомого решения на отрезке  $x_0 - H \leq x \leq x_0 + H$ , где  $H = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ , однако проще вначале доказать существование решения на отрезке  $x_0 - H \leq x \leq x_0 + H$ , где  $H < \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}\right)$ , а в дальнейшем будут указаны условия, при выполнении которых решение может быть продолжено.

Условие Липшица

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N |y_1 - y_2|$$

может быть заменено несколько более грубым, но зато обычно легко проверяемым условием существования ограниченной по модулю частной производной  $f'_y(x, y)$  в области  $D$ .

Действительно, если в прямоугольнике  $D$

$$|f'_y(x, y)| \leq N,$$

то, пользуясь теоремой о конечном приращении, получим

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = f'_y(x, \xi) |y_1 - y_2|,$$

где  $\xi$  — промежуточное между  $y_1$  и  $y_2$  значение. Следовательно, точка  $(x, \xi)$  лежит в  $D$ , поэтому

$$|f'_y(x, \xi)| \leq N \quad \text{и} \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N |y_1 - y_2|.$$

Нетрудно привести примеры функций  $f(x, y)$  (например,  $f(x, y) = |y|$  в окрестности точек  $(x, 0)$ ), для которых условие Липшица выполнено, но производная  $\frac{\partial f}{\partial y}$  в некоторых точках не существует, следовательно, условие  $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq N$  является более грубым, чем условие Липшица.

Доказательство теоремы существования и единственности. Заменяем дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.22}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.23}$$

эквивалентным интегральным уравнением

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx. \tag{1.24}$$

Действительно, если некоторая функция  $y = \bar{y}(x)$  при подстановке обращает в тождество уравнение (1.22) и удовлетворяет условию (1.23), то, интегрируя тождество (1.22) и принимая во внимание условие (1.23), получим, что  $y = \bar{y}(x)$  обращает в тождество и уравнение (1.24). Если же некоторая функция  $y = \underline{y}(x)$  при подстановке обращает уравнение (1.24) в тождество, то она, очевидно, удовлетворяет и условию (1.23), а дифференцируя тождество (1.24), получим, что  $y = \underline{y}(x)$  обращает в тождество и уравнение (1.22).

Строим ломаную Эйлера  $y = y_n(x)$ , исходящую из точки  $(x_0, y_0)$  с шагом  $h_n = \frac{H}{n}$  на отрезке  $x_0 \leq x \leq x_0 + H$ ,  $n$  — целое положи-

тельное число (совершенно аналогично доказываемое существование решения на отрезке  $x_0 - H \leq x \leq x_0$ ). Ломаная Эйлера, проходящая через точку  $(x_0, y_0)$ , не может выйти из области  $D$  при  $x_0 \leq x \leq x_0 + H$  (или  $x_0 - H \leq x \leq x_0$ ), так как угловые коэффициенты каждого звена ломаной по модулю меньше  $M$ .

Дальнейшее доказательство теоремы разобьем на три этапа:

1) *Последовательность  $y = y_n(x)$  равномерно сходится.*

2) *Функция  $\bar{y}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$  является решением интегрального уравнения (1.24).*

3) *Решение  $\bar{y}(x)$  уравнения (1.24) единственно.*

Доказательство 1). По определению ломаной Эйлера

$$y'_n(x) = f(x_k, y_k) \text{ при } x_k \leq x \leq x_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

(в угловой точке  $x_k$  взята правая производная), или

$$y'_n(x) = f(x, y_n(x)) + [f(x_k, y_k) - f(x, y_n(x))] \quad (1.25)$$

обозначим

$$f(x_k, y_k) - f(x, y_n(x)) = \eta_n(x).$$

В силу равномерной непрерывности функции  $f(x, y)$  в  $D$  получим

$$|\eta_n(x)| = |f(x_k, y_k) - f(x, y_n(x))| < \varepsilon_n \quad (1.26)$$

при  $n > N(\varepsilon_n)$ , где  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , так как  $|x - x_k| \leq h_n$ , а  $|y_k - y_n(x)| < Mh_n$  и  $h_n = \frac{H}{n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Интегрируя (1.25) по  $x$  в пределах от  $x_0$  до  $x$  и учитывая, что  $y_n(x_0) = y_0$ , получим

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt + \int_{x_0}^x \eta_n(t) dt. \quad (1.27)$$

Здесь  $n$  может принимать любое целое положительное значение, следовательно, при целом  $m > 0$

$$y_{n+m}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n+m}(t)) dt + \int_{x_0}^x \eta_{n+m}(t) dt. \quad (1.28)$$

Вычитая из (1.28) почленно (1.27) и взяв модуль разности, получим

$$\begin{aligned}
 |y_{n+m}(x) - y_n(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [f(t, y_{n+m}(t)) - f(t, y_n(t))] dt + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{x_0}^x \eta_{n+m}(t) dt - \int_{x_0}^x \eta_n(t) dt \right| \leq \\
 &\leq \int_{x_0}^x |f(t, y_{n+m}(t)) - f(t, y_n(t))| dt + \\
 &\quad + \int_{x_0}^x |\eta_{n+m}(t)| dt + \int_{x_0}^x |\eta_n(t)| dt
 \end{aligned}$$

при  $x_0 \leq x \leq x_0 + H$  или, принимая во внимание (1.26) и условие Липшица:

$$|y_{n+m}(x) - y_n(x)| \leq N \int_{x_0}^x |y_{n+m}(t) - y_n(t)| dt + (\varepsilon_{n+m} + \varepsilon_n) \cdot H.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |y_{n+m}(x) - y_n(x)| &\leq \\
 &\leq N \max_{x_0} \int_{x_0}^x |y_{n+m}(t) - y_n(t)| dt + (\varepsilon_{n+m} + \varepsilon_n) H,
 \end{aligned}$$

откуда

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |y_{n+m}(x) - y_n(x)| \leq \frac{(\varepsilon_{n+m} + \varepsilon_n) H}{1 - NH} < \varepsilon$$

для любого  $\varepsilon > 0$  при достаточно большом  $n > N_1(\varepsilon)$ .

Итак,

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |y_{n+m}(x) - y_n(x)| < \varepsilon$$

при  $n > N_1(\varepsilon)$ , т. е. последовательность непрерывных функций  $y_n(x)$  равномерно сходится при  $x_0 \leq x \leq x_0 + H$ :

$$y_n(x) \Rightarrow \bar{y}(x),$$

где  $\bar{y}(x)$  — непрерывная функция.

Доказательство 2). Перейдем в уравнении (1.27) к пределу при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(x, y_n(x)) dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x \eta_n(x) dx$$

или

$$\bar{y}(x) = y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(x, y_n(x)) dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x \eta_n(x) dx. \quad (1.29)$$

В силу равномерной сходимости  $y_n(x)$  к  $\bar{y}(x)$  и равномерной непрерывности функции  $f(x, y)$  в  $D$  последовательность  $f(x, y_n(x)) \rightrightarrows f(x, \bar{y}(x))$ .

Действительно,

$$|f(x, \bar{y}(x)) - f(x, y_n(x))| < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon > 0$ , если  $|\bar{y}(x) - y_n(x)| < \delta(\varepsilon)$ , но  $|\bar{y}(x) - y_n(x)| < \delta(\varepsilon)$ , если  $n > N_1(\delta(\varepsilon))$  для всех  $x$  из отрезка  $x_0 \leq x \leq x_0 + H$ .

Итак,  $|f(x, \bar{y}(x)) - f(x, y_n(x))| < \varepsilon$  при  $n > N_1(\delta(\varepsilon))$ , где  $N_1$  не зависит от  $x$ .

В силу равномерной сходимости последовательности  $f(x, y_n(x))$  к  $f(x, \bar{y}(x))$  в (1.29) возможен переход к пределу под знаком интеграла. Принимая, кроме того, во внимание, что  $|\eta_n(\varepsilon)| < \varepsilon_n$ , где  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , окончательно в (1.29) получим

$$\bar{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \bar{y}(x)) dx.$$

Итак,  $\bar{y}(x)$  удовлетворяет уравнению (1.24).

Доказательство 3). Допустим существование двух несовпадающих решений  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  уравнения (24), следовательно,

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| \neq 0.$$

Вычитая почленно из тождества

$$y_1(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1(x)) dx$$

тождество

$$y_2(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_2(x)) dx,$$

получим

$$y_1(x) - y_2(x) \equiv \int_{x_0}^x [f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))] dx.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \max_{x_0 \leq x \leq x_0+H} |y_1(x) - y_2(x)| &= \\ &= \max_{x_0 \leq x \leq x_0+H} \left| \int_{x_0}^x [f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))] dx \right| \leq \\ &\leq \max_{x_0 \leq x \leq x_0+H} \left| \int_{x_0}^x |f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))| dx \right|. \end{aligned}$$

Пользуясь условием Липшица, будем иметь

$$\begin{aligned} \max_{x_0 \leq x \leq x_0+H} |y_1(x) - y_2(x)| &\leq N \max_{x_0 \leq x \leq x_0+H} \left| \int_{x_0}^x |y_1(x) - y_2(x)| dx \right| \leq \\ &\leq N \max_{x_0 \leq x \leq x_0+H} |y_1(x) - y_2(x)| \max_{x_0 \leq x \leq x_0+H} \left| \int_{x_0}^x dx \right| = \\ &= NH \max_{x_0 \leq x \leq x_0+H} |y_1(x) - y_2(x)|. \end{aligned}$$

Полученное неравенство

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_0+H} |y_1(x) - y_2(x)| \leq NH \max_{x_0 \leq x \leq x_0+H} |y_1(x) - y_2(x)| \quad (1.30)$$

противоречиво, если  $\max_{x_0 \leq x \leq x_0+H} |y_1(x) - y_2(x)| \neq 0$ , так как по условию теоремы  $N < \frac{1}{H}$ , а из (1.30) следует, что  $NH = 1$ .

Противоречие снимается лишь при

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_0+H} |y_1(x) - y_2(x)| = 0,$$

т. е. если  $y_1(x) \equiv y_2(x)$  при  $x_0 \leq x \leq x_0 + H$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Существование решения уравнения (1.22) можно было бы доказать иным методом лишь в предположении непрерывности функций  $f(x, y)$  (без условия Липшица), однако одной непрерывности функции  $f(x, y)$  недостаточно для доказательства единственности решения.

**З а м е ч а н и е 2.** Существование и единственность решения  $y = y(x)$  доказаны лишь на отрезке  $x_0 - H \leq x \leq x_0 + H$ , однако, взяв точку  $(x_0 + H, y(x_0 + H))$  за начальную, можно, повторив рассуждение, продолжить решение еще на отрезок длины  $H_1$ , если, конечно, в окрестности новой начальной точки выполнены условия теоремы существования и единственности решения. Продолжая этот процесс

в некоторых случаях, можно продолжить решение на всю полуось  $x \geq x_0$  или даже на всю ось  $-\infty < x < \infty$ , если продолжить решения и в сторону меньших значений  $x$ . Однако возможны и другие случаи, даже если функция  $f(x, y)$  определена для любых значений  $x$  и  $y$ .

Возможно, что интегральная кривая становится непродолжаемой ввиду приближения к точке, в которой нарушены условия теоремы

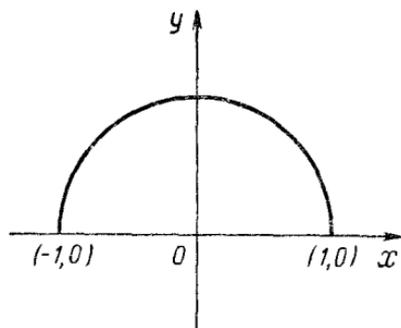


Рис. 1.16.

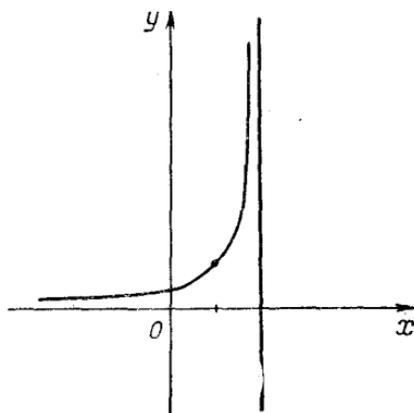


Рис. 1.17.

существования и единственности решения или интегральная кривая приближается к асимптоте, параллельной оси  $Oy$ .

Эти возможности иллюстрируются следующими примерами:

1)  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ ,  $y(0) = 1$ . Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$x^2 + y^2 = c^2, \quad y = \pm \sqrt{c^2 - x^2}, \quad c = 1, \quad y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Решение непродолжаемо за пределы интервала  $-1 < x < 1$ . В граничных точках  $(-1, 0)$  и  $(1, 0)$  правая часть уравнения  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$  разрывна. Условия теоремы существования решения нарушены (рис. 1.16).

2)  $\frac{dy}{dx} = y^2$ ,  $y(1) = 1$ . Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$y = -\frac{1}{x - c}, \quad c = 2, \quad y = -\frac{1}{x - 2},$$

и интегральная кривая продолжаема лишь до асимптоты  $x = 2$  ( $-\infty < x < 2$ ) (рис. 1.17).

В настоящее время теоремы существования и единственности решений не только дифференциальных уравнений, но и уравнений иных типов очень часто доказывают методом неподвижных точек.



Применяя теперь  $m - 1$  раз правило треугольника и используя неравенства (1.31), получим

$$\begin{aligned} \rho(y_n, y_{n+m}) &\leq \rho(y_n, y_{n+1}) + \rho(y_{n+1}, y_{n+2}) + \dots \\ &\dots + \rho(y_{n+m-1}, y_{n+m}) \leq [\alpha^n + \alpha^{n+1} + \dots + \alpha^{n+m-1}] \rho(y_1, y_0) = \\ &= \frac{\alpha^n - \alpha^{n+m}}{1 - \alpha} \rho(y_1, y_0) < \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(y_1, y_0) < \varepsilon \end{aligned}$$

при достаточно большом  $n$ . Следовательно, последовательность  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  фундаментальна и, в силу полноты пространства  $M$ , сходится к некоторому элементу того же пространства:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \bar{y}, \quad \bar{y} \in M.$$

Докажем теперь, что  $\bar{y}$  является неподвижной точкой. Пусть  $A[\bar{y}] = \bar{y}$ . Применяя два раза правило треугольника, получим

$$\rho(\bar{y}, \bar{y}) \leq \rho(\bar{y}, y_n) + \rho(y_n, y_{n+1}) + \rho(y_{n+1}, \bar{y}).$$

Для любого  $\varepsilon > 0$  можно выбрать  $N(\varepsilon)$  такое, что при  $n \geq N(\varepsilon)$

$$1) \rho(\bar{y}, y_n) < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ так как } \bar{y} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

2)  $\rho(y_n, y_{n+1}) < \frac{\varepsilon}{3}$ , так как последовательность  $y_n$  фундаментальна;

3)  $\rho(y_{n+1}, \bar{y}) = \rho(A[y_n], A[\bar{y}]) \leq \alpha \rho(y_n, \bar{y}) < \frac{\varepsilon}{3}$ , откуда  $\rho(\bar{y}, \bar{y}) < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  можно выбрать сколь угодно малым. Следовательно,

$$\rho(\bar{y}, \bar{y}) = 0 \text{ и } \bar{y} = \bar{y}, \quad A[\bar{y}] = \bar{y}.$$

Остается доказать, что неподвижная точка  $\bar{y}$  единственна. Если бы существовала еще одна неподвижная точка  $\bar{z}$ , то  $\rho(A[\bar{y}], A[\bar{z}]) = \rho(\bar{y}, \bar{z})$ , что противоречит условию 2) теоремы.

Применим принцип сжатых отображений к доказательству теоремы существования и единственности решения  $y(x)$  ( $x_0 - h_0 \leq x \leq x_0 + h_0$ ) дифференциального уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ , удовлетворяющего условию  $y(x_0) = y_0$ , в предположении, что в области  $D$

$$x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \quad y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$$

функция  $f$  непрерывна и, следовательно, ограничена  $|f| \leq M$  и удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq N |y - z|.$$

Число  $h_0 \leq \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$  и будет точнее выбрано ниже.

Рассмотрим полное метрическое пространство  $C$ , точками которого являются всевозможные непрерывные функции  $y(x)$ , определенные на отрезке  $x_0 - h_0 \leq x \leq x_0 + h_0$ , графики которых лежат в области  $D$ , а расстояние определяется равенством

$$\rho(y, z) = \max |y - z|,$$

где максимум берется при  $x$ , изменяющемся на отрезке

$$x_0 - h_0 \leq x \leq x_0 + h_0.$$

Это пространство часто рассматривается в различных вопросах математического анализа и носит название *пространства равномерной сходимости*, так как сходимость в смысле метрики этого пространства означает равномерную сходимость.

Заменим дифференциальное уравнение  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  с начальным условием  $y(x_0) = y_0$  эквивалентным интегральным уравнением

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx. \quad (1.24)$$

Рассмотрим оператор

$$A[y] = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx,$$

ставящий в соответствие каждой непрерывной функции  $y(x)$ , заданной на отрезке  $x_0 - h_0 \leq x \leq x_0 + h_0$  и не выходящей из области  $D$ , непрерывную функцию  $A[y]$ , определенную на том же отрезке, график которой также не выходит из области  $D$ , так как

$\left| \int_{x_0}^x f(x, y) dx \right| \leq Mh_0 \leq b$ . Оператор  $A[y]$ , следовательно, удовлетворяет условию 1) принципа сжатых отображений.

Уравнение (1.24) при этом запишется в виде  $y = A[y]$ , и следовательно, для доказательства теоремы существования и единственности остается доказать существование в пространстве  $C$  единственной неподвижной точки  $\bar{y}(x)$  оператора  $A$ , так как в этом случае  $\bar{y} = A[\bar{y}]$  и уравнение (1.24) удовлетворяется.

Для доказательства теоремы остается проверить, удовлетворяет ли оператор  $A$  условию 2) принципа сжатых отображений:

$$\rho(A[y], A[z]) \leq \alpha \rho(y, z), \quad \alpha < 1,$$

где

$$\rho(A[y], A[z]) = \max \left| \int_{x_0}^x [f(x, y) - f(x, z)] dx \right|.$$

Пользуясь неравенством Липшица, получим

$$\begin{aligned} \rho(A[y], A[z]) &\leq N \max \left| \int_{x_1}^x |y - z| dx \right| \leq \\ &\leq N \max |y - z| \max \left| \int_{x_0}^x dx \right| = Nh_0 \max |y - z| = Nh_0 \rho(y, z). \end{aligned}$$

Выбирая  $h_0$  так, чтобы  $Nh_0 \leq \alpha < 1$ , получим, что оператор  $A$  удовлетворяет условию

$$\rho(A[y], A[z]) \leq \alpha \rho(y, z), \quad \alpha < 1.$$

Итак, согласно принципу сжатых отображений существует единственная неподвижная точка  $y(x)$  оператора  $A$ , или, что то же самое, единственное непрерывное решение уравнения (1.24), и оно может быть найдено методом последовательных приближений.

Совершенно аналогично можно доказать теорему существования и единственности решения  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  для системы уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad y_i(x_0) = y_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.32)$$

или

$$y_i = y_{i0} + \int_{x_1}^x f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) dx \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.33)$$

в предположении, что в области  $D$ , определяемой неравенствами

$$x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \quad y_{i0} - b_i \leq y_i \leq y_{i0} + b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

правые части уравнений (1.32) удовлетворяют условиям:

1) все функции  $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) непрерывны, а следовательно, и ограничены,  $|f_i| \leq M$ ;

2) все функции  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) удовлетворяют условию Липшица:

$$|f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) - f_i(x, z_1, z_2, \dots, z_n)| \leq N \sum_{i=1}^n |y_i - z_i|.$$

Точкой пространства  $S$  будет теперь система  $n$  непрерывных функций  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ , т. е.  $n$ -мерная вектор-функция  $Y(x)$  с координатами  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ , определенная на отрезке  $x_0 - h_0 \leq x \leq x_0 + h_0$ , где  $h_0 \leq \min \left( a, \frac{b_1}{M}, \dots, \frac{b_n}{M} \right)$  и будет точнее

выбрано ниже. Расстояние в пространстве  $C$  определяется равенством

$$\rho(Y(x), Z(x)) = \sum_{i=1}^n \max |y_i - z_i|,$$

где  $z_1, z_2, \dots, z_n$  — координаты вектор-функции  $Z(x)$ .

Нетрудно проверить, что при таком определении расстояния множество  $C$   $n$ -мерных вектор-функций  $Y(x)$  превращается в полное метрическое пространство. Оператор  $A$  определяется равенством

$$A[Y] = \left( y_{10} + \int_{x_0}^x f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) dx, \right. \\ \left. y_{20} + \int_{x_0}^x f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) dx, \dots, y_{n0} + \int_{x_0}^x f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) dx \right),$$

т. е. при действии оператора  $A$  на точку  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  получаем точку того же пространства  $C$  с координатами, равными правым частям системы (1.33).

Точка  $A[Y]$  принадлежит пространству  $C$ , так как все ее координаты являются непрерывными функциями, не выходящими из области  $D$ , если координаты вектор-функции  $Y$  не выходили из области  $D$ . Действительно,

$$\left| \int_{x_0}^x f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) dx \right| \leq M \left| \int_{x_0}^x dx \right| \leq M h_0 \leq b_i,$$

и следовательно,  $|y_i - y_{i0}| \leq b_i$ .

Остается проверить выполнение условия 2) принципа сжатых отображений:

$$\begin{aligned} \rho(A[Y], A[Z]) &= \\ &= \sum_{i=1}^n \max \left| \int_{x_0}^x [f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) - f_i(x, z_1, z_2, \dots, z_n)] dx \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \max \left| \int_{x_0}^x |f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) - f_i(x, z_1, z_2, \dots, z_n)| dx \right| \leq \\ &\leq N \sum_{i=1}^n \max \left| \int_{x_0}^x \sum_{l=1}^n |y_l - z_l| dx \right| \leq \\ &\leq N \sum_{l=1}^n \max |y_l - z_l| \sum_{i=1}^n \max \left| \int_{x_0}^x dx \right| = N n h_0 \rho(Y, Z). \end{aligned}$$

Следовательно, если выбрать  $h_0 \leq \frac{\alpha}{nN}$ , где  $0 < \alpha < 1$ , или  $Nnh_0 \leq \alpha < 1$ , то условие 2) принципа сжатых отображений будет удовлетворено и будет существовать единственная неподвижная точка  $\bar{Y}$ , причем ее можно найти методом последовательных приближений. Но условие  $\bar{Y} = A(\bar{Y})$  по определению оператора  $A$  эквивалентно тождествам

$$\bar{y}_i \equiv y_{i0} + \int_{x_0}^x f_i(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) dx \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где  $\bar{y}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — координаты вектор-функции  $\bar{Y}$ , то есть  $\bar{Y}$  является единственным решением системы (1.33).

Пример 1. Найти несколько последовательных приближений  $y_1, y_2, y_3$  к решению уравнения

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2; \quad y(0) = 0, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1.$$

$$y = \int_0^x (x^2 + y^2) dx, \quad h_0 = \min\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Полагая  $y_0(x) \equiv 0$ , получим

$$y_1 = \int_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3}, \quad y_2 = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^6}{9}\right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63},$$

$$y_3 = \int_0^x \left[x^2 + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}\right)^2\right] dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} \left(1 + \frac{2x^4}{33} + \frac{x^8}{945}\right).$$

Пример 2. При каких ограничениях линейное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$$

удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности.

Для выполнения первого условия теоремы достаточно, чтобы на рассматриваемом отрезке изменения  $x$ ,  $a_1 \leq x \leq a_2$ , функции  $p(x)$  и  $f(x)$  были бы непрерывны. При этом будет выполнено и второе условие теоремы существования и единственности, так как частная производная по  $y$  от правой части уравнения  $\frac{dy}{dx} = -p(x)y + f(x)$  равна  $-p(x)$  и вследствие непрерывности функции  $p(x)$  на отрезке  $a_1 \leq x \leq a_2$  ограничена по модулю (см. стр. 42). Итак, если  $p(x)$  и  $f(x)$  непрерывны на отрезке  $a_1 \leq x \leq a_2$ , то через каждую точку  $(x_0, y_0)$ , где  $a_1 < x_0 < a_2$ , а  $y_0$  задается произвольно, проходит единственная интегральная кривая рассматриваемого линейного уравнения.

**Теорема 1.2 (о непрерывной зависимости решения от параметра и от начальных значений).** Если правая часть дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu) \quad (1.34)$$

непрерывна по  $\mu$  при  $\mu_0 \leq \mu \leq \mu_1$  и удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности, причем постоянная Липшица  $N$  не зависит от  $\mu$ , то решение  $y(x, \mu)$  рассматриваемого уравнения, удовлетворяющее условию  $y(x_0) = y_0$ , непрерывно зависит от  $\mu$ .

Строим ломаные Эйлера  $y_n = y_n(x, \mu)$ , являющиеся непрерывными функциями  $\mu$ , и, повторяя рассуждения на стр. 40—45, получим, что последовательность  $y_n(x, \mu)$  сходится равномерно не только по  $x$ , но и по  $\mu$  при  $x_0 < x \leq x_0 + H$ ,  $\mu_0 \leq \mu \leq \mu_1$ , так как  $N$  и  $H$  не зависят от  $\mu$ , если  $H < \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}\right)$ , где  $M \geq |f(x, y, \mu)|$ .

Следовательно, решение  $y = \bar{y}(x, \mu)$  уравнения

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y, \mu) dx, \quad (1.35)$$

являющееся пределом последовательности  $y_n(x, \mu)$ , непрерывно не только по  $x$ , но и по  $\mu$ .

**Замечание.** Если применить к уравнению (1.35) метод последовательных приближений, то последовательные приближения  $y = y_n(x, \mu)$ , являющиеся непрерывными функциями  $x$  и  $\mu$ , равномерно сходятся к решению  $\bar{y}(x, \mu)$  уравнения (1.35) (так как  $\alpha = Nh < 1$  не зависит от  $\mu$ ). Следовательно, и этим методом можно доказать непрерывную зависимость решения от  $x$  и  $\mu$ .

Очевидно, что доказательство несколько не изменится, если правая часть уравнения (1.34) является непрерывной функцией нескольких параметров в предположении, конечно, что постоянная Липшица  $N$  от них не зависит.

Тем же методом при аналогичных условиях можно было бы доказать непрерывную зависимость решения  $y(x, x_0, y_0)$  уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  от начальных значений  $x_0$  и  $y_0$ , при этом пришлось бы лишь несколько уменьшить  $h_0$ , так как в противном случае решения, определяемые начальными значениями, близкими к  $x_0, y_0$ , могли бы выйти из области  $D$  уже при значениях  $x$ , лежащих на интервале  $x_0 - h_0 < x < x_0 + h_0$ .

Однако еще проще заменой переменных свести вопрос о зависимости решения от начальных значений к уже рассмотренному выше

случаю зависимости решения от параметров, содержащихся в правой части уравнения (1.34). Действительно, полагая  $z = y(x, x_0, y_0) - y_0$ ,  $t = x - x_0$ , преобразуем уравнение  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  с начальным условием  $y(x_0) = y_0$  в  $\frac{dz}{dt} = f(t + x_0, z + y_0)$ ,  $z(0) = 0$ , к которому уже можно применить теорему о непрерывной зависимости решения от параметров  $x_0$  и  $y_0$ , если функция  $f$  непрерывна и удовлетворяет условию Липшица.

Аналогичные теоремы теми же методами могут быть доказаны для систем уравнений.

Заметим, что непрерывная зависимость решения  $y(x, x_0, y_0)$ ,  $x_0 \leq x \leq b$  (или  $b \leq x \leq x_0$ ), от начальных значений  $x_0$  и  $y_0$  означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  можно подобрать  $\delta(\varepsilon, b) > 0$  такое, что из неравенств

$$|x_0 - \bar{x}_0| < \delta(\varepsilon, b) \text{ и } |y_0 - \bar{y}_0| < \delta(\varepsilon, b)$$

следует неравенство

$$|y(x, x_0, y_0) - y(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0)| < \varepsilon \quad (1.36)$$

при  $x_0 \leq x \leq b$  (рис. 1.18).

С возрастанием  $b$  число  $\delta(\varepsilon, b)$ , вообще говоря, уменьшается и при  $b \rightarrow \infty$  может стремиться к нулю. Поэтому далеко не всегда удается подобрать такое число  $\delta(\varepsilon) > 0$ , при котором неравенство (1.36) удовлетворялось бы для всех  $x > x_0$ , т. е. не всегда решения, близкие по начальным значениям, остаются близкими при сколь угодно больших значениях аргумента.

Решение, которое мало изменяется при произвольном, но достаточно малом изменении начальных значений для сколь угодно больших значений аргумента, называется устойчивым. Подробнее об устойчивых решениях см. гл. 4.

**Теорема 1.3 (об аналитической зависимости решения от параметра, теорема Пуанкаре).** Решение  $x(t, \mu)$  дифференциального уравнения  $\dot{x} = f(t, x, \mu)$ , удовлетворяющее условию  $x(t_0) = x_0$ , аналитически зависит от параметра  $\mu$  в окрестности значения  $\mu = \mu_0$ , если функция  $f$  в заданной области изменения  $t$  и  $x$  и в некоторой окрестности точки  $\mu_0$  непрерывна по  $t$  и аналитически зависит от  $\mu$  и  $x$ .

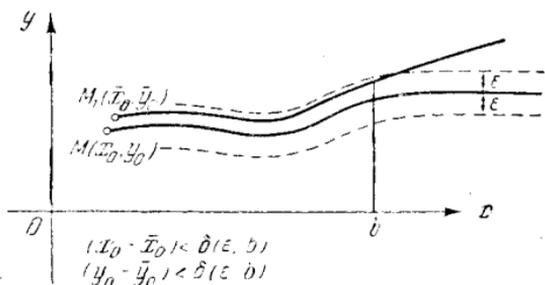


Рис. 1.18.

Аналогичное утверждение справедливо и для системы уравнений

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \mu) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

причем в этом случае предполагается, что функции  $f_i$  непрерывны по первому аргументу и аналитически зависят от всех остальных аргументов.

Подробное доказательство этой теоремы, как и других теорем, требующих применения теории аналитических функций, мы не приводим, отсылая читателя к статье А. Н. Тихонова [4], где дано наиболее простое доказательство теоремы об аналитической зависимости решения от параметра.

Идея доказательства А. Н. Тихонова сводится к следующему: считая, что  $\mu$  может принимать и комплексные значения, доказывается существование предела  $\lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} \frac{\Delta_\mu x(t, \mu)}{\Delta\mu} = \frac{\partial x}{\partial \mu}$ , что и означает аналитическую зависимость решения от  $\mu$ . Существование этого предела следует из того, что отношение  $\frac{\Delta_\mu x}{\Delta\mu}$  удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} \frac{\Delta_\mu x}{\Delta\mu} = \frac{f(t, x(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, x(t, \mu), \mu + \Delta\mu)}{\Delta_\mu x(t, \mu)} \frac{\Delta_\mu x(t, \mu)}{\Delta\mu} + \\ + \frac{f(t, x(t, \mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, x(t, \mu), \mu)}{\Delta\mu}, \quad \frac{\Delta_\mu x}{\Delta\mu} \Big|_{t=t_0} = 0,$$

решение которого единственно и при стремлении приращения  $\Delta\mu$  по любому закону к нулю стремится к единственному решению уравнения

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} z + \frac{\partial f}{\partial \mu}, \quad z(t_0) = 0.$$

**Теорема 1.4 (о дифференцируемости решений).** Если в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  функция  $f(x, y)$  имеет непрерывные производные до  $k$ -го порядка включительно, то решение  $y(x)$  уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1.37)$$

удовлетворяющее начальному условию  $y(x_0) = y_0$ , в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$  имеет непрерывные производные до  $(k+1)$ -го порядка включительно.

Доказательство. Подставляя  $y(x)$  в уравнение (1.37), получаем тождество

$$\frac{dy}{dx} \equiv f(x, y(x)), \quad (1.37_1)$$

и следовательно, решение  $y(x)$  имеет в некоторой окрестности рассматриваемой точки непрерывную производную  $f(x, y(x))$ .

Тогда, в силу существования непрерывных производных функции  $f$ , будет существовать непрерывная вторая производная решения

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y(x)).$$

Если  $k > 1$ , то, в силу существования непрерывных производных второго порядка функции  $f$ , можно, дифференцируя еще раз тождество (1.37<sub>1</sub>), обнаружить существование и непрерывность третьей производной решения

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f \right).$$

Повторяя это рассуждение  $k$  раз, докажем утверждение теоремы.

Рассмотрим теперь точки  $(x_0, y_0)$ , в окрестности которых решения уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ , удовлетворяющего условию  $y(x_0) = y_0$ , не существует или решение существует, но не единственно. Такие точки называются *особыми точками*.

Кривая, состоящая сплошь из особых точек, называется *особой*. Если график некоторого решения сплошь состоит из особых точек, то *решение* называется *особым*.

Для нахождения особых точек или особых кривых надо прежде всего найти множество точек, в которых нарушены условия теоремы о существовании и единственности решения, так как только среди таких точек могут быть особые. Конечно, не каждая точка, в которой нарушены условия теоремы о существовании и единственности решения, обязательно является особой, так как условия этой теоремы достаточны для существования и единственности решения, но они не являются необходимыми.

Первое условие теоремы существования и единственности решения (см. стр. 40) нарушается в точках разрыва функции  $f(x, y)$ , причем если при приближении по любому пути к некоторой изолированной точке разрыва  $(x_0, y_0)$  функция  $f(x, y)$  неограниченно возрастает по модулю, то в тех задачах, в которых переменные  $x$  и  $y$  равноправны, как мы условились выше, уравнение  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  должно быть заменено уравнением  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$ , для которого правая часть уже непрерывна в точке  $(x_0, y_0)$ , если считать  $\frac{1}{f(x_0, y_0)} = 0$ .

Следовательно, в задачах, в которых переменные  $x$  и  $y$  равноправны, первое условие теоремы существования и единственности нарушается в тех точках, в которых и функция  $f(x, y)$  и  $\frac{1}{f(x, y)}$  разрывны.

Особенно часто приходится рассматривать уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \quad (1.38)$$

где функции  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$  непрерывны. В этом случае функции  $\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$  и  $\frac{N(x, y)}{M(x, y)}$  будут одновременно разрывны лишь в тех

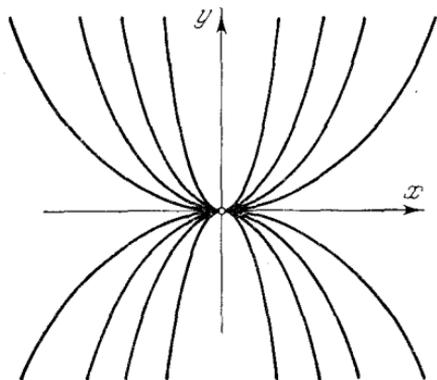


Рис. 1.19.

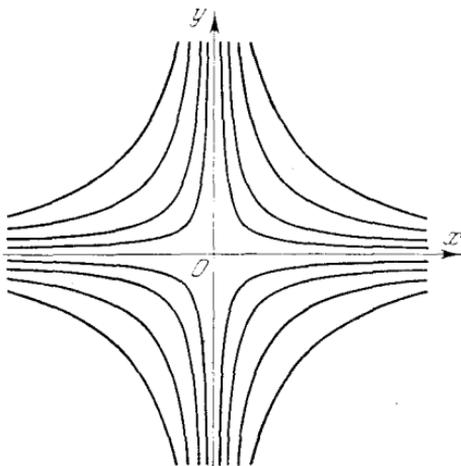


Рис. 1.20.

точках  $(x_0, y_0)$ , в которых  $M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = 0$  и не существует пределов

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

и

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{N(x, y)}{M(x, y)}.$$

Рассмотрим несколько типичных особых точек уравнения (1.38).

Пример 3

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$

Правые части данного уравнения и уравнения  $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{2y}$  разрывны в точке  $x = 0, y = 0$ . Интегрируя уравнение, получим  $y = cx^2$  — семейство парабол (рис. 1.19) и  $x = 0$ . В начале координат — особая точка, называемая узлом.

Пример 4.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Правые части данного уравнения и уравнения  $\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y}$  разрывны в точке  $x=0, y=0$ . Интегрируя уравнение, получаем  $y = \frac{c}{x}$  — семейство гипербол (рис. 1.20) и прямую  $x=0$ . В начале координат — особая точка, называемая *седлом*.

Пример 5.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}.$$

Правые части данного уравнения и уравнения  $\frac{dx}{dy} = \frac{x-y}{x+y}$  разрывны в точке  $x=0, y=0$ . Интегрируя рассматриваемое однородное уравнение (сравните с примером 3 на стр. 36), получим:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = ce^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}},$$

или в полярных координатах  $\rho = ce^{\varphi}$  — логарифмические спирали (рис. 1.21). Особая точка такого типа называется *фокусом*.

Пример 6.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Правые части данного уравнения и уравнения  $\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$  разрывны в точке  $x=0, y=0$ . Интегрируя уравнение, получаем  $x^2 + y^2 = c^2$  — семейство окружностей с центром в начале координат (рис. 1.22). Особая точка

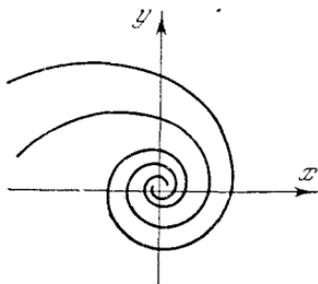


Рис. 1.21.

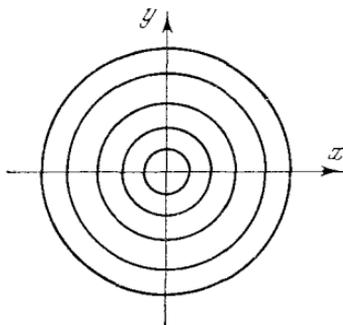


Рис. 1.22.

такого типа, т. е. особая точка, окрестность которой заполнена семейством замкнутых интегральных кривых, называется *центром*. В этом примере не существует решения, удовлетворяющего условию  $y(0) = 0$ .

К вопросу об особых точках и их классификации мы с несколько иной точки зрения еще вернемся в главе 4.

Второе условие теоремы 1.1 существования и единственности решения — условие Липшица, или более грубое условие, требующее существования ограниченной частной производной  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , чаще всего

нарушается в точках, при приближении к которым  $\frac{\partial f}{\partial y}$  неограниченно возрастает, т. е. в точках, в которых  $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0$ .

Уравнение  $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0$ , вообще говоря, определяет некоторую кривую, в точках которой может быть нарушена единственность. Если в точках этой кривой единственность нарушена, то кривая будет особой, если, кроме того, эта кривая окажется интегральной, то получим особую интегральную кривую.

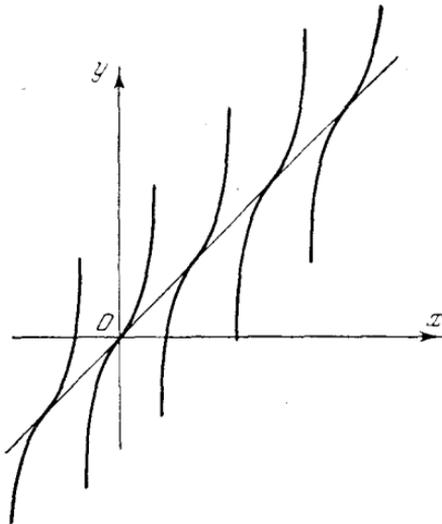


Рис. 1.23.

Возможно, что кривая  $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0$  имеет несколько ветвей, тогда для каждой ветви надо решить вопрос о том, будет ли эта ветвь особой кривой и будет ли она интегральной кривой.

Пример 7. Имеет ли уравнение  $\frac{dy}{dx} = y^2 + x^2$  особое решение?

Условия теоремы существования и единственности выполнены в окрестности любой точки, следовательно, особого решения нет.

Пример 8. Имеет ли уравнение  $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{(y-x)^2} + 5$  особое решение?

Правая часть непрерывна, но частная производная  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3}(y-x)^{-\frac{1}{3}}$  неограниченно возрастает при приближении к прямой  $y=x$ , следовательно, на прямой  $y=x$  может нарушиться единственность. Но функция  $y=x$  не удовлетворяет рассматриваемому уравнению, следовательно, особого решения нет.

Пример 9. Имеет ли уравнение  $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{(y-x)^2} + 1$  особое решение?

Как и в предыдущем примере, уравнение  $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0$  имеет вид  $y=x$ , но

на этот раз функция  $y=x$  удовлетворяет данному уравнению. Остается выяснить, нарушена ли единственность в точках этой прямой. Заменой переменных  $z = y-x$  приводим исходное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными, после чего без труда находим решение:  $y-x =$

$= \frac{(x-c)^3}{27}$ . Кривые этого семейства проходят через точки графика решения  $y = x$  (рис. 1.23). Следовательно, в каждой точке прямой  $y = x$  единственность нарушена и функция  $y = x$  является особым решением.

Этот пример показывает, что одной непрерывности правой части в уравнении

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

недостаточно для единственности решения основной начальной задачи, однако можно доказать, что существование решения при этом уже обеспечивается.

## § 7. Приближенные методы интегрирования уравнений первого порядка

В предыдущем параграфе мы уже познакомились с двумя приближенными методами интегрирования дифференциальных уравнений: методом Эйлера и методом последовательных приближений. Однако оба эти метода имеют существенные недостатки, в силу которых ими сравнительно редко пользуются в практике приближенных вычислений.

Достоинства приближенных методов оцениваются по точности даваемых ими результатов и по простоте вычислений. Недостатками метода последовательных приближений являются сравнительно медленная сходимость приближений к решению и сложность вычислений. Недостатком метода Эйлера является малая точность, для повышения которой приходится брать весьма малый шаг  $h$ , что приводит к длительным вычислениям.

Впрочем, небольшое усовершенствование *метода Эйлера*, так называемое *уравнивание* (или итерация), приводит уже к довольно удобной вычислительной схеме. При применении метода Эйлера с уравниванием делят отрезок  $x_0 \leq x \leq b$ , на котором надо вычислить решение уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ , определяемое условием

$y(x_0) = y_0$ , на равные части длиной  $h = \frac{b-x_0}{n}$ . Обозначая  $x_0 + kh = x_k$ ,  $y(x_0 + kh) = y_k$ ,  $y'(x_0 + kh) = y'_k$ , вычисляют  $y_{k+1}$ , если уже найдено  $y_k$ , в начале по формуле Эйлера:

$$y_{k+1} = y_k + hy'_k \quad \text{или} \quad \Delta y_k = y_{k+1} - y_k = hy'_k, \quad (1.39)$$

т. е. на отрезке  $x_0 + kh \leq x \leq x_0 + (k+1)h$  заменяют интегральную кривую, проходящую через точку  $(x_k, y_k)$ , отрезком ее касательной в той же точке (см. рис. 1.13, стр. 39). Затем уточняют вычисленное значение  $y_{k+1}$ , для чего определяют производную  $y'_{k+1} = f(x_{k+1}, y_{k+1})$  и снова применяют формулу Эйлера (1.39), но вместо  $y'_k$  берут среднее арифметическое вычисленных значений

производных в граничных точках  $\frac{y'_k + y'_{k+1}}{2}$ , т. е. считают

$$\bar{y}_{k+1} = y_k + h \frac{y'_k + y'_{k+1}}{2}. \quad (1.40)$$

Вновь вычисленное значение  $\bar{y}_{k+1}$  дает возможность вычислить новое значение производной  $\bar{y}'_{k+1} = f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})$ , после чего снова вычисляют среднее арифметическое значений производных  $\frac{y'_k + \bar{y}'_{k+1}}{2}$ , снова применяют формулу (1.40)

$$\bar{\bar{y}}_{k+1} = y_k + h \frac{y'_k + \bar{y}'_{k+1}}{2}$$

и продолжают этот процесс до тех пор, пока в пределах заданной точности не совпадут результаты двух последовательных вычислений значений  $y_{k+1}$ . После этого тем же методом вычисляется  $y_{k+2}$  и т. д.

Метод Эйлера с уравниванием дает на каждом шаге погрешность порядка  $h^3$  и нередко применяется в вычислительной практике. Однако значительно чаще применяются более точные методы (методы Штермера, Рунге, Мильна и др.), основанные на замене искомого решения несколькими членами его тейлоровского разложения

$$y_{k+1} \approx y_k + h y'_k + \frac{h^2}{2!} y''_k + \dots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}_k, \quad (1.41)$$

т. е. замене искомой интегральной кривой параболой  $n$ -го порядка, имеющей касание  $n$ -го порядка с интегральной кривой в точке  $x = x_k$ ,  $y = y_k$ .

Непосредственное применение формулы Тейлора (1.41) на каждом шаге приводит к сложным и неоднотипным вычислениям, поэтому эта формула обычно применяется лишь для вычисления нескольких близких к  $x = x_0$  значений, необходимых для применения более удобных вычислительных схем, среди которых в первую очередь следует назвать *метод Штермера*, в котором вычисление проводится по одной из следующих формул в зависимости от порядка аппроксимирующей параболы:

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1}, \quad (1.42)$$

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{k-2}, \quad (1.43)$$

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{k-3}, \quad (1.44)$$

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{k-3} + \frac{251}{720} \Delta^4 q_{k-4}, \quad (1.45)$$

• • • • •

где

$$\begin{aligned} q_k &= y_k h, \quad \Delta q_{k-1} = q_k - q_{k-1}, \quad \Delta^2 q_{k-2} = \Delta q_{k-1} - \Delta q_{k-2}, \\ \Delta^3 q_{k-3} &= \Delta^2 q_{k-2} - \Delta^2 q_{k-3}, \quad \Delta^4 q_{k-4} = \Delta^3 q_{k-3} - \Delta^3 q_{k-4}. \\ &\dots \end{aligned}$$

Формулы Штермера могут быть получены путём интегрирования в пределах от  $x_k$  до  $x_{k+1}$  тождества  $y' \equiv f(x, y(x))$ , в котором  $y(x)$  является искомым решением:

$$y_{k+1} \equiv y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx,$$

и применения известной из курса анализа квадратурной формулы:

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x) dx \approx h \left[ \varphi_k + \frac{1}{2} \Delta \varphi_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \varphi_{k-2} + \right. \\ \left. + \frac{3}{8} \Delta^3 \varphi_{k-3} + \frac{251}{720} \Delta^4 \varphi_{k-4} + \dots \right]. \quad (1.46) \end{aligned}$$

Напомним, что эта квадратурная формула получается путем замены подынтегральной функции  $\varphi(x)$  аппроксимирующим многочленом по интерполяционной формуле Ньютона и вычисления интегралов от отдельных слагаемых.

Оценка остаточного члена квадратурной формулы (1.46) показывает, что погрешность в формуле (1.42) при одном шаге имеет порядок  $h^3$ , в формуле (1.43)  $h^4$ , в формуле (1.44)  $h^5$ , в формуле (1.45)  $h^6$ . Если же принять во внимание, что при нескольких шагах погрешности могут суммироваться, то для оценки погрешности при  $n$  шагах надо оценки, полученные для одного шага, умножить на  $n = \frac{b-x_0}{h}$ , что может привести к изменению указанного выше порядка погрешности.

**Замечание.** Можно показать непосредственным разложением по формуле Тейлора в окрестности точки  $x = x_k$ , что правая часть формулы Штермера (1.42) с точностью до членов, содержащих  $h$  в степенях выше второй, совпадает с первыми тремя членами разложения  $y_{k+1}$  по формуле Тейлора (1.41):

$$y_k + h y'_k + \frac{h^2}{2!} y''_k; \quad (1.47)$$

правая часть следующей формулы Штермера (1.43) с точностью до членов, содержащих  $h$  в степенях выше третьей, совпадает с

$$y_k + h y'_k + \frac{h^2}{2!} y''_k + \frac{h^3}{3!} y'''_k$$

и т. д. Для формулы (1.42), например, получим:

$$y_k + hy'_k + \frac{1}{2} h \Delta y'_{k-1} = y_k + hy'_k + \frac{1}{2} h (y'_k - y'_{k-1}), \quad (1.48)$$

или, разлагая

$$y'_{k-1} = y'(x_{k-1})$$

по формуле Тейлора

$$y'(x_{k-1}) = y'(x_k) - hy''(x_k) + \frac{1}{2} h^2 y'''(x_k) + \dots$$

и подставляя в (1.48), получим:

$$y_k + hy'_k + \frac{1}{2} h (y'_k - y'_{k-1}) = y_k + hy'_k + \frac{1}{2} h^2 y''_k - \frac{1}{4} h^3 y'''_k + \dots$$

и следовательно, три первых члена совпадают с тремя членами разложения по формуле Тейлора (1.47).

Для начала вычисления по формулам Штермера необходимо знать значения искомой функции не в одной, а в нескольких точках (при применении формулы (1.42) в двух точках:  $x_0$  и  $x_0 + h$ , при применении формулы (1.43) в трех точках:  $x_0$ ,  $x_0 + h$  и  $x_0 + 2h$ , и т. д.). Эти несколько первых значений могут быть вычислены методом Эйлера с уменьшенным шагом или путем использования формулы Тейлора (1.41), или кратко изложенным ниже *методом Рунге*.

Возьмем для определенности формулу (1.44):

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{k-3}$$

и предположим, что, кроме заданного начального значения  $y_0$ , уже найдены  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y_3$ . Тогда можно вычислить:

$$q_0 = f(x_0, y_0)h, \quad q_1 = f(x_1, y_1)h,$$

$$q_2 = f(x_2, y_2)h, \quad q_3 = f(x_3, y_3)h,$$

а следовательно, и

$$\Delta q_0 = q_1 - q_0, \quad \Delta q_1 = q_2 - q_1, \quad \Delta q_2 = q_3 - q_2,$$

$$\Delta^2 q_0 = \Delta q_1 - \Delta q_0, \quad \Delta^2 q_1 = \Delta q_2 - \Delta q_1, \quad \Delta^3 q_0 = \Delta^2 q_1 - \Delta^2 q_0.$$

Теперь по формуле (1.44) вычисляем значение  $y_4$ , зная которое получим  $q_4$ ,  $\Delta q_3$ ,  $\Delta^2 q_2$ ,  $\Delta^3 q_1$ . Затем по той же формуле (1.44) вычисляем  $y_5$  и т. д.

Результаты вычисления заносятся в приводимую ниже, постепенно заполняющуюся таблицу:

$x$	$y$	$q$	$\Delta q$	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
$x_0$	$y_0$	$q_0$	$\Delta q_0$	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
$x_1$	$y_1$	$q_1$	$\Delta q_1$	$\Delta^2 q_1$	
$x_2$	$y_2$	$q_2$	$\Delta q_2$		
$x_3$	$y_3$	$q_3$			
$x_4$					
$x_5$					
$x_6$					

Обычно требуется вычислить значение искомого решения дифференциального уравнения в некоторой точке  $x = b$  с заданной точностью. При этом сейчас же возникает вопрос, какой из формул Штермера целесообразно пользоваться и какой шаг  $h$  гарантирует требуемую точность вычислений и в то же время не является чрезмерно малым и тем самым не приводит к лишним вычислениям. Некоторое представление о выборе формулы, по которой целесообразно вести вычисления, и о выборе шага дают указанные выше порядки погрешностей при каждом шаге, при этом, конечно, надо иметь в виду, что при нескольких шагах погрешности могут суммироваться. При правильном выборе шага  $h$  все разности в таблице должны меняться плавно, а последние разности в формуле (1.44) должны влиять лишь на запасные знаки. Резкое изменение какой-нибудь разности указывает на то, что при выбранном шаге  $h$  могут оказаться неучтенными особенности изменения функции на рассматриваемом отрезке, что может повлечь за собой значительные ошибки при вычислении  $y_{k+1}$ .

Однако все эти соображения не являются вполне надежными, а более точные оценки погрешности оказываются весьма громоздкими и неудобными. Поэтому обычно применяют следующий практически достаточно надежный метод: выбрав, исходя из указанных выше неточных

соображений, некоторый шаг  $h$ , проводят вычисления по одной из формул Штермера с шагом  $h$  и  $\frac{h}{2}$  и сравнивают результаты в общих точках. Если в пределах заданной точности результаты совпадают, то считают, что шаг  $h$  обеспечивает заданную точность вычисления; если же результаты в пределах заданной точности не совпадают, то снова уменьшают шаг вдвое и проводят вычисления с шагом  $\frac{h}{2}$  и  $\frac{h}{4}$  и опять сравнивают результаты и т. д.

Вычисления с шагом  $h$  и  $\frac{h}{2}$  целесообразно проводить параллельно, чтобы как можно раньше заметить несовпадение результатов и не производить лишней работы. Этот способ двойного счета имеет еще то преимущество, что при его применении почти полностью исключаются ошибки в вычислениях, так как они, как правило, немедленно обнаруживаются при сравнении результатов вычислений с шагом  $h$  и  $\frac{h}{2}$ .

Для нахождения нескольких первых значений  $y_i$ , необходимых для начала вычислений по методу Штермера, кроме указанных выше способов (метод Эйлера с уменьшенным шагом с итерациями или без итераций или метод разложения по формуле Тейлора), можно рекомендовать еще метод Рунге.

По методу Рунге для нахождения  $y_{k+1}$  надо вычислить четыре числа:

$$\begin{aligned} m_1 &= f(x_k, y_k), \quad m_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{m_1 h}{2}\right), \\ m_3 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{m_2 h}{2}\right), \quad m_4 = f(x_k + h, y_k + m_3 h), \end{aligned} \quad (1.49)$$

и тогда

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4). \quad (1.50)$$

Обычно метод Рунге применяется лишь для вычисления нескольких первых значений  $y_1, y_2, \dots$ , необходимых для начала вычисления по методу Штермера, однако можно этим методом вычислять и остальные значения. Метод Рунге, так же как и метод Штермера, основан на аппроксимации искомой интегральной кривой соприкасающейся параболой.

Если сравнить правую часть формулы Рунге (1.50) с разложением по формуле Тейлора

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h + \frac{1}{2!} y''_k h^2 + \frac{1}{3!} y'''_k h^3 + \frac{1}{4!} y^{IV}_k h^4 + \dots$$

то окажется, что члены со степенями ниже пятой совпадают. Поэтому при вычислении нескольких начальных значений по методу Рунге

с переходом затем на вычисление по методу Штермера по формулам (1.42), (1.43) или (1.44) можно вычисление вести с тем же шагом  $h$ ; если же в дальнейшем применяется формула Штермера (1.45), то начало вычисления по методу Рунге надо вести с уменьшенным шагом, так как при одном и том же шаге формула (1.50) не гарантирует той точности вычислений, какую гарантирует формула (1.45). Впрочем, нередко даже при использовании формул Штермера (1.43) и (1.44) начало вычислений все же ведут по формулам Рунге с уменьшенным шагом, так как даже небольшая погрешность в вычислении исходных для формул Штермера значений может резко уменьшить точность дальнейших вычислений\*).

Современные быстродействующие вычислительные машины дискретного действия позволяют выполнить указанные выше вычисления по методу Штермера или Рунге с необычайной быстротой (многие десятки и даже сотни тысяч операций в секунду), причем и процесс программирования может быть значительно упрощен применением стандартных программ, разработанных для методов Штермера и Рунге. При этом при приближенном интегрировании дифференциального уравнения  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$ , надо составить лишь подпрограмму для вычисления значений  $y'_k = f(x_k, y_k)$  и включить ее в стандартную программу.

Пример.

$$y' = x^2 + y^2; \quad y(0) = -1.$$

Найти значение  $y(0,5)$  с точностью до 0,01.

Воспользовавшись разложением по формуле Тейлора

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)x^2}{2!} + \frac{y'''(0)x^3}{3!} + \dots$$

вычисляем значение  $y(x)$  в точках  $x_1 = 0,1$  и  $x_2 = 0,2$ :

$$y(0,1) = -0,9088 \quad \text{и} \quad y(0,2) = -0,8309$$

(или вместо  $y(0,2)$  вычисляем  $y(-0,1)$ , что даже предпочтительнее, так как точка  $x_1 = -0,1$  лежит ближе к начальной точке  $x_0 = 0$ , чем точка  $x_2 = 0,2$ ). Дальнейшие значения вычисляем по формуле Штермера (1.43) с шагом  $h = 0,1$ , а результаты вычисления заносим в таблицу (без разностей  $\Delta^3 q$ ). После этого или параллельно проводим вычисления с шагом

$\frac{h}{2} = 0,05$ . В результате получим:

$$y(0,5) \approx -0,63.$$

\*) Более подробно о приближенных методах интегрирования дифференциальных уравнений можно прочесть в книгах А. Н. Крылова [6] и И. С. Березина и Н. П. Жидкова [7] (см. рекомендуемую литературу).

## § 8. Простейшие типы уравнений, не разрешенных относительно производной

Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной, имеет вид

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1.51)$$

Если это уравнение удастся разрешить относительно  $y'$ , то получаем одно или несколько уравнений

$$y' = f_i(x, y) \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Интегрируя эти, уже разрешенные относительно производной уравнения, найдем решения исходного уравнения (1.51).

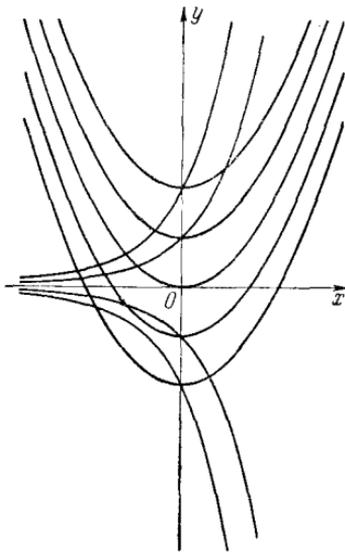


Рис. 1.24.

Проинтегрируем, например, уравнение

$$(y')^2 - (x + y)y' + xy = 0. \quad (1.52)$$

Разрешая это квадратное уравнение относительно  $y'$ , будем иметь:  $y' = x$  и  $y' = y$ . Интегрируя каждое из полученных уравнений, находим:

$$y = \frac{x^2}{2} + c \quad (1.53)$$

и

$$y = ce^x \quad (1.54)$$

(рис. 1.24). Оба семейства решений удовлетворяют исходному уравнению.

Гладкими интегральными кривыми уравнения (1.52) будут также кривые, составленные из дуги интегральной кривой семейства (1.53) и дуги интегральной кривой семейства (1.54), если в общей точке они имеют общую касательную. На рис. 1.25 изображена интегральная кривая уравнения (1.52), составленная из графиков

решений  $y = \frac{x^2}{2} + c$  при  $c = \frac{1}{2}$ ,  $-\infty < x \leq 1$ , и  $y = ce^x$  при  $c = e^{-1}$ ,  $1 \leq x < \infty$ , а на рис. 1.26 — интегральная кривая уравнения (1.52), составленная из графиков решений  $y = \frac{x^2}{2}$  при  $x \leq 0$  и  $y = 0$  при  $x > 0$ .

Итак, уравнение

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1.51)$$

может быть проинтегрировано путем разрешения относительно  $y'$  и интеграции полученных при этом уравнений  $y' = f_i(x, y)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), уже разрешенных относительно производной.

Однако далеко не всегда уравнение (1.51) легко разрешается относительно  $y'$  и еще реже полученные после разрешения относительно  $y'$  уравнения  $y' = f_i(x, y)$  легко интегрируются, поэтому

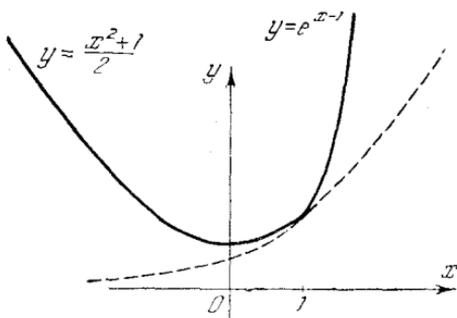


Рис. 1.25.

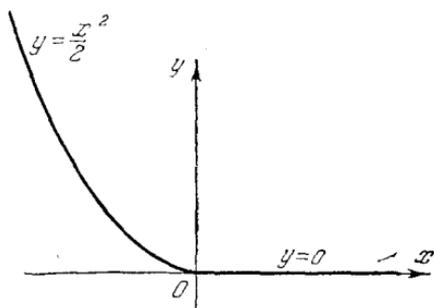


Рис. 1.26.

часто приходится интегрировать уравнения вида (1.51) иными методами. Рассмотрим следующие случаи.

1. Уравнение (1.51) имеет вид

$$F(y') = 0, \quad (1.55)$$

причем существует по крайней мере один действительный корень  $y' = k_i$  этого уравнения.

Так как уравнение (1.55) не содержит  $x$  и  $y$ , то  $k_i$  — постоянное. Следовательно, интегрируя уравнение  $y' = k_i$ , получим  $y = k_i x + c$ , или  $k_i = \frac{y-c}{x}$ , но  $k_i$  является корнем уравнения (1.55), следовательно,  $F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$  является интегралом рассматриваемого уравнения.

Пример 1.

$$(y')^7 - (y')^5 + y' + 3 = 0.$$

Интеграл уравнения

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^7 - \left(\frac{y-c}{x}\right)^5 + \frac{y-c}{x} + 3 = 0.$$

2. Уравнение (1.51) имеет вид

$$F(x, y) = 0. \quad (1.56)$$

Если это уравнение трудно разрешить относительно  $y'$ , то целесообразно ввести параметр  $t$  и заменить уравнение (1.56) двумя уравнениями:  $x = \varphi(t)$  и  $y' = \psi(t)$ . Так как  $dy = y' dx$ , то в данном случае  $dy = \psi(t) \varphi'(t) dt$ , откуда  $y = \int \psi(t) \varphi'(t) dt + c$  и, следовательно, интегральные кривые уравнения (1.56) определяются

в параметрической форме следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}x &= \varphi(t), \\ y &= \int \psi(t) \varphi'(t) dt + c.\end{aligned}$$

Если уравнение (1.56) легко разрешимо относительно  $x$ ,  $x = \varphi(y')$ , то почти всегда удобно в качестве параметра ввести  $y' = t$ . Тогда

$$x = \varphi(t), \quad dy = y' dx = t \varphi'(t) dt, \quad y = \int t \varphi'(t) dt + c.$$

Пример 2.

$$x = (y')^3 - y' - 1.$$

Положим  $y' = t$ , тогда

$$x = t^3 - t - 1, \tag{1.57}$$

$$dy = y' dx = t(3t^2 - 1) dt,$$

$$y = \frac{3t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + c_1. \tag{1.58}$$

Уравнения (1.57) и (1.58) определяют в параметрической форме семейство искоемых интегральных кривых.

Пример 3.

$$x \sqrt{1 + y'^2} = y'.$$

Полагаем  $y' = \operatorname{tg} t$ ,  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ ; тогда

$$x = \sin t, \tag{1.59}$$

$$dy = y' dx = \operatorname{tg} t \cos t dt = \sin t dt,$$

$$y = -\cos t + c_1 \tag{1.60}$$

или, исключая  $t$  из уравнений (1.59) и (1.60), получим  $x^2 + (y - c_1)^2 = 1$  — семейство окружностей.

3. Уравнение (1.51) имеет вид

$$F(y, y') = 0. \tag{1.61}$$

Если это уравнение трудно разрешить относительно  $y'$ , то, как и в предыдущем случае, целесообразно ввести параметр  $t$  и заменить уравнение (1.61) двумя уравнениями:  $y = \varphi(t)$  и  $y' = \psi(t)$ . Так как  $dy = y' dx$ , то  $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t) dt}{\psi(t)}$ , откуда  $x = \int \frac{\varphi'(t) dt}{\psi(t)} + c$ . Следовательно, искоемые интегральные кривые в параметрической форме определяются уравнениями

$$x = \int \frac{\varphi'(t) dt}{\psi(t)} + c \quad \text{и} \quad y = \varphi(t).$$

В частности, если уравнение (1.61) легко разрешимо относительно  $y$ , то обычно за параметр удобно взять  $y'$ .

Действительно, если  $y = \varphi(y')$ , то, полагая  $y' = t$ , получим

$$y = \varphi(t), \quad dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t) dt}{t},$$

$$x = \int \frac{\varphi'(t) dt}{t} + c.$$

Пример 4.

$$y = (y')^5 + (y')^3 + y' + 5.$$

Полагаем  $y' = t$ ; тогда

$$y = t^5 + t^3 + t + 5, \quad (1.62)$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{(5t^4 + 3t^2 + 1) dt}{t} = \left(5t^3 + 3t + \frac{1}{t}\right) dt.$$

$$x = \frac{5t^4}{4} + \frac{3t^2}{2} + \ln|t| + c. \quad (1.63)$$

Уравнения (1.62) и (1.63) являются параметрическими уравнениями семейства интегральных кривых.

Пример 5.

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = 1.$$

Полагаем  $y' = \operatorname{sh} t$ , тогда

$$y = \operatorname{ch} t, \quad (1.64)$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\operatorname{sh} t dt}{\operatorname{sh} t} = dt,$$

$$x = t + c \quad (1.65)$$

или, исключая из (1.64) и (1.65) параметр  $t$ , получаем  $y = \operatorname{ch}(x - c)$ .

Рассмотрим теперь общий случай: левая часть уравнения

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1.51)$$

зависит от всех трех аргументов  $x$ ,  $y$ ,  $y'$ . Заменяем уравнение (1.51) его параметрическим представлением:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad y' = \chi(u, v).$$

Пользуясь зависимостью  $dy = y' dx$ , будем иметь

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = \chi(u, v) \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv \right],$$

откуда, разрешая относительно производной  $\frac{dv}{du}$ , получим

$$\frac{dv}{du} = \frac{\chi(u, v) \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u}}{\frac{\partial \psi}{\partial v} - \chi(u, v) \frac{\partial \varphi}{\partial v}}. \quad (1.66)$$

В результате получено уравнение первого порядка, уже разрешенное относительно производной, и тем самым задача сведена к уже

рассмотренной в предыдущих параграфах, однако, конечно, полученное уравнение (1.66) далеко не всегда будет интегрироваться в квадратурах.

Если уравнение

$$F(x, y, y') = 0$$

легко разрешимо относительно  $y$ , то за параметры  $u$  и  $v$  часто удобно брать  $x$  и  $y'$ . Действительно, если уравнение (1.51) приводится к виду

$$y = f(x, y'), \quad (1.67)$$

то, считая  $x$  и  $y' = p$  параметрами, получим

$$y = f(x, p), \quad dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp$$

или

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx}, \\ p &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx}. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Интегрируя уравнение (1.68) (конечно, оно далеко не всегда интегрируется в квадратурах), получим  $\Phi(x, p, c) = 0$ . Совокупность уравнений  $\Phi(x, p, c) = 0$  и  $y = f(x, p)$ , где  $p$  — параметр, определяет семейство интегральных кривых.

Заметим, что уравнение (1.68) может быть получено дифференцированием уравнения (1.67) по  $x$ . Действительно, дифференцируя (1.67) по  $x$  и полагая  $y' = p$ , получим  $p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx}$ , что совпадает с (1.68). Поэтому этот метод часто называют интегрированием дифференциальных уравнений с помощью дифференцирования.

Совершенно аналогично часто интегрируется уравнение

$$F(x, y, y') = 0,$$

если оно легко разрешимо относительно  $x$ :

$$x = f(y, y'). \quad (1.69)$$

В этом случае, взяв за параметры  $y$  и  $y' = p$  и пользуясь зависимостью  $dy = y' dx$ , получим

$$dy = p \left[ \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp \right]$$

или

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dy}. \quad (1.70)$$

Интегрируя уравнение (1.70), получим  $\Phi(y, p, c) = 0$ . Это уравнение совместно с  $x = f(y, p)$  определяет интегральные кривые исход-

ного уравнения. Уравнение (1.70) может быть получено из уравнения (1.69) дифференцированием по  $y$ .

В качестве примера применения этого метода рассмотрим линейное относительно  $x$  и  $y$  уравнение

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'),$$

называемое *уравнением Лагранжа*. Дифференцируя по  $x$  и полагая  $y' = p$ , получим

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p) \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \frac{dp}{dx}, \quad (1.71)$$

или

$$[p - \varphi(p)] \frac{dx}{dp} = x\varphi'(p) + \psi'(p). \quad (1.72)$$

Это уравнение линейно относительно  $x$  и  $\frac{dx}{dp}$  и, следовательно, легко интегрируется, например, методом вариации постоянной. Получив интеграл  $\Phi(x, p, c) = 0$  уравнения (1.72) и присоединяя к нему  $y = x\varphi(p) + \psi(p)$ , получим уравнения, определяющие искомые интегральные кривые.

При переходе от уравнения (1.71) к уравнению (1.72) пришлось делить на  $\frac{dp}{dx}$ . Но при этом мы потеряем решения, если они существуют, для которых  $p$  постоянно, а значит  $\frac{dp}{dx} \equiv 0$ . Считая  $p$  постоянным, замечаем, что уравнение (1.71) удовлетворяется лишь в том случае, если  $p$  является корнем уравнения  $p - \varphi(p) = 0$ .

Итак, если уравнение  $p - \varphi(p) = 0$  имеет действительные корни  $p = p_i$ , то к найденным выше решениям уравнения Лагранжа надо еще добавить  $y = x\varphi(p) + \psi(p)$ ,  $p = p_i$ , или, исключая  $p$ ,  $y = x\varphi(p_i) + \psi(p_i)$  — прямые линии.

Отдельно надо рассмотреть случай, когда  $p - \varphi(p) \equiv 0$ , и следовательно, при делении на  $\frac{dp}{dx}$  теряется решение  $p = c$ , где  $c$  — произвольная постоянная. В этом случае  $\varphi(y') \equiv y'$  и уравнение  $y = x\varphi(y') + \psi(y')$  принимает вид

$$y = xy' + \psi(y') \text{ — уравнение Клеро.}$$

Полагая  $y' = p$ , получим  $y = xp + \psi(p)$ . Дифференцируя по  $x$ , будем иметь:

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \frac{dp}{dx},$$

или

$$(x + \psi'(p)) \frac{dp}{dx} = 0,$$

откуда или  $\frac{dp}{dx} = 0$  и, значит,  $p = c$ , или  $x + \psi'(p) = 0$ .

В первом случае, исключая  $p$ , получим:

$$y = cx + \psi(c) \quad (1.73)$$

— однопараметрическое семейство интегральных прямых. Во втором случае решение определяется уравнениями

$$y = xp + \psi(p) \quad \text{и} \quad x + \psi'(p) = 0. \quad (1.74)$$

Нетрудно проверить, что интегральная кривая, определяемая уравнениями (1.74), является огибающей семейства интегральных прямых (1.73).

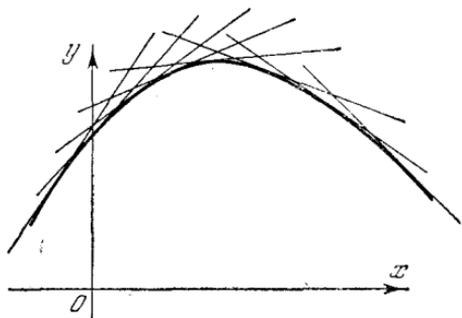


Рис. 1.27.

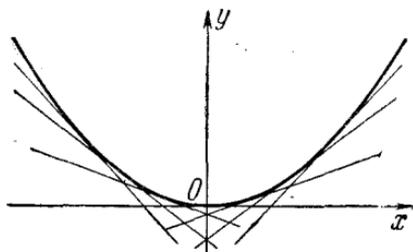


Рис. 1.28.

Действительно, *огибающая* некоторого семейства  $\Phi(x, y, c) = 0$  определяется уравнениями

$$\Phi(x, y, c) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0, \quad (1.75)$$

которые для семейства  $y = cx + \psi(c)$  имеют вид

$$y = cx + \psi(c), \quad x + \psi'(c) = 0$$

и лишь обозначением параметра отличаются от уравнений (1.74) (рис. 1.27).

**Замечание.** Как известно, уравнения (1.75) могут определять, кроме огибающей, геометрические места кратных точек, а иногда и другие кривые, однако если хотя бы одна из производных  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$  отлична от нуля и обе ограничены в точках, удовлетворяющих уравнениям (1.75), то эти уравнения определяют только огибающую. В данном случае эти условия выполнены:  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -c$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 1$ . Следовательно, уравнения (1.75) определяют огибающую, которая может вырождаться в точку, если семейство (1.73) является пучком прямых.

Пример 6.

$$y = xy' - y'^2 \text{ — уравнение Клеро.}$$

Однопараметрическое семейство интегральных прямых имеет вид  $y = cx - c^2$ . Кроме того, интегральной кривой является огибающая этого семейства, определяемая уравнениями  $y = cx - c^2$  и  $x - 2c = 0$ . Исключая  $c$ , получаем  $y = \frac{x^2}{4}$  (рис. 1.28).

Пример 7.

$$y = 2xy' - y'^3 \text{ — уравнение Лагранжа.}$$

$$y' = p,$$

$$y = 2xp - p^3. \quad (1.76)$$

Дифференцируя, получаем

$$p = 2p + 2x \frac{dp}{dx} - 3p^2 \frac{dp}{dx} \quad (1.77)$$

и после деления на  $\frac{dp}{dx}$  приходим к уравнению

$$p \frac{dx}{dp} = -2x + 3p^2.$$

Интегрируя это линейное уравнение, получаем  $x = \frac{c_1}{p^2} + \frac{3}{4} p^2$ . Следовательно, интегральные кривые определяются уравнениями  $y = 2xp - p^3$ ,  $x = \frac{c_1}{p^2} + \frac{3p^2}{4}$ .

При делении на  $\frac{dp}{dx}$ , как указывалось выше, теряются решения  $p = p_i$ , где  $p_i$  — корни уравнения  $p - \varphi(p) = 0$ . В данном случае теряется решение  $p = 0$  уравнения (1.77), которому, в силу уравнения (1.76), соответствует решение исходного уравнения  $y = 0$ .

### § 9. Теорема существования и единственности для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной. Особые решения

В § 6 была доказана теорема существования и единственности решения  $y(x)$  уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ , удовлетворяющего условию  $y(x_0) = y_0$ . Аналогичный вопрос возникает и для уравнений вида  $F(x, y, y') = 0$ . Очевидно, что для таких уравнений через некоторую точку  $(x_0, y_0)$ , вообще говоря, проходит уже не одна, а несколько интегральных кривых, так как, разрешая уравнение  $F(x, y, y') = 0$  относительно  $y'$ , мы, как правило, получаем не одно, а несколько действительных значений  $y' = f_i(x, y)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), и если каждое из уравнений  $y' = f_i(x, y)$  в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности § 6, то для каждого из этих уравнений найдется единственное

решение, удовлетворяющее условию  $y(x_0) = y_0$ . Поэтому свойство единственности решения уравнения  $F(x, y, y') = 0$ , удовлетворяющего условию  $y(x_0) = y_0$ , обычно понимается в том смысле, что

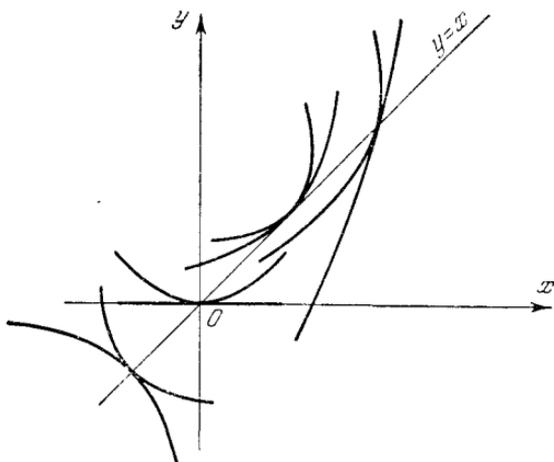


Рис. 1.29.

через данную точку  $(x_0, y_0)$  по данному направлению проходит не более одной интегральной кривой уравнения  $F(x, y, y') = 0$ .

Например, для решений уравнения  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0$  свойство единственности всюду выполнено, так как через каждую точку  $(x_0, y_0)$  проходят две интегральные кривые, но по различным направлениям. Действительно,

$$\frac{dy}{dx} = \pm 1, \quad y = x + c \quad \text{и} \quad y = -x + c.$$

Для уравнения  $(y')^2 - (x + y)y' + xy = 0$ , рассмотренного на стр. 68, в точках прямой  $y = x$  свойство единственности нарушено, так как через точки этой прямой проходят интегральные кривые уравнений  $y' = x$  и  $y' = y$  по одному и тому же направлению (рис. 1.29).

**Теорема 1.5.** Существует единственное решение  $y = y(x)$ ,  $x_0 - h_0 \leq x \leq x_0 + h_0$ , где  $h_0$  достаточно мало, уравнения

$$F(x, y, y') = 0, \quad (1.78)$$

удовлетворяющее условию  $y(x_0) = y_0$ , для которого  $y'(x_0) = y'_0$ , где  $y'_0$  — один из действительных корней уравнения  $F(x_0, y_0, y') = 0$ , если в замкнутой окрестности точки  $(x_0, y_0, y'_0)$  функция  $F(x, y, y')$  удовлетворяет условиям:

- 1)  $F(x, y, y')$  непрерывна по всем аргументам;
- 2) производная  $\frac{\partial F}{\partial y'}$  существует и отлична от нуля;

3) существует ограниченная по модулю производная  $\frac{\partial F}{\partial y}$ ,

$$\left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| \leq N_1.$$

Доказательство. Согласно известной теореме о существовании неявной функции можно утверждать, что условия 1) и 2) гарантируют существование единственной непрерывной в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  функции  $y' = f(x, y)$ , определяемой уравнением (1.78) и удовлетворяющей условию  $y'_0 = f(x_0, y_0)$ . Остается проверить, будет ли функция  $f(x, y)$  удовлетворять условию Липшица или более грубому условию  $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq N$  в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ , так как тогда можно будет утверждать, что уравнение

$$y' = f(x, y) \quad (1.79)$$

удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности (см. § 6, стр. 40) и, следовательно, существует единственное решение уравнения (1.79), удовлетворяющее условию  $y(x_0) = y_0$ , а вместе с тем существует единственная интегральная кривая уравнения (1.78), проходящая через точку  $(x_0, y_0)$  и имеющая в ней угловой коэффициент касательной  $y'_0$ .

Согласно известной теореме о неявных функциях можно утверждать, что при выполнении условий 1), 2), 3) производная  $\frac{\partial f}{\partial y}$  существует и может быть вычислена по правилу дифференцирования неявных функций.

Дифференцируя тождество  $F(x, y, y') = 0$  по  $y$  и принимая во внимание, что  $y' = f(x, y)$ , получим

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}}.$$

откуда, принимая во внимание условия 2) и 3), следует, что  $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq N$  в замкнутой окрестности точки  $(x_0, y_0)$ .

Множество точек  $(x, y)$ , в которых нарушается единственность решений уравнения

$$F(x, y, y') = 0, \quad (1.78)$$

называется *особым* множеством.

В точках особого множества должно быть нарушено по крайней мере одно из условий теоремы 1.5. В дифференциальных уравнениях, встречающихся в прикладных задачах, условия 1) и 3) обычно выполняются, но условие 2)  $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$  часто нарушается.

Если условия 1) и 3) выполнены, то в точках особого множества должны одновременно удовлетворяться уравнения

$$F(x, y, y') = 0 \text{ и } \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \quad (1.80)$$

Исключая из этих уравнений  $y'$ , получим уравнение

$$\Phi(x, y) = 0, \quad (1.81)$$

которому должны удовлетворять точки особого множества. Однако не в каждой точке, удовлетворяющей уравнению (1.81), обязательно нарушается единственность решения уравнения (1.78), так как условия теоремы 1.5 лишь достаточны для единственности решения, но не являются необходимыми, и следовательно, нарушение какого-нибудь условия теоремы не обязательно влечет за собой нарушение единственности.

Итак, только среди точек кривой  $\Phi(x, y) = 0$ , называемой *p-дискриминантной* кривой (так как уравнения (1.80) чаще записываются в виде  $F(x, y, p) = 0$  и  $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$ ), могут быть точки особого множества.

Если какая-нибудь ветвь  $y = \varphi(x)$  кривой  $\Phi(x, y) = 0$  принадлежит особому множеству и в то же время является интегральной кривой, то она называется *особой интегральной кривой*, а функция  $y = \varphi(x)$  называется *особым решением*.

Итак, для нахождения особого решения уравнения

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1.78)$$

надо найти *p-дискриминантную* кривую, определяемую уравнениями

$$F(x, y, p) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = 0,$$

выяснить путем непосредственной подстановки в уравнение (1.78), есть ли среди ветвей *p-дискриминантной* кривой интегральные кривые, и, если такие кривые есть, то еще проверить, нарушена ли в точках этих кривых единственность или нет. Если единственность нарушена, то такая ветвь *p-дискриминантной* кривой является *особой интегральной кривой*.

**Пример 1.** Имеет ли уравнение Лагранжа  $y = 2xy' - (y')^2$  особое решение?

Условия 1) и 3) теоремы существования и единственности выполнены. *p-дискриминантная* кривая определяется уравнениями:  $y = 2xp - p^2$ ,

$2x - 2p = 0$ , или, исключая  $p$ ,  $y = x^2$ . Парабола  $y = x^2$  не является интегральной кривой, так как функция  $y = x^2$  не удовлетворяет исходному уравнению. Особого решения нет.

Пример 2. Найти особое решение уравнения Лагранжа

$$x - y = \frac{4}{9} (y')^2 - \frac{8}{27} (y')^3. \quad (1.82)$$

Условия 1) и 3) теоремы существования и единственности выполнены.  $p$ -дискриминантная кривая определяется уравнениями

$$x - y = \frac{4}{9} p^2 - \frac{8}{27} p^3, \quad \frac{8}{9} (p - p^2) = 0.$$

Из второго уравнения находим  $p = 0$  или  $p = 1$ ; подставляя в первое уравнение, получим:

$$y = x \quad \text{или} \quad y = x - \frac{4}{27}.$$

Лишь вторая из этих функций является решением исходного уравнения.

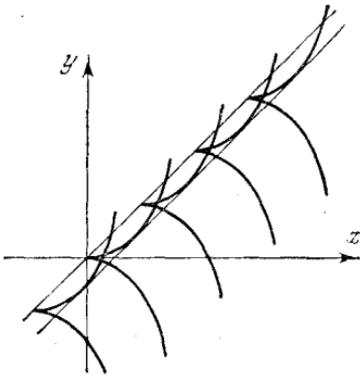


Рис. 1.30.

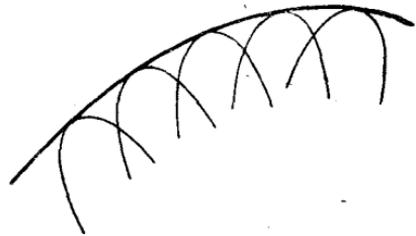


Рис. 1.31.

Для того чтобы выяснить, будет ли решение  $y = x - \frac{4}{27}$  особым, надо проинтегрировать уравнение (1.82) и выяснить, проходят ли через точки прямой  $y = x - \frac{4}{27}$  по направлению этой прямой другие интегральные кривые. Интегрируя уравнение Лагранжа (1.82), получим:

$$(y - c)^2 = (x - c)^3. \quad (1.83)$$

Из уравнения (1.83) и рис. 1.30 видно, что прямая  $y = x - \frac{4}{27}$  является огибающей семейства полукубических парабол  $(y - c)^2 = (x - c)^3$  и, следовательно, в каждой точке прямой  $y = x - \frac{4}{27}$  нарушена единственность — по одному и тому же направлению проходят две интегральные кривые: прямая  $y = x - \frac{4}{27}$  и касающаяся этой прямой в рассматриваемой точке полукубическая парабола.

Итак, особым решением является  $y = x - \frac{4}{27}$ .

В этом примере огибающая семейства интегральных кривых является особым решением.

Если огибающей семейства

$$\Phi(x, y, c) = 0 \quad (1.84)$$

называть кривую, которая в каждой своей точке касается некоторой кривой семейства (1.84) и каждого отрезка которой касается бесконечное множество кривых рассматриваемого семейства, то огибающая семейства интегральных кривых некоторого уравнения  $F(x, y, y') = 0$  всегда будет особой интегральной кривой.

Действительно, в точках огибающей значения  $x$ ,  $y$  и  $y'$  совпадают со значениями  $x$ ,  $y$  и  $y'$  для интегральной кривой, касающейся огибающей в точке  $(x, y)$ , и следовательно, в каждой точке огибающей значения  $x$ ,  $y$  и  $y'$  удовлетворяют уравнению  $F(x, y, y') = 0$ , т. е. огибающая является интегральной кривой (рис. 1.31). В каждой точке огибающей нарушена единственность, так как через точки огибающей по одному направлению проходят по крайней мере две интегральные кривые: огибающая и касающаяся ее в рассматриваемой точке интегральная кривая семейства (1.84). Следовательно, огибающая является особой интегральной кривой.

Зная семейство интегральных кривых  $\Phi(x, y, c) = 0$  некоторого дифференциального уравнения  $F(x, y, y') = 0$ , можно определить его особые решения путем нахождения огибающей. Как известно из курса дифференциальной геометрии или из курса математического анализа, огибающая входит в состав  $c$ -дискриминантной кривой, определяемой уравнениями

$$\Phi(x, y, c) = 0 \text{ и } \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0,$$

однако, кроме огибающей, в состав  $c$ -дискриминантной кривой могут входить и другие множества, например множество кратных точек кривых рассматриваемого семейства, в которых  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$ .

Чтобы некоторая ветвь  $c$ -дискриминантной кривой заведомо была огибающей, достаточно, чтобы на ней:

1) существовали ограниченные по модулю частные производные

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right| \leq N_1, \quad \left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| \leq N_2;$$

2)  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \neq 0$  или  $\frac{\partial \Phi}{\partial y} \neq 0$ .

Заметим, что эти условия лишь достаточны, так что кривые, на которых нарушено одно из условий 1), 2), тоже могут быть огибающими.

**Пример 3.** Дано семейство интегральных кривых  $(y - c)^2 = (x - c)^3$  некоторого дифференциального уравнения (см. пример 2 на стр. 79). Найти особое решение того же уравнения.

Находим  $c$ -дискриминантную кривую:

$$(y - c)^2 = (x - c)^3 \text{ и } 2(y - c) = 3(x - c)^2.$$

Исключая параметр  $c$ , получим

$$y = x \text{ и } x - y - \frac{4}{27} = 0.$$

Прямая  $y = x - \frac{4}{27}$  является огибающей, так как на ней выполнены все условия теоремы об огибающей. Функция  $y = x$  не удовлетворяет дифференциальному уравнению. Прямая  $y = x$  является геометрическим местом точек возврата (см. рис. 1.30). В точках этой прямой нарушено второе условие теоремы об огибающей.

**Пример 4.** Дано семейство интегральных кривых

$$y^{\frac{1}{5}} - x + c = 0 \tag{1.85}$$

некоторого дифференциального уравнения первого порядка. Найти особое решение того же уравнения.

Задача сводится к нахождению огибающей рассматриваемого семейства. Если непосредственно применить указанный выше метод нахождения огибающей, то получим противоречивое уравнение  $1 = 0$ , откуда казалось бы естественно сделать вывод, что семейство (1.85) не имеет огибающей. Однако

в данном случае производная от левой части уравнения (1.85) по  $y$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial y} =$

$= \frac{1}{5} y^{-\frac{4}{5}}$ , обращается в бесконечность при  $y = 0$ , и следовательно, не

исключена возможность того, что  $y = 0$  будет огибающей семейства (1.85), которую не удалось найти общим методом ввиду нарушения на прямой  $y = 0$  условий теоремы об огибающей.

Следует преобразовать уравнение (1.85) так, чтобы для преобразованного уравнения, эквивалентного исходному, уже выполнялись условия теоремы об огибающей. Например, запишем уравнение (1.85) в виде  $y - (x - c)^5 = 0$ . Теперь условия теоремы об огибающей выполнены, и, применяя общий метод, получим:

$$y = (x - c)^5, \quad 5(x - c)^4 = 0,$$

или, исключая  $c$ , будем иметь уравнение огибающей  $y = 0$  (рис. 1.32).

**Пример 5.** Дано семейство интегральных кривых

$$y^2 - (x - c)^3 = 0 \tag{1.86}$$

некоторого дифференциального уравнения первого порядка. Найти особое решение того же уравнения.

$c$ -дискриминантная кривая определяется уравнениями

$$y^2 - (x - c)^3 = 0 \text{ и } x - c = 0,$$

или, исключая  $c$ , получим  $y=0$ . На прямой  $y=0$  обращаются в нуль обе частные производные  $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$  и  $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$  от левой части уравнения (1.86), следовательно,  $y=0$  является геометрическим местом кратных точек кривых семейства (1.86), в данном случае точек возврата. Однако это геометрическое

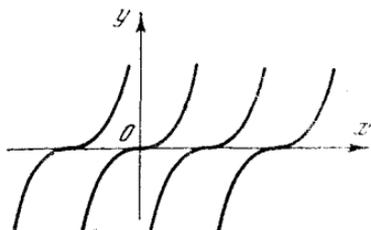


Рис. 1.32.

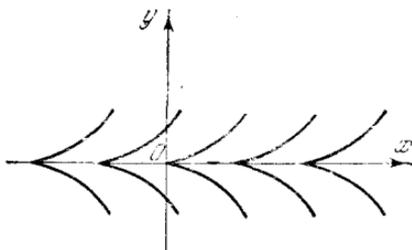


Рис. 1.33.

место точек возврата в рассматриваемом примере является одновременно и огибающей. На рис. 1.33 изображены полукубические параболы (1.86) и их огибающая  $y=0$ .

### Задачи к главе 1

1.  $\operatorname{tg} y \, dx - \operatorname{ctg} x \, dy = 0$ .
2.  $(12x + 5y - 9) \, dx + (5x + 2y - 3) \, dy = 0$ .
3.  $x \frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ .
4.  $x \frac{dy}{dx} + y + x^3$ .
5.  $y \, dx - x \, dy = x^2 y \, dy$ .
6.  $\frac{dx}{dt} + 3x = e^{2t}$ .
7.  $y \sin x + y' \cos x = 1$ .
8.  $y' = e^{x-y}$ .
9.  $\frac{dx}{dt} = x + \sin t$ .
10.  $x (\ln x - \ln y) \, dy - y \, dx = 0$ .
11.  $xy (y')^2 - (x^2 + y^2) y' + xy = 0$ .
12.  $(y')^2 = 9y^4$ .
13.  $\frac{dx}{dt} = e^{\frac{x}{t}} + \frac{x}{t}$ .
14.  $x^2 + (y')^2 = 1$ .
15.  $y = xy' + \frac{1}{y'}$ .
16.  $x = (y')^3 - y' + 2$ .
17.  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y^3}$ .
18.  $y = (y')^4 - (y')^3 - 2$ .

19. Найти ортогональные траектории семейства  $xy = c$ , т. е. найти линии, ортогонально пересекающие кривые указанного семейства.

20. Найти кривую, у которой подкасательная вдвое больше абсциссы точки касания.

21. Найти кривую, у которой отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен абсциссе точки касания.

22. Найти ортогональные траектории семейства

$$x^2 + y^2 = 2ax.$$

23. Считая, что скорость охлаждения какого-либо тела в воздухе пропорциональна разности между температурами тела и воздуха, решить следующую задачу: если температура воздуха равна  $20^\circ \text{C}$  и тело в течение

20 мин. охлаждается от  $100$  до  $60^\circ \text{C}$ , то в течение какого времени температура тела достигнет  $30^\circ \text{C}$ ?

24. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью  $10 \text{ км/час}$ . На полном ходу ее мотор был выключен и через  $t = 20$  сек. скорость лодки уменьшилась до  $v_1 = 6 \text{ км/час}$ . Определить скорость лодки через 2 мин. после остановки мотора, считая, что сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки.

25. Найти форму зеркала, отражающего параллельно данному направлению все лучи, выходящие из заданной точки.

$$26. y'^2 + y^2 = 4.$$

27. Найти кривую, у которой отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится в точке касания на равные части.

$$28. \frac{dy}{dx} = \frac{2y - x - 4}{2x - y + 5}. \quad 29. \frac{dy}{dx} - \frac{y}{1+x} + y^2 = 0.$$

30. Численно проинтегрировать уравнение

$$\frac{dy}{dx} = x + y^2, \quad y(0) = 0.$$

Определить  $y(0,5)$  с точностью до 0,01.

31. Численно проинтегрировать уравнение

$$\frac{dy}{dx} = xy^3 + x^2, \quad y(0) = 0.$$

Определить  $y(0,6)$  с точностью до 0,01.

32.  $y' = 1,31x - 0,2y^2$ ,  $y(0) = 2$ .

Составить таблицу пятнадцати значений  $y$  с шагом  $h = 0,02$ .

33.  $y = 2xy' - y'^2$ . 34.  $\frac{dy}{dx} = \cos(x - y)$ .

35. Пользуясь методом изоклин (см. стр. 17), сделать набросок семейства интегральных кривых уравнения

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2.$$

36.  $(2x + 2y - 1) dx + (x + y - 2) dy = 0$ .

37.  $y'^3 - y'e^{2x} = 0$ .

38. Найти ортогональные траектории парабол  $y^2 + 2ax = a^2$ .

39. Имеет ли дифференциальное уравнение  $y = 5xy' - (y')^2$  особое решение?

40. Приближенно проинтегрировать уравнение

$$\frac{dy}{dx} = x - y^2, \quad y(1) = 0$$

методом последовательных приближений (определить  $y_1$  и  $y_2$ ).

$$41. y = x^2 + \int_1^x \frac{y}{x} dx.$$

42. Имеет ли уравнение  $y' = \sqrt[3]{x - 5y} + 2$  особое решение?

43.  $(x - y) y dx - x^2 dy = 0$ .

44. Найти ортогональные траектории семейства  $y^2 = cx^3$ .

45.  $\dot{x} + 5x = 10t + 2$  при  $t = 1$ ,  $x = 2$ .

46.  $\dot{x} = \frac{x}{t} + \frac{x^2}{t^3}$  при  $t = 2$ ,  $x = 4$ .

47.  $y = xy' + y'^2$  при  $x = 2$ ,  $y = -1$ .

48.  $y = xy' + y'^2$  при  $x = 1$ ,  $y = -1$ .

49.  $\frac{dy}{dx} = \frac{3x - 4y - 2}{3x - 4y - 3}$ .

50.  $\dot{x} - x \operatorname{ctg} t = 4 \sin t$ .

51.  $y = x^2 + 2y'x + \frac{y'^2}{2}$ .

52.  $y' - \frac{3y}{x} + x^3y^2 = 0$ .

53.  $y(1 + y'^2) = a$ .

54.  $(x^2 - y) dx + (x^2y^2 + x) dy = 0$ .

55. Найти интегрирующий множитель уравнения

$$(3y^2 - x) dx + 2y(y^2 - 3x) dy = 0,$$

имеющий вид  $\mu = \mu(x + y^2)$ .

56.  $(x - y) y dx - x^2 dy = 0$ .

57.  $y' = \frac{x + y - 3}{1 - x + y}$ .

58.  $xy' - y^2 \ln x + y = 0$ .

59.  $(x^2 - 1) y' + 2xy - \cos x = 0$ .

60.  $(4y + 2x + 3) y' - 2y - x - 1 = 0$ .

61.  $(y^2 - x) y' - y + x^2 = 0$ .

62.  $(y^2 - x^2) y' + 2xy = 0$ .

63.  $3xy^2y' + y^3 - 2xy = 0$ .

64.  $(y')^2 + (x + a) y' - y = 0$ , где  $a$  — постоянная.

65.  $(y')^2 - 2xy' + y = 0$ .

66.  $(y')^2 + 2yy' \operatorname{ctg} x - y^2 = 0$ .

## ГЛАВА 2

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОРЯДКА ВЫШЕ ПЕРВОГО

#### § 1. Теорема существования и единственности для дифференциального уравнения $n$ -го порядка

Дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка имеют вид

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2.1)$$

или, если они не разрешены относительно старшей производной,

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Теорема существования и единственности для уравнения  $n$ -го порядка легко может быть получена путем сведения его к системе уравнений, для которой на стр. 51 теорема существования и единственности уже была доказана.

Действительно, если в уравнении  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  неизвестными функциями считать не только  $y$ , но и  $y' = y_1$ ,  $y'' = y_2, \dots, y^{(n-1)} = y_{n-1}$ , то уравнение (2.1) заменяется системой

$$\left. \begin{aligned} y' &= y_1, \\ y_1' &= y_2, \\ &\dots \\ y_{n-2}' &= y_{n-1}, \\ y_{n-1}' &= f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}), \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

после чего уже можно применить теорему о существовании и единственности решения системы уравнений (см. стр. 51), согласно которой, если правые части всех уравнений системы (2.2) непрерывны в рассматриваемой области и удовлетворяют условию Липшица по всем аргументам, кроме  $x$ , то существует единственное решение системы (2.2), удовлетворяющее условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y_1(x_0) = y_{10}, \quad \dots, \quad y_{n-1}(x_0) = y_{n-1,0}.$$

Правые части первых  $n - 1$  уравнений (2.2) непрерывны и удовлетворяют не только условию Липшица, но даже более грубому условию существования ограниченных производных по  $y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ . Следовательно, условия теоремы существования и единственности будут выполнены, если правая часть последнего уравнения  $y'_{n-1} = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})$  будет непрерывна в окрестности начальных значений и будет удовлетворять условию Липшица по всем аргументам, начиная со второго, или более грубому условию существования ограниченных частных производных по всем аргументам, начиная со второго.

Итак, возвращаясь к прежним переменным  $x$  и  $y$ , окончательно получаем следующую теорему существования и единственности:

**Теорема 2.1.** *Существует единственное решение дифференциального уравнения  $n$ -го порядка  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ , удовлетворяющее условиям*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad y''(x_0) = y''_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}_0,$$

*если в окрестности начальных значений  $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0)$  функция  $f$  является непрерывной функцией всех своих аргументов и удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам, начиная со второго.*

Последнее условие может быть заменено более грубым условием существования в той же окрестности ограниченных частных производных первого порядка от функции  $f$  по всем аргументам, начиная со второго.

*Общим решением* дифференциального уравнения  $n$ -го порядка называется множество решений, состоящее из всех без исключения частных решений. Если правая часть уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.1)$$

в некоторой области изменения аргументов удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности, то общее решение уравнения (2.1) зависит от  $n$  параметров, в качестве которых могут быть выбраны, например, начальные значения искомой функции и ее производных  $y_0, y'_0, y''_0, \dots, y^{(n-1)}_0$ . В частности, общее решение уравнения второго порядка  $y'' = f(x, y, y')$  зависит от двух параметров, например от  $y_0$  и  $y'_0$ . Если же фиксировать  $y_0$  и  $y'_0$ , т. е. задать точку  $(x_0, y_0)$  и направление касательной к искомой интегральной кривой в этой точке, то при выполнении условий теоремы существования и единственности этими условиями определяется единственная интегральная кривая.

Например, в уравнении движения материальной точки массы по прямой под действием силы  $f(t, x, \dot{x})$ :

$$m\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}),$$

задание начального положения точки  $x(t_0) = x_0$  и начальной скорости  $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$  определит единственное решение, единственный закон движения  $x = x(t)$ , если, конечно, функция  $f$  удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности.

Теорема о непрерывной зависимости решения от параметров и от начальных значений, рассмотренная на стр. 54, без изменения метода доказательства переносится на системы дифференциальных уравнений, а следовательно, и на уравнения  $n$ -го порядка.

## § 2. Простейшие случаи понижения порядка

В некоторых случаях порядок дифференциального уравнения может быть понижен, что обычно облегчает его интегрирование.

Укажем несколько наиболее часто встречающихся классов уравнений, допускающих понижение порядка.

1. Уравнение не содержит искомой функции и ее производных до порядка  $k-1$  включительно:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (2.3)$$

В этом случае порядок уравнения может быть снижен до  $n-k$  заменой переменных  $y^{(k)} = p$ .

Действительно, после замены переменных уравнение (2.3) принимает вид

$$F(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}) = 0.$$

Из этого уравнения определяется  $p = p(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-k})$ , а  $y$  находим из  $y^{(k)} = p(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-k})$   $k$ -кратным интегрированием. В частности, если уравнение второго порядка не содержит  $y$ , то замена переменных  $y' = p$  приводит к уравнению первого порядка.

Пример 1.

$$\frac{d^5 y}{dx^5} - \frac{1}{x} \frac{d^4 y}{dx^4} = 0.$$

Полагая  $\frac{d^4 y}{dx^4} = p$ , получаем  $\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x} p = 0$ ; разделяя переменные и интегрируя, будем иметь:  $\ln |p| = \ln |x| + \ln c$ , или  $p = cx$ ,  $\frac{d^4 y}{dx^4} = cx$ , откуда

$$y = c_1 x^5 + c_2 x^3 + c_3 x^2 + c_4 x + c_5.$$

Пример 2. Найти закон движения тела, падающего в воздухе без начальной скорости, считая сопротивление воздуха пропорциональным квадрату скорости.

Уравнение движения имеет вид

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = mg - k \left( \frac{ds}{dt} \right)^2,$$

где  $s$  — пройденный телом путь,  $m$  — масса тела,  $t$  — время. При  $t = 0$  будет  $s = 0$  и  $\frac{ds}{dt} = 0$ .

Уравнение не содержит явно неизвестной функции  $s$ , следовательно, можно понизить порядок уравнения, считая  $\frac{ds}{dt} = v$ . При этом уравнение движения примет вид

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{m dv}{mg - kv^2} = dt; \quad t = m \int_0^v \frac{dv}{mg - kv^2} = \frac{1}{k\sqrt{g}} \operatorname{Arth} \frac{kv}{\sqrt{g}},$$

откуда  $v = \frac{\sqrt{g}}{k} \operatorname{th}(k\sqrt{g}t)$ ; умножая на  $dt$  и интегрируя еще раз, найдем закон движения:

$$s = \frac{1}{k^2} \ln \operatorname{ch}(k\sqrt{g}t).$$

2. Уравнение не содержит независимого переменного:

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

В этом случае порядок уравнения можно понизить на единицу подстановкой  $y' = p$ , причем  $p$  рассматривается как новая неизвестная функция  $y$ ,  $p = p(y)$ , и следовательно, все производные  $\frac{d^k y}{dx^k}$  надо выразить через производные от новой неизвестной функции  $p(y)$  по  $y$ :

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p,$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dp}{dy} p \right) = \frac{d}{dy} \left( \frac{dp}{dy} p \right) \frac{dy}{dx} = \frac{d^2 p}{dy^2} p^2 + \left( \frac{dp}{dy} \right)^2 p$$

и аналогично для производных более высокого порядка. При этом очевидно, что производные  $\frac{d^k y}{dx^k}$  выражаются через производные порядка не выше  $k - 1$  от  $p$  по  $y$ , что и приводит к понижению порядка на единицу.

В частности, если уравнение второго порядка не содержит независимого переменного, то указанная замена переменных приводит к уравнению первого порядка.

Пример 3.

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} - \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = 0.$$

Полагая  $\frac{dy}{dx} = p$ ,  $\frac{d^2 y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy}$ , получим уравнение с разделяющимися переменными  $y p \frac{dp}{dy} - p^2 = 0$ , общее решение которого  $p = c_1 y$  или  $\frac{dy}{dx} = c_1 y$ . Снова разделяя переменные и интегрируя, получим  $\ln |y| = c_1 x + \ln c_2$  или  $y = c_2 e^{c_1 x}$ .

Пример 4. Проинтегрировать уравнение математического маятника  $\ddot{x} + a^2 \sin x = 0$  при начальных условиях  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

Понижаем порядок, полагая

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, & \ddot{x} &= v \frac{dv}{dx}, & v dv &= -a^2 \sin x dx, \\ \frac{v^2}{2} &= a^2 (\cos x - \cos x_0), & v &= \pm a \sqrt{2 (\cos x - \cos x_0)}, \\ \frac{dx}{dt} &= \pm a \sqrt{2 (\cos x - \cos x_0)}, & t &= \pm \frac{1}{a \sqrt{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos x_0}}. \end{aligned}$$

Интеграл, стоящий в правой части, не берется в элементарных функциях, но легко сводится к эллиптическим функциям.

3. Левая часть уравнения

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.4)$$

является производной некоторого дифференциального выражения  $(n-1)$ -го порядка  $\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ .

В этом случае легко находим так называемый *первый интеграл*, т. е. дифференциальное уравнение  $(n-1)$ -го порядка, содержащее одну произвольную постоянную, эквивалентное данному уравнению  $n$ -го порядка, и тем самым понижаем порядок уравнения на единицу. Действительно, уравнение (2.4) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0. \quad (2.4_1)$$

Если  $y(x)$  является решением уравнения (2.4<sub>1</sub>), то производная функции  $\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  тождественно равна нулю. Следовательно, функция  $\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  равна постоянной, и мы получаем первый интеграл

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = c.$$

Пример 5.

$$y y'' + (y')^2 = 0.$$

Это уравнение можно записать в виде  $d(yu') = 0$ , откуда  $yu' = c_1$  или  $y dy = c_1 dx$ . Следовательно, общим интегралом является  $y^2 = c_1 x + c_2$ .

Иногда левая часть уравнения  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  становится производной дифференциального выражения  $(n-1)$ -го порядка  $\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  лишь после умножения на некоторый множитель  $\mu(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ .

Пример 6.

$$yy'' - (y')^2 = 0.$$

Умножая на множитель  $\mu = \frac{1}{y^2}$ , получим  $\frac{yy'' - (y')^2}{y^2} = 0$  или  $\frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{y} \right) = 0$ , откуда  $\frac{y'}{y} = c_1$ , или  $\frac{d}{dx} \ln|y| = c_1$ . Следовательно,  $\ln|y| = c_1 x + \ln c_2$ ,  $c_2 > 0$ , откуда  $y = c_2 e^{c_1 x}$ ,  $c_2 \neq 0$ , как и в примере 3 этого параграфа.

**З а м е ч а н и е.** При умножении на множитель  $\mu(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  могут быть введены лишние решения, обращающие этот множитель в нуль. Если множитель  $\mu$  разрывен, то возможна и потеря решений. В примере 6 при умножении на  $\mu = \frac{1}{y^2}$  было потеряно решение  $y = 0$ , которое, однако, можно включить в полученное решение  $y = \bar{c}_2 e^{c_1 x}$ , если считать, что  $\bar{c}_2$  может принимать значение 0.

4. Уравнение  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  однородно относительно аргументов  $y, y', \dots, y^{(n)}$ .

Порядок однородного относительно  $y, y', \dots, y^{(n)}$  уравнения

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (2.5)$$

т. е. уравнения, для которого справедливо тождество

$$F(x, ky, ky', \dots, ky^{(n)}) = k^p F(x, y, y', \dots, y^{(n)}),$$

может быть понижен на единицу подстановкой  $y = e^{\int z dx}$ , где  $z$  — новая неизвестная функция. Действительно, дифференцируя, получаем

$$\begin{aligned} y' &= e^{\int z dx} z, \\ y'' &= e^{\int z dx} (z^2 + z'), \\ y''' &= e^{\int z dx} (z^3 + 3zz' + z''), \\ &\dots \dots \dots \\ y^{(k)} &= e^{\int z dx} \Phi(z, z', z'', \dots, z^{(k-1)}) \end{aligned}$$

(убедиться в справедливости этого равенства можно методом индукции).

Подставляя в (2.5) и замечая, что, в силу однородности, множитель  $e^{p \int z dx}$  можно вынести за знак функции  $F$ , получим

$$e^{p \int z dx} f(x, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0$$

или, сокращая на  $e^{p \int z dx}$ , будем иметь

$$f(x, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0.$$

Пример 7.

$$y y'' - (y')^2 = 6xy^2.$$

Полагая  $y = e^{\int z dx}$ , получим  $z' = 6x$ ,  $z = 3x^2 + c_1$ ,  $y = e^{\int (3x^2 + c_1) dx}$  или  $y = c_2 e^{(x^3 + c_1 x)}$ .

Особенно часто в приложениях встречаются дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижения порядка.

$$1) \quad F(x, y'') = 0. \quad (2.6)$$

В этом уравнении можно понизить порядок подстановкой  $y' = p$  и свести его к уравнению  $F(x, \frac{dp}{dx}) = 0$ , рассмотренному на стр. 69.

Можно разрешить уравнение (2.6) относительно второго аргумента  $y'' = f(x)$  и два раза проинтегрировать или ввести параметр и заменить уравнение (2.6) его параметрическим представлением

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(t), \quad x = \psi(t),$$

откуда

$$dy' = y'' dx = \varphi(t) \psi'(t) dt, \quad y' = \int \varphi(t) \psi'(t) dt + c_1,$$

$$dy = y' dx, \quad y = \int \left[ \int \varphi(t) \psi'(t) dt + c_1 \right] \psi'(t) dt + c_2.$$

$$2) \quad F(y', y'') = 0. \quad (2.7)$$

Полагая  $y' = p$ , преобразуем (2.7) к уравнению (1.61), стр. 70, или представим уравнение (2.7) в параметрическом виде:

$$y'_x = \varphi(t), \quad y''_{xx} = \psi(t),$$

откуда

$$dx = \frac{dy'}{y''} = \frac{\varphi'(t) dt}{\psi(t)}, \quad x = \int \frac{\varphi'(t) dt}{\psi(t)} + c_1$$

после чего  $y$  определяется квадратурой:

$$dy = y' dx = \varphi(t) \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt, \quad y = \int \frac{\varphi(t) \varphi'(t)}{\psi(t)} dt + c_2.$$

$$3) \quad F(y, y'') = 0. \quad (2.8)$$

Можно понизить порядок, полагая

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}.$$

Если уравнение (2.8) легко разрешимо относительно второго аргумента  $y'' = f(y)$ , то, умножая это уравнение почленно на  $2y' dx = 2dy$ , получим  $d(y')^2 = 2f(y) dy$ , откуда

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{2 \int f(y) dy + c_1}, \quad \pm \frac{dy}{\sqrt{2 \int f(y) dy + c_1}} = dx,$$

$$x + c_2 = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{2 \int f(y) dy + c_1}}.$$

Можно уравнение (2.8) заменить его параметрическим представлением  $y = \varphi(t)$ ,  $y'' = \psi(t)$ ; тогда из  $dy' = y'' dx$  и  $dy = y' dx$  получим  $y' dy' = y'' dy$  или

$$\frac{1}{2} d(y')^2 = \psi(t) \varphi'(t) dt,$$

$$(y')^2 = 2 \int \psi(t) \varphi'(t) dt + c_1,$$

$$y' = \pm \sqrt{2 \int \psi(t) \varphi'(t) dt + c_1},$$

после чего из  $dy = y' dx$  находим  $dx$ , а затем и  $x$ :

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t) dt}{\pm \sqrt{2 \int \psi(t) \varphi'(t) dt + c_1}},$$

$$x = \pm \int \frac{\varphi'(t) dt}{\sqrt{2 \int \psi(t) \varphi'(t) dt + c_1}} + c_2. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9) и  $y = \varphi(t)$  и определяют в параметрическом виде семейство интегральных кривых.

**Пример 8.**

$$y'' = 2y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Умножая обе части уравнения на  $2y' dx$ , получим  $d(y')^2 = 4y^3 dy$ , откуда  $(y')^2 = y^4 + c_1$ . Принимая во внимание начальные условия находим, что

$c_1 = 0$  и  $y' = y^2$ . Следовательно,  $\frac{dy}{y^2} = dx$ ,  $-\frac{1}{y} = x + c_2$ ,  $c_2 = -1$ ,

$$y = \frac{1}{1-x}.$$

### § 3. Лине́йные дифференциальные уравнения $n$ -го порядка

*Линейным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка* называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производных и, следовательно, имеющее вид

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = \varphi(x). \quad (2.10)$$

Если правая часть  $\varphi(x) \equiv 0$ , то уравнение называется *линейным однородным*, так как оно однородно относительно неизвестной функции  $y$  и ее производных.

Если коэффициент  $a_0(x)$  не равен нулю ни в одной точке некоторого отрезка  $a \leq x \leq b$ , то, разделив на  $a_0(x)$ , приведем линейное однородное уравнение при  $x$ , изменяющемся на этом отрезке, к виду

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (2.11)$$

или

$$y^{(n)} = - \sum_{i=1}^n p_i(x)y^{(n-i)}. \quad (2.11_1)$$

Если коэффициенты  $p_i(x)$  непрерывны на отрезке  $a \leq x \leq b$ , то в окрестности любых начальных значений

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

где  $x_0$  — любая точка интервала  $a < x < b$ , удовлетворяются условия теоремы существования и единственности.

Действительно, правая часть уравнения (2.11<sub>1</sub>) непрерывна по совокупности всех аргументов и существуют ограниченные по модулю частные производные  $\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} = -p_{n-k}(x)$  ( $k = 0, 1, \dots, (n-1)$ ), так как функции  $p_{n-k}(x)$  непрерывны на отрезке  $a \leq x \leq b$  и, следовательно, ограничены по модулю

Заметим, что линейность и однородность уравнения сохраняются при любом преобразовании независимого переменного  $x = \varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  — произвольная  $n$  раз дифференцируемая функция, производная которой  $\varphi'(t) \neq 0$  на рассматриваемом отрезке изменения  $t$ .

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \frac{1}{\varphi'(t)}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d^2y}{dt^2} \frac{1}{[\varphi'(t)]^2} - \frac{dy}{dt} \frac{\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Производная любого порядка  $\frac{d^k y}{dx^k}$  является линейной однородной функцией производных  $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^k y}{dt^k}$ , и следовательно, при

подстановке в уравнение (2.11) его линейность и однородность сохраняются.

Линейность и однородность сохраняются также при линейном однородном преобразовании неизвестной функции  $y(x) = \alpha(x) z(x)$ . Действительно, по формуле дифференцирования произведения

$$y^{(k)} = \alpha(x) z^{(k)} + k\alpha'(x) z^{(k-1)} + \frac{k(k-1)}{2!} \alpha''(x) z^{(k-2)} + \dots + \alpha^{(k)}(x) z,$$

т. е. производная  $y^{(k)}$  является линейной однородной функцией  $z, z', z'', \dots, z^{(k)}$ . Следовательно, левая часть линейного однородного уравнения

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = 0$$

после замены переменных будет линейной однородной функцией  $z, z', \dots, z^{(n)}$ .

Запишем линейное однородное уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = 0$$

кратко в виде

$$L[y] = 0,$$

где

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y.$$

Будем называть  $L[y]$  *линейным дифференциальным оператором*.

Линейный дифференциальный оператор обладает следующими двумя основными свойствами:

1) *Постоянный множитель выносится за знак линейного оператора:*

$$L[cy] \equiv cL[y].$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (cy)^{(n)} + p_1(x) (cy)^{n-1} + \dots \\ \dots + p_n(x) (cy) \equiv c[y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y]. \end{aligned}$$

2) *Линейный дифференциальный оператор, примененный к сумме двух функций  $y_1$  и  $y_2$ , равен сумме результатов применения того же оператора к каждой функции в отдельности:*

$$L[y_1 + y_2] \equiv L[y_1] + L[y_2].$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(x) (y_1 + y_2)^{n-1} + \dots + p_n(x) (y_1 + y_2) \equiv \\ \equiv [y_1^{(n)} + p_1(x) y_1^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y_1] + [y_2^{(n)} + p_1(x) y_2^{(n-1)} + \dots \\ \dots + p_n(x) y_2]. \end{aligned}$$

Следствием свойств 1) и 2) является

$$L \left[ \sum_{i=1}^m c_i y_i \right] \equiv \sum_{i=1}^m c_i L[y_i],$$

где  $c_i$  — постоянные.

Опираясь на свойства линейного оператора  $L$ , докажем ряд теорем о решениях линейного однородного уравнения.

**Теорема 2.2.** Если  $y_1$  является решением линейного однородного уравнения  $L[y] = 0$ , то и  $c y_1$ , где  $c$  — произвольная постоянная, является решением того же уравнения.

Доказательство. Дано  $L[y_1] \equiv 0$ . Надо доказать, что  $L[c y_1] \equiv 0$ .

Пользуясь свойством 1) оператора  $L$ , получим

$$L[c y_1] \equiv c L[y_1] \equiv 0.$$

**Теорема 2.3.** Сумма  $y_1 + y_2$  решений  $y_1$  и  $y_2$  линейного однородного уравнения  $L[y] = 0$  является решением того же уравнения.

Доказательство. Дано  $L[y_1] \equiv 0$  и  $L[y_2] \equiv 0$ . Надо доказать, что  $L[y_1 + y_2] \equiv 0$ .

Пользуясь свойством 2) оператора  $L$ , получим:

$$L[y_1 + y_2] \equiv L[y_1] + L[y_2] \equiv 0.$$

**Следствие теорем 2.2 и 2.3.** Линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами  $\sum_{i=1}^m c_i y_i$  решений  $y_1, y_2, \dots, y_m$  линейного однородного уравнения  $L[y] = 0$  является решением того же уравнения.

**Теорема 2.4.** Если линейное однородное уравнение  $L[y] = 0$  с действительными коэффициентами  $p_i(x)$  имеет комплексное решение  $y(x) = u(x) + i v(x)$ , то действительная часть этого решения  $u(x)$  и его мнимая часть  $v(x)$  в отдельности являются решениями того же однородного уравнения.

Доказательство. Дано  $L[u(x) + i v(x)] \equiv 0$ . Надо доказать, что  $L[u] \equiv 0$  и  $L[v] \equiv 0$ .

Пользуясь свойствами 1) и 2) оператора  $L$ , получим:

$$L[u + i v] \equiv L[u] + i L[v] \equiv 0,$$

откуда  $L[u] \equiv 0$  и  $L[v] \equiv 0$ , так как комплексная функция действительного переменного обращается тождественно в нуль тогда и только тогда, когда ее действительная и мнимая части тождественно равны нулю.

**Замечание.** Мы применили свойства 1) и 2) оператора  $L$  к комплексной функции  $u(x) + i v(x)$  действительного переменного,



где  $P_l(x)$  — многочлен степени не выше  $n_l$ , причем хотя бы один полином, например  $P_p(x)$ , не равен нулю тождественно. Разделим тождество (2.16) на  $e^{k_1 x}$  и продифференцируем  $n_1 + 1$  раз. Тогда первое слагаемое в тождестве (2.16) исчезнет, и мы получим линейную зависимость такого же вида, но с меньшим числом функций:

$$Q_2(x) e^{(k_2 - k_1)x} + \dots + Q_p(x) e^{(k_p - k_1)x} = 0. \quad (2.17)$$

При этом степени многочленов  $Q_l$  и  $P_l$  ( $l = 2, 3, \dots, p$ ) совпадают, так как при дифференцировании произведения  $P_l(x) e^{p x}$ ,  $p \neq 0$ , получим  $[P_l(x) p + P'_l(x)] e^{p x}$ , т. е. коэффициент при старшем члене многочлена  $P_l(x)$  после дифференцирования произведения  $P_l(x) e^{p x}$  приобретает лишь не равный нулю множитель  $p$ . В частности, совпадают степени многочленов  $P_p(x)$  и  $Q_p(x)$ , и следовательно, многочлен  $Q_p(x)$  не равен нулю тождественно. Деля тождество (2.17) на  $e^{(k_2 - k_1)x}$  и дифференцируя  $n_2 + 1$  раз, получим линейную зависимость с еще меньшим числом функций. Продолжая этот процесс  $p - 1$  раз, получим

$$R_p(x) e^{(k_p - k_{p-1})x} \equiv 0.$$

что невозможно, так как степень многочлена  $R_p(x)$  равна степени многочлена  $P_p(x)$  и, следовательно, многочлен  $R_p(x)$  не равен нулю тождественно.

Доказательство не изменяется и при комплексных  $k_l$ .

**Теорема 2.5.** Если функции  $y_1, y_2, \dots, y_n$  линейно зависимы на отрезке  $a \leq x \leq b$ , то на том же отрезке определитель

$$W(x) = W[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ y''_1 & y''_2 & \dots & y''_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

называемый определителем Вронского\*), тождественно равен нулю.

Доказательство. Дано, что

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n \equiv 0 \quad (2.18)$$

на отрезке  $a \leq x \leq b$ , причем не все  $\alpha_l$  равны нулю. Дифференцируя тождество (2.18)  $n - 1$  раз, получим

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n &\equiv 0, \\ \alpha_1 y'_1 + \alpha_2 y'_2 + \dots + \alpha_n y'_n &\equiv 0, \\ \dots &\dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \alpha_2 y_2^{(n-1)} + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)} &\equiv 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

\*) По имени польского математика Г. Вронского (1775—1853).



Следовательно,  $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$  и решения  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , вопреки условию теоремы, линейно зависимы.

**Замечание 1.** Из теорем 2.5 и 2.6 следует, что линейно независимые на отрезке  $a \leq x \leq b$  решения  $y_1, y_2, \dots, y_n$  уравнения (2.20) линейно независимы также на любом отрезке  $a_1 \leq x \leq b_1$ , расположенном на отрезке  $a \leq x \leq b$ .

**Замечание 2.** В теореме 2.6 в отличие от теоремы 2.5 предполагалось, что функции  $y_1, y_2, \dots, y_n$  являются решениями линейного однородного уравнения (2.20) с непрерывными коэффициентами. Отказаться от этого требования и считать функции  $y_1, y_2, \dots, y_n$  произвольными  $n - 1$  раз непрерывно дифференцируемыми функциями нельзя. Легко привести примеры линейно независимых функций, не являющихся, конечно, решениями уравнения (2.20) с непрерывными коэффициентами, для которых определитель Вронского не только обращается в нуль в отдельных точках, но даже тождественно равен нулю. Пусть, например, на отрезке  $0 \leq x \leq 2$  определены две функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$ :

$$y_1(x) = (x - 1)^2 \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1$$

и

$$y_1(x) = 0 \quad \text{при } 1 < x \leq 2.$$

$$y_2(x) = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1$$

и

$$y_2(x) = (x - 1)^2 \quad \text{при } 1 < x \leq 2$$

(рис. 2.1).

Очевидно,  $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \equiv 0$  при  $0 \leq x \leq 2$ , так как на отрезке  $0 \leq x \leq 1$  второй столбец состоит из нулей, а при  $1 < x \leq 2$  из нулей состоит первый столбец. Однако функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  линейно независимы на всем отрезке  $0 \leq x \leq 2$ , так как, рассматривая тождество  $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \equiv 0$ ,  $0 \leq x \leq 2$ , вначале на отрезке  $0 \leq x \leq 1$ , приходим к выводу, что  $\alpha_1 = 0$ , а затем, рассматривая это тождество на отрезке  $1 \leq x \leq 2$ , находим, что и  $\alpha_2 = 0$ .

**Теорема 2.7.** Общим решением при  $a \leq x \leq b$  линейного однородного уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0 \quad (2.20)$$

с непрерывными на отрезке  $a \leq x \leq b$  коэффициентами  $p_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) является линейная комбинация  $y = \sum_{i=1}^n c_i y_i$

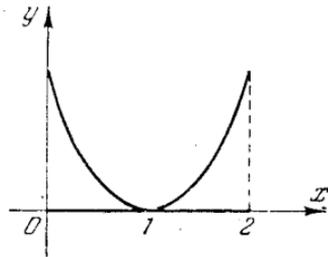


Рис. 2.1



подчинив их выбор лишь условию

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

где  $x_0$  — любая точка отрезка  $a \leq x \leq b$ . Тогда решения  $y_i(x)$ , определяемые начальными значениями  $y_i^{(k)}(x_0)$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ ), образуют фундаментальную систему, так как их определитель Вронского  $W(x)$  в точке  $x = x_0$  отличен от нуля и, следовательно, на основании теорем 2.5 и 2.6 решения  $y_1, y_2, \dots, y_n$  линейно независимы.

**Пример 4.** Уравнение  $y'' - y = 0$  имеет очевидные линейно независимые частные решения  $y_1 = e^x$  и  $y_2 = e^{-x}$  (см. стр. 96, пример 2), следовательно, общее решение имеет вид  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ .

**Пример 5.** Решение  $y = c_1 e^x + c_2 \operatorname{ch} x + c_3 \operatorname{sh} x$  уравнения  $y''' - y' = 0$  не является общим решением, так как решения  $e^x, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x$  линейно зависимы. Линейно независимыми решениями являются  $1, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x$ , и следовательно,

$$y = c_1 + c_2 \operatorname{ch} x + c_3 \operatorname{sh} x.$$

где  $c_1, c_2$  и  $c_3$  — произвольные постоянные, будет общим решением рассматриваемого уравнения.

*Зная одно нетривиальное частное решение  $y_1$  линейного однородного уравнения*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0, \quad (2.20)$$

*можно подстановкой  $y = y_1 \int u dx$  понизить порядок уравнения, сохранив его линейность и однородность.*

Действительно, подстановку  $y = y_1 \int u dx$  можно заменить двумя подстановками:  $y = y_1 z$  и  $z' = u$ . Линейное однородное преобразование

$$y = y_1 z \quad (2.23)$$

сохраняет линейность и однородность уравнения (см. стр. 94), следовательно, уравнение (2.20) преобразуется при этом к виду

$$a_0(x)z^{(n)} + a_1(x)z^{(n-1)} + \dots + a_n(x)z = 0, \quad (2.24)$$

причем решению  $y = y_1$  уравнения (2.20) в силу (2.23) соответствует решение  $z \equiv 1$  уравнения (2.24). Подставляя  $z \equiv 1$  в

уравнение (2.24), получим  $a_n(x) \equiv 0$ . Следовательно, уравнение (2.24) имеет вид

$$a_0(x)z^{(n)} + a_1(x)z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)z' = 0,$$

и подстановка  $z' = u$  понижает порядок на единицу:

$$a_0(x)u^{(n-1)} + a_1(x)u^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)u = 0.$$

Заметим, что та же подстановка  $y = y_1 \int u dx$ , где  $y_1$  — решение уравнения  $L[y] = 0$ , снижает на единицу и порядок линейного неоднородного уравнения  $L[y] = f(x)$ , так как эта подстановка не затрагивает правой части уравнения.

Зная  $k$  линейно независимых на отрезке  $a \leq x \leq b$  решений  $y_1, y_2, \dots, y_k$  линейного однородного уравнения, можно понизить его порядок до  $n - k$  на том же отрезке  $a \leq x \leq b$ .

Действительно, понизив подстановкой  $y = y_k \int u dx$  на единицу порядок уравнения

$$L[y] = 0, \quad (2.20)$$

получаем опять линейное однородное уравнение

$$a_0(x)u^{(n-1)} + a_1(x)u^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)u = 0 \quad (2.25)$$

порядка  $n - 1$ , причем нам известны  $k - 1$  его линейно независимых решений

$$u_1 = \left(\frac{y_1}{y_k}\right)', \quad u_2 = \left(\frac{y_2}{y_k}\right)', \quad \dots, \quad u_{k-1} = \left(\frac{y_{k-1}}{y_k}\right)',$$

которые получим, подставляя в  $y = y_k \int u dx$  или  $u = \left(\frac{y}{y_k}\right)'$  соответственно  $y = y_1, y = y_2, \dots, y = y_{k-1}$ . (Заметим, что уже использованному нами для понижения порядка решению  $y = y_k$  уравнения (2.20) соответствует тривиальное решение  $u \equiv 0$  уравнения (2.25).)

Решения  $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$  линейно независимы, так как если бы между ними существовала линейная зависимость на отрезке  $a \leq x \leq b$ :

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_{k-1} u_{k-1} \equiv 0$$

или

$$\alpha_1 \left(\frac{y_1}{y_k}\right)' + \alpha_2 \left(\frac{y_2}{y_k}\right)' + \dots + \alpha_{k-1} \left(\frac{y_{k-1}}{y_k}\right)' \equiv 0, \quad (2.26)$$

где хотя бы одно  $\alpha_i \neq 0$ , то, умножая на  $dx$  и интегрируя тождество (2.26) в пределах от  $x_0$  до  $x$ , где  $a \leq x \leq b$ , а  $x_0$  — точка

отрезка  $[a, b]$ , будем иметь

$$\alpha_1 \frac{y_1(x)}{y_k(x)} + \alpha_2 \frac{y_2(x)}{y_k(x)} + \dots + \alpha_{k-1} \frac{y_{k-1}(x)}{y_k(x)} - \\ - \left[ \alpha_1 \frac{y_1(x_0)}{y_k(x_0)} + \alpha_2 \frac{y_2(x_0)}{y_k(x_0)} + \dots + \alpha_{k-1} \frac{y_{k-1}(x_0)}{y_k(x_0)} \right] \equiv 0,$$

или, умножая на  $y_k(x)$  и обозначая

$$- \left[ \alpha_1 \frac{y_1(x_0)}{y_k(x_0)} + \alpha_2 \frac{y_2(x_0)}{y_k(x_0)} + \dots + \alpha_{k-1} \frac{y_{k-1}(x_0)}{y_k(x_0)} \right] = \alpha_k,$$

получим, вопреки исходному предположению, линейную зависимость между решениями  $y_1, y_2, \dots, y_k$ :

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_k y_k \equiv 0,$$

где хотя бы одно  $\alpha_i \neq 0$ . Итак, используя одно частное решение  $y_k$ , мы понизили порядок уравнения на единицу, сохранив его линейность и однородность, причем нам известно  $k-1$  линейно независимых решений преобразованного уравнения. Следовательно, тем же методом можно снизить порядок еще на одну единицу; используя еще одно решение и продолжая этот процесс  $k$  раз, получим линейное уравнение  $n-k$  порядка.

Пример 6.

$$xy'' - xy' + y = 0. \quad (2.27)$$

Уравнение имеет очевидное частное решение  $y_1 = x$ . Понижая порядок подстановкой

$$y = x \int u \, dx, \quad y' = xu + \int u \, dx, \quad y'' = xu' + 2u,$$

приведем уравнение (2.27) к виду

$$x^2 u' + (2-x) xu = 0,$$

откуда

$$\frac{du}{u} = \frac{x-2}{x} dx, \quad u = c_1 \frac{e^x}{x^2}, \quad y = x \int u \, dx = x \left[ c_1 \int \frac{e^x}{x^2} dx + c_2 \right].$$

**Лемма.** Два уравнения вида

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = 0, \quad (2.28)$$

$$y^{(n)} + q_1(x) y^{(n-1)} + \dots + q_n(x) y = 0, \quad (2.29)$$

где функции  $p_i(x)$  и  $q_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) непрерывны на отрезке  $a \leq x \leq b$ , имеющие общую фундаментальную систему решений  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , совпадают, то есть  $p_i(x) \equiv q_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) на отрезке  $a \leq x \leq b$ .

Доказательство. Вычитая из (2.28) почленно (2.29), получаем новое уравнение:

$$[p_1(x) - q_1(x)] y^{(n-1)} + [p_2(x) - q_2(x)] y^{(n-2)} + \dots \\ \dots + [p_n(x) - q_n(x)] y = 0, \quad (2.30)$$

решениями которого являются функции  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , удовлетворяющие одновременно уравнениям (2.28) и (2.29).

Допустим, что хотя бы один из коэффициентов уравнения (2.30)  $[p_l(x) - q_l(x)]$  хотя бы в одной точке  $x_0$  отрезка  $a \leq x \leq b$  отличен от нуля. Тогда в силу непрерывности функций  $p_l(x)$  и  $q_l(x)$  этот коэффициент отличен от нуля в некоторой окрестности точки  $x_0$ , и следовательно, в этой окрестности функции  $y_1, y_2, \dots, y_n$  являются линейно независимыми решениями линейного однородного уравнения (2.30) порядка не выше чем  $n - 1$ , что противоречит следствию теоремы 2.7. Значит, все коэффициенты уравнения (2.30)

$$p_l(x) - q_l(x) \equiv 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n),$$

т. е.  $p_l(x) \equiv q_l(x)$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ) на отрезке  $a \leq x \leq b$ .

Итак, фундаментальная система решений  $y_1, y_2, \dots, y_n$  вполне определяет линейное однородное уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = 0, \quad (2.28)$$

и следовательно, можно поставить задачу о нахождении уравнения (2.28), имеющего заданную фундаментальную систему решений

$$y_1, y_2, \dots, y_n.$$

Так как всякое решение  $y$  искомого уравнения (2.28) должно быть линейно зависимо от решений  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , то определитель Вронского  $W[y_1, y_2, \dots, y_n, y] = 0$ . Запишем это уравнение в развернутом виде:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' & y'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0,$$

или, разлагая по элементам последнего столбца,

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] y^{(n)} - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} y^{(n-1)} + \dots = 0. \quad (2.31)$$

Полученное уравнение (2.31) и является искомым линейным однородным уравнением, имеющим заданную фундаментальную систему решений  $y_1, y_2, \dots, y_n$  (так как при  $y = y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )  $W[y_1, y_2, \dots, y_n, y] \equiv 0$ ). Разделив обе части уравнения (2.31) на отличный от нуля коэффициент  $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$  при старшей производной, приведем его к виду (2.28).

Отсюда следует, в частности, что

$$p_1(x) = - \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2, \dots, y_n]}.$$

Заметим, что определитель

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \quad (2.32)$$

равен производной от определителя Вронского  $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ . Действительно, по правилу дифференцирования определителя, производная

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

равна сумме по  $i$  от 1 до  $n$  определителей, отличающихся от определителя Вронского тем, что в них продифференцированы элементы  $i$ -й строки, а остальные строки определителя Вронского оставлены без изменения. В этой сумме только последний определитель при  $i = n$ , совпадающий с определителем (2.32), может быть отличен от нуля. Остальные определители равны нулю, так как их  $i$ -я и  $i + 1$ -я строки совпадают.

Следовательно,  $p_1(x) = -\frac{W'}{W}$ . Отсюда, умножая на  $dx$  и интегрируя, получим

$$\ln |W| = -\int p_1(x) dx + \ln c, \quad W = ce^{-\int p_1(x) dx}$$

или

$$W = ce^{-\int_{x_0}^x p_1(x) dx}. \quad (2.33)$$

При  $x = x_0$  получим  $c = W(x_0)$ , откуда

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p_1(x) dx}. \quad (2.34)$$

Формулы (2.33) или (2.34), впервые полученные М. В. Остроградским и независимо от него Лиувиллем, называются *формулами Остроградского — Лиувилля*.

Формула Остроградского — Лиувилля (2.34) может быть использована для интегрирования линейного однородного уравнения второго порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \quad (2.35)$$

если известно одно нетривиальное решение этого уравнения  $y_1$ . Согласно формуле Остроградского — Лиувилля (2.34) любое решение уравнения (2.35) должно быть также решением уравнения

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = c_1 e^{-\int p_1(x) dx}$$

или

$$y_1 y' - y y_1' = c_1 e^{-\int p_1(x) dx}.$$

Для интегрирования этого линейного уравнения первого порядка проще всего воспользоваться методом интегрирующего множителя.

Умножая на  $\mu = \frac{1}{y_1^2}$ , получим

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y}{y_1} \right) = \frac{c_1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x) dx},$$

откуда

$$\frac{y}{y_1} = \int \frac{c_1 e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx + c_2,$$

или

$$y = c_2 y_1 + c_1 y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx.$$

### § 4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами и уравнения Эйлера

1. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Если в линейном однородном уравнении

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (2.36)$$

все коэффициенты  $a_i$  постоянны, то его частные решения могут быть найдены в виде  $y = e^{kx}$ , где  $k$  — постоянная. Действительно, подставляя в уравнение (2.36)  $y = e^{kx}$  и  $y^{(p)} = k^p e^{kx}$  ( $p = 1, 2, \dots, n$ ), будем иметь:

$$a_0 k^n e^{kx} + a_1 k^{n-1} e^{kx} + \dots + a_n e^{kx} = 0.$$

Сокращая на не обращающийся в нуль множитель  $e^{kx}$ , получим так называемое *характеристическое уравнение*

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0. \quad (2.37)$$

Это уравнение  $n$ -й степени определяет те значения  $k$ , при которых  $y = e^{kx}$  является решением исходного линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами (2.36). Если все корни  $k_1, k_2, \dots, k_n$  характеристического уравнения различны, то, тем самым, найдено  $n$  линейно независимых решений  $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}$  уравнения (2.36) (см. стр. 96, пример 2). Следовательно,

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \dots + c_n e^{k_n x},$$

где  $c_i$  — произвольные постоянные, является общим решением исходного уравнения (2.36). Этот метод интегрирования линейных уравнений с постоянными коэффициентами впервые был применен Эйлером.

Пример 1.

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид  $k^2 - 3k + 2 = 0$ , его корни  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2$ . Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид  $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ .

Пример 2.

$$y''' - y' = 0.$$

Характеристическое уравнение  $k^3 - k = 0$  имеет корни  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 1$ ,  $k_3 = -1$ . Общее решение рассматриваемого уравнения  $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$ .

Так как коэффициенты уравнения (2.36) предполагаются действительными, то комплексные корни характеристического уравнения могут появляться лишь сопряженными парами. Комплексные решения  $e^{(\alpha + \beta i)x}$  и  $e^{(\alpha - \beta i)x}$ , соответствующие паре комплексных сопряженных корней

$$k_1 = \alpha + \beta i \text{ и } k_2 = \alpha - \beta i,$$

могут быть заменены двумя действительными решениями: действительной и мнимой частями (см. стр. 95) одного из решений

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x),$$

или

$$e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x).$$

Таким образом, паре комплексных сопряженных корней  $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$  соответствуют два действительных решения:  $e^{\alpha x} \cos \beta x$  и  $e^{\alpha x} \sin \beta x$ .

Пример 3.

$$y'' + 4y' + 5y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид  $k^2 + 4k + 5 = 0$ , его корни  $k_{1,2} = -2 \pm i$ . Общее решение

$$y = e^{-2x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x).$$

Пример 4.

$$y'' + a^2 y = 0.$$

Характеристическое уравнение  $k^2 + a^2 = 0$  имеет корни  $k_{1,2} = \pm ai$ . Общее решение

$$y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax.$$

Если среди корней характеристического уравнения имеются кратные, то число различных решений вида  $e^{kx}$  меньше  $n$  и, следовательно, недостающие линейно независимые решения надо искать в ином виде.

Докажем, что если характеристическое уравнение имеет корень  $k_i$  кратности  $\alpha_i$ , то решениями исходного уравнения будет не только  $e^{k_i x}$ , но и  $x e^{k_i x}$ ,  $x^2 e^{k_i x}$ , ...,  $x^{\alpha_i - 1} e^{k_i x}$ .

Предположим вначале, что характеристическое уравнение имеет корень  $k_i = 0$  кратности  $\alpha_i$ . Следовательно, левая часть характеристического уравнения (2.37) имеет в этом случае общий множитель  $k^{\alpha_i}$ , т. е. коэффициенты  $a_n = a_{n-1} = \dots = a_{n-\alpha_i+1} = 0$ , и характеристическое уравнение имеет вид

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-\alpha_i} k^{\alpha_i} = 0.$$

Соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-\alpha_i} y^{(\alpha_i)} = 0,$$

очевидно, имеет частные решения  $1, x, x^2, \dots, x^{\alpha_i - 1}$ , так как уравнение не содержит производных порядка ниже чем  $\alpha_i$ . Итак, кратному корню  $k_i = 0$  кратности  $\alpha_i$  соответствует  $\alpha_i$  линейно независимых (см. стр. 96, пример 1) решений

$$1, x, x^2, \dots, x^{\alpha_i - 1}.$$

Если характеристическое уравнение имеет корень  $k_i \neq 0$  кратности  $\alpha_i$ , то замена переменных

$$y = e^{k_i x} z \quad (2.38)$$

сводит задачу к уже рассмотренному случаю равного нулю кратного корня.

Действительно, линейное однородное преобразование неизвестной функции (2.38), как указано на стр. 94, сохраняет линейность и однородность уравнения. Постоянство коэффициентов при замене переменных (2.38) тоже сохранится, так как

$$y^{(p)} = (ze^{k_i x})^{(p)} = e^{k_i x} (z^{(p)} + pz^{(p-1)}k_i + \frac{p(p-1)}{2!} z^{(p-2)}k_i^2 + \dots + zk_i^p),$$

и после подстановки в уравнение (2.36) и сокращения на  $e^{k_i x}$  при  $z, z', \dots, z^{(n)}$  остаются лишь постоянные коэффициенты.

Итак, преобразованное уравнение будет линейным однородным уравнением  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами

$$b_0 z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \dots + b_n z = 0, \quad (2.39)$$

причем корни характеристического уравнения

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (2.37)$$

отличаются от корней характеристического уравнения для преобразованного уравнения (2.39)

$$b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n = 0 \quad (2.40)$$

на слагаемое  $k_i$ , так как между решениями  $y = e^{kx}$  уравнения (2.36) и  $z = e^{px}$  уравнения (2.39) должна быть зависимость  $y = ze^{k_i x}$  или  $e^{kx} = e^{px} e^{k_i x}$ , откуда  $k = p + k_i$ . Следовательно, корню  $k = k_i$  уравнения (2.37) соответствует корень  $p_i = 0$  уравнения (2.40).

Как нетрудно проверить, при этом соответствии сохранится и кратность корня, т. е. корень  $p_i = 0$  будет иметь кратность  $\alpha_i$ .

Действительно, кратный корень  $k_i$  уравнения (2.37) можно рассматривать как результат совпадения различных корней этого уравнения при изменении его коэффициентов, но тогда в силу зависимости  $k = p + k_i$  совпадут с  $p = 0$  и  $\alpha_i$  корней уравнения (2.40).

Корню  $p = 0$  кратности  $\alpha_i$  соответствуют частные решения  $z = 1, z = x, \dots, z = x^{\alpha_i - 1}$ . Следовательно, в силу зависимости  $y = ze^{k_i x}$ , корню  $k_i$  кратности  $\alpha_i$  уравнения (2.37) будут соответствовать  $\alpha_i$  частных решений

$$y = e^{k_i x}, y = xe^{k_i x}, \dots, y = x^{\alpha_i - 1} e^{k_i x}. \quad (2.41)$$

Остается показать, что решения

$$e^{k_i x}, xe^{k_i x}, \dots, x^{\alpha_i - 1} e^{k_i x} \quad (l = 1, 2, \dots, m), \quad (2.42)$$

где  $m$  — число различных корней  $k_i$  характеристического уравнения, линейно независимы, но это уже было доказано в примере 3 стр. 96.

Следовательно, общее решение уравнения (2.36) имеет вид

$$y = \sum_{i=1}^m (c_{0i} + c_{1i}x + c_{2i}x^2 + \dots + c_{\alpha_i-1,i}x^{\alpha_i-1}) e^{k_i x},$$

где  $c_{si}$  — произвольные постоянные.

Пример 5

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

Характеристическое уравнение  $k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$  или  $(k-1)^3 = 0$  имеет трехкратный корень  $k_{1,2,3} = 1$ . Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2) e^x$$

Если характеристическое уравнение имеет кратный комплексный корень  $p + qi$  кратности  $\alpha$ , то соответствующие ему решения

$$e^{(p+qi)x}, xe^{(p+qi)x}, x^2e^{(p+qi)x}, \dots, x^{\alpha-1}e^{(p+qi)x}$$

можно преобразовать по формулам Эйлера

$$e^{(p+qi)x} = e^{px} (\cos qx + i \sin qx)$$

и, отделяя действительную и мнимую части, получить  $2\alpha$  действительных решений:

$$\left. \begin{aligned} e^{px} \cos qx, xe^{px} \cos qx, x^2e^{px} \cos qx, \dots, x^{\alpha-1}e^{px} \cos qx, \\ e^{px} \sin qx, xe^{px} \sin qx, x^2e^{px} \sin qx, \dots, x^{\alpha-1}e^{px} \sin qx. \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

Взяв действительные и мнимые части решений, соответствующих сопряженному корню  $p - qi$  характеристического уравнения, мы не получим новых линейно независимых решений. Таким образом, паре комплексных сопряженных корней  $p \pm qi$  кратности  $\alpha$  соответствуют  $2\alpha$  линейно независимых действительных решений (2.43)

Пример 6.

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение  $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$  или  $(k^2 + 1)^2 = 0$  имеет двукратные корни  $\pm i$ . Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = (c_1 + c_2x) \cos x + (c_3 + c_4x) \sin x.$$

2. Уравнения Эйлера. Уравнения вида

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \quad (2.44)$$

где все  $a_i$  — постоянные, называются *уравнениями Эйлера*. Уравнение Эйлера заменой независимого переменного  $x = e^t$  \*) преобра-

\*) Или  $x = -e^t$ , если  $x < 0$ ; в дальнейшем для определенности будем считать  $x > 0$ .

зуется в линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами.

Действительно, как указано на стр. 93, линейность и однородность уравнения при преобразовании независимого переменного сохраняются, а коэффициенты становятся постоянными, потому что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} e^{-t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t} \left( \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right),$$

$$\frac{d^k y}{dx^k} = e^{-kt} \left( \beta_1 \frac{dy}{dt} + \beta_2 \frac{d^2y}{dt^2} + \dots + \beta_k \frac{d^k y}{dt^k} \right), \quad (2.45)$$

где все  $\beta_i$  — постоянные, и при подстановке в уравнение (2.44) множители  $e^{-kt}$  сокращаются с множителями  $x^k = e^{kt}$ .

Справедливость равенства (2.45) легко может быть доказана методом индукции. Действительно, допустив, что равенство (2.45) справедливо, и продифференцировав его еще раз по  $x$ , докажем справедливость равенства (2.45) и для  $\frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}} &= e^{-(k+1)t} \left( \beta_1 \frac{d^2y}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^3y}{dt^3} + \dots + \beta_k \frac{d^{k+1}y}{dt^{k+1}} \right) - \\ &- k e^{-k+1)t} \left( \beta_1 \frac{dy}{dt} + \beta_2 \frac{d^2y}{dt^2} + \dots + \beta_k \frac{d^k y}{dt^k} \right) = \\ &= e^{-(k+1)t} \left( \gamma_1 \frac{dy}{dt} + \gamma_2 \frac{d^2y}{dt^2} + \dots + \gamma_{k+1} \frac{d^{k+1}y}{dt^{k+1}} \right), \end{aligned}$$

где все  $\gamma_i$  — постоянные.

Итак, справедливость формулы (2.45) доказана, и следовательно, линейно входящие в уравнение Эйлера

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k} x^k \frac{d^k y}{dx^k} = 0 \quad (2.44')$$

с постоянными коэффициентами произведения

$$x^k \frac{d^k y}{dx^k} = \beta_1 \frac{dy}{dt} + \beta_2 \frac{d^2y}{dt^2} + \dots + \beta_k \frac{d^k y}{dt^k}$$

линейно (с постоянными коэффициентами) выражаются через производные функции  $y$  по новой независимой переменной  $t$ . Отсюда следует, что преобразованное уравнение будет линейным однородным уравнением с постоянными коэффициентами

$$b_0 \frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + b_{n-1} \frac{dy}{dt} + b_n y = 0. \quad (2.46)$$

Вместо того чтобы преобразовывать уравнение Эйлера в линейное уравнение с постоянными коэффициентами, частные решения которого имеют вид  $y = e^{kt}$ , можно сразу искать решения исходного уравнения в виде  $y = x^k$ , так как

$$e^{kt} = x^k.$$

Получающееся при этом после сокращения на  $x^k$  уравнение

$$a_0 k(k-1) \dots (k-n+1) + a_1 k(k-1) \dots (k-n+2) + \dots + a_n = 0 \quad (2.47)$$

для определения  $k$  должно совпадать с характеристическим уравнением для преобразованного уравнения (2.46). Следовательно, корням  $k_i$  уравнения (2.47) кратности  $\alpha_i$  соответствуют решения

$$e^{k_i t}, t e^{k_i t}, t^2 e^{k_i t}, \dots, t^{\alpha_i - 1} e^{k_i t}$$

преобразованного уравнения или

$$x^{k_i}, x^{k_i} \ln x, x^{k_i} \ln^2 x, \dots, x^{k_i} \ln^{\alpha_i - 1} x$$

исходного уравнения, а комплексным сопряженным корням  $p \pm qt$  уравнения (2.47) кратности  $\alpha$  соответствуют решения

$$e^{pt} \cos qt, t e^{pt} \cos qt, \dots, t^{\alpha-1} e^{pt} \cos qt, \\ e^{pt} \sin qt, t e^{pt} \sin qt, \dots, t^{\alpha-1} e^{pt} \sin qt$$

преобразованного уравнения или

$$x^p \cos(q \ln x), x^p \ln x \cos(q \ln x), \dots, x^p \ln^{\alpha-1} x \cos(q \ln x), \\ x^p \sin(q \ln x), x^p \ln x \sin(q \ln x), \dots, x^p \ln^{\alpha-1} x \sin(q \ln x)$$

исходного уравнения Эйлера.

Пример 7.

$$x^2 y'' + \frac{5}{2} x y' - y = 0.$$

Ищем решение в виде  $y = x^k$ ;  $k(k-1) + \frac{5}{2}k - 1 = 0$ , откуда  $k_1 = \frac{1}{2}$ ,  $k_2 = -2$ . Следовательно, общее решение при  $x > 0$  имеет вид

$$y = c_1 x^{\frac{1}{2}} + c_2 x^{-2}.$$

Пример 8.

$$x^2 y'' - x y' + y = 0.$$

Ищем решение в виде  $y = x^k$ ;  $k(k-1) - k + 1 = 0$ , или  $(k-1)^2 = 0$ ,  $k_{1,2} = 1$ . Следовательно, общее решение при  $x > 0$  будет

$$y = (c_1 + c_2 \ln x) x.$$

Пример 9.

$$x^2 y'' + x y' + y = 0.$$

Ищем решение в виде  $y = x^k$ ;  $k(k-1) + k + 1 = 0$ , откуда  $k_{1,2} = \pm i$ . Следовательно, общее решение при  $x > 0$  имеет вид

$$y = c_1 \cos \ln x + c_2 \sin \ln x.$$

Уравнения вида

$$a_0(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots \\ \dots + a_{n-1}(ax+b) y' + a_n y = 0 \quad (2.48)$$

также называются *уравнениями Эйлера* и сводятся к уравнению (2.44) заменой независимого переменного  $ax+b = x_1$ . Следовательно, частные решения этого уравнения можно искать в виде  $y = (ax+b)^k$  или преобразовать уравнение (2.48) к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами заменой переменных  $ax+b = e^t$  (или  $ax+b = -e^t$ , если  $ax+b < 0$ ).

## § 5. Линейные неоднородные уравнения

*Линейное неоднородное уравнение* имеет вид

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = \varphi(x).$$

Если  $a_0(x) \neq 0$  на рассматриваемом интервале изменения  $x$ , то после деления на  $a_0(x)$  получим

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = f(x). \quad (2.49)$$

Это уравнение, сохраняя прежние обозначения, кратко запишем в виде

$$L[y] = f(x).$$

Если при  $a \leq x \leq b$  в уравнении (2.49) все коэффициенты  $p_i(x)$  и правая часть  $f(x)$  непрерывны, то оно имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

где  $y_0^{(k)}$  — любые действительные числа, а  $x_0$  — любая точка интервала  $a < x < b$ .

Действительно, правая часть уравнения

$$y^{(n)} = -p_1(x) y^{(n-1)} - p_2(x) y^{(n-2)} - \dots - p_n(x) y + f(x) \quad (2.49_1)$$

в окрестности рассматриваемых начальных значений удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности:

1) правая часть непрерывна по всем аргументам;

2) имеет ограниченные частные производные по всем  $y^{(k)}$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ), так как эти производные равны непрерывным по предположению на отрезке  $a \leq x \leq b$  коэффициентам  $-p_{n-k}(x)$ .

Еще раз отметим, что на начальные значения  $y_0^{(k)}$  не налагается никаких ограничений.

Из двух основных свойств линейного оператора

$$L[cy] = cL[y],$$

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2],$$

где  $c$  — постоянная, непосредственно следует:

1) Сумма  $\tilde{y} + y_1$  решения  $\tilde{y}$  неоднородного уравнения

$$L[y] = f(x) \quad (2.49)$$

и решения  $y_1$  соответствующего однородного уравнения  $L[y] = 0$  является решением неоднородного уравнения (2.49).

Доказательство.

$$L[\tilde{y} + y_1] = L[\tilde{y}] + L[y_1],$$

но  $L[\tilde{y}] \equiv f(x)$ , а  $L[y_1] \equiv 0$ , следовательно,

$$L[\tilde{y} + y_1] \equiv f(x).$$

2) Если  $y_i$  является решением уравнения  $L[y] = f_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), то  $y = \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i$  является решением уравнения

$$L[y] = \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x),$$

где  $\alpha_i$  — постоянные.

Доказательство.

$$L \left[ \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i \right] \equiv \sum_{i=1}^m L[\alpha_i y_i] \equiv \sum_{i=1}^m \alpha_i L[y_i], \quad (2.50)$$

но  $L[y_i] \equiv f_i(x)$ , следовательно,

$$L \left[ \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i \right] \equiv \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x).$$

Это свойство, называемое часто *принципом суперпозиции* (или *принципом наложения*), очевидно, остается справедливым и при  $m \rightarrow \infty$ , если ряд  $\sum_{i=1}^x \alpha_i y_i$  сходится и допускает  $n$ -кратное почленное дифференцирование, так как в этом случае возможен предельный переход в тождествах (2.50).

3) Если уравнение  $L[y] = U(x) + iV(x)$ , где все коэффициенты  $p_i(x)$  и функции  $U(x)$  и  $V(x)$  действительны, имеет решение  $y = u(x) + iv(x)$ , то действительная часть реше-



Эта линейная по отношению к постоянным  $c_i$  система  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными при произвольных правых частях допускает единственное решение относительно  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), так как определитель системы (2.53), будучи определителем Вронского  $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$  для линейно независимой системы решений соответствующего однородного уравнения, отличен от нуля при любых значениях  $x$  из отрезка  $a \leq x \leq b$  и, в частности, при  $x = x_0$ .

Следовательно, интегрирование линейного неоднородного уравнения сводится к нахождению одного частного решения этого уравнения и к интегрированию соответствующего линейного однородного уравнения.

Пример 1.

$$y'' + y = x.$$

Одно частное решение этого уравнения  $y = x$ , очевидно, общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad (\text{см. стр. 108, пример 4}).$$

Следовательно, общее решение исходного неоднородного уравнения

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x.$$

*Если подбор частного решения неоднородного уравнения труден, но общее решение соответствующего однородного уравнения  $y = \sum_{i=1}^n c_i y_i$  найдено, то можно проинтегрировать линейное неоднородное уравнение методом вариации постоянных.*

При применении этого метода решение неоднородного уравнения ищем в виде  $y = \sum_{i=1}^n c_i(x) y_i$ , т. е. по существу вместо неизвестной функции  $y$  вводим  $n$  неизвестных функций  $c_i(x)$ . Так как подбором функций  $c_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) надо удовлетворить лишь одному уравнению

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = f(x), \quad (2.49)$$

то можно потребовать, чтобы эти  $n$  функций  $c_i(x)$  удовлетворяли бы еще каким-нибудь  $n - 1$  уравнениям, которые мы выбираем так,

чтобы производные функции  $y = \sum_{i=1}^n c_i(x) y_i(x)$  имели бы по возможности такой же вид, какой они имеют при постоянных  $c_i$ . Выберем  $c_i(x)$  так, чтобы вторая сумма в правой части

$$y' = \sum_{i=1}^n c_i(x) y_i'(x) + \sum_{i=1}^n c_i'(x) y_i(x)$$

равнялась нулю,

$$\sum_{i=1}^n c_i(x) y_i(x) = 0,$$

и, следовательно,

$$y' = \sum_{i=1}^n c_i(x) y_i'(x),$$

т. е.  $y'$  имеет такой же вид, как и при постоянных  $c_i$ . Точно так же у второй производной

$$y'' = \sum_{i=1}^n c_i(x) y_i'' + \sum_{i=1}^n c_i'(x) y_i'$$

требуем обращения в нуль второй суммы и тем самым подчиняем  $c_i(x)$  второму условию:

$$\sum_{i=1}^n c_i'(x) y_i' = 0.$$

Продолжая вычислять производные функции  $y = \sum_{i=1}^n c_i(x) y_i$  до порядка  $n-1$  включительно и требуя каждый раз обращения в нуль суммы  $\sum_{i=1}^n c_i'(x) y_i^{(k)}(x)$ :

$$\sum_{i=1}^n c_i'(x) y_i^{(k)}(x) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-2), \quad (2.54)$$

получим

$$\left. \begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^n c_i(x) y_i, \\ y' &= \sum_{i=1}^n c_i(x) y_i', \\ y'' &= \sum_{i=1}^n c_i(x) y_i'', \\ &\dots \dots \dots \\ y^{(n-1)} &= \sum_{i=1}^n c_i(x) y_i^{(n-1)}, \\ y^{(n)} &= \sum_{i=1}^n c_i(x) y_i^{(n)} + \sum_{i=1}^n c_i'(x) y_i^{(n-1)}. \end{aligned} \right\} (2.55)$$

В последнем равенстве мы не можем потребовать, чтобы  $\sum_{i=1}^n c_i' y_i^{(n-1)} = 0$ , так как функции  $c_i(x)$  уже подчинены  $n-1$  условиям (2.54).

а надо еще удовлетворить исходному уравнению (2.49). Подставляя  $y, y', \dots, y^{(n)}$  из (2.55) в уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = f(x), \quad (2.49)$$

получим недостающее уравнение для определения  $c_i(x)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). При этом очевидно, что в левой части уравнения (2.49) останется

лишь сумма  $\sum_{i=1}^n c'_i(x) y_i^{(n-1)}$ , так как все остальные члены имеют такой же вид, как и при постоянных  $c_i$ , а при постоянных  $c_i$  функция  $y = \sum_{i=1}^n c_i y_i$  удовлетворяет соответствующему однородному уравнению.

В этом можно убедиться и непосредственным вычислением:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c'_i y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^n c_i y_i^{(n)} + p_1(x) \sum_{i=1}^n c_i y_i^{(n-1)} + p_2(x) \sum_{i=1}^n c_i y_i^{(n-2)} + \dots \\ \dots + p_n(x) \sum_{i=1}^n c_i y_i = f(x) \end{aligned}$$

или

$$\sum_{i=1}^n c'_i y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^n c_i [y_i^{(n)} + p_1(x) y_i^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y_i] = f(x). \quad (2.56)$$

Все  $y_i$  являются частными решениями соответствующего однородного уравнения, следовательно,  $y_i^{(n)} + p_1(x) y_i^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y_i \equiv 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) и уравнение (2.56) принимает вид

$$\sum_{i=1}^n c'_i y_i^{(n-1)} = f(x).$$

Итак, функции  $c_i(x)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) определяются из системы  $n$  линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n c'_i(x) y_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n c'_i(x) y'_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n c'_i(x) y''_i &= 0, \\ \dots & \\ \sum_{i=1}^n c'_i(x) y_i^{(n-2)} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n c'_i(x) y_i^{(n-1)} &= f(x) \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

с отличным от нуля определителем системы, так как этот определитель

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

является определителем Вронского для линейно независимых решений соответствующего однородного уравнения. Определив из (2.57) все  $c_i'(x) = \varphi_i(x)$ , квадратурами находим

$$c_i(x) = \int \varphi_i(x) dx + \bar{c}_i.$$

Пример 2.

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид  $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ . Варьируем  $c_1$  и  $c_2$ :

$$y = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x.$$

$c_1(x)$  и  $c_2(x)$  определяются из системы уравнений (2.57):

$$\begin{aligned} c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x &= 0, \\ -c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x &= \frac{1}{\cos x}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= -\frac{\sin x}{\cos x}, & c_1(x) &= \ln |\cos x| + \bar{c}_1; \\ c_2'(x) &= 1, & c_2(x) &= x + \bar{c}_2. \end{aligned}$$

Общее решение исходного уравнения

$$y = \bar{c}_1 \cos x + \bar{c}_2 \sin x + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x.$$

Пример 3.

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t).$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид  $x = c_1 \cos at + c_2 \sin at$ . Варьируя постоянные  $x = c_1(t) \cos at + c_2(t) \sin at$  получим

$$\begin{aligned} c_1'(t) \cos at + c_2'(t) \sin at &= 0, \\ -ac_1'(t) \sin at + ac_2'(t) \cos at &= f(t), \end{aligned}$$

откуда

$$c_1'(t) = -\frac{1}{a} f(t) \sin at, \quad c_1(t) = -\frac{1}{a} \int_0^t f(u) \sin au \, du + \bar{c}_1,$$

$$c_2'(t) = \frac{1}{a} f(t) \cos at, \quad c_2(t) = \frac{1}{a} \int_0^t f(u) \cos au \, du + \bar{c}_2,$$

$$x(t) = -\frac{\cos at}{a} \int_0^t f(u) \sin au \, du + \frac{\sin at}{a} \int_0^t f(u) \cos au \, du + \\ + \bar{c}_1 \cos at + \bar{c}_2 \sin at,$$

или

$$x(t) = \frac{1}{a} \int_0^t f(u) [\cos au \sin at - \sin au \cos at] \, du + \bar{c}_1 \cos at + \bar{c}_2 \sin at,$$

откуда окончательно получаем

$$x(t) = \frac{1}{a} \int_0^t f(u) \sin a(t-u) \, du + \bar{c}_1 \cos at + \bar{c}_2 \sin at.$$

Заметим, что первое слагаемое правой части является частным решением исходного уравнения, удовлетворяющим начальным условиям  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

Итак, знание  $n$  линейно независимых частных решений соответствующего однородного уравнения позволяет методом вариации постоянных проинтегрировать неоднородное уравнение

$$L[y] = f(x).$$

Если же известно лишь  $k$ , где  $k < n$ , линейно независимых решений  $y_1, y_2, \dots, y_k$  соответствующего однородного уравнения, то, как уже указывалось на стр. 102, замена переменных позволяет понизить порядок уравнения до  $n - k$ , сохраняя его линейность. Заметим, что если  $k = n - 1$ , то порядок уравнения снижается до первого, а линейное уравнение первого порядка всегда можно проинтегрировать в квадратурах.

Аналогично могут быть использованы  $k$  решений неоднородного уравнения  $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_k$ , так как их разности являются уже решениями соответствующего однородного уравнения. Действительно,

$$L[\tilde{y}_j] \equiv f(x), \quad L[\tilde{y}_p] \equiv f(x),$$

следовательно,

$$L[\tilde{y}_j - \tilde{y}_p] \equiv L[\tilde{y}_j] - L[\tilde{y}_p] \equiv f(x) - f(x) \equiv 0.$$



Подставляя (2.62) и (2.63) в уравнение (2.59), получаем

$$\int_{x_0}^x L[K(x, s)] f(s) ds + f(x) \equiv f(x),$$

так как  $K(x, s)$  является решением соответствующего однородного уравнения и  $L[K(x, s)] \equiv 0$ .

Решение  $K(x, s)$  может быть выделено из общего решения  $y = \sum_{i=1}^n c_i y_i(x)$  однородного уравнения, если выбрать произвольные постоянные  $c_i$  так, чтобы удовлетворялись условия (2.60) и (2.61).

Пример 4. Для уравнения

$$y'' + a^2 y = f(x) \quad (2.64)$$

общим решением является  $y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax$ , условия (2.60) и (2.61) приводят к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} c_1 \cos as + c_2 \sin as &= 0, \\ -ac_1 \sin as + ac_2 \cos as &= 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$c_1 = -\frac{\sin as}{a}, \quad c_2 = \frac{\cos as}{a}$$

и искомое решение  $K(x, s)$  имеет вид

$$K(x, s) = \frac{1}{a} \sin a(x - s).$$

Решение уравнения (2.64), удовлетворяющее нулевым начальным условиям, согласно (2.62), представимо в виде

$$y(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \sin a(x - s) f(s) ds.$$

При  $x_0 = 0$  это решение совпадает с полученным выше (см. стр. 120) другим методом решением того же уравнения.

Можно дать физическую интерпретацию функции  $K(x, s)$  и решению линейного уравнения с правой частью в форме (2.62). При этом нам будет удобнее независимое переменное обозначить буквой  $t$ .

Во многих задачах решение  $y(t)$  уравнения

$$y^{(n)} + p_1(t) y^{(n-1)} + \dots + p_n(t) y = f(t) \quad (2.65)$$

описывает смещение некоторой системы, а функция  $f(t)$  — силу, действующую на эту систему,  $t$  — время.

Предположим вначале, что при  $t < s$  система находилась в состоянии покоя и ее смещение вызывается силой  $f_e(t)$ , отличной

от нуля лишь в промежутке  $s < t < s + \varepsilon$ , причем импульс этой силы равен 1:

$$\int_s^{s+\varepsilon} f_\varepsilon(\tau) d\tau = 1.$$

Обозначим  $y_\varepsilon(t)$  решение уравнения

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y = f_\varepsilon(t).$$

Легко проверяется существование предела  $y_\varepsilon(t)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , не зависящего от выбора функции  $f_\varepsilon(t)$ , в предположении, что она не меняет знака. Действительно,

$$y_\varepsilon(t) = \int_{t_0}^t K(t, s) f_\varepsilon(s) ds.$$

Применяя теорему о среднем при  $t > s + \varepsilon$ , получим

$$y_\varepsilon(t) = K(t, s + \varepsilon^*) \int_s^{s+\varepsilon} f_\varepsilon(\tau) d\tau = K(t, s + \varepsilon^*),$$

где  $0 < \varepsilon^* < \varepsilon$ ; следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon(t) = K(t, s).$$

Поэтому функцию  $K(t, s)$  естественно назвать *функцией влияния* мгновенного импульса в момент  $t = s$ .

Разбивая промежуток  $(t_0, t)$  точками  $s_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) на  $m$  равных частей длины  $\Delta s = \frac{t - t_0}{m}$ , представим функцию  $f(t)$  в (2.65) в виде суммы функций  $f_i(t)$ , где  $f_i(t)$  отлична от нуля лишь на  $i$ -м промежутке  $s_{i-1} < t < s_i$ , на котором она совпадает с функцией  $f(t)$ :

$$f(t) = \sum_{i=1}^m f_i(t).$$

В силу принципа суперпозиции (стр. 114) решение уравнения (2.65) имеет вид

$$y(t) = \sum_{i=1}^m y_i(t),$$

где  $y_i(t)$  — решения уравнений

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y = f_i(t)$$

с нулевыми начальными значениями. Если  $m$  достаточно велико, то решение  $y_i(t)$  можно рассматривать как функцию влияния мгновенного импульса интенсивности  $f_i(s_i)\Delta s$ . Следовательно,

$$y(t) \cong \sum_{i=1}^m K(t, s_i) f(s_i) \Delta s.$$

Переходя к пределу при  $m \rightarrow \infty$ , получим решение уравнения (2.65) с нулевыми начальными условиями в виде

$$y = \int_{t_0}^t K(t, s) f(s) ds,$$

показывающем, что влияние непрерывно действующей силы можно рассматривать как наложение (суперпозицию) влияний мгновенных импульсов.

### § 6. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и уравнения Эйлера

При решении линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами во многих случаях без труда удастся подобрать частные решения и тем самым свести задачу к интегрированию соответствующего однородного уравнения.

Пусть, например, правая часть является многочленом степени  $s$ , и следовательно, уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y &= \\ &= A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s, \end{aligned} \quad (2.66)$$

где все  $a_j$  и  $A_l$  — постоянные.

Если  $a_n \neq 0$ , то существует частное решение уравнения (2.66), имеющее тоже вид многочлена степени  $s$ . Действительно, подставляя

$$y = B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \dots + B_s$$

в уравнение (2.66) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в левой и правой частях, получаем для определения коэффициентов  $B_i$  всегда разрешимую, если  $a_n \neq 0$ , систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} a_n B_0 &= A_0, & B_0 &= \frac{A_0}{a_n}, \\ a_n B_1 + s a_{n-1} B_0 &= A_1, \end{aligned}$$

откуда определяется  $B_1$ ,

$$a_n B_2 + (s-1) a_{n-1} B_1 + s(s-1) a_{n-2} B_0 = A_2,$$

откуда определяется  $B_2$ ,

$$\dots \dots \dots a_n B_s + \dots = A_s,$$

откуда определяется  $B_s$ .

Итак, если  $a_n \neq 0$ , то существует частное решение, имеющее вид многочлена, степень которого равна степени многочлена, стоящего в правой части.

Предположим теперь, что  $a_n = 0$ , причем для общности допустим, что и  $a_{n-1} = a_{n-2} = \dots = a_{n-\alpha+1} = 0$ , но  $a_{n-\alpha} \neq 0$ , т. е.  $k = 0$  является  $\alpha$ -кратным корнем характеристического уравнения, причем случай  $\alpha = 1$  не исключается. При этом уравнение (2.66) принимает вид

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-\alpha} y^{(\alpha)} = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s. \quad (2.67)$$

Полагая  $y^{(\alpha)} = z$ , мы приходим к предыдущему случаю, и следовательно, существует частное решение уравнения (2.67), для которого

$$y^{(\alpha)} = B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \dots + B_s,$$

а значит,  $y$  является многочленом степени  $s + \alpha$ , причем, члены, начиная со степени  $\alpha - 1$  и ниже, у этого многочлена будут иметь произвольные постоянные коэффициенты, которые могут быть, в частности, выбраны равными нулю. Тогда частное решение примет следующий вид:

$$y = x^\alpha (B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \dots + B_s).$$

Пример 1.

$$y'' + y = x^2 + x. \quad (2.68)$$

Частное решение имеет вид

$$y = B_0 x^2 + B_1 x + B_2.$$

Подставляя в уравнение (2.68) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получаем

$$B_0 = 1, \quad B_1 = 1, \quad B_2 = -2, \quad \tilde{y} = x^2 + x - 2.$$

Общее решение

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^2 + x - 2.$$

Пример 2.

$$y'' + y' = x - 2.$$

Частное решение ищем в виде

$$y = x(B_0 x + B_1).$$

Подставляя в уравнение и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в левой и правой частях полученного тождества, находим

$$B_0 = \frac{1}{2}, \quad B_1 = -3, \quad \tilde{y} = x \left( \frac{1}{2} x - 3 \right).$$

Общее решение

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + x \left( \frac{1}{2} x - 3 \right).$$

Рассмотрим теперь линейное неоднородное уравнение вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = e^{px} (A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s), \quad (2.69)$$

где все  $a_j$  и  $A_l$  — постоянные. Как было указано выше (стр. 109), замена переменных  $y = e^{px} z$  преобразует уравнение (2.69) к виду

$$e^{px} [b_0 z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \dots + b_n z] = e^{px} (A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s),$$

или

$$b_0 z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \dots + b_n z = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s, \quad (2.70)$$

где все  $b_j$  — постоянные.

Частное решение уравнения (2.70), если  $b_n \neq 0$ , имеет вид

$$\tilde{z} = B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \dots + B_s,$$

а значит, частное решение уравнения (2.69)

$$\tilde{y} = e^{px} (B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \dots + B_s).$$

Условие  $b_n \neq 0$  означает, что  $\bar{k} = 0$  не является корнем характеристического уравнения

$$b_0 \bar{k}^n + b_1 \bar{k}^{n-1} + \dots + b_n = 0, \quad (2.71)$$

а следовательно,  $k = p$  не является корнем характеристического уравнения

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (2.72)$$

так как корни этих характеристических уравнений связаны зависимостью  $k = \bar{k} + p$  (см. стр. 109).

Если же  $\bar{k} = 0$  является корнем характеристического уравнения (2.71) кратности  $\alpha$ , другими словами,  $k = p$  является корнем характеристического уравнения (2.72) той же кратности  $\alpha$ , то частные решения уравнений (2.70) и (2.69) имеют соответственно вид

$$\tilde{z} = x^\alpha (B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \dots + B_s),$$

$$\tilde{y} = x^\alpha e^{px} (B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \dots + B_s).$$

Итак, если правая часть линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$e^{px} (A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s),$$

то, если  $p$  не является корнем характеристического уравнения, частное решение надо искать в таком же виде:

$$\tilde{y} = e^{px} (B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \dots + B_s).$$

Если же  $p$  является корнем характеристического уравнения кратности  $\alpha$  (этот случай называется особым или резонансным), то частное решение надо искать в виде

$$y = x^\alpha e^{px} (B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \dots + B_s).$$

Пример 3.

$$y'' + 9y = e^{5x}.$$

Частное решение надо искать в виде

$$\tilde{y} = B e^{5x}.$$

Пример 4.

$$y'' + y = e^{3x} (x - 2).$$

Частное решение надо искать в виде

$$\tilde{y} = e^{3x} (B_0 x + B_1).$$

Пример 5.

$$y'' - y = e^x (x^2 - 1).$$

Частное решение надо искать в виде

$$\tilde{y} = x e^x (B_0 x^2 + B_1 x + B_2),$$

так как  $k = 1$  является простым корнем характеристического уравнения.

Пример 6.

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x} (x - 5).$$

Частное решение надо искать в виде

$$\tilde{y} = x^3 e^{-x} (B_0 x + B_1),$$

так как  $k = -1$  является трехкратным корнем характеристического уравнения

Заметим, что наши рассуждения остаются справедливыми и при комплексном  $p$ , поэтому если правая часть линейного дифференциального уравнения имеет вид

$$e^{px} [P_s(x) \cos qx + Q_s(x) \sin qx], \quad (2.73)$$

где один из многочленов  $P_s(x)$  или  $Q_s(x)$  имеет степень  $s$ , а другой — степень не выше чем  $s$ , то, преобразуя тригонометрические функции по формулам Эйлера к показательному виду, получим в правой части

$$e^{(p+qi)x} R_s(x) + e^{(p-qi)x} T_s(x), \quad (2.74)$$

где  $R_s(x)$  и  $T_s(x)$  — многочлены степени  $s$ .

Для каждого слагаемого правой части можно уже применить указанное выше правило, а именно, если  $p \pm qi$  не являются корнями

характеристического уравнения, то частное решение можно искать в таком же виде, как и правая часть (2.74); если же  $p \pm qi$  являются корнями характеристического уравнения кратности  $\alpha$ , то частное решение приобретает еще множитель  $x^\alpha$ .

Если опять вернуться к тригонометрическим функциям, то это правило можно сформулировать так:

а) Если  $p \pm qi$  не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение надо искать в виде

$$\tilde{y} = e^{px} [\bar{P}_s(x) \cos qx + \bar{Q}_s(x) \sin qx],$$

где  $\bar{P}_s(x)$  и  $\bar{Q}_s(x)$  — многочлены степени  $s$  с неопределенными коэффициентами.

Заметим, что если один из многочленов  $P_s(x)$  или  $Q_s(x)$  имеет степень ниже  $s$  или даже, в частности, тождественно равен нулю, то все же оба многочлена  $\bar{P}_s(x)$  и  $\bar{Q}_s(x)$  будут, вообще говоря, иметь степень  $s$ .

б) Если  $p \pm qi$  являются  $\alpha$ -кратными корнями характеристического уравнения (резонансный случай), то частное решение надо искать в виде

$$\tilde{y} = x^\alpha e^{px} [\bar{P}_s(x) \cos qx + \bar{Q}_s(x) \sin qx].$$

Пример 7.

$$y'' + 4y' + 4y = \cos 2x.$$

Так как числа  $\pm 2i$  не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$\tilde{y} = A \cos 2x + B \sin 2x.$$

Пример 8.

$$y'' + 4y = \cos 2x.$$

Так как числа  $\pm 2i$  являются простыми корнями характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$\tilde{y} = x [A \cos 2x + B \sin 2x].$$

Пример 9.

$$y^{IV} + 2y'' + y = \sin x.$$

Так как числа  $\pm i$  являются двукратными корнями характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$y = x^2 (A \cos x + B \sin x).$$

Пример 10.

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x} (x \cos x + 3 \sin x).$$

Так как числа  $-1 \pm i$  являются простыми корнями характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$\tilde{y} = x e^{-x} [(A_0 x + A_1) \cos x + (B_0 x + B_1) \sin x].$$

Во многих случаях при нахождении частных решений линейных уравнений с постоянными коэффициентами с правой частью вида (2.73) целесообразно перейти к показательным функциям.

Например, в уравнении

$$y'' - 2y' + y = \cos x$$

можно преобразовать  $\cos x$  по формуле Эйлера или, еще проще, рассмотреть уравнение

$$y'' - 2y' + y = e^{ix}, \quad (2.75)$$

действительная часть решения которого должна удовлетворять исходному уравнению (см. стр. 114—115).

Частное решение уравнения (2.75) можно искать в виде

$$y = Ae^{ix}.$$

Тогда

$$A = \frac{i}{2}, \quad y = \frac{i}{2} (\cos x + i \sin x).$$

Частное решение исходного уравнения

$$\tilde{y}_1 = \operatorname{Re} y = -\frac{1}{2} \sin x.$$

Для нахождения частных решений линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами во многих случаях очень удобен операторный метод.

Понятие об операторном методе решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Для производных порядка  $k$  введем обозначение

$$\frac{d^k y}{dx^k} = D^k y.$$

Пользуясь этим обозначением, запишем уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x)$$

в виде

$$a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + \dots + a_n y = f(x)$$

или

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = f(x). \quad (2.76)$$

Выражение

$$a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n$$

называется *операторным многочленом*. Этот операторный многочлен кратко обозначим  $F(D)$ , а уравнение (2.76) запишем в виде

$$F(D) y = f(x).$$

Непосредственной проверкой легко устанавливается справедливость следующих тождеств:

- 1)  $F(D) e^{kx} \equiv e^{kx} F(k)$ ,
- 2)  $F(D^2) \sin ax \equiv \sin ax F(-a^2)$ ,
- 3)  $F(D^2) \cos ax \equiv \cos ax F(-a^2)$ ,
- 4)  $F(D) e^{kx} v(x) \equiv e^{kx} F(D+k) v(x)$ .

Действительно:

$$1) F(D) e^{kx} = (a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n) e^{kx} = \\ = e^{kx} (a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n) = e^{kx} F(k).$$

$$2) F(D^2) \sin ax = (a_0 D^{2n} + a_1 D^{2n-2} + \dots + a_{n-1} D^2 + a_n) \sin ax = \\ = [a_0 (-a^2)^n + a_1 (-a^2)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (-a^2) + a_n] \sin ax = \\ = \sin ax F(-a^2).$$

Тождество 3) доказывается совершенно аналогично:

$$F(D^2) \cos ax = \cos ax F(-a^2).$$

$$4) F(D) e^{kx} v(x) = \sum_{p=0}^n a_{n-p} D^p (e^{kx} v(x)) = \\ = e^{kx} \sum_{p=0}^n a_{n-p} [k^p v(x) + p k^{p-1} Dv + \\ + \frac{p(p-1)}{2!} k^{p-2} D^2 v + \dots + D^p v] = \\ = e^{kx} \sum_{p=0}^n a_{n-p} (D+k)^p v = e^{kx} F(D+k) v(x).$$

Суммой двух операторов  $F_1(D)$  и  $F_2(D)$  называется оператор  $[F_1(D) + F_2(D)]$ , действие которого на некоторую функцию  $f(x)$  определяется равенством

$$[F_1(D) + F_2(D)] f(x) = F_1(D) f(x) + F_2(D) f(x).$$

Из этого определения следует, что

$$\sum_{p=0}^n a_{n-p} D^p + \sum_{p=0}^n b_{n-p} D^p = \sum_{p=0}^n (a_{n-p} + b_{n-p}) D^p,$$

так как действие левой и правой частей этого равенства на некоторую  $n$  раз дифференцируемую функцию  $f(x)$  приводит к одному и тому же результату, т. е. правило сложения операторных многочленов не отличается от правила сложения обычных (не операторных) многочленов.

Произведением двух операторов  $F_1(D) \cdot F_2(D)$  называется оператор, действие которого на некоторую достаточное число раз дифференцируемую функцию  $f(x)$  определяется равенством

$$F_1(D) \cdot F_2(D) f(x) = F_1(D) [F_2(D) f(x)],$$

т. е. на функцию  $f(x)$  действует сначала правый множитель, а затем на результат действия правого множителя на функцию  $f(x)$  действует левый множитель.

Исходя из этого определения, нетрудно обнаружить, что правило умножения операторных многочленов не отличается от правила умножения обычных (не операторных) многочленов. Действительно,

$$\sum_{p=0}^n a_{n-p} D^p \cdot \sum_{q=0}^m b_{m-q} D^q = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^m a_{n-p} b_{m-q} D^{p+q}, \quad (2.77)$$

так как

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^n a_{n-p} D^p \sum_{q=0}^m b_{m-q} D^q f(x) &= \\ &= \sum_{p=0}^n a_{n-p} D^p \left[ \sum_{q=0}^m b_{m-q} f^{(q)}(x) \right] = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^m a_{n-p} b_{m-q} f^{(p+q)}(x), \end{aligned}$$

что совпадает с результатом действия оператора

$$\sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^m a_{n-p} b_{m-q} D^{p+q}$$

на  $f(x)$ .

Из (2.77), в частности, следует коммутативность умножения операторов

$$F_1(D) F_2(D) = F_2(D) F_1(D).$$

Справедливость дистрибутивного закона

$$F(D) [F_1(D) + F_2(D)] = F(D) F_1(D) + F(D) F_2(D)$$

непосредственно следует из правила дифференцирования суммы. Следовательно, действия сложения и умножения с операторными многочленами не отличаются от тех же действий с обычными (не операторными) многочленами.

Определим теперь оператор  $\frac{1}{F(D)}$ .

Результатом действия оператора  $\frac{1}{F(D)}$  на некоторую непрерывную функцию  $f(x)$  является решение уравнения

$$\begin{aligned} F(D) y &= f(x), \\ y &= \frac{1}{F(D)} f(x). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Следовательно,

$$F(D) \left[ \frac{1}{F(D)} f(x) \right] \equiv f(x). \quad (2.79)$$

Можно было бы считать, что  $\frac{1}{F(D)} f(x)$  является решением уравнения (2.78), определяемым какими-нибудь конкретными, например нулевыми, начальными условиями, однако для наших целей удобнее считать, что  $\frac{1}{F(D)} f(x)$  является одним из решений, все равно каким, уравнения (2.78) и, следовательно, действие оператора  $\frac{1}{F(D)}$  на некоторую функцию  $f(x)$  определено лишь с точностью до слагаемого, равного решению соответствующего однородного уравнения.

При таком понимании действия оператора  $\frac{1}{F(D)}$  будет справедливым равенство

$$\frac{1}{F(D)} [F(D) f(x)] = f(x), \quad (2.80)$$

так как  $f(x)$ , очевидно, является решением уравнения

$$F(D) y = F(D) f(x).$$

Произведение операторов  $\Phi(D)$  на  $\frac{1}{F(D)}$  определяется равенством

$$\Phi(D) \frac{1}{F(D)} f(x) = \Phi(D) \left[ \frac{1}{F(D)} f(x) \right].$$

Аналогично

$$\frac{1}{F(D)} \Phi(D) f(x) = \frac{1}{F(D)} [\Phi(D) f(x)].$$

Поэтому в формулах (2.79) и (2.80) скобки можно опустить. Заметим еще, что

$$\frac{1}{D^p} f(x) = \int \int \dots \int f(x) dx^p,$$

так как  $\frac{1}{D^p} f(x)$  является по определению оператора  $\frac{1}{F(D)}$  решением уравнения  $D^p y = f(x)$ .

Проверим следующие свойства оператора  $\frac{1}{F(D)}$ :

$$1) \frac{1}{F(D)} k f(x) = k \frac{1}{F(D)} f(x),$$

где  $k$  — постоянный множитель, так как

$$F(D) k \frac{1}{F(D)} f(x) = k F(D) \frac{1}{F(D)} f(x) = k f(x).$$

$$2) \frac{1}{F(D)} e^{kx} = \frac{e^{kx}}{F(k)}, \text{ если } F(k) \neq 0.$$

Действительно,  $\frac{e^{kx}}{F(k)}$  является решением уравнения  $F(D)y = e^{kx}$ , так как по формуле 1) стр. 130

$$F(D) \frac{e^{kx}}{F(k)} \equiv \frac{F(k) e^{kx}}{F(k)} \equiv e^{kx}.$$

$$3) \frac{1}{F(D^2)} \sin ax = \frac{\sin ax}{F(-a^2)}, \text{ если } F(-a^2) \neq 0.$$

Действительно,  $\frac{\sin ax}{F(-a^2)}$  является решением уравнения  $F(D^2)y = \sin ax$ , так как по формуле 2) стр. 130

$$F(D^2) \frac{\sin ax}{F(-a^2)} \equiv \frac{1}{F(-a^2)} F(-a^2) \sin ax \equiv \sin ax.$$

$$4) \frac{1}{F(D^2)} \cos ax = \frac{\cos ax}{F(-a^2)}, \text{ если } F(-a^2) \neq 0,$$

так как по формуле 3) стр. 130

$$F(D^2) \frac{\cos ax}{F(-a^2)} \equiv \frac{1}{F(-a^2)} F(-a^2) \cos ax \equiv \cos ax.$$

$$5) \frac{1}{F(D)} e^{kx} v(x) = e^{kx} \frac{1}{F(D+k)} v(x).$$

Действительно,  $e^{kx} \frac{1}{F(D+k)} v(x)$  является решением уравнения  $F(D)y = e^{kx} v(x)$ , так как по формуле 4) стр. 130

$$F(D) e^{kx} \frac{1}{F(D+k)} v(x) = e^{kx} F(D+k) \frac{1}{F(D+k)} v(x) \equiv e^{kx} v(x).$$

$$6) \frac{1}{F(D)} [f_1(x) + f_2(x)] = \frac{1}{F(D)} f_1(x) + \frac{1}{F(D)} f_2(x).$$

Это равенство является следствием принципа суперпозиции (стр. 114).

$$7) \frac{1}{F_1(D) \cdot F_2(D)} f(x) = \frac{1}{F_1(D)} \frac{1}{F_2(D)} f(x),$$

т. е.

$$y = \frac{1}{F_1(D)} \left[ \frac{1}{F_2(D)} f(x) \right] \quad (2.81)$$

является решением уравнения

$$F_1(D) F_2(D) y = f(x). \quad (2.82)$$

Действительно, подставляя (2.81) в (2.82), получим

$$F_2(D) F_1(D) \frac{1}{F_1(D)} \left[ \frac{1}{F_2(D)} f(x) \right] \equiv F_2(D) \frac{1}{F_2(D)} f(x) \equiv f(x).$$

Приведем несколько примеров нахождения частных решений линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами операторным методом:

$$1) y'' + 4y = e^x, \text{ или } (D^2 + 4)y = e^x, \text{ откуда}$$

$$y = \frac{1}{D^2 + 4} e^x = \frac{e^x}{5}.$$

$$2) y^{IV} + y = 2 \cos 3x, \text{ или } (D^4 + 1)y = 2 \cos 3x,$$

$$y = \frac{1}{D^4 + 1} 2 \cos 3x = \frac{2 \cos 3x}{(-9)^2 + 1} = \frac{1}{41} \cos 3x.$$

$$3) y'' + 9y = 5 \sin x, (D^2 + 9)y = 5 \sin x,$$

$$y = \frac{1}{D^2 + 9} 5 \sin x = \frac{5 \sin x}{-1 + 9} = \frac{5}{8} \sin x.$$

$$4) y'' - 4y' + 4y = x^2 e^{2x}, (D - 2)^2 y = x^2 e^{2x},$$

$$y = \frac{1}{(D - 2)^2} e^{2x} x^2 = e^{2x} \frac{1}{D^2} x^2 = e^{2x} \frac{x^2}{12}.$$

$$5) y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x, (D - 1)^3 y = e^x,$$

$$y = \frac{1}{(D - 1)^3} e^x.$$

$F(k) = 0$ , поэтому вместо второй формулы применяем формулу 5) (стр. 132—133), рассматривая  $e^x$  как произведение  $e^x \cdot 1$ :

$$y = \frac{1}{(D - 1)^3} e^x \cdot 1 = e^x \frac{1}{D^3} 1 = e^x \frac{x^3}{6}.$$

$$6) y''' - y = \sin x,$$

$$(D^3 - 1)y = \sin x. \quad (2.83)$$

$y = \frac{1}{D^3 - 1} \sin x$ . Так как оператор содержит нечетные степени  $D$ , то воспользоваться формулой 4) нельзя. Поэтому вместо исходного уравнения рассмотрим уравнение  $(D^3 - 1)y = e^{ix}$ , или

$$(D^3 - 1)y = \cos x + i \sin x. \quad (2.84)$$

Мнимая часть решения уравнения (2.84) будет решением исходного уравнения (см. стр. 115):

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{D^3 - 1} e^{ix} = \frac{e^{ix}}{i^3 - 1} = \frac{-e^{ix}}{1 + i} = \frac{(-1 + i)(\cos x + i \sin x)}{2} = \\ &= -\frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + \frac{i}{2}(\cos x - \sin x) \end{aligned}$$

Мнимая часть решения  $\frac{\cos x - \sin x}{2}$  уравнения (2.83) является решением уравнения (2.83).

$$7) y'' + y = \cos x, (D^2 + 1)y = \cos x, y = \frac{1}{D^2 + 1} \cos x.$$

Формула 3) стр. 133 неприменима, так как  $F(-a^2) = 0$ , поэтому опять вместо заданного уравнения рассматриваем уравнение

$$y'' + y = e^{ix} \text{ или } y'' + y = \cos x + i \sin x$$

и берем действительную часть его решения

$$\begin{aligned}(D^2 + 1)y = e^{ix}, \quad y &= \frac{1}{D^2 + 1} e^{ix} = \frac{1}{(D-i)(D+i)} e^{ix} = \\ &= \frac{1}{D-i} \frac{e^{ix}}{2i} = \frac{e^{ix}}{2i} \frac{1}{D} \cdot 1 = \frac{e^{ix}x}{2i} = \frac{x(\cos x + i \sin x)}{2i}.\end{aligned}$$

Взяв действительную часть найденного решения вспомогательного уравнения  $\frac{x \sin x}{2}$ , получим решение исходного уравнения

$$\begin{aligned}8) y^{IV} - y = e^x, \quad (D^4 - 1)y = e^x, \quad y &= \frac{1}{D^4 - 1} e^x = \\ &= \frac{1}{D-1} \frac{1}{(D+1)(D^2+1)} e^x = \frac{1}{D-1} \frac{e^x}{4} = \frac{1}{4} e^x \frac{1}{D} 1 = \frac{x e^x}{4}.\end{aligned}$$

Выясним еще, как действует оператор  $\frac{1}{F(D)}$  на многочлен

$$P_p(x) = A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \dots + A_p.$$

Формально разделим 1 на многочлен

$$F(D) = a_n + a_{n-1}D + \dots + a_0 D^n, \quad a_n \neq 0,$$

расположенный по возрастающим степеням  $D$ , по правилу деления обычных (не операторных) многочленов. Процесс деления прекратим тогда, когда в частном получим операторный многочлен степени  $p$ :

$$b_0 + b_1 D + \dots + b_p D^p = Q_p(D).$$

При этом в остатке окажется многочлен

$$R(D) = c_{p+1} D^{p+1} + c_{p+2} D^{p+2} + \dots + c_{p+n} D^{p+n},$$

содержащий оператор  $D$  в степенях не ниже  $p+1$ . В силу зависимости между делимым, делителем, частным и остатком получим

$$F(D)Q_p(D) + R(D) \equiv 1. \quad (2.85)$$

Это тождество справедливо для обычных (не операторных) многочленов, но так как правила сложения и умножения операторных многочленов не отличаются от правил сложения и умножения обычных многочленов, то тождество справедливо и для операторных многочленов. Действуя правой и левой частями тождества (2.85) на многочлен  $A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \dots + A_p$ , получим

$$\begin{aligned}[F(D)Q_p(D) + R(D)](A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \dots + A_p) &\equiv \\ &\equiv A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \dots + A_p\end{aligned}$$

или, принимая во внимание, что

$$R(D)(A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \dots + A_p) \equiv 0,$$

так как  $R(D)$  содержит  $D$  в степенях не ниже  $p+1$ , будем иметь  $F(D)[Q_p(D)(A_0x^p + A_1x^{p-1} + \dots + A_p)] \equiv$

$$\equiv A_0x^p + A_1x^{p-1} + \dots + A_p,$$

т. е.  $Q_p(D)(A_0x^p + A_1x^{p-1} + \dots + A_p)$  является решением уравнения

$$F(D)y = A_0x^p + A_1x^{p-1} + \dots + A_p.$$

Итак,

$$\frac{1}{F(D)}(A_0x^p + A_1x^{p-1} + \dots + A_p) =$$

$$= Q_p(D)(A_0x^p + A_1x^{p-1} + \dots + A_p).$$

Например:

$$9) y'' + y = x^2 - x + 2, (D^2 + 1)y = x^2 - x + 2, y = \frac{1}{D^2 + 1}(x^2 - x + 2).$$

Разделив 1 на  $1 + D^2$ , получим  $Q_2(D) = 1 - D^2$ . Следовательно,

$$y = (1 - D^2)(x^2 - x + 2) = x^2 - x.$$

$$10) y'' + 2y' + 2y = x^2e^{-x}, (D^2 + 2D + 2)y = x^2e^{-x},$$

$$y = \frac{1}{D^2 + 2D + 2} x^2e^{-x} = e^{-x} \frac{1}{D^2 + 1} x^2 = e^{-x} (1 - D^2)x^2 = e^{-x}(x^2 - 2).$$

$$11) y'' + y = x \cos x, (D^2 + 1)y = x \cos x.$$

Перейдем к уравнению  $(D^2 + 1)y = xe^{ix}$  и потом возьмем действительную часть решения

$$y = \frac{1}{D^2 + 1} xe^{ix} = e^{ix} \frac{1}{D(D + 2i)} x = e^{ix} \frac{1}{D} \left( \frac{1}{2i} + \frac{D}{4} \right) x =$$

$$= e^{ix} \frac{1}{D} \left( \frac{x}{2i} + \frac{1}{4} \right) = e^{ix} \left( \frac{x^2}{4i} + \frac{x}{4} \right) = (\cos x + i \sin x) \left( \frac{x^2}{4i} + \frac{x}{4} \right).$$

Взяв действительную часть  $\frac{x^2}{4} \sin x + \frac{x}{4} \cos x$ , получим искомое решение.

**З а м е ч а н и е.** Последний пример показывает, как надо действовать оператором  $\frac{1}{F(D)}$  на многочлен, если  $a_n = 0$ . Представив  $F(D)$  в виде  $D^s \Phi(D)$ , где свободный член многочлена  $\Phi(D)$  уже не равен нулю, действуем на многочлен вначале оператором  $\frac{1}{\Phi(D)}$ , а затем оператором  $\frac{1}{D^s}$ .

**Неоднородные уравнения Эйлера**

$$a_0x^n y^{(n)} + a_1x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x) \quad (2.86)$$

или

$$a_0(ax + b)^n y^{(n)} + a_1(ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x) \quad (2.87)$$

можно интегрировать путем решения соответствующих однородных уравнений (см. стр. 110) и подбора одного частного решения неоднородного уравнения.

родного уравнения, или применяя метод вариации постоянных. Однако обычно проще вначале проинтегрировать однородное уравнение, а для подбора частного решения преобразовать уравнение Эйлера (2.86) заменой переменных  $x = \pm e^t$  (для уравнения (2.87)  $ax + b = \pm e^t$ ) к уравнению с постоянными коэффициентами, для которых хорошо разработаны методы нахождения частных решений.

Пример 11.

$$x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = x \ln^3 x. \quad (2.88)$$

Ищем решение соответствующего однородного уравнения в виде  $y = x^k$

$$k^2 - 2k + 1 = 0; \quad (2.89)$$

$k_{1,2} = 1$ , следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид  $y = (c_1 + c_2 \ln x) x$ . Заменой переменных  $x = e^t$  преобразуем уравнение (2.88) в уравнение с постоянными коэффициентами  $\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + y = t^3 e^t$  (левая часть этого уравнения сразу может быть написана по характеристическому уравнению (2.89)). Операторным методом легко находим частное решение преобразованного уравнения

$$y = \frac{1}{(D-1)^2} e^t t^3 = e^t \frac{1}{D^2} t^3 = \frac{e^t t^5}{20}, \quad y = \frac{x \ln^5 x}{20}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (2.88) имеет вид

$$y = \left( c_1 + c_2 \ln x + \frac{\ln^5 x}{20} \right) x.$$

## § 7. Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи рядов

Задача интегрирования линейных однородных уравнений  $n$ -го порядка

$$p_0(x) y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = 0. \quad (2.90)$$

сводится к подбору  $n$  или хотя бы  $n-1$  линейно независимых частных решений. Однако частные решения легко подбираются лишь в исключительных случаях. В более сложных случаях частные решения ищут в виде суммы некоторого ряда  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x)$ , особенно часто в виде суммы степенного или обобщенного степенного ряда.

Условия, при которых существуют решения в виде суммы степенного или обобщенного степенного ряда, обычно устанавливаются методами теории функций комплексного переменного, знакомства с которыми у читателя мы не предполагаем, поэтому основные теоремы этого параграфа даны без доказательства в применении к наиболее часто встречающимся в приложениях уравнениям второго порядка.

**Теорема 2.9 (об аналитичности решения).** Если  $p_0(x)$ ,  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$  являются аналитическими функциями  $x$

в окрестности точки  $x = x_0$  и  $p_0(x_0) \neq 0$ , то решения уравнения

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad (2.91)$$

также являются аналитическими функциями в некоторой окрестности той же точки и, следовательно, решения уравнения (2.91) можно искать в виде

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

**Теорема 2.10 (о разложимости решения в обобщенный степенной ряд).** Если уравнение (2.91) удовлетворяет условиям предыдущей теоремы, но  $x = x_0$  является нулем конечного порядка  $s$  функции  $p_0(x)$ , нулем порядка  $s-1$  или выше функции  $p_1(x)$  (если  $s > 1$ ) и нулем порядка не ниже  $s-2$  коэффициента  $p_2(x)$  (если  $s > 2$ ), то существует по крайней мере одно нетривиальное решение уравнения (2.91) в виде суммы обобщенного степенного ряда

$$y = a_0(x - x_0)^k + a_1(x - x_0)^{k+1} + \dots + a_n(x - x_0)^{k+n} + \dots, \quad (2.92)$$

где  $k$  — некоторое действительное число, которое может быть как целым, так и дробным, как положительным, так и отрицательным.

Второе линейно независимое с (2.92) решение, как правило, имеет тоже вид суммы обобщенного степенного ряда, но иногда может еще содержать произведение обобщенного степенного ряда на  $\ln(x - x_0)$ .

Впрочем, в конкретных примерах можно обойтись без формулированных выше двух теорем, тем более, что эти теоремы в указанной формулировке все равно не устанавливают области сходимости рассматриваемых рядов. Чаще всего в конкретных задачах подбирают степенной или обобщенный степенной ряд, формально удовлетворяющий дифференциальному уравнению, т. е. при подстановке обращающий рассматриваемое уравнение (2.90) порядка  $n$  в тождество, если предполагать сходимость ряда и возможность почленного дифференцирования  $n$  раз. Получив формально решение в виде ряда, исследуют его на сходимость и на возможность почленного дифференцирования  $n$  раз. В той области, где ряд сходится и допускает  $n$ -кратное почленное дифференцирование, он не только формально удовлетворяет уравнению, но его сумма действительно является искомым решением.

Пример 1.

$$y'' - xy = 0. \quad (2.93)$$

Ищем решение в виде степенного ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Опираясь на теорему 2.9 или формально дифференцируя этот ряд почленно два раза и подставляя в уравнение (2.93) получим

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в левой и правой частях тождества, получим:  $a_2 = 0$ ,  $3 \cdot 2a_3 - a_0 = 0$ , откуда  $a_3 = \frac{a_0}{2 \cdot 3}$ ;

$4 \cdot 3a_4 - a_1 = 0$ , откуда  $a_4 = \frac{a_1}{3 \cdot 4}$ ;  $5 \cdot 4a_5 - a_2 = 0$ , откуда  $a_5 = \frac{a_2}{4 \cdot 5}$ , ...

...,  $n(n-1)a_n - a_{n-3} = 0$ , откуда  $a_n = \frac{a_{n-3}}{(n-1)n}$ , ... Следовательно,

$$a_{3n-1} = 0, \quad a_{3n} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots (3n-1)3n},$$

$$a_{3n+1} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \dots 3n(3n+1)} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$a_0$  и  $a_1$  остаются произвольными. Итак,

$$y = a_0 \left[ 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \dots + \frac{x^{3n}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots (3n-1)3n} + \dots \right] +$$

$$+ a_1 \left[ x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{x^{3n+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \dots 3n(3n+1)} + \dots \right]. \quad (2.94)$$

Радиус сходимости этого степенного ряда равен бесконечности. Следовательно, сумма ряда (2.94) при любых значениях  $x$  является решением рассматриваемого уравнения.

Пример 2.

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \quad (2.95)$$

Это уравнение называется *уравнением Бесселя* порядка  $n$ , хотя впервые оно встречается в работах Л. Эйлера и Д. Бернулли. К уравнению Бесселя сводятся многие задачи математической физики, поэтому мы исследуем его несколько подробнее.

По теореме 2.10 по крайней мере одно нетривиальное решение уравнения Бесселя может быть найдено в виде суммы обобщенного степенного ряда

$$y = \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^{k+p}.$$

Дифференцируя этот ряд два раза почленно и подставляя в уравнение (2.95), получим

$$x^2 \sum_{p=0}^{\infty} a_p (k+p)(k+p-1) x^{k+p-2} +$$

$$+ x \sum_{p=0}^{\infty} a_p (k+p) x^{k+p-1} + (x^2 - n^2) \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^{k+p} = 0.$$



Это решение обычно обозначается  $J_n(x)$  и называется *функцией Бесселя первого рода порядка  $n$* .

При  $k = -n$ , выбирая  $a_0 = \frac{1}{2^{-n}\Gamma(-n+1)}$ , аналогично получаем *функцию Бесселя первого рода порядка  $-n$* :

$$J_{-n}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n}}{p! \Gamma(-n+p+1)}. \quad (2.97)$$

Ряды (2.96) и (2.97) сходятся при любых значениях  $x$  (в (2.97)  $x \neq 0$ ) и допускают двукратное почленное дифференцирование, следовательно  $J_n(x)$  и  $J_{-n}(x)$  являются решениями уравнения Бесселя (2.95).

При  $n$ , не равном целому числу, решения  $J_n(x)$  и  $J_{-n}(x)$ , очевидно, линейно независимы, так как их разложения в ряды начинаются с различных степеней  $x$  и, следовательно, линейная комбинация  $\alpha_1 J_n(x) + \alpha_2 J_{-n}(x)$  может тождественно равняться нулю лишь при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ .

Если же  $n$  равно целому числу, то, так как для целых отрицательных значений  $p$  и для  $p = 0$  функция  $\Gamma(p)$  обращается в бесконечность, разложения в ряды функций  $J_n(x)$  и  $J_{-n}(x)$  начнутся с одинаковых степеней  $x$  и, как нетрудно проверить, функции  $J_n(x)$  и  $J_{-n}(x)$  будут находиться в следующей линейной зависимости:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Следовательно, при целом  $n$  вместо  $J_{-n}(x)$  надо искать другое решение, которое было бы линейно независимо от  $J_n(x)$ . Такое решение можно получить различными способами, например, можно, зная одно частное решение  $J_n(x)$ , понизить порядок уравнения (2.95) подстановкой, указанной на стр. 101, или сразу искать решение в виде суммы обобщенного степенного ряда и произведения обобщенного степенного ряда на  $\ln x$ . Получаемое любым из этих способов линейно независимое от  $J_n(x)$  решение при вполне определенном выборе произвольного постоянного множителя называется *функцией Бесселя второго рода* и обозначается  $Y_n(x)$ .

Чаще всего, однако,  $Y_n(x)$  определяют так: считая пока  $n$  не равным целому, числу рассматривают решение  $Y_n(x)$  уравнения Бесселя, являющееся линейной комбинацией решений  $J_n(x)$  и  $J_{-n}(x)$ :

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x) \cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi};$$

затем, переходя к пределу при  $n$ , стремящемся к целому числу, получают линейно независимое от  $J_n(x)$  частное решение уравнения Бесселя  $Y_n(x)$ , определенное уже и для целых значений  $n$ .

Итак, общее решение уравнения Бесселя при  $n$ , не равном целому числу, имеет вид

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x),$$

а при  $n$ , равном целому числу,

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x),$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные постоянные.

Функции Бесселя первого и второго рода изучены весьма детально и, в частности, составлены подробные таблицы их значений. Поэтому, если какая-нибудь задача сведена к функциям Бесселя, то ее можно считать

решенной в такой же мере, в какой мы считаем решенной задачу, в которой ответ дан, например, в тригонометрических функциях.

Часто в приложениях приходится рассматривать уравнение

$$x^2 y'' + xy' + (m^2 x^2 - n^2) y = 0. \quad (2.98)$$

Это уравнение сводится к уравнению Бесселя заменой переменной  $x_1 = mx$ . Действительно, при такой замене переменных

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx_1} \frac{dx_1}{dx} = \frac{dy}{dx_1} m, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx_1^2} m^2,$$

и уравнение (2.98) переходит в уравнение Бесселя:

$$x_1^2 \frac{d^2 y}{dx_1^2} + x_1 \frac{dy}{dx_1} + (x_1^2 - n^2) y = 0.$$

Следовательно, общее решение уравнения (2.98) при  $n$ , не равном целому числу, имеет вид

$$y = c_1 J_n(mx) + c_2 J_{-n}(mx),$$

а при  $n$  целом

$$y = c_1 J_n(mx) + c_2 Y_n(mx).$$

Пример 3.

$$x^2 y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{9}{25}\right) y = 0.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$y = c_1 J_{\frac{3}{5}}(2x) + c_2 J_{-\frac{3}{5}}(2x).$$

Пример 4.

$$x^2 y'' + xy' + (3x^2 - 4) y = 0.$$

Общее решение

$$y = c_1 J_2(x\sqrt{3}) + c_2 Y_2(x\sqrt{3}).$$

Пример 5. Проинтегрировать уравнение

$$x^2 y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{1}{9}\right) y = 0$$

при условии, что решение должно быть непрерывно в точке  $x = 0$  и  $y(0, 3) = 2$ .

Общее решение имеет вид

$$y = c_1 J_{\frac{1}{3}}(2x) + c_2 J_{-\frac{1}{3}}(2x).$$

Функция  $J_{-\frac{1}{3}}(2x)$  разрывна при  $x = 0$ , так как ряд (2.97) начинается с отрицательных степеней  $x$ . Следовательно, решение  $y$  непрерывно в точке  $x = 0$  лишь при  $c_2 = 0$ :

$$y = c_1 J_{\frac{1}{3}}(2x).$$

Удовлетворяя второму условию  $y(0, 3) = 2$ , получим

$$c_1 = \frac{2}{J_{\frac{1}{3}}(0,6)}.$$

В таблицах Бесселевых функций находим  $J_{\frac{1}{3}}(0,6) = 0,700$ , следовательно,

$c_1 \approx 2,857$  и

$$y \approx 2,857 J_{\frac{1}{3}}(2x).$$

В приложениях часто требуется найти *периодические решения* некоторого дифференциального уравнения. В этом случае обычно целесообразно искать решение в виде суммы некоторого ряда Фурье:

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi}{T} t + B_n \sin \frac{n\pi}{T} t \right).$$

Заметим, что если уравнение

$$x^{(n)} = F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) \quad (2.99)$$

имеет периодическое решение  $x_0(t)$  периода  $T$ , то правая часть уравнения (2.99) вдоль рассматриваемой интегральной кривой является периодической функцией периода  $T$  по первому аргументу. Действительно, подставляя в уравнение (2.99) периодическое решение  $x = x_0(t)$ , получаем тождество

$$x_0^{(n)}(t) = F(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \dots, x_0^{(n-1)}(t)).$$

Заменяя в этом тождестве  $t$  на  $t + T$ , мы в силу периодичности функции  $x_0(t)$  и ее производных не изменим левой части уравнения и не изменим аргументов правой части, начиная со второго, следовательно,

$$\begin{aligned} F(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \dots, x_0^{n-1}(t)) &\equiv \\ &\equiv F(t + T, x_0(t), \dot{x}_0(t), \dots, x_0^{(n-1)}(t)), \end{aligned}$$

т. е. функция  $F$  вдоль интегральной кривой  $x = x_0(t)$  имеет период  $T$  по явно входящему аргументу  $t$ .

Следовательно, если правая часть уравнения (2.99) при любом выборе  $x_0(t)$  не является периодической функцией по первому аргументу, то не существует и периодических решений. Если функция  $F$  не зависит явно от  $t$ , т. е. является постоянной по отношению к аргументу  $t$ , то  $F$  можно рассматривать как периодическую по  $t$  функцию любого периода и поэтому не исключена возможность существования периодических решений какого угодно периода.

Пусть, например, требуется найти периодические решения уравнения

$$\ddot{x} + a^2x = f(t). \quad (2.100)$$

Для существования периодического решения необходимо предположить, что  $f$  является периодической функцией. Без существенного ограничения общности можно считать, что  $f(t)$  — периодическая функция периода  $2\pi$ , так как если бы функция  $f(t)$  имела период  $T$ , то после преобразования независимого переменного  $t_1 = \frac{2\pi}{T}t$  правая часть стала бы функцией периода  $2\pi$  по новому независимому переменному  $t_1$ .

Предположим, что функция  $f(t)$ , кроме того, непрерывна и разложима в ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \quad (2.101)$$

Периодическое решение ищем в виде

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kt + B_k \sin kt). \quad (2.102)$$

Дифференцируя ряд (2.102) почленно два раза и подставляя в уравнение (2.100), получим

$$\begin{aligned} - \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (A_k \cos kt + B_k \sin kt) + \\ + a^2 \left[ \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kt + B_k \sin kt) \right] &\equiv \\ &\equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \end{aligned}$$

откуда, если  $a$  не равно целому числу, определяем коэффициенты ряда (2.102):

$$\left. \begin{aligned} \frac{a^2 A_0}{2} &= \frac{a_0}{2}, & A_0 &= \frac{a_0}{a^2}, \\ (a^2 - k^2) A_k &= a_k, & A_k &= \frac{a_k}{a^2 - k^2}, \\ (a^2 - k^2) B_k &= b_k, & B_k &= \frac{b_k}{a^2 - k^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.103)$$

Следовательно, уравнению (2.100) формально удовлетворяет ряд

$$\frac{a_0}{2a^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \cos kt + b_k \sin kt}{a^2 - k^2}. \quad (2.104)$$

Очевидно, что ряд (2.104) сходится и допускает двукратное почленное дифференцирование, так как ряд (2.101), в силу непрерывности функции  $f(t)$ , сходится равномерно, а коэффициенты ряда

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 (a_k \cos kt + b_k \sin kt)}{a^2 - k^2}, \quad (2.105)$$

составленного из вторых производных от членов ряда (2.104), отличаются от коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$  ряда (2.101) лишь не зависящим от  $t$ , монотонно стремящимся к 1 при  $k \rightarrow \infty$  множителем  $-\frac{k^2}{a^2 - k^2}$ .

Следовательно, ряд (2.105) сходится равномерно, а значит, ряд (2.104) можно было дифференцировать почленно два раза. Итак, ряд (2.104) не только формально удовлетворяет уравнению (2.100), но его сумма  $x(t)$  существует и является периодическим решением уравнения (2.100).

Если  $a$  мало отличается от целого числа  $n$  и  $a_n \neq 0$  или  $b_n \neq 0$ , то наступает явление *резонанса*, заключающееся в резком возрастании при приближении  $a$  к  $n$  хотя бы одного из коэффициентов

$$A_n = \frac{a_n}{a^2 - n^2}, \quad B_n = \frac{b_n}{a^2 - n^2}.$$

Если же  $a = n$  и хотя бы один из коэффициентов  $a_n$  или  $b_n$  не равен нулю, то периодических решений не существует, так как резонирующим слагаемым

$$a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

в правой части уравнения (2.100), как указано на стр. 128, согласно принципу суперпозиции соответствует в общем решении уравнения (2.100) непериодическое слагаемое вида

$$t(A_n \cos nt + B_n \sin nt),$$

тогда как остальные слагаемые в общем решении уравнения будут периодическими функциями. Следовательно, при  $a = n$  периодическое решение уравнения (2.100) существует лишь в случае отсутствия в правой части резонирующих членов  $a_n \cos nt + b_n \sin nt$ , т. е. в случае

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt = 0, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt = 0. \quad (2.106)$$

В последнем случае, т. е. при  $a = n$ ,  $a_n = b_n = 0$ , периодическое решение уравнения (2.100) существует, причем при  $k \neq n$  коэффициенты определяются по формулам (2.103), а коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  остаются произвольными, так как  $A_n \cos nt + B_n \sin nt$  является при произвольных  $A_n$  и  $B_n$  решением соответствующего однородного уравнения.

**Пример 6.** Определить периодическое решение уравнения

$$\ddot{x} + 2x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^4}.$$

Ищем решение в виде ряда

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kt + B_k \sin kt)$$

и, определяя коэффициенты  $A_k$  и  $B_k$  по формулам (91), получаем

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^4(2-k^2)}.$$

**Пример 7.** Определить периодическое решение уравнения

$$\ddot{x} + 4x = \sin^2 t.$$

Так как условия существования периодического решения (2.106) не удовлетворяются:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \sin 2t dt = 0,$$

но

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos 2t dt \neq 0,$$

то периодического решения не существует.

**Пример 8.** Определить периодическое решение уравнения

$$\ddot{x} + x = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2}.$$

В правой части отсутствуют резонирующие члены  $a_1 \cos t + b_1 \sin t$ . Следовательно, периодическое решение существует и определяется по формулам (2.103):

$$x(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2(1-k^2)} + c_1 \cos t + c_2 \sin t,$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные постоянные.

## § 8. Метод малого параметра и его применение в теории квазилинейных колебаний

В предыдущем параграфе был указан метод нахождения периодических решений линейных уравнений вида

$$\ddot{x} + a^2x = f(t).$$

Во многих практических задачах возникает вопрос о нахождении периодического решения аналогичного уравнения, но имеющего в правой части малое нелинейное слагаемое:

$$\ddot{x} + a^2x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu), \quad (2.107)$$

где  $\mu$  — малый параметр.

Если отбросить слагаемое  $\mu F(t, x, \dot{x}, \mu)$ , т. е. считать в уравнении (2.107)  $\mu = 0$ , то получим линейное уравнение

$$\ddot{x} + a^2x = f(t),$$

называемое порождающим для уравнения (2.107).

Одним из наиболее эффективных методов нахождения периодических решений уравнения нелинейных колебаний с малой нелинейностью (2.107) является разработанный А. Пуанкаре и А. М. Ляпуновым метод разложения решения в ряд по степеням малого параметра  $\mu$ , широко применяемый в настоящее время при решении самых разнообразных задач.

Опираясь на теорему об аналитической зависимости решения от параметра (см. стр. 55), легко обобщающуюся на уравнения второго и более высокого порядков, можно утверждать, что решения  $x(t, \mu)$  уравнения (2.107) будут аналитическими функциями параметра  $\mu$  при достаточно малых по модулю значениях  $\mu$ , если функция  $f(t)$  непрерывна, а функция  $F(t, x, \dot{x}, \mu)$ , непрерывная по  $t$ , аналитически зависит от остальных аргументов: от  $x$  и  $\dot{x}$  в той области, в которой в дальнейшем будут меняться эти переменные, а от  $\mu$  при достаточно малых по модулю значениях  $\mu$ .

Предполагая, что эти условия выполнены, ищем периодическое решение  $x(t, \mu)$  в виде суммы ряда

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots + \mu^n x_n(t) + \dots$$

Дифференцируем этот ряд почленно два раза:

$$\dot{x}(t, \mu) = \dot{x}_0(t) + \mu \dot{x}_1(t) + \dots + \mu^n \dot{x}_n(t) + \dots$$

$$\ddot{x}(t, \mu) = \ddot{x}_0(t) + \mu \ddot{x}_1(t) + \dots + \mu^n \ddot{x}_n(t) + \dots$$

и подставляем в уравнение (2.107), в котором функция  $F(t, x, \dot{x}, \mu)$  предварительно разложена по степеням  $x - x_0$ ,  $\dot{x} - \dot{x}_0$  и  $\mu$ ,

$$\ddot{x} + a^2x = f(t) + \mu \left[ F(t, x_0, \dot{x}_0, 0) + \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0 \\ \mu=0}} (x - x_0) + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0 \\ \mu=0}} (\dot{x} - \dot{x}_0) + \left( \frac{\partial F}{\partial \mu} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0 \\ \mu=0}} \mu + \dots \right]. \quad (2.108)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\mu$  в левой и правой частях уравнения (2.108), получим

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_0 + a^2x_0 &= f(t), \\ \ddot{x}_1 + a^2x_1 &= F(t, x_0, \dot{x}_0, 0), \\ \ddot{x}_2 + a^2x_2 &= \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0 \\ \mu=0}} x_1 + \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0 \\ \mu=0}} \dot{x}_1 + \left( \frac{\partial F}{\partial \mu} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0 \\ \mu=0}} \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.109)$$

Первое из этих линейных уравнений совпадает с порождающим уравнением. Интегрируя его и подставляя найденное решение  $x_0(t)$  во второе уравнение, получим для определения  $x_1(t)$  опять линейное уравнение и т. д.

Для определения  $x_n(t)$  мы также получим линейное уравнение, так как в правой части этого уравнения будут содержаться лишь  $x_j$  и  $\dot{x}_j$  с индексами, меньшими  $n$ , потому что из-за наличия множителя  $\mu$  при  $F$  члены, содержащиеся в правой части  $x_n$  и  $\dot{x}_n$  и, тем более,  $x_k$  и  $\dot{x}_k$  с большими индексами, будут иметь множитель  $\mu$  в степени не ниже  $n + 1$ .

В этом параграфе мы рассматриваем лишь вопрос о нахождении периодических решений, поэтому на правую часть уравнения

$$\ddot{x} + a^2x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu),$$

в соответствии с замечанием на стр. 143—144 естественно наложить еще одно ограничение, а именно потребовать, чтобы правая часть была периодической функцией по явно входящему аргументу  $t$ . Без существенного ограничения общности можно считать наименьший период правой части, если правая часть явно зависит от  $t$ , равным  $2\pi$ , при этом, если  $f(t)$  не равно постоянной величине, периодические решения уравнения (2.107), если они существуют, при достаточно малом  $\mu$  могут иметь лишь периоды, равные или кратные  $2\pi$  (см. стр. 143—144).

Для нахождения периодического решения уравнения (2.108) в виде

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \dots + \mu^n x_n(t) + \dots \quad (2.110)$$

надо определить периодические решения  $x_k(t)$  уравнений (2.109). Действительно, если решение  $x(t, \mu)$  имеет постоянный период  $2\pi$  (или  $2m\pi$ ,  $m$  — целое число) при любом достаточно малом по модулю  $\mu$ , то

$$x_0(t) + \mu x_1(t) + \dots + \mu^n x_n(t) + \dots \equiv x_0(t + 2\pi) + \dots + \mu x_1(t + 2\pi) + \dots + \mu^n x_n(t + 2\pi) + \dots \quad (2.111)$$

Следовательно, коэффициенты при одинаковых степенях  $\mu$  в левой и правой частях тождества (2.111) должны быть равны, т. е.

$$x_n(t) \equiv x_n(t + 2\pi),$$

а это и означает периодичность функций  $x_n(t)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Совпадение коэффициентов при одинаковых степенях  $\mu$  в левой и правой частях тождества (2.110) можно обнаружить, например, дифференцируя тождество (2.110)  $n$  раз по  $\mu$ , после чего, полагая  $\mu = 0$ , получим

$$x_n(2\pi + t) = x_n(t) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Итак, нам надо найти периодические решения уравнений (2.109). При этом целесообразно отдельно рассмотреть следующие случаи.

1. Нерезонансный случай:  $a$  отлично от целого числа. Если  $a$  не равно целому числу, то первое из уравнений (2.109) имеет единственное периодическое решение  $x_0 = \varphi_0(t)$ , которое находим методом предыдущего параграфа (см. стр. 144). Затем тем же методом находим  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и т. д.

Если бы этим методом мы нашли общий член ряда (2.110), установили сходимость этого ряда и законность его двукратного почленного дифференцирования, то сумма ряда (2.110) являлась бы искомым периодическим решением периода  $2\pi$ . Однако обычно нахождение общего члена ряда (2.110) является крайне сложной задачей, в силу чего приходится ограничиваться вычислением лишь нескольких первых членов ряда, что было бы достаточным для приближенного нахождения периодического решения, если бы была уверенность в том, что ряд сходится и его сумма является периодическим решением.

В связи с этим большое значение имеют теоремы А. Пуанкаре о существовании периодических решений, позволяющие, в частности, найти условия, при которых заведомо существует единственное периодическое решение уравнения (2.107), стремящееся при  $\mu \rightarrow 0$  к периодическому решению порождающего уравнения.

Если условия теоремы А. Пуанкаре выполнены и, следовательно, существует единственное периодическое решение уравнения (2.107), стремящееся при  $\mu \rightarrow 0$  к периодическому решению порождающего уравнения, то сумма единственного ряда с периодическими коэффи-

циентами (2.110), формально удовлетворяющего уравнению (2.107), должна существовать и должна совпадать с искомым периодическим решением. При этом отпадает необходимость нахождения общего члена ряда (2.110) для исследования ряда на сходимость и можно, найдя несколько первых членов ряда (2.110), утверждать, что при малом  $\mu$  их сумма приближенно равна искомому периодическому решению.

Теоремы А. Пуанкаре, опирающиеся на сведения из теории аналитических функций, довольно сложны, поэтому мы приводим в конце этого параграфа лишь простейшую из этих теорем, которая, однако, уже позволяет утверждать, что в рассматриваемом нерезонансном случае уравнение (2.107) всегда имеет единственное периодическое решение при достаточно малом  $\mu$ .

**Пример 1.** Приближенно определить периодическое решение уравнения

$$\ddot{x} + 2x = \sin t + \mu x^2,$$

где  $\mu$  — малый параметр (определить два члена ряда (2.110)). Ищем решение в виде

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \dots + \mu^n x_n(t) + \dots$$

Находим периодическое решение порождающего уравнения

$$\ddot{x}_0 + 2x_0 = \sin t, \quad x_0(t) = \sin t.$$

Периодическое решение уравнения

$$\ddot{x}_1 + 2x_1 = \sin^2 t \quad \text{или} \quad \ddot{x}_1 + 2x_1 = \frac{1 - \cos 2t}{2}$$

имеет вид

$$x_1 = \frac{1}{4} + \frac{\cos 2t}{4}.$$

Следовательно, периодическое решение

$$x(t, \mu) \approx \sin t + \frac{1}{4}(1 + \cos 2t)\mu.$$

**2. Резонансный случай.** Метод малого параметра может быть применен и в резонансном случае, т. е. в случае, когда в уравнении (2.107)  $a$  равно целому числу  $n$  или стремится к целому числу  $n$  при  $\mu \rightarrow 0$ .

Если в уравнении (2.107)  $a$  мало отличается от целого числа  $n$ , точнее, разность  $a^2 - n^2$  имеет порядок малости не ниже чем  $\mu$ :

$$a^2 - n^2 = a_1 \mu, \quad (2.112)$$

где  $a_1$  ограничено при  $\mu \rightarrow 0$ , то уравнение

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu)$$

можно переписать в виде

$$\ddot{x} + n^2 x = f(t) + (n^2 - a^2)x + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu),$$

откуда в силу (2.112)

$$\ddot{x} + n^2 x = f(t) + \mu F_1(t, x, \dot{x}, \mu),$$

где функция  $F_1$  удовлетворяет тем же условиям, которым по предположению удовлетворяет функция  $F$ .

Следовательно, в дальнейшем в резонансном случае можно считать  $a$  равным целому числу:

$$\ddot{x} + n^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu).$$

Применяя метод малого параметра, ищем периодическое решение в виде ряда

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \dots + \mu^k x_k(t) + \dots$$

Для определения функций  $x_k(t)$  опять получаем уравнения (2.109), в которых  $a^2 = n^2$ , но в данном случае порождающее уравнение

$$\ddot{x}_0 + n^2 x_0 = f(t) \quad (2.113)$$

имеет периодическое решение лишь в случае отсутствия резонирующих членов в правой части, т. е. при выполнении условий (см. стр. 145)

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt &= 0, \\ \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.106)$$

Если эти условия выполнены, то все решения уравнения (2.113) будут периодическими периода  $2\pi$  (см. стр. 146)

$$x_0(t) = c_{10} \cos nt + c_{20} \sin nt + \varphi_0(t).$$

Функция  $x_1(t)$  определяется из уравнения

$$\ddot{x}_1 + n^2 x_1 = F(t, x_0, \dot{x}_0, 0). \quad (2.114)$$

Это уравнение также имеет периодические решения лишь в случае отсутствия резонирующих членов в правой части, т. е. при выполнении условий

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(t, x_0, \dot{x}_0, 0) \cos nt \, dt &= 0, \\ \int_0^{2\pi} F(t, x_0, \dot{x}_0, 0) \sin nt \, dt &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.115)$$

Уравнения (2.115) содержат  $c_{10}$  и  $c_{20}$ , которые, вообще говоря, и определяются из этой системы.

Пусть  $c_{10}$  и  $c_{20}$  удовлетворяют системе (2.115); тогда все решения уравнения (2.114) имеют период  $2\pi$ :

$$x_1(t) = c_{11} \cos nt + c_{21} \sin nt + \varphi_1(t), \quad (2.116)$$

причем  $c_{11}$  и  $c_{21}$  опять определяются из двух условий отсутствия резонирующих членов в следующем из уравнений (2.109):

$$\ddot{x}_2 + n^2 x_2 = \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0 \\ \mu=0}} x_1 + \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0 \\ \mu=0}} \dot{x}_1 + \left( \frac{\partial F}{\partial \mu} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0 \\ \mu=0}}$$

и т. д.

Следовательно, не каждому периодическому решению

$$x_0 = c_{10} \cos nt + c_{20} \sin nt + \varphi_0(t)$$

порождающего уравнения, а лишь некоторым, значения  $c_{10}$  и  $c_{20}$  которых удовлетворяют уравнениям (2.115), соответствуют периодические решения уравнения (2.107) при малых  $\mu$ . Конечно, и в резонансном случае для того, чтобы, не находя общего члена ряда (2.110), быть уверенным, что указанным процессом будет найдено периодическое решение, надо предварительно доказать теорему о существовании периодических решений. Это замечание относится и к случаям, изложенным в следующих пунктах 3 и 4.

3. Резонанс  $n$ -го рода. Иногда в системах, описываемых уравнением

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu), \quad (2.107)$$

удовлетворяющим указанным выше условиям, наблюдаются интенсивные колебания, когда собственная частота мало отличается от  $\frac{1}{n}$ , где  $n$  — целое число. Это явление получило название резонанса  $n$ -го рода.

С математической точки зрения это означает, что при  $a$ , мало отличающемся от  $\frac{1}{n}$ , где  $n$  — целое число, большее единицы, уравнение (2.107) может иметь периодические решения периода  $2\pi n$ , не являющиеся в то же время периодическими решениями периода  $2\pi$ .

Пусть

$$\ddot{x} + \frac{1}{n^2} x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu) \quad (2.117)$$

(если  $a$  мало отличается от  $\frac{1}{n}$ , точнее,  $a^2 - \frac{1}{n^2} = \mu a_1$ , где  $a_1$  остается ограниченной при  $\mu \rightarrow 0$ , то, перенося член  $(a^2 - \frac{1}{n^2})x$  в правую часть и включая его в  $\mu F(t, x, \dot{x}, \mu)$ , получим уравнение вида (2.117)).

Ищем периодическое решение уравнения (2.117) периода  $2\pi n$  в виде ряда

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \dots + \mu^n x_n(t) + \dots \quad (2.110)$$

Подставляя (2.110) в уравнение (2.117) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\mu$ , получим уравнения (2.109), в которых  $a = \frac{1}{n}$ . Для определения  $x_0(t)$  получаем порождающее уравнение

$$\ddot{x}_0 + \frac{1}{n^2} x_0 = f(t), \quad (2.118)$$

которое имеет периодическое решение периода  $2\pi n$  лишь при отсутствии в правой части резонирующих членов, т. е. при

$$\int_0^{2\pi n} f(t) \cos \frac{t}{n} dt = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi n} f(t) \sin \frac{t}{n} dt = 0.$$

Если эти условия выполнены, то все решения уравнения (2.118) имеют период  $2\pi n$

$$x_0 = c_{10} \cos \frac{t}{n} + c_{20} \sin \frac{t}{n} + \varphi_0(t),$$

где  $c_{10}$  и  $c_{20}$  — произвольные постоянные.

Уравнение, определяющее  $x_1$ ,

$$\ddot{x}_1 + \frac{1}{n^2} x_1 = F(t, x_0, \dot{x}_0, \mu) \quad (2.119)$$

будет иметь периодические решения периода  $2\pi n$  лишь при отсутствии в правых частях резонирующих членов, т. е. при выполнении условий

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi n} F(t, x_0, \dot{x}_0, \mu) \cos \frac{t}{n} dt &= 0, \\ \int_0^{2\pi n} F(t, x_0, \dot{x}_0, \mu) \sin \frac{t}{n} dt &= 0, \end{aligned} \quad (2.120)$$

из которых, вообще говоря, определяются  $c_{10}$  и  $c_{20}$ .

Если условия (2.120) удовлетворяются, то все решения уравнения (2.119) имеют период  $2\pi n$

$$x_1 = c_{11} \cos \frac{t}{n} + c_{21} \sin \frac{t}{n} + \Phi_1(t).$$

Для определения произвольных постоянных  $c_{11}$  и  $c_{21}$  пользуемся двумя условиями отсутствия резонирующих членов в следующем из уравнений (2.109):

$$\ddot{x}_2 + \frac{1}{n^2} x_2 = \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0 \\ \mu=0}} x_1 + \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_{\substack{x=x_1 \\ \dot{x}=\dot{x}_1 \\ \mu=0}} \dot{x}_1 + \left( \frac{\partial F}{\partial \mu} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0 \\ \mu=0}}$$

и т. д.

4. Автономный случай. Предположим, что правая часть уравнения (2.107) не зависит явно от  $t$ , и уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + a^2 x = \mu F(x, \dot{x}, \mu), \quad (2.121)$$

где функция  $F$  удовлетворяет поставленным выше условиям. На первый взгляд может казаться, что исследование уравнения (2.121) должно быть проще исследования уравнения (2.107), в котором правая часть зависит от аргумента  $t$ , однако в действительности отсутствие аргумента  $t$  в правой части уравнения приводит к усложнению задачи.

Если правая часть явно зависит от  $t$ , то, как уже отмечалось выше, известны возможные периоды решений, так как периоды решений могут быть лишь равными или кратными периоду правой части вдоль решений по явно входящему аргументу  $t$ .

Если же правая часть не содержит  $t$ , то ее можно рассматривать как периодическую функцию произвольного периода и, следовательно, не исключена возможность существования решений любого периода, причем период решений, вообще говоря, будет функцией параметра  $\mu$ . Ввиду того, что период решения  $x(t, \mu)$  является, вообще говоря, функцией  $\mu$ , было бы нецелесообразно искать решение в виде ряда

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \dots + \mu^n x_n(t) + \dots \quad (2.110)$$

так как каждая из функций  $x_n(t)$  в отдельности не обязана быть периодической функцией и, следовательно, функции  $x_n(t)$  не могли бы быть найдены рассмотренными выше методами. Поэтому надо преобразовать уравнение (2.121) к новому независимому переменному так, чтобы по новому переменному уравнение имело бы уже постоянный период, а уж затем искать решение в виде ряда (2.110).

Предварительно для упрощения преобразуем уравнение (2.121) заменой независимого переменного  $t_1 = at$  к виду

$$\frac{d^2x}{dt_1^2} + x = \mu F_1(x, \dot{x}, \mu). \quad (2.122)$$

Каждое решение порождающего уравнения  $x_0(t_1) = c_1 \cos(t_1 - t_0)$  будет иметь период  $2\pi$ , а периодические решения уравнения (2.122) при  $\mu \neq 0$ , если они существуют, будут иметь период  $2\pi + \alpha(\mu)$ , причем можно доказать, что  $\alpha(\mu)$  является аналитической функцией  $\mu$  при достаточно малом  $\mu$ .

Разложим  $\alpha(\mu)$  в ряд по степеням  $\mu$ ; тогда

$$2\pi + \alpha(\mu) = 2\pi(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots + h_n\mu^n + \dots), \quad (2.123)$$

где  $h_j$  — некоторые, пока неизвестные нам постоянные величины.

Преобразуем переменные так, чтобы периодическое решение  $x(t, \mu)$  уравнения (2.122) имело бы период не  $2\pi + \alpha(\mu)$ , а постоянный период  $2\pi$ . Это достигается заменой переменных

$$t_1 = t_2(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots + h_n\mu^n + \dots), \quad (2.124)$$

так как, в силу зависимости (2.123), при изменении  $t_1$  от 0 до  $2\pi + \alpha(\mu)$  новое переменное  $t_2$  изменяется от 0 до  $2\pi$ . При этом уравнение (2.122) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{t_2} + (1 + h_1\mu + \dots + h_n\mu^n + \dots)^2 x = \\ = \mu(1 + h_1\mu + \dots + h_n\mu^n + \dots)^2 F_1(x, (1 + h_1\mu + \dots \\ \dots + h_n\mu^n + \dots)^{-1} \dot{x}_{t_2}, \mu). \end{aligned} \quad (2.125)$$

Периодическое решение этого уравнения ищем в виде

$$x(t_2, \mu) = x_0(t_2) + \mu x_1(t_2) + \dots + \mu^n x_n(t_2) + \dots, \quad (2.126)$$

где  $x_n(t_2)$  — периодические функции аргумента  $t_2$  периода  $2\pi$ . Подставляя (2.126) в уравнение (2.125) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\mu$  в левой и правой частях равенства, получим

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0, \quad \text{откуда} \quad x_0 = c \cos(t_2 - t_0),$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -2h_1x_0 + F_1(x_0, \dot{x}_0, 0)$$

или

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 = -2h_1c \cos(t_2 - t_0) + \\ + F_1(c \cos(t_2 - t_0), -c \sin(t_2 - t_0), 0) \end{aligned} \quad (2.127)$$

Для того чтобы уравнение (2.127) имело периодические решения, необходимо и достаточно, чтобы в его правой части отсутствовали

резонирующие члены (см. (2.106)), т. е. чтобы

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} F_1(c \cos(t_2 - t_0), -c \sin(t_2 - t_0), 0) \sin(t_2 - t_0) dt_2 &= 0, \\ -2h_1c + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_1(c \cos(t_2 - t_0), -c \sin(t_2 - t_0), 0) \times \\ &\times \cos(t_2 - t_0) dt_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.128)$$

Первое из этих уравнений дает возможность найти значения  $c$ , а второе —  $h_1$ , определив которые, мы найдем те решения порождающего уравнения  $x_0 = c \cos(t_2 - t_0)$ , в окрестности которых при малом  $\mu$  появляются периодические решения уравнения (2.122), и приближенно определим период искомого решения

$$2\pi + \alpha(\mu) \approx 2\pi(1 + h_1\mu).$$

Зная  $c$  и  $h_1$ , можно определить  $x_1(t_2)$  и, если необходимо, тем же методом вычислить  $x_2(t_2)$ ,  $x_3(t_2)$  и т. д.

Пример 2.

$$\ddot{x} + x = \mu \dot{x}(9 - x^2). \quad (1.129)$$

Определить решения порождающего уравнения, к которым при  $\mu \rightarrow 0$  приближаются периодические решения уравнения (2.129).

Решения порождающего уравнения имеют вид  $x = c \cos(t - t_0)$ . Для определения искомого значения  $c$  воспользуемся первым из уравнений (2.128):

$$\int_0^{2\pi} c(9 - c^2 \cos^2(t - t_0)) \sin^2(t - t_0) dt = 0$$

или  $\pi c \left(9 - \frac{c^2}{4}\right) = 0$ , откуда  $c_1 = 0$ ,  $c_{2,3} = \pm 6$ .

При  $c_1 = 0$  получаем тривиальное решение  $x \equiv 0$  порождающего уравнения, которое остается решением уравнения (2.129) при любом  $\mu$ .

При  $c_{2,3} = \pm 6$  получаем  $x = \pm 6 \cos(t - t_0)$ .

Докажем простейшую из теорем А. Пуанкаре о существовании и единственности периодического решения, стремящегося при  $\mu \rightarrow 0$  к периодическому решению порождающего уравнения, в применении к уравнению вида

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}, \mu), \quad (2.130)$$

где функция  $f$  удовлетворяет условиям теоремы об аналитической зависимости решения от параметра  $\mu$  при достаточно малых по модулю значениях  $\mu$ . Кроме того, предположим, что функция  $f$  явно зависит от  $t$  и имеет по  $t$  период  $2\pi$ . Допустим также, что порождающее уравнение  $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}, 0)$  имеет единственное периодическое решение  $x = \varphi_0(t)$  периода  $2\pi$ .

Решение уравнения (2.130), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(t_0) = \varphi_0(t_0) + \beta_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{\varphi}_0(t_0) + \beta_1,$$

обозначим  $x(t, \mu, \beta_0, \beta_1)$ . Следовательно,  $\beta_0$  и  $\beta_1$  являются отклонениями начальных значений решения  $x(t, \mu, \beta_0, \beta_1)$  и его производной  $\dot{x}(t, \mu, \beta_0, \beta_1)$  от начальных значений  $\varphi_0(t_0)$  и  $\dot{\varphi}_0(t_0)$  периодического решения порождающего уравнения.

Задача заключается в том, чтобы указать условия, при которых для каждого достаточно малого по модулю значения  $\mu$  существует единственное периодическое решение  $x(t, \mu, \beta_0, \beta_1)$  уравнения (2.130), стремящееся при  $\mu \rightarrow 0$  к периодическому решению  $\varphi_0(t)$  порождающего уравнения.

Если решение  $x(t, \mu, \beta_0, \beta_1)$  является периодическим с периодом  $2\pi$ , то, очевидно, должны удовлетворяться следующие условия:

$$\left. \begin{aligned} x(2\pi, \mu, \beta_0, \beta_1) - x(0, \mu, \beta_0, \beta_1) &= 0, \\ \dot{x}(2\pi, \mu, \beta_0, \beta_1) - \dot{x}(0, \mu, \beta_0, \beta_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.131)$$

Обозначая левые части этих уравнений соответственно  $\Phi_0(\mu, \beta_0, \beta_1)$  и  $\Phi_1(\mu, \beta_0, \beta_1)$ , запишем систему (119) в виде

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0(\mu, \beta_0, \beta_1) &= 0, \\ \Phi_1(\mu, \beta_0, \beta_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.132)$$

Условия (2.132), называемые *условиями периодичности*, не только необходимы, но и достаточны для периодичности решения  $x(t, \mu, \beta_0, \beta_1)$  уравнения (2.130). Действительно, в силу периодичности правой части уравнения (2.130) по  $t$ , эта правая часть в полосах  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $2\pi \leq t \leq 4\pi$ , ...

принимает в точках  $(t, x, \dot{x})$ ,  $(t + 2\pi, x, \dot{x})$ , ... одинаковые значения. Следовательно, если в точках  $t=0$  и  $t=2\pi$  задать одинаковые начальные значения  $x_0$

и  $\dot{x}_0$ , то ими определяются в полосах  $0 \leq t \leq 2\pi$  и  $2\pi \leq t \leq 4\pi$

совершенно одинаковые интегральные кривые (рис. 22), точнее, кривые, являющиеся периодическим продолжением одна другой.

По теореме о неявных функциях можно утверждать, что, если якобиан

$$\frac{D(\Phi_0, \Phi_1)}{D(\beta_0, \beta_1)} \neq 0$$

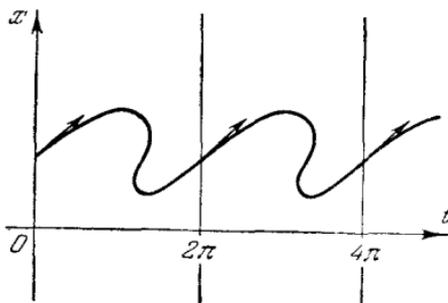


Рис. 22.

в точке  $\mu = 0$ ,  $\beta_0 = \beta_1 = 0$ , то при каждом достаточно малом по модулю значении  $\mu$  существует единственная пара функций  $\beta_0(\mu)$  и  $\beta_1(\mu)$ , удовлетворяющих условиям периодичности (2.132) и стремящихся к нулю при  $\mu \rightarrow 0$ , т. е. в указанных условиях для каждого достаточно малого  $\mu$  существует единственное периодическое решение уравнения (2.130), стремящееся к периодическому решению порождающего уравнения при  $\mu \rightarrow 0$  \*). Это утверждение и составляет содержание теоремы Пуанкаре.

Пример 3. Доказать, что в нерезонансном случае для уравнения

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu), \quad (2.107)$$

где  $f$  и  $F$  удовлетворяют указанным выше условиям (см. стр. 147), выполнены требования теоремы о существовании и единственности периодического решения.

Решение  $x(t, \mu, \beta_0, \beta_1)$ , являющееся аналитической функцией последних трех аргументов при достаточно малых значениях этих аргументов, ищем в виде

$$x(t, \mu, \beta_0, \beta_1) = x_0(t) + x_{11}(t)\beta_0 + x_{12}(t)\beta_1 + x_{13}(t)\mu + \dots \quad (2.133)$$

Подставляя (2.133) в уравнение (2.107) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\mu$ ,  $\beta_0$  и  $\beta_1$ , получим для определения  $x_{11}$  и  $x_{12}$  следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_{11} + a^2 x_{11} &= 0, & x_{11}(0) &= 1, & \dot{x}_{11}(0) &= 0, \\ \ddot{x}_{12} + a^2 x_{12} &= 0, & x_{12}(0) &= 0, & \dot{x}_{12}(0) &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (2.134)$$

(начальные значения получены из условий

$$x(t_0, \mu, \beta_0, \beta_1) = x_0(t_0) + \beta_0,$$

$$\dot{x}(t_0, \mu, \beta_0, \beta_1) = \dot{x}_0(t_0) + \beta_1),$$

откуда

$$x_{11} = \cos at, \quad x_{12} = \frac{1}{a} \sin at.$$

Условия периодичности (2.132) имеют вид

$$(\cos 2a\pi - 1)\beta_0 + \frac{1}{a} \sin 2a\pi\beta_1 + \dots = 0,$$

$$-a \sin 2a\pi\beta_0 + (\cos 2a\pi - 1)\beta_1 + \dots = 0,$$

где невыписанные члены не влияют на величину определителя

$$\frac{D(\Phi_0, \Phi_1)}{D(\beta_0, \beta_1)} \quad \text{при} \quad \mu = \beta_0 = \beta_1 = 0.$$

Определитель

$$\frac{D(\Phi_0, \Phi_1)}{D(\beta_0, \beta_1)} \Big|_{\mu=\beta_0=\beta_1=0} = (\cos 2a\pi - 1)^2 + \sin^2 2a\pi$$

отличен от нуля, так как  $a$  не равно целому числу.

\*) Подробнее о георемах существования периодических решений см. И. Г. Малкин [3].

## § 9. Понятие о краевых задачах

Как уже упоминалось во введении, наряду с основной начальной задачей часто приходится решать так называемые *краевые* или *граничные задачи*. В этих задачах значение искомой функции задается не в одной, а в двух точках, ограничивающих отрезок, на котором требуется определить решение. Например, в задаче о движении материальной точки массы  $m$  под действием заданной силы  $F(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  часто требуется найти закон движения, если в начальный момент  $t = t_0$  точка находилась в положении, характеризуемом радиусом-вектором  $\mathbf{r}_0$ , а в момент  $t = t_1$  должна попасть в точку  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ .

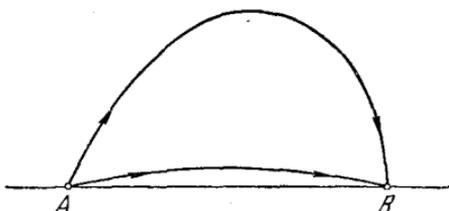


Рис. 2.3.

Задача сводится к интегрированию дифференциального уравнения движения

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$$

с краевыми условиями  $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ ;  $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1$ .

Заметим, что эта задача имеет, вообще говоря, не единственное решение; если речь идет о баллистической задаче и о точках земной поверхности, то в одну и ту же точку тело может попасть по навесной и по настильной траектории (рис. 2.3), более того, при очень больших начальных скоростях можно попасть в ту же точку и после однократного или многократного облета земного шара.

Аналогичную краевую задачу можно поставить и для луча света, проходящую через преломляющую среду: найти направление, по которому луч света должен выйти из точки  $A$ , чтобы он попал в другую заданную точку  $B$ .

При этом очевидно, что задача не всегда имеет решение, а если решения существуют, то их может быть несколько и даже бесконечное множество (например, если лучи, выходящие из точки  $A$ , фокусируются в точке  $B$ ).

Если удастся найти общее решение дифференциального уравнения краевой задачи, то для решения этой задачи надо определить произвольные постоянные, содержащиеся в общем решении, из граничных условий. При этом, конечно, далеко не всегда существует действительное решение, а если существует, то оно не обязательно единственно.

В качестве примера возникающих здесь возможностей рассмотрим следующую краевую задачу:

Найти решение уравнения

$$y'' + y = 0, \quad (2.135)$$

удовлетворяющее условиям:  $y(0) = 0$ ,  $y(x_1) = y_1$ .

Общее решение уравнения (2.135) имеет вид

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Первое граничное условие удовлетворяется при  $c_1 = 0$ , при этом  $y = c_2 \sin x$ .

Если  $x_1 \neq n\pi$ , где  $n$  — целое число, то из второго граничного условия находим  $y_1 = c_2 \sin x_1$ ,  $c_2 = \frac{y_1}{\sin x_1}$ . Следовательно, в этом случае существует единственное решение краевой задачи

$$y = \frac{y_1}{\sin x_1} \sin x.$$

Если же  $x_1 = n\pi$  и  $y_1 = 0$ , то все кривые пучка  $y = c_2 \sin x$  являются графиками решений краевой задачи.

При  $x_1 = n\pi$ ,  $y_1 \neq 0$  решений краевой задачи не существует, так как ни одна кривая пучка  $y = c_2 \sin x$  не проходит через точку  $(x_1, y_1)$ , где

$$x_1 = n\pi, \quad y_1 \neq 0.$$

Рассмотрим несколько подробнее краевые задачи для линейных уравнений второго порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = \varphi(x), \quad (2.136)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1. \quad (2.137)$$

Линейной заменой переменных

$$z = y - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) - y_0$$

краевые условия (2.137) сводятся к нулевым условиям  $z(x_0) = z(x_1) = 0$ , причем линейность уравнения (2.136) не нарушается.

Умножением на  $e^{\int p_1(x) dx}$  линейное уравнение (2.136) приводится к виду

$$\frac{d}{dx} (p(x)y') + q(x)y = f(x), \quad (2.138)$$

где  $p(x) = e^{\int p_1(x) dx}$ . Поэтому без существенного ограничения общности можно заменить изучение краевой задачи (2.136), (2.137) изучением краевой задачи для уравнения (2.138) с граничными условиями

$$y(x_0) = y(x_1) = 0. \quad (2.139)$$

Вначале рассмотрим краевую задачу (2.138), (2.139), причем  $f(x)$  является локализованной в точке  $x = s$  функцией с единичным импульсом. Точнее, рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dx} (p(x) y') + q(x) y = f_\varepsilon(x, s) \quad (2.140)$$

с граничными условиями  $y(x_0) = y(x_1) = 0$ , где функция  $f_\varepsilon(x, s)$  равна нулю на всем отрезке  $[x_0, x_1]$ , за исключением  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x = s$ ,  $s - \varepsilon < x < s + \varepsilon$ , причем

$$\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} f_\varepsilon(x, s) dx = 1.$$

Обозначим  $G_\varepsilon(x, s)$  непрерывное решение этой краевой задачи и перейдем к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(x, s) = G(x, s). \quad (2.141)$$

Нетрудно было бы доказать существование этого предела, не зависящего от выбора функции  $f_\varepsilon(x, s)$ , однако в этом нет необходимости, так как пока наши рассуждения носят эвристический характер, и на стр. 162 будет дано точное определение функции  $G(x, s)$ .

Функция  $G(x, s)$  называется *функцией влияния* или *функцией Грина* рассматриваемой краевой задачи. Так же как на стр. 122—124, решение краевой задачи (2.138), (2.139) с непрерывной правой частью в (2.138) можно рассматривать как суперпозицию решений краевых задач, соответствующих локализованным в точке функциям с импульсами  $f(s_i) \Delta s$ , где  $s_i$  — точки деления отрезка  $[x_0, x_1]$  на  $m$  равных частей,  $\Delta s = \frac{x_1 - x_0}{m}$ . Точнее, приближенное решение краевой задачи (2.138), (2.139) равно интегральной сумме

$$\sum_{i=1}^m G(x, s_i) f(s_i) \Delta s,$$

а предел этой суммы при  $m \rightarrow \infty$ :

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, s) f(s) ds \quad (2.142)$$

является решением рассматриваемой краевой задачи (2.138), (2.139).

Физический смысл функции влияния  $G(x, s)$  и решения (2.142) станет еще яснее, если в уравнении (2.140) рассматривать  $y(x)$  как смещение некоторой системы под влиянием непрерывно распределенной на отрезке  $[x_0, x_1]$  силы  $f(x)$  (например, отклонение струны от положения равновесия под влиянием распределенной нагрузки

с плотностью  $f(x)$ ). При этом  $G(x, s)$  описывает смещение, вызываемое единичной сосредоточенной силой, приложенной к точке  $x = s$ , а решение (2.142) рассматривается как предел суммы решений, соответствующих сосредоточенным силам.

Функция Грина обладает следующими свойствами, вытекающими из ее определения (2.141):

1.  $G(x, s)$  непрерывна по  $x$  при фиксированном  $s$  при  $x_0 \leq x \leq x_1$ ,  $x_0 < s < x_1$ .

2.  $G(x, s)$  является решением соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d}{dx} (p(x) y') + q(x) y = 0$$

на всем отрезке  $[x_0, x_1]$ , за исключением точки  $x = s$  (так как вне этой точки в случае локализованной в точке  $x = s$  функции правая часть равна нулю).

3.  $G(x, s)$  удовлетворяет граничным условиям:

$$G(x_0, s) = G(x_1, s) = 0.$$

4. В точке  $x = s$  производная  $G'_x(x, s)$  должна иметь разрыв первого рода со скачком  $\frac{1}{p(s)}$ . Действительно, ожидать разрыва следует лишь в точке локализации функции — в точке  $x = s$ . Умножая тождество

$$\frac{d}{dx} (p(x) G'_e(x, s)) + q(x) G_e(x, s) \equiv f_e(x, s)$$

на  $dx$  и интегрируя в пределах от  $s - \varepsilon$  до  $s + \varepsilon$ , получим

$$p(x) G'_e(x, s) \Big|_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} + \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} q(x) G_e(x, s) dx = 1$$

и, переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , будем иметь

$$[G'(s+0, s) - G'(s-0, s)] = \frac{1}{p(s)}.$$

Все наши рассуждения о функции Грина носили эвристический характер. Придадим теперь им необходимую точность.

**Определение.** Функцией Грина  $G(x, s)$  краевой задачи (2.138), (2.139) называется функция, удовлетворяющая указанным выше условиям 1), 2), 3), 4).

Непосредственной подстановкой в уравнение (2.138) проверим, что

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, s) f(s) ds \quad (2.142)$$

является решением этого уравнения (краевые условия (2.139), очевидно, удовлетворяются в силу свойства 3)).

Действительно,

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= \int_{x_0}^{x_1} G'_x(x, s) f(s) ds = \int_{x_0}^x G'_x(x, s) f(s) ds + \int_x^{x_1} G'_x(x, s) f(s) ds; \\
 y''(x) &= \int_{x_0}^x G''_{xx}(x, s) f(s) ds + G'_x(x, x-0) f(x) + \\
 &\quad + \int_x^{x_1} G''_{xx}(x, s) f(s) ds - G'_x(x, x+0) f(x) = \\
 &= \int_{x_0}^{x_1} G''_{xx}(x, s) f(s) ds + [G'_x(x+0, x) - G'_x(x-0, x)] f(x).
 \end{aligned}$$

Подставляя (2.142) в уравнение (2.138), получим

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^{x_1} [p(x) G''_{xx}(x, s) + p'(x) G'_x(x, s) + q(x) G(x, s)] dx + \\
 + p(x) [G'_x(x+0, x) - G'_x(x-0, x)] f(x) \equiv f(x)
 \end{aligned}$$

в силу условий 2) и 4).

Рассмотрим метод построения функции Грина, из которого получим также достаточное условие ее существования.

Рассмотрим решение  $y_1(x)$  уравнения

$$\frac{d}{dx} (p(x) y') + q(x) y = 0, \quad (2.143)$$

определяемое начальными условиями

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = y'_0 \neq 0.$$

Это решение, вообще говоря, не удовлетворяет второму граничному условию  $y(x_1) = 0$ . Случай  $y_1(x_0) = y_1(x_1) = 0$  является исключительным, и мы его здесь рассматривать не будем.

Очевидно, что решения  $c_1 y_1(x)$ , где  $c_1$  — произвольная постоянная, также удовлетворяют граничному условию  $y(x_0) = 0$ . Аналогично находим нетривиальное решение  $y_2(x)$  уравнения (2.143), удовлетворяющее второму граничному условию  $y_2(x_1) = 0$ ; этому же условию удовлетворяют все решения семейства  $c_2 y_2(x)$ , где  $c_2$  — произвольная постоянная.

Функцию Грина ищем в виде

$$G(x, s) = \begin{cases} c_1 y_1(x) & \text{при } x_0 \leq x \leq s, \\ c_2 y_2(x) & \text{при } s \leq x \leq x_1, \end{cases}$$

причем постоянные  $c_1$  и  $c_2$  выбираем так, чтобы были выполнены условия 1) и 4), т. е. чтобы функция  $G(x, s)$  была непрерывна по  $x$  при фиксированном  $s$ , и в частности непрерывна в точке  $x = s$ :

$$c_1 y_1(s) = c_2 y_2(s), \quad (2.144)$$

и чтобы  $G'_x(x, s)$  в точке  $x = s$  имела скачок  $\frac{1}{p(s)}$ :

$$c_2 y_2'(s) - c_1 y_1'(s) = \frac{1}{p(s)}. \quad (2.145)$$

В силу предположения, что  $y_1(x_1) \neq 0$ , решения  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  линейно независимы, так как все линейно зависимые от  $y_1(x)$  решения имеют вид  $c_1 y_1(x)$  и, следовательно, при  $c_1 \neq 0$  не обращаются в нуль в точке  $x_1$ , в которой обращается в нуль решение  $y_2(x)$ . Следовательно, определитель системы (2.144) и (2.145), являющийся определителем Вронского:  $W(y_1(x), y_2(x)) = W(x)$  в точке  $x = s$ , отличен от нуля и постоянные  $c_1$  и  $c_2$ , удовлетворяющие системе (2.144) и (2.145), легко определяются:

$$c_1 = \frac{y_2(s) y_1(x)}{W(s) p(s)}, \quad c_2 = \frac{y_1(s) y_2(x)}{W(s) p(s)},$$

откуда

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{y_2(s) y_1(x)}{W(s) p(s)} & \text{при } x_0 \leq x \leq s, \\ \frac{y_1(s) y_2(x)}{W(s) p(s)} & \text{при } s < x \leq x_1. \end{cases} \quad (2.146)$$

Пример. Найти функцию Грина краевой задачи

$$y''(x) + y(x) = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Решения соответствующего однородного уравнения, удовлетворяющие условиям  $y(0) = 0$  и  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , соответственно имеют вид  $y_1 = c_1 \sin x$  и  $y_2 = c_2 \cos x$ , следовательно, согласно (2.146)

$$G(x, s) = \begin{cases} -\cos s \sin x & \text{при } 0 \leq x \leq s, \\ -\sin s \cos x & \text{при } s < x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Замечание. Мы предположили (стр. 163), что не существует нетривиального решения  $y(x)$  однородного уравнения (2.143), удовлетворяющего нулевым граничным условиям  $y(x_0) = y(x_1) = 0$ . Это условие гарантирует не только существование и единственность краевой задачи (2.138), (2.139), но и единственность функции Грина.

Действительно, если допустить существование двух различных функций Грина  $G_1(x, s)$  и  $G_2(x, s)$  для краевой задачи (2.138), (2.139), то получим два различных решения этой задачи:

$$y_1(x) = \int_{x_0}^{x_1} G_1(x, s) f(s) ds$$

и

$$y_2(x) = \int_{x_0}^{x_1} G_2(x, s) f(s) ds,$$

разность которых

$$\int_{x_0}^{x_1} [G_1(x, s) - G_2(x, s)] f(s) ds,$$

вопреки предположению, будет нетривиальным решением соответствующего однородного уравнения, удовлетворяющим нулевым граничным условиям.

## Задачи к главе 2

- при  $x=0$   $y=10$ ,  $y'=5$ .
1.  $y'' - 6y' + 10y = 100$ , причем
  2.  $\ddot{x} + x = \sin t - \cos 2t$ .
  3.  $y'y''' - 3(y'')^2 = 0$ .
  4.  $y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}$ .
  5.  $x^2y'' - 4xy' + 6y = 2$ .
  6.  $y'' + y = \operatorname{ch} x$ .
  7.  $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$ .
  8.  $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = e^t + e^{2t} + 1$ .
  9.  $(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$ .
  10.  $x^3 \frac{d^2x}{dt^2} + 1 = 0$ .
  11.  $y^{IV} - 16y = x^2 - e^x$ .
  12.  $(y''')^2 + (y'')^2 = 1$ .
  13.  $\frac{d^6x}{dt^6} - \frac{d^4x}{dt^4} = 1$ .
  14.  $\frac{d^4x}{dt^4} - 2\frac{d^2x}{dt^2} + x = t^2 - 3$ .
  15.  $y'' + 4xy = 0$ ; проинтегрировать с помощью степенных рядов
  16.  $x^2y'' + xy' + \left(9x^2 - \frac{1}{25}\right)y = 0$ ; проинтегрировать путем сведения к уравнению Бесселя.
  17.  $y'' + (y')^2 = 1$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .
  18.  $y'' = 3\sqrt{y}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ .
  19.  $y'' + y = 1 - \frac{1}{\sin x}$ .
  20.  $\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} = 0$ .
21. Найти скорость, с которой тело упадет на поверхность Земли, если считать, что оно падает с бесконечно большой высоты и движение проис-

ходит только под влиянием притяжения Земли. Радиус Земли считать равным 6400 км.

22. Найти закон движения тела, падающего без начальной скорости, допуская, что сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и что скорость имеет своим пределом при  $t \rightarrow \infty$  величину 75 м/сек.

23. Цепь длиной 6 м соскальзывает со стола. В момент начала движения со стола свисал 1 м цепи. Во сколько времени со стола соскользнет вся цепь. (Трением пренебрегаем.)

24. Цепь переброшена через гладкий гвоздь. В момент начала движения с одной стороны свисает 8 м цепи, а с другой стороны 10 м цепи. Во сколько времени вся цепь соскользнет с гвоздя? (Трением пренебрегаем.)

25. Поезд движется по горизонтальному пути. Вес поезда  $P$ , сила тяги паровоза  $F$ , сила сопротивления при движении  $W = a + bv$ , где  $a$  и  $b$  — постоянные, а  $v$  — скорость поезда;  $s$  — пройденный путь. Определить закон движения поезда, считая, что при  $t = 0$   $s = 0$  и  $v = 0$ .

26. Груз в  $p$  кг подвешен на пружине и оттянул ее на  $a$  см. Затем пружина оттягивается еще на  $A$  см и отпускается без начальной скорости. Найти закон движения пружины, пренебрегая сопротивлением среды.

27. Два одинаковых груза подвешены к концу пружины. Найти закон движения одного из грузов, если другой оборвется. Дано, что удлинение пружины под влиянием одного из грузов равно  $a$  см.

28. Материальная точка массы  $m$  отталкивается от центра  $O$  с силой, пропорциональной расстоянию. Сопротивление среды пропорционально скорости движения. Найти закон движения.

29. Найти периодическое решение с периодом  $2\pi$  уравнения

$$\ddot{x} + 2x = f(t),$$

где функция  $f(t) = \pi^2 t - t^3$  при  $-\pi < t \leq \pi$  и далее продолжена периодически.

$$30. yy'' + (y')^2 = \frac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$33. y'' + 2y' + y = \operatorname{sh} x.$$

$$31. yy'y'' = (y')^3 + (y'')^2.$$

$$34. y''' - y = e^x.$$

$$32. \ddot{x} + 9x = t \sin 3t.$$

$$35. y'' - 2y' + 2y = xe^x \cos x.$$

36.  $(x^2 - 1)y'' - 6y = 1$ . Частное решение соответствующего однородного уравнения имеет вид многочлена.

37. Найти решение  $u = u(x^2 + y^2)$  уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

зависящее лишь от  $x^2 + y^2$ .

38. Найти решение  $u = u(x^2 + y^2 + z^2)$  уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

являющееся функцией  $x^2 + y^2 + z^2$ .

39. Материальная точка медленно погружается в жидкость. Найти закон движения, считая, что при медленном погружении сопротивление жидкости пропорционально скорости погружения.

40. Проинтегрировать уравнение движения  $m\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$ , считая, что правая часть является функцией только  $x$  или только  $\dot{x}$ :

а)  $m\ddot{x} = f(x)$ ;

б)  $m\ddot{x} = f(\dot{x})$ .

41.  $y^{\text{VI}} - 3y^{\text{V}} + 3y^{\text{IV}} - y^{\text{III}} = x$ .

42.  $x^{\text{IV}} + 2x'' + x = \cos t$ .

43.  $(1+x)^2 y'' + (1+x) y' + y = 2 \cos \ln(1+x)$ .

44. Определить периодическое решение уравнения

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n^4}.$$

45. Определить периодическое решение уравнения

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = f(t),$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — постоянные, а  $f(t)$  — непрерывная периодическая функция периода  $2\pi$ , разлагающаяся в ряд Фурье,  $a_1 \neq 0$  и  $a_2 \neq 0$ .

46.  $\ddot{x} + 3x = \cos t + \mu x^2$ ,  $\mu$  — малый параметр. Приблизительно определить периодическое решение.

47.  $x^3 y'' - x y' + y = 0$ ; проинтегрировать уравнение, если  $y_1 = x$  является частным решением.

48. Найти линейное однородное уравнение, имеющее следующую фундаментальную систему решений:  $y_1 = x$ ,  $y_2 = \frac{1}{x}$ .

49.  $x^{\text{IV}} + x = t^3$ .

55.  $6y'' y^{\text{IV}} - 5(y''')^2 = 0$ .

50.  $x = (y'')^3 + y'' + 1$ .

56.  $x y'' = y' \ln \frac{y'}{x}$ .

51.  $\ddot{x} + 10\dot{x} + 25x = 2^t + t e^{-5t}$ .

57.  $y'' + y = \sin 3x \cos x$ .

52.  $x y y'' - x (y')^2 - y y' = 0$ .

58.  $y'' = 2y^3$ ,  $y(1) = 1$ ,  $y'(1) = 1$ .

53.  $y^{\text{VI}} - y = e^{2x}$ .

59.  $y y'' - (y')^2 = y'$ .

54.  $y^{\text{VI}} + 2y^{\text{IV}} + y'' = x + e^x$ .

## ГЛАВА 3

# СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

### § 1. Общие понятия

Уравнение движения материальной точки массы  $m$  под действием силы  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$$

путем проектирования на оси координат может быть заменено системой трех скалярных уравнений второго порядка:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

или системой шести уравнений первого порядка, если за неизвестные функции считать не только координаты  $x, y, z$  движущейся точки, но и проекции  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  ее скорости  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ :

$$\dot{x} = u,$$

$$\dot{y} = v,$$

$$\dot{z} = w;$$

$$m\dot{u} = X(t, x, y, z, u, v, w),$$

$$m\dot{v} = Y(t, x, y, z, u, v, w),$$

$$m\dot{w} = Z(t, x, y, z, u, v, w).$$

При этом обычно задаются начальное положение точки  $x(t_0) = x_0$ ,  $y(t_0) = y_0$ ,  $z(t_0) = z_0$  и начальная скорость  $u(t_0) = u_0$ ,  $v(t_0) = v_0$ ,  $w(t_0) = w_0$ .



Возможна и другая интерпретация решений

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad \dots, \quad x_n = x_n(t),$$

или кратко  $X = X(t)$ , особенно удобная, если правые части системы (3.1) не зависят явно от  $t$ .

В евклидовом пространстве с прямоугольными координатами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  решение  $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$  определяет закон движения по некоторой траектории в зависимости от изменения параметра  $t$ , который при этой интерпретации мы будем считать временем. При такой интерпретации производная  $\frac{dX}{dt}$  будет скоростью движения точки, а  $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}$  — координатами скорости той же точки. При этой интерпретации, весьма удобной и естественной во многих физических и механических задачах, система

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.1)$$

или

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X)$$

обычно называется *динамической*, пространство с координатами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называется *фазовым*, а кривая  $X = X(t)$  — *фазовой траекторией*.

Динамическая система (3.1) в заданный момент времени  $t$  определяет в пространстве  $x_1, x_2, \dots, x_n$  поле скоростей. Если вектор-функция  $F$  зависит явно от  $t$ , то поле скоростей меняется с течением времени и фазовые траектории могут пересекаться. Если же вектор-функция  $F$ , или, что то же самое, все функции  $f_i$ , не зависят явно от  $t$ , то поле скоростей стационарно, т. е. не изменяется с течением времени, и движение будет установившимся.

В последнем случае, если условия теоремы существования и единственности выполнены, через каждую точку фазового пространства  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  будет проходить лишь одна траектория. Действительно, в этом случае по каждой траектории  $X = X(t)$  совершается бесконечное множество различных движений  $X = X(t + c)$ , где  $c$  — произвольная постоянная, в чем легко убедиться, совершив замену переменных  $t_1 = t + c$ , при которой динамическая система не изменит своего вида:

$$\frac{dX}{dt_1} = F(X),$$

и следовательно,  $X = X(t_1)$  будет ее решением, или в прежних переменных  $X = X(t + c)$ .

Если бы через некоторую точку  $X_0$  фазового пространства в рассматриваемом случае проходили две траектории

$$X = X_1(t) \quad \text{и} \quad X = X_2(t), \quad X_1(\bar{t}_0) = X_2(\bar{t}_0) = X_0,$$

то, взяв на каждой из них то движение, при котором точка  $X_0$  достигается в момент времени  $t = \bar{t}_0$ , т. е., рассматривая решения

$$X = X_1(t - \bar{t}_0 + \bar{t}_0) \quad \text{и} \quad X = X_2(t - \bar{t}_0 + \bar{t}_0),$$

получим противоречие с теоремой существования и единственности, так как два различных решения  $X_1(t - \bar{t}_0 + \bar{t}_0)$  и  $X_2(t - \bar{t}_0 + \bar{t}_0)$  удовлетворяют одному и тому же начальному условию  $X(t_0) = X_0$ .

Пример. Система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x \quad (3.3)$$

имеет, как нетрудно проверить непосредственной подстановкой, следующее семейство решений:

$$\begin{aligned} x &= c_1 \cos(t - c_2), \\ y &= -c_1 \sin(t - c_2). \end{aligned}$$

Рассматривая  $t$  как параметр, получим на фазовой плоскости  $x, y$  семейство окружностей с центром в начале координат (рис. 3.1). Правая часть системы (3.3) не зависит от  $t$  и удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности, поэтому траектории не пересекаются. Фиксируя  $c_1$ , получим определенную траекторию, причем различным  $c_2$  будут соответствовать различные движения по этой траектории. Уравнение траектории  $x^2 + y^2 = c_1^2$  не зависит от  $c_2$ , так что все движения при фиксированном  $c_1$  совершаются по одной и той же траектории. При  $c_1 = 0$  фазовая траектория состоит из одной точки, называемой в этом случае *точкой покоя* системы (3.3).

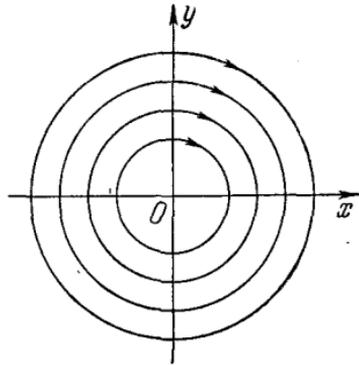


Рис. 3.1.

## § 2. Интегрирование системы дифференциальных уравнений путем сведения к одному уравнению более высокого порядка

Один из основных методов интегрирования системы дифференциальных уравнений заключается в следующем: из уравнений системы (3.1) и из уравнений, получающихся дифференцированием уравнений, входящих в систему, исключают все неизвестные функции, кроме одной, для определения которой получают одно дифференциальное уравнение более высокого порядка. Интегрируя это уравнение более высокого порядка, находят одну из неизвестных функций, а остальные неизвестные функции, по возможности без интеграций, определяются из исходных уравнений и уравнений, получившихся в результате их дифференцирования.

Иллюстрируем сказанное примерами.

Пример 1.

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x.$$

Дифференцируем одно из уравнений, например первое.  $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}$  и, исключая  $\frac{dy}{dt}$  с помощью второго уравнения, получим  $\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0$ , откуда  $x = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$ . Используя первое уравнение, получаем  $y = \frac{dx}{dt} = c_1 e^t - c_2 e^{-t}$ .

Мы определили  $y$  без интегрирований с помощью первого уравнения. Если бы мы определили  $y$  из второго уравнения

$$\frac{dy}{dt} = x = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \quad y = c_1 e^t - c_2 e^{-t} + c_3,$$

то ввели бы лишние решения, так как непосредственная подстановка в исходную систему уравнений показывает, что системе удовлетворяют функции  $x = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$ ,  $y = c_1 e^t - c_2 e^{-t} + c_3$  не при произвольном  $c_3$ , а лишь при  $c_3 = 0$ .

Пример 2.

$$\frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \tag{3.4_1}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x - y. \tag{3.4_2}$$

Дифференцируем второе уравнение:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2 \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}. \tag{3.5}$$

Из уравнений (3.4<sub>2</sub>) и (3.5) определяем  $x$  и  $\frac{dx}{dt}$ :

$$x = \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dt} + y \right), \tag{3.6}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \right).$$

Подставляя в (3.4<sub>1</sub>), получим

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} + y = 0.$$

Интегрируем полученное линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами  $y = e^t (c_1 + c_2 t)$  и, подставляя в (3.6), находим  $x(t)$ :

$$x = \frac{1}{2} e^t (2c_1 + c_2 + 2c_2 t).$$

Пример 3.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = y, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = x.$$



Снова дифференцируем это тождество:

$$\frac{d^3 x_1}{dt^3} = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt},$$

или

$$\frac{d^3 x_1}{dt^3} = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial x_i} f_i, \quad (3.7^3)$$

и, обозначив правую часть последнего тождества  $F_3(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ , получим:

$$\frac{d^3 x_1}{dt^3} = F_3(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3.7^6)$$

Опять дифференцируем это тождество и, продолжая этот процесс  $n - 2$  раза, получим, наконец, тождество

$$\frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}} = F_{n-1}(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.7^{n-1})$$

дифференцируя которое еще раз и пользуясь тождествами (3.1), будем иметь:

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Итак, получены  $n - 1$  тождеств

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), & (3.7_1) \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), & (3.7_2) \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}} &= F_{n-1}(t, x_1, x_2, \dots, x_n) & (3.7_{n-1}) \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

и еще одно тождество

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3.8)$$

Предположим, что в рассматриваемой области изменения переменных определитель

$$\frac{D(f_1, F_2, F_3, \dots, F_{n-1})}{D(x_2, x_3, x_4, \dots, x_n)} \neq 0.$$

Тогда систему (3.7) можно разрешить относительно  $x_2, x_3, \dots, x_n$ , выразив их через переменные  $t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}}$ . Подставив

найденные из системы (3.7) переменные  $x_2, x_3, \dots, x_n$  в последнее уравнение (3.8), получим уравнение  $n$ -го порядка

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = \Phi \left( t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}} \right), \quad (3.8_1)$$

которому удовлетворяет функция  $x_1(t)$ , являющаяся по предположению функцией  $x_1(t)$  решения  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  системы (3.1).

Докажем теперь, что если взять любое решение  $x_1(t)$  полученного уравнения  $n$ -го порядка (3.8<sub>1</sub>) подставить его в систему (3.7) и определить из этой системы  $x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)$ , то система функций

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \quad (3.9)$$

будет решением системы (3.1).

Подставим найденную систему функций (3.9) в систему (3.7) и тем самым обратим все уравнения этой системы в тождества; в частности, получим тождество

$$\frac{dx_1}{dt} \equiv f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3.7_1)$$

Дифференцируя это тождество по  $t$ , будем иметь:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}. \quad (3.10)$$

В этом тождестве пока нельзя заменить  $\frac{dx_i}{dt}$  функциями  $f_i$ , так как мы еще не доказали, что полученные указанным выше путем из уравнения (3.8) и системы (3.7) функции  $x_1, x_2, \dots, x_n$  удовлетворяют системе (3.1), более того, именно это утверждение и является целью нашего доказательства.

Вычитая почленно из тождества (3.10) тождество (3.7<sub>2</sub>), взятое в развернутом виде (3.7<sub>2</sub><sup>a</sup>), получим

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \left( \frac{dx_i}{dt} - f_i \right) \equiv 0$$

или, в силу (3.7<sub>1</sub>),

$$\sum_{i=2}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \left( \frac{dx_i}{dt} - f_i \right) \equiv 0.$$



Если это условие не выполнено, то можно применить тот же процесс, но вместо функции  $x_1$  взять какую-нибудь другую из функций  $x_2, x_3, \dots, x_n$ , входящих в решение системы (3.1). Если же условие (3.12) не выполняется при любом выборе вместо  $x_1$  какой-нибудь функции из  $x_2, x_3, \dots, x_n$ , то возможны различные исключительные случаи, которые мы иллюстрируем следующими примерами.

Пример 4.

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_2),$$

$$\frac{dx_3}{dt} = f_3(t, x_3).$$

Система распалась на совершенно независимые между собой уравнения, каждое из которых приходится интегрировать отдельно.

Пример 5.

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_2, x_3), \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \neq 0,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = f_3(t, x_2, x_3).$$

Два последних уравнения можно указанным выше методом свести к одному уравнению второго порядка, но первое уравнение, содержащее неизвестную функцию  $x_1$ , не входящую в остальные уравнения, надо интегрировать отдельно.

Замечание 2. Если применить указанный выше процесс исключения всех неизвестных функций, кроме одной, к системе

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

называемой линейной однородной, то, как нетрудно проверить, уравнение  $n$ -го порядка

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = \Phi \left( t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}} \right) \quad (3.8_1)$$

тоже будет линейным однородным, причем если все коэффициенты  $a_{ij}$  были постоянными, то и уравнение (3.8<sub>1</sub>) будет линейным однородным уравнением с постоянными коэффициентами. Аналогичное

замечание справедливо и для линейной неоднородной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j + f_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

для которой уравнение (3.8<sub>1</sub>) будет линейным неоднородным уравнением  $n$ -го порядка.

### § 3. Нахождение интегрируемых комбинаций

Интегрирование систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1)$$

нередко осуществляется путем подбора так называемых интегрируемых комбинаций.

*Интегрируемой комбинацией* называется дифференциальное уравнение, являющееся следствием уравнений (3.1), но уже легко интегрирующееся, например являющееся уравнением вида

$$d\Phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

или уравнением, сводящимся заменой переменных к какому-нибудь интегрируемому типу уравнений с одной неизвестной функцией.

Пример 1.

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x.$$

Складывая почленно данные уравнения, находим одну интегрируемую комбинацию

$$\frac{d(x+y)}{dt} = x+y \quad \text{или} \quad \frac{d(x+y)}{x+y} = dt,$$

откуда

$$\ln|x+y| = t + \ln c_1, \quad x+y = c_1 e^t.$$

Почленно вычитая из первого уравнения системы второе, получаем вторую интегрируемую комбинацию

$$\frac{d(x-y)}{dt} = -(x-y) \quad \text{или} \quad \frac{d(x-y)}{x-y} = -dt,$$

$$\ln|x-y| = -t + \ln c_2, \quad x-y = c_2 e^{-t}.$$

Итак, найдено два конечных уравнения:

$$x+y = c_1 e^t \quad \text{и} \quad x-y = c_2 e^{-t},$$

из которых может быть определено решение исходной системы

$$x = \frac{1}{2}(c_1 e^t + c_2 e^{-t}), \quad y = \frac{1}{2}(c_1 e^t - c_2 e^{-t})$$

или

$$x = \bar{c}_1 e^t + \bar{c}_2 e^{-t}, \quad y = \bar{c}_1 e^t - \bar{c}_2 e^{-t}.$$



## Пример 2.

$$\frac{dx}{dt} = y - z, \quad \frac{dy}{dt} = z - x, \quad \frac{dz}{dt} = x - y.$$

Сложив почленно уравнения этой системы, получим

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}(x + y + z) = 0,$$

откуда

$$x + y + z = c_1.$$

Найденный первый интеграл позволяет выразить одну из неизвестных функций через остальные переменные и тем самым свести задачу к интегрированию системы двух уравнений с двумя неизвестными функциями. Однако в данном случае легко можно найти еще один первый интеграл. Умножим первое уравнение почленно на  $x$ , второе на  $y$ , третье на  $z$  и сложим:

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} = 0,$$

или, умножив на 2, получим

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

откуда

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_2.$$

Из двух найденных первых интегралов можно выразить две неизвестные функции через остальные переменные и тем самым свести задачу к интегрированию одного уравнения с одной неизвестной функцией.

## Пример 3.

$$A \frac{dp}{dt} = (B - C)qr, \quad B \frac{dq}{dt} = (C - A)rp, \quad C \frac{dr}{dt} = (A - B)pq,$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — постоянные (эта система встречается в теории движения твердого тела). Умножая первое уравнение на  $p$ , второе на  $q$ , третье на  $r$  и складывая, получим

$$Ap \frac{dp}{dt} + Bq \frac{dq}{dt} + Cr \frac{dr}{dt} = 0,$$

откуда находим первый интеграл

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = c_1.$$

Умножая первое уравнение на  $Ap$ , второе на  $Bq$ , третье на  $Cr$  и складывая, будем иметь

$$A^2p \frac{dp}{dt} + B^2q \frac{dq}{dt} + C^2r \frac{dr}{dt} = 0,$$

и, интегрируя, получим еще один первый интеграл

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = c_2.$$

Если исключить случай  $A = B = C$ , при котором система интегрируется непосредственно, то найденные первые интегралы независимы и, следовательно, пользуясь этими первыми интегралами, можно исключить две неизвестные

функции, причем для определения третьей функции получим одно уравнение с разделяющимися переменными.

Для нахождения интегрируемых комбинаций часто удобно переходить к так называемой симметрической форме записи системы уравнений (3.1):

$$\frac{dx_1}{\varphi_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{\varphi_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots$$

$$\dots = \frac{dx_n}{\varphi_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dt}{\varphi_0(t, x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad (3.15)$$

где

$$f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)}{\varphi_0(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

В системе, заданной в симметрической форме, переменные входят равноправно, что иногда облегчает нахождение интегрируемых комбинаций.

Пример 4.

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}. \quad (3.16)$$

Интегрируя уравнение

$$\frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz},$$

находим  $\frac{y}{z} = c_1$ . Умножая числители и знаменатели первого из отношений системы (3.16) на  $x$ , второго на  $y$ , третьего на  $z$  и составляя производную пропорцию, получим

$$\frac{x dx + y dy + z dz}{x(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{dy}{2xy},$$

откуда

$$\ln(x^2 + y^2 + z^2) = \ln|y| + \ln c_2,$$

или

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = c_2.$$

Найденные независимые первые интегралы

$$\frac{y}{z} = c_1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = c_2$$

определяют искомые интегральные кривые.

#### § 4. Системы линейных дифференциальных уравнений

Система дифференциальных уравнений называется *линейной*, если она линейна относительно всех неизвестных функций и их производных. Система  $n$  линейных уравнений первого порядка, записанная

в нормальной форме, имеет вид

$$\frac{dx_l}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{lj}(t) x_j + f_l(t), \quad (l = 1, 2, \dots, n), \quad (3.17)$$

или в векторной форме

$$\frac{dX}{dt} = AX + F, \quad (3.18)$$

где  $X$  есть  $n$ -мерный вектор с координатами  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_n(t)$ ,  $F$  есть  $n$ -мерный вектор с координатами  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ , ...,  $f_n(t)$ , которые удобно в дальнейшем рассматривать как одностробцовые матрицы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}.$$

Согласно правилу умножения матриц строки первого множителя должны умножаться на столбец второго, следовательно,

$$AX = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \end{pmatrix}, \quad AX + F = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + f_1 \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j + f_2 \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j + f_n \end{pmatrix}.$$

Равенство матриц означает равенство всех их элементов, следовательно, одно матричное уравнение (3.18) или

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + f_1 \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j + f_2 \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j + f_n \end{pmatrix}$$

эквивалентно системе (3.17).

Если все функции  $a_{ij}(t)$  и  $f_i(t)$  в (3.17) непрерывны на отрезке  $a \leq t \leq b$ , то в достаточно малой окрестности каждой точки  $(t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ , где  $a \leq t_0 \leq b$ , выполнены условия теоремы существования и единственности (см. стр. 169) и, следовательно, через каждую такую точку проходит единственная интегральная кривая системы (3.17).

Действительно, в рассматриваемом случае правые части системы (3.17) непрерывны, и их частные производные по любому  $x_j$  ограничены, так как эти частные производные равны непрерывным на отрезке  $a \leq t \leq b$  коэффициентам  $a_{ij}(t)$ .

Определим *линейный оператор*  $L$  равенством

$$L[X] = \frac{dX}{dt} - AX,$$

тогда уравнение (3.18) еще короче можно записать в виде

$$L[X] = F. \quad (3.19)$$

Если все  $f_i(t) \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), или, что то же самое, матрица  $F = 0$ , то система (3.17) называется *линейной однородной*. В краткой записи линейная однородная система имеет вид

$$L[X] = 0. \quad (3.20)$$

Оператор  $L$  обладает следующими двумя свойствами:

$$1) L[cX] = cL[X],$$

где  $c$  — произвольная постоянная.

$$2) L[X_1 + X_2] = L[X_1] + L[X_2].$$

Действительно,

$$\frac{d(cX)}{dt} - A(cX) \equiv c \left[ \frac{dX}{dt} - AX \right],$$

$$\frac{d(X_1 + X_2)}{dt} - A(X_1 + X_2) \equiv \left( \frac{dX_1}{dt} - AX_1 \right) + \left( \frac{dX_2}{dt} - AX_2 \right),$$

Следствием свойств 1) и 2) является

$$L \left[ \sum_{i=1}^m c_i X_i \right] \equiv \sum_{i=1}^m c_i L[X_i],$$

где  $c_i$  — произвольные постоянные.

**Теорема 3.1.** Если  $X$  является решением линейной однородной системы  $L[X] = 0$ , то  $cX$ , где  $c$  — произвольная постоянная, является решением той же системы.

Доказательство. Дано  $L[X] \equiv 0$ , надо доказать, что  $L[cX] \equiv 0$ .

Пользуясь свойством 1) оператора  $L$ , получим

$$L[cX] \equiv cL[X] \equiv 0.$$

**Теорема 3.2.** Сумма  $X_1 + X_2$  двух решений  $X_1$  и  $X_2$  однородной линейной системы уравнений является решением той же системы.

Доказательство. Дано  $L[X_1] \equiv 0$  и  $L[X_2] \equiv 0$ .

Требуется доказать, что  $L[X_1 + X_2] \equiv 0$ .

Пользуясь свойством 2) оператора  $L$ , получим

$$L[X_1 + X_2] \equiv L[X_1] + L[X_2] \equiv 0.$$

**Следствие теорем 3.1 и 3.2.** Линейная комбинация  $\sum_{i=1}^m c_i X_i$  с произвольными постоянными коэффициентами решений  $X_1, X_2, \dots, X_m$  линейной однородной системы  $L[X] = 0$  является решением той же системы.

**Теорема 3.3.** Если линейная однородная система (20) с действительными коэффициентами  $a_{ij}(t)$  имеет комплексное решение  $X = U + iV$ , то действительная и мнимая части

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

в отдельности являются решениями той же системы.

Доказательство. Дано  $L[U + iV] \equiv 0$ . Надо доказать, что

$$L[U] \equiv 0 \quad \text{и} \quad L[V] \equiv 0.$$

Пользуясь свойствами 1) и 2) оператора  $L$ , получаем

$$L[U + iV] \equiv L[U] + iL[V] \equiv 0.$$

Следовательно,  $L[U] \equiv 0$  и  $L[V] \equiv 0$ .

Векторы  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , где

$$X_i = \begin{pmatrix} x_{1i}(t) \\ x_{2i}(t) \\ \vdots \\ x_{ni}(t) \end{pmatrix},$$

называются *линейно зависимыми* на отрезке  $a \leq t \leq b$ , если существуют постоянные  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  такие, что

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n \equiv 0 \quad (3.21)$$

при  $a \leq t \leq b$ , причем по крайней мере одно  $\alpha_i \neq 0$ . Если же тождество (3.21) справедливо лишь при  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ , то векторы  $X_1, X_2, \dots, X_n$  называются *линейно независимыми*.

Заметим, что одно векторное тождество (3.21) эквивалентно  $n$  тождествам:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i x_{1i}(t) &\equiv 0, \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_{2i}(t) &\equiv 0, \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_{ni}(t) &\equiv 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.21_1)$$

Если векторы  $X_i (i=1, 2, \dots, n)$  линейно зависимы и значит существует нетривиальная система  $\alpha_i$  (т. е. не все  $\alpha_i$  равны нулю), удовлетворяющая системе  $n$  линейных однородных по отношению к  $\alpha_i$  уравнений (3.21<sub>1</sub>), то определитель системы (3.21<sub>1</sub>)

$$W = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

должен быть равен нулю для всех значений  $t$  отрезка  $a \leq t \leq b$ . Этот определитель системы называют *определителем Вронского* для системы векторов  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

**Теорема 3.4.** Если определитель Вронского  $W$  решений  $X_1, X_2, \dots, X_n$  линейной однородной системы уравнений (3.20) с непрерывными на отрезке  $a \leq t \leq b$  коэффициентами  $a_{ij}(t)$  равен нулю хотя бы в одной точке  $t=t_0$  отрезка  $a \leq t \leq b$ , то решения  $X_1, X_2, \dots, X_n$  линейно зависимы на том же отрезке, и, следовательно, на рассматриваемом отрезке  $W \equiv 0$ .

Доказательство. Так как коэффициенты  $a_{ij}(t)$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) непрерывны, то система (3.20) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности. Следовательно, начальное значение  $X(t_0) = 0$  (или, подробнее,  $x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 0, \dots, x_n(t_0) = 0$ ) определяет единственное решение рассматриваемой системы и этим решением, очевидно, является тривиальное решение системы (3.20)  $X(t) \equiv 0$  (или, подробнее,  $x_1(t) \equiv 0, x_2(t) \equiv 0, \dots, x_n(t) \equiv 0$ ). Определитель  $W(t_0) = 0$ . Следовательно, существует нетривиальная система  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , удовлетворяющая уравнению

$$c_1 X_1(t_0) + c_2 X_2(t_0) + \dots + c_n X_n(t_0) \equiv 0,$$

так как это одно векторное уравнение эквивалентно системе  $n$  линейных однородных относительно  $c_i$  уравнений с равным нулю определителем:

$$\sum_{i=1}^n c_i x_{1i}(t_0) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n c_i x_{2i}(t_0) = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sum_{i=1}^n c_i x_{ni}(t_0) = 0.$$

Соответствующее этой нетривиальной системе  $c_1, c_2, \dots, c_n$  решение

уравнения (3.20)  $X(t) = \sum_{i=1}^n c_i X_i(t)$  удовлетворяет нулевым начальным условиям  $X(t_0) = 0$  и, следовательно, совпадает с тривиальным решением системы (3.20):

$$\sum_{i=1}^n c_i X_i(t) \equiv 0,$$

т. е.  $X_i$  линейно зависимы.

Замечание. Эта теорема, как показывают простейшие примеры, не распространяется на произвольные векторы  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , не являющиеся решениями системы (3.20) с непрерывными коэффициентами.

Пример 1. Система векторов

$$X_1 = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad X_2 = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

линейно независима, так как из

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 \equiv 0$$

или

$$\begin{cases} a_1 t + a_2 t^2 \equiv 0, \\ a_1 t + a_2 t^2 \equiv 0 \end{cases}$$

следует, что  $a_1 = a_2 = 0$  (см. стр. 96, пример 1). В то же время определитель Вронского  $\begin{vmatrix} t & t^2 \\ t & t^2 \end{vmatrix}$  тождественно равен нулю. Следовательно, векторы  $X_1$  и  $X_2$  не могут быть решениями одной и той же линейной однородной системы (3.20) с непрерывными коэффициентами  $a_{ij}(t)$  ( $i, j = 1, 2$ ).

**Теорема 3.5.** *Линейная комбинация  $\sum_{i=1}^n c_i X_i$  и линейно неза-*

*висимых решений  $X_1, X_2, \dots, X_n$  линейной однородной системы (3.20) с непрерывными на отрезке  $a \leq t \leq b$  коэффициентами  $a_{ij}(t)$  является общим решением системы (3.20) на том же отрезке.*

Доказательство. Так как коэффициенты  $a_{ij}(t)$  непрерывны на отрезке  $a \leq t \leq b$ , то система удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности и, следовательно, для доказательства теоремы достаточно обнаружить, что подбором постоянных  $c_i$  в решении  $\sum_{i=1}^n c_i X_i$  можно удовлетворить произвольно выбранным начальным условиям  $X(t_0) = X_0$ ,

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n0} \end{pmatrix},$$

где  $t_0$  — одно из значений  $t$  на отрезке  $a \leq t \leq b$ , т. е. можно удовлетворить одному векторному уравнению

$$\sum_{i=1}^n c_i X_i(t_0) = X_0$$

или эквивалентной системе  $n$  скалярных уравнений:

$$\sum_{i=1}^n c_i x_{1i}(t_0) = x_{10},$$

$$\sum_{i=1}^n c_i x_{2i}(t_0) = x_{20},$$

.....

$$\sum_{i=1}^n c_i x_{ni}(t_0) = x_{n0}.$$

Эта система разрешима относительно  $c_1$  при любых  $x_{10}$ , так как определитель системы является определителем Вронского для линейно независимой системы решений  $X_1, X_2, \dots, X_n$  и, следовательно, не обращается в нуль ни в одной точке отрезка  $a \leq t \leq b$ .

Пример 2.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x. \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Нетрудно проверить, что системе (3.22) удовлетворяют решения

$$x_1 = \cos t, \quad y_1 = -\sin t \quad \text{и} \quad x_2 = \sin t, \quad y_2 = \cos t.$$

Эти решения линейно независимы, так как определитель Вронского

$$\begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1$$

отличен от нуля. Следовательно, общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} x &= c_1 \cos t + c_2 \sin t, \\ y &= -c_1 \sin t + c_2 \cos t, \end{aligned}$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные постоянные.

**Теорема 3.6.** Если  $\tilde{X}$  является решением линейной неоднородной системы

$$L[X] = F, \quad (3.19)$$

а  $X_1$  — решением соответствующей однородной системы  $L[X] = 0$ , то сумма  $X_1 + \tilde{X}$  также будет решением неоднородной системы  $L[X] = F$ .

Доказательство. Дано, что  $L[\tilde{X}] \equiv F$  и  $L[X_1] \equiv 0$ . Надо доказать, что  $L[X_1 + \tilde{X}] \equiv F$ .

Пользуясь свойством 2) оператора  $L$ , получим

$$L[X_1 + \tilde{X}] \equiv L[X_1] + L[\tilde{X}] \equiv F.$$

**Теорема 3.7.** Общее решение на отрезке  $a \leq t \leq b$  неоднородной системы (3.19) с непрерывными на том же отрезке коэффициентами  $a_{ij}(t)$  и правыми частями  $f_i(t)$  равно сумме общего решения  $\sum_{i=1}^n c_i X_i$ , соответствующей однородной системы и частного решения  $\tilde{X}$  рассматриваемой неоднородной системы.

Доказательство. Так как условия теоремы существования и единственности выполнены (см. стр. 183), то для доказательства теоремы достаточно обнаружить, что подбором произвольных по-



является сумма  $\sum_{i=1}^m X_i$  решений  $X_i$  уравнений

$$L[X_i] = F_i \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

Доказательство. Дано  $L[X_i] \equiv F_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ). Надо доказать, что

$$L\left[\sum_{i=1}^m X_i\right] \equiv \sum_{i=1}^m F_i.$$

Используя свойство 2) оператора  $L$ , получим

$$L\left[\sum_{i=1}^m X_i\right] \equiv \sum_{i=1}^m L[X_i] \equiv \sum_{i=1}^m F_i.$$

Замечание. Теорема 3.8 без изменения доказательства, очевидно, распространяется и на тот случай, когда  $m \rightarrow \infty$ , если ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$  сходится и допускает почленное дифференцирование.

**Теорема 3.9.** Если система линейных уравнений

$$L[X] = U + iV,$$

где

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix},$$

с действительными функциями  $a_{ij}(t)$ ,  $u_i(t)$ ,  $v_i(t)$  ( $i, j=1, 2, \dots, n$ ) имеет решение

$$X = \tilde{U} + i\tilde{V}, \quad \tilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{u}_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{V} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{v}_n \end{pmatrix},$$

то действительная часть решения  $\tilde{U}$  и его мнимая часть  $\tilde{V}$  соответственно являются решениями уравнений

$$L[\tilde{U}] = U \quad \text{и} \quad L[\tilde{V}] = V.$$

Доказательство. Дано  $L[\tilde{U} + i\tilde{V}] \equiv U + iV$ , надо доказать, что  $L[\tilde{U}] \equiv U$ ,  $L[\tilde{V}] \equiv V$ .



Из этой системы  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными  $c'_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) с определителем системы  $W$ , совпадающим с определителем Вронского для линейно независимых решений  $X_1, X_2, \dots, X_n$  и, следовательно, отличным от нуля, определяются все  $c'_i(t)$ :

$$c'_i(t) = \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

откуда, интегрируя, находим неизвестные функции  $c_i(t)$ :

$$c_i(t) = \int \varphi_i(t) dt + \bar{c}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Пример 3.

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{\cos t}.$$

Общее решение соответствующей однородной системы

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x$$

имеет вид  $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ ,  $y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$  (см. стр. 188. пример 2). Варьируем постоянные

$$\begin{aligned} x &= c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t, \\ y &= -c_1(t) \sin t + c_2(t) \cos t. \end{aligned}$$

$c'_1(t)$  и  $c'_2(t)$  определяется из системы (3.24), имеющей в данном случае вид

$$\begin{aligned} c'_1(t) \cos t + c'_2(t) \sin t &= 0, \\ -c'_1(t) \sin t + c'_2(t) \cos t &= \frac{1}{\cos t}, \end{aligned}$$

откуда

$$c'_1(t) = -\frac{\sin t}{\cos t}, \quad c'_2(t) = 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \ln |\cos t| + \bar{c}_1, \\ c_2(t) &= t + \bar{c}_2 \end{aligned}$$

и окончательно получаем

$$\begin{aligned} x &= \bar{c}_1 \cos t + \bar{c}_2 \sin t + \cos t \ln |\cos t| + t \sin t, \\ y &= -\bar{c}_1 \sin t + \bar{c}_2 \cos t - \sin t \ln |\cos t| + t \cos t. \end{aligned}$$

## § 5. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Линейной системой с постоянными коэффициентами называется линейная система уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + f_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$



Из этого уравнения степени  $n$  определяются значения  $k$ , при которых система (3.26) имеет нетривиальные решения  $\alpha_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Уравнение (3.27) называется *характеристическим*. Если все корни характеристического уравнения  $k_l$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ) различны, то, подставляя их по очереди в систему (3.26), определяем соответствующие им нетривиальные значения  $\alpha_j^{(l)}$  ( $l, j = 1, 2, \dots, n$ ) и, следовательно, находим  $n$  решений исходной системы (3.25) в виде

$$x_1^{(l)} = \alpha_1^{(l)} e^{k_l t}, \quad x_2^{(l)} = \alpha_2^{(l)} e^{k_l t}, \quad \dots, \quad x_n^{(l)} = \alpha_n^{(l)} e^{k_l t} \quad (l = 1, 2, \dots, n), \quad (3.28)$$

где верхний индекс указывает номер решения, а нижний индекс — номер неизвестной функции.

Пользуясь векторными обозначениями, получим тот же результат еще короче:

$$\frac{dX}{dt} = AX; \quad (3.25_1)$$

ищем решение в виде

$$X = \tilde{A} e^{kt}, \quad \text{где} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A} k e^{kt} = A \tilde{A} e^{kt},$$

или

$$(A - kE) \tilde{A} = 0, \quad (3.29)$$

где  $E$  — единичная матрица:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы уравнению (3.29) удовлетворяла нетривиальная матрица  $\tilde{A}$

$$\tilde{A} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

необходимо и достаточно, чтобы матрица  $A - kE$  была бы особой, т. е. чтобы ее определитель был равен нулю:  $|A - kE| = 0$ . Для каждого корня  $k_i$  этого характеристического уравнения  $|A - kE| = 0$  из (3.29) определяем не равную нулю матрицу  $\tilde{A}^{(i)}$  и, если все корни  $k_i$  характеристического уравнения различны, получаем  $n$  решений:

$$X_1 = \tilde{A}^{(1)} e^{k_1 t}, \quad X_2 = \tilde{A}^{(2)} e^{k_2 t}, \quad \dots, \quad X_n = \tilde{A}^{(n)} e^{k_n t}.$$

где

$$\tilde{A}^{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \alpha_2^{(i)} \\ \vdots \\ \alpha_n^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Эти решения, как нетрудно показать, линейно независимы. Действительно, если бы существовала линейная зависимость

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \tilde{A}^{(i)} e^{k_i t} = 0,$$

или в развернутой форме

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_1^{(i)} e^{k_i t} &\equiv 0, \\ \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_2^{(i)} e^{k_i t} &\equiv 0, \\ \dots &\dots \dots \\ \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_n^{(i)} e^{k_i t} &\equiv 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

то, в силу линейной независимости функций  $e^{k_i t}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) (см. стр. 96), из (3.30) следовало бы, что

$$\left. \begin{aligned} \beta_i \alpha_1^{(i)} &= 0, \\ \beta_i \alpha_2^{(i)} &= 0, \\ \dots &\dots \dots \\ \beta_i \alpha_n^{(i)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.31)$$

Но так как при каждом  $i$ , хотя бы одно из  $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) отлично от нуля, то из (3.31) следует, что  $\beta_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Итак, решения  $\tilde{A}^{(i)} e^{k_i t}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) линейно независимы и общее решение системы (3.25) имеет вид

$$X = \sum_{i=1}^n c_i \tilde{A}^{(i)} e^{k_i t},$$

или

$$x_j = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_j^{(i)} e^{k_i t} \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

где  $c_i$  — произвольные постоянные.

Постоянные  $\alpha_j^{(i)}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) определяются из системы (3.26) при  $k = k_i$  неоднозначно, так как определитель системы равен нулю и, следовательно, по крайней мере одно уравнение является следствием остальных. Неоднозначность определения  $\alpha_j^{(i)}$  связана с тем, что решение системы линейных однородных уравнений остается решением той же системы при умножении на произвольный постоянный множитель.

Комплексному корню характеристического уравнения (3.27)  $k_j = p + qi$  соответствует решение

$$X_j = \tilde{A}^{(j)} e^{k_j t}, \quad (3.32)$$

которое, если все коэффициенты  $a_{ij}$  действительны, может быть заменено двумя действительными решениями: действительной и мнимой частями решения (3.32) (см. стр. 184). Комплексный сопряженный корень характеристического уравнения  $k_{j+1} = p - qi$  не даст новых линейно независимых действительных решений.

Если характеристическое уравнение имеет кратный корень  $k_s$  кратности  $\gamma$ , то, принимая во внимание, что систему уравнений (3.25) можно свести процессом, указанным на стр. 173, к одному линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами  $n$ -го или более низкого порядка (см. замечания на стр. 177), можно утверждать, что решение системы (3.25) имеет вид

$$X(t) = (\tilde{A}_0^{(s)} + \tilde{A}_1^{(s)} t + \dots + \tilde{A}_{\gamma-1}^{(s)} t^{\gamma-1}) e^{k_s t}, \quad (3.33)$$

где

$$\tilde{A}_i^{(s)} = \begin{pmatrix} \alpha_{1i}^{(s)} \\ \alpha_{2i}^{(s)} \\ \vdots \\ \alpha_{ni}^{(s)} \end{pmatrix},$$

$\alpha_{ji}^{(s)}$  — постоянные.

Следует заметить, что и в тех случаях, когда система  $n$  уравнений (3.25) сводится к уравнению порядка ниже  $n$  (см. замечание 1 стр. 176), характеристическое уравнение последнего необходимо имеет корни, совпадающие с корнями уравнения (3.27) (так как уравнение, к которому свелась система, должно иметь решения вида  $e^{k_s t}$ , где  $k_s$  — корни уравнения (3.27)). Но возможно, что кратности этих корней, если порядок полученного уравнения ниже  $n$ , будут ниже кратностей корней уравнения (3.27), и следовательно, возможно, что в решении (3.33) степень первого множителя будет ниже, чем  $\gamma - 1$ , т. е. если мы будем искать решение в виде (3.33), то может обнаружиться, что некоторые коэффициенты  $\tilde{A}_i^{(s)}$ , в том числе и при старшем члене, обращаются в нуль.

Итак, решение системы (3.25), соответствующее кратному корню характеристического уравнения, следует искать в виде (3.33). Подставив (3.33) в уравнение (3.25<sub>1</sub>) и, требуя, чтобы оно обратилось в тождество, определим матрицы  $A_i^{(s)}$ , причем некоторые из них, в том числе и  $A_{\gamma-1}^{(s)}$ , могут оказаться равными нулю.

З а м е ч а н и е. Можно точнее указать вид решения системы (3.25), соответствующего кратному корню характеристического уравнения (3.27). Преобразовав систему (3.25) неособенным линейным преобразованием к системе, в которой матрица  $\|A - kE\|$  имеет нормальную Жорданову форму, и проинтегрировав полученную легко интегрируемую систему уравнений, обнаружим, что решение, соответствующее кратному корню  $k_s$  характеристического уравнения (3.27) кратности  $\gamma$ , имеет вид

$$X(t) = (\tilde{A}_0^{(s)} + \tilde{A}_1^{(s)}t + \dots + \tilde{A}_{\beta-1}^{(s)}t^{\beta-1}) e^{k_s t},$$

где  $\beta$  — наибольшая степень элементарного делителя матрицы  $\|A - kE\|$ , соответствующего корню  $k_s$ .

П р и м е р 1.

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 4x + 3y.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 4 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad k^2 - 4k - 5 = 0$$

имеет корни  $k_1 = 5$ ,  $k_2 = -1$ . Следовательно, решение ищем в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1^{(1)} e^{5t}, & y_1 &= \alpha_2^{(1)} e^{5t}, \\ x_2 &= \alpha_1^{(2)} e^{-t}, & y_2 &= \alpha_2^{(2)} e^{-t}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Подставляя (3.34) в исходную систему, получим:  $-4\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0$ , откуда  $\alpha_2^{(1)} = 2\alpha_1^{(1)}$ ,  $\alpha_1^{(1)}$  остается произвольным. Следовательно,

$$x_1 = c_1 e^{5t}, \quad y_1 = 2c_1 e^{5t}, \quad c_1 = \alpha_1^{(1)}.$$

Для определения коэффициентов  $\alpha_1^{(2)}$  и  $\alpha_2^{(2)}$  получаем уравнение  $2\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} = 0$ , откуда  $\alpha_2^{(2)} = -\alpha_1^{(2)}$ ; коэффициент  $\alpha_1^{(2)}$  остается произвольным. Следовательно,

$$x_2 = c_2 e^{-t}, \quad y_2 = -c_2 e^{-t}, \quad c_2 = \alpha_1^{(2)}.$$

Общее решение

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t}, \\ y &= 2c_1 e^{5t} - c_2 e^{-t}. \end{aligned}$$

Пример 2.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - y. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - k & -5 \\ 2 & -1 - k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad k^2 + 9 = 0$$

имеет корни  $k_{1,2} = \pm 3i$ ,  $x_1 = \alpha_1 e^{3it}$ ,  $y_1 = \alpha_2 e^{3it}$ ,  $(1 - 3i)\alpha_1 - 5\alpha_2 = 0$ . Этому уравнению удовлетворяют, например,  $\alpha_1 = 5$ ,  $\alpha_2 = 1 - 3i$ . Следовательно,

$$x_1 = 5e^{3it} = 5(\cos 3t + i \sin 3t),$$

$$y_1 = (1 - 3i)e^{3it} = (1 - 3i)(\cos 3t + i \sin 3t).$$

Действительная и мнимая части этого решения также являются решениями рассматриваемой системы, а их линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами является общим решением:

$$x = 5c_1 \cos 3t + 5c_2 \sin 3t,$$

$$y = c_1(\cos 3t + 3 \sin 3t) + c_2(\sin 3t - 3 \cos 3t).$$

Пример 3.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y, \\ \frac{dy}{dt} &= x + 3y. \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - k & -1 \\ 1 & 3 - k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad k^2 - 4k + 4 = 0$$

имеет кратный корень  $k_{1,2} = 2$ . Следовательно, решение следует искать в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= (\alpha_1 + \beta_1 t) e^{2t}, \\ y &= (\alpha_2 + \beta_2 t) e^{2t}. \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

Подставляя (3.36) в (3.35), получим

$$2\alpha_1 + \beta_1 + 2\beta_1 t \equiv \alpha_1 + \beta_1 t - \alpha_2 - \beta_2 t,$$

откуда

$$\beta_2 = -\beta_1,$$

$$\alpha_2 = -\alpha_1 - \beta_1.$$

$\alpha_1$  и  $\beta_1$  остаются произвольными. Обозначая эти произвольные постоянные соответственно  $c_1$  и  $c_2$ , получим общее решение в виде

$$\begin{aligned}x &= (c_1 + c_2 t) e^{2t}, \\y &= -(c_1 + c_2 + c_2 t) e^{2t}.\end{aligned}$$

## § 6. Приближенные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений и уравнений $n$ -го порядка

Все изложенные в § 7 гл. 1 методы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка без существенных изменений переносятся на системы уравнений первого порядка, а также на уравнения порядка выше первого, которые обычным способом сводятся к системе уравнений первого порядка (см. стр. 85).

1. Метод последовательных приближений. Как было указано на стр. 51, метод последовательных приближений применим к системам уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.37)$$

с начальными условиями  $y_i(x_0) = y_{i0}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), если функции  $f_i$  непрерывны по всем аргументам и удовлетворяют условиям Липшица по всем аргументам, начиная со второго.

Нулевое приближение  $y_{i0}(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) может быть выбрано произвольно, лишь бы удовлетворялись начальные условия, а дальнейшие приближения вычисляются по формуле

$$y_{i, k+1}(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^x f_i(x, y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{nk}) dx \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Так же как и для одного уравнения первого порядка, этот метод редко применяется в практике приближенных вычислений ввиду сравнительно медленной сходимости приближений и сложности и неоднотипности вычислений.

2. Метод Эйлера. Интегральная кривая системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

определяемая начальными условиями  $y_i(x_0) = y_{i0}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), заменяется ломаной, касающейся в одной из граничных точек каждого звена проходящей через ту же точку интегральной кривой (на рис. 3.2 изображена ломаная Эйлера и ее проекция только на

плоскость  $xy_1$ ). Отрезок  $x_0 \leq x \leq b$ , на котором надо вычислить решение, разбивается на части длиной  $h$ , и вычисление проводится по формулам

$$y_i(x_{k+1}) = y_i(x_k) + hy'_i(x_k) \\ (i = 1, 2, \dots, n).$$

Сходимость ломаных Эйлера к интегральной кривой при  $h \rightarrow 0$  доказывается так же, как для одного уравнения первого порядка (см. стр. 43). Для повышения точности можно применить итерации (уравнивание).

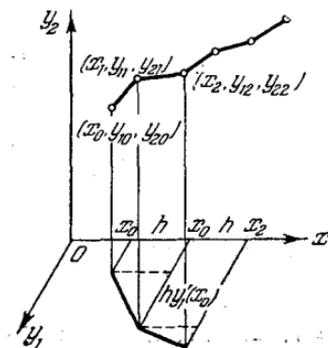


Рис. 3.2.

3. Разложение по формуле Тейлора. Предполагая, что правые части системы уравнений (3.37) дифференцируемы  $k$  раз (для того чтобы обеспечить дифференцируемость решений  $k+1$  раз), заменяют искомые решения несколькими первыми членами их тейлоровских разложений:

$$y_i(x) \approx y_i(x_0) + y'_i(x_0)(x - x_0) + \\ + y''_i(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots + y_i^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} \\ (i = 1, 2, \dots, n).$$

Оценка погрешности может быть осуществлена путем оценки остаточного члена в формуле Тейлора

$$R_{ik} = y_i^{(k+1)} [x_0 + \theta(x - x_0)] \frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!}, \quad \text{где } 0 < \theta < 1.$$

Этот метод дает хорошие результаты лишь в малой окрестности точки  $x_0$ .

4. Метод Штермера. Отрезок  $x_0 \leq x \leq b$  разбивается на части длиной  $h$ , и вычисление решения системы (3.37) проводится по одной из формул:

$$y_{i, k+1} = y_{ik} + q_{ik} + \frac{1}{2} \Delta q_{i, k-1}, \quad (3.38)$$

$$y_{i, k+1} = y_{ik} + q_{ik} + \frac{1}{2} \Delta q_{i, k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{i, k-2}, \quad (3.39)$$

$$y_{i, k+1} = y_{ik} + q_{ik} + \frac{1}{2} \Delta q_{i, k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{i, k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{i, k-3}, \quad (3.40)$$

где  $(i = 1, 2, \dots, n)$ ,  $y_{ik} = y_i(x_k)$ ,

$$x_k = x_0 + kh, \quad q_{ik} = y'_i(x_k)h,$$

$$\Delta q_{i, k-1} = q_{ik} - q_{i, k-1}, \quad \Delta^2 q_{i, k-2} = \Delta q_{i, k-1} - \Delta q_{i, k-2},$$

$$\Delta^3 q_{i, k-3} = \Delta^2 q_{i, k-2} - \Delta^2 q_{i, k-3}.$$

Формулы (3.38), (3.39) и (3.40) могут быть получены совершенно так же, как для одного уравнения первого порядка (см. стр. 63). Порядок погрешности при применении этих формул остается таким же, как и для одного уравнения.

Для начала вычисления по формуле Штермера необходимо знать несколько первых значений  $y_i(x_k)$ , которые могут быть найдены путем разложения по формуле Тейлора или методом Эйлера с уменьшенным шагом, причем, так же как и для одного уравнения, для повышения точности можно применять итерации (см. стр. 61—62), или методом Рунге.

5. Метод Рунге. Вычисляются числа

$$m_{i1} = f_i(x_k, y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{nk}),$$

$$m_{i2} = f_i\left(x_k + \frac{h}{2}, y_{1k} + \frac{hm_{i1}}{2}, y_{2k} + \frac{hm_{21}}{2}, \dots, y_{nk} + \frac{hm_{n1}}{2}\right),$$

$$m_{i3} = f_i\left(x_k + \frac{h}{2}, y_{1k} + \frac{hm_{i2}}{2}, y_{2k} + \frac{hm_{22}}{2}, \dots, y_{nk} + \frac{hm_{n2}}{2}\right),$$

$$m_{i4} = f_i(x_k + h, y_{1k} + hm_{i3}, y_{2k} + hm_{23}, \dots, y_{nk} + hm_{n3}),$$

зная которые, находим  $y_{i, k+1}$  по формуле

$$y_{i, k+1} = y_{ik} + \frac{h}{6}(m_{i1} + 2m_{i2} + 2m_{i3} + m_{i4}) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Порядок погрешности такой же, как и для одного уравнения.

Грубо ориентировочно шаг  $h$  в зависимости от требуемой точности результата выбирается с учетом порядка погрешностей в применяемых формулах и уточняется путем пробных вычислений с шагом  $h$  и  $\frac{h}{2}$ . Надежнее всего проводить вычисления с шагом  $h$  и  $\frac{h}{2}$  всех требуемых значений  $y_i(x_k)$ , и если при сравнении результатов все они в пределах заданной точности совпадают, то шаг  $h$  считают обеспечивающим заданную точность вычислений, в противном случае снова уменьшают шаг и проводят вычисления с шагом  $\frac{h}{2}$  и  $\frac{h}{4}$  и т. д. При правильном выборе шага  $h$  разности  $\Delta q_{ik}$ ,  $\Delta^2 q_{ik}$ , ... должны меняться плавно, а последние разности в формулах Штермера должны влиять лишь на запасные знаки.

### Задачи к главе 3

- $\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$
- $\frac{d^2 x_1}{dt^2} = x_2, \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} = x_1, \quad x_1(0) = 2, \quad \dot{x}_1(0) = 2,$   
 $x_2(0) = 2, \quad \dot{x}_2(0) = 2.$

3.  $\frac{dx}{dt} + 5x + y = e^t$ ,  $\frac{dy}{dt} - x - 3y = e^{2t}$ .
4.  $\frac{dx}{dt} = y$ ,  $\frac{dy}{dt} = z$ ,  $\frac{dz}{dt} = x$ .
5.  $\frac{dx}{dt} = y$ ,  $\frac{dy}{dt} = \frac{y^2}{x}$ .
6.  $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = -x + y + 3$ ,  $\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = x + y - 3$ .
7.  $\frac{dy}{dx} = \frac{z}{x}$ ,  $\frac{dz}{dx} = -xy$ .
8.  $\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}$ .
9.  $\frac{dx}{dt} = -x + y + z$ ,  $\frac{dy}{dt} = x - y + z$ ,  $\frac{dz}{dt} = x + y - z$ .
10.  $t \frac{dx}{dt} + y = 0$ ,  $t \frac{dy}{dt} + x = 0$ .
11.  $\frac{dx}{dt} = y + 1$ ,  $\frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{\sin t}$ .
12.  $\frac{dx}{dt} = \frac{y}{x-y}$ ,  $\frac{dy}{dt} = \frac{x}{x-y}$ .
13.  $\dot{x} + y = \cos t$ ,  $\dot{y} + x = \sin t$ .
14.  $\dot{x} + 3x - y = 0$ ,  $\dot{y} - 8x + y = 0$ ,  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 4$ .
15.  $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \sin \theta = 0$  при  $t = 0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{36}$ ,  $\frac{d\theta}{dt} = 0$   
 Определить  $\theta(1)$  с точностью до 0,001.
16.  $\dot{x}(t) = ax - y$ ,  $\dot{y}(t) = x + ay$ ;  $a$  — постоянная.
17.  $\dot{x} + 3x + 4y = 0$ ,  $\dot{y} + 2x + 5y = 0$ .
18.  $\dot{x} = -5x - 2y$ ,  $\dot{y} = x - 7y$ .
19.  $\dot{x} = y - z$ ,  $\dot{y} = x + y$ ,  $\dot{z} = x + z$ .
20.  $\dot{x} - y + z = 0$ ,  $\dot{y} - x - y = t$ ,  $\dot{z} - x - z = t$ .
21.  $\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}$ .
22.  $\frac{dx}{x(y^2-z^2)} = \frac{dy}{y(z^2-x^2)} = \frac{dz}{z(x^2-y^2)}$ .
23.  $\dot{X} = AX$ , где  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , а  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ .

## ГЛАВА 4 ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

### § 1. Основные понятия

Для возможности математического описания какого-нибудь реального явления неизбежно приходится упрощать, идеализировать это явление, выделяя и учитывая лишь наиболее существенные из влияющих на него факторов и отбрасывая остальные, менее существенные. При этом неизбежно встает вопрос о том, удачно ли выбраны упрощающие предположения. Возможно, что неучтенные факторы сильно влияют на изучаемое явление, значительно меняя его количественные или даже качественные характеристики. В конечном счете этот вопрос решается практикой — соответствием полученных выводов с опытными данными, но все же во многих случаях можно указать условия, при которых некоторые упрощения заведомо невозможны.

Если некоторое явление описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.1)$$

с начальными условиями  $y_i(t_0) = y_{i0}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), которые обычно являются результатами измерений и, следовательно, неизбежно получены с некоторой погрешностью, то естественно возникает вопрос о влиянии малого изменения начальных значений на искомое решение.

Если окажется, что сколь угодно малые изменения начальных данных способны сильно изменить решение, то решение, определяемое выбранными нами неточными начальными данными, обычно не имеет никакого прикладного значения и даже приближенно не может описывать, изучаемое явление.

Следовательно, возникает важный для приложений вопрос о нахождении условий, при которых достаточно малое изменение начальных значений вызывает сколь угодно малое изменение решения.

Если  $t$  изменяется на конечном отрезке  $t_0 \leq t \leq T$ , то ответ на этот вопрос дает теорема о непрерывной зависимости решений от начальных значений (см. стр. 54). Если же  $t$  может принимать сколь угодно большие значения, то этим вопросом занимается теория устойчивости.

Решение  $\varphi_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системы (4.1) называется устойчивым, или, точнее, *устойчивым по Ляпунову*, если для любого  $\varepsilon > 0$  можно подобрать  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что для всякого решения  $y_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) той же системы, начальные значения которого удовлетворяют неравенствам

$$|y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta(\varepsilon) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

для всех  $t \geq t_0$  справедливы неравенства

$$|y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.2)$$

т. е. близкие по начальным значениям решения остаются близкими для всех  $t \geq t_0$ .

**Замечание.** Если система (4.1) удовлетворяет условиям теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных значений, то в определении устойчивости вместо  $t \geq t_0$  можно писать  $t \geq T \geq t_0$ , так как в силу этой теоремы на отрезке  $t_0 \leq t \leq T$  решения остаются близкими при достаточно близких начальных значениях.

Если при сколь угодно малом  $\delta > 0$  хотя бы для одного решения  $y_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) неравенства (4.2) не выполняются, то решение  $\varphi_i(t)$  называется *неустойчивым*. Неустойчивые решения лишь в редких случаях представляют интерес в практических задачах.

Если решение  $\varphi_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) не только устойчиво, но, кроме того, удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i(t) - \varphi_i(t)| = 0, \quad (4.3)$$

если  $|y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta_1$ ,  $\delta_1 > 0$ , то решение  $\varphi_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) называется *асимптотически устойчивым*.

Заметим, что из одного условия (4.3) еще не следует устойчивость решения  $\varphi_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

**Пример 1.** Исследовать на устойчивость решение дифференциального уравнения  $\frac{dy}{dt} = -a^2y$ ,  $a \neq 0$ , определяемое начальным условием  $y(t_0) = y_0$ .  
Решение

$$y = y_0 e^{-a^2(t-t_0)}$$

асимптотически устойчиво, так как

$$|y_0 e^{-a^2(t-t_0)} - \bar{y}_0 e^{-a^2(t-t_0)}| = e^{-a^2(t-t_0)} |y_0 - \bar{y}_0| < \varepsilon$$

при  $t \geq t_0$ , если  $|y_0 - \bar{y}_0| < \varepsilon e^{-a^2 t}$ , и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-a^2(t-t_0)} |y_0 - \bar{y}_0| = 0.$$

**Пример 2.** Исследовать на устойчивость решение уравнения  $\frac{dy}{dt} = a^2 y$ ,  $a \neq 0$ , определяемое условием  $y(t_0) = y_0$ .

Решение  $y = y_0 e^{a^2(t-t_0)}$  неустойчиво, так как нельзя подобрать столь малое  $\delta > 0$ , чтобы из неравенства  $|\bar{y}_0 - y_0| < \delta(\varepsilon)$  следовало бы

$$|\bar{y}_0 e^{a^2(t-t_0)} - y_0 e^{a^2(t-t_0)}| < \varepsilon$$

или

$$e^{a^2(t-t_0)} |\bar{y}_0 - y_0| < \varepsilon$$

при всех  $t \geq t_0$ .

Исследование на устойчивость некоторого решения

$$y_i = \bar{y}_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

системы уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.1)$$

может быть сведено к исследованию на устойчивость тривиального решения — *точки покоя*, расположенной в начале координат.

Действительно, преобразуем систему уравнений (4.1) к новым переменным, полагая

$$x_i = y_i - \bar{y}_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.4)$$

Новыми неизвестными функциями  $x_i$  являются отклонения  $y_i - \bar{y}_i(t)$  прежних неизвестных функций от функций  $\bar{y}_i(t)$ , определяющих исследуемое на устойчивость решение.

В силу (4.4) в новых переменных система (4.1) принимает вид

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{d\bar{y}_i}{dt} + \Phi_i(t, x_1 + \bar{y}_1(t), x_2 + \bar{y}_2(t), \dots, x_n + \bar{y}_n(t)) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.5)$$

Очевидно, что исследуемому на устойчивость решению  $y_i = \bar{y}_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системы (4.1), в силу зависимости  $x_i = y_i - \bar{y}_i(t)$ , соответствует тривиальное решение  $x_i \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системы (4.5), причем исследование на устойчивость решения  $y_i = \bar{y}_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системы (4.1) может быть заменено исследованием на устойчивость тривиального решения системы (4.5). Поэтому в дальнейшем без ограничения общности можно считать, что на устойчивость исследуется тривиальное решение или, что одно и то же, расположенная в начале координат точка покоя системы уравнений

Сформулируем условия устойчивости в применении к точке покоя  $x_i \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Точка покоя  $x_i \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системы (4.5) устойчива в смысле Ляпунова, если для каждого  $\varepsilon > 0$  можно подобрать  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что из неравенства

$$|x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

следует

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{при } t \geq T \geq t_0.$$

Или несколько иначе: точка покоя  $x_i \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) устойчива в смысле Ляпунова, если для каждого  $\varepsilon > 0$  можно подобрать  $\delta_1(\varepsilon) > 0$  такое, что из неравенства

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(t_0) < \delta_1^2(\varepsilon)$$

следует

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(t) < \varepsilon^2$$

при  $t \geq T$ , т. е. траектория, начальная точка которой находится в  $\delta_1$ -окрестности начала координат при  $t \geq T$  не выходит за пределы  $\varepsilon$ -окрестности начала координат.

## § 2. Простейшие типы точек покоя

Исследуем расположение траекторий в окрестности точки покоя  $x = 0, y = 0$  системы двух линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

где

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ищем решение в виде  $x = \alpha_1 e^{kt}$ ,  $y = \alpha_2 e^{kt}$  (см. стр. 193). Для определения  $k$  получаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0$$

или

$$k^2 - (a_{11} + a_{22})k + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0,$$

$\alpha_1$  и  $\alpha_2$  с точностью до постоянного множителя определяются из одного из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 &= 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Рассмотрим следующие случаи:

а) *Корни характеристического уравнения  $k_1$  и  $k_2$  действительны и различны.*

Общее решение имеет вид

$$\left. \begin{aligned} x &= c_1\alpha_1 e^{k_1 t} + c_2\beta_1 e^{k_2 t}, \\ y &= c_1\alpha_2 e^{k_1 t} + c_2\beta_2 e^{k_2 t}, \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

где  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  — постоянные, определяемые из уравнений (4.7) соответственно при  $k = k_1$  и при  $k = k_2$ , а  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные постоянные.

При этом возможны следующие случаи:

1) Если  $k_1 < 0$  и  $k_2 < 0$ , то точка покоя  $x = 0$ ,  $y = 0$  асимптотически устойчива, так как из-за наличия множителей  $e^{k_1 t}$  и  $e^{k_2 t}$

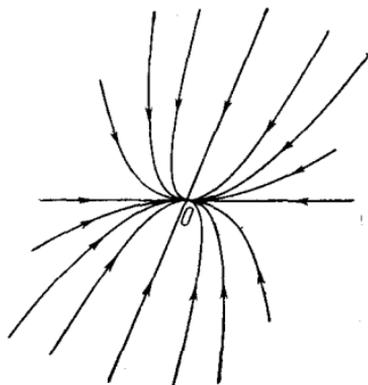


Рис. 4.1.

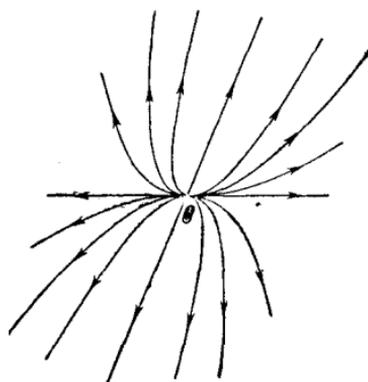


Рис. 4.2.

в (4.8) все точки, находящиеся в начальный момент  $t = t_0$  в любой  $\delta$ -окрестности начала координат, при достаточно большом  $t$  переходят в точки, лежащие в сколь угодно малой  $\varepsilon$ -окрестности начала координат, а при  $t \rightarrow \infty$  стремятся к началу координат. На рис. 4.1 изображено расположение траекторий около точки покоя рассматриваемого типа, называемой *устойчивым узлом*, причем стрелками указано направление движения по траекториям при возрастании  $t$ .

2) Пусть  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ . Этот случай переходит в предыдущий при замене  $t$  на  $-t$ . Следовательно, траектории имеют такой же вид, как и в предыдущем случае, но только точка по траекториям движется в противоположном направлении (рис. 4.2). Очевидно,

что с возрастанием  $t$  точки, сколь угодно близкие к началу координат, удаляются из  $\varepsilon$ -окрестности начала координат — точка покоя неустойчива в смысле Ляпунова. Точка покоя рассматриваемого типа называется *неустойчивым узлом*.

3) Если  $k_1 > 0$ ,  $k_2 < 0$ , то точка покоя тоже неустойчива, так как движущаяся по траектории

$$x = c_1 a_1 e^{k_1 t}, \quad y = c_1 a_2 e^{k_1 t} \quad (4.9)$$

точка при сколь угодно малых значениях  $c_1$  с возрастанием  $t$  выходит из  $\varepsilon$ -окрестности начала координат.

Заметим, что в рассматриваемом случае существуют движения, приближающиеся к началу координат, а именно:

$$x = c_2 \beta_1 e^{k_2 t}, \quad y = c_2 \beta_2 e^{k_2 t}.$$

При различных значениях  $c_2$  получаем различные движения по одной и той же прямой  $y = \frac{\beta_2}{\beta_1} x$ . При возрастании  $t$  точки на этой прямой движутся по направлению к началу координат (рис. 4.3). Заметим

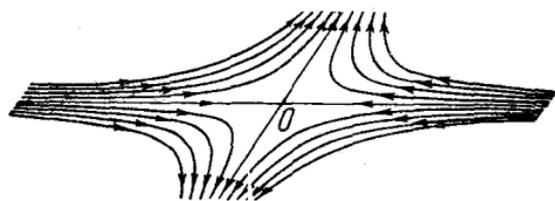


Рис. 4.3.

также, что точки траектории (4.9) движутся с возрастанием  $t$  по прямой  $y = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} x$ , удаляясь от начала координат. Если же  $c_1 \neq 0$  и  $c_2 \neq 0$ , то как при  $t \rightarrow \infty$ , так и при  $t \rightarrow -\infty$  траектория покидает окрестность точки покоя.

Точка покоя рассматриваемого типа называется *седлом* (рис. 4.3) потому, что расположение траекторий в окрестности такой точки напоминает расположение линий уровня в окрестности седлообразной точки некоторой поверхности

$$z = f(x, y).$$

б) *Корни характеристического уравнения комплексны:*

$$k_{1,2} = p \pm qi, \quad q \neq 0.$$

Общее решение рассматриваемой системы можно представить в виде (см. стр. 196)

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{pt} (c_1 \cos qt + c_2 \sin qt), \\ y &= e^{pt} (c_1^* \cos qt + c_2^* \sin qt), \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные постоянные, а  $c_1^*$  и  $c_2^*$  — некоторые линейные комбинации этих постоянных.

При этом возможны следующие случаи:

$$1) k_{1,2} = p \pm qi, \quad p < 0, \quad q \neq 0.$$

Множитель  $e^{pt}$ ,  $p < 0$ , стремится к нулю с возрастанием  $t$ , а второй — периодический множитель в уравнениях (4.10) остается ограниченным.

Если бы  $p = 0$ , то траекториями были бы, в силу периодичности вторых множителей в правой части уравнений (4.10), замкнутые

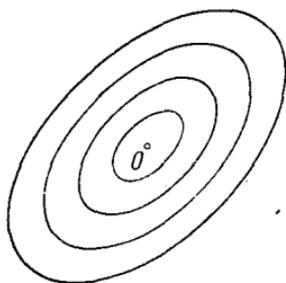


Рис. 4.4.

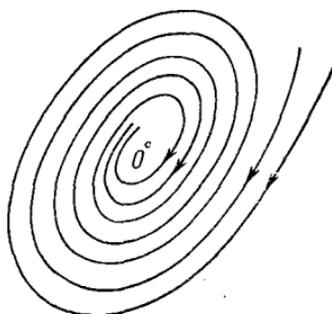


Рис. 4.5.

кривые, окружающие точку покоя  $x = 0$ ,  $y = 0$  (рис. 4.4). Наличие стремящегося к нулю с возрастанием  $t$  множителя  $e^{pt}$ ,  $p < 0$ , превращает замкнутые кривые в спирали, асимптотически приближающиеся при  $t \rightarrow \infty$  к началу координат (рис. 4.5), причем при достаточно большом  $t$  точки, находившиеся при  $t = t_0$  в любой  $\delta$ -окрестности начала координат, попадают в заданную  $\varepsilon$ -окрестность точки покоя  $x = 0$ ,  $y = 0$ , а при дальнейшем возрастании  $t$  стремятся к точке покоя. Следовательно, точка покоя асимптотически устойчива — она называется *устойчивым фокусом*. Фокус отличается от узла тем, что касательная к траекториям не стремится к определенному пределу при приближении точки касания к точке покоя.

$$2) k_{1,2} = p \pm qi, \quad p > 0, \quad q \neq 0.$$

Этот случай переходит в предыдущий при замене  $t$  на  $-t$ . Следовательно, траектории не отличаются от траекторий предыдущего случая, но движение по ним происходит при возрастании  $t$  в противоположном направлении (рис. 4.6). Из-за наличия возрастающего множителя  $e^{pt}$  точки, находившиеся в начальный момент сколь угодно близко к началу координат, с возрастанием  $t$  удаляются из  $\varepsilon$ -окрестности начала координат — точка покоя неустойчива. Она носит название *неустойчивого фокуса*.

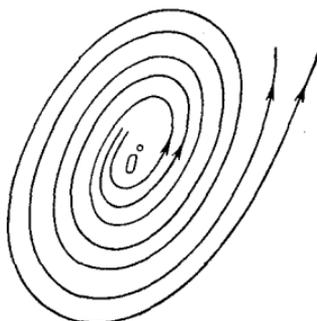


Рис. 4.6.

3)  $k_{1,2} = \pm qi, q \neq 0$ .

Как уже отмечалось выше, в силу периодичности решений, траекториями являются замкнутые кривые, содержащие внутри себя точку покоя (рис. 4.4), называемую в этом случае *центром*. Центр является устойчивой точкой покоя, так как для заданного  $\varepsilon > 0$  можно подобрать  $\delta > 0$  такое, что замкнутые траектории, начальные точки которых лежат в  $\delta$ -окрестности начала координат, не выходят за

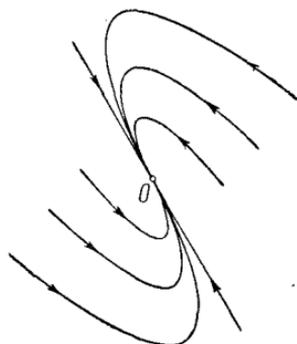


Рис. 4.7

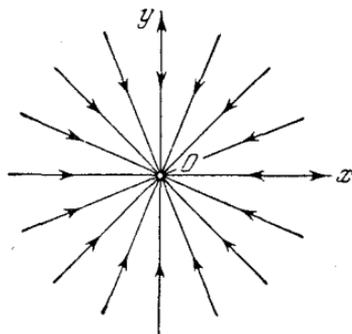


Рис. 4.8.

пределы  $\varepsilon$ -окрестности начала координат или, что то же самое, можно подобрать столь малые  $c_1$  и  $c_2$ , что решения

$$\left. \begin{aligned} x &= c_1 \cos qt + c_2 \sin qt, \\ y &= c_1^* \cos qt + c_2^* \sin qt \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

будут удовлетворять неравенству

$$x^2(t) + y^2(t) < \varepsilon^2.$$

Заметим, однако, что асимптотической устойчивости в рассматриваемом случае нет, так как  $x(t)$  и  $y(t)$  в (4.11) не стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

в) *Корни кратны*  $k_1 = k_2$ .

1)  $k_1 = k_2 < 0$ .

Общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= (c_1 \alpha_1 + c_2 \beta_1 t) e^{k_1 t}, \\ y(t) &= (c_1 \alpha_2 + c_2 \beta_2 t) e^{k_1 t}, \end{aligned}$$

причем не исключена возможность того, что  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ , но тогда  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  будут произвольными постоянными.

Из-за наличия быстро стремящегося к нулю множителя  $e^{k_1 t}$  при  $t \rightarrow \infty$  произведение  $(c_1 \alpha_i + c_2 \beta_i t) e^{k_1 t}$  ( $i = 1, 2$ ) стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , причем при достаточно большом  $t$  все точки любой  $\delta$ -окрестности начала координат попадают в заданную  $\varepsilon$ -окрестность

начала координат и, следовательно, точка покоя асимптотически устойчива. На рис. 4.7 изображена точка покоя рассматриваемого вида, так же как и в случае а) 1), называемая *устойчивым узлом*. Этот узел занимает промежуточное положение между узлом а) 1) и фокусом б) 1), так как при сколь угодно малом изменении действительных коэффициентов  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  он может превратиться как в устойчивый фокус, так и в устойчивый узел типа а) 1), потому что при сколь угодно малом изменении коэффициентов кратный корень может перейти как в пару комплексных сопряженных корней, так и в пару действительных различных корней. Если  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ , то тоже получаем устойчивый узел (так называемый *дискритический узел*), изображенный на рис. 4.8.

2) Если  $k_1 = k_2 > 0$ , то замена  $t$  на  $-t$  приводит к предыдущему случаю. Следовательно, траектории не отличаются от траекторий предыдущего случая, изображенных на рис. 4.7 и 4.8, но движение по ним происходит в противоположном направлении. В этом случае точка покоя называется, так же как и в случае а) 2), *неустойчивым узлом*.

Тем самым исчерпаны все возможности, так как случай  $k_1 = 0$  (или  $k_2 = 0$ ) исключен условием

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Замечание 1. Если

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

то характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0$$

имеет нулевой корень  $k_1 = 0$ . Предположим, что  $k_1 = 0$ , но  $k_2 \neq 0$ . Тогда общее решение системы (4.6) имеет вид

$$\begin{aligned} x &= c_1 \alpha_1 + c_2 \beta_1 e^{k_2 t}, \\ y &= c_1 \alpha_2 + c_2 \beta_2 e^{k_2 t}. \end{aligned}$$

Исключая  $t$ , получим семейство параллельных прямых  $\beta_1 (y - c_1 \alpha_2) = \beta_2 (x - c_1 \alpha_1)$ . При  $c_2 = 0$  получаем однопараметрическое семейство точек покоя, расположенных на прямой  $\alpha_1 y = \alpha_2 x$ . Если  $k_2 < 0$ , то при  $t \rightarrow \infty$  на каждой траектории точки приближаются к лежащей на этой траектории точке покоя  $x = c_1 \alpha_1$ ,  $y = c_1 \alpha_2$  (рис. 4.9). Точка покоя  $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$  устойчива, но асимптотической устойчивости нет.

Если же  $k_2 > 0$ , то траектории расположены так же, но движение точек на траекториях происходит в противоположном направлении — точка покоя  $x \equiv 0, y \equiv 0$  неустойчива.

Если же  $k_1 = k_2 = 0$ , то возможны два случая:

1. Общее решение системы (4.6) имеет вид  $x = c_1, y = c_2$  — все точки являются точками покоя, все решения устойчивы.

2. Общее решение имеет вид

$$x = c_1 + c_2 t, \quad y = c_1^* + c_2^* t,$$

где  $c_1^*$  и  $c_2^*$  — линейные комбинации произвольных постоянных  $c_1$  и  $c_2$ . Точка покоя  $x \equiv 0, y \equiv 0$  неустойчива.

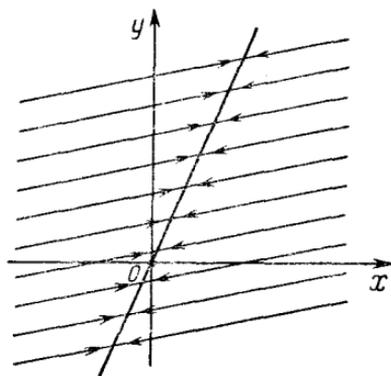


Рис. 4.9.

Замечание 2. Классификация точек покоя тесно связана с классификацией особых точек (см. стр. 57—59).

Действительно, в рассматриваемом случае система

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y, \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

где

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

путем исключения  $t$  могла бы быть сведена к уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}, \quad (4.12)$$

интегральные кривые которого совпадают с траекториями движения системы (4.6). При этом точка покоя  $x = 0, y = 0$  системы (4.6) является особой точкой уравнения (4.12).

Заметим, что если оба корня характеристического уравнения имеют отрицательную действительную часть [случай а) 1); б) 1); в) 1)], то точка покоя асимптотически устойчива. Если же хотя бы один корень характеристического уравнения имеет положительную действительную часть [случай а) 2); а) 3); б) 2); в) 2)], то точка покоя неустойчива.

Аналогичные утверждения справедливы и для системы  $n$  линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.13)$$

Если действительные части всех корней характеристического уравнения системы (4.13) отрицательны, то тривиальное решение  $x_i \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) асимптотически устойчиво.

Действительно, частные решения, соответствующие некоторому корню  $k_s$  характеристического уравнения, имеют вид (стр. 193 и 196)

$$x_i = \alpha_i e^{k_s t} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

если  $k_s$  действительны,

$$x_j = e^{p_s t} (\beta_j \cos q_s t + \gamma_j \sin q_s t),$$

если  $k_s = p_s + q_s i$ , и, наконец, в случае кратных корней решения такого же вида, но еще умноженные на некоторые многочлены  $P_j(t)$ . Очевидно, что все решения такого вида, если действительные части корней отрицательны ( $p_s < 0$ , или если  $k_s$  действительно, то  $k_s < 0$ ), стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$  не медленнее, чем  $ce^{-mt}$ , где  $c$  — постоянный множитель, а  $-m < 0$  и больше наибольшей действительной части корней характеристического уравнения. Следовательно, при достаточно большом  $t$  точки траекторий, начальные значения которых находятся в любой  $\delta$ -окрестности начала координат, попадают в сколь угодно малую  $\varepsilon$ -окрестность начала координат и при  $t \rightarrow \infty$  неограниченно приближаются к началу координат — точка покоя  $x_i \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) асимптотически устойчива.

Если же действительная часть хотя бы одного корня характеристического уравнения положительна,  $\operatorname{Re} k_i = p_i > 0$ , то соответствующее этому корню решение вида  $x_j = \alpha_j e^{k_i t}$ , или в случае комплексного  $k_i$  его действительная (или мнимая) часть  $ce^{p_i t} (\beta_j \cos q_i t + \gamma_j \sin q_i t)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) при сколь угодно малых по модулю значениях  $c$  неограниченно возрастает по модулю при возрастании  $t$ , и, следовательно, точки, расположенные в начальный момент на этих траекториях в сколь угодно малой  $\delta$ -окрестности начала координат, покидают при возрастании  $t$  любую заданную  $\varepsilon$ -окрестность начала координат. Следовательно, если действительная часть хотя бы одного корня характеристического уравнения положительна, то точка покоя  $x_j \equiv 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) системы (4.13) неустойчива.

Пример 1. Какого типа точку покоя имеет система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x - y$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x + 3y?$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - k & -1 \\ 2 & 3 - k \end{vmatrix} = 0$$

или

$$k^2 - 4k + 5 = 0$$

имеет корни  $k_{1,2} = 2 \pm i$ , следовательно, точка покоя  $x = 0$   $y = 0$  является неустойчивым фокусом.

Пример 2.  $\ddot{x} = -a^2x - 2b\dot{x}$  — уравнение упругих колебаний с учетом трения или сопротивления среды (при  $b > 0$ ). Переходя к эквивалентной системе уравнений, получим

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -a^2x - 2by.\end{aligned}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -a^2 & -2b - k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad k^2 + 2bk + a^2 = 0.$$

откуда  $k_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}$ .

Рассмотрим следующие случаи:

1)  $b = 0$ , т. е. сопротивления среды не учитываются. Все движения периодические. Точка покоя в начале координат является центром.

2)  $b^2 - a^2 < 0$ ,  $b > 0$ . Точка покоя является устойчивым фокусом. Колебания затухают.

3)  $b^2 - a^2 \geq 0$ ,  $b > 0$ . Точка покоя является устойчивым узлом. Все решения затухающие, неколеблующиеся. Этот случай наступает, если сопротивление среды велико ( $b \geq a$ ).

4)  $b < 0$  (случай отрицательного трения),  $b^2 - a^2 < 0$ . Точка покоя является неустойчивым фокусом.

5)  $b < 0$ ,  $b^2 - a^2 \geq 0$  (случай большого отрицательного трения). Точка покоя является неустойчивым узлом.

Пример 3. Исследовать на устойчивость точку покоя системы уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2y - z, \\ \frac{dy}{dt} &= 3x - 2z, \\ \frac{dz}{dt} &= 5x - 4y.\end{aligned}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -k & 2 & -1 \\ 3 & -k & -2 \\ 5 & -4 & -k \end{vmatrix} = 0$$

или

$$k^3 - 9k + 8 = 0.$$

Определить корни кубического уравнения в общем случае довольно трудно, однако в данном случае один корень  $k_1 = 1$  легко подбирается, и так как этот корень имеет положительную действительную часть, то можно утверждать, что точка покоя  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  неустойчива.

### § 3. Второй метод А. М. Ляпунова

Выдающийся русский математик Александр Михайлович Ляпунов в конце XIX века разработал весьма общий метод исследования на устойчивость решений системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.14)$$

получивший название *второго метода Ляпунова*.

**Теорема 4.1 (теорема Ляпунова об устойчивости).** Если существует дифференцируемая функция  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , называемая функцией Ляпунова, удовлетворяющая в окрестности начала координат следующим условиям:

1)  $v(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ , причем  $v = 0$  лишь при  $x_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), т. е. функция  $v$  имеет строгий минимум в начале координат;

2)  $\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, \dots, x_n) \leq 0$  при  $t \geq t_0$ , то точка покоя  $x_i \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) устойчива.

Производная  $\frac{dv}{dt}$  в условии 2) взята вдоль интегральной кривой, т. е. она вычислена в предположении, что аргументы  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) функции  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$  заменены решением  $x_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системы дифференциальных уравнений (4.14).

Действительно, в этом предположении  $\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$  или заменяя  $\frac{dx_i}{dt}$  правыми частями системы (4.14), окончательно получим

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Доказательство теоремы Ляпунова об устойчивости. В окрестности начала координат, как и в окрестности всякой точки строгого минимума (рис. 4.10), поверхности уровня  $v(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$  функции  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$  являются замкнутыми поверхностями, внутри которых находится точка минимума — начало координат. Зададим  $\epsilon > 0$ . При достаточно малом  $c > 0$  поверхность уровня  $v = c$  целиком лежит в  $\epsilon$ -окрестности начала координат\*), но не проходит через начало координат, следовательно, можно выбрать  $\delta > 0$  такое, что  $\delta$ -окрестность начала

\*) Точнее, по крайней мере одна замкнутая компонента поверхности уровня  $v = c$  лежит в  $\epsilon$ -окрестности начала координат.

координат целиком лежит внутри поверхности  $v = c$ , причем в этой окрестности  $v < c$ . Если начальная точка с координатами  $x_i(t_0)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) выбрана в  $\delta$ -окрестности начала координат (рис. 4.11) и, следовательно,  $v(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)) = c_1 < c$ , то при  $t > t_0$  точка траектории, определяемой этими начальными условиями, не может выйти за пределы  $\varepsilon$ -окрестности начала координат и даже за пределы поверхности уровня  $v = c$ , так как, в силу

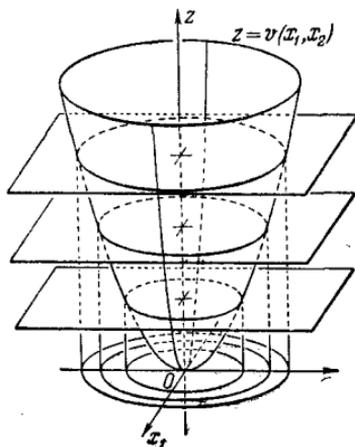


Рис. 4.10.

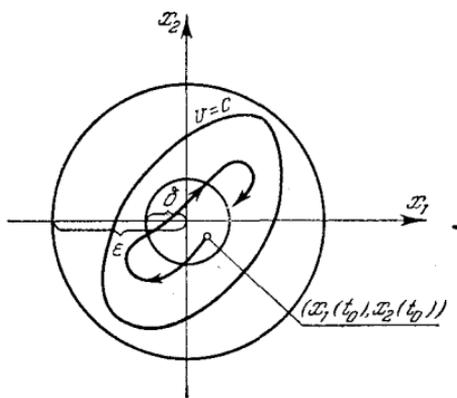


Рис. 4.11.

условия 2) теоремы, функция  $v$  вдоль траектории не возрастает и, следовательно, при  $t \geq t_0$

$$v(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \leq c_1 < c.$$

**Замечание.** А. М. Ляпунов доказал теорему об устойчивости в более общих предположениях, в частности, он считал, что функция  $v$  может зависеть и от  $t$ :  $v = v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ . При этом для справедливости теоремы об устойчивости первое условие надо заменить следующим

$$v(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \geq w(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$$

в окрестности начала координат при  $t \geq t_0$ , где непрерывная функция  $w$  имеет строгий минимум в начале координат,  $v(t, 0, 0, \dots, 0) = w(0, 0, \dots, 0) = 0$ , а второе условие остается прежним  $\frac{dv}{dt} \leq 0$ , но только в этом случае

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Схема доказательства остается прежней, надо только принять во внимание, что, в силу условия 1), подвижная при изменяющемся  $t$  поверхность уровня  $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = c$  остается при всех изменениях  $t \geq t_0$  внутри поверхности уровня  $w(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$  (рис. 4.12).

**Теорема 4.2 (теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости).** Если существует дифференцируемая функция Ляпунова  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , удовлетворяющая условиям:

1)  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$  имеет строгий минимум в начале координат:  $v(0, 0, \dots, 0) = 0$ ;

2) производная, функции  $v$ , вычисленная вдоль интегральных кривых системы (4.14)

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \end{aligned}$$

причем вне сколь угодно малой окрестности начала координат, т. е. при  $\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \delta_1^2 > 0, t \geq T_0 \geq t_0$ , производная  $\frac{dv}{dt} \leq -\beta < 0$ ,

где  $\beta$  — постоянная, то точка покоя  $x_i \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системы (4.14) асимптотически устойчива.

Доказательство. Так как условия теоремы об устойчивости выполнены, то для каждого  $\varepsilon > 0$  можно подобрать  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что траектория, начальная точка которой находится в  $\delta$ -окрестности начала координат, при  $t \geq t_0$  не выходит за пределы  $\varepsilon$ -окрестности начала координат. Следовательно, в частности, вдоль такой траектории при  $t > T_0$  выполнено условие 2), поэтому вдоль траектории функция  $v$  монотонно убывает с возрастанием  $t$ , и вдоль траектории существует предел функции  $v$  при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = \alpha \geq 0.$$

Надо доказать, что  $\alpha = 0$ , так как если  $\alpha = 0$ , то из условия 1) следует, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), т. е. точка покоя

$x_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) асимптотически устойчива. Допустим, что  $\alpha > 0$ ; тогда траектория при  $t > t_0$  находится в области  $v \geq \alpha$ , следовательно, вне некоторой  $\delta_1$ -окрестности начала координат, т. е.

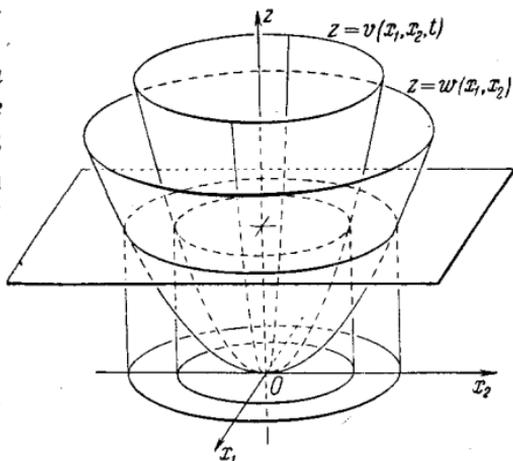


Рис. 4.12.

там, где по условию 2)  $\frac{dv}{dt} \leq -\beta < 0$  при  $t \geq T_0$ . Умножая неравенство  $\frac{dv}{dt} \leq -\beta$  на  $dt$  и интегрируя вдоль траектории в пределах от  $T_0$  до  $t$ , получим:

$$v(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) - v(x_1(T_0), x_2(T_0), \dots, x_n(T_0)) \leq \leq -\beta(t - T_0),$$

или

$$v(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \leq \leq v(x_1(T_0), x_2(T_0), \dots, x_n(T_0)) - \beta(t - T_0).$$

При достаточно большом  $t$  правая часть отрицательна, а следовательно, и  $v(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) < 0$ , что противоречит условию 1).

Замечание. Теорема об асимптотической устойчивости обобщается на случай функции  $v$ , зависящей от  $t, x_1, x_2, \dots, x_n$ , если первое условие, как и в предыдущей теореме, заменить следующим:

$$v(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \geq \omega(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0,$$

где функция  $\omega$  имеет строгий минимум в начале координат, и, кроме того, потребовать, чтобы функция  $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  равномерно относительно  $t$  стремилась к нулю

$$\text{при } \sum_{i=1}^n x_i^2 \rightarrow 0.$$

**Теорема 4.3 (теорема Четаева о неустойчивости).** Если

существует дифференцируемая функция  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , удовлетворяющая в некоторой замкнутой  $h$ -окрестности начала координат условиям: 1) в сколь угодно малой окрестности  $U$  начала координат существует область  $(v > 0)$ , в которой  $v > 0$ , причем  $v = 0$  на лежащей в  $U$  части границы области  $(v > 0)$ ; 2) в области  $(v > 0)$  производная

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) > 0,$$

причем в области  $(v \geq \alpha)$ ,  $\alpha > 0$ , производная  $\frac{dv}{dt} \geq \beta > 0$ , то точка покоя  $x_i \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системы (4.14) неустойчива.

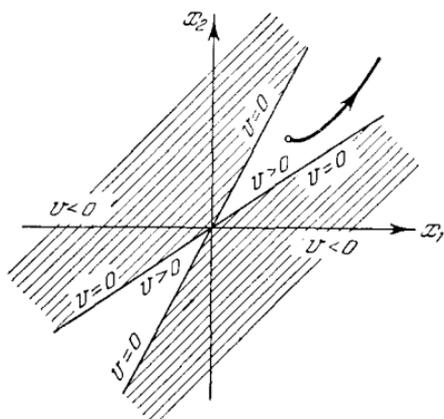


Рис. 4.13.

**Доказательство.** Начальную точку  $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$  возьмем в сколь угодно малой окрестности начала координат в области ( $v > 0$ ),  $v(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)) = \alpha > 0$  (рис. 4.13). Так как вдоль траектории  $\frac{dv}{dt} \geq 0$ , то функция  $v$  вдоль траектории не убывает, и следовательно, пока траектория не покинет рассматриваемую  $h$ -окрестность начала координат, где выполнены условия теоремы, траектория должна находиться в области ( $v \geq \alpha$ ). Допустим, что траектория не покидает  $h$ -окрестности начала координат. Тогда в силу условия 2) вдоль траектории при  $t \geq t_0$  производная  $\frac{dv}{dt} \geq \beta > 0$ . Умножая это неравенство на  $dt$  и интегрируя, получим:

$$v(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) - v(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)) \geq \beta(t - t_0),$$

откуда следует, что при  $t \rightarrow \infty$  функция  $v$  вдоль траектории неограниченно возрастает, что находится в противоречии с предположением о том, что траектория не выходит за пределы замкнутой  $h$ -окрестности начала координат, так как в этой  $h$ -окрестности непрерывная функция  $v$  ограничена.

**Замечание.** Н. Г. Четаев доказал теорему о неустойчивости в предположении, что  $v$  может зависеть также и от  $t$ , при этом условия теоремы несколько изменяются и, в частности, приходится требовать ограниченности функции  $v$  в области ( $v \geq 0$ ) в рассматриваемой  $h$ -окрестности начала координат.

**Пример 1.** Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:

$$\frac{dx}{dt} = -y - x^3, \quad \frac{dy}{dt} = x - y^3.$$

Функция  $v(x, y) = x^2 + y^2$  удовлетворяет условиям теоремы А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости:

1)  $v(x, y) \geq 0$ ,  $v(0, 0) = 0$ ;

2)  $\frac{dv}{dt} = 2x(-y - x^3) + 2y(x - y^3) = -2(x^4 + y^4) \leq 0$ . Вне окрестности

начала координат  $\frac{dv}{dt} \leq -\beta < 0$ . Следовательно, решение  $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$  асимптотически устойчиво.

**Пример 2.** Исследовать на устойчивость тривиальное решение  $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$  системы:

$$\frac{dx}{dt} = -xy^4; \quad \frac{dy}{dt} = yx^4.$$

Функция  $v(x, y) = x^4 + y^4$  удовлетворяет условиям теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости:

1)  $v(x, y) = x^4 + y^4 \geq 0$ ,  $v(0, 0) = 0$ ;

2)  $\frac{dv}{dt} = -4x^3y^4 + 4x^4y^3 \equiv 0$ .

Следовательно, тривиальное решение  $x \equiv 0, y \equiv 0$  устойчиво.

Пример 3. Исследовать на устойчивость точку покоя  $x \equiv 0, y \equiv 0$  системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y^3 + x^5,$$

$$\frac{dy}{dt} = x^3 + y^5.$$

Функция  $v = x^4 - y^4$  удовлетворяет условиям теоремы Н. Г. Четаева:

1)  $v > 0$ , при  $|x| > |y|$ ;

2)  $\frac{dv}{dt} = 4x^3(y^3 + x^5) - 4y^3(x^3 + y^5) = 4(x^8 - y^8) > 0$  при  $|x| > |y|$ ,

причем при  $v \geq \alpha > 0, \frac{dv}{dt} \geq \beta > 0$ . Следовательно, точка покоя  $x \equiv 0, y \equiv 0$  неустойчива.

Пример 4. Исследовать на устойчивость тривиальное решение  $x_i \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

если дано, что функция  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  имеет строгий максимум в начале координат.

В качестве функции Ляпунова возьмем разность

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n) = u(0, 0, \dots, 0) - u(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

которая, очевидно, обращается в нуль при  $x_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), имеет строгий минимум в начале координат и, следовательно, удовлетворяет условию 1) теоремы Ляпунова об устойчивости. Производная вдоль интегральных кривых

$$\frac{dv}{dt} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \leq 0.$$

Итак, условия теоремы Ляпунова об устойчивости выполнены, следовательно, тривиальное решение устойчиво.

Пример 5. Исследовать на устойчивость тривиальное решение  $x_i \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j, \text{ где } a_{ij}(t) = -a_{ji}(t) \text{ при } i \neq j \text{ и все } a_{ii}(t) \leq 0.$$

Тривиальное решение устойчиво, так как функция  $v = \sum_{i=1}^n x_i^2$  удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об устойчивости:

1)  $v \geq 0$  и  $v(0, 0, \dots, 0) = 0$ ;

$$2) \frac{dv}{dt} = 2 \sum_{i=1}^n x_i \frac{dx_i}{dt} = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_i x_j = 2 \sum_{i=1}^n a_{ii}(t) x_i^2 \leq 0.$$

#### § 4. Исследование на устойчивость по первому приближению

При исследовании на устойчивость точки покоя  $x_i \equiv 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (4.14)$$

где  $f_i$  — дифференцируемые в окрестности начала координат функции, часто применяется следующий метод: пользуясь дифференцируемостью функций  $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ , представляют систему (4.14) в окрестности начала координат  $x_i = 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j + R_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (4.15)$$

где  $R_i$  имеют порядок выше первого относительно  $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ , и вместо точки покоя  $x_i \equiv 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) системы (4.15) исследуют на устойчивость ту же точку покоя линейной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (4.16)$$

называемой *системой уравнений первого приближения* для системы (4.15). Условия применимости этого метода, которым долгое время пользовались без всякого обоснования, были детально исследованы А. М. Ляпуновым и в дальнейшем расширены трудами многих других математиков, среди которых следует в первую очередь отметить работы О. Перрона, И. Г. Малкина, К. П. Персидского, Н. Г. Четаева.

Исследование на устойчивость системы уравнений первого приближения, конечно, является задачей значительно более легкой, чем исследование исходной, вообще говоря, нелинейной системы, однако даже исследование линейной системы (4.16) при переменных коэффициентах  $a_{ij}(t)$  является задачей весьма сложной. Если же все  $a_{ij}$  постоянны, т. е. система стационарна в первом приближении, то исследование на устойчивость линейной системы (4.16) не представляет принципиальных затруднений (см. стр. 212—213).

**Теорема 4.4.** Если система уравнений (4.15) стационарна в первом приближении, все члены  $R_i$  в достаточно малой окрестности начала координат при  $t \geq T \geq t_0$  удовлетворяют неравенствам  $|R_i| \leq N \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2} + \alpha}$ , где  $N$  и  $\alpha$  — постоянные, причем  $\alpha > 0$  (т. е., если  $R_i$  не зависят от  $t$ , то их порядок

выше первого относительно  $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  и все корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \quad (4.17)$$

имеют отрицательные действительные части, то тривиальные решения  $x_i \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системы уравнений (4.15) и системы уравнений (4.16) асимптотически устойчивы, следовательно, в этом случае возможно исследование на устойчивость по первому приближению.

**Теорема 4.5.** Если система уравнений (4.15) стационарна в первом приближении, все функции  $R_i$  удовлетворяют условиям предыдущей теоремы, и хотя бы один корень характеристического уравнения (4.17) имеет положительную действительную часть, то точки покоя  $x_i \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системы (4.15) и системы (4.16) неустойчивы, следовательно, и в этом случае возможно исследование на устойчивость по первому приближению.

Теоремы 4.4 и 4.5 в отношении ограничений, налагаемых на корни характеристического уравнения, не охватывают лишь так называемый критический случай: все действительные части корней характеристического уравнения неположительны, причем действительная часть хотя бы одного корня равна нулю.

В критическом случае на устойчивость тривиального решения системы (4.15) начинают влиять нелинейные члены  $R_i$  и исследование на устойчивость по первому приближению, вообще говоря, невозможно.

Доказательство теорем 4.4 и 4.5 можно найти в книге И. Г. Малкина [2].

Для того чтобы дать представление о методах доказательства таких теорем, мы приведем доказательство теоремы 4.4 в предположении, что все корни характеристического уравнения  $k_i$  действительны и различны

$$k_i < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad k_i \neq k_j \quad \text{при } i \neq j.$$

В векторных обозначениях система (4.15) и система (4.16) примут соответственно вид

$$\frac{dX}{dt} = AX + R, \quad (4.15_1)$$

$$\frac{dX}{dt} = AX. \quad (4.16_1)$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}.$$

С помощью невырожденного линейного преобразования с постоянными коэффициентами  $X = BY$ , где

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

преобразуем систему (4.16<sub>1</sub>) к виду  $B \frac{dY}{dt} = ABY$  или  $\frac{dY}{dt} = B^{-1} ABY$ . Подберем матрицу  $B$  так, чтобы матрица  $B^{-1} AB$  была диагональной:

$$B^{-1} AB = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_n \end{pmatrix}.$$

При этом система (4.16) преобразуется в

$$\frac{dy_i}{dt} = k_i y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

а система (4.15) при том же преобразовании переходит в

$$\frac{dy_i}{dt} = k_i y_i + \bar{R}_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.18)$$

где  $|\bar{R}_i| \leq \bar{N} \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2} + \alpha}$ ,  $\bar{N}$  — постоянная величина,  $\alpha > 0$ ,  $t \geq T$ .

Для системы (4.18) функцией Ляпунова, удовлетворяющей условиям теоремы об асимптотической устойчивости, является

$$v = \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Действительно,

$$1) \quad v(y_1, y_2, \dots, y_n) \geq 0, \quad v(0, 0, \dots, 0) = 0;$$

$$2) \quad \frac{dv}{dt} = 2 \sum_{i=1}^n y_i \frac{dy_i}{dt} = 2 \sum_{i=1}^n k_i y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n k_i y_i R_i \leq \sum_{i=1}^n k_i y_i^2 \leq 0$$

при достаточно малых  $y_i$ , так как все  $k_i < 0$ , а удвоенная сумма  $2 \sum_{i=1}^n k_i y_i R_i$  при достаточно малых  $y_i$  может быть сделана по модулю меньше суммы  $\sum_{i=1}^n k_i y_i^2$ .

Наконец, вне окрестности начала координат

$$\frac{dv}{dt} \leq -\beta < 0.$$

**Пример 1.** Исследовать на устойчивость точку покоя  $x=0$ ,  $y=0$  системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y + x^2 + y^2 \sin t, \\ \frac{dy}{dt} &= x + y - y^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Нелинейные члены удовлетворяют условиям теорем 4.4 и 4.5. Исследуем на устойчивость точку покоя  $x=0$ ,  $y=0$  системы первого приближения

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y, \\ \frac{dy}{dt} &= x + y. \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Характеристическое уравнение  $\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 1 & 1-k \end{vmatrix} = 0$  имеет корни  $k_{1,2} = 1 \pm i$ , следовательно, в силу теоремы 4.5 точка покоя систем (4.19) и (4.20) неустойчива.

**Пример 2.** Исследовать на устойчивость точку покоя  $x=0$ ,  $y=0$  системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x + 8 \sin y, \\ \frac{dy}{dt} &= 2 - e^x - 3y - \cos y \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Разлагая  $\sin y$ ,  $e^x$  и  $\cos y$  по формуле Тейлора, представляем систему в виде

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 8y + R_1, \quad \frac{dy}{dt} = -x - 3y + R_2,$$

где  $R_1$  и  $R_2$  удовлетворяют условиям теорем 4.4 и 4.5.

Характеристическое уравнение  $\begin{vmatrix} 2-k & 8 \\ -1 & -3-k \end{vmatrix} = 0$  для системы первого приближения

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 8y, \quad \frac{dy}{dt} = -x - 3y \quad (4.22)$$

имеет корни с отрицательными действительными частями. Следовательно, точка покоя  $x=0$ ,  $y=0$  систем (4.21) и (4.22) асимптотически устойчива.

Пример 3. Исследовать на устойчивость точку покоя  $x = 0$ ,  $y = 0$  системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -4y - x^3, \\ \frac{dy}{dt} &= 3x - y^3. \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

Характеристическое уравнение  $\begin{vmatrix} -k & -4 \\ 3 & -k \end{vmatrix} = 0$  для системы первого приближения имеет чисто мнимые корни — критический случай. Исследование по первому приближению невозможно. В данном случае легко подбирается функция Ляпунова

$$v = 3x^2 + 4y^2.$$

$$1) \quad v(x, y) \geq 0, \quad v(0, 0) = 0;$$

$$2) \quad \frac{dv}{dt} = 6x(-4y - x^3) + 8y(3x - y^3) = -(6x^4 + 8y^4) \leq 0, \quad \text{причем вне}$$

некоторой окрестности начала координат  $\frac{dv}{dt} \leq -\beta < 0$ , следовательно, точка покоя  $x = 0$ ,  $y = 0$  по теореме предыдущего параграфа асимптотически устойчива.

Остановимся несколько подробнее на последнем примере. Система уравнений первого приближения

$$\frac{dx}{dt} = -4y, \quad \frac{dy}{dt} = 3x \quad (4.24)$$

имела в начале координат центр. Наличие нелинейных членов в системе (4.23) превратило этот центр в устойчивый фокус.

Аналогичная, но несколько более сложная геометрическая картина наблюдается и в общем случае. Пусть система первого приближения для системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + R_1(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + R_2(x_1, x_2) \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

имеет точку покоя типа центра в начале координат. Предположим, как и на стр. 221, что нелинейные члены  $R_1(x_1, x_2)$  и  $R_2(x_1, x_2)$  имеют порядок выше первого относительно  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . Эти нелинейные члены в достаточно малой окрестности начала координат малы по сравнению с линейными членами, но все же они несколько искажают поле направлений, определяемое линейной системой первого приближения, поэтому выходящая из некоторой точки  $(x_0, y_0)$  траектория после обхода начала координат немного смещается по сравнению с проходящей через ту же точку траекторией линейной системы

и, вообще говоря, не попадает в точку  $(x_0, y_0)$  — траектория не замыкается.

Если после такого обхода начала координат все траектории приближаются к началу координат, то в начале координат возникает устойчивый фокус; если же траектории удаляются от начала координат, возникает неустойчивый фокус.

В виде исключения возможен также случай, при котором все траектории нелинейной системы, расположенные в окрестности начала координат, остаются замкнутыми, однако наиболее типичным надо считать случай, при котором лишь некоторые (может быть, и ни

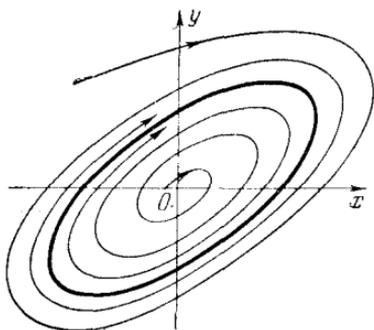


Рис. 4.14.

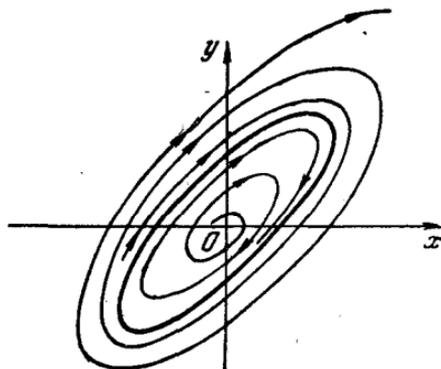


Рис. 4.15.

одной) замкнутые кривые остаются замкнутыми, а остальные превращаются в спирали.

Такие замкнутые траектории, в окрестности которых все траектории являются спиралями, называются *предельными циклами*.

Если близкие к предельному циклу траектории являются спиралями, приближающимися при  $t \rightarrow \infty$  к предельному циклу, то предельный цикл называется *устойчивым* (рис. 4.14); если близкие к предельному циклу траектории являются спиралями, удаляющимися от предельного цикла при  $t \rightarrow \infty$ , то предельный цикл называется *неустойчивым*; если же с одной стороны предельного цикла при  $t \rightarrow \infty$  спирали приближаются к предельному циклу, а с другой стороны удаляются от него (рис. 4.15), то предельный цикл называется *полуустойчивым*.

Итак, переход от системы первого приближения (4.16) к системе (4.25) приводит, вообще говоря, к превращению центра в фокус, окруженный  $p$  (случай  $p = 0$  не исключается) предельными циклами.

На стр. 154, исследуя периодические решения автономной квазилинейной системы

$$\ddot{x} + a^2x = \mu f(x, \dot{x}, \mu), \quad (4.26)$$

мы уже встречались с аналогичным явлением. Действительно, замечая (4.26) эквивалентной системой, получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -a^2x + \mu f(x, y, \mu). \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Соответствующая линейная система:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -a^2x$$

имеет в начале координат точку покоя типа центра; добавление малых при малом  $\mu$  нелинейных членов превращает центр, вообще говоря, в фокус, окруженный несколькими предельными циклами, радиусы которых и определялись из уравнения (2.128), стр. 156.

Различие между случаями (4.25) и (4.27) заключается лишь в том, что члены  $R_1$  и  $R_2$  малы лишь в достаточно малой окрестности начала координат, тогда как в случае (4.27) слагаемое  $\mu f(x, y, \mu)$  может быть сделано малым при достаточно малом  $\mu$  не только в достаточно малой окрестности начала координат.

В примере 2 (стр. 156) при малом  $\mu$  в окрестности окружности радиуса  $b$  с центром в начале координат, являющейся траекторией порождающего уравнения, возникает предельный цикл.

В приложениях устойчивым предельным циклам обычно соответствуют автоколебательные процессы, т. е. периодические процессы, в которых малые возмущения практически не изменяют амплитуды и частоты колебаний.

## § 5. Признаки отрицательности действительных частей всех корней многочлена

В предыдущем параграфе вопрос об устойчивости тривиального решения широкого класса систем дифференциальных уравнений был сведен к исследованию знаков действительных частей корней характеристического уравнения.

Если характеристическое уравнение имеет высокую степень, то его решение представляет значительные трудности, поэтому большое значение имеют методы, позволяющие, не решая уравнения, установить, будут ли все его корни иметь отрицательную вещественную часть или нет.

**Теорема 4.6 (теорема Гурвица \*)).** *Необходимым и достаточным условием отрицательности действительных частей всех корней многочлена*

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

\*) Доказательство теоремы Гурвица можно найти в курсах высшей алгебры, например в «Курсе высшей алгебры» А. Г. Куроша.

с действительными коэффициентами является положительность всех главных диагональных миноров матрицы Гурвица

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

По главной диагонали матрицы Гурвица стоят коэффициенты рассматриваемого многочлена в порядке их нумерации, начиная с  $a_1$  до  $a_n$ . Столбцы состоят поочередно из коэффициентов только с нечетными или только с четными индексами, включая и коэффициент  $a_0 = 1$ , следовательно, элемент матрицы  $b_{ik} = a_{2i-k}$ . Все недостающие коэффициенты, т. е. коэффициенты с индексами, большими  $n$  или меньшими 0, заменяются нулями.

Обозначим главные диагональные миноры матрицы Гурвица:

$$\Delta_1 = |a_1|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \dots$$

$$\dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Заметим, что так как  $\Delta_n = \Delta_{n-1} a_n$ , то последнее из условий Гурвица  $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$  может быть заменено требованием  $a_n > 0^*$ .

Применим теорему Гурвица к многочленам второй, третьей и четвертой степени.

а)  $z^2 + a_1 z + a_2$ .

Условия Гурвица сводятся к  $a_1 > 0, a_2 > 0$ . Эти неравенства в пространстве коэффициентов  $a_1$  и  $a_2$  определяют первую четверть (рис. 4.16). На рис. 4.16 изображена область асимптотической устойчивости тривиального решения некоторой системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющей условиям теоремы 4.1, если  $z^2 + a_1 z + a_2$  является ее характеристическим многочленом.

\* Заметим, что из условий Гурвица следует, что все  $a_i > 0$ , однако положительность всех коэффициентов недостаточна для того, чтобы действительные части всех корней были бы отрицательными.

$$\text{б) } z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3.$$

Условия Гурвица сводятся к  $a_1 > 0$ ,  $a_1 a_2 - a_3 > 0$ ,  $a_3 > 0$ . Область, определяемая этим неравенством в пространстве коэффициентов, изображена на рис. 4.17.

$$\text{в) } z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4.$$

Условия Гурвица сводятся к

$$a_1 > 0, \quad a_1 a_2 - a_3 > 0, \quad (a_1 a_2 - a_3) a_3 - a_1^2 a_4 > 0, \quad a_4 > 0.$$

Для рассмотренных многочленов условия Гурвица очень удобны и легко проверяемы, однако с возрастанием степени многочлена условия Гурвица быстро усложняются и часто вместо них удобнее при-

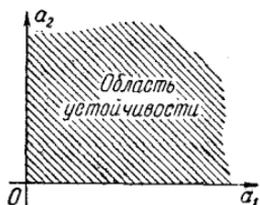


Рис. 4.16.

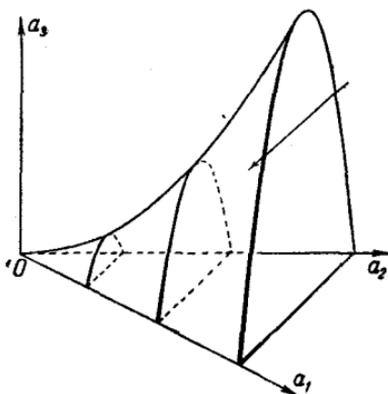


Рис. 4.17.

менять другие признаки отрицательности действительных частей корней многочлена.

**Пример.** При каких значениях параметра  $\alpha$  тривиальное решение  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$  системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = x_3, \quad \frac{dx_2}{dt} = -3x_1, \quad \frac{dx_3}{dt} = \alpha x_1 + 2x_2 - x_3$$

асимптотически устойчиво?

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -k & 0 & 1 \\ -3 & -k & 0 \\ \alpha & 2 & -1-k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad k^3 + k^2 - \alpha k + 6 = 0.$$

По признаку Гурвица условиями асимптотической устойчивости будут  $a_1 > 0$ ,  $a_1 a_2 - a_3 > 0$ ,  $a_3 > 0$ . Эти условия в данном случае сводятся к  $-\alpha - 6 > 0$ , откуда  $\alpha < -6$ .

### § 6. Случай малого коэффициента при производной высшего порядка

Теорема о непрерывной зависимости решения от параметра (см. стр. 54) утверждает, что решение дифференциального уравнения  $\dot{x}(t) = f(t, x(t), \mu)$  непрерывно зависит от параметра  $\mu$ , если в рассматриваемой замкнутой области изменения  $t$ ,  $x$  и  $\mu$  функция  $f$  непрерывна по совокупности аргументов и удовлетворяет условию Липшица по  $x$ :

$$|f(t, \bar{x}, \mu) - f(t, x, \mu)| \leq N|\bar{x} - x|,$$

где  $N$  не зависит от  $t$ ,  $x$  и  $\mu$ .

В задачах физики и механики условия этой теоремы обычно выполнены, однако один случай разрывной зависимости правой части от параметра, изучению которого и посвящается этот параграф, встречается в приложениях сравнительно часто.

Рассмотрим уравнение

$$\mu \frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (4.28)$$

где  $\mu$  — малый параметр. Задача заключается в том, чтобы выяснить, можно ли при малых значениях  $|\mu|$  пренебречь членом  $\mu \frac{dx}{dt}$ , т. е. приближенно заменить решение уравнения  $\mu \frac{dx}{dt} = f(t, x)$  решением так называемого вырожденного уравнения

$$f(t, x) = 0. \quad (4.29)$$

Мы не можем здесь воспользоваться теоремой о непрерывной зависимости решения от параметра, так как правая часть уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\mu} f(t, x) \quad (4.28_1)$$

разрывна при  $\mu = 0$ .

Предположим пока для упрощения, что вырожденное уравнение (4.29) имеет лишь одно решение  $x = \varphi(t)$ , предположим также для определенности, что  $\mu > 0$ . При стремлении параметра  $\mu$  к нулю производная  $\frac{dx}{dt}$  решений уравнения  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\mu} f(t, x)$  в каждой точке, в которой  $f(t, x) \neq 0$ , будет неограниченно возрастать по абсолютной величине, имея знак, совпадающий со знаком функции  $f(t, x)$ . Следовательно, касательные к интегральным кривым во всех точках, в которых  $f(t, x) \neq 0$ , стремятся при  $\mu \rightarrow 0$  к направлению, параллельному оси  $Ox$ , причем если  $f(t, x) > 0$ , то решение  $x(t, \mu)$  уравнения (4.28<sub>1</sub>) возрастает с возрастанием  $t$ , так как  $\frac{dx}{dt} > 0$ , а если

$f(t, x) < 0$ , то решение  $x(t, \mu)$  убывает с возрастанием  $t$ , так как  $\frac{dx}{dt} < 0$ .

Рассмотрим изображенный на рис. 4.18 случай а), при котором знак функции  $f(t, x)$  с возрастанием  $x$  при фиксированном  $t$  меняется при переходе через график решения  $x = \varphi(t)$  вырожденного уравнения с  $+$  на  $-$ .

Стрелками показано поле направлений касательных к интегральным кривым при достаточно малом  $\mu$ . Поле направлений устремлено к графику корня вырожденного уравнения. Поэтому каковы бы ни

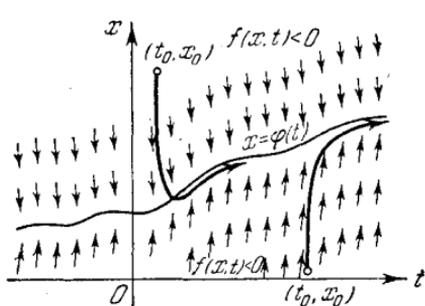


Рис. 4.18.

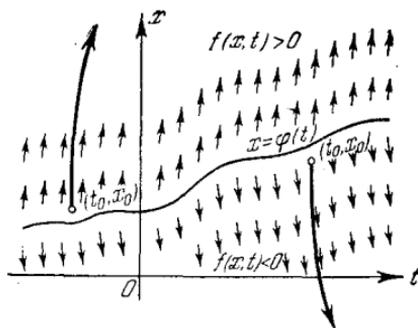


Рис. 4.19.

были начальные значения  $x(t_0) = x_0$ , интегральная кривая, определяемая этими начальными значениями, будучи почти параллельной оси  $Ox$ , устремляется к графику корня вырожденного уравнения и при возрастании  $t$  уже не может покинуть окрестность этого графика. Следовательно, в этом случае при  $t \geq t_1 > t_0$  при достаточно малом  $\mu$  можно приближенно заменять решение  $x(t, \mu)$  уравнения (4.28) решением вырожденного уравнения. В рассмотренном случае решение  $x = \varphi(t)$  вырожденного уравнения называется устойчивым.

Рассмотрим случай б) — знак функции  $f(t, x)$  при переходе через график решения  $x = \varphi(t)$  вырожденного уравнения с возрастанием  $x$  при фиксированном  $t$  изменяется с  $-$  на  $+$ . На рис. 4.19 изображено поле направлений, касательных к интегральным кривым при достаточно малом  $\mu$ . В этом случае очевидно, что каковы бы ни были начальные значения  $x(t_0) = x_0$ , удовлетворяющие лишь условию  $f(t_0, x_0) \neq 0$ , интегральная кривая, определяемая этими значениями, при достаточно малом  $\mu$ , имея почти параллельную оси  $Ox$  касательную, удаляется от графика решения  $x = \varphi(t)$  вырожденного уравнения. В этом случае решение  $x = \varphi(t)$  уравнения (4.29) называется неустойчивым. В неустойчивом случае нельзя заменять решение  $x = x(t, \mu)$  исходного уравнения решением вырожденного

уравнения, другими словами, нельзя пренебречь членом  $\mu \frac{dx}{dt}$  в уравнении  $\mu \frac{dx}{dt} = f(t, x)$ , как бы мало  $\mu$  ни было.

Возможен еще третий, так называемый полуустойчивый, случай в): знак функции  $f(t, x)$  при переходе через график решения вырожденного уравнения не изменяется. На рис. 4.20 изображено поле направлений в случае полуустойчивого решения  $x = \varphi(t)$ .

В полуустойчивом случае, как правило, тоже нельзя приближенно заменять решение исходного уравнения  $x = x(t, \mu)$  решением вырожденного уравнения, так как,

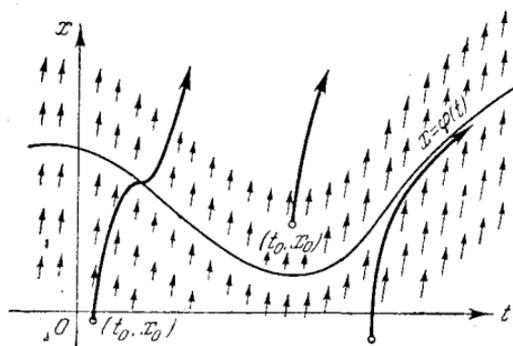


Рис. 4.20.

во-первых, интегральные кривые, определяемые начальными значениями, лежащими с одной стороны от графика решения  $x = \varphi(t)$ , удаляются от этого графика, во-вторых, интегральные кривые, приближающиеся к графику решения  $x = \varphi(t)$ , могут перейти через него на неустойчивую сторону (рис. 4.20) и после этого удалиться от графика решения  $x = \varphi(t)$ . Наконец, если даже

интегральная кривая  $x = x(t, \mu)$  остается в окрестности графика решения с его устойчивой стороны, то неизбежные в практических задачах возмущения могут перебросить график решения  $x = x(t, \mu)$  на неустойчивую сторону графика решения вырожденного уравнения, после чего интегральная кривая  $x = x(t, \mu)$  удалится от графика решения  $x = \varphi(t)$ .

Заметим, что если на графике решения вырожденного уравнения  $\frac{\partial f}{\partial x} < 0$ , то заведомо решение  $x = \varphi(t)$  устойчиво; если же  $\frac{\partial f}{\partial x} > 0$ , то решение  $x = \varphi(t)$  неустойчиво, так как в первом случае в окрестности кривой  $x = \varphi(t)$  функция  $f$  убывает с возрастанием  $x$  и, следовательно, меняет знак с  $+$  на  $-$ , а во втором случае возрастает с возрастанием  $x$  и, значит, при переходе через график решения  $x = \varphi(t)$  функция  $f$  меняет знак с  $-$  на  $+$ .

Если вырожденное уравнение имеет несколько решений  $x = \varphi_i(t)$ , то каждое из них должно быть исследовано на устойчивость, причем в зависимости от выбора начальных значений интегральные кривые исходного уравнения могут вести себя при  $\mu \rightarrow 0$  различно. Например, в изображенном на рис. 4.21 случае трех решений  $x = \varphi_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) вырожденного уравнения, графики которых не пересекаются, решения  $x = x(t, \mu)$ ,  $\mu > 0$ , исходного уравнения, опреде-

ляемые начальными точками, лежащими выше графика функции  $x = \varphi_2(t)$ , стремятся при  $t > t_0$  и  $\mu \rightarrow 0$  к устойчивому решению вырожденного уравнения  $x = \varphi_1(t)$ , а решения  $x = x(t, \mu)$ , определяемые начальными точками, лежащими ниже графика функции  $x = \varphi_2(t)$ , стремятся при  $t > t_0$  и  $\mu \rightarrow 0$  к устойчивому решению  $x = \varphi_3(t)$  вырожденного уравнения (рис. 4.21).

Пример 1. Выяснить, стремится ли решение  $x = x(t, \mu)$  уравнения  $\mu \frac{dx}{dt} = x - t$ ,  $\mu > 0$ , удовлетворяющее начальным условиям  $x(t_0) = x_0$  к решению вырожденного уравнения  $x - t = 0$  при  $t > t_0$  и  $\mu \rightarrow 0$ .

Решение  $x = x(t, \mu)$  не стремится к решению вырожденного уравнения  $x = t$ , так как решение вырожденного уравнения неустойчиво, потому что  $\frac{\partial(x-t)}{\partial x} = 1 > 0$  (рис. 4.22).

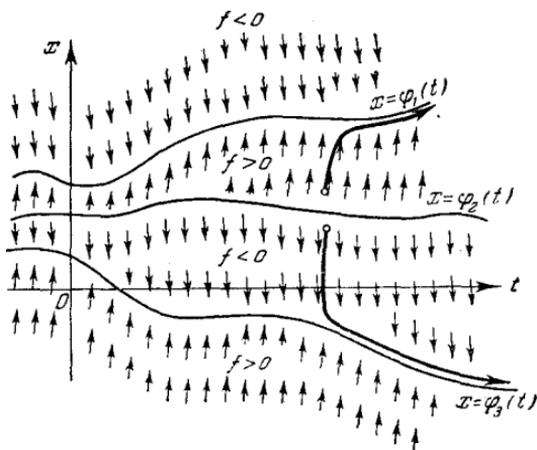


Рис. 4.21.

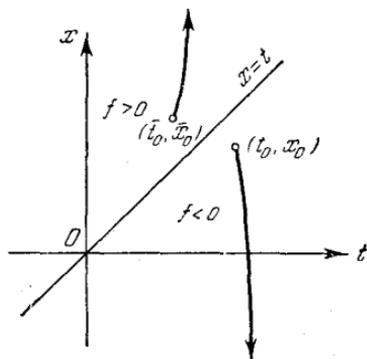


Рис. 4.22.

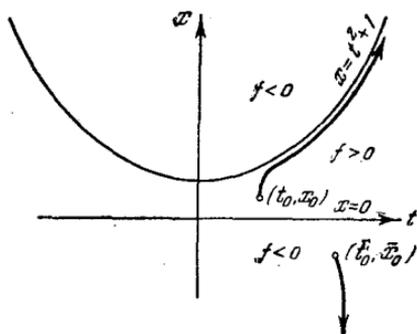


Рис. 4.23.

Пример 2. Тот же вопрос для уравнения

$$\mu \frac{dx}{dt} = \sin^2 t - 3e^x.$$

Решение вырожденного уравнения  $x = 2 \ln |\sin t| - \ln 3$  устойчиво, так как  $\frac{\partial(\sin^2 t - 3e^x)}{\partial x} = -3e^x < 0$ . Следовательно, решение исходного уравнения

$x = x(t, \mu)$  стремится к решению вырожденного уравнения для  $t > t_0$  при  $\mu \rightarrow 0$ .

Пример 3. Тот же вопрос для решения уравнения

$$\mu \frac{dx}{dt} = x(t^2 - x + 1), \quad \mu > 0, \quad x(t_0) = x_0.$$

Из двух решений  $x = 0$  и  $x = t^2 + 1$  вырожденного уравнения  $x(t^2 - x + 1) = 0$  первое неустойчиво, так как  $\left. \frac{\partial x(t^2 - x + 1)}{\partial x} \right|_{x=0} = t^2 + 1 > 0$ , а второе устойчиво, так как  $\left. \frac{\partial x(t^2 - x + 1)}{\partial x} \right|_{x=t^2+1} = -t^2 - 1 < 0$ .

Если начальная точка  $(t_0, x_0)$  лежит в верхней полуплоскости  $x > 0$ , то интегральная кривая исходного уравнения при  $\mu \rightarrow 0$  приближается к графику решения  $x = t^2 + 1$  вырожденного уравнения (рис. 4.23) и остается в его окрестности.

Если же начальная точка лежит в нижней полуплоскости  $x < 0$ , то  $\lim_{\mu \rightarrow 0} x(t, \mu) = -\infty$  при  $t > t_0$  (рис. 4.23).

Вопрос о зависимости решения от малого коэффициента  $\mu$  при старшей производной возникает и для уравнений  $n$ -го порядка

$$\mu x^{(n)}(t) = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}),$$

и для систем дифференциальных уравнений.

Уравнение  $n$ -го порядка может быть обычным способом (см. стр. 85) сведено к системе уравнений первого порядка, и следовательно, основная задача заключается в исследовании систем уравнений первого порядка с одним или несколькими малыми коэффициентами при производных. Эта задача подробно исследована А. Н. Тихоновым [4] и А. Б. Васильевой.

## § 7. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях

Если исследуемая система уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i(t_0) = x_{i0} \quad (4.30)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

подвергается малым кратковременным возмущениям, то систему (4.30) на малом интервале изменения  $t$ ,  $\bar{t}_0 \leq t \leq \bar{\bar{t}}_0$ , следует заменить возмущенной системой

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) + R_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_i(\bar{t}_0) &= \tilde{x}_i(\bar{t}_0) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \right\} (4.31)$$

где все  $R_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  малы по модулю, а затем при  $t \geq \bar{\bar{t}}_0$  возмущения прекращаются, и мы снова возвращаемся к системе (4.30),

но уже с несколько измененными начальными значениями в точке  $\bar{t}_0$ ,  $x_i(\bar{t}_0) = \tilde{x}_i(\bar{t}_0) + \delta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), где  $\tilde{x}_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — исследуемое решение системы (4.30), а все  $\delta_i$  малы по модулю при малых  $|R_i|$  в силу теоремы о непрерывной зависимости решения от параметра (рис. 4.24).

Следовательно, действие кратковременных возмущений в конечном счете сводится к возмущениям начальных значений, а вопрос об устойчивости по отношению к таким кратковременным или, как их часто называют, мгновенным возмущениям сводится к рассмотренному выше вопросу об устойчивости в смысле А. М. Ляпунова.

Если же возмущения действуют постоянно, то система (4.30) должна быть заменена системой (4.31) для всех  $t \geq t_0$  и возникает совершенно новая задача об устойчивости при постоянно действующих возмущениях, исследованная И. Г. Малкиным и Г. Н. Дубошиным.

Так же как при исследовании на устойчивость в смысле А. М. Ляпунова, можно заменой переменных  $x_i = y_i - \varphi_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) преобразовать исследуемое решение  $y_i = \varphi_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системы  $\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) в тривиальное решение  $x_i \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) преобразованной системы. Поэтому в дальнейшем можно считать, что на устойчивость при постоянно действующих возмущениях исследуется тривиальное решение  $x_i \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системы уравнений (4.30).

Тривиальное решение системы (4.30) называется *устойчивым* по отношению к постоянно действующим возмущениям, если для каждого  $\varepsilon > 0$  можно подобрать  $\delta_1 > 0$  и  $\delta_2 > 0$  такие, что из неравенств  $\sum_{i=1}^n R_i^2 < \delta_1^2$  при  $t \geq t_0$  и  $\sum_{i=1}^n x_{i0}^2 < \delta_2^2$  следует, что

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(t) < \varepsilon^2 \quad \text{при } t \geq t_0,$$

где  $x_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) решение системы (4.31), определяемое начальными условиями  $x_i(t_0) = x_{i0}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

**Теорема 4.7 (теорема Малкина).** Если для системы уравнений (4.30) существует дифференцируемая функция Ляпунова

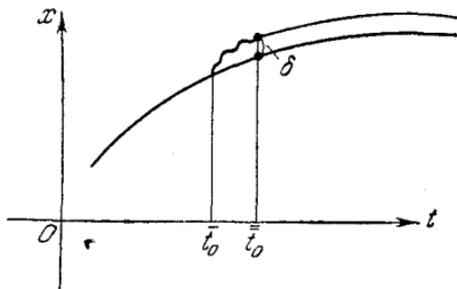


Рис. 4.24.

$v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ , удовлетворяющая в окрестности начала координат при  $t \geq t_0$  следующим условиям:

1)  $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \omega_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ ,  $v(t, 0, 0, \dots, 0) = 0$ , где  $\omega_1$  — непрерывная функция, обращающаяся в нуль лишь в начале координат;

2) производные  $\frac{\partial v}{\partial x_s}$  ( $s = 1, 2, \dots, n$ ) ограничены по модулю;

3) производная  $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i \leq -\omega_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$ ,

где непрерывная функция  $\omega_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$  может обращаться в нуль лишь в начале координат, то тривиальное решение системы (4.30) устойчиво по отношению к постоянно действующим возмущениям.

Доказательство. Заметим, что в силу ограниченности производных  $\frac{\partial v}{\partial x_s}$  ( $s = 1, 2, \dots, n$ ) функция  $v$  равномерно по отношению

к  $t$  при  $t \geq t_0$  стремится к нулю при  $\sum_{i=1}^n x_i^2 \rightarrow 0$ , так как по тео-

реме о среднем значении  $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) x_i$ , где

$\left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)$  — производные, вычисленные для некоторых промежуточных между 0 и  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) значений аргументов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Заметим также, что вне некоторой  $\delta$ -окрестности начала координат

(т. е. при  $\sum_{i=1}^n x_i^2 > \delta^2 > 0$ ) и при  $t \geq t_0$  в силу условий 2) и 3)

производная

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} R_i \leq -k < 0$$

при достаточно малых по модулю  $R_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Зададим  $\epsilon > 0$  и выберем какую-нибудь поверхность уровня (или одну из ее компонент)  $\omega_1 = l$ ,  $l > 0$ , целиком лежащую в  $\epsilon$ -окрестности начала координат.

Подвижная при переменном  $t \geq t_0$  поверхность уровня  $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = l$ , в силу условия 1), лежит внутри поверхности уровня  $\omega_1 = l$  и в то же время, в силу равномерного по  $t$

стремления к нулю функции  $v$  при  $\sum_{i=1}^n x_i^2 \rightarrow 0$ , лежит вне некоторой  $\delta_2$ -окрестности начала координат, в которой  $v < l$ , и,

следовательно, на поверхности уровня  $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = l$  при любом  $t \geq t_0$  производная

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} R_i \leq -k < 0,$$

если  $\sum_{i=1}^n R_i^2 < \delta_1$ ,  $\delta_1 > 0$ , где  $\delta_1$  достаточно мало. Траектория, определяемая начальной точкой  $x_i(t_0) = x_{i0}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), лежащей в указанной выше  $\delta_2$ -окрестности начала координат, не может при  $t \geq t_0$  выйти за пределы  $\varepsilon$ -окрестности начала координат, так как, в силу выбора  $\delta_2$ ,  $v(t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) < l$ , и следовательно, если бы при  $t \geq t_0$  траектория выходила за пределы  $\varepsilon$ -окрестности начала координат или хотя бы за пределы поверхности уровня  $w_1 = l$ , то она должна была бы при некотором значении  $t = T$  первый раз пересечь поверхность уровня  $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = l$ , причем в окрестности точки пересечения вдоль траектории функция  $v$  должна была бы возрастать, что противоречит условию  $\frac{dv}{dt} \leq -k < 0$  вдоль траектории в точках поверхности уровня  $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = l$ .

Сравнивая условия теоремы Малкина с условиями теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости (см. замечание на стр. 218), увидим, что они почти совпадают; дополнительным в теореме Малкина является лишь требование ограниченности производных

$\frac{\partial v}{\partial x_s}$  ( $s = 1, 2, \dots, n$ ), так что асимптотическая устойчивость и устойчивость по отношению к постоянно действующим возмущениям являются, хотя и не совпадающими, но весьма близкими свойствами.

Пример 1. Устойчиво ли по отношению к постоянно действующим возмущениям тривиальное решение  $x = 0$ ,  $y = 0$  системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = a^2 y - x^3,$$

$$\frac{dy}{dt} = -b^2 x - y^3,$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные.

Функцией Ляпунова, удовлетворяющей всем условиям теоремы Малкина, является  $v = b^2 x^2 + a^2 y^2$ .

Следовательно, точка покоя  $x = 0$ ,  $y = 0$  устойчива по отношению к постоянно действующим возмущениям.

Пример 2. Устойчива ли точка покоя  $x_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системы

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + R_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.32)$$

по отношению к постоянно действующим возмущениям, если все  $a_{ij}$  — постоянные, а  $R_i$  удовлетворяют условиям теоремы Ляпунова, стр. 221, т. е.

$$|R_i| \leq N \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2 + \alpha}, \quad \alpha > 0, \quad N — \text{постоянная, и все корни характеристического уравнения для системы первого приближения различны и отрицательны.}$$

На стр. 223 после замены переменных, приводившей линейные части уравнения (4.32) к каноническому виду, была указана функция Ляпунова

$$v = \sum_{i=1}^n y_i^2, \quad \text{удовлетворяющая всем условиям теоремы Малкина, следовательно, точка покоя } x_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \text{ устойчива по отношению к постоянно действующим возмущениям.}$$

Тот же результат можно получить, предположив, что действительные части всех корней характеристического уравнения, среди которых могут быть и кратные, отрицательны, но только в этом случае подбор функции Ляпунова значительно усложняется.

#### Задачи к главе 4

1. Исследовать на устойчивость точку покоя  $x = 0, y = 0$  системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2x - 3y + x^5, \\ \frac{dy}{dt} &= x + y - y^2. \end{aligned}$$

2. Исследовать на устойчивость точку покоя  $x = 0, y = 0, z = 0$  системы

$$\frac{dx}{dt} = x - y - z, \quad \frac{dy}{dt} = x + y - 3z, \quad \frac{dz}{dt} = x - 5y - 3z$$

3. При каких значениях  $\alpha$  точка покоя  $x = 0, y = 0, z = 0$  системы  $\frac{dx}{dt} = \alpha x - y, \frac{dy}{dt} = \alpha y - z, \frac{dz}{dt} = \alpha z - x$  устойчива?

4. При каких значениях  $\alpha$  система

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + \alpha x - x^5, \\ \frac{dy}{dt} &= -x - y^5 \end{aligned}$$

имеет устойчивую точку покоя  $x = 0, y = 0$ ?

5. К какому пределу стремится решение дифференциального уравнения

$$\mu \frac{dx}{dt} = (x^2 + t^2 - 4)(x^2 + t^2 - 9), \quad x(1) = 1$$

при  $\mu \rightarrow 0, \mu > 0, t > 1$ ?

6. К какому пределу стремится решение дифференциального уравнения

$$\mu \frac{dx}{dt} = x - t + 5, \quad x(2) = 5 \quad \text{при } \mu \rightarrow 0, \mu > 0, t > 2?$$

7. Исследовать на устойчивость точку покоя  $x=0$ ,  $y=0$  системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x + e^y - \cos y,$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x - y - \sin y.$$

8. Устойчиво ли по отношению к постоянно действующим возмущениям решение  $x=0$ ,  $y=0$  системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -2y - x^5,$$

$$\frac{dy}{dt} = 5x - y^5?$$

9. Устойчиво ли решение  $x \equiv 0$  уравнения

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 2\dot{x} + 20 = 0?$$

10. Устойчиво ли решение  $x \equiv 0$  уравнения

$$\ddot{x} + 5\ddot{x} + 6\dot{x} + x = 0?$$

11. Какого типа точку покоя  $x=0$ ,  $y=0$  имеет система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x + 3y, \quad \frac{dy}{dt} = 5x - y?$$

12. Определить периодическое решение уравнения  $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \sin t$  и исследовать его на устойчивость.

13.  $\ddot{x} + 2\ddot{x} + 5\dot{x} + 3x = \cos t$ . Устойчиво ли периодическое решение этого уравнения.

14. Исследовать на устойчивость точку покоя  $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$  системы

$$\dot{x} = y^3 + x^5, \quad \dot{y} = x^3 + y^5.$$

15. Исследовать на устойчивость решения системы уравнений

$$\dot{x} = 3y - 2x + e^t,$$

$$\dot{y} = 5x - 4y + 2.$$

16. Исследовать на устойчивость тривиальное решение уравнения

$$\ddot{x} + 2\ddot{x} + 3\dot{x} + 7 \operatorname{sh} x = 0.$$

17. Исследовать на устойчивость тривиальное решение уравнения

$$\ddot{x} + (\alpha - 1)\dot{x} + (4 - \alpha^2)x = 0,$$

где  $\alpha$  — параметр.

18. Устойчиво ли решение  $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$  системы

$$\dot{x} = 3y - x^3, \quad \dot{y} = -4x - 3y^5$$

при постоянно действующих возмущениях.

19. Устойчиво ли тривиальное решение системы

$$\dot{X}(t) = AX(t),$$

где  $X(t)$  — вектор в трехмерном пространстве, а

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

20. Исследовать на устойчивость решения уравнения

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = t.$$

21. Исследовать на устойчивость решения уравнения

$$\ddot{x} + 9x = \sin t.$$

22.  $\ddot{x} + x = \cos t$ . Найти периодическое решение и исследовать его на устойчивость.

23. Найти область устойчивости

$$\ddot{x} + a\dot{x} + (1 - a)x = 0.$$

24.  $\ddot{x} + \ddot{x} + a^2\dot{x} + 5ax = 0$ . Найти область устойчивости.

---

## ГЛАВА 5

# УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

### § 1. Основные понятия

Как уже отмечалось во введении (стр. 10), *дифференциальными уравнениями в частных производных* называются дифференциальные уравнения, в которых неизвестные функции являются функциями более чем одной независимой переменной.

Очень многие физические явления описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Уравнение

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = n(x, y, z)$$

описывает распространение световых лучей в неоднородной среде с показателем преломления  $n(x, y, z)$ ; уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

описывает изменение температуры стержня; уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

является уравнением колебания струны; уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

удовлетворяет потенциал поля в областях, не содержащих зарядов, и т. д.

В этой главе мы кратко рассмотрим лишь методы интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, теория которых тесно связана с интегрированием некоторых систем обыкновенных уравнений.

Уравнениям в частных производных более высокого порядка интегрирующимся совсем иными методами, посвящается отдельная книга серии.

Рассмотрим несколько простейших примеров.

Пример 1.

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = y + x.$$

Интегрируя по  $x$ , получаем

$$z(x, y) = xy + \frac{x^2}{2} + \varphi(y),$$

где  $\varphi(y)$  — произвольная функция  $y$ .

Пример 2.

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial z}{\partial y} \right\} = 0.$$

Интегрируя по  $x$ , получаем  $\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(y)$ , где  $\varphi(y)$  — произвольная функция  $y$ .

Интегрируя теперь по  $y$ , получим

$$z = \int \varphi(y) dy + \varphi_1(x),$$

где  $\varphi_1(x)$  — произвольная функция  $x$ . Или, обозначая

$$\int \varphi(y) dy = \varphi_2(y),$$

окончательно будем иметь

$$z(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y),$$

где  $\varphi_2(y)$ , в силу произвольности функции  $\varphi(y)$ , тоже является произвольной дифференцируемой функцией  $y$ .

Приведенные примеры наводят на мысль, что общее решение дифференциального уравнения в частных производных первого порядка зависит от одной произвольной функции, общее решение уравнения второго порядка зависит от двух произвольных функций, а общее решение уравнения  $p$ -го порядка, вероятно, зависит от  $p$  произвольных функций.

Эти предположения оказываются справедливыми, но нуждаются в уточнении. Для их уточнения сформулируем теорему С. В. Ковалевской о существовании и единственности решения уравнения в частных производных.

**Теорема 5.1 (теорема Ковалевской).** *Существует единственное аналитическое в окрестности точки  $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$  решение уравнения, разрешенного относительно одной из производных максимального порядка*

$$\frac{\partial^p z}{\partial x_1^p} = f \left( x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^{p-1} z}{\partial x_1^{p-1}}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^p z}{\partial x_n^p} \right), \quad (A)$$

удовлетворяющее условиям

$$\text{при } x = x_{10}, z = \Phi_0(x_2, x_3, \dots, x_n), \frac{\partial z}{\partial x_1} = \Phi_1(x_2, x_3, \dots, x_n), \dots \\ \dots, \frac{\partial^{p-1} z}{\partial x_1^{p-1}} = \Phi_{p-1}(x_2, x_3, \dots, x_n),$$

если функции  $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{p-1}$  являются аналитическими функциями в окрестности начальной точки  $x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0}$ , а  $f$  является аналитической функцией в окрестности начальных значений своих аргументов  $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, z_0 = \Phi_0(x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0})$ ,

$$\left( \frac{\partial z}{\partial x_1} \right)_0 = \Phi_1(x_{20}, \dots, x_{n0}), \dots, \left( \frac{\partial^p z}{\partial x_n^p} \right)_0 = \left( \frac{\partial^p \Phi_0}{\partial x_n^p} \right)_{x_i = x_{i0}}.$$

Решение определяется заданием начальных функций  $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{p-1}$ , произвольно меняя которые в классе аналитических функций, мы получим совокупность аналитических решений исходного уравнения (А), зависящую от  $p$  произвольных функций.

Доказательство этой теоремы, требующее применения теории аналитических функций, мы опускаем.

## § 2. Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка

Линейным неоднородным уравнением или квазилинейным уравнением первого порядка в частных производных называется уравнение вида

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots \\ \dots + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_n} = Z(x_1, x_2, \dots, x_n, z). \quad (5.1)$$

Это уравнение линейно относительно производных, но может быть нелинейным относительно неизвестной функции  $z$ .

Если правая часть тождественно равна нулю, а коэффициенты  $X_i$  не зависят от  $z$ , то уравнение (5.1) называется *линейным однородным*.

Для большей наглядности геометрической интерпретации рассмотрим вначале квазилинейное уравнение с двумя независимыми переменными:

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z). \quad (5.1_1)$$

Функции  $P, Q$  и  $R$  будем считать непрерывными в рассматриваемой области изменения переменных и не обращающимися в нуль одновременно.

Рассмотрим непрерывное векторное поле

$$\mathbf{F} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  — единичные векторы, направленные по осям координат.

Векторные линии этого поля (т. е. линии, касательная к которым в каждой точке имеет направление, совпадающее с направлением вектора  $\mathbf{F}$  в той же точке) определяются из условия коллинеарности вектора  $t = i dx + j dy + k dz$ , направленного по касательной к искомым линиям, и вектора поля  $\mathbf{F}$ :

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}.$$

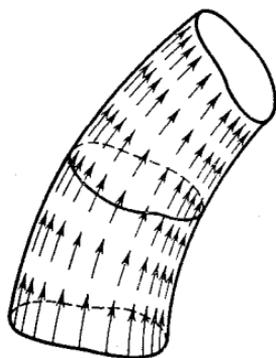


Рис. 5.1.

Поверхности, составленные из векторных линий, точнее, поверхности, целиком содержащие векторные линии, имеющие хотя бы одну общую точку с поверхностью, называются *векторными поверхностями* (рис. 5.1).

Очевидно, векторные поверхности можно получить, рассматривая множество точек, лежащих на произвольно выбранном, непрерывно зависящем от параметра, однопараметрическом семействе векторных линий. Векторная поверхность характеризуется тем, что вектор  $\mathbf{N}$ , направленный по нормали к поверхности, в любой точке поверхности ортогонален вектору поля  $\mathbf{F}$ :

$$(\mathbf{N} \cdot \mathbf{F}) = 0. \quad (5.2)$$

Если векторная поверхность определяется уравнением  $z = f(x, y)$ , то вектор

$$\mathbf{N} = \frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

и условие (5.2) принимает вид

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z). \quad (5.3)$$

Если векторная поверхность задается уравнением  $u(x, y, z) = 0$  и, следовательно, вектор  $\mathbf{N} = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$ , то уравнение (5.2) приобретает вид

$$P(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (5.4)$$

Следовательно, для нахождения векторных поверхностей надо проинтегрировать квазилинейное уравнение (5.3) или линейное одно-

родное уравнение (5.4) в зависимости от того, ищем ли мы уравнение искомым векторных поверхностей в явном или неявном виде.

Так как векторные поверхности могут быть составлены из *векторных линий*, то интегрирование уравнения (5.3) (или (5.4)) сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений векторных линий.

Составляем систему дифференциальных уравнений векторных линий

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}. \quad (5.5)$$

Пусть  $\psi_1(x, y, z) = c_1$  и  $\psi_2(x, y, z) = c_2$  — два независимых первых интеграла системы (5.5). Выделяем из двухпараметрического семейства векторных линий  $\psi_1(x, y, z) = c_1$ ,  $\psi_2(x, y, z) = c_2$ , называемых *характеристиками* уравнения (5.3) (или (5.4)), произвольным способом однопараметрическое семейство, устанавливая какую-нибудь непрерывную зависимость  $\Phi(c_1, c_2) = 0$  между параметрами  $c_1$  и  $c_2$ . Исключая из системы

$$\psi_1(x, y, z) = c_1, \quad \psi_2(x, y, z) = c_2, \quad \Phi(c_1, c_2) = 0$$

параметры  $c_1$  и  $c_2$ , получаем искомое уравнение векторных поверхностей:

$$\Phi(\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)) = 0, \quad (5.6)$$

где  $\Phi$  — произвольная функция. Тем самым найден интеграл квазилинейного уравнения (5.3), зависящий от произвольной функции.

Если требуется найти не произвольную векторную поверхность поля

$$\mathbf{F} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

а поверхность, проходящую через заданную линию, определяемую уравнениями  $\Phi_1(x, y, z) = 0$  и  $\Phi_2(x, y, z) = 0$ , то функция  $\Phi$  в (5.6) уже не будет произвольной, а определится путем исключения переменных  $x, y, z$  из системы уравнений

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z) = 0,$$

$$\psi_1(x, y, z) = c_1, \quad \psi_2(x, y, z) = c_2,$$

которые должны одновременно удовлетворяться в точках заданной линии  $\Phi_1 = 0$  и  $\Phi_2 = 0$ , через которую мы проводим характеристики, определяемые уравнениями  $\psi_1(x, y, z) = c_1$ ,  $\psi_2(x, y, z) = c_2$ .

Заметим, что задача станет неопределенной, если заданная линия  $\Phi_1(x, y, z) = 0$ ,  $\Phi_2(x, y, z) = 0$  является характеристикой, так как в этом случае эту линию можно включить в различные однопараметрические семейства характеристик и тем самым получить различные интегральные поверхности, проходящие через эту линию.

Итак, интеграл квазилинейного уравнения

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z),$$

зависящий от произвольной функции, может быть получен следующим методом: интегрируем вспомогательную систему уравнений

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}$$

и, найдя два независимых первых интеграла этой системы:

$$\psi_1(x, y, z) = c_1, \quad \psi_2(x, y, z) = c_2,$$

получаем искомый интеграл в виде  $\Phi(\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)) = 0$ , где  $\Phi$  — произвольная функция.

Уравнение интегральной поверхности того же квазилинейного уравнения, проходящей через заданную линию, определяемую уравнениями  $\psi_1(x, y, z) = 0$  и  $\psi_2(x, y, z) = 0$ , можно найти, взяв упомянутую выше функцию  $\Phi$  не произвольно, а определив функцию  $\Phi(c_1, c_2)$  путем исключения  $x, y, z$  из уравнений

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y, z) &= 0, & \psi_2(x, y, z) &= 0, \\ \psi_1(x, y, z) &= c_1, & \psi_2(x, y, z) &= c_2, \end{aligned}$$

в результате чего получим уравнение  $\Phi(c_1, c_2) = 0$ , и искомым интегралом будет  $\Phi(\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)) = 0$ .

**Пример 1.** Определить зависящий от произвольной функции интеграл уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Составляем вспомогательную систему уравнений

$$dx = dy = dz.$$

Ее первые интегралы имеют вид  $x - y = c_1, z - x = c_2$ . Интеграл исходного уравнения  $\Phi(x - y, z - x) = 0$ , где  $\Phi$  — произвольная функция, или в разрешенном относительно  $z$  виде  $z = x + \varphi(x - y)$ , где  $\varphi$  — произвольная дифференцируемая функция.

**Пример 2.** Найти интегральную поверхность уравнения

$$x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

проходящую через кривую  $x = 0, z = y^2$ .

Интегрируем систему уравнений

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0},$$

откуда  $z = c_1, x^2 + y^2 = c_2$ . Исключая  $x, y$  и  $z$  из уравнений

$$x^2 + y^2 = c_2, \quad z = c_1, \quad x = 0, \quad z = y^2,$$

получаем  $c_1 = c_2$ , откуда  $z = x^2 + y^2$ .

Пример 3. Найти интегральную поверхность того же уравнения

$$x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

проходящую через окружность

$$z = 1, \quad x^2 + y^2 = 4. \quad (5.7)$$

Так как заданная линия (5.7) является векторной линией (характеристикой), то задача неопределенна. Действительно, интегральными поверхностями рассматриваемого уравнения являются всевозможные поверхности вращения  $z = \Phi(x^2 + y^2)$ , ось вращения которых совпадает с осью  $Oz$ . Очевидно, существует бесконечное множество таких поверхностей вращения, проходящих через окружность (5.7), например параболоиды вращения  $z = x^2 + y^2 - 3$ ,  $4z = x^2 + y^2$ ,  $z = -x^2 - y^2 + 5$ , сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = 5$  и т. д.

Если уравнение кривой, через которую требуется провести интегральную поверхность уравнения (5.1) дано в параметрической форме:

$$x_0 = x_0(s), \quad y_0 = y_0(s), \quad z_0 = z_0(s), \quad (B)$$

то обычно и решение удобно искать в параметрической форме:

$$x = x(t, s), \quad y = y(t, s), \quad z = z(t, s).$$

В систему (5.5), определяющую характеристики, вводим параметр  $t$ , полагая

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)} = dt. \quad (5.5_1)$$

Для того чтобы характеристики проходили через заданную кривую, ищем решение системы (5.5<sub>1</sub>), удовлетворяющее при  $t=0$  (или  $t=t_0$ ) начальным условиям:

$$x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad z = z_0(s).$$

При таких начальных условиях при фиксированном  $s$  получим характеристику, проходящую через фиксированную точку кривой (B). При переменном  $s$  получим семейство характеристик

$$x = x(t, s), \quad y = y(t, s), \quad z = z(t, s), \quad (B)$$

проходящих через точки заданной кривой (B) (при этом предполагается, что заданная кривая (B) не является характеристикой). Множество точек, лежащих на этом семействе характеристик (B), и образует искомую интегральную поверхность.

Пример 4.

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Найти интегральную поверхность, проходящую через кривую  $x_0 = s$ ,  $y_0 = s^2$ ,  $z_0 = s^3$ .

Система уравнений, определяющая характеристики, имеет вид

$$dx = -dy = dz = dt.$$

Ее общее решение

$$x = t + c_1, \quad y = -t + c_2, \quad z = t + c_3.$$

Пользуясь начальными условиями, определяем произвольные постоянные и окончательно получаем

$$x = t + s, \quad y = -t + s^2, \quad z = t + s^3.$$

Перейдем теперь к случаю  $n$  независимых переменных. Естественно ожидать, что указанная выше для трехмерного случая схема решения может быть распространена и на  $(n + 1)$ -мерный случай.

Начнем с исследования однородного линейного уравнения

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots \\ \dots + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0, \quad (5.8)$$

где непрерывные функции  $X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  не обращаются в нуль одновременно ни в одной точке рассматриваемой области и имеют в той же области ограниченные частные производные.

Составляем вспомогательную систему уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad (5.9)$$

которая при указанных выше ограничениях удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности.

Находим  $n - 1$  независимый первый интеграл системы (5.9):

$$\begin{aligned} \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= c_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= c_2, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= c_{n-1}. \end{aligned}$$

В пространстве с координатами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  эта система интегралов определяет  $(n - 1)$ -параметрическое семейство линий, называемых *характеристиками* уравнения (5.8). Докажем, что левая часть любого первого интеграла  $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$  системы (5.9) является решением исходного линейного однородного уравнения в частных производных (5.8).

Действительно, вдоль любой интегральной кривой системы (5.9) функция  $\psi \equiv c$ . Следовательно, вдоль любой интегральной кривой

$$d\psi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx_i \equiv 0. \quad (5.10)$$

Но вдоль интегральной кривой системы (5.9) дифференциалы  $dx_i$  пропорциональны функциям  $X_i$ , следовательно, в силу однородности относительно  $dx_i$  левой части тождества

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx_i \equiv 0,$$

дифференциалы  $dx_i$  могут быть заменены пропорциональными им величинами  $X_i$ , при этом получим, что вдоль интегральных кривых системы (5.9)

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} X_i \equiv 0. \quad (5.11)$$

Интегральные кривые системы (5.9) проходят через каждую точку рассматриваемой области изменения переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и левая часть тождества (5.11) не зависит от постоянных  $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$  и, следовательно, не меняется при переходе от одной интегральной кривой к другой, значит, тождество (5.11) справедливо не только вдоль некоторой интегральной кривой, но и во всей рассматриваемой области изменения переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а это и означает, что функция  $\psi$  является решением исходного уравнения

$$\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0.$$

Очевидно, что  $\Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) = c$ , где  $\Phi$  — произвольная функция, является первым интегралом системы (5.9), так как вдоль интегральной кривой системы (5.9) все функции  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$  обращаются в постоянные, следовательно, и  $\Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$  обращается в постоянную вдоль интегральной кривой системы (5.9). Значит,  $z = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$ , где  $\Phi$  — произвольная дифференцируемая функция, является решением линейного однородного уравнения (5.8).

Докажем, что

$$z = \Phi(\psi_1(x_1, \dots, x_n), \psi_2(x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n))$$

является общим решением уравнения (5.8).

**Теорема 5.2.**  $z = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$ , где  $\Phi$  — произвольная функция, является общим решением уравнения

$$\sum_{i=1}^n X_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0, \quad (5.8)$$

*т. е. решением, содержащим все без исключения решения этого уравнения.*

**Доказательство.** Допустим, что  $z = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  является некоторым решением уравнения (5.8), и докажем, что существует функция  $\Phi$  такая, что  $\psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$ .

Так как  $\psi$  и  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$  являются решениями уравнения (5.8), то

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} &\equiv 0, \\ \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} &\equiv 0, \\ \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} &\equiv 0, \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_i} &\equiv 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Рассматривая систему (5.12) как линейную однородную систему  $n$  уравнений относительно  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и замечая, что эта однородная система в каждой точке  $x_1, x_2, \dots, x_n$  рассматриваемой области имеет нетривиальное решение, так как  $X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , по предположению, не обращаются в нуль одновременно, приходим к выводу, что определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

тождественно равен нулю в рассматриваемой области. Но тождественное обращение в нуль якобиана функций  $\psi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$  указывает на наличие функциональной зависимости между этими функциями:

$$F(\psi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) = 0. \quad (5.13)$$

В силу независимости первых интегралов  $\psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) системы (5.9) по крайней мере один из миноров  $(n-1)$ -го порядка якобиана

$$\frac{D(\psi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}$$

вида

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)}{D(x_{a_1}, x_{a_2}, \dots, x_{a_{n-1}})}$$

отличен от нуля. Следовательно, уравнение (5.13) можно представить в виде

$$\psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}).$$

Пример 5. Проинтегрировать уравнение

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0. \quad (5.14)$$

Система уравнений, определяющая характеристики, имеет вид

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n}.$$

Независимыми первыми интегралами этой системы будут:

$$\frac{x_1}{x_n} = c_1, \quad \frac{x_2}{x_n} = c_2, \quad \dots, \quad \frac{x_{n-1}}{x_n} = c_{n-1}.$$

Общее решение исходного уравнения

$$z = \Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$$

является произвольной однородной функцией нулевой степени однородности.

Теорема Эйлера об однородных функциях утверждает, что однородные функции нулевой степени однородности удовлетворяют рассматриваемому уравнению (5.14); теперь мы доказали, что только однородные функции нулевой степени однородности обладают этим свойством.

Неоднородное линейное уравнение первого порядка

$$\sum_{i=1}^n X_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_i} = Z(x_1, x_2, \dots, x_n, z), \quad (5.15)$$

где все  $X_i$  и  $Z$  — непрерывно дифференцируемые функции, не обращающиеся в нуль одновременно в рассматриваемой области изменения переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n, z$ , интегрируется путем сведения к линейному однородному уравнению.

Для этой цели, так же как и в случае трех переменных, достаточно искать решение  $z$  уравнения (5.15) в неявном виде:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0, \quad (5.16)$$

где  $\frac{\partial u}{\partial z} \neq 0$ .

Действительно, считая, что функция  $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$  определена из уравнения (5.16), и дифференцируя тождество

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, z(x_1, x_2, \dots, x_n)) \equiv 0$$

по  $x_i$ , получим

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\frac{\partial u}{\partial z}}.$$

Подставляя найденное  $\frac{\partial z}{\partial x_i}$  в (5.15), умножая на  $-\frac{\partial u}{\partial z}$  и перенося все члены в левую часть уравнения, получим однородное линейное уравнение

$$\sum_{i=1}^n X_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial u}{\partial x_i} + Z(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (5.17)$$

которому должна удовлетворять функция  $u$ , однако лишь в предположении, что  $z$  является функцией  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , определяемой уравнением  $u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$ .

Итак, надо найти функции  $u$ , обращающие линейное однородное уравнение (5.17) в тождество в силу уравнения

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0.$$

Найдем вначале функции  $u$ , обращающие уравнение (5.17) в тождество при независимо меняющихся  $x_1, x_2, \dots, x_n, z$ . Все такие функции  $u$  являются решениями однородного уравнения (5.17) и могут быть найдены уже известным нам способом: составляем систему уравнений, определяющую характеристики

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n, z)} = \dots \\ \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z)} = \frac{dz}{Z(x_1, x_2, \dots, x_n, z)}; \quad (5.18)$$

находим  $n$  независимых первых интегралов этой системы:

$$\begin{aligned} \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z) &= c_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, z) &= c_2, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z) &= c_n; \end{aligned}$$

тогда общее решение уравнения (5.17) имеет вид

$$u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n),$$

где  $\Phi$  — произвольная функция.

Решение  $z$  уравнения (5.15), зависящее от произвольной функции, определяется из уравнения

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0 \quad \text{или} \quad \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = 0.$$

Но, кроме найденных этим способом решений, могут быть решения  $z$ , которые определяются из уравнений  $u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$ , где функция  $u$  не является решением уравнения (5.17), а обращает это уравнение в тождество лишь в силу уравнения  $u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$ . Такие решения называются *специальными*.

Специальных решений в некотором смысле не очень много, они не могут образовывать даже однопараметрических семейств.

Действительно, если бы специальные решения образовали однопараметрическое семейство и определялись уравнением

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = c, \quad (5.19)$$

где  $c$  — параметр,  $c_0 \leq c \leq c_1$ , то уравнение (5.17) должно было бы обращаться в тождество в силу уравнения (5.19) при любом  $c$ . Но так как уравнение (5.17) не содержит  $c$ , то оно не может обращаться в тождество в силу уравнения (5.19), содержащего  $c$ , и, следовательно, должно быть тождеством по отношению ко всем переменным  $x_1, x_2, \dots, x_n, z$ , меняющимся независимо.

Последнее утверждение допускает простую геометрическую интерпретацию. Говоря, что уравнение (5.17) обращается в тождество в силу уравнения  $u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$ , мы утверждаем, что уравнение (5.17) обращается в тождество в точках поверхности  $u = 0$ , но может не обращаться в тождество в других точках пространства  $x_1, x_2, \dots, x_n, z$ . Если же уравнение (5.17), не содержащее  $c$ , обращается в тождество в силу уравнения  $u = c$ , где  $c$  — непрерывно меняющийся параметр, то это означает, что уравнение (5.17) обращается в тождество на всех непересекающихся и заполняющих некоторую часть  $D$  пространства  $x_1, x_2, \dots, x_n, z$  поверхностях  $u = c$ ,  $c_0 \leq c \leq c_1$  и, следовательно, уравнение (5.17) обращается в тождество в области  $D$  при независимо изменяющихся  $x_1, x_2, \dots, x_n, z$ .

В конкретных задачах обычно требуется найти решение уравнения (5.15), удовлетворяющее еще каким-нибудь начальным условиям, и так как специальных решений в указанном выше смысле сравнительно мало, то они лишь в совершенно исключительных случаях будут удовлетворять поставленным начальным условиям и поэтому их лишь в редких случаях приходится принимать во внимание.

**Пример 6.** Проинтегрировать уравнение

$$\sum_{l=1}^n x_l \frac{\partial z}{\partial x_l} = pz, \quad (5.20)$$

где  $p$  — постоянная.

Система уравнений

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{dz}{pz}$$

имеет следующие независимые интегралы:

$$\frac{x_1}{x_n} = c_1, \quad \frac{x_2}{x_n} = c_2, \quad \dots, \quad \frac{x_{n-1}}{x_n} = c_{n-1}, \quad \frac{z}{x_n^p} = c_n.$$

Следовательно, решение  $z$  исходного уравнения определяется из уравнения

$$\Phi \left( \frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{z}{x_n^p} \right) = 0.$$

откуда

$$z = x_n^p \psi \left( \frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n} \right).$$

Итак, решением является произвольная однородная функция  $p$ -й степени однородности.

Можно доказать, что уравнение (5.20) не имеет специальных интегралов и, следовательно, теорема Эйлера об однородных функциях обратима — уравнению (5.20) удовлетворяют только однородные функции степени однородности  $p$ .

Понятие характеристики распространяется на системы квазилинейных уравнений следующего специального вида:

$$\begin{aligned} P(x, y, u, v) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, u, v) \frac{\partial u}{\partial y} &= R_1(x, y, u, v), \\ P(x, y, u, v) \frac{\partial v}{\partial x} + Q(x, y, u, v) \frac{\partial v}{\partial y} &= R_2(x, y, u, v). \end{aligned} \quad (\Gamma)$$

*Характеристиками* такой системы называются векторные линии векторного поля в четырехмерном пространстве

$$F = P(x, y, u, v) \mathbf{i} + Q(x, y, u, v) \mathbf{j} + R_1(x, y, u, v) \mathbf{k}_1 + R_2(x, y, u, v) \mathbf{k}_2,$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$  — единичные векторы, направленные соответственно по осям координат  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Ou$  и  $Ov$ .

Характеристики определяются системой уравнений

$$\frac{dx}{P(x, y, u, v)} = \frac{dy}{Q(x, y, u, v)} = \frac{du}{R_1(x, y, u, v)} = \frac{dv}{R_2(x, y, u, v)}. \quad (\Delta)$$

Система уравнений  $(\Gamma)$  в векторной записи имеет вид

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1) = 0 \quad \text{и} \quad (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2) = 0,$$

где  $\mathbf{N}_1$  и  $\mathbf{N}_2$  — векторы с координатами  $\left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1, 0 \right)$  и  $\left( \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, 0, -1 \right)$ , направленные по нормальям к искомым трехмерным цилиндрическим поверхностям соответственно  $u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$ .

Следовательно, с геометрической точки зрения интегрирование системы  $(\Gamma)$  сводится к нахождению двух трехмерных цилиндрических поверхностей  $u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$ , нормали к которым в точках пересечения этих поверхностей ортогональны к векторным линиям.

Очевидно, что это условие будет выполнено, если двухмерная поверх-

ность  $S$ , по которой, вообще говоря, пересекаются трехмерные цилиндрические поверхности  $u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$ , будет состоять из векторных линий, так как эти векторные линии будут лежать одновременно на поверхностях  $u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$  и, следовательно, будут ортогональны векторам  $N_1$  и  $N_2$ . Взяв какие-нибудь два независимых относительно  $u$  и  $v$  первых интеграла  $\Phi_1(x, y, u, v) = 0$  и  $\Phi_2(x, y, u, v) = 0$  системы (Д), другими словами, взяв две трехмерные векторные поверхности, мы, вообще говоря, в их пересечении получим двухмерную поверхность  $S$ , состоящую из векторных линий, так как если некоторая точка принадлежит одновременно векторным поверхностям  $\Phi_1(x, y, u, v) = 0$  и  $\Phi_2(x, y, u, v) = 0$ , то и векторная линия, проходящая через эту точку, лежит в каждой из этих поверхностей.

Разрешая систему уравнений  $\Phi_1(x, y, u, v) = 0$  и  $\Phi_2(x, y, u, v) = 0$  относительно  $u$  и  $v$ , получим уравнения двух трехмерных цилиндрических поверхностей  $u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$ , пересекающихся по той же двухмерной поверхности  $S$ , состоящей из векторных линий. Следовательно, найденные функции  $u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$  будут решениями исходной системы.

Решение системы (Г), зависящее от двух произвольных функций, можно найти, применяя тот же метод, но взяв первые интегралы системы (Д) в наиболее общем виде:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(\psi_1(x, y, u, v), \psi_2(x, y, u, v), \psi_3(x, y, u, v)) &= 0, \\ \Phi_2(\psi_1(x, y, u, v), \psi_2(x, y, u, v), \psi_3(x, y, u, v)) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (E)$$

где  $\psi_1(x, y, u, v)$ ,  $\psi_2(x, y, u, v)$  и  $\psi_3(x, y, u, v)$  — независимые первые интегралы системы (Д), а  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — произвольные функции (см. стр. 249).

Уравнения (E), если сложные функции  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  независимы относительно  $u$  и  $v$ , определяют решения  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  системы (Г) как неявные функции  $x$  и  $y$ , зависящие от выбора произвольных функций  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ .

### § 3. Уравнения Пфаффа

В § 2 мы рассматривали две задачи, естественно возникающие при изучении непрерывного векторного поля

$$F = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k.$$

Это — задачи о нахождении векторных линий и векторных поверхностей.

Почти так же часто возникает задача о нахождении семейства поверхностей  $U(x, y, z) = c$ , ортогональных к векторным линиям. Уравнение таких поверхностей имеет вид  $(F \cdot t) = 0$ , где  $t$  — вектор, лежащий в касательной плоскости к искомым поверхностям:

$$t = i dx + j dy + k dz,$$

или в развернутом виде

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = 0. \quad (5.21)$$

Уравнения вида (5.21) называются *уравнениями Пфаффа*.

Если поле  $F = Pi + Qj + Rk$  потенциально:

$$F = \text{grad } U, \text{ т. е. } P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z},$$

то искомыми поверхностями являются поверхности уровня  $U(x, y, z) = c$  потенциальной функции  $U$ . В этом случае нахождение искоемых поверхностей не представляет затруднений, так как

$$U = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P dx + Q dy + R dz,$$

где криволинейный интеграл берется по любому пути между выбранной фиксированной точкой  $(x_0, y_0, z_0)$  и точкой с переменными координатами  $(x, y, z)$ , например, по ломаной, состоящей из прямолинейных отрезков, параллельных осям координат.

Если же поле  $F$  не потенциально, то в некоторых случаях можно подобрать скалярный множитель  $\mu(x, y, z)$ , после умножения на который вектора  $F$  поле становится потенциальным.

Если такой множитель существует, то  $\mu F = \text{grad } U$  или

$$\mu P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \mu Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \mu R = \frac{\partial U}{\partial z}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}, \quad \frac{\partial(\mu Q)}{\partial z} = \frac{\partial(\mu R)}{\partial y}, \quad \frac{\partial(\mu R)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial z},$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{1}{\mu} \left( Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} &= \frac{1}{\mu} \left( R \frac{\partial \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{1}{\mu} \left( P \frac{\partial \mu}{\partial z} - R \frac{\partial \mu}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Умножая первое из этих тождеств на  $R$ , второе на  $P$ , третье на  $Q$  и складывая почленно все три тождества, получим необходимое условие существования интегрирующего множителя  $\mu$ :

$$R \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + P \left( \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) + Q \left( \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 0$$

или  $(F \cdot \text{rot } F) = 0$ , где вектор  $\text{rot } F$  — вихрь поля — определяется равенством

$$\text{rot } F = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k.$$

Если это условие, называемое условием *полной интегрируемости* уравнения (5.21), не выполнено, то не существует семейства поверх-

ностей  $U(x, y, z) = c$ , ортогональных векторным линиям поля  $F(x, y, z)$ .

Действительно, если бы такое семейство  $U(x, y, z) = c$  существовало, то левая часть уравнения (5.21) могла бы отличаться от

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

лишь некоторым множителем  $\mu(x, y, z)$ , который и был бы интегрирующим множителем уравнения (5.21).

Итак, для существования семейства поверхностей  $U(x, y, z) = c$ , ортогональных векторным линиям векторного поля  $F$ , необходимо, чтобы векторы  $F$  и  $\text{rot } F$  были бы ортогональны, т. е.  $(F \cdot \text{rot } F) \equiv 0$ .

**З а м е ч а н и е.** Условие  $(F \cdot \text{rot } F) = 0$  называется также условием интегрируемости уравнения Пфаффа  $P dx + Q dy + R dz = 0$  одним соотношением  $U(x, y, z) = c$ .

Иногда требуется определить не поверхности, ортогональные векторным линиям поля  $F$ , а линии, обладающие тем же свойством, другими словами, надо проинтегрировать уравнение Пфаффа не одним, а двумя соотношениями:

$$U_1(x, y, z) = 0 \text{ и } U_2(x, y, z) = 0. \quad (5.22)$$

Для нахождения таких линий можно одно из уравнений (5.22) задать произвольно, например

$$U_1(x, y, z) = 0, \quad (5.23)$$

и, исключив из уравнения (5.21) с помощью уравнения (5.23) одно из переменных, например  $z$ , получим дифференциальное уравнение вида

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0,$$

интегрируя которое, найдем искомые линии на произвольно выбранной поверхности  $U_1(x, y, z) = 0$ .

Покажем, что условие  $(F \cdot \text{rot } F) = 0$  является не только необходимым, но и достаточным для существования семейства поверхностей, ортогональных векторным линиям.

Заметим, что на искомым поверхностях  $U(x, y, z) = c$  должно обращаться в тождество уравнение

$$P dx + Q dy + R dz = 0$$

или, что то же самое, на этих поверхностях криволинейный интеграл

$$\int_{\zeta} P dx + Q dy + R dz \quad (5.24)$$

должен быть равен нулю по любому пути (в том числе и по незамкнутым путям).

Рассмотрим всевозможные вихревые поверхности, т. е. векторные поверхности поля  $\text{rot } \mathbf{F}$ . Очевидно, что в силу теоремы Стокса

$$\int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_D \int \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

где  $d\mathbf{r} = i dx + j dy + k dz$ , и интеграл (5.24) по любому замкнутому пути на вихревой поверхности равен нулю (так как скалярное произведение единичного вектора нормали к поверхности  $\mathbf{n}$  и вектора  $\text{rot } \mathbf{F}$  равно нулю). Выберем теперь среди вихревых поверхностей те, на которых все интегралы

$$\int_L \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_L P dx + Q dy + R dz$$

по незамкнутым путям также равны нулю. Для построения такой поверхности, проходящей через заданную точку  $M(x_0, y_0, z_0)$ , про-

ведем через эту точку  $M$  какую-нибудь линию, ортогональную векторным линиям поля  $\mathbf{F}$ . Такие линии определяются уравнением

$$P dx + Q dy + R dz = 0, \quad (5.21)$$

к которому добавлено уравнение произвольной проходящей через точку  $M$  поверхности  $z = f(x, y)$  (чаще всего уравнение этой поверхности берут в виде  $z = f_1(x)$  или  $z = f_2(y)$  или даже в виде  $z = a$ , где  $a$  — постоянная). Подставляя  $z = f(x, y)$  в (5.21), получим обыкновенное уравнение вида

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0,$$

интегрируя которое и учитывая начальное условие  $y(x_0) = y_0$ , получим искомую кривую  $l$ , проходящую через точку  $M(x_0, y_0, z_0)$  и ортогональную векторным линиям (рис. 5.2).

Если эта линия не является линией вихря, то, проводя через каждую точку линии  $l$  линию вихря, получим искомую поверхность  $S$ , ортогональную векторным линиям поля  $\mathbf{F}$ .

Действительно, взяв любую незамкнутую кривую  $L$  на поверхности  $S$  (рис. 5.2) и проведя через ее граничные точки вихревые линии до пересечения с кривой  $l$  в точках  $p_1$  и  $p_2$ , получим замкнутый контур, состоящий из отрезка линии  $l$  между точками  $p_1$  и  $p_2$ , кривой  $L$  и двух вихревых линий.

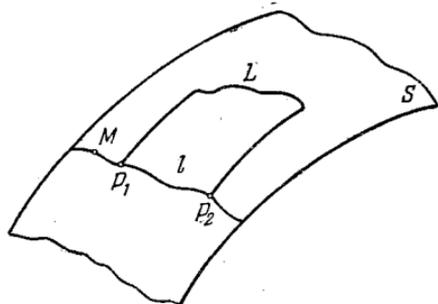


Рис. 5.2.

Криволинейный интеграл  $\int_C P dx + Q dy + R dz$ , взятый по этому замкнутому контуру  $C$ , равен нулю, так как контур лежит на вихревой поверхности, причем тот же интеграл, взятый на отрезке дуги  $l$ , и по отрезкам вихревых линий равен нулю, так как дуга  $l$  и вихревые линии ортогональны векторным линиям поля  $F$  (вихревые линии ортогональны векторным линиям поля  $F$  в силу условия  $(F \cdot \text{rot } F) = 0$ ). Следовательно, интеграл  $\int_L P dx + Q dy + R dz$  по произвольно выбранному нами незамкнутому пути  $L$  равен нулю, т. е. поверхность  $S$  является интегральной поверхностью уравнения (5.21), проходящей через заданную точку  $M$ .

Этот метод доказательства достаточности условия  $(F \cdot \text{rot } F) = 0$  для существования семейства поверхностей, ортогональных векторным линиям поля  $F$ , одновременно указывает путь, правда не кратчайший, для нахождения этих поверхностей.

Пример 1.

$$z dx + (x - y) dy + zy dz = 0.$$

Условие  $(F \cdot \text{rot } F) = 0$ , где  $F = z i + (x - y) j + yz k$ , не выполнено, следовательно, рассматриваемое уравнение не интегрируется одним соотношением.

Пример 2.

$$(6x + yz) dx + (xz - 2y) dy + (xy + 2z) dz = 0.$$

Так как  $\text{rot } F = 0$ , где  $F = (6x + yz) i + (xz - 2y) j + (xy + 2z) k$ , то  $F = \text{grad } U$ , где

$$U = \int_{(0, 0, 0)}^{(x, y, z)} (6x + yz) dx + (xz - 2y) dy + (xy + 2z) dz.$$

В качестве пути интегрирования выбираем ломаную, звенья которой параллельны осям координат. Интегрируя, получаем  $U = 3x^2 - y^2 + z^2 + xyz$ , и следовательно, искомым интегралом является

$$3x^2 - y^2 + z^2 + xyz = c.$$

Пример 3.

$$yz dx + 2xz dy + xy dz = 0,$$

$$F = yz i + 2xz j + xy k, \quad \text{rot } F = -x i + z k.$$

Условие интегрируемости  $(F \cdot \text{rot } F) = 0$  выполнено. Находим на какой-нибудь поверхности, например на плоскости  $z = 1$ , кривые, ортогональные векторным линиям:

$$z = 1 \quad y dx + 2x dy = 0, \quad xy^2 = a.$$

Проводим через кривые семейства  $z = 1, xy^2 = a$  вихревые поверхности, для чего интегрируем систему уравнений вихревых линий

$$\frac{dx}{-x} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{z}, \quad y = c_1, \quad xz = c_2.$$

Исключая  $x$ ,  $y$  и  $z$  из уравнений  $z = 1$ ,  $xy^2 = a$ ,  $y = c_1$ ,  $xz = c_2$ , получаем  $c_1^2 c_2 = a$ . Следовательно, искомым интеграл исходного уравнения имеет вид  $xy^2z = a$ .

**Замечание.** Другой, обычно применяемый метод интегрирования уравнения Пфаффа

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = 0 \quad (5.21)$$

заключается в том, что временно считают  $z$  (или другую переменную) постоянной и интегрируют обыкновенное уравнение

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy = 0, \quad (5.25)$$

в котором  $z$  играет роль параметра.

Получив интеграл уравнения (5.25)

$$U(x, y, z) = c(z), \quad (5.26)$$

в котором произвольная постоянная может быть функцией параметра  $z$ , подбирают эту функцию  $c(z)$  так, чтобы удовлетворялось уравнение (5.21). Дифференцируя (5.26), получим

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \left[ \frac{\partial U}{\partial z} - c'(z) \right] dz = 0. \quad (5.27)$$

Коэффициенты при дифференциалах переменных в уравнениях (5.21) и (5.27) должны быть пропорциональными

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{Q} = \frac{\frac{\partial U}{\partial z} - c'(z)}{R}.$$

Из уравнения  $\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial U}{\partial z} - c'(z)}{R}$  можно определить  $c'(z)$ , так как можно доказать, что при выполнении условия  $(\mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{F}) = 0$  это уравнение содержит лишь  $z$ ,  $c'(z)$  и  $U(x, y, z) = c(z)$ .

#### § 4. Нелинейные уравнения первого порядка

Рассмотрим сначала случай, когда искомая функция зависит от двух независимых переменных. Уравнения в частных производных первого порядка с тремя переменными имеют вид

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad (5.28)$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Дифференциальное уравнение (5.28) в каждой точке  $(x, y, z)$  той области, в которой изменяются первые три аргумента, устанавливает

зависимость  $\varphi(p, q) = 0$  между числами  $p$  и  $q$ , определяющими направление нормали  $\mathbf{N}(p, q, -1)$  к искомым *интегральным поверхностям*  $z = z(x, y)$  уравнения (5.28).

Таким образом, направление нормали к искомым интегральным поверхностям в некоторой точке  $(x, y, z)$  не определяется точно, а лишь выделяется однопараметрическое семейство возможных направлений нормалей — некоторый конус допустимых направлений нормалей  $\mathbf{N}(p, q, -1)$ , где  $p$  и  $q$  удовлетворяют уравнению  $\varphi(p, q) = 0$  (рис. 5.3).

Следовательно, задача интегрирования уравнения (5.28) сводится к нахождению поверхностей  $z = z(x, y)$ , нормали к которым были бы в каждой точке направлены по одному из допустимых направлений конуса нормалей в этой точке.

Исходя из этой геометрической интерпретации, укажем метод нахождения интеграла уравнения (5.28),

зависящего от произвольной функции, если известен его интеграл  $\Phi(x, y, z, a, b) = 0$ , который зависит от двух параметров  $a$  и  $b$ .

Интеграл  $\Phi(x, y, z, a, b) = 0$  уравнения (5.28), зависящий от двух существенных произвольных постоянных  $a$  и  $b$ , называется *полным интегралом*.

Так как исходное дифференциальное уравнение (5.28) налагает ограничения лишь на направление нормалей к искомым интегральным поверхностям, то каждая поверхность, нормали к которой совпадают с нормальями к интегральным поверхностям в тех же точках, будет интегральной поверхностью. Следовательно, интегральными поверхностями будут огибающие двухпараметрического или однопараметрического семейства интегральных поверхностей, так как нормаль к огибающей совпадает с нормалью к одной из проходящих через ту же точку интегральных поверхностей семейства.

Огибающая двухпараметрического семейства интегральных поверхностей в предположении существования ограниченных частных производных  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ , не обращающихся в нуль одновременно, и существования производных  $\frac{\partial \Phi}{\partial a}$  и  $\frac{\partial \Phi}{\partial b}$  определяется уравнениями

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0. \quad (5.29)$$

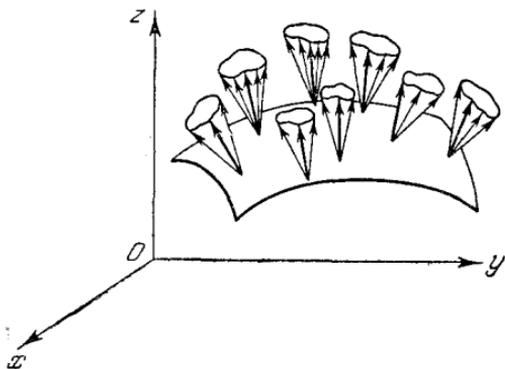


Рис. 5.3.

Выделяя из двухпараметрического семейства интегральных поверхностей  $\Phi(x, y, z, a, b) = 0$  произвольным способом однопараметрическое семейство, для чего считаем  $b$  произвольной дифференцируемой функцией параметра  $a$ , и находя огибающую однопараметрического семейства  $\Phi(x, y, z, a, b(a)) = 0$ , мы также получим интегральную поверхность. Огибающая этого однопараметрического семейства в предположении существования ограниченных производных функции  $\Phi$  по всем аргументам и не обращения в нуль одновременно производных  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}$  определяется уравнениями

$$\Phi(x, y, z, a, b(a)) = 0 \text{ и } \frac{\partial}{\partial a} \{\Phi(x, y, z, a, b(a))\} = 0$$

или

$$\Phi(x, y, z, a, b(a)) = 0 \text{ и } \frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} b'(a) = 0. \quad (5.30)$$

Эти два уравнения определяют множество интегральных поверхностей, зависящее от выбора произвольной функции  $b = b(a)$ . Наличие в уравнениях (5.30) произвольной функции, конечно, не дает права утверждать, что уравнения (5.30) определяют множество всех без исключения интегральных поверхностей исходного уравнения (5.28); например, это множество, вообще говоря, не содержит интегральной поверхности, определяемой уравнениями (5.29), но все же наличие в уравнениях (5.30) произвольной функции обычно уже позволяет выделить интегральную поверхность, удовлетворяющую заданным начальным условиям Коши (см. стр. 242).

Итак, зная полный интеграл, уже можно построить интеграл, зависящий от произвольной функции.

Нахождение полного интеграла во многих случаях не вызывает затруднений, например:

1) Если уравнение (5.28) имеет вид  $F(p, q) = 0$  или  $p = \varphi(q)$ , то, полагая  $q = a$ , где  $a$  — произвольная постоянная, получаем

$$p = \varphi(a), \quad dz = p dx + q dy = \varphi(a) dx + a dy,$$

откуда

$$z = \varphi(a) x + a y + b$$

— полный интеграл.

2) Если уравнение (5.28) может быть приведено к виду  $\varphi_1(x, p) = \varphi_2(y, q)$ , то, полагая  $\varphi_1(x, p) = \varphi_2(y, q) = a$ , где  $a$  — произвольная постоянная, и разрешая, если это возможно, относительно  $p$  и  $q$ , получим  $p = \psi_1(x, a)$ ,  $q = \psi_2(y, a)$ ,

$$dz = p dx + q dy = \psi_1(x, a) dx + \psi_2(y, a) dy,$$

$$z = \int \psi_1(x, a) dx + \int \psi_2(y, a) dy + b$$

— полный интеграл.

3) Если уравнение (5.28) имеет вид  $F(z; p, q) = 0$ , то, полагая  $z = z(u)$ , где  $u = ax + y$ , получим

$$F\left(z, a, \frac{dz}{du}, \frac{dz}{du}\right) = 0.$$

Интегрируя это обыкновенное уравнение, получим  $z = \Phi(u, a, b)$ , где  $b$  — произвольная постоянная, или

$$z = \Phi(ax + y, a, b)$$

— полный интеграл.

4) Если уравнение (5.28) имеет вид, напоминающий уравнение Клеро:

$$z = px + qy + \varphi(p, q).$$

то, как нетрудно проверить непосредственной подстановкой, полным интегралом является

$$z = ax + by + \varphi(a, b).$$

Пример 1. Найти полный интеграл уравнения  $p = 3q^3$ .

$$q = a, p = 3a^3, dz = 3a^3 dx + a dy, \\ z = 3a^3 x + ay + b.$$

Пример 2. Найти полный интеграл уравнения  $pq = 2xy$ .

$$\frac{p}{x} = \frac{2y}{q} = a, p = ax, q = \frac{2y}{a}, dz = ax dx + \frac{2y}{a} dy, \\ z = \frac{ax^2}{2} + \frac{y^2}{a} + b.$$

Пример 3. Найти полный интеграл уравнения  $z^3 = pq^2$ .

$$z = z(u), \text{ где } u = ax + y, p = a \frac{dz}{du}, q = \frac{dz}{du},$$

$$z^3 = a \left(\frac{dz}{du}\right)^3 \text{ или } \frac{dz}{du} = a_1 z, \text{ где } a_1 = a^{-\frac{1}{3}},$$

$$\ln|z| = a_1 u + \ln b, z = be^{a_1 u},$$

$$z = be^{a_1 \left(\frac{x}{a^3} + y\right)}$$

Пример 4. Найти полный интеграл уравнения

$$z = px + qy + p^2 + q^2.$$

Полным интегралом является

$$z = ax + by + a^2 + b^2.$$

В более сложных случаях применяется один из общих методов нахождения полного интеграла уравнения

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

Наиболее простая идея лежит в основе *метода Лагранжа и Шарпи*. По этому методу к уравнению

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (5.28)$$

подбирают уравнение

$$U(x, y, z, p, q) = a \quad (5.31)$$

так, чтобы определяемые из системы уравнений (5.28) и (5.31) функции  $p = p(x, y, z, a)$  и  $q = q(x, y, z, a)$  приводили бы к интегрируемому одним соотношением уравнению Пфаффа

$$dz = p(x, y, z, a)dx + q(x, y, z, a)dy \quad (5.32)$$

Тогда интеграл уравнения Пфаффа  $\Phi(x, y, z, a, b) = 0$ , где  $b$  — произвольная постоянная, появляющаяся при интегрировании уравнения (5.32), будет полным интегралом уравнения (5.28). Функция  $U$  определяется из условия интегрируемости уравнения (5.32) одним соотношением

$$(\mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{F}) = 0, \text{ где } \mathbf{F} = p(x, y, z, a)\mathbf{i} + q(x, y, z, a)\mathbf{j} - \mathbf{k},$$

т. е. в развернутом виде из уравнения

$$p \frac{\partial q}{\partial z} - q \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (5.33)$$

Производные  $\frac{\partial q}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial q}{\partial z}$  вычисляются дифференцированием тождеств

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z, p, q) &= 0, \\ U(x, y, z, p, q) &= a. \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

в которых  $p$  и  $q$  рассматриваются как функции  $x$ ,  $y$  и  $z$ , определяемые системой (5.34).

Дифференцируя по  $x$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\partial q}{\partial x} = - \frac{\frac{D(F, U)}{D(p, x)}}{\frac{D(F, U)}{D(p, q)}}.$$

Аналогично, дифференцируя (5.34) по  $y$  и определяя  $\frac{\partial p}{\partial y}$ , получим

$$\frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{\frac{D(F, U)}{D(y, q)}}{\frac{D(F, U)}{D(p, q)}}.$$

Дифференцируя (5.34) по  $z$  и разрешая относительно  $\frac{\partial p}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial q}{\partial z}$ , будем иметь

$$\frac{\partial p}{\partial z} = - \frac{\frac{D(F, U)}{D(z, q)}}{\frac{D(F, U)}{D(p, q)}},$$

$$\frac{\partial q}{\partial z} = - \frac{\frac{D(F, U)}{D(p, z)}}{\frac{D(F, U)}{D(p, q)}}.$$

Подставляя вычисленные производные в условие интегрируемости (5.33) и умножая на определитель  $\frac{D(F, U)}{D(p, q)}$ , который мы считаем отличным от нуля, получим

$$p \left( \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial U}{\partial z} \right) + q \left( \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial U}{\partial z} \right) +$$

$$+ \left( \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0$$

или

$$\frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial U}{\partial y} + \left( p \frac{\partial F}{\partial p} + q \frac{\partial F}{\partial q} \right) \frac{\partial U}{\partial z} -$$

$$- \left( \frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{\partial U}{\partial p} - \left( \frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{\partial U}{\partial q} = 0. \quad (5.35)$$

Для определения функции  $U$  мы получили однородное линейное уравнение (5.35), которое интегрируется методом, указанным в § 2 этой главы: составляется уравнение характеристик.

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dz}{p \frac{\partial F}{\partial p} + q \frac{\partial F}{\partial q}} = - \frac{dp}{\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z}} = - \frac{dq}{\frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z}}, \quad (5.36)$$

находится хотя бы один первый интеграл системы (5.36)

$$U_1(x, y, z, p, q) = a,$$

и если функции  $F$  и  $U_1$  независимы по отношению к  $p$  и  $q$ , т. е.  $\frac{D(F, U_1)}{D(p, q)} \neq 0$ , то первый интеграл  $U_1(x, y, z, p, q)$  и будет искомым решением уравнения (5.35).

Следовательно, определяя  $p = p(x, y, z, a)$  и  $q = q(x, y, z, a)$  из системы уравнений

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

$$U_1(x, y, z, p, q) = a$$

и подставляя в

$$dz = p(x, y, z, a) dx + q(x, y, z, a) dy,$$

получим интегрируемое одним соотношением уравнение Пфаффа, решая которое, находим полный интеграл исходного уравнения

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0.$$

Пример 5. Найти полный интеграл уравнения

$$yzp^2 - q = 0. \quad (5.37)$$

Система (5.36) имеет вид

$$\frac{dx}{2pyz} = -dy = \frac{dz}{2p^2yz - q} = -\frac{dp}{yp^3} = -\frac{dp}{zp^2 + yp^2q}.$$

Воспользовавшись исходным уравнением, упрощаем знаменатель третьего отношения и получаем интегрируемую комбинацию  $\frac{dz}{p^2yz} = -\frac{dp}{p^3y}$ , откуда

$$p = \frac{a}{z}. \quad (5.38)$$

Из уравнений (5.37) и (5.38) находим  $p = \frac{a}{z}$ ,  $q = \frac{a^2y}{z}$ , откуда  $dz = \frac{a}{z} dx + \frac{a^2y}{z} dy$ . Умножая на  $2z$  и интегрируя, находим полный интеграл исходного уравнения  $z^2 = 2ax + a^2y^2 + b$ .

Зная полный интеграл  $\Phi(x, y, z, a, b) = 0$  уравнения

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

можно, вообще говоря, решить основную начальную задачу (см. стр. 242) или даже более общую задачу об определении интегральной поверхности, проходящей через заданную кривую,

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (5.39)$$

Определим функцию  $b = b(a)$  так, чтобы огибающая однопараметрического семейства

$$\Phi(x, y, z, a, b(a)) = 0, \quad (5.40)$$

определяемая уравнениями (5.40) и

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} b'(a) = 0, \quad (5.41)$$

проходила бы через заданную кривую (5.39).

В точках заданной кривой оба уравнения (5.40) и (5.41) по  $t$  обращаются в тождества:

$$\Phi(x(t), y(t), z(t), a, b(a)) = 0 \quad (5.42)$$

и

$$\frac{\partial \Phi(x(t), y(t), z(t), a, b(a))}{\partial a} + \frac{\partial \Phi(x(t), y(t), z(t), a, b(a))}{\partial b} b'(a) = 0. \quad (5.43)$$

Однако определить из этих уравнений функцию  $b = b(a)$  было бы довольно сложно. Значительно проще можно определить эту функцию из системы уравнений (5.42) и

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z'(t) = 0, \quad (5.44)$$

или в краткой записи

$$(\mathbf{N} \cdot \mathbf{t}) = 0,$$

где  $\mathbf{t}$  — вектор касательной к заданной кривой

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (5.39)$$

а  $\mathbf{N}$  — вектор нормали к поверхности  $\Phi = 0$ , а следовательно, и к искомой огибающей в соответствующих точках. Условие (5.44) геометрически очевидно, так как искомая поверхность должна проходить через заданную кривую и, следовательно, касательная к этой кривой должна лежать в касательной плоскости к искомой поверхности.

**Пример 6.** Найти интегральную поверхность уравнения  $z = px + qy + \frac{pq}{4}$ , проходящую через кривую  $y = 0, z = x^2$ .

Полный интеграл этого уравнения (см. случай 4 на стр. 263) имеет вид  $z = ax + by + \frac{ab}{4}$ . Уравнение заданной кривой можно написать в параметрической форме  $x = t, y = 0, z = t^2$ .

Для определения функции  $b = b(a)$  составляем систему уравнений (5.42) и (5.44), которые в данном случае имеют вид  $t^2 = at + \frac{ab}{4}$  и  $2t = a$ , откуда  $b = -a, z = a(x - y) - \frac{a^2}{4}$ . Огибающая этого семейства определяется уравнениями

$$z = a(x - y) - \frac{a^2}{4}$$

и

$$x - y - \frac{a}{2} = 0.$$

Исключая  $a$ , получим  $z = (x - y)^2$ .

Если система (5.36) (стр. 265) легко интегрируется, то для решения поставленной обобщенной задачи Коши очень удобен излагаемый ниже *метод характеристик — метод Коши*.

*Интегральную поверхность*  $z = z(x, y)$  уравнения

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

проходящую через заданную кривую

$$x_0 = x_0(s), \quad y_0 = y_0(s), \quad z_0 = z_0(s),$$

можно, как и для квазилинейного уравнения (см. стр. 247), представлять себе состоящей из точек, лежащих на некотором однопараметрическом семействе кривых

$$\begin{aligned} x &= x(t, s), & y &= y(t, s), \\ z &= z(t, s), \end{aligned}$$

где  $s$  — параметр семейства, называемых *характеристиками*.

Вначале мы найдем семейство характеристик, зависящее от нескольких параметров, а затем, проводя характеристики через точки кривой

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0(s), & y_0 &= y_0(s), \\ z_0 &= z_0(s) \end{aligned}$$

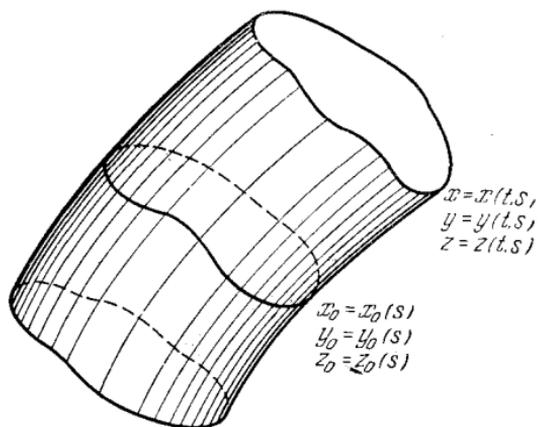


Рис. 5.4.

и удовлетворяя еще некоторым условиям, выделим однопараметрическое семейство кривых, в которых параметром можно считать  $s$ :

$$x = x(t, s), \quad y = y(t, s), \quad z = z(t, s)$$

(рис. 5.4). Множество точек, лежащих на этих кривых, и образует искомую интегральную поверхность. Такова в кратких чертах идея метода Коши.

Пусть  $z = z(x, y)$  является интегральной поверхностью уравнения

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \quad (5.45)$$

Тогда, дифференцируя тождество (5.45) по  $x$  и по  $y$ , получим

$$F_x + pF_z + F_p \frac{\partial p}{\partial x} + F_q \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

$$F_y + qF_z + F_p \frac{\partial p}{\partial y} + F_q \frac{\partial q}{\partial y} = 0,$$

или, так как  $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$ , будем иметь

$$\left. \begin{aligned} F_x + F_z p + F_p \frac{\partial p}{\partial x} + F_q \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ F_y + F_z q + F_p \frac{\partial q}{\partial x} + F_q \frac{\partial q}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.46)$$

Уравнения характеристик для системы уравнений (5.46), квазилинейной относительно  $p$  и  $q$ , причем  $z$  считается известной функцией от  $x$  и  $y$ , имеют вид (см. стр. 254)

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_z} = -\frac{dq}{F_y + qF_z} = dt. \quad (5.47)$$

Так как  $z$  связано с  $p$  и  $q$  уравнением

$$dz = p dx + q dy, \quad (5.48)$$

то вдоль характеристики

$$\frac{dz}{dt} = p \frac{dx}{dt} + q \frac{dy}{dt} = pF_p + qF_q$$

или

$$\frac{dz}{pF_p + qF_q} = dt, \quad (5.49)$$

что дает возможность дополнить систему (5.47) еще одним уравнением (5.49).

Итак, в предположении, что  $z = z(x, y)$  является решением уравнения (5.45), приходим к системе

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_z} = -\frac{dq}{F_y + qF_z} = dt. \quad (5.50)$$

Из уравнений (5.50) можно, не зная решения  $z = z(x, y)$  уравнения (5.45), найти функции  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ ,  $p = p(t)$ ,  $q = q(t)$ , т. е. можно найти кривые

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

называемые *характеристиками*, и в каждой точке характеристики найти числа  $p = p(t)$  и  $q = q(t)$ , определяющие направление плоскости

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y). \quad (5.51)$$

Характеристика вместе с отнесенной к каждой ее точке плоскостью (5.51) называется *характеристической полосой*.

Покажем, что из характеристик может быть образована искомая интегральная поверхность уравнения  $F(x, y, z, p, q) = 0$ .

Прежде всего заметим, что вдоль интегральной кривой системы (5.50) функция  $F$  сохраняет постоянное значение

$$F(x, y, z, p, q) = c,$$

другими словами, функция  $F(x, y, z, p, q)$  является первым интегралом системы (5.50).

Действительно, вдоль интегральной кривой системы (5.50)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(x, y, z, p, q) &= F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} + F_p \frac{dp}{dt} + F_q \frac{dq}{dt} = \\ &= F_x F_p + F_y F_q + F_z (pF_p + qF_q) - F_p (F_x + pF_z) - F_q (F_y + qF_z) \equiv 0, \end{aligned}$$

следовательно, вдоль интегральной кривой системы (5.50)

$$F(x, y, z, p, q) = c, \text{ где } c = F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0).$$

Для того чтобы вдоль интегральных кривых системы (5.50) удовлетворялось уравнение  $F(x, y, z, p, q) = 0$ , надо начальные значения  $x_0(s)$ ,  $y_0(s)$ ,  $z_0(s)$ ,  $p_0(s)$ ,  $q_0(s)$  выбирать так, чтобы они удовлетворяли уравнению

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0.$$

Интегрируя систему (5.50) при начальных значениях  $x_0 = x_0(s)$ ,  $y_0 = y_0(s)$ ,  $z_0 = z_0(s)$ ,  $p_0 = p_0(s)$ ,  $q_0 = q_0(s)$ , удовлетворяющих уравнению  $F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$ , получим  $x = x(t, s)$ ,  $y = y(t, s)$ ,  $z = z(t, s)$ ,  $p = p(t, s)$ ,  $q = q(t, s)$ .

При фиксированном  $s$  будем иметь одну из характеристик

$$x = x(t, s), \quad y = y(t, s), \quad z = z(t, s),$$

меняя  $s$ , получим некоторую поверхность. В каждой точке этой поверхности при  $p = p(t, s)$ ,  $q = q(t, s)$  уравнение  $F(x, y, z, p, q) = 0$  удовлетворяется, но надо еще выяснить, будет ли при этом  $p = \frac{\partial z}{\partial x}$  и  $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ , или, что то же самое, будет ли  $dz = p dx + q dy$ , или

$$dz = p \left( \frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial x}{\partial t} dt \right) + q \left( \frac{\partial y}{\partial s} ds + \frac{\partial y}{\partial t} dt \right) = \frac{\partial z}{\partial s} ds + \frac{\partial z}{\partial t} dt,$$

что эквивалентно двум условиям:

$$p \frac{\partial x}{\partial s} + q \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial s} = 0, \quad (5.52)$$

$$p \frac{\partial x}{\partial t} + q \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial t} = 0. \quad (5.53)$$

Второе из этих уравнений, очевидно, обращается в тождество, так как при составлении системы (5.50) мы уже требовали, чтобы вдоль характеристики  $dz = p dx + q dy$ . Впрочем, в этом легко убедиться и непосредственно, если принять во внимание, что, в силу системы (5.50),

$$\frac{\partial x}{\partial t} = F_p, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = F_q, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = pF_p + qF_q$$

(в (5.50) вместо  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\frac{dz}{dt}$  мы писали  $\frac{dx}{ds}$ ,  $\frac{dy}{ds}$ ,  $\frac{dz}{ds}$ , так как считали  $s$  фиксированным).

Для того чтобы удовлетворялось уравнение (5.52), необходимо наложить еще некоторые ограничения на выбор начальных значений  $x_0(s)$ ,  $y_0(s)$ ,  $z_0(s)$ ,  $p_0(s)$ ,  $q_0(s)$ . Действительно, обозначим

$$p \frac{dx}{ds} + q \frac{dy}{ds} - \frac{dz}{ds} = U \quad (5.54)$$

и докажем, что  $U \equiv 0$ , если начальное значение  $U|_{t=0} = 0$ , откуда будет следовать, что если начальные функции

$$x_0(s), y_0(s), z_0(s), p_0(s), q_0(s)$$

выбрать так, что

$$p_0(s) x'_0(s) + q_0(s) y'_0(s) - z'_0(s) = 0,$$

то  $U \equiv 0$  для всех  $t$ .

Дифференцируя (5.54) по  $t$ , получим

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} + p \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} + q \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s} - \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s}$$

и, принимая во внимание результат дифференцирования тождества (5.53) по  $s$ :

$$\frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} + p \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} + \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} + q \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} - \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} = 0,$$

будем иметь

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t}$$

или, в силу уравнений (5.50),

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= -(F_x + pF_z) \frac{\partial x}{\partial s} - (F_y + qF_z) \frac{\partial y}{\partial s} - F_p \frac{\partial p}{\partial s} - F_q \frac{\partial q}{\partial s} = \\ &= -\left(F_x \frac{\partial x}{\partial s} + F_y \frac{\partial y}{\partial s} + F_z \frac{\partial z}{\partial s} + F_p \frac{\partial p}{\partial s} + F_q \frac{\partial q}{\partial s}\right) - \\ &\quad - F_z \left(p \frac{\partial x}{\partial s} + q \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial s}\right) = -\frac{\partial}{\partial s} \{F\} - F_z U = -F_z U, \end{aligned}$$

так как  $F \equiv 0$ , и следовательно, полная частная производная  $\frac{\partial}{\partial s} \{F\} = 0$ . Из уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -F_z U \quad (5.55)$$

находим  $U = U_0 e^{-\int_0^t F_z dt}$ . Следовательно, если  $U_0 = 0$ , то  $U \equiv 0$ , что, впрочем, следует и из единственности решения  $U \equiv 0$  линейного уравнения (5.55), удовлетворяющего условию  $U|_{t=0} = 0$ .

Итак, при интегрировании уравнения

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (5.45)$$

с начальными условиями  $x_0 = x_0(s)$ ,  $y_0 = y_0(s)$ ,  $z_0 = z_0(s)$  по методу Коши надо из уравнений

$$F(x_0(s), y_0(s), z_0(s), p_0(s), q_0(s)) = 0$$

и

$$p_0(s)x_0'(s) + q_0(s)y_0'(s) - z_0'(s) = 0$$

определить функции  $p_0 = p_0(s)$  и  $q_0 = q_0(s)$  и затем интегрировать систему уравнений

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_z} = -\frac{dq}{F_y + qF_z} = dt \quad (5.50)$$

с начальными условиями: при  $t = 0$

$$x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad z = z_0(s), \quad p = p_0(s), \quad q = q_0(s).$$

Три функции

$$x = x(t, s), \quad y = y(t, s), \quad z = z(t, s)$$

из решения системы (5.50) и дают в параметрическом виде уравнение искомой интегральной поверхности уравнения (5.45).

Все вышеизложенное легко обобщается на нелинейные уравнения в частных производных с произвольным числом независимых переменных

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \quad (5.56)$$

где

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Требуется определить интегральную  $n$ -мерную поверхность  $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$  уравнения (5.56), проходящую через заданную  $(n-1)$ -мерную поверхность:

$$x_{i0} = x_{i0}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5.57)$$

$$z_0 = z_0(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}).$$

Временно предположим, что нам известны начальные значения функций

$$p_{i0} = p_{i0}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad (5.58)$$

тогда, интегрируя вспомогательную систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{F_{p_1}} &= \frac{dx_2}{F_{p_2}} = \dots = \frac{dx_n}{F_{p_n}} = \frac{dz}{\sum_{i=1}^n p_i F_{p_i}} = \\ &= -\frac{dp_1}{F_{x_1} + p_1 F_z} = \dots = -\frac{dp_n}{F_{x_n} + p_n F_z} = dt \end{aligned} \quad (5.59)$$

с начальными условиями (5.57) и (5.58), получим

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(t, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}), \\ z &= z(t, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}), \\ p_i &= p_i(t, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}). \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5.60)$$

При фиксированных  $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$  уравнения (5.60) определяют в пространстве с координатами  $x_1, x_2, \dots, x_n, z$  кривые, называемые *характеристиками*, каждой точке которых отнесены еще числа  $p_i = p_i(t, s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$ , определяющие направление некоторых плоскостей

$$Z - z = \sum_{i=1}^n p_i (X_i - x_i). \quad (5.61)$$

Характеристики вместе с плоскостями (5.61) образуют так называемые *характеристические полосы*.

При изменении параметров  $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$  получаем  $(n-1)$ -параметрическое семейство характеристик

$$x_i = x_i(t, s_1, \dots, s_{n-1}), \quad z = z(t, s_1, \dots, s_{n-1}),$$

проходящих через заданную  $(n-1)$ -мерную поверхность (5.57).

Покажем, что при определенном выборе функций

$$p_{i0} = p_{i0}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

точки, лежащие на характеристиках семейства (5.60), образуют искривленную  $n$ -мерную интегральную поверхность. Следовательно, надо будет доказать, что при определенном выборе функций  $p_{i0}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$ :

$$1) F(x_1(t, s_1, \dots, s_{n-1}), \dots, x_n(t, s_1, \dots, s_{n-1}),$$

$$z(t, s_1, \dots, s_{n-1}), p_1(t, s_1, \dots, s_{n-1}), \dots, p_n(t, s_1, \dots, s_{n-1})) \equiv 0,$$

$$2) p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \text{ или, что то же самое,}$$

$$dz = \sum_{i=1}^n p_i dx_i.$$

Нетрудно проверить, что функция  $F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n)$  является первым интегралом системы уравнений (5.59). Действительно,

вдоль интегральных кривых системы (5.59)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) &\equiv \\ &\equiv \sum_{i=1}^n F_{x_i} \frac{dx_i}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} + \sum_{i=1}^n F_{p_i} \frac{dp_i}{dt} \equiv \\ &\equiv \sum_{i=1}^n F_{x_i} F_{p_i} + F_z \sum_{i=1}^n p_i F_{p_i} - \sum_{i=1}^n F_{p_i} (F_{x_i} + p_i F_z) \equiv 0 \end{aligned}$$

и, следовательно, вдоль интегральных кривых системы (5.59)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = c,$$

где  $c$  — постоянная, равная  $F(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, z_0, p_{10}, p_{20}, \dots, p_{n0})$ .

Для того чтобы функции (5.60) удовлетворяли уравнению (5.56) вдоль интегральных кривых системы (5.59), надо выбрать начальные значения  $p_{i0}, (s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$  так, чтобы

$$F(x_{10}(s_1, \dots, s_{n-1}), \dots, x_{n0}(s_1, \dots, s_{n-1}), z(s_1, \dots, s_{n-1}), p_1(s_1, \dots, s_{n-1}), \dots, p_n(s_1, \dots, s_{n-1})) = 0.$$

Остается проверить, что  $dz = \sum_{i=1}^n p_i dx_i$  или

$$\frac{\partial z}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial z}{\partial s_j} ds_j \equiv \sum_{i=1}^n p_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial x_i}{\partial s_j} ds_j \right).$$

Это тождество эквивалентно следующим:

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial t} \equiv 0 \quad (5.62)$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial s_j} \equiv 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n-1). \quad (5.63)$$

Справедливость тождества (5.62) становится очевидной, если принять во внимание, что, в силу системы (5.59),

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \sum_{i=1}^n p_i F_{p_i} \quad \text{и} \quad \frac{\partial x_i}{\partial t} = F_{p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(вместо  $\frac{dz}{dt}$  и  $\frac{dx_i}{dt}$  мы пишем частные производные, так как в системе (5.59) все  $s_j$  предполагались фиксированными).

Для доказательства тождеств (5.63), справедливых лишь при определенном выборе начальных значений  $p_{i0}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$ , обозначим:

$$U_j = \frac{\partial z}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial s_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$$

и, дифференцируя  $U_j$  по  $t$ , получим

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s_j} - \sum_{i=0}^n p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial s_j} - \sum_{i=0}^n \frac{\partial p_i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial s_j}. \quad (5.64)$$

Принимая во внимание результат дифференцирования тождества (5.62) по  $s_j$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s_j} - \sum_{i=0}^n p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial s_j} - \sum_{i=0}^n \frac{\partial p_i}{\partial s_j} \frac{\partial x_i}{\partial t} \equiv 0,$$

можно переписать уравнение (5.64) в виде

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} = \sum_{i=0}^n \frac{\partial p_i}{\partial s_j} \frac{\partial x_i}{\partial t} - \sum_{i=0}^n \frac{\partial p_i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial s_j}.$$

Воспользовавшись системой (5.59), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_j}{\partial t} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial s_j} F_{p_i} + \sum_{i=1}^n (F_{x_i} + p_i F_z) \frac{\partial x_i}{\partial s_j} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial s_j} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial s_j} \right) + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s_j} - \frac{\partial F}{\partial z} \left( \frac{\partial z}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial s_j} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial s_j} \{F\} - F_z U_j. \end{aligned}$$

Полная частная производная  $\frac{\partial}{\partial s_j} \{F\} = 0$ , так как  $F \equiv 0$ , и следовательно, функции  $U_j$  являются решениями линейных однородных уравнений  $\frac{\partial U_j}{\partial t} = -F_z U_j$ , которые имеют единственное решение  $U_j \equiv 0$ , если  $U_j|_{t=0} = 0$ . Следовательно, если начальные значения  $p_{i0}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) выбрать так, что  $U_j|_{t=0} = 0$  или  $\left( \frac{\partial z}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial s_j} \right)_{t=0} = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n-1$ ), то

$$\frac{\partial z}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial s_j} \equiv 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$$

и, следовательно, на поверхности (5.60)  $dz = \sum_{i=1}^n p_i dx_i$ , т. е.  $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Итак, для нахождения интегральной поверхности уравнения  $F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$ , проходящей через  $(n-1)$ -мерную поверхность

$$\begin{aligned} x_{i0} &= x_{i0}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) & (i = 1, 2, \dots, n), \\ z_0 &= z_0(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}), \end{aligned}$$

надо определить начальные значения  $p_{i0}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$  из уравнений

$$\left. \begin{aligned} F(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, z, p_{10}, p_{20}, \dots, p_{n0}) &= 0, \\ \frac{\partial z_0}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^n p_{i0} \frac{\partial x_{i0}}{\partial s_j} &= 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n-1), \end{aligned} \right\} \quad (5.65)$$

после чего, интегрируя систему (5.59) (стр. 273) с начальными условиями:

$$\left. \begin{aligned} x_{i0} &= x_{i0}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}), \\ z_0 &= z_0(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}), \\ p_{i0} &= p_{i0}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

получим:

$$x_i = x_i(t, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5.66)$$

$$z = z(t, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}), \quad (5.67)$$

$$p_i = p_i(t, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Уравнения (5.66) и (5.67) являются параметрическими уравнениями искомой интегральной поверхности.

Замечание. Мы предполагали, что система уравнений (5.65) разрешима относительно  $p_{i0}$ , а также, что система (5.59) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности.

Пример 1. Найти интегральную поверхность уравнения  $z = pq$ , проходящую через прямую  $x = 1, z = y$ .

Запишем уравнение прямой  $x = 1, z = y$  в параметрической форме  $x_0 = 1, y_0 = s, z_0 = s$ . Определяем  $p_0(s)$  и  $q_0(s)$  из уравнений (5.65):  $s = p_0 q_0, 1 - q_0 = 0$ , откуда  $p_0 = s, q_0 = 1$ . Интегрируем систему (5.59):

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} = dt,$$

$$p = c_1 e^t, \quad q = c_2 e^t, \quad x = c_2 e^t + c_3, \quad y = c_1 e^t + c_4, \quad z = c_1 c_2 e^{2t} + c_5.$$

Принимая во внимание, что при  $t = 0$

$$x = 1 \quad y = s, \quad z = s, \quad p = s, \quad q = 1,$$

получим

$$p = se^t, \quad q = e^t, \quad x = e^t, \quad y = se^t, \quad z = se^{2t}.$$

Следовательно, искомой интегральной поверхностью является

$$x = e^t, \quad y = se^t, \quad z = se^{2t} \text{ или } z = xy.$$

**Пример 2.** Проинтегрировать уравнение  $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 2$  при условии, что при  $x = 0, z = y$ , или в параметрической форме  $x_0 = 0, y_0 = s, z_0 = s$ . Определяем  $p_0(s)$  и  $q_0(s)$ :

$$p_0^2 + q_0^2 = 2, \quad 1 - q_0 = 0,$$

откуда  $q_0 = 1, p_0 = \pm 1$ .

Интегрируем систему уравнений (5.59):

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{4} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0} = dt,$$

$$p = c_1, \quad q = c_2, \quad x = 2c_1t + c_3, \quad y = 2c_2t + c_4, \quad z = 4t + c_5;$$

пользуясь начальными условиями  $p_0 = \pm 1, q_0 = 1, x_0 = 0, y_0 = s, z_0 = s$ , получим  $p = \pm 1, q = 1, x = \pm 2t, y = 2t + s, z = 4t + s$ . Последние три уравнения и являются параметрическими уравнениями искомой интегральной поверхности. Исключая параметры  $t$  и  $s$ , получим  $z = y \pm x$ .

В задачах механики часто приходится решать задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + H(t, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \quad (5.68)$$

где  $p_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$ , являющегося частным случаем уравнения (5.56) (стр. 272).

Метод Коши, который в применении к уравнению (5.68) часто называется *первым методом Якоби*, приводит нас к системе уравнений

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial H}{\partial p_2}} = \dots = \frac{dx_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} = -\frac{dp_1}{\frac{\partial H}{\partial x_1}} = \\ &= -\frac{dp_2}{\frac{\partial H}{\partial x_2}} = \dots = -\frac{dp_n}{\frac{\partial H}{\partial x_n}} = \frac{dv}{\sum_{i=0}^n p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial v}{\partial t}}, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.69)$$

и

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial v}{\partial t},$$

или

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H. \quad (5.70)$$

Система  $2n$  уравнений (5.69) не содержит  $v$  и может быть проинтегрирована независимо от уравнения (5.70), после чего из уравнения (5.70) функция  $v$  находится квадратурой. В этом и заключается некоторое своеобразие применения метода Коши к уравнению (5.68). Кроме того, в рассматриваемом случае нет необходимости вводить в систему (5.50) вспомогательный параметр, так как эту роль с успехом может играть независимая переменная  $t$ .

## Задачи к главе 5

1.  $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

2.  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$

3.  $x \frac{\partial z}{\partial y} = z.$

4.  $z \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

5.  $y \frac{\partial z}{\partial x} = z$  при  $x = 2, z = y.$

6.  $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = z$  при  $y = 1, z = 3x.$

7.  $yz \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$  при  $x = 0, z = y^3.$

8. Найти поверхности, ортогональные поверхностям семейства  $z = axy.$ 9. Найти поверхности, ортогональные поверхностям семейства  $xuz = a.$ 

10.  $\frac{x}{3} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{y}{5} \frac{\partial z}{\partial y} = z - 5.$

11.  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$

12.  $x \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} + 3z \frac{\partial u}{\partial z} = 4u.$

13.  $\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x^2} = 0.$

14.  $\frac{\partial z}{\partial x} - 2x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$  при  $x = 1, z = y^2.$

15. Интегрируется ли уравнение

$$(y^2 + z^2 - x^2) dx + xz dy + xy dz = 0.$$

одним соотношением?

16. Проинтегрировать одним соотношением уравнение

$$(y + 3z^2) dx + (x + y) dy + 6xz dz = 0.$$

17. Найти полный интеграл уравнения

$$pq = x^2 y^2.$$

18. Найти полный интеграл уравнения

$$z = px + qy + p^3q^3.$$

19. Найти полный интеграл уравнения

$$pq = 9z^2.$$

20. Найти полный интеграл уравнения

$$p = \sin q.$$

21. Найти поверхности, ортогональные векторным линиям векторного поля

$$F = (2xy - 3yz) i + (x^2 - 3xz) j - 3xy k.$$

22. Найти семейство поверхностей, ортогональных векторным линиям векторного поля

$$F = (2x - y) i + (3y - z) j + (x - 2y) k.$$

23. Найти векторные линии, векторные поверхности и поверхности, ортогональные векторным линиям поля

$$F = xi + yj - zk.$$

24.  $z = pq + 1$  при  $y = 2$ ,  $z = 2x + 1$ .

25.  $2z = pq - 3xy$  при  $x = 5$ ,  $z = 15y$ .

26.  $4z = p^2 + q^2$  при  $x = 0$ ,  $z = y^2$ .

---

# ЧАСТЬ II

## ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

### ВВЕДЕНИЕ

Наряду с задачами, в которых необходимо определить максимальные и минимальные значения некоторой функции  $z = f(x)$ , в задачах физики нередко возникает необходимость найти максимальные или минимальные значения величин особого рода, называемых функционалами.

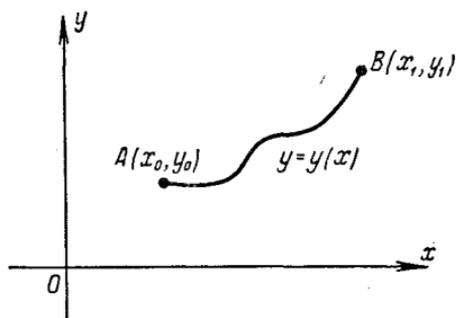


Рис. А.

$A(x_0, y_0)$  и  $B(x_1, y_1)$  (см. рис. А). Величина  $l$  может быть вычислена, если задано уравнение кривой  $y = y(x)$ ; тогда

$$l[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Площадь  $S$  некоторой поверхности также является функционалом, так как она определяется выбором поверхности, т. е. выбором функции  $z(x, y)$ , входящей в уравнение поверхности  $z = z(x, y)$ . Как известно,

$$S[z(x, y)] = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

где  $D$  — проекция поверхности на плоскость  $Oxy$ .

Моменты инерции, статические моменты, координаты центра тяжести некоторой однородной кривой или поверхности также являются функционалами, так как их значения определяются выбором кривой или поверхности, т. е. выбором функций, входящих в уравнение этой кривой или поверхности.

Во всех этих примерах мы имеем характерную для функционалов зависимость: функции (или вектор-функции) соответствует число, в то время как при задании функции  $z = f(x)$  числу соответствовало число.

*Вариационное исчисление* изучает методы, позволяющие находить максимальные и минимальные значения функционалов. Задачи, в которых требуется исследовать функционал на максимум или минимум, называются *вариационными задачами*.

Многие законы механики и физики сводятся к утверждению, что некоторый функционал в рассматриваемом процессе должен достигать минимума или максимума. В такой формулировке эти законы носят название *вариационных принципов* механики или физики. К числу таких вариационных принципов или простейших следствий из них принадлежат: принцип наименьшего действия, закон сохранения энергии, закон сохранения импульса, закон сохранения количества движения, закон сохранения момента количества движения, различные вариационные принципы классической и релятивистской теории поля, принцип Ферма в оптике, принцип Кастилиано в теории упругости и т. д.

Вариационное исчисление начало развиваться с 1696 года и оформилось в самостоятельную математическую дисциплину с собственными методами исследования после фундаментальных работ действительного члена Петербургской Академии наук Л. Эйлера (1707—1783 г.), которого с полным основанием можно считать создателем вариационного исчисления.

Большое влияние на развитие вариационного исчисления оказали следующие три задачи:

**Задача о брахистохроне.** В 1696 году Иоганн Бернулли опубликовал письмо, в котором предлагал вниманию математиков задачу о линии быстрого ската — *брахистохроне*. В этой задаче требуется определить линию, соединяющую две заданные точки  $A$  и  $B$ , не лежащие на одной вертикальной прямой, и обладающую тем свойством, что материальная точка скатится по этой линии из точки  $A$  в точку  $B$  в кратчайшее время (рис. Б).

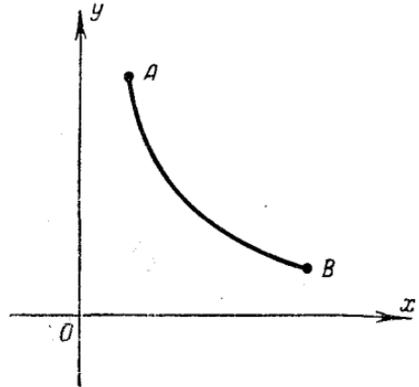


Рис. Б.

Легко видеть, что линией быстреего ската не будет прямая, соединяющая точки  $A$  и  $B$ , хотя она и является кратчайшим расстоянием между точками  $A$  и  $B$ , так как при движении по прямой скорость движения будет нарастать сравнительно медленно; если же мы возьмем кривую, более круто спускающуюся около точки  $A$  вниз, то хотя путь и удлинится, но значительная часть пути будет пройдена с большей скоростью. Решение задачи о брахистохроне было дано И. Бернулли, Я. Бернулли, Г. Лейбницем, И. Ньютоном и Г. Лопиталем. Оказалось, что линией быстреего ската является циклоида (см. стр. 304—305).

Задача о геодезических линиях. Требуется определить линию наименьшей длины, соединяющую две заданные точки на некоторой поверхности  $\varphi(x, y, z) = 0$  (рис. В). Такие кратчайшие линии

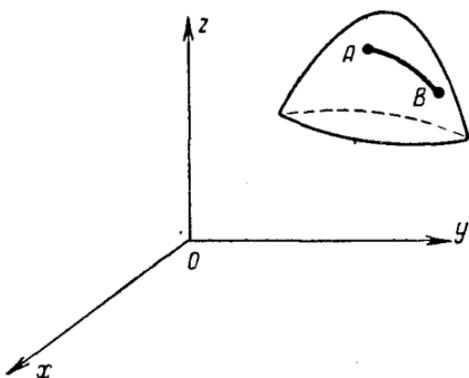


Рис. В.

называются *геодезическими*. Мы имеем типичную вариационную задачу на так называемый *связанный* или *условный экстремум*. Необходимо найти минимум функционала

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx,$$

причем функции  $y(x)$  и  $z(x)$  должны быть подчинены условию  $\varphi(x, y, z) = 0$ . Эта задача

была решена в 1698 году Я. Бернулли, но общий метод решения задач такого типа был дан лишь в работах Л. Эйлера и Ж. Лагранжа.

Изопериметрическая задача. Требуется найти замкнутую линию заданной длины  $l$ , ограничивающую максимальную площадь  $S$ . Такой линией, как было известно еще в древней Греции, является окружность. В этой задаче требуется определить экстремум функционала  $S$  при наличии своеобразного дополнительного условия — длина кривой должна быть постоянна, т. е. функционал

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

сохраняет постоянное значение. Условия такого типа называются *изопериметрическими*. Общие методы решения задач с изопериметрическими условиями были разработаны Л. Эйлером.

Ниже излагаются методы решения различных вариационных задач, причем в основном исследуются на экстремум следующие часто встречающиеся в приложениях функционалы:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx,$$
$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx,$$
$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x)) dx,$$
$$\int_D \int F\left(x, y, z(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx, dy,$$

в которых функции  $F$  заданы, а функции  $y(x), y_1(x) \dots y_n(x), z(x, y)$  являются аргументами функционалов.

---

## ГЛАВА 6

# МЕТОД ВАРИАЦИЙ В ЗАДАЧАХ С НЕПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

### § 1. Вариация и ее свойства

Методы решения вариационных задач, т. е. задач на исследование функционалов на максимум и минимум, весьма сходны с методами исследования на максимум и минимум функций. Поэтому целесообразно напомнить кратко теорию максимума и минимума функций и параллельно ввести аналогичные понятия и доказать сходные теоремы для функционалов.

1. Переменная величина  $z$  называется *функцией* переменной величины  $x$ , что обозначается так:  $z = f(x)$ , если каждому значению  $x$  из некоторой области изменения  $x$  соответствует значение  $z$ , т. е. имеет место соответствие: числу  $x$  соответствует число  $z$ .

Аналогично определяются и функции нескольких переменных.

2. Приращением  $\Delta x$  аргумента  $x$  функции  $f(x)$  называется разность между двумя значениями этой переменной  $\Delta x = x - x_1$ . Если  $x$  — независимое перемен-

1. Переменная величина  $v$  называется *функционалом*, зависящим от функции  $y(x)$ , что обозначается так:  $v = v[y(x)]$ , если каждой функции  $y(x)$  из некоторого класса функций  $y(x)$  соответствует значение  $v$ , т. е. имеет место соответствие: функции  $y(x)$  соответствует число  $v$ .

Аналогично определяются и функционалы, зависящие от нескольких функций, и функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных.

2. Приращением или *вариацией*  $\delta u$  аргумента  $y(x)$  функционала  $v[y(x)]$  называется разность между двумя функциями  $\delta u = v[y(x)] - v[y_1(x)]$ . При этом предпо-

ное, то дифференциал  $x$  совпадает с приращением  $dx = \Delta x$ .

3. Функция  $f(x)$  называется *непрерывной*, если малому изменению  $x$  соответствует малое изменение функции  $f(x)$ .

лагается, что  $y(x)$  меняется произвольно в некотором классе функций.

3. Функционал  $v[y(x)]$  называется *непрерывным*, если малому изменению  $y(x)$  соответствует малое изменение функционала  $v[y(x)]$ .

Последнее определение нуждается в уточнении и разъяснении, так как сейчас же возникает вопрос, какие изменения функции  $y(x)$ , являющейся аргументом функционала, называются малыми или, что то же самое, какие кривые  $y = y(x)$  и  $y = y_1(x)$  считаются мало отличающимися или близкими.

Можно считать близкими функции  $y(x)$  и  $y_1(x)$  в том случае, если модуль их разности  $y(x) - y_1(x)$  мал для всех значений  $x$ , для которых задаются функции  $y(x)$  и  $y_1(x)$ , т. е. считать близкими кривые, близкие по ординатам.

Однако при таком определении близости кривых часто встречающиеся в приложениях функционалы вида

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

из-за наличия в подинтегральной функции аргумента  $y'$  лишь в исключительных случаях будут непрерывными. Поэтому во многих случаях более естественно считать близкими только те кривые, которые близки по ординатам и по направлениям касательных в соответствующих точках, т. е. требовать, чтобы для близких кривых не только модуль разности  $y(x) - y_1(x)$  был бы мал, но, кроме того, был бы мал и модуль разности  $y'(x) - y_1'(x)$ .

Иногда же оказывается необходимым считать близкими только те функции, для которых малы модули каждой из разностей:

$$\begin{aligned} & y(x) - y_1(x), \quad y'(x) - y_1'(x), \\ & y''(x) - y_1''(x), \dots, \quad y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x). \end{aligned}$$

В связи с этим приходится ввести следующие определения близости кривых  $y = y(x)$  и  $y = y_1(x)$ .

*Кривые  $y = y(x)$  и  $y = y_1(x)$  близки в смысле близости нулевого порядка, если модуль разности  $y(x) - y_1(x)$  мал.*

Кривые  $y = y(x)$  и  $y = y_1(x)$  близки в смысле близости первого порядка, если модули разностей  $y(x) - y_1(x)$  и  $y'(x) - y_1'(x)$  малы.

Кривые

$$y = y(x) \text{ и } y = y_1(x)$$

близки в смысле близости  $k$ -го порядка, если модули разностей

$$\begin{aligned} & y(x) - y_1(x), \\ & y'(x) - y_1'(x), \\ & \dots \dots \dots \\ & y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x) \end{aligned}$$

малы.

На рис. 6.1 изображены кривые, близкие в смысле близости нулевого порядка, но не близкие в смысле близости первого порядка.

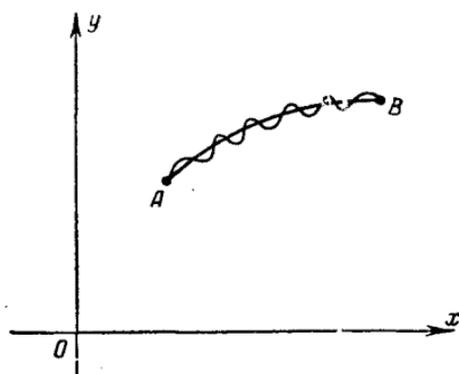


Рис. 6.1.

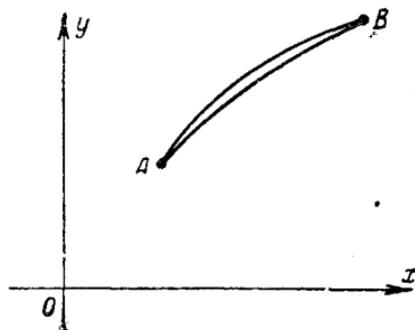


Рис. 6.2.

так как ординаты у них близки, а направления касательных не близки. На рис. 6.2 изображены кривые, близкие в смысле близости первого порядка.

Из этих определений следует, что если кривые близки в смысле близости  $k$ -го порядка, то они тем более близки в смысле близости любого меньшего порядка.

Теперь мы можем уточнить понятие непрерывности функционала.

3'. Функция  $f(x)$  непрерывна при  $x = x_0$ , если для любого положительного  $\varepsilon$  можно подобрать  $\delta > 0$  такое, что  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  при  $|x - x_0| < \delta$ .

3'. Функционал  $v[y(x)]$  непрерывен при  $y = y_0(x)$  в смысле близости  $k$ -го порядка, если для любого положительного  $\varepsilon$  можно подобрать  $\delta > 0$  такое, что

$$|v[y(x)] - v[y_0(x)]| < \varepsilon$$

При этом подразумевается, что при  $x$  принимает значения, в которых функция  $f(x)$  определена.

$$|y(x) - y_0(x)| < \delta,$$

$$|y'(x) - y_0'(x)| < \delta,$$

.....

.....

$$|y^{(k)}(x) - y_0^{(k)}(x)| < \delta.$$

При этом подразумевается, что функция  $y(x)$  берется из класса функций, на котором функционал  $\sigma[y(x)]$  определен.

Можно было бы определить понятие расстояния  $\rho(y_1, y_2)$  между кривыми  $y = y_1(x)$  и  $y = y_2(x)$  ( $x_0 \leq x \leq x_1$ ), и тогда близкими кривыми считать кривые, расстояние между которыми мало.

Если считать

$$\rho(y_1, y_2) = \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |y_1(x) - y_2(x)|,$$

т. е. ввести метрику пространства  $C_0$  (см. стр. 50), то мы приходим к понятию близости нулевого порядка. Если считать

$$\rho(y_1, y_2) = \sum_{p=1}^k \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |y_1^{(p)}(x) - y_2^{(p)}(x)|$$

(предполагается, что  $y_1$  и  $y_2$  имеют непрерывные производные до порядка  $k$  включительно), то близость кривых понимается в смысле близости  $k$ -го порядка.

4. *Линейной функцией* называется функция  $l(x)$ , удовлетворяющая следующим условиям:

$$l(cx) = cl(x),$$

где  $c$  — произвольная постоянная, и

$$l(x_1 + x_2) = l(x_1) + l(x_2).$$

Линейная функция одной переменной имеет вид

$$l(x) = kx,$$

где  $k$  — постоянная.

4. *Линейным функционалом* называется функционал  $L[y(x)]$ , удовлетворяющий следующим условиям:

$$L[cy(x)] = cL[y(x)],$$

где  $c$  — произвольная постоянная и

$$L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)].$$

Примером линейного функционала является

$$L[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (p(x)y + q(x)y') dx.$$

5. Если приращение функции

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

может быть представлено в виде

$$\Delta f = A(x) \Delta x + \beta(x, \Delta x) \cdot \Delta x,$$

где  $A(x)$  не зависит от  $\Delta x$ , а  $\beta(x, \Delta x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , то функция называется *дифференцируемой*, а линейная по отношению к  $\Delta x$  часть приращения  $A(x) \Delta x$  называется *дифференциалом* функции и обозначается  $df$ . Разделив на  $\Delta x$  и переходя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ , получим, что  $A(x) = f'(x)$ , и, следовательно,

$$df = f'(x) \Delta x.$$

5. Если приращение функционала

$$\Delta v = v[y(x) + \delta y] - v[y(x)]$$

можно представить в виде

$$\Delta v = L[y(x), \delta y] + \beta(y(x), \delta y) \max |\delta y|,$$

где  $L[y(x), \delta y]$  — линейный по отношению к  $\delta y$  функционал,  $\max |\delta y|$  — максимальное значение  $|\delta y|$  и  $\beta(y(x), \delta y) \rightarrow 0$  при  $\max |\delta y| \rightarrow 0$ , то линейная по отношению к  $\delta y$  часть приращения функционала, т. е.  $L[y(x), \delta y]$ , называется *вариацией функционала* и обозначается  $\delta v$ .

Итак, *вариация функционала* — это главная, линейная по отношению к  $\delta y$ , часть приращения функционала.

При исследовании функционалов вариация играет такую же роль, какую играет дифференциал при исследовании функций.

Можно дать и другое, почти эквивалентное, определение дифференциала функции и вариации функционала. Рассмотрим значение функции  $f(x + \alpha \Delta x)$  при фиксированном  $x$  и  $\Delta x$  и изменяющихся значениях параметра  $\alpha$ . При  $\alpha = 1$  получим приращенное значение функции  $f(x + \Delta x)$ , при  $\alpha = 0$  получим исходное значение функции  $f(x)$ . Нетрудно проверить, что производная от  $f(x + \alpha \Delta x)$  по  $\alpha$  при  $\alpha = 0$  равна дифференциалу функции  $f(x)$  в точке  $x$ . Действительно, по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha \Delta x) |_{\alpha=0} = f'(x + \alpha \Delta x) \Delta x |_{\alpha=0} = f'(x) \Delta x = df(x).$$

Точно так же для функции нескольких переменных

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

можно получить дифференциал путем дифференцирования

$$f(x_1 + \alpha \Delta x_1, x_2 + \alpha \Delta x_2, \dots, x_n + \alpha \Delta x_n)$$

по  $\alpha$ , полагая затем  $\alpha = 0$ . Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x_1 + \alpha \Delta x_1, x_2 + \alpha \Delta x_2, \dots, x_n + \alpha \Delta x_n) |_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i = df.$$

И для функционалов вида  $v[y(x)]$  или более сложных, зависящих от нескольких неизвестных функций или от функций нескольких

переменных, можно определить вариацию как производную от функционала  $v[y(x) + \alpha \delta y]$  по  $\alpha$  при  $\alpha = 0$ . Действительно, если функционал имеет вариацию в смысле главной линейной части приращения, то его приращение имеет вид

$$\Delta v = v[y(x) + \alpha \delta y] - v[y(x)] = L(y, \alpha \delta y) + \beta(y, \alpha \delta y) |\alpha| \max |\delta y|.$$

Производная от  $v[y + \alpha \delta y]$  по  $\alpha$  при  $\alpha = 0$  равна

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta \alpha} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{L(y, \alpha \delta y) + \beta[y(x), \alpha \delta y] |\alpha| \max |\delta y|}{\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{L(y, \alpha \delta y)}{\alpha} + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\beta[y(x), \alpha \delta y] |\alpha| \max |\delta y|}{\alpha} = L(y, \delta y), \end{aligned}$$

так как в силу линейности

$$L(y, \alpha \delta y) = \alpha L(y, \delta y),$$

а

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\beta[y(x), \alpha \delta y] |\alpha| \max |\delta y|}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \beta[y(x), \alpha \delta y] \max |\delta y| = 0,$$

потому что  $\beta[y(x), \alpha \delta y] \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow 0$ . Итак, если существует вариация в смысле главной линейной части приращения функционала, то существует и вариация в смысле производной по параметру при начальном значении параметра, и оба эти определения эквивалентны.

Второе определение вариации несколько шире первого, так как существуют примеры функционалов, из приращения которых нельзя выделить главной линейной части, но вариация в смысле второго определения существует.

6. Дифференциал функции  $f(x)$  равен

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha \Delta x) |_{\alpha=0}.$$

6. Вариация функционала  $v[y(x)]$  равна

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v[y(x) + \alpha \delta y] |_{\alpha=0}.$$

**Определение.** Функционал  $v[y(x)]$  достигает на кривой  $y = y_0(x)$  максимума, если значения функционала  $v[y(x)]$  на любой близкой к  $y = y_0(x)$  кривой не больше, чем  $v[y_0(x)]$ , то есть  $\Delta v = v[y(x)] - v[y_0(x)] \leq 0$ .

Если  $\Delta v \leq 0$ , причем  $\Delta v = 0$  только при  $y(x) = y_0(x)$ , то говорят, что на кривой  $y = y_0(x)$  достигается строгий максимум. Аналогично определяется кривая  $y = y_0(x)$ , на которой реализуется минимум. В этом случае  $\Delta v \geq 0$  для всех кривых, близких к кривой  $y = y_0(x)$ .

7. Теорема. Если дифференцируемая функция  $f(x)$  достигает максимума или

7. Теорема. Если функционал  $v[y(x)]$ , имеющий вариацию, достигает максимума

минимума во внутренней точке  $x = x_0$  области определения функции, то в этой точке или минимума при  $y = y_0(x)$ , где  $y(x)$  — внутренняя точка области определения функционала, то при  $y = y_0(x)$ ,

$$df = 0.$$

$$\delta v = 0.$$

Доказательство теоремы для функционалов. При фиксированных  $y_0(x)$  и  $\delta y$   $v[y_0(x) + \alpha \delta y] = \varphi(\alpha)$  является функцией  $\alpha$ , которая при  $\alpha = 0$ , по предположению, достигает максимума или минимума, следовательно, производная

$$\varphi'(0) = 0^*), \text{ или } \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} v[y_0(x) + \alpha \delta y] \right|_{\alpha=0} = 0,$$

т. е.  $\delta v = 0$ . Итак, на кривых, на которых достигается экстремум функционала, его вариация равна нулю.

Понятие *экстремума* функционала нуждается в уточнении. Говоря о максимуме или минимуме, точнее, об относительном максимуме или минимуме, мы имели в виду наибольшее или наименьшее значение функционала только по отношению к значениям функционала на близких кривых. Но, как было указано выше, близость кривых может быть понимаема различно, поэтому в определении максимума или минимума надо указывать, какого порядка близость имеется в виду.

Если функционал  $v[y(x)]$  достигает на кривой  $y = y_0(x)$  максимума или минимума по отношению ко всем кривым, для которых модуль разности  $y(x) - y_0(x)$  мал, т. е. по отношению к кривым, близким к  $y = y_0(x)$  в смысле близости нулевого порядка, то максимум или минимум называется *сильным*.

Если же функционал  $v[y(x)]$  достигает на кривой  $y = y_0(x)$  максимума или минимума лишь по отношению к кривым  $y = y(x)$ , близким к  $y = y_0(x)$  в смысле близости первого порядка, т. е. по отношению к кривым, близким к  $y = y_0(x)$  не только по ординатам, но и по направлениям касательных, то максимум или минимум называется *слабым*.

Очевидно, что если на кривой  $y = y_0(x)$  достигается сильный максимум (или минимум), то по давню достигается и слабый, так как если кривая близка к  $y = y_0(x)$  в смысле близости первого порядка, то она близка и в смысле близости нулевого порядка. Однако возможно, что на кривой  $y = y_0(x)$  достигается слабый максимум (минимум) и в то же время не достигается сильный максимум (минимум), т. е. среди кривых  $y = y(x)$ , близких к  $y = y_1(x)$  как по ординатам, так и по направлению касательных, может не быть таких, для ко-

\* )  $\alpha$  может принимать в окрестности точки  $\alpha = 0$  как положительные, так и отрицательные значения, так как  $y_0(x)$  — внутренняя точка области определения функционала.

торых  $v[y(x)] > v[y_0(x)]$  (в случае минимума  $v[y(x)] < v[y_0(x)]$ ), а среди кривых  $y = y(x)$ , близких только по ординатам, но уже не близких по направлению касательных, могут найтись и такие, для которых  $v[y(x)] > v[y_0(x)]$  (в случае минимума  $v[y(x)] < v[y_0(x)]$ ). Различие между сильным и слабым экстремумом не будет иметь существенного значения при выводе основного необходимого условия экстремума, но оно будет весьма существенно в главе 8 при изучении достаточных условий экстремума.

Заметим еще, что если на кривой  $y = y_0(x)$  достигается экстремум, то не только  $\frac{\partial}{\partial \alpha} v[y_0(x) + \alpha \delta y] \Big|_{\alpha=0} = 0$ , но и  $\frac{\partial}{\partial \alpha} v[y(x, \alpha)] \Big|_{\alpha=0} = 0$ ,

где  $y(x, \alpha)$  — любое семейство допустимых кривых, причем при  $\alpha = 0$  и при  $\alpha = 1$  функция  $y(x, \alpha)$  должна соответственно превращаться в  $y_0(x)$  и  $y_0(x) + \delta y$ . Действительно,  $v[y(x, \alpha)]$  является функцией  $\alpha$ , так как задание  $\alpha$  определяет кривую семейства  $y = y(x, \alpha)$ , а значит, определяет и значение функционала  $v[y(x, \alpha)]$ .

Эта функция, по предположению, достигает экстремума при  $\alpha = 0$ , следовательно, производная этой функции обращается в нуль при  $\alpha = 0$  \*).

Итак,  $\frac{\partial}{\partial \alpha} v[y(x, \alpha)] \Big|_{\alpha=0} = 0$ , однако эта производная, вообще говоря, уже не будет совпадать с вариацией функционала, но будет, как показано выше, обращаться в нуль одновременно с  $\delta v$  на кривых, реализующих экстремум функционала.

Все определения этого параграфа и основная теорема (стр. 289) почти без всякого изменения переносятся на функционалы, зависящие от нескольких неизвестных функций

$$v[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]$$

или зависящие от одной или нескольких функций многих переменных

$$v[z(x_1, x_2, \dots, x_n)],$$

$$v[z_1(x_1, x_2, \dots, x_n), z_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, z_m(x_1, x_2, \dots, x_n)].$$

Например, вариация  $\delta v$  функционала  $v[z(x, y)]$  может быть определена или как главная линейная по отношению к  $\delta z$  часть приращения

$$\Delta v = v[z(x, y) + \delta z] - v[z(x, y)],$$

или как производная по параметру при начальном значении

\* ) Предполагается, что  $\alpha$  может принимать любые близкие к  $\alpha = 0$  значения и  $\frac{\partial v[y(x, \alpha)]}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$  существует.

параметра

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v [z(x, y) + \alpha \delta z] \Big|_{\alpha=0},$$

причем если при  $z = z(x, y)$  функционал  $v$  достигает экстремума, то при  $z = z(x, y)$  вариация  $\delta v = 0$ , так как  $v [z(x, y) + \alpha \delta z]$  является функцией  $\alpha$ , которая при  $\alpha = 0$ , по предположению, достигает экстремума и, следовательно, производная от этой функции по  $\alpha$  при  $\alpha = 0$  обращается в нуль,  $\frac{\partial}{\partial \alpha} v [z(x, y) + \alpha \delta z] \Big|_{\alpha=0} = 0$  или  $\delta v = 0$ .

## § 2. Уравнение Эйлера

Исследуем на экстремум функционал

$$v [y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx. \quad (6.1)$$

причем граничные точки допустимых кривых закреплены:  $y(x_0) = y_0$  и  $y(x_1) = y_1$  (рис. 6.3). Функцию  $F(x, y, y')$  будем считать трижды дифференцируемой.

Мы уже знаем, что необходимым условием экстремума является обращение в нуль вариации функционала. Покажем теперь, как применяется эта основная теорема к

рассматриваемому функционалу, причем мы еще раз повторим предыдущее рассуждение применительно к функционалу (6.1). Предположим, что экстремум достигается на дважды дифференцируемой кривой  $y = y(x)$  (требуя лишь существования производных первого порядка у допустимых кривых, можно иным методом доказать, что у кривой, реализующей экстремум, существует и вторая производная).

Возьмем какую-нибудь близкую к  $y = y(x)$  допустимую кривую  $y = \bar{y}(x)$  и включим кривые  $y = y(x)$  и  $y = \bar{y}(x)$  в однопараметрическое семейство кривых

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha(\bar{y}(x) - y(x));$$

при  $\alpha = 0$  получим кривую  $y = y(x)$ , при  $\alpha = 1$  имеем  $y = \bar{y}(x)$

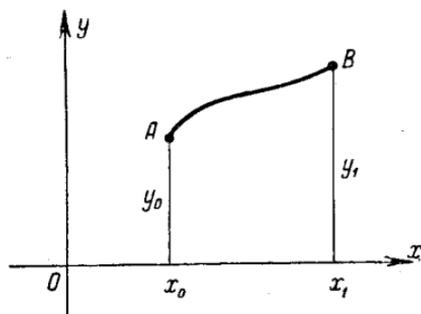


Рис. 6.3.

(рис. 6.4). Как мы уже знаем, разность  $\bar{y}(x) - y(x)$  называется вариацией функции  $y(x)$  и обозначается  $\delta y$ .

Вариация  $\delta y$  в вариационных задачах играет роль, аналогичную роли приращения независимого переменного  $\Delta x$  в задачах на исследование экстремумов функций  $f(x)$ . Вариация функции  $\delta y = \bar{y}(x) - y(x)$  является функцией  $x$ . Эту функцию можно дифференцировать один или несколько раз, причем  $(\delta y)' = \bar{y}'(x) - y'(x) = \delta y'$ , т. е. производная вариации равна вариации производной, и аналогично

$$(\delta y)'' = \bar{y}''(x) - y''(x) = \delta y'',$$

.....

$$(\delta y)^{(k)} = \bar{y}^{(k)}(x) - y^{(k)}(x) = \delta y^{(k)}.$$

Итак, рассмотрим семейство  $y = y(x, \alpha)$ , где  $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \delta y$ , содержащее при  $\alpha = 0$  кривую, на которой достигается экстремум, а при  $\alpha = 1$  — некоторую близкую допустимую кривую — так называемую кривую сравнения.

Если рассматривать значения функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

только на кривых семейства  $y = y(x, \alpha)$ , то функционал превращается в функцию  $\alpha$ :

$$v[y(x, \alpha)] = \varphi(\alpha),$$

так как значение параметра  $\alpha$  определяет кривую семейства  $y = y(x, \alpha)$  и тем самым определяет и значение функционала  $v[y(x, \alpha)]$ . Эта функция  $\varphi(\alpha)$  достигает своего экстремума при  $\alpha = 0$ , так как при  $\alpha = 0$  получаем  $y = y(x)$ , и функционал, по предположению, достигает экстремума по сравнению с любой близкой допустимой кривой и, в частности, по отношению к близким кривым семейства  $y = y(x, \alpha)$ . Необходимым условием экстремума функции  $\varphi(\alpha)$  при  $\alpha = 0$ , как известно, является обращение в нуль ее производной при  $\alpha = 0$ :

$$\varphi'(0) = 0.$$

Так как

$$\varphi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x, \alpha), y'_x(x, \alpha)) dx,$$

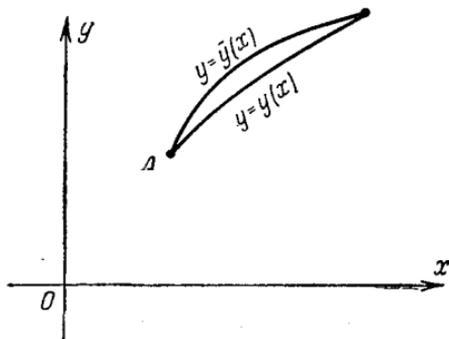


Рис. 6.4.

ТО

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \left[ F_y \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) + F_{y'} \frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x, \alpha) \right] dx,$$

где

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)),$$

$$F_{y'} = \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)),$$

или, так как

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [y(x) + \alpha \delta y] = \delta y$$

и

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [y'(x) + \alpha \delta y'] = \delta y',$$

получим

$$\begin{aligned} \varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) \delta y + \\ + F_{y'}(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) \delta y'] dx; \end{aligned}$$

$$\varphi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y(x), y'(x)) \delta y + F_{y'}(x, y(x), y'(x)) \delta y'] dx.$$

Как мы уже знаем,  $\varphi'(0)$  называется вариацией функционала и обозначается  $\delta v$ . Необходимое условие экстремума функционала  $v$  заключается в обращении в нуль его вариации:  $\delta v = 0$ . Для функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

это условие имеет вид

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_y \delta y + F_{y'} \delta y'] dx = 0.$$

Интегрируем второе слагаемое по частям и, принимая во внимание, что  $\delta y' = (\delta y)'$ , получим

$$\delta v = [F_{y'} \delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left( F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx.$$

Но

$$\delta y|_{x=x_0} = \bar{y}(x_0) - y(x_0) = 0 \text{ и } \delta y|_{x=x_1} = \bar{y}(x_1) - y(x_1) = 0,$$

потому что все допустимые кривые в рассматриваемой простейшей задаче проходят через фиксированные граничные точки, и следовательно,

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left( F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y \, dx.$$

Итак, необходимое условие экстремума приобретает вид

$$\int_{x_0}^{x_1} \left( F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y \, dx = 0, \quad (6.2)$$

причем первый множитель  $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}$  на кривой  $y = y(x)$ , реализующей экстремум, является заданной непрерывной функцией, а второй множитель  $\delta y$ , ввиду произвола в выборе кривой сравнения  $y = \bar{y}(x)$ , является произвольной функцией, удовлетворяющей лишь некоторым весьма общим условиям, а именно: функция  $\delta y$  в граничных точках  $x = x_0$  и  $x = x_1$  обращается в нуль, непрерывна и дифференцируема один или несколько раз,  $\delta y$  или  $\delta y$  и  $\delta y'$  малы по абсолютной величине.

Для упрощения полученного условия (6.2) воспользуемся следующей леммой:

**Основная лемма вариационного исчисления.** Если для каждой непрерывной функции  $\eta(x)$

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x) \eta(x) \, dx = 0,$$

где функция  $\Phi(x)$  непрерывна на отрезке  $[x_0, x_1]$ , то

$$\Phi(x) \equiv 0$$

на том же отрезке.

**Замечание.** Утверждение леммы и ее доказательство не изменяются, если на функции  $\eta(x)$  наложить следующие ограничения:  $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ ;  $\eta(x)$  имеет непрерывные производные до порядка  $p$ ,  $|\eta^{(s)}(x)| < \varepsilon$  ( $s = 0, 1, \dots, q$ ;  $q \leq p$ ).

**Доказательство.** Предположив, что в точке  $x = \bar{x}$ , лежащей на отрезке  $x_0 \leq x \leq x_1$ ,  $\Phi(x) \neq 0$ , придем к противоречию. Действительно, из непрерывности функции  $\Phi(x)$  следует, что если  $\Phi(\bar{x}) \neq 0$ , то  $\Phi(x)$  сохраняет знак в некоторой окрестности ( $\bar{x}_0 \leq x \leq \bar{x}_1$ ) точки  $\bar{x}$ ; но тогда, выбрав функцию  $\eta(x)$  также сохраняющей знак

в этой окрестности и равной нулю вне этой окрестности (рис. 6.5), получим

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x) \eta(x) dx = \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} \Phi(x) \eta(x) dx \neq 0,$$

так как произведение  $\Phi(x) \eta(x)$  сохраняет знак на отрезке  $(\bar{x}_0 \leq x \leq \bar{x}_1)$  и обращается в нуль вне этого отрезка. Итак, мы пришли к противоречию, следовательно,  $\Phi(x) \equiv 0$ . Функцию  $\eta(x)$  можно выбирать, например, так:  $\eta(x) \equiv 0$  вне отрезка  $(\bar{x}_0 \leq x \leq \bar{x}_1)$ ;  $\eta(x) \equiv k(x - \bar{x}_0)^{2n}(x - \bar{x}_1)^{2n}$  на отрезке  $(x_0 \leq x \leq x_1)$ , где  $n$  — целое

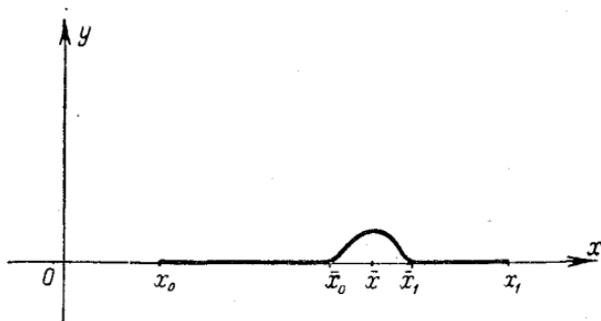


Рис. 6.5.

положительное число,  $k$  — постоянный множитель. Очевидно, что функция  $\eta(x)$  удовлетворяет упомянутым выше условиям: она непрерывна, имеет непрерывные производные до порядка  $2n - 1$ , обращается в нуль в точках  $x_0$  и  $x_1$  и может быть сделана по модулю сколь угодно малой вместе со своими производными за счет уменьшения модуля множителя  $k$ .

**Замечание.** Дословно так же можно доказать, что если функция  $\Phi(x, y)$  непрерывна в области  $D$  на плоскости  $(x, y)$  и  $\int \int_D \Phi(x, y) \eta(x, y) dx dy = 0$  при произвольном выборе функции  $\eta(x, y)$ , удовлетворяющей лишь некоторым общим условиям (непрерывность, дифференцируемость один или несколько раз, обращение в нуль на границах области  $D$ ,  $|\eta| < \varepsilon$ ,  $|\eta'_x| < \varepsilon$ ,  $|\eta'_y| < \varepsilon$ ), то  $\Phi(x, y) \equiv 0$  в области  $D$ . Функцию  $\eta(x, y)$  при доказательстве основной леммы можно выбрать, например, так:  $\eta(x, y) \equiv 0$  вне круговой окрестности достаточно малого радиуса  $\varepsilon_1$  точки  $(\bar{x}, \bar{y})$ , в которой  $\Phi(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ , а в этой окрестности точки  $(\bar{x}, \bar{y})$  функция  $\eta(x, y) = k [(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 - \varepsilon_1^2]^{2n}$  (рис. 6.6). Аналогичная лемма справедлива и для  $n$ -кратных интегралов.

Применим теперь основную лемму для упрощения полученного выше необходимого условия (6.2) экстремума простейшего функционала (6.1)

$$\int_{x_0}^{x_1} \left( F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y \, dx = 0. \quad (6.2)$$

Все условия леммы выполнены: на кривой, реализующей экстремум, множитель  $\left( F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right)$  является непрерывной функцией, а вариация  $\delta y$  является произвольной функцией, на которую наложены лишь предусмотренные в основной лемме ограничения общего характера, следовательно,  $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \equiv 0$  на кривой  $y = y(x)$ , реализующей экстремум рассматриваемого функционала, т. е.  $y = y(x)$  является решением дифференциального уравнения второго порядка

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0,$$

или в развернутом виде

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'} y' - F_{y'y'} y'' = 0.$$

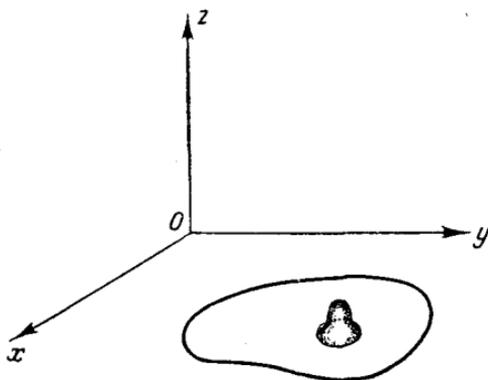


Рис. 6.6.

Это уравнение называется *уравнением Эйлера* (оно впервые было им опубликовано в 1744 году). Интегральные кривые уравнения Эйлера  $y = y(x, C_1, C_2)$  называются *экстремальями*. Только на экстремальях может достигаться экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') \, dx.$$

Для нахождения кривой, реализующей экстремум функционала (6.1), интегрируем уравнение Эйлера и определяем обе произвольные постоянные, входящие в общее решение этого уравнения, из условий на границе  $y(x_0) = y_0$ ,  $y(x_1) = y_1$ . Только на удовлетворяющих этим условиям экстремальях может реализоваться экстремум функционала. Однако для того чтобы установить, реализуется ли на них в действительности экстремум, и притом максимум или минимум, надо воспользоваться достаточными условиями экстремума, изложенными в главе 8.

Напомним, что краевая задача

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

не всегда имеет решение, а если решение существует, то оно может быть не единственным (см. стр. 159).

Заметим, что во многих вариационных задачах существование решения очевидно из физического или геометрического смысла задачи, и если решение уравнения Эйлера, удовлетворяющее граничным условиям, единственно, то эта единственная экстремаль и будет решением рассматриваемой вариационной задачи.

Пример 1. На каких кривых может достигать экстремума функционал

$$v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(y')^2 - y^2] dx; \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1?$$

Уравнение Эйлера имеет вид  $y'' + y = 0$ ; его общим решением является  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ . Используя граничные условия, получаем:  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 1$ ; следовательно, экстремум может достигаться лишь на кривой  $y = \sin x$ .

Пример 2. На каких кривых может достигать экстремума функционал

$$v[y(x)] = \int_0^1 [(y')^2 + 12xy] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1?$$

Уравнение Эйлера имеет вид  $y'' - 6x = 0$ , откуда  $y = x^3 + C_1 x + C_2$ . Используя граничные условия, получаем:  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$ ; следовательно, экстремум может достигаться лишь на кривой  $y = x^3$ .

В этих двух примерах уравнение Эйлера легко интегрировалось, но так бывает далеко не всегда, так как дифференциальные уравнения второго порядка интегрируются в конечном виде лишь в исключительных случаях. Рассмотрим некоторые простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера.

1)  $F$  не зависит от  $y'$ :

$$F = F(x, y).$$

Уравнение Эйлера имеет вид  $F_y(x, y) = 0$ , так как  $F_{y'} \equiv 0$ . Решение полученного конечного уравнения  $F_y(x, y) = 0$  не содержит элементов произвола и поэтому, вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям  $y(x_0) = y_0$  и  $y(x_1) = y_1$ .

Следовательно, решение рассматриваемой вариационной задачи, вообще говоря, не существует. Лишь в исключительных случаях, когда кривая

$$F_y(x, y) = 0$$

проходит через граничные точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1, y_1)$ . Существует кривая, на которой может достигаться экстремум.

Пример 3.

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx; \quad y(x_0) = y_0,$$

$$y(x_1) = y_1.$$

Уравнение Эйлера имеет вид

$$F_y = 0 \text{ или } y = 0.$$

Экстремаль  $y = 0$  проходит через граничные точки только при  $y_0 = 0$  и  $y_1 = 0$  (рис. 6.7). Если  $y_0 = 0$  и  $y_1 \neq 0$ , то, очевидно, функция  $y = 0$  реали-

зует минимум функционала  $v = \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx$ ,

так как  $v[y(x)] \geq 0$ , причем  $v = 0$  при  $y = 0$ . Если же хотя бы одно из  $y_0$  и  $y_1$  не равно нулю, то минимум функционала на непрерывных функциях не достигается, что и понятно, так как можно выбрать последовательность непрерывных функций  $y_n(x)$ , графики которых состоят из все более и более круто спускающейся из точки  $(x_0, y_0)$  к оси абсцисс дуги кривой, затем из отрезка оси абсцисс, почти совпадающего со всем отрезком  $(x_0, x_1)$ , и, наконец, возле точки  $x_1$ , круто поднимающейся к точке  $(x_1, y_1)$  дуги кривой (рис. 6.8). Очевидно, что на кривых такой последовательности значения функционала сколь угодно мало отличаются от нуля и, следовательно, нижняя грань значений функционала равна нулю, однако эта нижняя грань не может достигаться на непрерывной кривой, так как для любой непрерывной кривой  $y = y(x)$ , отличной от то-

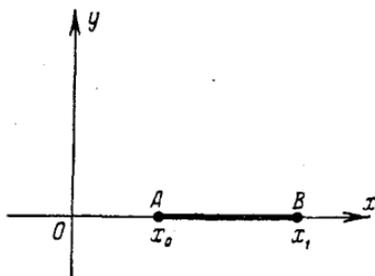


Рис. 6.7.

ждественного нуля, интеграл  $\int_{x_0}^{x_1} y^2 dx > 0$ . Эта нижняя грань значений

функционала достигается на разрывной функции (рис. 6.9)

$$y(x_0) = y_0,$$

$$y(x) = 0 \text{ при } x_0 < x < x_1,$$

$$y(x_1) = y_1.$$

2) Функция  $F$  линейно зависит от  $y'$ :

$$F(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y) y';$$

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \left[ M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} \right] dx.$$

Уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y} y' - \frac{d}{dx} N(x, y) = 0,$$

или

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y} y' - \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} y' = 0,$$

или

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0;$$

но это опять, как и в предыдущем случае, конечное, а не дифференциальное уравнение. Кривая  $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$ , вообще говоря, не

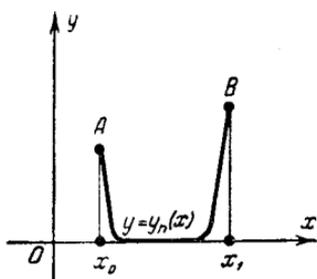


Рис. 6.8.

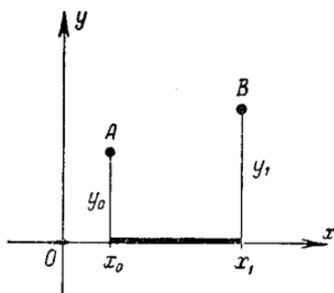


Рис. 6.9.

удовлетворяет граничным условиям, следовательно, вариационная задача, как правило, не имеет решения в классе непрерывных функций. Если же  $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0$ , то выражение  $M dx + N dy$  является точным дифференциалом и

$$v = \int_{x_0}^{x_1} \left( M + N \frac{dy}{dx} \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} (M dx + N dy)$$

не зависит от пути интегрирования, значение функционала  $v$  постоянно на допустимых кривых. Вариационная задача теряет смысл.

Пример 4.

$$v[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + x^2 y') dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = a.$$

Уравнение Эйлера имеет вид  $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$  или  $y - x = 0$ . Первое граничное условие  $y(0) = 0$  удовлетворяется, но второе граничное условие удовлетворяется лишь при  $a = 1$ . Если же  $a \neq 1$ , то экстремали, удовлетворяющей граничным условиям, не существует.

Пример 5.

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y + xy') dx \text{ или } v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y dx + x dy);$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

Уравнение Эйлера превращается в тождество  $1 \equiv 1$ . Подынтегральное выражение является точным дифференциалом, и интеграл не зависит от пути интегрирования:

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} d(xy) = x_1 y_1 - x_0 y_0,$$

по какой бы кривой мы ни интегрировали. Вариационная задача не имеет смысла.

3)  $F$  зависит лишь от  $y'$ :

$$F = F(y').$$

Уравнение Эйлера имеет вид  $F_{y'y'} y'' = 0$ , так как  $F_y = F_{xy'} = F_{yy'} = 0$ . Отсюда  $y'' = 0$  или  $F_{y'y'} = 0$ . Если  $y'' = 0$ , то  $y = C_1 x + C_2$  — двухпараметрическое семейство прямых линий. Если же уравнение  $F_{y'y'}(y') = 0$  имеет один или несколько действительных корней  $y' = k_i$ , то  $y = k_i x + C$ , и мы получаем однопараметрическое семейство прямых, содержащееся в полученном выше двухпараметрическом семействе  $y = C_1 x + C_2$ . Таким образом, в случае  $F = F(y')$  экстремалами являются всевозможные прямые линии  $y = C_1 x + C_2$ .

Пример 6. Длина дуги кривой

$$l[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

имеет экстремалами прямые линии  $y = C_1 x + C_2$ .

Пример 7. Время  $t[y(x)]$ , затрачиваемое на перемещение по некоторой кривой  $y = y(x)$  из точки  $A(x_0, y_0)$  в точку  $B(x_1, y_1)$ , если скорость  $\frac{ds}{dt} = v(y')$  зависит только от  $y'$ , является функционалом вида

$$t[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(y')} dx$$

$$\left( \frac{ds}{dt} = v(y'); \quad dt = \frac{ds}{v(y')} = \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{v(y')}; \quad t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(y')} dx \right).$$

Следовательно, экстремалами этого функционала являются прямые линии.

4)  $F$  зависит лишь от  $x$  и  $y'$ :

$$F = F(x, y').$$

Уравнение Эйлера приобретает вид  $\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y') = 0$  и, следовательно, имеет первый интеграл  $F_{y'}(x, y') = C_1$ , причем так как полученное уравнение первого порядка  $F_{y'}(x, y') = C_1$  не содержит  $y$ , то уравнение может быть проинтегрировано или путем непосредственного разрешения относительно  $y'$  и интегрирования, или путем введения подходящим образом выбранного параметра (см. стр. 69).

Пример 8. Функционал

$$t[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx$$

( $t$  — время, затрачиваемое на перемещение по кривой  $y = y(x)$  из одной точки в другую, если скорость движения  $v = x$ , так как если  $\frac{ds}{dt} = x$ , то

$dt = \frac{ds}{x}$  и  $t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx$ ). Первый интеграл уравнения Эйлера

$F_{y'} = C_1$  имеет вид  $\frac{y'}{x \sqrt{1+y'^2}} = C_1$ . Это уравнение проще всего интегрируется, если ввести параметр, полагая  $y' = \operatorname{tg} t$ ; тогда

$$x = \frac{1}{C_1} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{C_1} \sin t$$

или  $x = \bar{C}_1 \sin t$ , где  $\bar{C}_1 = \frac{1}{C_1}$ ;

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t; \quad dy = \operatorname{tg} t \, dx = \operatorname{tg} t \cdot \bar{C}_1 \cos t \, dt = \bar{C}_1 \sin t \, dt;$$

интегрируя, получаем  $y = -\bar{C}_1 \cos t + C_2$ . Итак,

$$x = \bar{C}_1 \sin t, \quad y - C_2 = -\bar{C}_1 \cos t$$

или, исключая  $t$ , получаем  $x^2 + (y - C_2)^2 = \bar{C}_1^2$  — семейство окружностей с центрами на оси ординат.

5)  $F$  зависит лишь от  $y$  и  $y'$ :

$$F = F(y, y').$$

Уравнение Эйлера имеет вид:  $F_y - F_{yy'} y' - F_{y'y'} y'' = 0$ , так как  $F_{xy'} = 0$ . Если умножить почленно это уравнение на  $y'$ , то, как нетрудно проверить, левая часть превращается в точную производную  $\frac{d}{dx} (F - y' F_{y'})$ .

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) &= F_{yy'} + F_{y'y''} - y''F_{y'} - F_{yy'}y'^2 - F_{y'y'}y'y'' = \\ &= y'(F_y - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y''). \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$$F - y'F_{y'} = C_1,$$

причем так как это уравнение первого порядка не содержит явно  $x$ , то оно может быть проинтегрировано путем разрешения относительно  $y'$  и разделения переменных или путем введения параметра.

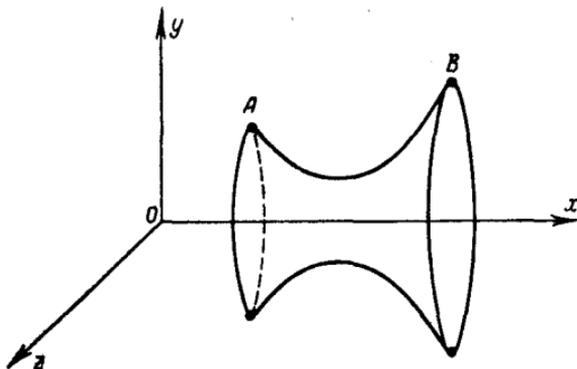


Рис. 6.10.

**Пример 9.** Задача о наименьшей поверхности вращения: определить кривую с заданными граничными точками, от вращения которой вокруг оси абсцисс образуется поверхность наименьшей площади (рис. 6.10).

Как известно, площадь поверхности вращения

$$S[y(x)] = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Подынтегральная функция зависит лишь от  $y$  и  $y'$  и, следовательно, первый интеграл уравнения Эйлера будет иметь вид

$$F - y'F_{y'} = C_1$$

или в данном случае  $y \sqrt{1 + y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1.$

После упрощений получаем  $\frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1.$  Проще всего это уравнение интегрируется подстановкой  $y' = \text{sh } t$ , тогда  $y = C_1 \text{ ch } t$ , а

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 \text{ sh } t dt}{\text{sh } t} = C_1 dt; \quad x = C_1 t + C_2.$$

Итак, искомая поверхность образуется вращением линии, уравнение которой в параметрической форме имеет вид

$$\begin{aligned}x &= C_1 t + C_2, \\y &= C_1 \operatorname{ch} t.\end{aligned}$$

Исключая параметр  $t$ , будем иметь  $y = C_1 \operatorname{ch} \frac{x - C_2}{C_1}$  — семейство цепных линий, от вращения которых образуются поверхности, называемые катеноидами. Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из условия прохождения искомой линии через заданные граничные точки (в зависимости от положения точек  $A$  и  $B$  может существовать одно, два или ни одного решения).

**Пример 10.** Задача о брахистохроне (см. стр. 281): определить кривую, соединяющую заданные точки  $A$  и  $B$ , при движении по которой материальная точка скатится из точки  $A$  в точку  $B$  в кратчайшее время (трением и сопротивлением среды пренебрегаем).

Поместим начало координат в точку  $A$ , ось  $Ox$  направим горизонтально, ось  $Oy$  — вертикально вниз. Скорость движения материальной точки  $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$ , откуда находим время, затрачиваемое на перемещение точки из положения  $A(0, 0)$  в положение  $B(x_1, y_1)$ :

$$t[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx; \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1.$$

Так как этот функционал также принадлежит к простейшему виду и его подынтегральная функция не содержит явно  $x$ , то уравнение Эйлера имеет первый интеграл  $F - y'F_{y'} = C$ , или в данном случае

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C,$$

откуда после упрощений будем иметь  $\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C$  или  $y(1+y'^2) = C_1$ .

Введем параметр  $t$ , полагая  $y' = \operatorname{ctg} t$ ; тогда получим:

$$y = \frac{C_1}{1 + \operatorname{ctg}^2 t} = C_1 \sin^2 t = \frac{C_1}{2} (1 - \cos 2t);$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1 \sin t \cos t dt}{\operatorname{ctg} t} = 2C_1 \sin^2 t dt = C_1 (1 - \cos 2t) dt;$$

$$x = C_1 \left( t - \frac{\sin 2t}{2} \right) + C_2 = \frac{C_1}{2} (2t - \sin 2t) + C_2.$$

Следовательно, в параметрической форме уравнение искомой линии имеет вид

$$x - C_2 = \frac{C_1}{2} (2t - \sin 2t), \quad y = \frac{C_1}{2} (1 - \cos 2t).$$

Если преобразовать параметр подстановкой  $2t = t_1$  и принять во внимание,

что  $C_2 = 0$ , так как при  $y = 0$ ,  $x = 0$ , то мы получим уравнение семейства циклоид в обычной форме:

$$x = \frac{C_1}{2} (t_1 - \sin t_1),$$

$$y = \frac{C_1}{2} (1 - \cos t_1),$$

где  $\frac{C_1}{2}$  — радиус катящегося круга, который определяется из условия прохождения циклоиды через точку  $B(x_1, y_1)$ . Итак, брахистохроной является циклоида.

### § 3. Функционалы вида

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx$$

Для получения необходимых условий экстремума функционала  $v$  более общего вида

$$v[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx$$

при заданных граничных значениях всех функций

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0},$$

$$y_1(x_1) = y_{11}, y_2(x_1) = y_{21}, \dots, y_n(x_1) = y_{n1},$$

будем варьировать лишь одну из функций

$$y_j(x) \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

оставляя все остальные функции неизменными. При этом функционал  $v[y_1, y_2, \dots, y_n]$  превратится в функционал, зависящий лишь от одной варьируемой функции, например от  $y_i(x)$ ,

$$v[y_1, y_2, \dots, y_n] = \tilde{v}[y_i]$$

рассмотренного в § 2 вида, и, следовательно, функция, реализующая экстремум, должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0.$$

Так как это рассуждение применимо к любой функции  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), то мы получим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

определяющих, вообще говоря,  $2n$ -параметрическое семейство интегральных кривых в пространстве  $x, y_1, y_2, \dots, y_n$  — семейство экстремалей данной вариационной задачи.

Если, в частности, функционал зависит лишь от двух функций  $y(x)$  и  $z(x)$ :

$$v[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx;$$

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad z(x_1) = z_1,$$

т. е. определяется выбором пространственной кривой  $y = y(x), z = z(x)$  (рис. 6.11), то, варьируя только  $y(x)$  и фиксируя  $z(x)$ ,

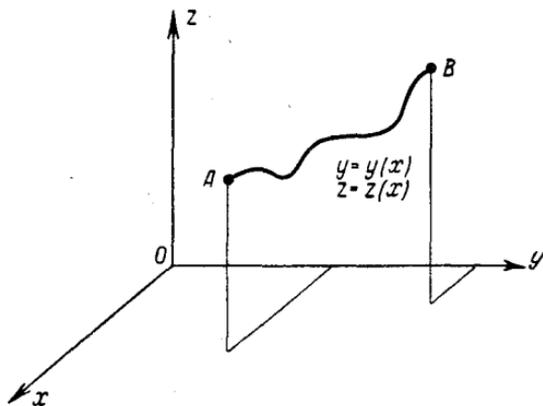


Рис. 6.11.

мы изменяем нашу кривую так, что ее проекция на плоскости  $xOz$  не изменяется, т. е. кривая все время остается на проектирующем цилиндре  $z = z(x)$  (рис. 6.12).

Аналогично, фиксируя  $y(x)$  и варьируя  $z(x)$ , мы варьируем кривую так, что она все время лежит на проектирующем цилиндре  $y = y(x)$ . При этом получаем систему двух уравнений Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad \text{и} \quad F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0.$$

Пример 1. Найти экстремали функционала

$$v[y(x), z(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [y'^2 + z'^2 + 2yz] dx, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

$$z(0) = 0, \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Система дифференциальных уравнений Эйлера имеет вид

$$y'' - z = 0,$$

$$z'' - y = 0.$$

Исключая одну из неизвестных функций, например  $z$ , получаем  $y^{IV} - y = 0$ .

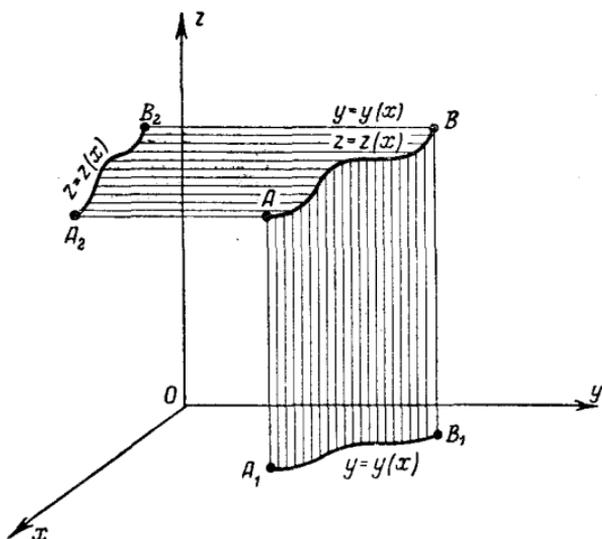


Рис. 6.12.

Интегрируя это линейное уравнение с постоянными коэффициентами, будем иметь:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x;$$

$$z = y''; \quad z = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x.$$

Используя граничные условия, находим:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 1;$$

следовательно,  $y = \sin x$ ,  $z = -\sin x$ .

Пример 2. Найти экстремали функционала

$$v[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(y', z') dx.$$

Система уравнений Эйлера имеет вид

$$F_{y'y'} y'' + F_{y'z'} z'' = 0; \quad F_{y'z'} y'' + F_{z'z'} z'' = 0,$$

откуда, считая  $F_{y'y'}, F_{z'z'}, -(F_{y'z'})^2 \neq 0$ , получим:  $y'' = 0$  и  $z'' = 0$  или  $y = C_1 x + C_2$ ,  $z = C_3 x + C_4$  — семейство прямых линий в пространстве.

Пример 3. Найти дифференциальные уравнения линий распространения света в оптически неоднородной среде, в которой скорость распространения света равна  $v(x, y, z)$ .

Согласно принципу Ферма свет распространяется из одной точки  $A(x_0, y_0)$  в другую  $B(x_1, y_1)$  по кривой, для которой время  $T$  прохождения света будет наименьшим. Если уравнение искомой кривой  $y = y(x)$  и  $z = z(x)$ , то

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{v(x, y, z)} dx.$$

Система уравнений Эйлера для этого функционала

$$\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{v^2} + \frac{d}{dx} \frac{y'}{v \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{v^2} + \frac{d}{dx} \frac{z'}{v \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0$$

и будет системой, определяющей линии распространения света.

#### § 4. Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка

Исследуем на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx,$$

где функцию  $F$  будем считать дифференцируемой  $n+2$  раза по всем аргументам и будем предполагать, что граничные условия имеют вид

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)};$$

$$y(x_1) = y_1, \quad y'(x_1) = y'_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)},$$

т. е. в граничных точках заданы значения не только функции, но и ее производных до порядка  $n-1$  включительно. Предположим, что экстремум достигается на кривой  $y = y(x)$ , дифференцируемой  $2n$  раз, и пусть  $y = \bar{y}(x)$  — уравнение некоторой кривой сравнения, также дифференцируемой  $2n$  раз.

Рассмотрим однопараметрическое семейство функций

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha [\bar{y}(x) - y(x)] \quad \text{или} \quad y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \delta y.$$

При  $\alpha = 0$   $y(x, \alpha) = y(x)$ , при  $\alpha = 1$   $y(x, \alpha) = \bar{y}(x)$ . Если рассматривать значение функционала  $v[y(x)]$  только на кривых семейства  $y = y(x, \alpha)$ , то функционал превратится в функцию параметра  $\alpha$ , достигающую экстремума при  $\alpha = 0$ ; следовательно,  $\frac{d}{d\alpha} v[y(x, \alpha)]|_{\alpha=0} = 0$ . Эта производная в соответствии с § 1

называется *вариацией функционала*  $v$  и обозначается  $\delta v$ :

$$\begin{aligned} \delta v &= \left[ \frac{d}{da} \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x, a), y'(x, a), \dots, y^{(n)}(x, a)) dx \right]_{a=0} = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + F_{y''} \delta y'' + \dots + F_{y^{(n)}} \delta y^{(n)}) dx. \end{aligned}$$

Интегрируем по частям второе слагаемое в правой части один раз:

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'} \delta y' dx = [F_{y'} \delta y]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} F_{y'} \delta y dx,$$

третье слагаемое — два раза:

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y''} \delta y'' dx = [F_{y''} \delta y']_{x_0}^{x_1} - \left[ \frac{d}{dx} F_{y''} \delta y \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} \delta y dx,$$

и т. д., последнее слагаемое —  $n$  раз:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} F_{y^{(n)}} \delta y^{(n)} dx &= [F_{y^{(n)}} \delta y^{(n-1)}]_{x_0}^{x_1} - \left[ \frac{d}{dx} F_{y^{(n)}} \delta y^{(n-2)} \right]_{x_0}^{x_1} + \dots \\ &\dots + (-1)^n \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \delta y dx. \end{aligned}$$

Принимая во внимание граничные условия, в силу которых при  $x = x_0$  и при  $x = x_1$  вариации  $\delta y = \delta y' = \delta y'' = \dots = \delta y^{(n-1)} = 0$ , окончательно получим

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left( F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \right) \delta y dx.$$

Так как на кривой, реализующей экстремум, имеем

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left( F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \right) \delta y dx = 0$$

при произвольном выборе функции  $\delta y$  и так как первый множитель под знаком интеграла является непрерывной функцией  $x$  на той же кривой  $y = y(x)$ , то в силу основной леммы первый множитель тождественно равен нулю:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \equiv 0.$$

Итак, функция  $y = y(x)$ , реализующая экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx,$$

должна быть решением уравнения

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0.$$

Это дифференциальное уравнение порядка  $2n$  носит название *уравнения Эйлера — Пуассона*, а его интегральные кривые называются *экстремальями* рассматриваемой вариационной задачи. Общее решение этого уравнения содержит  $2n$  произвольных постоянных, которые могут быть, вообще говоря, определены из  $2n$  граничных условий:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, & y'(x_0) &= y'_0, & \dots, & y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)}; \\ y(x_1) &= y_1, & y'(x_1) &= y'_1, & \dots, & y^{(n-1)}(x_1) &= y_1^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Пример 1. Найти экстремаль функционала

$$v[y(x)] = \int_0^1 (1 + y'^2) dx;$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1.$$

Уравнение Эйлера — Пуассона имеет вид  $\frac{d^2}{dx^2} (2y'') = 0$  или  $y^{IV} = 0$ ; его общим решением является  $y = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$ . Используя граничные условия, получаем:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 1, \quad C_4 = 0.$$

Итак, экстремум может достигаться лишь на прямой  $y = x$ .

Пример 2. Определить экстремаль функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 - y^2 + x^2) dx,$$

удовлетворяющую условиям

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Уравнение Эйлера — Пуассона имеет вид  $y^{IV} - y = 0$ ; его общим решением является  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$ . Используя граничные условия, получаем  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$ ,  $C_3 = 1$ ,  $C_4 = 0$ . Итак, экстремум может достигаться лишь на кривой  $y = \cos x$ .

Пример 3. Определить экстремаль функционала

$$v[y(x)] = \int_{-l}^l \left( \frac{1}{2} \mu y'^2 + \rho y \right) dx,$$

удовлетворяющую граничным условиям:

$$y(-l) = 0, \quad y'(-l) = 0, \quad y(l) = 0, \quad y'(l) = 0.$$

К этой вариационной задаче сводится нахождение оси изогнутой упругой цилиндрической балки, заделанной на концах. Если балка однородна, то  $\rho$  и  $\mu$  постоянны и уравнение Эйлера — Пуассона имеет вид

$$\rho + \frac{d^2}{dx^2} (\mu y'') = 0 \quad \text{или} \quad y^{IV} = -\frac{\rho}{\mu},$$

откуда

$$y = -\frac{\rho x^4}{24\mu} + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

Используя граничные условия, окончательно находим

$$y = -\frac{\rho}{24\mu} (x^4 - 2l^2 x^2 + l^4) \quad \text{или} \quad y = -\frac{\rho}{24\mu} (x^2 - l^2)^2.$$

Если функционал  $v$  имеет вид

$$v[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \dots, y^{(n)}, z, z', \dots, z^{(m)}) dx,$$

то, варьируя только  $y(x)$  и считая  $z(x)$  фиксированным, мы находим, что функции  $y(x)$  и  $z(x)$ , реализующие экстремум, должны удовлетворять уравнению Эйлера — Пуассона

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0,$$

а варьируя  $z(x)$  и считая  $y(x)$  фиксированным, получим, что те же функции должны удовлетворять уравнению

$$F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} + \dots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} F_{z^{(m)}} = 0.$$

Итак, функции  $z(x)$  и  $y(x)$  должны удовлетворять системе двух уравнений

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0,$$

$$F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} + \dots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} F_{z^{(m)}} = 0.$$

Точно так же можно рассуждать и при исследовании на экстремум функционала, зависящего от любого числа функций:

$$v[y_1, y_2, \dots, y_n] =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(n_2)}, \dots$$

$$\dots, y_m, y_m', \dots, y_m^{(n_m)}) dx.$$

Варьируя какую-нибудь одну функцию  $y_i(x)$  и сохраняя остальные неизменными, получим основное необходимое условие экстремума в виде

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} + \dots + (-1)^{n_i} \frac{d^{n_i}}{dx^{n_i}} F_{y_i^{(n_i)}} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

### § 5. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных

Исследуем на экстремум функционал

$$v[z(x, y)] = \int_D \int F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy,$$

причем на границе  $C$  области  $D$  значения функции  $z(x, y)$  заданы, т. е. задан пространственный контур  $\tilde{C}$ , через который должны

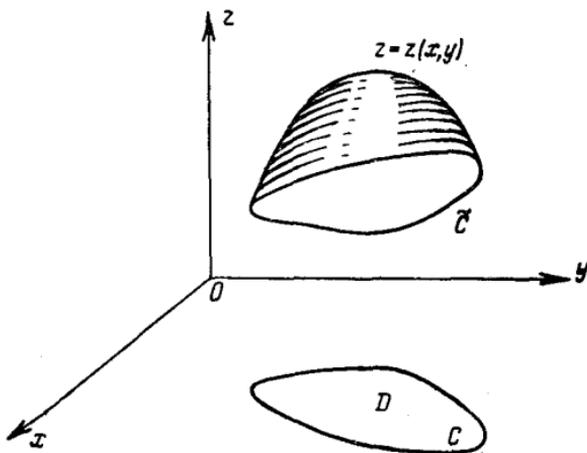


Рис. 6.13.

проходить все допустимые поверхности (рис. 6.13). Для сокращения записи обозначим:  $\frac{\partial z}{\partial x} = p$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = q$ . Функцию  $F$  будем считать трижды дифференцируемой. Поверхность  $z = z(x, y)$ , на которой реализуется экстремум, будем предполагать дважды дифференцируемой.

Рассмотрим опять однопараметрическое семейство поверхностей  $z = z(x, y, \alpha) = z(x, y) + \alpha \delta z$ , где  $\delta z = \bar{z}(x, y) - z(x, y)$ , включающее при  $\alpha = 0$  поверхность  $z = z(x, y)$ , на которой реализуется экстремум, а при  $\alpha = 1$  — некоторую допустимую поверхность  $z = \bar{z}(x, y)$ . На функциях семейства  $z(x, y, \alpha)$  функционал  $v$  пре-

вращается в функцию  $\alpha$ , которая должна иметь экстремум при  $\alpha = 0$ ; следовательно,  $\frac{\partial}{\partial \alpha} v[z(x, y, \alpha)]|_{\alpha=0} = 0$ . Называя в соответствии с § 1 производную от  $v[z(x, y, \alpha)]$  по  $\alpha$  при  $\alpha = 0$  *вариацией функционала* и обозначая ее  $\delta v$ , будем иметь:

$$\delta v = \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_D \int F(x, y, z(x, y, \alpha), p(x, y, \alpha), q(x, y, \alpha)) dx dy \right\}_{\alpha=0} = \\ = \int_D \int [F_z \delta z + F_p \delta p + F_q \delta q] dx dy,$$

где

$$z(x, y, \alpha) = z(x, y) + \alpha \delta z,$$

$$p(x, y, \alpha) = \frac{\partial z(x, y, \alpha)}{\partial x} = p(x, y) + \alpha \delta p,$$

$$q(x, y, \alpha) = \frac{\partial z(x, y, \alpha)}{\partial y} = q(x, y) + \alpha \delta q.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x} \{F_p \delta z\} = \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} \delta z + F_p \delta p,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \{F_q \delta z\} = \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \delta z + F_q \delta q,$$

то

$$\int_D \int (F_p \delta p + F_q \delta q) dx dy = \\ = \int_D \int \left[ \frac{\partial}{\partial x} \{F_p \delta z\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q \delta z\} \right] dx dy - \\ - \int_D \int \left[ \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \right] \delta z dx dy,$$

где  $\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\}$  — так называемая полная частная производная по  $x$ . При ее вычислении  $y$  считается фиксированным, но зависимость  $z$ ,  $p$  и  $q$  от  $x$  учитывается:

$$\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} = F_{px} + F_{pz} \frac{\partial z}{\partial x} + F_{pp} \frac{\partial p}{\partial x} + F_{pq} \frac{\partial q}{\partial x}$$

и аналогично

$$\frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = F_{qy} + F_{qz} \frac{\partial z}{\partial x} + F_{qp} \frac{\partial p}{\partial y} + F_{qq} \frac{\partial q}{\partial y}.$$

По известной формуле Грина

$$\int_D \int \left( \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \int_C (N dy - M dx)$$

получим

$$\int_D \int \left[ \frac{\partial}{\partial x} \{F_p \delta z\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q \delta z\} \right] dx dy = \int_C (F_p dy - F_q dx) \delta z = 0.$$

Последний интеграл равен нулю, так как на контуре  $C$  вариация  $\delta z = 0$ , потому что все допустимые поверхности проходят через один и тот же пространственный контур  $\tilde{C}$ . Следовательно,

$$\int_D \int [F_p \delta p + F_q \delta q] dx dy = - \int_D \int \left[ \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \right] \delta z dx dy,$$

и необходимое условие экстремума

$$\int_D \int (F_z \delta z + F_p \delta p + F_q \delta q) dx dy = 0$$

принимает вид

$$\int_D \int \left( F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \right) \delta z dx dy = 0.$$

Так как вариация  $\delta z$  произвольна (на  $\delta z$  наложены лишь ограничения общего характера, касающиеся непрерывности и дифференцируемости, обращения в нуль на контуре  $C$  и т. д.), а первый множитель непрерывен, то по основной лемме (стр. 296) на поверхности  $z = z(x, y)$ , реализующей экстремум,

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \equiv 0.$$

Следовательно,  $z(x, y)$  является решением уравнения

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = 0.$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных, которому должна удовлетворять функция  $z(x, y)$ , реализующая экстремум, носит название *уравнения Остроградского* по имени выдающегося русского математика М. В. Остроградского, который в 1834 году впервые получил это уравнение, однако для прямоугольных областей  $D$  оно встречалось уже в работах Л. Эйлера.

Пример 1.

$$v[z(x, y)] = \int_D \int \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

на границе  $C$  области  $D$  значения функции  $z$  заданы:  $z = f(x, y)$ . Уравнение Остроградского в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

или в краткой записи

$$\Delta z = 0,$$

т. е. является известным уравнением Лапласа, причем надо найти непрерывное в  $D$  решение этого уравнения, принимающее заданные значения на границе области  $D$ . Это — одна из основных задач математической физики, называемая задачей Дирихле.

Пример 2.

$$v[z(x, y)] = \int_D \int \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 2zf(x, y) \right] dx dy,$$

на границе области  $D$  функция  $z$  задана. Уравнение Остроградского в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y),$$

или в краткой записи

$$\Delta z = f(x, y).$$

Это уравнение, называемое уравнением Пуассона, также весьма часто встречается в задачах математической физики.

Пример 3. Задача о нахождении поверхности минимальной площади, натянутой на данный контур  $C$ , сводится к исследованию на минимум функционала

$$S[z(x, y)] = \int_D \int \sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy.$$

Уравнение Остроградского в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \right\} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left[ 1 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left[ 1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right] = 0,$$

т. е. средняя кривизна в каждой точке равна нулю. Известно, что физической реализацией минимальных поверхностей являются мыльные пленки, натянутые на заданный контур  $C$ .

Для функционала

$$\begin{aligned} v[z(x_1, x_2, \dots, x_n)] &= \\ &= \int_D \int \dots \int F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n, \end{aligned}$$

где  $p_l = \frac{\partial z}{\partial x_l}$ , из основного необходимого условия экстремума  $\delta v = 0$  совершенно аналогично получим следующее уравнение Остроградского:

$$F_z - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \{F_{p_i}\} = 0,$$

которому должна удовлетворять функция

$$z = z(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

реализующая экстремум функционала  $v$ .

Например, для функционала

$$v = \int_D \int \int \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz$$

уравнение Остроградского имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Если подинтегральная функция функционала  $v$  зависит от производных более высокого порядка, то, применяя несколько раз преобразования, использованные при выводе уравнения Остроградского, в качестве необходимого условия экстремума получаем, что функция, реализующая экстремум, должна удовлетворять уравнению, аналогичному уравнению Эйлера — Пуассона (стр. 310).

Например, для функционала

$$v[z(x, y)] = \int_D \int F \left( x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) dx dy$$

получим уравнение

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{F_r\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \{F_s\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{F_t\} = 0,$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Этому уравнению четвертого порядка в частных производных должна удовлетворять функция, реализующая экстремум функционала  $v$ .

Например, для функционала

$$v = \int_D \int \left[ \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

функция  $z$ , реализующая экстремум, должна удовлетворять так называемому *бигармоническому уравнению*

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0,$$

которое обычно кратко записывается так:  $\Delta\Delta z = 0$ .

Для функционала

$$v = \int_D \int \left[ \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2zf(x, y) \right] dx dy$$

функция  $z(x, y)$ , реализующая экстремум, должна удовлетворять уравнению  $\Delta\Delta z = f(x, y)$ .

К бигармоническому уравнению приводят также задачи на экстремум функционала

$$v = \int_D \int \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 dx dy$$

или функционала более общего вида

$$v = \int_D \int \left\{ \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \mu) \left[ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy,$$

где  $\mu$  — параметр.

## § 6. Вариационные задачи в параметрической форме

Во многих вариационных задачах решение удобнее искать в параметрическом виде. Например, в изопериметрической задаче (см. стр. 282) о нахождении замкнутой кривой заданной длины  $l$ , ограничивающей максимальную площадь  $S$ , неудобно искать решение в виде  $y = y(x)$ , так как по самому смыслу задачи функция  $y(x)$  неоднозначна (рис. 6.14), поэтому в рассматриваемой задаче целесообразно искать решение в параметрической форме:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ . Следовательно, в данном случае надо искать экстремум функционала

$$S[x(t), y(t)] = \frac{1}{2} \int_0^T (x\dot{y} - y\dot{x}) dt$$

при наличии условия  $l = \int_0^T \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$ , где  $l$  — постоянная.

Пусть при исследовании на экстремум некоторого функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

оказалось более целесообразным искать решение в параметрической форме  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ; тогда функционал преобразуется к следующему виду:

$$v[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) \dot{x}(t) dt.$$

Заметим, что полученная после преобразования переменных подинтегральная функция

$$F\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) \dot{x}(t)$$

не содержит  $t$  явно и является по отношению к переменным  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$  однородной функцией первой степени однородности.

Таким образом, функционал  $v[x(t), y(t)]$  является не произвольным функционалом вида

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t, x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)) dt,$$

зависящим от двух функций  $x(t)$  и  $y(t)$ , а лишь весьма частным случаем такого функционала, так как его подинтегральная функция не содержит

явно  $t$  и однородна первой степени однородности по отношению к переменным  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$ .

Если бы мы перешли к какому-нибудь другому параметрическому представлению искомой кривой  $x = x(\tau)$ ,  $y = y(\tau)$ , то функционал  $v[x, y]$  преобразовался бы к

виду  $\int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(x, y, \frac{\dot{y}_\tau}{\dot{x}_\tau}\right) \dot{x}_\tau d\tau$ . Следовательно,

подинтегральная функция функционала  $v$  не меняет своего вида при изменении параметрического представления кривой. Таким образом, функционал  $v$  зависит от вида кривой, а не от ее параметрического представления.

Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения: если подинтегральная функция функционала

$$v[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t, x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)) dt$$

не содержит  $t$  явно и является однородной функцией первой степени однородности относительно  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$ , то функционал  $v[x(t), y(t)]$  зависит лишь от вида кривой  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , а не от ее параметрического представления. Действительно, пусть

$$v[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)), dt,$$

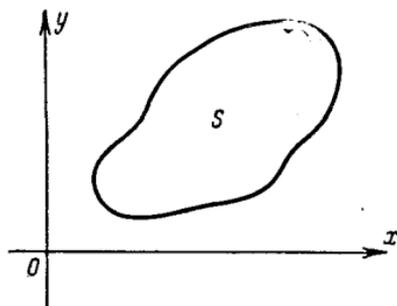


Рис. 6.14.

где

$$\Phi(x, y, k\dot{x}, k\dot{y}) = k\Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}).$$

Перейдем к новому параметрическому представлению, полагая

$$\tau = \varphi(t) \quad (\dot{\varphi}(t) \neq 0), \quad x = x(\tau), \quad y = y(\tau).$$

Тогда

$$\int_t^{t_1} \Phi(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)) dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Phi(x(\tau), y(\tau), \dot{x}_\tau(\tau), \dot{y}_\tau(\tau)) \dot{\varphi}(t) \frac{d\tau}{\dot{\varphi}(t)}.$$

В силу того, что  $\Phi$  является однородной функцией первой степени однородности относительно  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$ , будем иметь

$$\Phi(x, y, \dot{x}_\tau \dot{\varphi}, \dot{y}_\tau \dot{\varphi}) = \dot{\varphi} \Phi(x, y, \dot{x}_\tau, \dot{y}_\tau),$$

откуда

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, y, \dot{x}_t, \dot{y}_t) dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Phi(x, y, \dot{x}_\tau, \dot{y}_\tau) d\tau.$$

т. е. подынтегральная функция не изменилась при изменении параметрического представления.

Длина дуги  $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$  (\*), площадь, ограниченная некоторой кривой

$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x\dot{y} - y\dot{x}) dt$ , являются примерами таких функционалов.

Для нахождения экстремалей функционалов рассматриваемого типа

$$v[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt,$$

где  $\Phi$  — однородная функция первой степени однородности относительно  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$ , как и для функционалов с произвольной подынтегральной функцией  $\Phi(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$ , надо решить систему уравнений Эйлера

$$\Phi_x - \frac{d}{dt} \Phi_{\dot{x}} = 0; \quad \Phi_y - \frac{d}{dt} \Phi_{\dot{y}} = 0.$$

Однако в рассматриваемом частном случае эти уравнения не являются независимыми, так как им должны удовлетворять наряду с некоторым решением  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  и любые другие пары функций, дающие другое параметрическое представление той же кривой, что в случае независимости уравнений Эйлера привело бы к противоречию с теоремой существования

\*) Функция  $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$  является *положительно* однородной первой степени однородности, т. е. для нее условие  $F(kx, ky) = kF(x, y)$  удовлетворяется лишь при положительных  $k$ , однако этого вполне достаточно для справедливости излагаемой в этом параграфе теории, так как при замене переменных  $\tau = \varphi(t)$  можно считать  $\dot{\varphi}(t) > 0$ .

и единственности решения системы дифференциальных уравнений (см. стр. 75). Это указывает на то, что для функционалов вида

$$v[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt,$$

где  $\Phi$  — однородная функция первой степени однородности относительно  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$ , одно из уравнений Эйлера является следствием другого. Для нахождения экстремалей надо взять одно из уравнений Эйлера и проинтегрировать его совместно с уравнением, определяющим выбор параметра. Например, к уравнению  $\Phi_x - \frac{d}{dt} \Phi_{\dot{x}} = 0$  можно присоединить уравнение  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$ , указывающее, что за параметр взята длина дуги кривой.

## § 7. Некоторые приложения

Основным вариационным принципом в механике является принцип стационарного действия Остроградского — Гамильтона, утверждающий, что среди возможных, т. е. совместимых со связями, движений системы материальных точек в действительности осуществляется движение, дающее стационарное значение (т. е. значение, соответствующее аргументу, для которого вариация функционала равна нулю) интегралу

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt,$$

где  $T$  — кинетическая, а  $U$  — потенциальная энергия системы.

Применим этот принцип к нескольким задачам механики.

Пример 1. Дана система материальных точек с массами  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и координатами  $(x_i, y_i, z_i)$ , на которую действуют силы  $\bar{F}_i$ , обладающие силовой функцией (потенциалом) —  $U$ , зависящей только от координат:

$$F_{ix} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad F_{iy} = -\frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad F_{iz} = -\frac{\partial U}{\partial z_i},$$

где  $F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}$  — координаты вектора  $\bar{F}_i$ , действующего на точку  $(x_i, y_i, z_i)$ . Найти дифференциальные уравнения движения системы. В данном случае кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2),$$

а потенциальная энергия системы равна  $U$ . Система уравнений Эйлера для интеграла

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$$

имеет вид

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = 0; \quad -\frac{\partial U}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} = 0; \quad -\frac{\partial U}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} = 0,$$

или

$$m_i \ddot{x}_i - F_{ix} = 0; \quad m_i \ddot{y}_i - F_{iy} = 0; \quad m_i \ddot{z}_i - F_{iz} = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n).$$

Если бы движение было подчинено еще некоторой системе независимых связей

$$\varphi_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n, z_1, z_2, \dots, z_n) = 0 \\ (j = 1, 2, \dots, m, m < 3n),$$

то из уравнений связей можно было бы выразить  $m$  переменных через  $3n - m$  независимых переменных (не считая времени  $t$ ) или выразить все  $3n$  переменных через  $3n - m$  новых, уже независимых, координат

$$q_1, q_2, \dots, q_{3n-m}$$

Тогда  $T$  и  $U$  можно было бы также рассматривать как функции

$$q_1, q_2, \dots, q_{3n-m} \text{ и } t;$$

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_{3n-m}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{3n-m}, t),$$

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_{3n-m}, t),$$

и система уравнений Эйлера имела бы вид

$$\frac{\partial (T - U)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 3n - m).$$

**Пример 2.** Выведем дифференциальное уравнение свободных колебаний струны.

Поместим начало координат в один из концов струны. Струна в состоянии покоя под влиянием натяжения расположена вдоль некоторой прямой, по которой направим ось абсцисс (рис. 6.15). Отклонение от положения равновесия  $u(x, t)$  будет функцией абсциссы  $x$  и времени  $t$ .

Потенциальная энергия  $U$  элемента абсолютно гибкой струны пропорциональна растяжению струны. Участок струны  $dx$  в деформированном состоянии, с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, имеет длину  $ds = \sqrt{1 + u_x'^2} dx$  и, следовательно, удлинение элемента равно  $(\sqrt{1 + u_x'^2} - 1) dx$ . По формуле Тейлора  $\sqrt{1 + u_x'^2} \approx 1 + \frac{1}{2} u_x'^2$ .

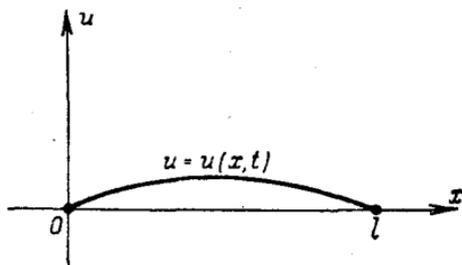


Рис. 6.15.

Считая  $u_x'$  малым и пренебрегая более высокими степенями  $u_x'$  получим, что потенциальная энергия элемента равна  $\frac{1}{2} k u_x'^2 dx$ , где  $k$  — множитель

пропорциональности, а потенциальная энергия всей струны равна

$$\frac{1}{2} \int_0^l k u_x'^2 dx.$$

Кинетическая энергия струны равна

$$\frac{1}{2} \int_0^l \rho u_t'^2 dx,$$

где  $\rho$  — плотность. Интеграл  $\int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$  имеет в данном случае вид

$$v = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[ \frac{1}{2} \rho u_t'^2 - \frac{1}{2} k u_x'^2 \right] dx dt.$$

Уравнение движения струны будет уравнением Остроградского для функционала  $v$ . Итак, уравнение движения струны имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_t') - \frac{\partial}{\partial x} (k u_x') = 0.$$

Если струна однородна, то  $\rho$  и  $k$  — постоянные, и уравнение колеблющейся струны упрощается:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Допустим теперь, что на струну действует еще внешняя сила  $f(t, x)$ , перпендикулярная к струне в ее положении равновесия и рассчитанная на единицу массы. Как легко проверить, силовая функция этой внешней силы, действующей на элемент струны, равна  $\rho f(t, x) u dx$ ; следовательно, ин-

теграл Остроградского — Гамильтона  $\int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$  имеет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[ \frac{1}{2} \rho u_t'^2 - \frac{1}{2} k u_x'^2 + \rho f(t, x) u \right] dx dt,$$

а уравнение вынужденных колебаний струны

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_t') - \frac{\partial}{\partial x} (k u_x') - \rho f(t, x) = 0,$$

или, если струна однородна,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{k}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x).$$

Совершенно аналогично может быть получено уравнение колеблющейся мембраны.

Пример 3. Выведем уравнение колебаний прямолинейного стержня. Направим ось абсцисс по оси стержня, находящегося в положении равнове-

сия. Отклонение от положения равновесия  $u(x, t)$  будет функцией  $x$  и времени  $t$ , кинетическая энергия стержня длины  $l$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho u_t'^2 dx.$$

Будем считать стержень нерастяжимым. Потенциальная энергия упругого стержня при постоянной кривизне пропорциональна квадрату кривизны. Следовательно, дифференциал  $dU$  потенциальной энергии стержня равен

$$dU = \frac{1}{2} k \left\{ \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}} \right\}^2,$$

а потенциальная энергия всего стержня, кривизна оси которого, вообще говоря, переменна, будет равна

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}} \right\}^2 dx.$$

Предположим, что отклонения стержня от положения равновесия малы и членом  $\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$  в знаменателе можно пренебречь; тогда

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx.$$

Интеграл Остроградского — Гамильтона имеет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[ \frac{1}{2} \rho u_t'^2 - \frac{1}{2} k u_{xx}''^2 \right] dx dt.$$

Следовательно, в случае свободных колебаний упругого стержня будем иметь следующее уравнение движения:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_t') + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (k u_{xx}'') = 0.$$

Если стержень однороден, то  $\rho$  и  $k$  — постоянные, и уравнение колебаний стержня преобразуется к виду

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$$

Если на стержень действует внешняя сила  $f(t, x)$ , то надо еще учесть потенциал этой силы (см. предыдущий пример).

Принцип стационарного действия может быть применен при выводе уравнений поля. Рассмотрим скалярное, векторное или тензорное

поле  $w = w(x, y, z, t)$ . Интеграл  $\int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$  в данном случае, вообще говоря, будет равен четырехкратному интегралу по пространственным координатам  $x, y, z$  и по времени  $t$  от некоторой функции  $L$ , называемой *плотностью функции Лагранжа* или *лагранжианом*.

Обычно лагранжиан является функцией  $w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial t}$ :

$$L = L\left(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial t}\right),$$

и, следовательно, действие имеет вид

$$\int \int \int \int_D L\left(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial t}\right) dx dy dz dt. \quad (6.3)$$

Согласно принципу стационарного действия уравнение поля является уравнением Остроградского для функционала (6.3):

$$L_w - \frac{\partial}{\partial x} \{L_{p_1}\} - \frac{\partial}{\partial y} \{L_{p_2}\} - \frac{\partial}{\partial z} \{L_{p_3}\} - \frac{\partial}{\partial t} \{L_{p_4}\} = 0,$$

где

$$p_1 = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad p_2 = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad p_3 = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad p_4 = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

#### Задачи к главе 6

1. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx.$$

2. Исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int (y^2 + 2xyy') dx; \quad y(x_0) = y_0; \quad y(x_1) = y_1.$$

3. Исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2y') dx; \quad y(0) = 1; \quad y(1) = 2.$$

4. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y'(1 + x^2y') dx.$$

5. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2yy' - 16y^2) dx.$$

6. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_x^{x_1} (xy' + y'^2) dx.$$

7. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1+y^2}{y'^2} dx.$$

8. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2 - 2y \sin x) dx.$$

9. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_1}^{x_1} (16y^2 - y''^2 + x^2) dx.$$

10. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (2xy + y'''^2) dx.$$

11. Найти экстремали функционала

$$v[y(x), z(x)] = \int_x^{x_1} (2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2) dx.$$

12. Написать уравнение Остроградского для функционала

$$v[z(x, y)] = \int_D \int \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

13. Написать уравнение Остроградского для функционала

$$v[u(x, y, z)] = \int_D \int \int \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2uf(x, y, z) \right] dx dy dz.$$

14. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{y'^2}{x^3} dx.$$

15. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2 + 2ye^x) dx.$$

16. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 - y'^2 - 2y \sin x) dx.$$

17. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \left[ y^2 + (y')^2 + \frac{2y}{\operatorname{ch} x} \right] dx.$$

18. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [x^2 (y')^2 + 2y^2 + 2xy] dx.$$

19. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [(y'')^2 - 2(y')^2 + y^2 - 2y \sin x] dx.$$

20. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [(y''')^2 + y^2 - 2yx^3] dx.$$


---

## ГЛАВА 7

### ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ И НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ ЗАДАЧИ

#### § 1. Простейшая задача с подвижными границами

В главе 6 при исследовании функционала

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

предполагалось, что граничные точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1, y_1)$  заданы. Предположим теперь, что одна или обе граничные точки могут перемещаться. Тогда класс допустимых кривых расширяется, — кроме кривых сравнения, имеющих общие граничные точки с исследуемой кривой, можно уже брать и кривые со смещенными граничными точками.

Поэтому если на какой-нибудь кривой  $y = y(x)$  достигается экстремум в задаче с подвижными граничными точками, то экстремум тем более достигается по отношению к более узкому классу кривых, имеющих общие граничные точки с кривой  $y = y(x)$ , и, следовательно, должно быть выполнено основное, необходимое для достижения экстремума в задаче с неподвижными границами условие — функция  $y(x)$  должна быть решением уравнения Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

Итак, кривые  $y = y(x)$ , на которых реализуется экстремум в задаче с подвижными границами, должны быть экстремалиями.

Общее решение уравнения Эйлера содержит две произвольные постоянные, для определения которых необходимо иметь два условия. В задаче с неподвижными граничными точками такими условиями были

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{и} \quad y(x_1) = y_1.$$

В задаче с подвижными границами одно или оба эти условия отсутствуют и недостающие условия для определения произвольных постоянных общего решения уравнения Эйлера должны быть получены из основного необходимого условия экстремума — равенства нулю вариации  $\delta v$ .

Так как в задаче с подвижными границами экстремум достигается лишь на решениях  $y = y(x, C_1, C_2)$  уравнения Эйлера, то в дальнейшем можно рассматривать значение функционала лишь на функциях этого семейства. При этом функционал  $v[y(x, C_1, C_2)]$  превращается

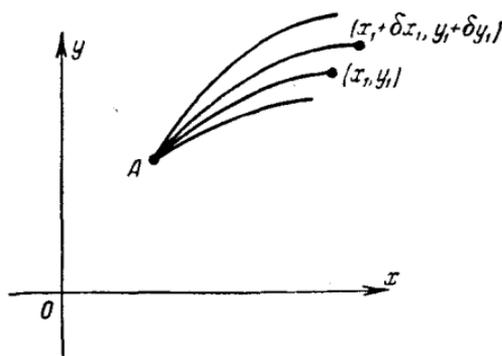


Рис. 7.1.

в функцию параметров  $C_1$  и  $C_2$  и пределов интегриции  $x_0$  и  $x_1$ , а вариация функционала совпадает с дифференциалом этой функции. Для упрощения будем считать, что одна из граничных точек, например  $(x_0, y_0)$ , закреплена, а другая  $(x_1, y_1)$  может перемещаться и переходит в точку  $(x_1 + \Delta x_1, y_1 + \Delta y_1)$ , или, как обычно обозначают в вариационном исчислении,  $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ .

Допустимые кривые  $y = y(x)$  и  $y = y(x) + \delta y$  будем считать близкими, если модули вариаций  $\delta y$  и  $\delta y'$  малы, и малы модули приращений  $\delta x_1$  и  $\delta y_1$  (приращения  $\delta x_1$  и  $\delta y_1$  обычно называют вариациями предельных значений  $x_1$  и  $y_1$ ).

Экстремали, проходящие через точку  $(x_0, y_0)$ , образуют пучок экстремалей  $y = y(x, C_1)$ . Функционал  $v[y(x, C_1)]$  на кривых этого пучка превращается в функцию  $C_1$  и  $x_1$ . Если кривые пучка  $y = y(x, C_1)$  в окрестности рассматриваемой экстремали не пересекаются, то  $v[y(x, C_1)]$  можно рассматривать как однозначную функцию  $x_1$  и  $y_1$ , так как задание  $x_1$  и  $y_1$  определяет экстремаль пучка (рис. 7.1) и тем самым определяет значение функционала.

Вычислим вариацию функционала  $v[y(x, C_1)]$  на экстремальных кривых пучка  $y = y(x, C_1)$  при перемещении граничной точки из положения  $(x_1, y_1)$  в положение  $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ . Так как функционал  $v$  на кривых пучка превратился в функцию  $x_1$  и  $y_1$ , то его вариация

совпадает с дифференциалом этой функции. Выделим из приращения  $\Delta v$  главную линейную по отношению к  $\delta x_1$  и  $\delta y_1$  часть:

$$\begin{aligned} \Delta v &= \int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y') dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y') dx + \\ &+ \int_{x_1}^{x_1} [F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y')] dx. \quad (7.1) \end{aligned}$$

Первое слагаемое правой части преобразуем с помощью теоремы о среднем значении:

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y') dx = F|_{x=x_1+\theta\delta x_1} \delta x_1, \text{ где } 0 < \theta < 1,$$

в силу непрерывности функции  $F$  будем иметь:

$$F|_{x=x_1+\theta\delta x_1} = F(x, y, y')|_{x=x_1} + \varepsilon_1,$$

где  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  при  $\delta x_1 \rightarrow 0$  и  $\delta y_1 \rightarrow 0$ .

Итак,

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y') dx = F(x, y, y')|_{x=x_1} \delta x_1 + \varepsilon_1 \delta x_1.$$

Второе слагаемое правой части (7.1) преобразуем путем разложения подынтегральной функции по формуле Тейлора

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y')] dx &= \\ &= \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y, y')\delta y + F_{y'}(x, y, y')\delta y'] dx + R_1, \end{aligned}$$

где  $R_1$  является бесконечно малой более высокого порядка, чем  $\delta y$  или  $\delta y'$ . В свою очередь линейная часть

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx$$

может быть преобразована путем интегрирования по частям второго слагаемого подынтегральной функции к виду

$$[F_{y'} \delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left( F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx.$$

Значения функционала берутся лишь на экстремалях, следовательно,  $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \equiv 0$ . Так как граничная точка  $(x_0, y_0)$  закреплена, то  $\delta y|_{x=x_0} = 0$ . Следовательно,

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx = [F_{y'} \delta y]_{x=x_1}.$$

Заметим, что  $\delta y|_{x=x_1}$  не равно  $\delta y_1$  — приращению  $y_1$ , так как  $\delta y_1$  — это приращение  $y_1$  при перемещении граничной точки в положение

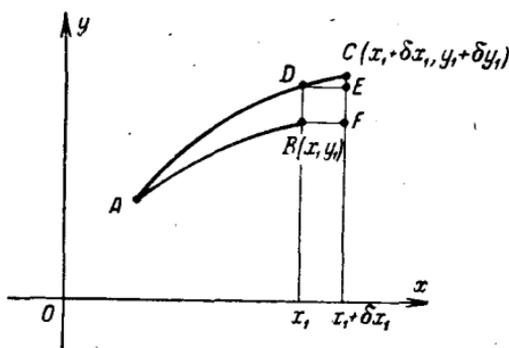


Рис. 7.2.

$(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ , а  $\delta y|_{x=x_1}$  — это приращение ординаты в точке  $x_1$  при переходе от экстремали, проходящей через точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1, y_1)$  к экстремали, проходящей через точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$  (рис. 7.2).

Из чертежа видно, что  $BD = \delta y|_{x=x_1}$ ;  $FC = \delta y_1$ ;

$$EC \approx y'(x_1) \delta x_1; \quad BD = FC - EC$$

или

$$\delta y|_{x=x_1} \approx \delta y_1 - y'(x_1) \delta x_1.$$

При этом приближенное равенство справедливо с точностью до бесконечно малых более высокого порядка.

Итак, окончательно имеем: 
$$\int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} F dx \approx F|_{x=x_1} \delta x_1;$$

$$\int_x^{x_1} [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')] dx \approx \approx F_{y'}|_{x=x_1} \cdot (\delta y_1 - y'(x_1) \delta x_1),$$

где приближенные равенства также справедливы с точностью до членов порядка выше первого относительно  $\delta x_1$  и  $\delta y_1$ . Следовательно, из (7.1) получим

$$\begin{aligned} \delta v &= F|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1} (\delta y_1 - y'(x_1) \delta x_1) = \\ &= (F - y' F_{y'})|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1, \end{aligned}$$

или

$$d\bar{v}(x_1, y_1) = (F - y' F_{y'})|_{x=x_1} dx_1 + F_{y'}|_{x=x_1} dy_1,$$

где  $\bar{v}(x_1, y_1)$  — функция, в которую превратился функционал  $v$  на экстремальных  $y = y(x, C_1)$ , а  $dx_1 = \Delta x_1 = \delta x_1$ ,  $dy_1 = \Delta y_1 = \delta y_1$  — приращения координат граничной точки. Основное необходимое условие экстремума  $\delta v = 0$  приобретает вид

$$(F - y' F_{y'})|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1 = 0. \quad (7.2)$$

Если вариации  $\delta x_1$  и  $\delta y_1$  независимы, то отсюда следует, что

$$(F - y' F_{y'})|_{x=x_1} = 0 \quad \text{и} \quad F_{y'}|_{x=x_1} = 0.$$

Однако чаще приходится рассматривать случай, когда вариации  $\delta x_1$  и  $\delta y_1$  зависимы.

Пусть, например, правая граничная точка  $(x_1, y_1)$  может перемещаться по некоторой кривой

$$y_1 = \varphi(x_1).$$

Тогда  $\delta y_1 \approx \varphi'(x_1) \delta x_1$  и, следовательно, условие (7.2) принимает вид  $[F + (\varphi' - y') F_{y'}] \delta x_1 = 0$  или, так как  $\delta x_1$  изменяется произвольно, то  $[F + (\varphi' - y') F_{y'}]_{x=x_1} = 0$ . Это условие устанавливает зависимость между угловыми коэффициентами  $\varphi'$  и  $y'$  в граничной точке. Оно называется *условием трансверсальности*.

Условие трансверсальности совместно с условием  $y_1 = \varphi(x_1)$  позволяет, вообще говоря, определить одну или несколько экстремалей пучка  $y = y(x, C_1)$ , на которых может достигаться экстремум. Если граничная точка  $(x_0, y_0)$  может перемещаться по некоторой кривой  $y_0 = \psi(x_0)$ , то совершенно так же обнаружим, что и в точке  $(x_0, y_0)$  должно удовлетворяться условие трансверсальности

$$[F + (\psi' - y') F_{y'}]_{x=x_0} = 0.$$

Пример 1. Найти условие трансверсальности для функционалов вида

$$v = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Условие трансверсальности  $F + F_{y'}(\varphi' - y') = 0$  имеет в данном случае вид

$$A(x, y) \sqrt{1 + y'^2} + \frac{A(x, y) y'}{\sqrt{1 + y'^2}} (\varphi' - y') = 0 \quad \text{или} \quad \frac{A(x, y)(1 + \varphi' y')}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0;$$

предполагая, что  $A(x, y) \neq 0$  в граничной точке, получим  $1 + y' \varphi' = 0$  или  $y' = -\frac{1}{\varphi'}$ , т. е. условие трансверсальности свелось в данном случае к условию ортогональности.

Пример 2. Исследовать на экстремум функционал  $\int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} dx$ ,

причем  $y(0) = 0$ , а  $y_1 = x_1 - 5$  (рис. 7.3). Интегральными кривыми уравнения Эйлера (пример 1, стр. 324) являются окружности  $(x - C_1)^2 + y^2 = C_2^2$ .

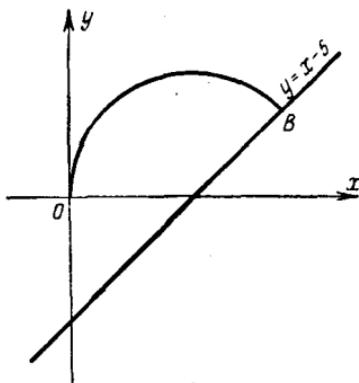


Рис. 7.3.

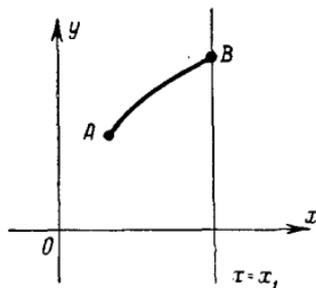


Рис. 7.4.

Первое граничное условие дает  $C_1 = C_2$ . Так как условие трансверсальности для данного функционала сводится к условию ортогональности (см. предыдущий пример), то прямая  $y_1 = x_1 - 5$  должна быть диаметром окружности и, следовательно, центр искомой окружности находится в точке  $(0, 5)$  пересечения прямой  $y_1 = x_1 - 5$  с осью абсцисс. Следовательно,  $(x - 5)^2 + y^2 = 25$ , или  $y = \pm \sqrt{10x - x^2}$ . Итак, экстремум может достигаться лишь на дугах окружности  $y = \sqrt{10x - x^2}$  и  $y = -\sqrt{10x - x^2}$ .

Если граничная точка  $(x_1, y_1)$  может перемещаться лишь по вертикальной прямой (рис. 7.4) и, следовательно,  $\delta x_1 = 0$ , то условие (7.2) переходит в  $F_{y'}|_{x=x_1} = 0$ .

Пусть, например, в задаче о брахистохроне (см. стр. 304) левая граничная точка закреплена, а правая может перемещаться по вертикальной прямой.

Экстремалами функционала  $v = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx$  являются циклоиды, уравнения которых, если принять во внимание условие  $y(0) = 0$ , будут иметь вид

$$\begin{aligned}x &= C_1(t - \sin t), \\y &= C_1(1 - \cos t).\end{aligned}$$

Для определения  $C_1$  используем условие  $F_{y'}|_{x=x_1} = 0$ , которое в данном случае имеет вид

$$\frac{y'}{\sqrt{y} \sqrt{1+y'^2}} \Big|_{x=x_1} = 0,$$

откуда  $y'(x_1) = 0$ , т. е. искомая циклоида должна пересекать прямую  $x = x_1$  под прямым углом и, следовательно, точка  $x = x_1$ ,  $y = y_1$  должна быть

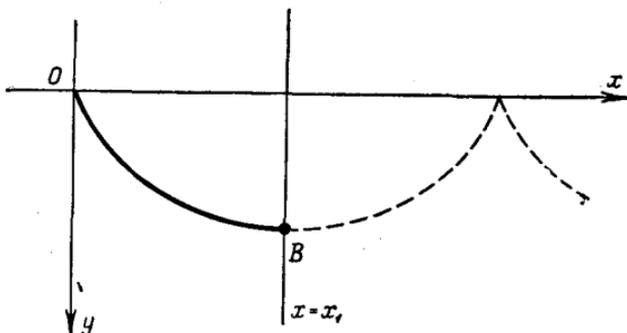


Рис. 7.5.

вершиной циклоиды (рис. 7.5). Так как вершине соответствует значение  $t = \pi$ , то  $x_1 = C_1\pi$ ,  $C_1 = \frac{x_1}{\pi}$ . Следовательно, экстремум может реализоваться лишь на циклоиде

$$x = \frac{x_1}{\pi}(t - \sin t); \quad y = \frac{x_1}{\pi}(1 - \cos t).$$

Если граничная точка  $(x_1, y_1)$  в задаче об экстремуме функционала  $v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$  может перемещаться по горизонтальной прямой  $y = y_1$ , то  $\delta y_1 = 0$  и условие (7.2), или условие трансверсальности, принимает вид

$$[F - y'F_{y'}]_{x=x_1} = 0.$$

## § 2. Задача с подвижными границами

для функционалов вида  $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx$

Если при исследовании на экстремум функционала

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx$$

одна из граничных точек, например  $B(x_1, y_1, z_1)$ , перемещается, а другая,  $A(x_0, y_0, z_0)$ , неподвижна (или обе граничные точки подвижны), то очевидно, что экстремум может достигаться лишь на интегральных кривых системы уравнений Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0; \quad F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0.$$

Действительно, если на некоторой кривой  $C$  реализуется экстремум в задаче с подвижными границами, т. е. достигается максимальное или минимальное значение  $v$  по сравнению со значениями  $v$  на всех близких допустимых кривых, среди которых находятся как кривые, имеющие общие граничные точки с кривой  $C$ , реализующей экстремум, так и кривые, у которых граничные точки не совпадают с граничными точками кривой  $C$ , то тогда подавно на кривой  $C$  достигается экстремум по отношению к более узкому классу близких кривых, имеющих общие граничные точки с кривой  $C$ .

Следовательно, на кривой  $C$  должны удовлетворяться необходимые условия экстремума задачи с неподвижными граничными точками, и, в частности, кривая  $C$  должна быть интегральной кривой системы уравнений Эйлера.

Общее решение системы уравнений Эйлера содержит четыре произвольные постоянные. Зная координаты граничной точки  $A(x_0, y_0, z_0)$ , которую мы считаем неподвижной, можно, вообще говоря, исключить две произвольные постоянные.

Для определения двух других произвольных постоянных необходимо иметь еще два уравнения, которые будут получены из условия  $\delta v = 0$ , причем при вычислении вариации мы уже будем считать, что функционал задается лишь на решениях системы уравнений Эйлера, так как только на них может достигаться экстремум. При этом функционал  $v$  превращается в функцию  $\Phi(x_1, y_1, z_1)$  координат  $x_1, y_1, z_1$  точки  $B(x_1, y_1, z_1)$ , и вариация функционала превращается в дифференциал этой функции\*).

\*) Функция  $\Phi$  будет однозначной, если экстремали пучка с центром в точке  $A$  не пересекаются, так как тогда точка  $B(x_1, y_1, z_1)$  однозначно определяет экстремаль.

Вычисление вариации  $v$  может быть проведено совершенно так же, как на стр. 328 — 331:

$$\begin{aligned} \Delta v &= \int_{x_0}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \delta y, z + \delta z, y' + \delta y', z' + \delta z') dx - \\ &\quad - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \delta y, z + \delta z, y' + \delta y', z' + \delta z') dx + \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y + \delta y, z + \delta z, y' + \delta y', z' + \delta z') - \\ &\quad - F(x, y, z, y', z')] dx. \end{aligned}$$

Применим теорему о среднем значении к первому интегралу и воспользуемся непрерывностью функции  $F$ , а во втором интеграле выделим главную линейную часть с помощью формулы Тейлора. После этих преобразований получим

$$\delta v = F|_{x=x_1} \delta x_1 + \int_{x_0}^{x_1} [F_y \delta y + F_z \delta z + F_{y'} \delta y' + F_{z'} \delta z'] dx.$$

Интегрируя по частям два последних слагаемых, стоящих под знаком интеграла, будем иметь:

$$\begin{aligned} \delta v &= F|_{x=x_1} \delta x_1 + [F_{y'} \delta y]_{x=x_1} + [F_{z'} \delta z]_{x=x_1} + \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_1} \left[ \left( F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y + \left( F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} \right) \delta z \right] dx. \end{aligned}$$

Так как значения  $v$  вычисляются лишь на экстремальных, то

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \equiv 0; \quad F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} \equiv 0$$

и, следовательно,

$$\delta v = F|_{x=x_1} \delta x_1 + [F_{y'} \delta y]_{x=x_1} + [F_{z'} \delta z]_{x=x_1}.$$

Рассуждая так же, как и на стр. 330, получим

$$\delta y|_{x=x_1} \approx \delta y_1 - y'(x_1) \delta x_1 \quad \text{и} \quad \delta z|_{x=x_1} \approx \delta z_1 - z'(x_1) \delta x_1,$$

и, следовательно,

$$\delta v = [F - y' F_{y'} - z' F_{z'}]_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1 + F_{z'}|_{x=x_1} \delta z_1 = 0.$$

Если вариации  $\delta x_1$ ,  $\delta y_1$ ,  $\delta z_1$  независимы, то из условия  $\delta v = 0$  получаем

$$[F - y'F_y - z'F_z]_{x=x_1} = 0; \quad F_y'|_{x=x_1} = 0 \quad \text{и} \quad F_z'|_{x=x_1} = 0.$$

Если граничная точка  $B(x_1, y_1, z_1)$  может перемещаться по некоторой кривой  $y_1 = \varphi(x_1)$ ;  $z_1 = \psi(x_1)$ , то  $\delta y_1 = \varphi'(x_1)\delta x_1$ , а  $\delta z_1 = \psi'(x_1)\delta x_1$  и условие  $\delta v = 0$  или

$$[F - y'F_y - z'F_z]_{x=x_1} \delta x_1 + F_y'|_{x=x_1} \delta y_1 + F_z'|_{x=x_1} \delta z_1 = 0$$

переходит в условие

$$[F + (\varphi' - y')F_y + (\psi' - z')F_z]_{x=x_1} \delta x_1 = 0,$$

откуда в силу произвольности  $\delta x_1$  получим

$$[F + (\varphi' - y')F_y + (\psi' - z')F_z]_{x=x_1} = 0.$$

Это условие носит название *условия трансверсальности* в задаче об исследовании на экстремум функционала

$$v = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, z, y', z') dx.$$

Условие трансверсальности совместно с уравнениями  $y_1 = \varphi(x_1)$ ,  $z_1 = \psi(x_1)$  дает недостающие уравнения для определения произвольных постоянных в общем решении системы уравнений Эйлера.

Если граничная точка  $B(x_1, y_1, z_1)$  может перемещаться по некоторой поверхности  $z_1 = \varphi(x_1, y_1)$ , то  $\delta z_1 = \varphi'_x \delta x_1 + \varphi'_y \delta y_1$ , причем вариации  $\delta x_1$  и  $\delta y_1$  произвольны. Следовательно, условие  $\delta v = 0$  или, в развернутом виде,

$$[F - y'F_y - z'F_z]_{x=x_1} \delta x_1 + F_y'|_{x=x_1} \delta y_1 + F_z'|_{x=x_1} \delta z_1 = 0$$

преобразуется в условие

$$[F - y'F_y - z'F_z + \varphi'_x F_z']_{x=x_1} \delta x_1 + [F_y + F_z \varphi'_y]_{x=x_1} \delta y_1 = 0.$$

Отсюда в силу независимости  $\delta x_1$  и  $\delta y_1$  получим

$$[F - y'F_y + (\varphi'_x - z')F_z']_{x=x_1} = 0, \quad [F_y + F_z \varphi'_y]_{x=x_1} = 0.$$

Эти два условия вместе с уравнением  $z_1 = \varphi(x_1, y_1)$ , вообще говоря, дают возможность определить две произвольные постоянные в общем решении системы уравнений Эйлера.

Если подвижной является граничная точка  $A(x_0, y_0, z_0)$ , то тем же методом в этой точке получим совершенно аналогичные условия.

Если рассмотреть функционал

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx,$$

то без изменения метода доказательства получим, что в случае подвижной точки  $B(x_1, y_{11}, y_{21}, \dots, y_{n1})$  в этой точке

$$\left( F - \sum_{i=1}^n y'_i F_{y'_i} \right) \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + \sum_{i=1}^n F_{y'_i} \Big|_{x=x_1} \delta y_{i1} = 0.$$

Пример 1. Найти условие трансверсальности для функционала

$$v = \int_{x_1}^{x_1} A(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx, \text{ если } z_1 = \varphi(x_1, y_1).$$

Условия трансверсальности

$$[F - y'_i F_{y'_i} + (\varphi'_x - z') F_{z'}]_{x=x_1} = 0 \text{ и } [F_{y'_i} + F_{z'} \varphi'_{y_i}]_{x=x_1} = 0$$

в данном случае имеют вид  $1 + \varphi'_x z' = 0$  и  $y' + \varphi'_{y_i} z' = 0$  при  $x = x_1$  или

$\frac{1}{\varphi'_x} = \frac{y'}{\varphi'_{y_i}} = \frac{z'}{-1}$  при  $x = x_1$ , т. е. являются условием параллельности вектора

касательной  $\vec{t}(1, y', z')$  к искомой экстремали в точке  $(x_1, y_1, z_1)$  и вектора нормали  $\vec{N}(\varphi'_x, \varphi'_{y_i}, -1)$  к поверхности  $z = \varphi(x, y)$  в той же точке. Следовательно, условие трансверсальности становится в данном случае условием ортогональности экстремали к поверхности  $z = \varphi(x, y)$ .

Пример 2. Найти экстремальное расстояние между двумя поверхностями

$$z = \varphi(x, y) \text{ и } z = \psi(x, y).$$

Иначе говоря, найти экстремум интеграла

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx \text{ при условии, что координаты одной из граничных точек } (x_0, y_0, z_0) \text{ удовлетворяют уравнению } z_0 = \varphi(x_0, y_0), \text{ а координаты другой граничной точки } (x_1, y_1, z_1) \text{ удовлетворяют уравнению } z_1 = \psi(x_1, y_1).$$

Так как подынтегральная функция зависит лишь от  $y'$  и  $z'$ , то экстремальными являются прямые линии (см. пример 2, стр. 307). Так как функционал

$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$  является частным случаем рассмотренного в преды-

дущем примере функционала  $\int_{x_0}^{x_1} A(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$ , то условия

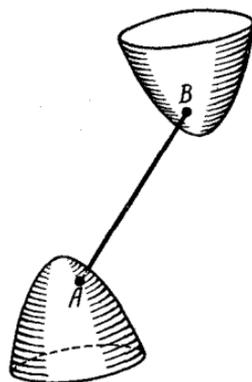


Рис. 7.6.

трансверсальности как в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ , так и в точке  $(x_1, y_1, z_1)$  переходят в условия ортогональности. Следовательно, экстремум может достигаться лишь на прямых, ортогональных как к поверхности  $z = \varphi(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ , так и к поверхности  $z = \psi(x, y)$  в точке  $(x_1, y_1, z_1)$  (рис. 7.6).

Пример 3. Исследовать на экстремум функционал

$$v = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + z'^2 + 2yz) dx, \text{ причем } y(0) = 0; z(0) = 0, \text{ а точка } (x_1, y_1, z_1) \text{ может}$$

перемещаться по плоскости  $x = x_1$ . Система уравнений Эйлера имеет вид  $z'' - y = 0$ ;  $y'' - z = 0$ , откуда  $y^{IV} - y = 0$ ;  $y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$ ,  $z = y''$ ;  $z = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x - C_3 \cos x - C_4 \sin x$ . Из условий  $y(0) = 0$  и  $z(0) = 0$  получаем:  $C_1 + C_3 = 0$  и  $C_1 - C_3 = 0$ , откуда  $C_1 = C_3 = 0$ . Условие в подвижной граничной точке

$$(F - y'F_{y'} - z'F_{z'})_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1 + F_{z'}|_{x=x_1} \delta z_1 = 0$$

переходит в условия

$$F_{y'}|_{x=x_1} = 0 \text{ и } F_{z'}|_{x=x_1} = 0,$$

так как  $\delta x_1 = 0$ , а  $\delta y_1$  и  $\delta z_1$  произвольны. В рассматриваемом примере  $F_{y'} = 2y'$ ;  $F_{z'} = 2z'$ , следовательно

$$y'(x_1) = 0 \text{ и } z'(x_1) = 0$$

или

$$C_2 \operatorname{ch} x_1 + C_4 \cos x_1 = 0 \text{ и } C_2 \operatorname{ch} x_1 - C_4 \cos x_1 = 0.$$

Если  $\cos x_1 \neq 0$ , то  $C_2 = C_4 = 0$  и экстремум может достигаться лишь на прямой  $y = 0$ ;  $z = 0$ . Если же  $\cos x_1 = 0$ , т. е.  $x_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi$ , где  $n$  — целое число, то  $C_2 = 0$ ,  $C_4$  — произвольная постоянная,  $y = C_4 \sin x$ ,  $z = -C_4 \sin x$ . Нетрудно проверить, что в последнем случае при любом  $C_4$  функционал  $v = 0$ .

### § 3. Экстремали с угловыми точками

До сих пор мы рассматривали вариационные задачи, в которых искомая функция  $y = y(x)$  предполагалась непрерывной и имеющей непрерывную производную. Однако во многих задачах последнее требование является неестественным, более того, в некоторых классах вариационных задач решение, как правило, достигается на экстремалих, имеющих угловые точки. К числу таких задач принадлежат, например, задачи на отражение и преломление экстремалей, являющиеся обобщением соответствующих задач на отражение и преломление света.

Задача об отражении экстремалей. Найти кривую, реализующую экстремум функционала  $v = \int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y') dx$  и проходящую через заданные точки  $A(x_0, y_0)$  и  $B(x_2, y_2)$ , причем кривая должна

попасть в точку  $B$  лишь после отражения от заданной линии  $y = \varphi(x)$  (рис. 7.7).

Естественно считать, что в точке отражения  $C(x_1, y_1)$ , может быть угловая точка искомой экстремали и, следовательно, в этой точке левая производная  $y'(x_1 - 0)$  и правая производная  $y'(x_1 + 0)$ , вообще говоря, различны. Поэтому удобнее функционал  $v[y(x)]$  представить в виде

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx + \\ + \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx,$$

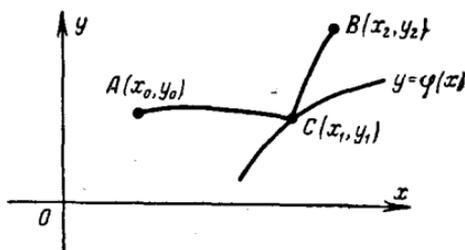


Рис. 7.7.

причем на каждом из интервалов

$x_0 \leq x \leq x_1$  и  $x_1 \leq x \leq x_2$  производная  $y'(x)$  предполагается непрерывной и, следовательно, мы можем пользоваться изложенными выше результатами.

Основное необходимое условие экстремума  $\delta v = 0$  принимает вид

$$\delta v = \delta \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx + \delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx = 0.$$

Так как точка  $(x_1, y_1)$  может перемещаться по кривой  $y = \varphi(x)$ , то

при вычислении вариаций  $\delta \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$  и  $\delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$

мы находимся в условиях задачи с подвижной граничной точкой, движущейся по заданной кривой, и можем использовать результаты § 1 (стр. 327). Очевидно, что кривые  $AC$  и  $CB$  являются экстремалами. Действительно, на этих участках  $y = y(x)$  является решением уравнения Эйлера, так как если считать одну из этих кривых уже найденной и варьировать лишь другую, то задача сводится к нахождению экстремума функционала  $\int_{x_1}^{x_1} F dx$  (или  $\int_{x_1}^{x_2} F dx$ ) в задаче

с закрепленными граничными точками. Поэтому, вычисляя вариацию функционала, будем уже считать, что функционал рассматривается лишь на экстремалах, имеющих угловую точку  $C$ . Тогда

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx = [F + (\varphi' - y') F_{y'}]_{x=x_1-0} \delta x_1$$

и

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx = - [F + (\varphi' - y') F_{y'}]_{x=x_1+0} \delta x_1$$

(см. стр. 331), где знаки  $x = x_1 - 0$  и  $x = x_1 + 0$  означают, что берется предельное значение величины, стоящей в скобках при приближении к точке  $x_1$  в первом случае слева (со стороны значений  $x$ , меньших  $x_1$ ) и во втором случае справа (со стороны значений  $x$ , больших  $x_1$ ). Так как в точке отражения разрывна лишь производная  $y'$ , то в первом случае надо взять в угловой точке левую производную, а во втором случае — правую производную.

Условие  $\delta v = 0$  принимает вид

$$[F + (\varphi' - y') F_{y'}]_{x=x_1-0} \delta x_1 - [F + (\varphi' - y') F_{y'}]_{x=x_1+0} \delta x_1 = 0$$

или, так как  $\delta x_1$  изменяется произвольно, то

$$[F + (\varphi' - y') F_{y'}]_{x=x_1-0} = [F + (\varphi' - y') F_{y'}]_{x=x_1+0}$$

или

$$F(x_1, y_1, y'(x_1 - 0)) + (\varphi'(x_1) - y'(x_1 - 0)) F_{y'}(x_1, y_1, y'(x_1 - 0)) = F(x_1, y_1, y'(x_1 + 0)) + (\varphi'(x_1) - y'(x_1 + 0)) F_{y'}(x_1, y_1, y'(x_1 + 0)).$$

Это условие отражения приобретает особенно простой вид для функционалов типа

$$v = \int_{x_1}^{x_2} A(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

а именно:

$$A(x_1, y_1) \left[ \sqrt{1 + y'^2} + \frac{(\varphi' - y') y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right]_{x=x_1-0} = \\ = A(x_1, y_1) \left[ \sqrt{1 + y'^2} + \frac{(\varphi' - y') y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right]_{x=x_1+0}$$

или, упрощая и сокращая на  $A(x_1, y_1)$  в предположении, что  $A(x_1, y_1) \neq 0$ , получим

$$\frac{1 + \varphi' y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \Big|_{x=x_1-0} = \frac{1 + \varphi' y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \Big|_{x=x_1+0}$$

Обозначив угол между касательной к кривой  $y = \varphi(x)$  и осью абсцисс буквой  $\alpha$ , а углы наклона к оси абсцисс левой и правой

касательных к экстремали в точке отражения  $C$ . соответственно  $\beta_1$  и  $\beta_2$  (рис. 7.8), получим

$$y'(x_1 - 0) = \operatorname{tg} \beta_1, \quad y'(x_1 + 0) = \operatorname{tg} \beta_2; \quad \varphi'(x_1) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Условие в точке отражения приобретает вид

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta_1}{-\sec \beta_1} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta_2}{\sec \beta_2}$$

или после упрощения и умножения на  $\cos \alpha$ :

$$-\cos(\alpha - \beta_1) = \cos(\alpha - \beta_2).$$

Отсюда следует равенство угла падения и угла отражения.

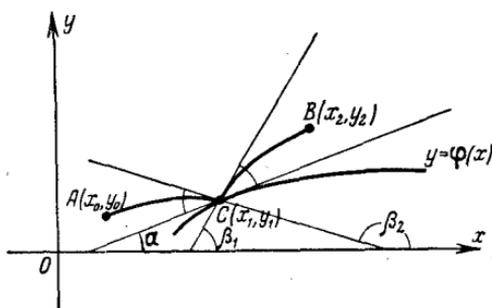


Рис. 7.8.

Если точка движется в некоторой среде со скоростью  $v(x, y)$ , то время  $t$ , затрачиваемое на перемещение точки из положения  $A(x_0, y_0)$  в положение  $B(x_1, y_1)$ , равно интег-

ралю  $\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x, y)} dx$ , который принад-

лежит к рассматриваемому виду функци-

оналов  $\int_{x_0}^{x_1} A(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx$ , и сле-

довательно, при любом законе измене-  
ния скорости  $v(x, y)$  в точке отражения угол падения равен углу  
отражения.

Если бы точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  были расположены иначе, например так как они расположены на рис. 7.9, то для получения того же условия в точке отражения из-за двужначности функции  $y = y(x)$  удобнее было бы проводить исследование в параметрической форме.

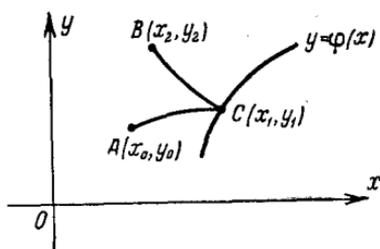


Рис. 7.9.

Преломление экстремалей. Предположим, что подынтегральная функция функционала  $v = \int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y') dx$  в рассматриваемой области имеет линию разрыва  $y = \varphi(x)$ , а граничные точки  $A$  и  $B$  расположены по разные стороны линии разрыва (рис. 7.10).

Представим функционал  $v$  в виде

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F_1(x, y, y') dx + \int_{x_1}^{x_2} F_2(x, y, y') dx,$$

где  $F_1(x, y, y') = F(x, y, y')$  с одной стороны линии разрыва, а  $F_2(x, y, y') = F(x, y, y')$  с другой стороны линии разрыва.

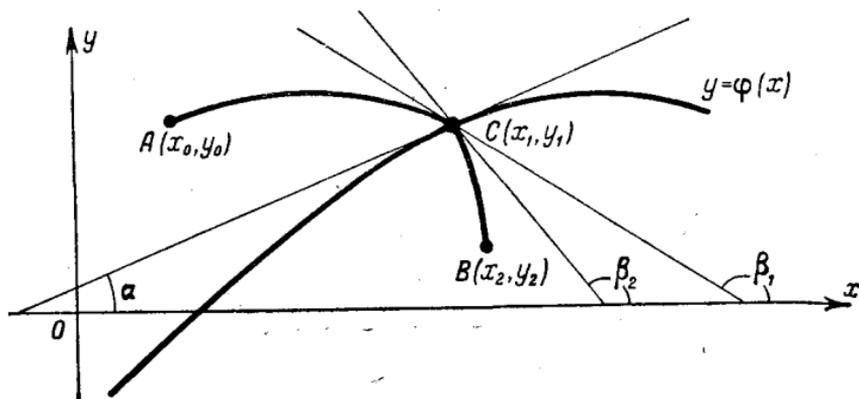


Рис. 7.1)

Предположим, что  $F_1$  и  $F_2$  трижды дифференцируемы. В точке  $C$  пересечения искомой кривой с линией разрыва естественно ожидать наличия угловой точки. Дуги  $AC$  и  $CB$ , очевидно, являются экстремальями (это опять следует из того, что, фиксируя одну из этих дуг и варьируя лишь другую, мы получим задачу с закрепленными граничными точками). Поэтому можно брать в качестве кривых сравнения лишь ломаные, состоящие из двух дуг экстремалей, и тогда вариация ввиду подвижности граничной точки  $C(x_1, y_1)$ , перемещающейся по кривой  $y = \varphi(x)$ , принимает следующий вид (см. стр. 331):

$$\begin{aligned} \delta v &= \delta \int_{x_0}^{x_1} F_1(x, y, y') dx + \delta \int_{x_1}^{x_2} F_2(x, y, y') dx = \\ &= [F_1 + (\varphi' - y') F_{1y'}]_{x=x_1-0} \delta x_1 - [F_2 + (\varphi' - y') F_{2y'}]_{x=x_1+0} \delta x_1, \end{aligned}$$

и основное необходимое условие экстремума  $\delta v = 0$  сводится к равенству

$$[F_1 + (\varphi' - y') F_{1y'}]_{x=x_1-0} = [F_2 + (\varphi' - y') F_{2y'}]_{x=x_1+0}.$$

Так как в точке преломления может быть разрывна лишь  $y'$ , то это условие преломления можно записать и в следующем виде:

$$F_1(x_1, y_1, y'(x_1 - 0)) + (\varphi'(x_1) - y'(x_1 - 0)) F_{1y'}(x_1, y_1, y'(x_1 - 0)) = F_2(x_1, y_1, y'(x_1 + 0)) + (\varphi'(x_1) - y'(x_1 + 0)) F_{2y'}(x_1, y_1, y'(x_1 + 0)).$$

Это условие преломления вместе с уравнением  $y_1 = \varphi(x_1)$  дает возможность определить координаты точки  $C$ .

Если, в частности, функционал  $v$  равен

$$\int_{x_1}^{x_2} A(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{x_0}^{x_1} A_1(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx + \int_{x_1}^{x_2} A_2(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

то условие преломления приобретает вид

$$A_1(x, y) \frac{1 + \varphi' y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \Big|_{x=x_1-0} = A_2(x, y) \frac{1 + \varphi' y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \Big|_{x=x_1+0},$$

или, сохраняя обозначения стр. 340—342,  $y'(x_1 - 0) = \operatorname{tg} \beta_1$ ,  $y'(x_1 + 0) = \operatorname{tg} \beta_2$ ,  $\varphi'(x_1) = \operatorname{tg} \alpha$ , после упрощений и умножения на  $\cos \alpha$  будем иметь:

$$\frac{\cos(\alpha - \beta_1)}{\cos(\alpha - \beta_2)} = \frac{A_2(x_1, y_1)}{A_1(x_1, y_1)} \quad \text{или} \quad \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta_1)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta_2)\right]} = \frac{A_2(x_1, y_1)}{A_1(x_1, y_1)},$$

что является обобщением известного закона преломления света: отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно отношению скоростей

$$v_1(x, y) = \frac{1}{A_1(x, y)} \quad \text{и} \quad v_2(x, y) = \frac{1}{A_2(x, y)} \quad (\text{ср. стр. 341})$$

в средах, на границе которых происходит преломление.

Не следует думать, что экстремали с угловыми точками появляются лишь в задачах на отражение или преломление экстремалей. Экстремум может достигаться на экстремальных с угловыми точками даже

в задачах на экстремум функционала  $v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ , где функция  $F$  трижды дифференцируема, и допустимые кривые должны проходить через граничные точки  $A$  и  $B$  без каких бы то ни было дополнительных условий.

Исследуем, например, функционал

$$v = \int_0^2 y'^2 (1 - y')^2 dx, \quad y(0) = 0; \quad y(2) = 1.$$

Так как подинтегральная функция положительна, то  $v \geq 0$ , и следовательно, если на какой-нибудь кривой функционал  $v = 0$ , то на этой кривой заведомо реализуется абсолютный минимум функционала  $v$ , т. е. наименьшее значение функционала на допустимых кривых. Нетрудно видеть, что на ломаной  $y = x$  при  $0 \leq x \leq 1$  и  $y = 1$  при  $1 < x \leq 2$  (рис. 7.11) функционал  $v = 0$ , так как на этой ломаной подинтегральная функция тождественно равна нулю. Следовательно, на этой ломаной реализуется абсолютный минимум функционала.

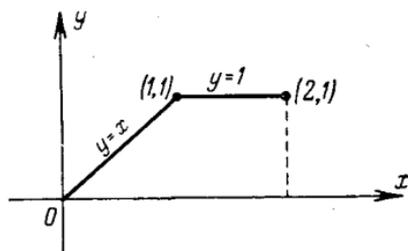


Рис. 7.11.

Абсолютный минимум функционала:  $v = 0$ , достигается также и на ломаных, изображенных на рис. 7.13. С другой стороны, легко видеть, что на гладких кривых значения функционала строго больше нуля, хотя и могут

быть сделаны сколь угодно близкими к нулю. Действительно, подинтегральная функция обращается в нуль только при  $y = x + C_1$  или при  $y = C_2$ , но линии, составленные из отрезков прямых этих семейств, проходящие через точки  $A(0, 0)$  и  $B(2, 1)$ , могут быть лишь ломаными. Однако, сглаживая точки излома путем соответствующего изменения функции в сколь угодно малой окрестности этих точек, мы можем получить гладкую кривую, значение функционала на которой сколь угодно мало отличается от значений функционала на ломаной. Таким образом,  $v = 0$  является точной нижней гранью значений функционала  $v$  на гладких кривых, но эта точная нижняя грань на гладких кривых не достигается, а достигается на кусочно-гладких кривых.

Найдем условия, которым должны удовлетворять решения с угловыми точками задачи об экстремуме функционала  $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y') dx$ . Очевидно, что отдельные гладкие дуги, из которых составлена ломаная экстремаль, должны быть интегральными кривыми уравнения Эйлера. Это следует из того, что если зафиксировать все звенья ломаной, кроме одного, и варьировать лишь это одно звено, то задача сводится к простейшей задаче с закрепленными границами и, следовательно, это звено должно быть дугой экстремали.

Считая для упрощения записи, что ломаная экстремаль имеет лишь одну угловую точку \*), найдем условия, которые должны удовлетворяться в угловой точке:

$$v = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx,$$

где  $x_1$  — абсцисса угловой точки (рис. 7.12). Считая, что кривые  $AC$  и  $CB$  являются интегральными кривыми уравнения Эйлера

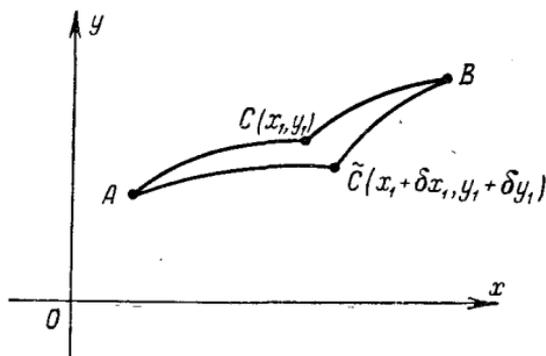


Рис. 7.12.

и что точка  $C$  может произвольно перемещаться, получим согласно § 1, стр. 331:

$$\delta v = (F - y'F_{y'})|_{x=x_1-0} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1-0} \delta y_1 - (F - y'F_{y'})|_{x=x_1+0} \delta x_1 - F_{y'}|_{x=x_1+0} \delta y_1 = 0,$$

откуда

$$(F - y'F_{y'})|_{x=x_1-0} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1-0} \delta y_1 = (F - y'F_{y'})|_{x=x_1+0} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1+0} \delta y_1,$$

или, так как  $\delta x_1$  и  $\delta y_1$  независимы, имеем

$$(F - y'F_{y'})|_{x=x_1-0} = (F - y'F_{y'})|_{x=x_1+0}$$

и

$$F_{y'}|_{x=x_1-0} = F_{y'}|_{x=x_1+0}.$$

Эти условия вместе с условиями непрерывности искомой экстремали позволяют определить координаты угловой точки.

\*) Если угловых точек несколько, то к каждой из них применимо то же самое рассуждение.

Пример 1. Найти ломаные экстремали (если они существуют) функционала  $v = \int_0^a (y'^2 - y^2) dx$ . Напишем второе из условий, которые должны выполняться в точке перелома,  $F_{y'}|_{x=x_1-0} = F_{y'}|_{x=x_1+0}$ , или в данном случае  $2y'(x_1-0) = 2y'(x_1+0)$ , откуда  $y'(x_1-0) = y'(x_1+0)$ , т. е. производная  $y'$  в точке  $x_1$  непрерывна, и точки перелома нет. Следовательно, в рассматриваемой задаче экстремум может достигаться лишь на гладких кривых.

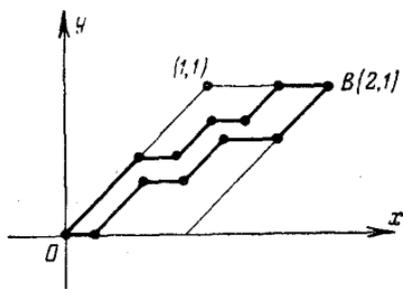


Рис. 7.13.

Пример 2. Найти ломаные экстремали

функционала  $v = \int_{x_1}^{x_2} y'^2 (1-y')^2 dx$ . Так

как подынтегральная функция зависит лишь от  $y'$ , то экстремалами являются прямые линии  $y = Cx + \bar{C}$  (см. стр. 301).

Условия в точке перелома в данном случае принимают вид

$$-y'^2(1-y')(1-3y')|_{x=x_1-0} = -y'^2(1-y')(1-3y')|_{x=x_1+0}$$

и

$$2y'(1-y')(1-2y')|_{x=x_1-0} = 2y'(1-y')(1-2y')|_{x=x_1+0}$$

Эти условия, не считая тривиальной возможности

$$y'(x_1-0) = y'(x_1+0),$$

удовлетворяются при

$$y'(x_1-0) = 0$$

и

$$y'(x_1+0) = 1$$

или

$$y'(x_1-0) = 1$$

и

$$y'(x_1+0) = 0.$$

Следовательно, ломаные экстремали могут состоять только из отрезков прямых, принадлежащих семействам  $y = C_1$  и  $y = x + C_2$  (рис. 7.13).

#### § 4. Односторонние вариации

В некоторых вариационных задачах об экстремуме функционала  $v[y(x)]$  на класс допустимых кривых может быть наложено ограничение, запрещающее им проходить через точки некоторой области  $R$ , ограниченной кривой  $\Phi(x, y) = 0$  (рис. 7.14). В этих задачах кривая  $C$ , реализующая экстремум, или проходит целиком вне границы области  $R$ , и тогда она должна быть экстремалью, так как в этом случае наличие запрещенной области  $R$  совершенно не влияет на свойства функционала и его вариации в окрестности кри-

вой  $C$ , и рассуждения главы 6 остаются справедливыми, или кривая  $C$  состоит из дуг, лежащих вне границы  $R$ , и из частей границы области  $R$ . В этом последнем случае возникает новая ситуация: на частях границы области  $R$  возможны лишь односторонние вариации кривой  $C$ , так как внутри области допустимые кривые заходить не могут. Части кривой  $C$ , лежащие вне границы области  $R$ , должны по-прежнему быть экстремальями, так как если варьировать кривую  $C$  лишь на таком, допускающем двусторонние вариации, участке,

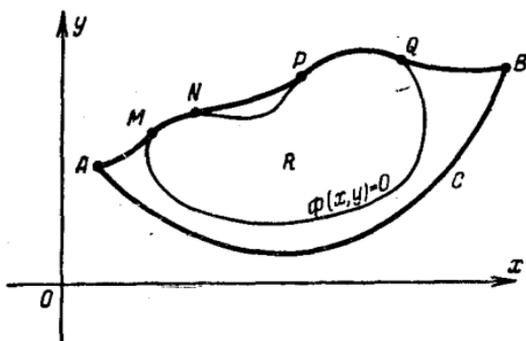


Рис. 7.14.

то наличие области  $R$  на вариации  $y$  влиять не будет, и выводы главы 6 остаются справедливыми.

Таким образом, в рассматриваемой задаче экстремум может достигаться лишь на кривых, состоящих из дуг экстремалей и частей границы области  $R$ , а следовательно, для построения искомой кривой, реализующей экстремум, надо получить условия в точках перехода экстремали на границу области  $R$ , дающие возможность определить эти точки. В случае, изображенном на рис. 7.15, необходимо получить условия в точках  $M$ ,  $N$ ,  $P$  и  $Q$ . Получим, например, условие в точке  $M$ . Совершенно аналогично можно было бы получить условия и в других точках перехода экстремали на границу области

При вычислении вариации  $\delta v$  функционала

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx = \int_{x_0}^{\bar{x}} F(x, y, y') dx + \int_{\bar{x}}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

мы можем считать, что вариация вызывается лишь смещением точки  $M(\bar{x}, \bar{y})$  на кривой  $\Phi(x, y) = 0$ , т. е. можно считать, что при всяком положении точки  $M$  на кривой  $\Phi(x, y) = 0$  дуга  $AM$  является уже экстремалью, а участок  $MNPQB$  не варьируется.

Функционал

$$v_1 = \int_{x_0}^{\bar{x}} F(x, y, y') dx$$

имеет подвижную граничную точку, перемещающуюся по границе области  $R$ , уравнение которой  $\Phi(x, y) = 0$ , или в разрешенном в окрестности точки  $M$  относительно  $y$  виде:  $y = \varphi(x)$ .

Следовательно, согласно § 1 (стр. 331)

$$\delta v_1 = [F + (\varphi' - y') F_{y'}]_{x=\bar{x}} \delta \bar{x}.$$

Функционал  $v_2 = \int_{\bar{x}}^{x_1} F(x, y, y') dx$  также имеет подвижную граничную точку  $(\bar{x}, \bar{y})$ , однако в окрестности этой точки кривая, на которой может достигаться экстремум  $y = \varphi(x)$ , не варьируется.

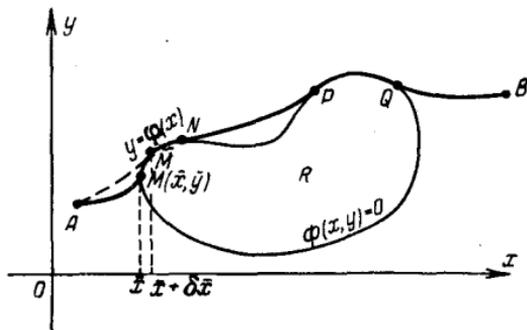


Рис. 7.15.

Следовательно, изменение функционала  $v_2$  при перемещении точки  $(\bar{x}, \bar{y})$  в положение  $(\bar{x} + \delta \bar{x}, \bar{y} + \delta \bar{y})$  сводится лишь к изменению нижнего предела интегрирования и

$$\begin{aligned} \Delta v_2 &= \int_{\bar{x} + \delta \bar{x}}^{x_1} F(x, y, y') dx - \int_{\bar{x}}^{x_1} F(x, y, y') dx = \\ &= - \int_{\bar{x}}^{\bar{x} + \delta \bar{x}} F(x, y, y') dx = - \int_{\bar{x}}^{\bar{x} + \delta \bar{x}} F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) dx, \end{aligned}$$

так как на интервале  $(\bar{x}, \bar{x} + \delta \bar{x})$   $y = \varphi(x)$ .

Применяя теорему о среднем значении и пользуясь непрерывностью функции  $F$ , получим

$$\Delta v_2 = - F(x, \varphi(x), \varphi'(x))|_{x=\bar{x}} \delta \bar{x} + \beta \cdot \delta \bar{x},$$

где  $\beta \rightarrow 0$  при  $\delta \bar{x} \rightarrow 0$ .

Следовательно,  $\delta v_2 = -F(x, \varphi(x), \varphi'(x))|_{x=\bar{x}} \delta \bar{x}$ .

$$\begin{aligned} \delta v &= \delta v_1 + \delta v_2 = [F(x, y, y') + \\ &+ (\varphi' - y') F_{y'}(x, y, y')]_{x=\bar{x}} \delta \bar{x} - F(x, y, \varphi')|_{x=\bar{x}} \delta \bar{x} = \\ &= [F(x, y, y') - F(x, y, \varphi') - (y' - \varphi') F_{y'}(x, y, y')]_{x=\bar{x}} \delta \bar{x}, \end{aligned}$$

так как  $y(\bar{x}) = \varphi(\bar{x})$ .

Необходимое условие экстремума  $\delta v = 0$  ввиду произвольности  $\delta \bar{x}$  принимает вид

$$[F(x, y, y') - F(x, y, \varphi') - (y' - \varphi') F_{y'}(x, y, y')]_{x=\bar{x}} = 0.$$

Применяя теорему о среднем значении, получим

$$(y' - \varphi') [F_{y'}(x, y, q) - F_{y'}(x, y, y')]_{x=\bar{x}} = 0,$$

где  $q$  — значение, промежуточное между  $\varphi'(\bar{x})$  и  $y'(\bar{x})$ . Снова применяя теорему о среднем значении, будем иметь

$$(y' - \varphi')(q - y') F_{y'y'}(x, y, \bar{q})|_{x=\bar{x}} = 0,$$

где  $\bar{q}$  — значение, промежуточное между  $q$  и  $y'(\bar{x})$ . Предположим, что  $F_{y'y'}(x, y, \bar{q}) \neq 0$ . Это предположение является естественным для многих вариационных задач (см. главу 8). В этом случае условие в точке  $M$  имеет вид  $y'(\bar{x}) = \varphi'(\bar{x})$  ( $q = y'$  только при  $y'(\bar{x}) = \varphi'(\bar{x})$ ), так как  $q$  — значение, промежуточное между  $y'(\bar{x})$  и  $\varphi'(\bar{x})$ .

Следовательно, в точке  $M$  экстремаль  $AM$  и граничная кривая  $MN$  имеют общую касательную (левую касательную для кривой  $y = y(x)$ , правую — для кривой  $y = \varphi(x)$ ). Итак, *экстремаль касается границы области  $R$  в точке  $M$ .*

### Задачи к главе 7

1. Найти решение с одной угловой точкой в задаче о минимуме функционала

$$v[y(x)] = \int_0^4 (y' - 1)^2 (y' + 1)^2 dx; \quad y(0) = 0; \quad y(4) = 2.$$

2. Существуют ли решения с угловыми точками в задаче об экстремуме функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2xy - y^2) dx; \quad y(x_0) = y_0; \quad y(x_1) = y_1.$$

3. Существуют ли решения с угловыми точками в задаче об экстремуме функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{x_1} (y'^4 - 6y'^2) dx; \quad y(0) = 0; \quad y(x_1) = y_1.$$

4. Найти условие трансверсальности для функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y) e^{\operatorname{arctg} y'} \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad A(x, y) \neq 0.$$

5. Пользуясь основным необходимым условием экстремума  $\delta v = 0$ , найти функцию, на которой может достигаться экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_0^1 (y''^2 - 2xy) dx; \quad y(0) = y'(0) = 0;$$

$$y(1) = \frac{1}{120}; \quad y'(1) \text{ — не задано.}$$

6. Найти кривые, на которых может достигаться экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{10} y'^3 dx; \quad y(0) = 0; \quad y(10) = 0.$$

при условии, что допустимые кривые не могут проходить внутри круга, ограниченного окружностью

$$(x - 5)^2 + y^2 = 9.$$

7. Найти функцию, на которой может достигаться экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y^2 - y'^2) dx; \quad y(0) = 0,$$

если другая граничная точка может скользить по прямой  $x = \frac{\pi}{4}$ .

8. Пользуясь лишь основным необходимым условием  $\delta v = 0$ , найти кривую, на которой может достигаться экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} dx; \quad y(0) = 0,$$

если вторая граничная точка  $(x_1, y_1)$  может перемещаться по окружности  $(x - 9)^2 + y^2 = 9$ .

## ГЛАВА 8

### ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

#### § 1. Поле экстремалей

Если на плоскости  $(x, y)$  через каждую точку некоторой области  $D$  проходит одна и только одна кривая семейства  $y = y(x, C)$ , то говорят, что это семейство кривых в области  $D$  образует *поле*, или, точнее, *собственное поле*. Угловым коэффициентом касательной  $p(x, y)$  к кривой семейства  $y = y(x, C)$ , проходящей через точку  $(x, y)$ , называется *наклоном поля* в точке  $(x, y)$ .

Например, внутри круга  $x^2 + y^2 \leq 1$  параллельные прямые  $y = x + C$  образуют поле (рис. 8.1), причем наклон этого поля  $p(x, y) = 1$ . Напротив, семейство парабол  $y = (x - a)^2 - 1$  (рис. 8.2) внутри того же круга поля не образует, так как внутри этого круга параболы рассматриваемого семейства пересекаются.

Если все кривые семейства  $y = y(x, C)$  проходят через некоторую точку  $(x_0, y_0)$ , т. е. образуют пучок кривых, то они заведомо не образуют собственного поля в области  $D$ , если центр пучка принадлежит области  $D$ . Однако если кривые пучка покрывают всю область  $D$  и нигде не пересекаются в этой области, кроме центра пучка, т. е. во всех точках, отличных от центра пучка, требования, налагаемые на поле, выполнены, то говорят, что семейство  $y = y(x, C)$  тоже образует поле, но в отличие от собственного поля в рассматриваемом случае поле называется *центральным* (рис. 8.3).

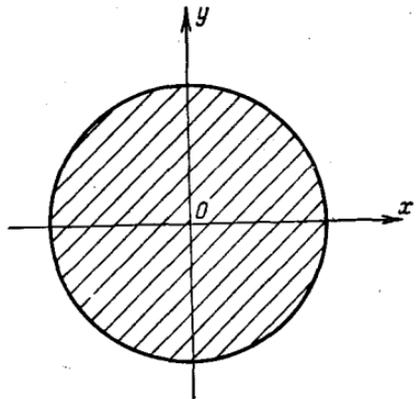


Рис. 8.1.

Например, пучок синусоид  $y = C \sin x$  при  $0 \leq x \leq a$ ,  $a < \pi$  образует центральное поле (рис. 8.4). Тот же пучок синусоид в

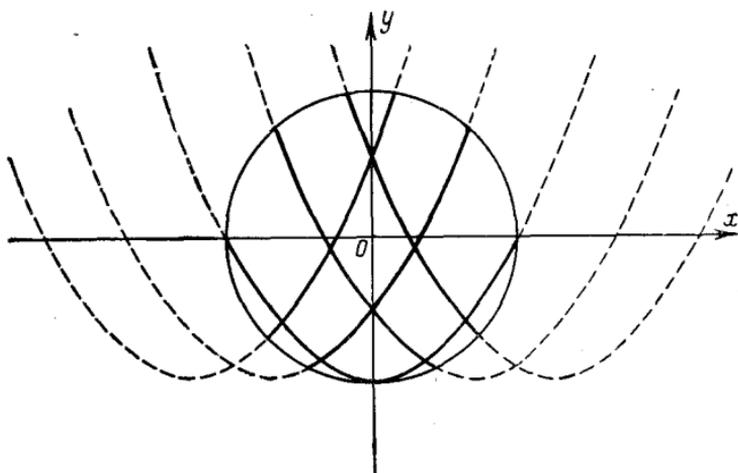


Рис. 8.2.

достаточно малой окрестности отрезка оси абсцисс  $\delta \leq x \leq a$ , где  $\delta > 0$ ,  $a < \pi$ , образует собственное поле (рис. 8.4). Тот же пучок синусоид в окрестности отрезка оси абсцисс  $0 \leq x \leq a_1$ ,  $a_1 > \pi$ , поля не образует (рис. 8.4).

Если собственное или центральное поле образовано семейством экстремалей некоторой вариационной задачи, то оно называется *полем экстремалей*.

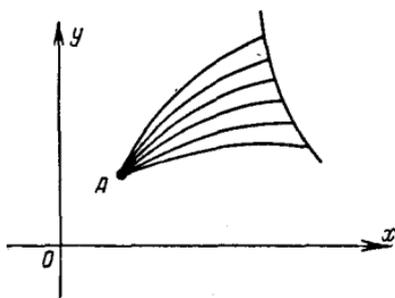


Рис. 8.3.

Понятие поля почти без изменения переносится и на случай пространства любого числа измерений. Семейство  $y_i = y_i(x, C_1, \dots, C_n)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) образует поле в области  $D$  пространства  $x, y_1, \dots, y_n$ , если через каждую точку области  $D$  проходит одна и только одна кривая семейства  $y_i = y_i(x, C_1, \dots, C_n)$ . Функциями наклона поля  $p_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) называют частные производные от функций  $y_i(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$  по  $x$ , вычисленные в точке  $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ; следовательно, для получения  $p_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$  надо взять  $\frac{\partial}{\partial x} y_i(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$  и заменить  $C_1, C_2, \dots, C_n$  их выражениями через координаты  $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ . Аналогично определяется и центральное поле.

Пусть кривая  $y = y(x)$  является экстремалью вариационной задачи об экстремуме простейшего функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx,$$

причем граничные точки  $A(x_0, y_0)$  и  $B(x_1, y_1)$  закреплены. Говорят, что экстремаль  $y = y(x)$  включена в поле экстремалей, если найдено

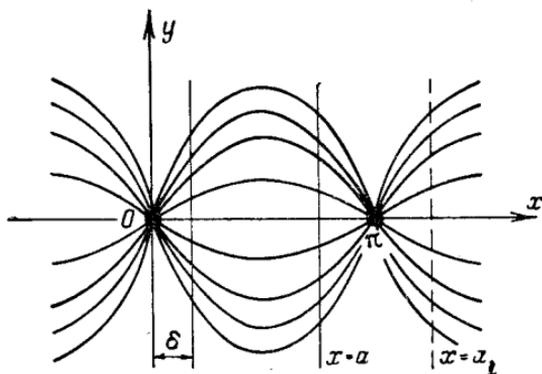


Рис. 8.4.

семейство экстремалей  $y = y(x, C)$ , образующее поле, содержащее при некотором значении  $C = C_0$  экстремаль  $y = y(x)$ , причем эта экстремаль  $y = y(x)$  не лежит на границе области  $D$ , в которой

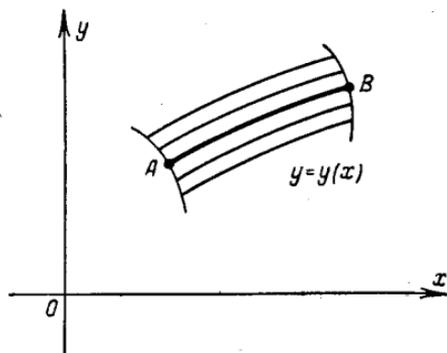


Рис. 8.5.

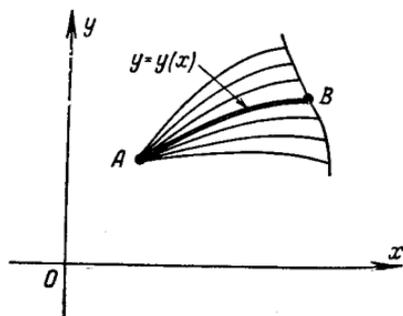


Рис. 8.6.

семейство  $y = y(x, C)$  образует поле (рис. 8.5). Если пучок экстремалей с центром в точке  $A(x_0, y_0)$  в окрестности экстремали  $y = y(x)$ , проходящей через ту же точку, образует поле, то тем самым найдено центральное поле, включающее данную экстремаль

$y = y(x)$ . За параметр семейства в данном случае можно взять угловой коэффициент касательной к кривым пучка в точке  $A(x_0, y_0)$  (рис. 8.6).

Пример 1. Дан функционал

$$\int_0^a (y'^2 - y^2) dx;$$

требуется включить дугу экстремали  $y = 0$ , соединяющую точки  $(0, 0)$  и  $(a, 0)$ , где  $0 < a < \pi$  в центральное поле экстремалей. Общее решение уравнения Эйлера  $y'' + y = 0$  (см. стр. 298, пример 1) имеет вид  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ .

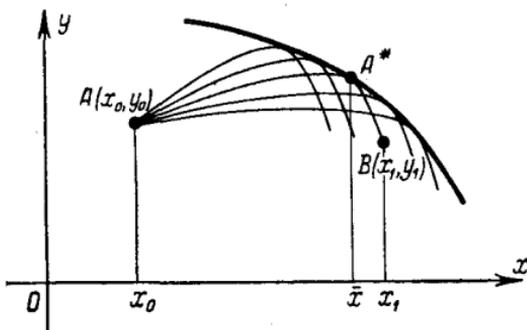


Рис. 8.7.

Из условия прохождения экстремалей через точку  $(0, 0)$  получаем  $C_1 = 0$ ,  $y = C_2 \sin x$ , причем кривые этого пучка на отрезке  $0 \leq x \leq a$ ,  $a < \pi$  образуют центральное поле, включающее при  $C_2 = 0$  экстремаль  $y = 0$ . Параметр семейства  $C_2$  равен производной  $y'_x$  в точке  $(0, 0)$ . Если в той же задаче  $a \geq \pi$ , то семейство  $y = C_2 \sin x$  поля не образует (см. стр. 352).

Известно, что две бесконечно близкие кривые семейства  $F(x, y, C) = 0$  пересекаются в точках  $C$ -дискриминантной кривой, определяемой уравнениями

$$F(x, y, C) = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial C} = 0.$$

Напомним, что в состав  $C$ -дискриминантной кривой, в частности, входит огибающая семейства и геометрические места кратных точек кривых семейства. Если  $F(x, y, C) = 0$  является уравнением пучка кривых, то центр пучка также принадлежит  $C$ -дискриминантной кривой. Поэтому если взять пучок экстремалей  $y = y(x, C)$ , проходящих через точку  $(x_0, y_0)$ , и определить его  $C$ -дискриминантную кривую  $\Phi(x, y) = 0$ , то близкие кривые семейства  $y = y(x, C)$  будут пересекаться вблизи кривой  $\Phi(x, y) = 0$  и, в частности, кривые этого семейства, близкие к рассматриваемой экстремали  $y = y(x)$ , проходящей через точки  $A(x_0, y_0)$  и  $B(x_1, y_1)$ , будут пересекаться

в точках, близких к точкам касания (или пересечения) кривой  $y = y(x)$  с  $C$ -дискриминантной кривой (см. рис. 8.7, на котором  $C$ -дискриминантная кривая изображена жирной линией). Если дуга  $AB$  экстремали  $y = y(x)$  не имеет отличных от точки  $A$  общих точек с  $C$ -дискриминантной кривой пучка экстремалей, включающего данную экстремаль, то достаточно близкие к дуге  $AB$  экстремали пучка не

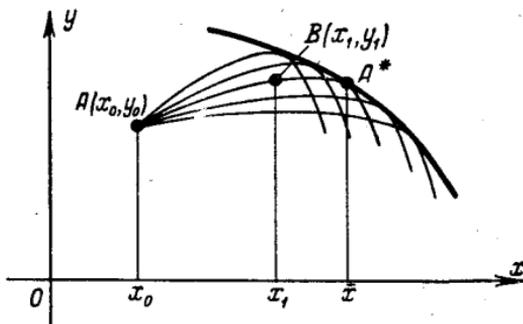


Рис. 8.8.

пересекаются, т. е. образуют в окрестности дуги  $AB$  центральное поле, включающее эту дугу (рис. 8.8).

Если дуга  $AB$  экстремали  $y = y(x)$  имеет отличную от  $A$  общую точку  $A^*$  с  $C$ -дискриминантной кривой пучка  $y = y(x, C)$ , то близкие к  $y = y(x)$  кривые пучка могут пересекаться между собой и с кривой  $y = y(x)$  вблизи точки  $A^*$  и, вообще говоря, поля не образуют (рис. 8.7). Точка  $A^*$  называется точкой, сопряженной с точкой  $A$ .

Полученный результат можно сформулировать так: для построения центрального поля экстремалей с центром в точке  $A$ , содержащего дугу экстремали  $AB$ , достаточно, чтобы точка  $A^*$ , сопряженная с точкой  $A$ , не лежала на дуге  $AB$ . Это условие возможности построения поля экстремалей, включающего данную экстремаль, носит название условия Якоби.

Нетрудно сформулировать это условие и аналитически. Пусть  $y = y(x, C)$  — уравнение пучка экстремалей с центром в точке  $A$ , причем параметр  $C$  можно для определенности считать совпадающим с угловым коэффициентом  $y'$  экстремалей пучка в точке  $A$ .  $C$ -дискриминантная кривая определяется уравнениями

$$y = y(x, C); \quad \frac{\partial y(x, C)}{\partial C} = 0.$$

Вдоль каждой фиксированной кривой семейства производная  $\frac{\partial y(x, C)}{\partial C}$  является функцией только  $x$ . Эту функцию кратко обозначим буквой  $u$ .

$u = \frac{\partial y(x, C)}{\partial C}$ , где  $C$  задано; отсюда  $u'_x = \frac{\partial^2 y(x, C)}{\partial C \partial x}$ . Функции  $y = y(x, C)$  являются решениями уравнения Эйлера, поэтому

$$F_y(x, y(x, C), y'_x(x, C)) - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y(x, C), y'_x(x, C)) \equiv 0.$$

Дифференцируя это тождество по  $C$  и полагая  $\frac{\partial y(x, C)}{\partial C} = u$ , получим

$$F_{yy}u + F_{yy'}u' - \frac{d}{dx}(F_{yy'}u + F_{y'y'}u') = 0$$

или

$$\left(F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'}\right)u - \frac{d}{dx}(F_{y'y'}u') = 0.$$

Здесь  $F_{yy}(x, y, y')$ ,  $F_{yy'}(x, y, y')$ ,  $F_{y'y'}(x, y, y')$  являются известными функциями  $x$ , так как второй аргумент  $y$  равен решению уравнения Эйлера  $y = y(x, C)$ , взятому при значении  $C = C_0$ , соответствующем экстремали  $AB$ . Это линейное однородное уравнение второго порядка относительно  $u$  называется *уравнением Якоби*.

Если решение этого уравнения  $u = \frac{\partial y(x, C)}{\partial C}$ , обращается в нуль в центре пучка при  $x = x_0$  (центр пучка всегда принадлежит  $C$ -дискриминантной кривой), обращается в нуль еще в какой-нибудь точке интервала  $x_0 < x < x_1$ , то сопряженная с  $A$  точка, определяемая уравнениями

$$y = y(x, C_0) \quad \text{и} \quad \frac{\partial y(x, C)}{\partial C} = 0 \quad \text{или} \quad u = 0,$$

лежит на дуге экстремали  $AB^*$ ). Если же существует решение уравнения Якоби, обращаемое в нуль при  $x = x_0$  и более не обращающееся в нуль ни в одной точке отрезка  $x_0 \leq x \leq x_1$ , то точек, сопряженных с  $A$ , на дуге  $AB$  нет, — условие Якоби выполнено, и дугу экстремали  $AB$  можно включить в центральное поле экстремалей с центром в точке  $A$ .

**Замечание.** Можно доказать, что условие Якоби необходимо для достижения экстремума, т. е. для кривой  $AB$ , реализующей экстремум, сопряженная с  $A$  точка не может лежать в интервале  $x_0 < x < x_1$ .

**Пример 2.** Выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала  $v = \int_a^b (y'^2 - y^2) dx$ , проходящей через точки  $A(0, 0)$  и  $B(a, 0)$ ?

\*) Заметим, что все нетривиальные решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющие условию  $u(x_0) = 0$ , отличаются друг от друга лишь отличным от нуля постоянным множителем и, следовательно, обращаются в нуль одновременно.

Уравнение Якоби имеет вид

$$-2u - \frac{d}{dx}(2u') = 0 \quad \text{или} \quad u'' + u = 0,$$

откуда

$$u = C_1 \sin(x - C_2).$$

Так как  $u(0) = 0$ , то  $C_2 = 0$ ;  $u = C_1 \sin x$ . Функция  $u$  обращается в нуль в точках  $x = k\pi$ , где  $k$  — целое число, и, следовательно, если  $0 < a < \pi$ , то на отрезке  $0 \leq x \leq a$  функция  $u$  обращается в нуль только в точке  $x = 0$  и условие Якоби выполнено; если же  $a \geq \pi$ , то на отрезке  $0 \leq x \leq a$  функция  $u$  обращается в нуль еще по крайней мере в одной точке  $x = \pi$  и условие Якоби не выполнено (сравните с примером 1, стр. 354).

Пример 3. Выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_0^a (y'^2 + y^2 + x^2) dx,$$

проходящей через точки  $A(0, 0)$  и  $B(a, 0)$ ?

Уравнение Якоби имеет вид  $u'' - u = 0$ . Его общее решение возьмем в форме  $u = C_1 \operatorname{sh} x + C_2 \operatorname{ch} x$ . Из условия  $u(0) = 0$  находим  $C_2 = 0$ .  $u = C_1 \operatorname{sh} x$ . Кривые пучка  $u = C_1 \operatorname{sh} x$  пересекают ось  $Ox$  лишь в точке  $x = 0$ . Условие Якоби выполнено при любом  $a$ .

## § 2. Функция $E(x, y, p, y')$

Предположим, что в простейшей задаче об экстремуме функционала

$$v = \int_x^{x_1} F(x, y, y') dx;$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

условие Якоби выполнено и, следовательно, экстремаль  $C$ , проходящая через точки  $A(x_0, y_0)$  и  $B(x_1, y_1)$ , может быть включена в центральное поле, наклон которого равен  $p(x, y)$  (рис. 8.9)\*. Для определения знака приращения  $\Delta v$  функционала  $v$  при переходе от экстремали  $C$  к некоторой близкой допустимой кривой  $\tilde{C}$  преобразуем приращение  $\Delta v = \int_{\tilde{C}} F(x, y, y') dx - \int_C F(x, y, y') dx$

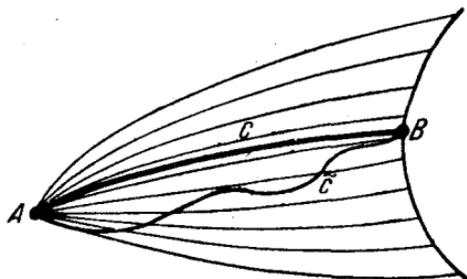


Рис. 8.9.

\* ) Можно было бы предположить, что экстремаль включена не в центральное, а в собственное поле.

к более удобному для исследования виду. (Символы

$$\int_{\tilde{C}} F(x, y, y') dx \quad \text{и} \quad \int_C F(x, y, y') dx$$

представляют значения функционала  $v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ , взятые соответственно по дугам кривых  $\tilde{C}$  и  $C$ ).

Рассмотрим вспомогательный функционал

$$\int_{\tilde{C}} \left[ F(x, y, p) + \left( \frac{dy}{dx} - p \right) F_p(x, y, p) \right] dx,$$

который на экстремали  $C$  обращается в  $\int_C F(x, y, y') dx$ , так как на экстремали поля  $\frac{dy}{dx} = p$ . С другой стороны, тот же вспомогательный функционал

$$\int_{\tilde{C}} \left[ F(x, y, p) + \left( \frac{dy}{dx} - p \right) F_p(x, y, p) \right] dx$$

или

$$\int_{\tilde{C}} [F(x, y, p) - p F_p(x, y, p)] dx + F_p(x, y, p) dy \quad (8.1)$$

является интегралом от точного дифференциала. Действительно, дифференциал функции  $\bar{v}(x, y)$ , в которую превращается функционал  $v[y(x)]$  на экстремали поля, согласно § 1 главы 7 (стр. 331), имеет вид

$$d\bar{v} = [F(x, y, y') - y' F_{y'}(x, y, y')] dx + F_{y'}(x, y, y') dy$$

и лишь обозначением углового коэффициента касательной к экстремали поля отличается от подынтегрального выражения в рассматриваемом вспомогательном интеграле (8.1).

Итак, интеграл  $\int_{\tilde{C}} [F(x, y, p) + (y' - p) F_p] dx$  на экстремали  $C$  совпадает с интегралом  $\int_C F(x, y, y') dx$ , а так как функционал

$\int_{\tilde{C}} [F(x, y, p) + (y' - p) F_p] dx$  является интегралом от точного

дифференциала и, следовательно, не зависит от пути интегрирования, то

$$\int_C F(x, y, y') dx = \int_{\tilde{C}} [F(x, y, p) + (y' - p) F_p(x, y, p)] dx$$

не только при  $\tilde{C} = C$ , но и при любом выборе  $\tilde{C}$ .

Следовательно, приращение

$$\Delta v = \int_{\tilde{C}} F(x, y, y') dx - \int_C F(x, y, y') dx$$

может быть преобразовано к следующему виду:

$$\begin{aligned} \Delta v &= \int_{\tilde{C}} F(x, y, y') dx - \int_{\tilde{C}} [F(x, y, p) + (y' - p) F_p(x, y, p)] dx = \\ &= \int_{\tilde{C}} [F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p) F_p(x, y, p)] dx. \end{aligned}$$

Подынтегральная функция носит название *функции Вейерштрасса* и обозначается  $E(x, y, p, y')$ :

$$E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p) F_p(x, y, p).$$

В этих обозначениях

$$\Delta v = \int_{x_0}^{x_1} E(x, y, p, y') dx.$$

Очевидно, что достаточным условием достижения функционалом  $v$  минимума на кривой  $C$  будет неотрицательность функции  $E$ , так как если  $E \geq 0$ , то и  $\Delta v \geq 0$ , а достаточным условием максимума будет  $E \leq 0$ , так как в этом случае и  $\Delta v \leq 0$ . При этом для слабого минимума достаточно, чтобы неравенство  $E(x, y, p, y') \geq 0$  (или  $E \leq 0$  в случае максимума) выполнялось для значений  $x, y$ , близких к значению  $x, y$  на исследуемой экстремали  $C$ , и для значений  $y'$ , близких к  $p(x, y)$  на той же экстремали, а для сильного минимума то же неравенство должно быть справедливо для тех же  $x, y$ , но уже для произвольных  $y'$ , так как в случае сильного экстремума близкие кривые могут иметь произвольные направления касательных, а в случае слабого экстремума значения  $y'$  на близких кривых близки к значениям  $y' = p$  на экстремали  $C$ .

Следовательно, достаточными для достижения функционалом  $v$  экстремума на кривой  $C$  будут следующие условия.

Для слабого экстремума:

1. Кривая  $C$  является экстремалью, удовлетворяющей граничным условиям.

2. Экстремаль  $C$  может быть включена в поле экстремалей. Это условие можно заменить условием Якоби.

3. Функция  $E(x, y, p, y')$  не меняет знака во всех точках  $(x, y)$ , близких к кривой  $C$ , и для близких к  $p(x, y)$  значений  $y'$ . В случае минимума  $E \geq 0$ , в случае максимума  $E \leq 0$ .

Для сильного экстремума:

1. Кривая  $C$  является экстремалью, удовлетворяющей граничным условиям.

2. Экстремаль  $C$  может быть включена в поле экстремалей. Это условие можно заменить условием Якоби.

3. Функция  $E(x, y, p, y')$  не меняет знака во всех точках  $(x, y)$ , близких к кривой  $C$  и для произвольных значений  $y'$ . В случае минимума  $E \geq 0$ , в случае максимума  $E \leq 0$ .

Замечание. Можно доказать, что условие Вейерштрасса необходимо. Точнее, если в центральном поле, включающем экстремаль  $C$ , в точках экстремали для некоторых  $y'$  функция  $E$  имеет противоположные знаки, то сильный экстремум не достигается. Если это свойство имеет место при сколь угодно близких к  $p$  значениях  $y'$ , то не достигается и слабый экстремум.

Пример 1. Исследовать на экстремум функционал

$$v = \int_0^a y'^3 dx; \quad y(0) = 0,$$

$$y(a) = b, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Экстремальями являются прямые линии  $y = C_1 x + C_2$ . Экстремум может достигаться лишь на прямой  $y = \frac{b}{a} x$ . Пучок прямых  $y = C_1 x$  с центром в точке  $(0, 0)$  образует центральное поле, включающее экстремаль  $y = \frac{b}{a} x$  (рис. 8.10).

Функция

$$E(x, y, p, y') = y'^3 - p^3 - 3p^2(y' - p) = (y' - p)^2(y' + 2p).$$

На экстремали  $y = \frac{b}{a} x$  наклон поля  $p = \frac{b}{a} > 0$ , и если  $y'$  принимает значения, близкие к  $p = \frac{b}{a}$ , то  $E \geq 0$  и, следовательно, все условия, достаточные для достижения слабого минимума, выполнены. Итак, на экстремали  $y = \frac{b}{a} x$  достигается слабый минимум. Если же  $y'$  принимает произвольные значения, то  $(y' + 2p)$  может иметь любой знак и, следовательно, функция  $E$  знака не сохраняет — условия, достаточные для достижения сильного мини-

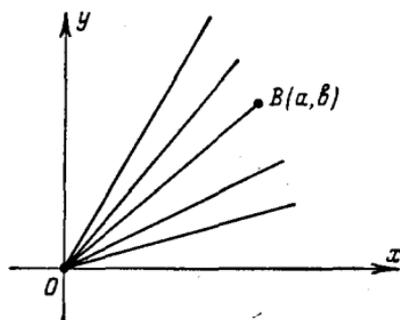


Рис. 8.10.

му, не выполнены. Если принять во внимание замечание на стр. 360, то можно утверждать, что сильный минимум на прямой  $y = \frac{b}{a}x$  не достигается.

**Пример 2.** Исследовать на экстремум функционал

$$\int_0^a (6y'^2 - y'^4 + yy') dx; \quad y(0) = 0; \quad y(a) = b; \quad a > 0 \text{ и } b > 0$$

в классе непрерывных функций с непрерывной первой производной.

Экстремалами являются прямые  $y = C_1x + C_2$ . Граничным условиям удовлетворяет прямая  $y = \frac{b}{a}x$ , которая включается в пучок экстремалей  $y = C_1x$ , образующих центральное поле. Функция

$$\begin{aligned} E(x, y, p, y') &= 6y'^2 - y'^4 + yy' - 6p^2 + p^4 - yp - (y' - p)(12p - 4p^3 + y) = \\ &= -(y' - p)^2 [y'^2 + 2py' - (6 - 3p^2)]. \end{aligned}$$

Знак функции  $E$  противоположен знаку последнего множителя

$$y'^2 + 2py' - (6 - 3p^2).$$

Этот множитель обращается в нуль и может изменить знак лишь при переходе  $y'$  через значение  $y' = -p \pm \sqrt{6 - 2p^2}$ . При  $6 - 2p^2 \leq 0$  или  $p \geq \sqrt{3}$  при любом  $y'$  имеем  $[y'^2 + 2py' - (6 - 3p^2)] \geq 0$ , если же  $6 - 2p^2 > 0$  или  $p < \sqrt{3}$ , то выражение  $[y'^2 + 2py' - (6 - 3p^2)]$  меняет знак. Если же при этом  $y'$  достаточно мало отличается от  $p$ , то последнее выражение сохраняет положительный знак при  $p > 1$  и отрицательный знак при  $p < 1$ .

Следовательно, при  $p = \frac{b}{a} < 1$  или  $b < a$  имеем слабый минимум, так как  $E \geq 0$  при значениях  $y'$ , близких к  $p$ ; при  $p = \frac{b}{a} > 1$  или  $b > a$  имеем слабый максимум. При  $p = \frac{b}{a} \geq \sqrt{3}$  имеем сильный максимум, так как  $E \leq 0$  при любых значениях  $y'$ . При  $p = \frac{b}{a} < \sqrt{3}$ , на основании замечания на стр. 360, нет ни сильного минимума, ни сильного максимума (рис. 8.11).

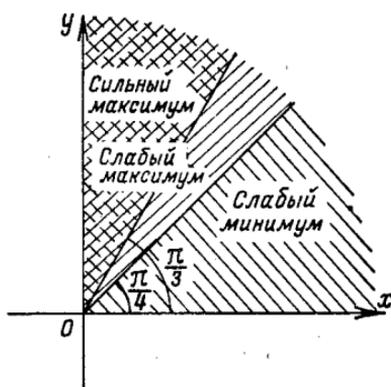


Рис. 8.11.

Даже в приведенных выше весьма простых примерах исследование знака функции  $E$  было сопряжено с некоторыми затруднениями, и поэтому желательно условие сохранения знака функцией  $E$  заменить более легко проверяемым условием. Предположим, что функция  $F(x, y, y')$  трижды дифференцируема по аргументу  $y'$ . По формуле

Тейлора получим

$$F(x, y, y') = \\ = F(x, y, p) + (y' - p)F_p(x, y, p) + \frac{(y' - p)^2}{2!} F_{y'y'}(x, y, q),$$

где  $q$  заключено между  $p$  и  $y'$ .

Функция

$$E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_p(x, y, p)$$

после замены функции  $F(x, y, y')$  ее разложением по формуле Тейлора примет вид

$$E(x, y, p, y') = \frac{(y' - p)^2}{2!} F_{y'y'}(x, y, q).$$

Отсюда видно, что функция  $E$  сохраняет знак, если сохраняет знак  $F_{y'y'}(x, y, q)$ . При исследовании на слабый экстремум функция  $F_{y'y'}(x, y, q)$  должна сохранять знак для значений  $x$  и  $y$  в точках, близких к точкам исследуемой экстремали, и для значений  $q$ , близких к  $p$ . Если  $F_{y'y'}(x, y, y') \neq 0$  в точках экстремали  $C$ , то в силу непрерывности эта вторая производная сохраняет знак и в точках, близких к кривой  $C$ , и для значений  $y'$ , близких к значениям  $y'$  на кривой  $C$ . Таким образом, при исследовании на слабый минимум условие  $E \geq 0$  может быть заменено условием  $F_{y'y'} > 0$  на экстремали  $C$ , а при исследовании на слабый максимум условие  $E \leq 0$  может быть заменено условием  $F_{y'y'} < 0$  на кривой  $C$ . Условие  $F_{y'y'} > 0$  (или  $F_{y'y'} < 0$ ) носит название *условия Лежандра* \*).

При исследовании на сильный минимум условие  $E \geq 0$  может быть заменено требованием  $F_{y'y'}(x, y, q) \geq 0$  в точках  $(x, y)$ , близких к точкам кривой  $C$  при произвольных значениях  $q$ . При этом, конечно, предполагается, что разложение по формуле Тейлора

$$F(x, y, y') = \\ = F(x, y, p) + (y' - p)F_p(x, y, p) + \frac{(y' - p)^2}{2!} F_{y'y'}(x, y, q)$$

справедливо при любых  $y'$ . При исследовании на сильный максимум получим условие  $F_{y'y'}(x, y, q) \leq 0$ , при тех же предположениях относительно области изменения аргументов и разложимости функции  $F(x, y, y')$  по формуле Тейлора.

---

\*) Условие  $F_{y'y'} > 0$  (или  $F_{y'y'} < 0$ ) часто называют *усиленным условием Лежандра*, а условием Лежандра называют неравенство  $F_{y'y'} \geq 0$  (или  $F_{y'y'} \leq 0$ ).

Сводка достаточных условий минимума простейшего функционала \*)

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx; \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

Слабый минимум	Сильный минимум	Слабый минимум	Сильный минимум	Сильный минимум	Слабый минимум	Сильный минимум
<ol style="list-style-type: none"> <li><math>F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0</math></li> <li>Условие Якоби</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li><math>F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0</math></li> <li>Условие Якоби</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li><math>F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0</math></li> <li>Условие Якоби</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li><math>F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0</math></li> <li>Условие Якоби</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li><math>F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0</math></li> <li>Условие Якоби</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li><math>F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0</math></li> <li>Условие Якоби</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li><math>F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0</math></li> <li>Условие Якоби</li> </ol>
<ol style="list-style-type: none"> <li><math>F_{y''} &gt; 0</math> на исследуемой экстремали</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li><math>F_{y''} &gt; 0</math> для точек <math>(x, y)</math>, близких к точкам на исследуемой экстремали и для произвольных значений <math>y'</math>. При этом предполагается, что функция <math>F(x, y, y')</math> трижды дифференцируема по <math>y'</math> для любых <math>y'</math></li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li><math>F_{y''} &gt; 0</math> для точек <math>(x, y)</math>, близких к точкам на исследуемой экстремали, и для произвольных <math>y'</math>, близких к <math>p(x, y)</math></li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li><math>F_{y''} &gt; 0</math> для точек <math>(x, y)</math>, близких к точкам на исследуемой экстремали, и для произвольных <math>y'</math></li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li><math>F_{y''} &gt; 0</math> для точек <math>(x, y)</math>, близких к точкам на исследуемой экстремали, и для произвольных <math>y'</math></li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li><math>F_{y''} &gt; 0</math> для точек <math>(x, y)</math>, близких к точкам на исследуемой экстремали, и для произвольных <math>y'</math></li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li><math>F_{y''} &gt; 0</math> для точек <math>(x, y)</math>, близких к точкам на исследуемой экстремали, и для произвольных <math>y'</math></li> </ol>

\*) Для получения достаточных условий *максимума* в этой сводке надо взять знаки неравенства противоположного смысла.

Пример 3. Исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int_0^a (\dot{y}'^2 - y^2) dx, \quad a > 0; \quad y(0) = 0, \quad y(a) = 0.$$

Уравнение Эйлера имеет вид  $y'' + y = 0$ , его общее решение  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ . Используя граничные условия, получаем  $C_1 = 0$  и  $C_2 = 0$ , если  $a \neq k\pi$ , где  $k$  — целое число.

Итак, при  $a \neq k\pi$  экстремум может достигаться лишь на прямой  $y = 0$ . Если  $a < \pi$ , то пучок экстремалей  $y = C_1 \sin x$  с центром в точке  $(0, 0)$

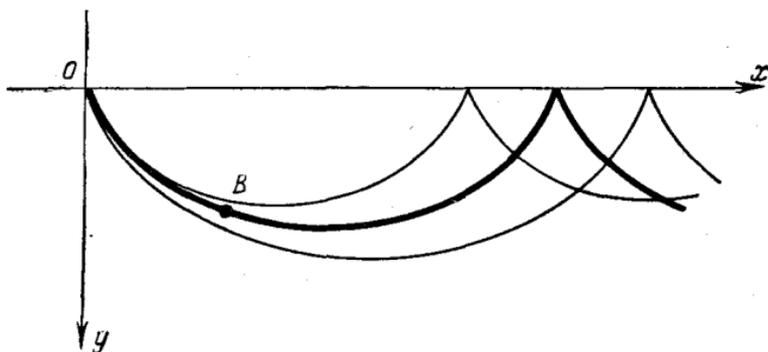


Рис. 8.12.

образует центральное поле. При  $a > \pi$  условие Якоби не выполнено (см. стр. 352).

Так как подынтегральная функция трижды дифференцируема по  $y'$  при любых  $y'$  и  $F_{y'y'} = 2 > 0$  при любых значениях  $y'$ , то на прямой  $y = 0$  при  $a < \pi$  реализуется сильный минимум. Если учесть замечание на стр. 356, то можно утверждать, что при  $a > \pi$  минимум на прямой  $y = 0$  не достигается.

Пример 4. Исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1$$

(см. задачу о брахистохроне, стр. 304). Экстремалами являются циклоиды

$$x = C_1(t - \sin t) + C_2,$$

$$y = C_1(1 - \cos t).$$

Пучок циклоид  $x = C_1(t - \sin t)$ ,  $y = C_1(1 - \cos t)$  с центром в точке  $(0, 0)$  образует центральное поле, включающее экстремаль

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t),$$

где  $a$  определено из условия прохождения циклоиды через вторую граничную точку  $B(x_1, y_1)$ , если  $x_1 < 2\pi a$  (рис. 8.12).

Имеем

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{y} \sqrt{1+y'^2}}; \quad F_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{y} (1+y'^2)^{3/2}} > 0$$

при любых  $y'$ : Следовательно, при  $x_1 < 2\pi a$  на циклоиде

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

реализуется сильный минимум.

Пример 5. Исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int_0^a y'^3 dx; \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Этот пример был решен на стр. 360, но теперь в отношении слабого экстремума исследование можно упростить.

Экстремальями являются прямые линии. Пучок  $y = Cx$  образует центральное поле, включающее экстремаль  $y = \frac{b}{a}x$ . На экстремали  $y = \frac{b}{a}x$  вторая

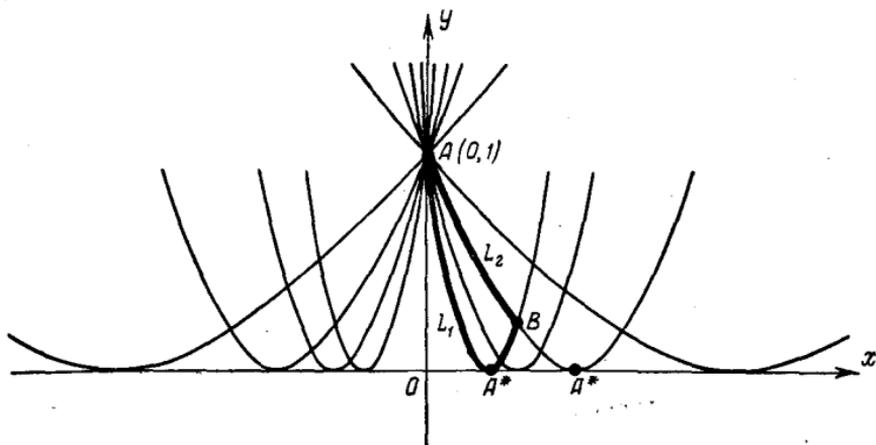


Рис. 8.13.

производная  $F_{y'y'} = 6y' = 6\frac{b}{a} > 0$ . Следовательно, прямая,  $y = \frac{b}{a}x$  реализует слабый минимум. При произвольных  $y'$  вторая производная  $F_{y'y'} = 6y'$  знака не сохраняет; следовательно, указанные выше достаточные условия для достижения сильного минимума не выполнены. Однако отсюда еще нельзя заключить, что сильный экстремум не достигается.

Пример 6. Исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int_0^a \frac{y}{y'^2} dx; \quad y(0) = 1, \quad y(a) = b, \quad a > 0, \quad 0 < b < 1.$$

Первый интеграл уравнения Эйлера (см. случай 5 на стр. 302) имеет вид

$$\frac{y}{y'^2} + y' \frac{2y}{y'^3} = C \quad \text{или} \quad y'^2 = 4C_1 y;$$

извлекая корень, разделяя переменные и интегрируя, получаем  $y = (C_1 x + C_2)^2$  — семейство парабол. Из условия  $y(0) = 1$  находим  $C_2 = 1$ . Пучок парабол  $y = (C_1 x + 1)^2$  с центром в точке  $A(0, 1)$  имеет  $C_1$ -дискриминантную кривую  $y = 0$  (рис. 8.13). Через точку  $B(a, b)$  проходят две параболы этого пучка.

На дуге  $AB$  одной из них ( $L_1$ ) лежит гочка  $A^*$ , сопряженной с точкой  $A$ , на другой же ( $L_2$ ) сопряженной точки нет, и следовательно, на дуге  $L_2$  условие Якоби выполнено и на этой дуге параболы может реализоваться экстремум. В окрестности исследуемой экстремали  $F_{y'y'} = \frac{6y}{y'^4} > 0$  для произвольных  $y'$ , однако на этом основании нельзя утверждать, что на дуге  $L_2$  реализуется сильный минимум, так как функция  $F(x, y, y') = \frac{y}{y'^2}$  не может быть представлена в виде

$$F(x, y, y') = F(x, y, p) + (y' - p) F_p(x, y, p) + \frac{(y' - p)^2}{2!} F_{y'y'}(x, y, p)$$

при произвольных значениях  $y'$  ввиду наличия разрыва функции  $F(x, y, y')$  при  $y' = 0$ . Можно лишь утверждать, что на  $L_2$  реализуется слабый минимум, так как для значений  $y'$ , близких к наклону поля на кривой  $L_2$ , такое разложение функции  $F(x, y, y')$  по формуле Тейлора имеет место. Для полного исследования этого функционала на экстремум необходимо рассмотреть функцию  $E(x, y, p, y')$ :

$$E(x, y, p, y') = \frac{y}{y'^2} - \frac{y}{p^2} + \frac{2y}{p^3} (y' - p) = \frac{y(y' - p)^2 (2y' + p)}{y'^2 p^3}.$$

Так как множитель  $(2y' + p)$  не сохраняет знака при произвольных  $y'$ , то на основании замечания на стр. 360 можно утверждать, что сильный минимум на дуге  $L_2$  не достигается.

Изложенная теория без значительных изменений переносится и на функционалы вида

$$v[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx;$$

$$y_i(x_0) = y_{i0}, \quad y_i(x_1) = y_{i1} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Функция  $E$  принимает вид

$$E = F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') - F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n) - \sum_{i=1}^n (y_i' - p_i) F_{p_i}(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n),$$

где  $p_i$  — функции наклона поля, на которое наложены некоторые ограничения (при этих ограничениях поле называется специальным).

Условие Лежандра  $F_{y'y'} \geq 0$  заменяется следующими условиями:

$$F_{y_1 y_1'} \geq 0, \quad \begin{vmatrix} F_{y_1 y_1'} & F_{y_1 y_2'} \\ F_{y_2 y_1'} & F_{y_2 y_2'} \end{vmatrix} \geq 0, \dots, \quad \begin{vmatrix} F_{y_1 y_1'} & F_{y_1 y_2'} & \dots & F_{y_1 y_n'} \\ F_{y_2 y_1'} & F_{y_2 y_2'} & \dots & F_{y_2 y_n'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{y_n y_1'} & F_{y_n y_2'} & \dots & F_{y_n y_n'} \end{vmatrix} \geq 0.$$

Достаточные условия *слабого минимума* как в простейшей задаче, так и в более сложных, можно получить иным методом, основанным на изучении знака второй вариации.

По формуле Тейлора преобразуем приращение функционала в простейшей задаче к следующему виду:

$$\begin{aligned} \Delta v &= \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')] dx = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} [F_{yy} \delta y^2 + 2F_{yy'} \delta y \delta y' + F_{y'y'} \delta y'^2] dx + R, \end{aligned}$$

где  $R$  имеет порядок выше второго относительно  $\delta y$  и  $\delta y'$ . При исследовании на слабый экстремум  $\delta y$  и  $\delta y'$  достаточно малы, и в этом случае знак приращения  $\Delta v$  определяется знаком члена, стоящего в правой части и содержащего наиболее низкие степени  $\delta y$  и  $\delta y'$ . На экстремали первая вариация

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx = 0$$

и, следовательно, знак приращения  $\Delta v$ , вообще говоря, совпадает со знаком второй вариации

$$\delta^2 v = \int_{x_0}^{x_1} (F_{yy} \delta y^2 + 2F_{yy'} \delta y \delta y' + F_{y'y'} \delta y'^2) dx.$$

Условие Лежандра в соединении с условием Якоби и являются условиями, обеспечивающими постоянство знака второй вариации, а вместе с тем и постоянство знака приращения  $\Delta v$  в задаче о слабом экстремуме.

Действительно, рассмотрим интеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} [\omega'(x) \delta y^2 + 2\omega(x) \delta y \delta y'] dx, \quad (8.2)$$

где  $\omega(x)$  — произвольная дифференцируемая функция. Этот интеграл равен нулю:

$$\int_{x_0}^{x_1} [\omega'(x) \delta y^2 + 2\omega(x) \delta y \delta y'] dx = \int_{x_0}^{x_1} d(\omega \delta y^2) dx = [\omega(x) \delta y^2]_{x_0}^{x_1} = 0$$

(так как  $\delta y|_{x_0} = \delta y|_{x_1} = 0$ ).

Прибавляя интеграл (8.2) ко второй вариации, получим

$$\delta^2 v = \int_{x_0}^{x_1} [(F_{yy} + \omega') \delta y^2 + 2(F_{yy'} + \omega) \delta y \delta y' + F_{y'y'} \delta y'^2] dx.$$

Выбираем функцию  $\omega(x)$  так, чтобы подынтегральная функция, с точностью до множителя, превратилась в точный квадрат, для чего функция  $\omega(x)$  должна удовлетворять уравнению

$$F_{y'y'}(F_{yy} + \omega') - (F_{yy'} + \omega)^2 = 0.$$

При таком выборе функции  $\omega$  вторая вариация принимает вид

$$\delta^2 v = \int_{x_0}^{x_1} F_{y'y'} \left( \delta y' + \frac{F_{yy'} + \omega}{F_{y'y'}} \delta y \right)^2 dx$$

и, следовательно, знак второй вариации совпадает со знаком  $F_{y'y'}$ .

Однако такое преобразование возможно лишь в предположении, что дифференциальное уравнение

$$F_{y'y'} (\omega' + F_{yy}) - (F_{yy'} + \omega)^2 = 0$$

имеет на отрезке  $(x_0, x_1)$  дифференцируемое решение  $\omega(x)$ .

Преобразовав это уравнение к новым переменным подстановкой

$$\omega = -F_{yy'} - F_{y'y'} \frac{u'}{u},$$

где  $u$  — новая неизвестная функция, получим

$$\left( F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'} \right) u - \frac{d}{dx} (F_{y'y'} u') = 0$$

— уравнение Якоби (см. стр. 356).

Если существует не обращающееся в нуль при  $x_0 < x \leq x_1$  решение этого уравнения, т. е. выполнено условие Якоби, то существует для тех же значений  $x$  непрерывное и дифференцируемое решение

$$\omega(x) = -F_{yy} - F_{y'y'} \frac{u'}{u}$$

уравнения

$$F_{y'y'} (F_{yy} + \omega') - (F_{yy'} + \omega)^2 = 0.$$

Итак, условие Лежандра и условие Якоби гарантируют сохранение знака второй вариации и, следовательно, являются достаточными условиями для слабого минимума ( $F_{y'y'} > 0$ ) или максимума ( $F_{y'y'} < 0$ ).

### 3. Преобразование уравнений Эйлера к каноническому виду

Систему  $n$  уравнений Эйлера (см. стр. 305)

$$F_{y_l} - \frac{d}{dx} F_{y_l'} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n) \quad (8.3)$$

можно заменить системой  $2n$  уравнений первого порядка. Полагая в (8.3)

$$F_{y_k} = q_k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (8.4)$$

получим

$$\frac{dq_k}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (8.5)$$

Разрешаем систему уравнений (8.4) относительно  $y'_k$  (для возможности такого разрешения предположим, что

$$\frac{D(F y'_1, F y'_2, \dots, F y'_n)}{D(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)} \neq 0),$$

$$y'_k = \omega_k(x, y_s, q_s), \quad (8.6)$$

где

$$\omega_k(x, y_s, q_s) = \omega_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n, q_1, q_2, \dots, q_n),$$

и подставляем (8.6) в (8.5). При этом получим систему  $2n$  уравнений первого порядка в нормальной форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_k}{dx} &= \omega_k(x, y_s, q_s), \\ \frac{dq_k}{dx} &= \left\{ \frac{\partial F}{\partial y_k} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

Здесь и в дальнейшем фигурные скобки означают, что в скобках вместо  $y'_k$  подставлены  $\omega_k(x, y_s, q_s)$ .

С помощью функции

$$H(x, y_s, q_s) = \sum_{i=1}^n \omega_i q_i - \{F\}$$

система (8.7) может быть записана в каноническом виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_k}{dx} &= \frac{\partial H}{\partial q_k}, \\ \frac{dq_k}{dx} &= -\frac{\partial H}{\partial y_k} \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (8.8)$$

Заметим, что если функция  $F(y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$  не зависит явно от  $x$ , то система (8.8) имеет первый интеграл  $H = C$ . Действительно, в этом случае

$$H = \sum_{i=1}^n \omega_i q_i - \{F\}$$

также не содержит  $x$  явно и, следовательно,

$$\frac{dH}{dx} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dx} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dx}.$$

В силу уравнений (8.8) получим

$$\frac{dH}{dx} = 0, \quad H = C$$

вдоль интегральных кривых системы (8.8).

Для простейшей задачи этот первый интеграл уже был получен на стр. 303.

Пример 1. Закон сохранения энергии. Функция

$$H = \sum_{i=1}^n \omega_i q_i - \{F\}$$

для функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt, \quad T = \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2),$$

где сохранены обозначения примера 1 стр. 320 ( $T$  — кинетическая энергия системы материальных точек,  $U$  — потенциальная энергия), имеет следующий вид:

$$H = \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - (T - U) = T + U$$

— полная энергия системы. Применим принцип стационарного действия. Если потенциальная энергия  $U$  не зависит явно от  $t$ , т. е. система консервативна, то уравнения Эйлера для функционала  $\int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$  имеют первый интеграл  $H = C$ ,  $T + U = C$ .

Итак, полная энергия консервативной системы остается при движении постоянной.

Интегрирование канонической системы (8.8) равносильно интегрированию дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial v}{\partial x} + H\left(x, y_s, \frac{\partial v}{\partial y_s}\right) = 0, \quad (8.9)$$

где

$$H\left(x, y_s, \frac{\partial v}{\partial y_s}\right) = H\left(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \frac{\partial v}{\partial y_1}, \frac{\partial v}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial v}{\partial y_n}\right).$$

Уравнение (8.9) называется *уравнением Гамильтона — Якоби*.

Если известно однопараметрическое семейство его решений  $v(x, y_s, \alpha)$ , то известен и первый интеграл  $\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \beta$  системы (8.8),  $\beta$  — произвольная постоянная. Действительно,

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \alpha} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial \alpha} \frac{\partial y_j}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \alpha} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial \alpha} \frac{\partial H}{\partial q_j}. \quad (8.10)$$

Дифференцируя тождество

$$\frac{\partial v(x, y_s, \alpha)}{\partial \alpha} \equiv -H\left(x, y_s, \frac{\partial v(x, y_s, \alpha)}{\partial y_s}\right) \text{ по } \alpha,$$

получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \alpha} \equiv - \sum_{s=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_s} \frac{\partial^2 v}{\partial y_s \partial \alpha} \quad (8.11)$$

и, подставляя (8.11) в (8.10), получим в правой части (8.10) тождественный нуль. Итак,

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \equiv 0,$$

откуда

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \beta.$$

Следовательно, если известен полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби

$$v = v(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

то известно и  $n$  первых интегралов системы (8.8):

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (8.12)$$

Если якобиан системы (8.12) отличен от нуля

$$\left| \frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial \alpha_i} \right| \neq 0,$$

то система (8.12) определяет  $y_i$  как функции остальных аргументов:

$$y_i = y_i(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \quad (8.13) \\ (i = 1, 2, \dots, n).$$

Тем самым получено  $2n$ -параметрическое семейство экстремалей. Можно доказать, что (8.13) является общим решением системы уравнений Эйлера, а функции

$$y_i(x, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n)$$

и

$$q_i = \frac{\partial v(x, y_s, \alpha_s)}{\partial y_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

являются общим решением системы (8.8).

Пример. Найти уравнение геодезических линий на поверхности, на которой элемент длины кривой имеет вид

$$ds^2 = [\varphi_1(x) + \varphi_2(y)](dx^2 + dy^2),$$

т. е. найти экстремали функционала

$$S = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{[\varphi_1(x) + \varphi_2(y)](1 + y'^2)} dx.$$

Так как

$$H = \frac{\sqrt{\varphi_1(x) + \varphi_2(y)}}{\sqrt{1 + y'^2}} = \sqrt{\varphi_1(x) + \varphi_2(y)} \cdot \sqrt{1 - q^2},$$

$$q = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad H^2 + q^2 = \varphi_1(x) + \varphi_2(y),$$

то уравнение Гамильтона — Якоби имеет вид

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$$

или

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \varphi_1(x) = \varphi_2(y) - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2.$$

Для уравнений такого типа (уравнений с разделенными переменными)

$$\Phi_1\left(x, \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \Phi_2\left(y, \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

легко находится первый интеграл. Полагая

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \varphi_1(x) = \alpha \quad \text{и} \quad \varphi_2(y) - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \alpha$$

или

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \sqrt{\varphi_1(x) + \alpha}$$

и

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \sqrt{\varphi_2(y) - \alpha}.$$

находим

$$v = \int \sqrt{\varphi_1(x) + \alpha} dx + \int \sqrt{\varphi_2(y) - \alpha} dy,$$

следовательно, уравнение геодезических линий  $\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \beta$  в данном случае имеет вид

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\varphi_1(x) + \alpha}} - \int \frac{dy}{\sqrt{\varphi_2(y) - \alpha}} = \beta.$$

**Замечание.** К уравнению Гамильтона — Якоби можно прийти и из иных соображений. Рассмотрим центральное поле экстремалей с центром в точке  $A(x_0, y_0)$  для функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx.$$

На экстремалих поля функционал  $v[y(x)]$  превращается в функцию  $\bar{v}(x, y)$ , координат второй граничной точки  $B(x, y)$ . Как было указано на стр. 370,

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = -H(x, y, q), \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = q.$$

Исключая  $q$ , получим

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = -H\left(x, y, \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right).$$

Итак, функция  $\bar{v}(x, y)$  является решением уравнения Гамильтона — Якоби. Совершенно аналогичные рассуждения справедливы и для функционала

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx.$$

### Задачи к главе 8

Исследовать на экстремум функционалы:

$$1. v[y(x)] = \int_0^2 (xy' + y'^2) dx; \quad y(0) = 1; \quad y(2) = 0.$$

$$2. v[y(x)] = \int_0^a (y'^2 + 2yy' - 16y^2) dx; \quad a > 0; \quad y(0) = 0; \quad y(a) = 0.$$

$$3. v[y(x)] = \int_{-1}^2 y'(1 + x^2 y') dx; \quad y(-1) = 1; \quad y(2) = 4.$$

$$4. v[y(x)] = \int_1^2 y'(1 + x^2 y') dx; \quad y(1) = 3; \quad y(2) = 5.$$

$$5. v[y(x)] = \int_{-1}^2 y'(1 + x^2 y') dx; \quad y(-1) = y(2) = 1.$$

$$6. v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (4y^2 - y'^2 + 8y) dx; \quad y(0) = -1; \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$7. v[y(x)] = \int_1^2 (x^2 y'^2 + 12y^2) dx; \quad y(1) = 1; \quad y(2) = 8.$$

$$8. v[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2ye^{2x}) dx; \quad y(0) = \frac{1}{3}; \quad y(1) = \frac{1}{3}e^2.$$

$$9. v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y^2 - y'^2 + 6y \sin 2x) dx; \quad y(0) = 0; \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$10. v[y(x)] = \int_0^{x_1} \frac{dx}{y'}; \quad y(0) = 0; \quad y(x_1) = y_1; \quad x_1 > 0; \quad y_1 > 0.$$

$$11. v[y(x)] = \int_0^{x_1} \frac{dx}{y'^2}; \quad y(0) = 0; \quad y(x_1) = y_1; \quad x_1 > 0; \quad y_1 > 0.$$

$$12. v[y(x)] = \int_1^2 \frac{x^3}{y'^2} dx; \quad y(1) = 1; \quad y(2) = 4.$$

$$13. v[y(x)] = \int_1^3 (12xy + y'^2) dx; \quad y(1) = 0; \quad y(3) = 26.$$

$$14. v[y(x)] = \int_0^2 [y^2 + (y')^2 - 2xy] dx; \quad y(0) = 0; \quad y(2) = 3.$$

---

## ГЛАВА 9

### ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

#### § 1. Связи вида $\varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$

Вариационными задачами на условный экстремум называются задачи, в которых требуется найти экстремум функционала  $v$ , причем на функции, от которых зависит функционал  $v$ , наложены некоторые связи. Например, требуется исследовать на экстремум функционал

$$v[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx$$

при наличии условий

$$\varphi_l(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m; \quad m < n).$$

Вспомним, как решается аналогичная задача при исследовании на экстремум функции  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , при наличии связей

$$\varphi_l(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m; \quad m < n).$$

Наиболее естественный путь заключается в разрешении системы

$$\varphi_l(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m).$$

уравнения которой мы будем считать независимыми, относительно каких-нибудь  $m$  переменных, например относительно  $x_1, x_2, \dots, x_m$ :

$$x_1 = x_1(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n);$$

$$x_2 = x_2(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n);$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_m = x_m(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n),$$

и подстановки найденных  $x_1, x_2, \dots, x_m$  в  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . При этом функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  становится функцией  $\Phi(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)$  только  $n - m$  переменных  $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ .

которые уже независимы, и следовательно, задача свелась к исследованию функции  $\Phi$  на безусловный экстремум. Этим путем можно, конечно, решать и поставленную выше вариационную задачу. Разрешая систему  $\varphi_l(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$  ( $l = 1, 2, \dots, m$ ) относительно  $y_1, y_2, \dots, y_m$  (или каких-нибудь других  $m$  функций  $y_l$ ) и подставляя их выражения в  $v[y_1, y_2, \dots, y_n]$ , мы получим функционал  $W[y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n]$ , зависящий только от  $n - m$  уже независимых аргументов, и, следовательно, к функционалу  $W$  применимы методы, изложенные в § 3 главы 6. Однако как для функций, так и для функционалов обычно более удобен другой метод решения, называемый методом неопределенных множителей, сохраняющий полное равноправие переменных. Как известно, этот метод при исследовании на экстремум функции  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  при наличии связей  $\varphi_l(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  ( $l = 1, 2, \dots, m$ ) заключается в том, что составляется новая вспомогательная функция

$$z^* = f + \sum_{l=1}^m \lambda_l \varphi_l,$$

где  $\lambda_l$  — некоторые постоянные множители, и функция  $z^*$  исследуется уже на безусловный экстремум, т. е. составляется система уравнений  $\frac{\partial z^*}{\partial x_j} = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), дополненная уравнениями связей  $\varphi_l = 0$  ( $l = 1, 2, \dots, m$ ), из которой определяются все  $n + m$  неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ . Совершенно аналогично может быть решена задача на условный экстремум и для функционалов, а именно: если

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx$$

и

$$\varphi_l(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m),$$

то составляют функционал

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left( F + \sum_{l=1}^m \lambda_l(x) \varphi_l \right) dx \quad \text{или} \quad v^* = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx,$$

где

$$F^* = F + \sum_{l=1}^m \lambda_l(x) \varphi_l.$$

который уже исследуется на безусловный экстремум, т. е. решают систему уравнений Эйлера

$$\left. \begin{aligned} F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* &= 0 \quad (j=1, 2, \dots, n), \\ \Phi_i &= 0 \quad (i=1, 2, \dots, m). \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

дополненную уравнениями связей

Число уравнений  $m + n$ , вообще говоря, достаточно для определения  $m + n$  неизвестных функций  $y_1, y_2, \dots, y_n$  и  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , а граничные условия  $y_j(x_0) = y_{j0}$  и  $y_j(x_1) = y_{j1}$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ), которые не должны противоречить уравнениям связей, вообще говоря, дадут возможность определить  $2n$  произвольных постоянных в общем решении системы уравнений Эйлера.

Очевидно, что найденные этим путем кривые, на которых достигается минимум или максимум функционала  $v^*$ , будут решениями и исходной вариационной задачи. Действительно, при найденных из системы (9.1) функциях

$$\lambda_i(x) \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad \text{и} \quad y_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad \text{все} \quad \Phi_i = 0$$

и, следовательно,  $v^* = v$ , причем если при  $y_j = y_j(x)$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ), определенных из системы (9.1), достигается безусловный экстремум функционала  $v^*$ , т. е. экстремум по отношению ко всем близким кривым, как удовлетворяющим уравнениям связи, так и не удовлетворяющим им, то, в частности, экстремум достигается и по отношению к более узкому классу кривых, удовлетворяющих уравнениям связей.

Однако из этого рассуждения отнюдь не следует, что все решения исходной задачи на условный экстремум будут давать безусловный экстремум функционалу  $v^*$  и, следовательно, остается невыясненным, все ли решения могут быть найдены этим методом. Мы ограничимся доказательством более слабого утверждения.

**Теорема.** *Функции  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , реализующие экстремум функционала*

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx$$

*при наличии условий*

$$\Phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m; m < n)$$

*удовлетворяют при соответствующем выборе множителей  $\lambda_i(x)$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) уравнениям Эйлера, составленным для*

функционала

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left( F + \sum_{l=1}^m \lambda_l(x) \varphi_l \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx.$$

Функции  $\lambda_l(x)$  и  $y_l(x)$  определяются из уравнений Эйлера

$$F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

и

$$\varphi_l = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m).$$

Уравнения  $\varphi_l = 0$  можно также считать уравнениями Эйлера для функционала  $v^*$ , если аргументами функционала считать не только функции  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , но и  $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$ . Уравнения  $\varphi_l(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$  ( $l = 1, 2, \dots, m$ ) предполагаются независимыми, т. е. один из якобианов порядка  $m$  отличен от нуля, например

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} \neq 0.$$

Доказательство. Основное условие экстремума  $\delta v = 0$  принимает в данном случае вид

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n (F_{y_j} \delta y_j + F_{y_j'} \delta y_j') dx = 0.$$

Интегрируя по частям вторые слагаемые в каждой скобке и принимая во внимание, что

$$(\delta y_j)' = \delta y_j' \quad \text{и} \quad (\delta y_j)_{x=x_0} = 0; \quad (\delta y_j)_{x=x_1} = 0,$$

получим

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left( F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y_j'} \right) \delta y_j dx = 0.$$

Так как функции  $y_1, y_2, \dots, y_n$  подчинены  $m$  независимым связям

$$\varphi_l(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m),$$

то вариации  $\delta y_j$  не произвольны, и пока применять основной леммы нельзя. Вариации  $\delta y_j$  должны удовлетворять следующим условиям,

полученным путем варьирования уравнений связей  $\varphi_i = 0$ :

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)^*.$$

и следовательно, только  $n - m$  из вариаций  $\delta y_j$  можно считать произвольными, например  $\delta y_{m+1}, \delta y_{m+2}, \dots, \delta y_n$ , а остальные определяются из полученных уравнений.

Умножая почленно каждое из этих уравнений на  $\lambda_i(x) dx$  и интегрируя в пределах от  $x_0$  до  $x_1$ , получим

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda_i(x) \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Складывая почленно все эти  $m$  уравнений, которым удовлетворяют допустимые вариации  $\delta y_j$ , с уравнением

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left( F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y_j'} \right) \delta y_j dx = 0,$$

будем иметь

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial F}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_j'} \right] \delta y_j dx = 0,$$

или, если ввести обозначение

$$F^* = F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \varphi_i,$$

получим

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left( F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* \right) \delta y_j dx = 0.$$

\*) Точнее, применяя к разности

$$\varphi_i(x, y_1 + \delta y_1, \dots, y_n + \delta y_n) - \varphi_i(x, y_1, \dots, y_n)$$

левых частей уравнений  $\varphi_i(x, y_1 + \delta y_1, \dots, y_n + \delta y_n) = 0$  и  $\varphi_i(x, y_1, \dots, y_n) = 0$  формулу Тейлора, следовало бы писать

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j + R_i = 0,$$

где  $R_i$  имеют порядок выше первого относительно  $\delta y_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Однако, как нетрудно проверить, члены  $R_i$  не окажут существенного влияния на дальнейшие рассуждения, так как при вычислении вариации функционала нас интересуют лишь члены первого порядка относительно  $\delta y_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

И здесь пока нельзя применять основной леммы ввиду того, что вариации  $\delta y_j$  не произвольны. Выберем  $m$  множителей  $\lambda_1(x)$ ,  $\lambda_2(x)$ , ...,  $\lambda_m(x)$  так, чтобы они удовлетворяли  $m$  уравнениям

$$F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

или

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_j'} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Эти уравнения образуют линейную по отношению к  $\lambda_i$  систему с определителем, отличным от нуля,

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} \neq 0;$$

следовательно, эта система имеет решение

$$\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x).$$

При таком выборе  $\lambda_1(x)$ ,  $\lambda_2(x)$ , ...,  $\lambda_m(x)$  основное необходимое условие экстремума

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left( F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* \right) \delta y_j dx = 0$$

принимает вид

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=m+1}^n \left( F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* \right) \delta y_j dx = 0.$$

Так как для функций  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , реализующих экстремум функционала  $v$ , это функциональное уравнение обращается в тождество уже при произвольном выборе  $\delta y_j$  ( $j = m+1, m+2, \dots, n$ ), то теперь можно применить основную лемму. Положив по очереди равным нулю все  $\delta y_j$ , кроме одного, и применяя лемму, получим

$$F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* = 0 \quad (j = m+1, m+2, \dots, n).$$

Принимая во внимание полученные выше уравнения

$$F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

окончательно будем иметь, что функции, реализующие условный экстремум функционала  $v$ , и множители  $\lambda_i(x)$  должны удовлетворять

системе уравнений

$$F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j}' = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Пример 1. Найти кратчайшее расстояние между двумя точками  $A(x_0, y_0, z_0)$  и  $B(x_1, y_1, z_1)$  на поверхности  $\varphi(x, y, z) = 0$  (см. задачу о геодезических линиях, стр. 282). Расстояние между двумя точками на поверхности определяется, как известно, по формуле

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx.$$

В данном случае надо найти минимум  $l$  при условии  $\varphi(x, y, z) = 0$ . Согласно предыдущему берем вспомогательный функционал

$$I^* = \int_{x_0}^{x_1} [ \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda(x) \varphi(x, y, z) ] dx$$

и для него пишем уравнения Эйлера:

$$\lambda(x) \varphi_y - \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0;$$

$$\lambda(x) \varphi_z - \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0;$$

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

Из этих трех уравнений определяются искомые функции

$$y = y(x) \quad \text{и} \quad z = z(x),$$

на которых может достигаться условный минимум функционала  $v$ , и множитель  $\lambda(x)$ .

Пример 2. Пользуясь принципом Остроградского — Гамильтона (см. стр. 320), найти уравнения движения системы материальных точек массы  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) с координатами  $(x_i, y_i, z_i)$  под действием сил, имеющих силовую функцию —  $U$ , при наличии связей

$$\varphi_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n, z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$$

$$(j = 1, 2, \dots, m).$$

Интеграл Остроградского — Гамильтона

$$v = \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$$

в данном случае имеет вид

$$v = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - U \right] dt.$$

а вспомогательный функционал

$$v^* = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - U + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) \varphi_j \right] dt.$$

Уравнения движения будут уравнениями Эйлера для функционала  $v^*$ . Они будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= - \frac{\partial U}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}; \\ m_i \ddot{y}_i &= - \frac{\partial U}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i}; \\ m_i \ddot{z}_i &= - \frac{\partial U}{\partial z_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_i} \\ &(i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

## § 2. Связи вида $\varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0$

В предыдущем параграфе мы рассматривали вопрос об исследовании на экстремум функционала

$$\begin{aligned} v &= \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx; \\ y_j(x_0) &= y_{j0}, \quad y_j(x_1) = y_{j1} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

при наличии *конечных* связей

$$\varphi_l(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m). \quad (9.2)$$

Предположим теперь, что уравнения связей являются *дифференциальными уравнениями*

$$\varphi_l(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m).$$

В механике связи такого вида называются *неголономными*, а связи вида (9.2) — *голономными*.

В этом случае также можно доказать правило множителей, заключающееся в том, что условный экстремум функционала  $v$  достигается на тех же кривых, на которых реализуется безусловный экстремум функционала

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left[ F + \sum_{l=1}^m \lambda_l(x) \varphi_l \right] dx = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx,$$

где

$$F^* = F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \varphi_i.$$

Однако доказательство значительно усложняется по сравнению со случаем конечных связей.

Если же ограничиться доказательством более слабого утверждения о том, что кривые, на которых достигается условный экстремум функционала  $v$ , при соответствующем выборе  $\lambda_i(x)$  являются экстремальными для функционала  $v^*$ , то доказательство, проведенное в предыдущем параграфе, может быть с незначительными изменениями повторено и для рассматриваемого случая.

Действительно, предположим, что один из функциональных определителей порядка  $m$  отличен от нуля, например

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{D(y_1', y_2', \dots, y_m')} \neq 0.$$

Это гарантирует независимость связей.

Разрешая уравнение  $\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0$  относительно  $y_1', y_2', \dots, y_m'$ , что возможно, так как

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{D(y_1', y_2', \dots, y_m')} \neq 0,$$

получим  $y_i' = \psi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_{m+1}', y_{m+2}', \dots, y_n')$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Если считать  $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n$  произвольно заданными функциями, то из этой системы дифференциальных уравнений определяются  $y_1, y_2, \dots, y_m$ . Таким образом,  $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n$  являются произвольными дифференцируемыми функциями с фиксированными граничными значениями и, следовательно, их вариации в том же смысле произвольны.

Пусть  $y_1, y_2, \dots, y_n$  — произвольная, удовлетворяющая уравнениям связей  $\varphi_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), допустимая система функций. Варьируем уравнения связей

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j'} \delta y_j' = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)^*.$$

Умножаем почленно каждое из полученных уравнений на пока не определенный множитель  $\lambda_i(x)$  и интегрируем в пределах от  $x_0$  до  $x_1$ ; тогда получим

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda_i(x) \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j dx + \int_{x_0}^{x_1} \lambda_i(x) \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j'} \delta y_j' dx = 0;$$

\*) И здесь, как и на стр. 379, следовало бы в левые части уравнений включить слагаемые, содержащие члены порядка выше первого относительно  $\delta y_j$  и  $\delta y_j'$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), причем учесть влияние этих нелинейных членов здесь уже значительно труднее.

интегрируя каждое слагаемое второго интеграла по частям и принимая во внимание, что  $\delta y_j = (\delta y_j)'$  и  $(\delta y_j)_{x=x_0} = (\delta y_j)_{x=x_1} = 0$ , будем иметь

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left[ \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \left( \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j'} \right) \right] \delta y_j dx = 0. \quad (9.3)$$

Из основного необходимого условия экстремума  $\delta v = 0$  получим

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left( F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y_j'} \right) \delta y_j dx = 0, \quad (9.4)$$

так как

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left( F_{y_j} \delta y_j + F_{y_j'} \delta y_j' \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left( F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y_j'} \right) \delta y_j dx.$$

Сложив почленно все уравнения (9.3) и уравнение (9.4) и вводя обозначение

$F^* = F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \varphi_i$ , будем иметь

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left( F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* \right) \delta y_j dx = 0. \quad (9.5)$$

Так как вариации  $\delta y_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) не произвольны, то пока нельзя применять основной леммы. Выберем  $m$  множителей  $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$  так, чтобы они удовлетворяли уравнениям

$$F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Если написать эти уравнения в развернутом виде, то они представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений относительно

$$\lambda_i(x) \text{ и } \frac{d\lambda_i}{dx} \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

которая при сделанных предположениях имеет решение  $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$ , зависящее от  $m$  произвольных постоянных. При таком выборе  $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$  уравнение (9.5) приводится к виду

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=m+1}^n \left( F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* \right) \delta y_j dx = 0,$$

где вариации  $\delta y_j$  ( $j = m+1, m+2, \dots, n$ ) уже произвольны, и следовательно, полагая все вариации  $\delta y_i = 0$ , кроме какой-нибудь одной  $\delta y_j$ , и применяя основную лемму, получим

$$F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* = 0 \quad (j = m+1, m+2, \dots, n).$$

Таким образом, функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ , реализующие условный экстремум функционала  $v$ , и множители  $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$  должны удовлетворять системе  $n + m$  уравнений:

$$F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j}' = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

и

$$\varphi_l = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m).$$

т. е. должны удовлетворять уравнениям Эйлера вспомогательного функционала  $v^*$ , который рассматривается как функционал, зависящий от  $n + m$  функций

$$y_1, y_2, \dots, y_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m.$$

### § 3. Изопериметрические задачи

Изопериметрическими задачами в узком смысле этого слова называются задачи об отыскании геометрической фигуры максимальной площади при заданном периметре.

Среди таких экстремальных задач, исследовавшихся еще в древней Греции, были и вариационные задачи, например упомянутая на стр. 282 задача о нахождении замкнутой кривой заданной длины, ограничивающей максимальную площадь\*). Задавая кривую в параметрической форме  $x = x(t), y = y(t)$ , можно эту задачу формулировать так: найти максимум функционала

$$S = \int_{t_0}^{t_1} x \dot{y} dt \quad \left( \text{или } S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x \dot{y} - y \dot{x}) dt \right)$$

при условии, что функционал

$$\int_{t_0}^{t_1} V \dot{x}^2 + \dot{y}^2 dt$$

сохраняет постоянное значение:

$$\int_{t_0}^{t_1} V \dot{x}^2 + \dot{y}^2 dt = l.$$

Таким образом, мы имеем здесь вариационную задачу на условный экстремум со своеобразным условием: интеграл  $\int_{t_0}^{t_1} V \dot{x}^2 + \dot{y}^2 dt$  сохраняет постоянное значение.

\*) Хотя решение этой задачи было известно еще в древней Греции, однако ее своеобразный вариационный характер был осознан лишь в конце XVII века.

В настоящее время изопериметрическими задачами называется значительно более общий класс задач, а именно: все вариационные задачи, в которых требуется определить экстремум функционала

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx$$

при наличии так называемых *изопериметрических условий*

$$\int_{x_0}^{x_1} F_l(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx = l_l$$

$$(l = 1, 2, \dots, m),$$

где  $l_l$  — постоянные,  $m$  может быть больше, меньше или равно  $n$ , а также аналогичные задачи для более сложных функционалов.

Изопериметрические задачи могут быть сведены к задачам на условный экстремум, рассмотренным в предыдущем параграфе, путем введения новых неизвестных функций. Обозначим

$$\int_{x_0}^x F_l dx = z_l(x) \quad (l = 1, 2, \dots, m),$$

откуда  $z_l(x_0) = 0$  и из условия  $\int_{x_0}^{x_1} F_l dx = l_l$  имеем  $z_l(x_1) = l_l$ .

Дифференцируя  $z_l$  по  $x$ , будем иметь

$$z_l'(x) = F_l(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')$$

$$(l = 1, 2, \dots, m).$$

Тем самым интегральные, изопериметрические связи  $\int_{x_0}^{x_1} F_l dx = l_l$  заменились связями дифференциальными:

$$z_l' = F_l(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')$$

$$(l = 1, 2, \dots, m)$$

и, следовательно, задача свелась к задаче, рассмотренной в предыдущем параграфе.

Применяя правило множителей, можно вместо исследования на условный экстремум функционала  $v = \int_{x_0}^{x_1} F dx$  при наличии связей

$F_l - z'_l = 0$  ( $l = 1, 2, \dots, m$ ) исследовать на безусловный экстремум функционал

$$v^* = \int_x^{x_1} \left[ F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) (F_l - z'_l) \right] dx = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx,$$

где

$$F^* = F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) (F_l - z'_l).$$

Уравнения Эйлера для функционала  $v^*$  имеют вид

$$F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j}'^* = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

$$F_{z_l}^* - \frac{d}{dx} F_{z_l}'^* = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m),$$

или

$$F_{y_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_{i y_j} - \frac{d}{dx} \left( F_{y_j}' + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_{i y_j}' \right) = 0$$

$$(j = 1, 2, \dots, n),$$

$$\frac{d}{dx} \lambda_l(x) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m).$$

Из последних  $m$  уравнений получаем, что все  $\lambda_l$  постоянны, а первые  $n$  уравнений совпадают с уравнениями Эйлера для функционала

$$v^{**} = \int_{x_0}^{x_1} \left( F + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_l \right) dx.$$

Таким образом, мы получаем следующее правило: для получения основного необходимого условия в изопериметрической задаче о нахождении экстремума функционала  $v = \int_{x_0}^{x_1} F dx$  при наличии связей

$\int_{x_0}^{x_1} F_l dx = l_i$  ( $l = 1, 2, \dots, m$ ) надо составить вспомогательный функционал

$$v^{**} = \int_{x_0}^{x_1} \left( F + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_l \right) dx,$$

где  $\lambda_i$  — постоянные, и написать для него уравнения Эйлера.

Произвольные постоянные  $C_1, C_2, \dots, C_{2n}$  в общем решении системы уравнений Эйлера и постоянные  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  определяются из граничных условий

$$y_j(x_0) = y_{j0}, \quad y_j(x_1) = y_{j1} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

и из изопериметрических условий

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = l_i \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Система уравнений Эйлера для функционала  $v^{**}$  не изменяется, если  $v^{**}$  умножить на некоторый постоянный множитель  $\mu_0$  и, следовательно, представить его в виде

$$\mu_0 v^{**} = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=0}^m \mu_i F_i dx,$$

где введены обозначения  $F_0 = F$ ,  $\mu_j = \lambda_j \mu_0$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Теперь все функции  $F_i$  входят симметрично, поэтому экстремали в исходной вариационной задаче и в задаче нахождение экстремума функ-

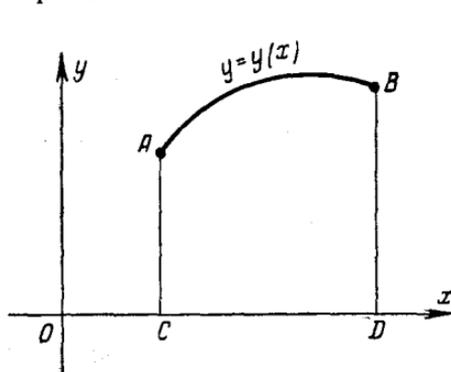


Рис. 9.1.

ционала  $\int_{x_0}^{x_1} F_s dx$  при наличии изопериметрических условий

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = l_i$$

$(i = 0, 1, 2, \dots$

$\dots, s-1, s+1, \dots, m)$

совпадают при любом выборе  $s$  ( $s = 0, 1, \dots, n$ ).

Это свойство носит название *принципа взаимности*. Напри-

мер, задача о максимуме площади, ограниченной замкнутой кривой заданной длины, и задача о минимуме длины замкнутой кривой, ограничивающей заданную площадь, взаимны и имеют общие экстремали.

**Пример 1.** Найти кривую  $y = y(x)$  заданной длины  $l$ , для которой площадь  $S$  изображенной на рис. 9.1 криволинейной трапеции  $CABD$  достигает максимума.

Исследуем на экстремум функционал

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y dx, \quad y(x_0) = y_0.$$

$y(x_1) = y_1$ , при изопериметрическом условии

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2} dx = l.$$

Составляем сначала вспомогательный функционал

$$S^{**} = \int_{x_0}^{x_1} (y + \lambda \sqrt{1+y'^2}) dx.$$

Так как подинтегральная функция не содержит  $x$ , то уравнение Эйлера для  $S^{**}$  имеет первый интеграл  $F - y'F_{y'} = C_1$  или, в данном случае,

$$y + \lambda \sqrt{1+y'^2} - \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1,$$

откуда

$$y - C_1 = \frac{-\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Вводим параметр  $t$ , полагая  $y' = \operatorname{tg} t$ ; тогда получим

$$y - C_1 = -\lambda \cos t;$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t, \text{ откуда } dx = \frac{dy}{\operatorname{tg} t} = \frac{\lambda \sin t dt}{\operatorname{tg} t} = \lambda \cos t dt;$$

$$x = \lambda \sin t + C_2.$$

Итак, уравнение экстремалей в параметрической форме имеет вид:

$$x - C_2 = \lambda \sin t,$$

$$y - C_1 = -\lambda \cos t,$$

или, исключая  $t$ , получим  $(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2$  — семейство окружностей. Постоянные  $C_1$ ,  $C_2$  и  $\lambda$  определяются из условий

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 \quad \text{и} \quad \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2} dx = l.$$

Пример 2. Найти кривую  $AB$  заданной длины  $l$ , ограничивающую вместе с заданной кривой  $y = f(x)$  максимальную площадь, заштрихованную на рис. 9.2.

Требуется определить экстремум функционала

$$S = \int_{x_0}^{x_1} (y - f(x)) dx;$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

при наличии условия

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2} dx = l.$$

Составляем вспомогательный функционал

$$S^{**} = \int_{x_0}^{x_1} (y - f(x) + \lambda \sqrt{1 + y'^2}) dx.$$

Уравнение Эйлера для этого функционала не отличается от уравнения Эйлера в предыдущей задаче, и следовательно, в данной задаче максимум может достигаться лишь на дугах окружностей.

Пример 3. Найти форму абсолютно гибкого, нерастяжимого однородного каната длиной  $l$ , подвешенного в точках  $A$  и  $B$  (рис. 9.3).

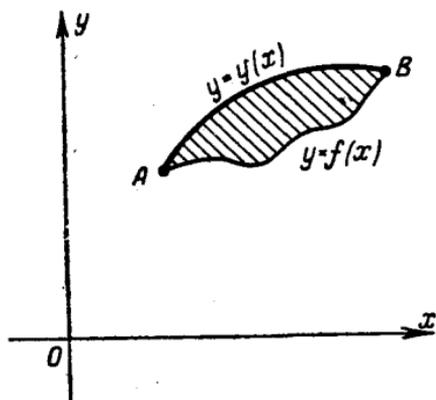


Рис. 9.2.

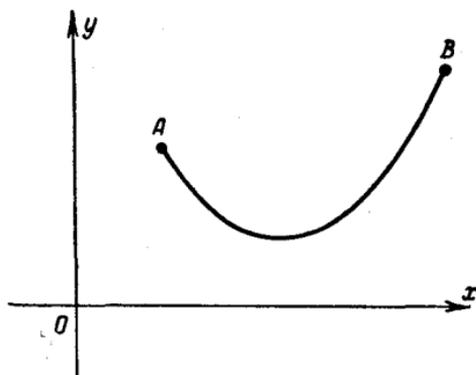


Рис. 9.3.

Так как в положении равновесия центр тяжести должен занимать наиболее низкое положение, то задача сводится к нахождению минимума статического момента  $P$  относительно оси  $Ox$ , которая предполагается направленной горизонтально. Исследуем на экстремум функционал  $P = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx$

при условии  $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = l$ . Составляем вспомогательный функционал

$$P^{**} = \int_{x_0}^{x_1} (y + \lambda) \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

для которого уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$$F - y'F_{y'} = C,$$

или, в данном случае,

$$(y + \lambda) \sqrt{1 + y'^2} - \frac{(y + \lambda) y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1,$$

откуда  $y + \lambda = C_1 \sqrt{1 + y'^2}$ . Вводим параметр, полагая  $y' = \operatorname{sh} t$ , откуда  $\sqrt{1 + y'^2} = \operatorname{ch} t$  и  $y + \lambda = C_1 \operatorname{ch} t$ ;  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sh} t$ ;  $dx = \frac{dy}{\operatorname{sh} t} = C_1 dt$ ;  $x = C_1 t + C_2$ ,

или, исключая  $t$ , получим  $y + \lambda = C_1 \operatorname{ch} \frac{x - C_2}{C_1}$  — семейство цепных линий.

Указанное выше правило решения изопериметрических задач распространяется и на более сложные функционалы.

Упомянем еще об одной задаче на условный экстремум — задаче об оптимальном управлении. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)) \quad (9.6)$$

с начальным условием  $x(t_0) = x_0$ .

Кроме неизвестной функции (или вектор-функции)  $x(t)$ , это уравнение содержит еще так называемую *управляющую функцию* (или вектор-функцию)  $u(t)$ . Управляющую функцию  $u(t)$  надо выбрать так, чтобы заданный функционал

$$v = \int_{t_1}^{t_2} F(x(t), u(t)) dt$$

достигал экстремума.

Функция  $u(t)$ , дающая решение поставленной задачи, называется *оптимальной функцией* или *оптимальным управлением*.

Эту задачу можно рассматривать как задачу на условный экстремум функционала  $v$  с дифференциальными связями (9.6). Однако в практических задачах оптимальные функции часто лежат на границе множества допустимых управляющих функций (например, если управляющей функцией является включаемая мощность моторов, то, очевидно, эта мощность ограничена максимальной мощностью моторов, причем в решениях оптимальных задач нередко приходится включать моторы хотя бы на некоторых участках на полную мощность).

Если же оптимальная функция лежит на границе множества допустимых управляющих функций, то изложенная выше теория задач на условный экстремум, предполагавшая возможность двусторонних вариаций, неприменима.

Поэтому для решения задач оптимального регулирования обычно применяются иные методы, разработанные Л. С. Понтрягиным (см. [8]) и Р. Беллманом (см. [9]).

**Пример.** В системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = u \quad (t - \text{время}), \quad (9.7)$$

описывающей движение точки в плоскости с координатами  $x, v$ , определить управляющую функцию  $u(t)$  так, чтобы точка  $A(x_0, v_0)$  переместилась в точку  $B(0, 0)$  за наименьший промежуток времени, причем  $|u| \leq 1$  (так как  $u = \frac{d^2x}{dt^2}$ , то  $u$  можно считать силой, действующей на точку с единичной массой).

Управляющая функция  $u(t)$  кусочно непрерывна. Для упрощения рассуждений предположим, что она имеет не более одной точки разрыва, однако окончательный результат верен и без этого предположения.

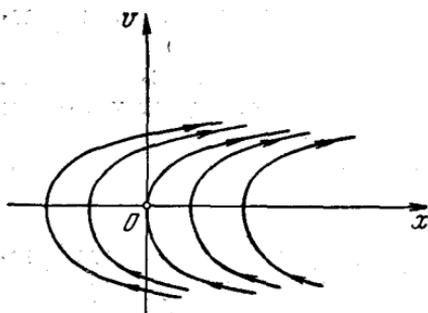


Рис. 9.4.

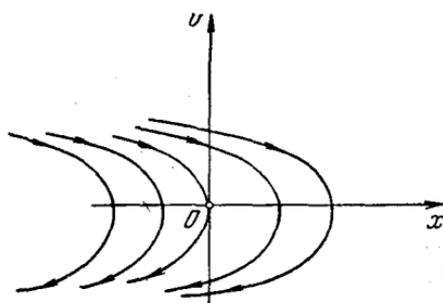


Рис. 9.5.

Почти очевидно, что на оптимальных траекториях  $u = \pm 1$ , так как при этих значениях  $\left| \frac{dx}{dt} \right|$  и  $\left| \frac{dv}{dt} \right|$  достигают наибольших значений и, следовательно, точка движется с наибольшей скоростью. Полагая в (9.7)  $u = 1$ , получим

$$v = t + C_1, \quad x = \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2,$$

или  $v^2 = 2(x - C)$ , и аналогично при  $u = -1$ ;

$$v = -t + C_1, \quad x = -\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2, \quad v^2 = -2(x - C).$$

На рис. 9.4 и 9.5 изображены эти семейства парабол, причем стрелки указывают направление движения при возрастании  $t$ . Если точка  $A(x_0, v_0)$  лежит на проходящих через начало координат дугах парабол

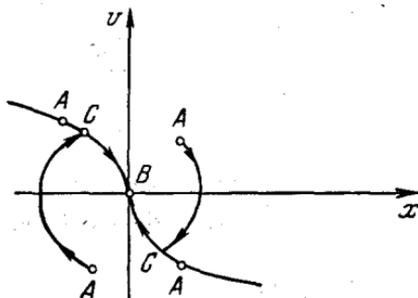


Рис. 9.6.

$$v = -\sqrt{-x} \quad \text{или} \quad v = \sqrt{-x} \quad (9.8)$$

(рис. 9.6), то оптимальной траекторией является дуга одной из этих парабол, соединяющая точку  $A$  с точкой  $B$ . Если же точка  $A$  не лежит на этих параболах, то оптимальной траекторией будет дуга параболы  $AC$ , проходящая через точку  $A$ , и дуга  $CB$  одной из парабол (9.8) (см. рис. 9.6, на котором указаны два возможных положения точек  $A$  и  $C$ ).

В этой задаче время  $T$  перемещения точки из положения  $A$  в положение  $B$  является функционалом, определяемым первым из уравнений (9.7), второе уравнение из (9.7) можно рассматривать как уравнение связи. Однако применение к этой задаче изложенных выше классических методов решения было бы затруднительным, так как оптимальное управление лежит на границе области допустимых управлений  $|u| \leq 1$  и двусторонние вариации здесь не-

возможны, кроме того, решение ищется в классе кусочно непрерывных управлений.

Оба эти обстоятельства весьма характерны для большинства практических задач на оптимальное управление.

### Задачи к главе 9

1. Найти экстремали изопериметрической задачи  $v[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + x^2) dx$

при условии  $\int_0^1 y^2 dx = 2$ ;  $y(0) = 0$ ;  $y(1) = 0$ .

2. Найти геодезические линии круглого цилиндра  $r = R$ .

Указание. Решение удобно искать в цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$ .

3. Найти экстремали изопериметрической задачи

$$v[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} y'^2 dx \text{ при условии } \int_{x_1}^{x_2} y dx = a.$$

где  $a$  — постоянная.

4. Написать дифференциальное уравнение экстремалей изопериметрической задачи об экстремуме функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{x_1} [p(x)y'^2 + q(x)y^2] dx$$

при условии  $\int_0^{x_1} r(x)y^2 dx = 1$ ;  $y(0) = 0$ ;  $y(x_1) = 0$ .

5. Найти экстремаль в изопериметрической задаче об экстремуме функционала

$$v[y(x); z(x)] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z) dx$$

при условии  $\int_0^1 (y'^2 - xy' - z'^2) dx = 2$ ;  $y(0) = 0$ ;  $z(0) = 0$ ;  $y(1) = 1$ ;  $z(1) = 1$ .

## ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ

## § 1. Прямые методы

Дифференциальные уравнения вариационных задач интегрируются в конечном виде лишь в исключительных случаях. В связи с этим естественно возникает потребность в иных методах решения этих задач. Основная идея так называемых *прямых методов* заключается в том, что вариационная задача рассматривается как предельная для некоторой задачи на экстремум функции конечного числа переменных. Эта задача на экстремум функции конечного числа переменных решается обычными методами, а затем предельным переходом получается решение соответствующей вариационной задачи.

Функционал  $v[y(x)]$  можно рассматривать как функцию бесконечного множества переменных. Это утверждение становится совершенно очевидным, если предположить, что допустимые функции могут быть разложены в степенные ряды:

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots,$$

или в ряды Фурье:

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

или вообще в какие-нибудь ряды вида

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

где  $\varphi_n(x)$  — заданные функции. Для задания функции  $y(x)$ , представимой в виде ряда  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ , достаточно задать значения всех коэффициентов  $a_n$ , и следовательно, значение функционала  $v[y(x)]$  в этом случае определяется заданием бесконечной последовательности чисел:  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , т. е. функционал является

функцией бесконечного множества переменных:

$$v[y(x)] = \varphi(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots).$$

Следовательно, различие между вариационными задачами и задачами на экстремум функций конечного числа переменных состоит в том, что в вариационном случае приходится исследовать на экстремум функции бесконечного множества переменных. Поэтому основная идея прямых методов, заключающаяся, как уже сказано выше, в том, что вариационная задача рассматривается как предельная для задачи на экстремум функций конечного числа переменных, является весьма естественной.

Л. Эйлер в первый период своих исследований в области вариационного исчисления применял метод, называемый теперь конечно-разностным прямым методом. Этот метод в дальнейшем длительное время совсем не применялся и лишь в последние три десятилетия был с большим успехом снова возрожден в работах советских математиков (Л. А. Люстерник, И. Г. Петровский и др.).

Другой прямой метод, известный под названием метода Ритца, в разработку которого весьма значительный вклад внесен советскими математиками (Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов и др.), в настоящее время находит широкое применение при решении различных вариационных задач.

Третий прямой метод, предложенный Л. В. Канторовичем, применимый к функционалам, зависящим от функций нескольких независимых переменных, находит все более и более широкое применение в тех же областях, в которых применяется метод Ритца.

В дальнейшем мы остановимся лишь на этих трех основных прямых методах, причем доказательства многих утверждений будут опущены. Читателя, желающего более детально ознакомиться с применяющимися в настоящее время прямыми методами, мы отсылаем к книге Л. В. Канторовича и В. И. Крылова [10] и к книге С. Г. Михлина [11].

## § 2. Конечно-разностный метод Эйлера

Идея конечно-разностного метода заключается в том, что значения функционала  $v[y(x)]$ , например

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx, \quad y(x_0) = a, \quad y(x_1) = b,$$

рассматриваются не на произвольных, допустимых в данной вариационной задаче, кривых, а лишь на ломаных, составленных из заданного числа  $n$  прямолинейных звеньев, с заданными абсциссами вершин:  $x_0 + \Delta x, x_0 + 2\Delta x, \dots, x_0 + (n-1)\Delta x$ , где  $\Delta x = \frac{x_1 - x_0}{n}$  (рис. 10.1).

На таких ломаных функционал  $v[y(x)]$  превращается в функцию  $\Phi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$  ординат  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  вершины ломаной, так как ломаная вполне определяется этими ординатами.

Выбираем ординаты  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  так, чтобы функция  $\Phi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$  достигала экстремума, т. е. определяем  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  из системы уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_{n-1}} = 0,$$

а затем переходим к пределу при  $n \rightarrow \infty$ . В пределе при некоторых ограничениях, налагаемых на функцию  $F$ , получим решение вариационной задачи.

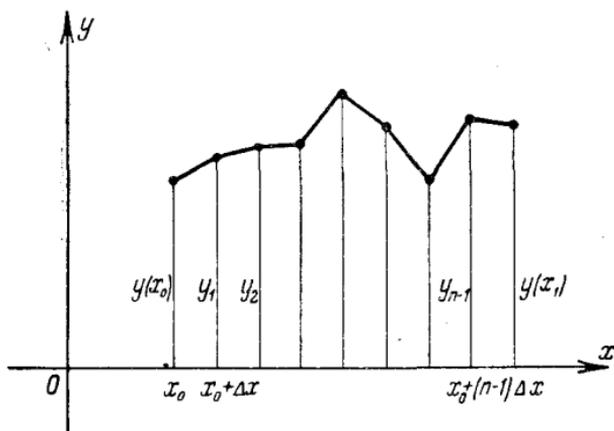


Рис. 10.1.

Удобнее, однако, значение функционала  $v[y(x)]$  на указанных выше ломаных вычислять приближенно, например в простейшей задаче заменять интеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_0+k\Delta x}^{x_0+(k+1)\Delta x} F\left(x, y, \frac{y_{k+1}-y_k}{\Delta x}\right) dx$$

интегральной суммой

$$\sum_{i=1}^n F\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) \Delta x.$$

В качестве примера выведем уравнение Эйлера для функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx.$$

В этом случае на рассматриваемых ломаных

$$v[y(x)] \approx \Phi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right) \Delta x.$$

Так как от  $y_i$  зависят лишь два слагаемых этой суммы:

$i$ -е и  $(i-1)$ -е,

$$F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right) \Delta x \quad \text{и} \quad F\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}\right) \Delta x,$$

то уравнения  $\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) принимают вид

$$F_y\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right) \Delta x + F_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right) \left(-\frac{1}{\Delta x}\right) \Delta x + \\ + F_{y'}\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}\right) \frac{1}{\Delta x} \Delta x = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, (n-1)),$$

или

$$F_y\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - \frac{F_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - F_{y'}\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta x}\right)}{\Delta x} = 0,$$

или

$$F_y\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - \frac{\Delta F_{y'}}{\Delta x} = 0.$$

Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получим уравнение Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

которому должна удовлетворять искомая функция  $y(x)$ , реализующая экстремум. Аналогично может быть получено основное необходимое условие экстремума в других вариационных задачах.

Если не совершать предельного перехода, то из системы уравнений  $\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) можно определить искомые ординаты  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  и тем самым получить ломаную, являющуюся приближенным решением вариационной задачи.

### § 3. Метод Ритца

Идея метода Ритца заключается в том, что значения некоторого функционала  $v[y(x)]$  рассматриваются не на произвольных допустимых кривых данной вариационной задачи, а лишь на всевозможных линейных комбинациях  $y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x)$  с постоянными

коэффициентами, составленных из  $n$  первых функций некоторой выбранной последовательности функций

$$W_1(x), W_2(x), \dots, W_n(x), \dots$$

Функции  $y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x)$  должны быть допустимыми в рассматриваемой задаче, что налагает некоторые ограничения на выбор последовательности функций  $W_i(x)$ . На таких линейных комбинациях функционал  $v[y(x)]$  превращается в функцию  $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  коэффициентов  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Эти коэффициенты  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  выбираются так, чтобы функция  $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  достигала экстремума; следовательно,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  должны быть определены из системы уравнений

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Совершая предельный переход при  $n \rightarrow \infty$ , получим в случае существования предела функцию  $y = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i W_i(x)$ , являющуюся (при некоторых ограничениях, налагаемых на функционал  $v[y(x)]$  и на последовательность  $W_1(x), W_2(x), \dots, W_n(x), \dots$ ) точным решением рассматриваемой вариационной задачи. Если не совершать предельного перехода, а ограничиться лишь  $n$  первыми членами  $y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x)$ , то получим приближенное решение вариационной задачи.

Если таким методом определяется абсолютный минимум функционала, то приближенное значение минимума функционала находится с избытком, так как минимум функционала на любых допустимых кривых не больше, чем минимум того же функционала на части этого класса допустимых кривых — на кривых вида  $y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x)$ . При нахождении тем же методом максимального значения функционала получаем по тем же причинам приближенное значение максимума функционала с недостатком.

Для того чтобы функции  $y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x)$  были допустимыми, прежде всего необходимо удовлетворить граничным условиям (конечно, не следует забывать и о других ограничениях, которые могут быть наложены на допустимые функции, например требования, касающихся их непрерывности или гладкости). Если граничные условия линейны и однородны, например, в простейшей задаче  $y(x_0) = y(x_1) = 0$  или

$$\beta_{1j} y(x_j) + \beta_{2j} y'(x_j) = 0 \quad (j = 0, 1),$$

где  $\beta_{ij}$  — постоянные, то проще всего и координатные функции выбрать удовлетворяющими этим граничным условиям. Очевидно, что при этом и  $y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x)$  при любых  $\alpha_i$  будут удовлетворять тем же граничным условиям. Пусть, например, граничные условия имеют вид  $y(x_0) = y(x_1) = 0$ , тогда в качестве координатных функций можно выбрать

$$W_i(x) = (x - x_0)(x - x_1)\varphi_i(x),$$

где  $\varphi_i(x)$  — какие-нибудь непрерывные функции, или

$$W_k(x) = \sin \frac{k\pi(x - x_0)}{x_1 - x_0} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

или какие-нибудь другие функции, удовлетворяющие условиям

$$W_i(x_0) = W_i(x_1) = 0.$$

Если условия неоднородны, например  $y(x_0) = y_0$ ,  $y(x_1) = y_1$ , где хотя бы одно из чисел  $y_0$  или  $y_1$  отлично от нуля, то проще всего искать решение вариационной задачи в виде

$$y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x) + W_0(x),$$

где  $W_0(x)$  удовлетворяет заданным граничным условиям  $W_0(x_0) = y_0$ ,  $W_0(x_1) = y_1$ , а все остальные  $W_i(x)$  удовлетворяют соответствующим однородным граничным условиям, т. е. в рассматриваемом случае  $W_i(x_0) = W_i(x_1) = 0$ . Очевидно, что при таком выборе при любых  $\alpha_i$  функции  $y_n(x)$  удовлетворяют заданным граничным условиям. В качестве функции  $W_0(x)$  можно выбрать, например, линейную функцию

$$W_0(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) + y_0.$$

Решение системы уравнений  $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), вообще говоря, является весьма сложной задачей. Эта задача значительно упрощается, если на экстремум исследуется квадратичный относительно неизвестной функции и ее производных функционал  $\varphi$ , так как в этом случае уравнения  $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) линейны относительно  $\alpha_i$ .

Выбор последовательности функций  $W_1, W_2, \dots, W_n, \dots$ , называемых координатными функциями, сильно влияет на степень сложности дальнейших вычислений, и поэтому от удачного выбора координатной системы функций в значительной мере зависит успех применения этого метода.

Все сказанное выше в полной мере относится и к функционалам  $v[z(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ , причем, конечно, в этом случае функции  $W_i$  должны быть уже функциями переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а также — к функционалам, зависящим от нескольких функций.

Метод Ритца часто применяется для точного или приближенного решения задач математической физики. Например, если требуется найти в некоторой области  $D$  решение уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y)$$

при заданных значениях  $z$  на границе области  $D$ , то можно заменить эту задачу вариационной задачей об экстремуме функционала, для которого данное уравнение является уравнением Остроградского (см. стр. 315). В рассматриваемом случае таким функционалом будет

$$\int_D \int \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 2zf(x, y) \right] dx dy.$$

Функцию  $z$ , реализующую экстремум этого функционала, можно находить любым из прямых методов.

Задачи математической физики обычно сводятся к исследованию на экстремум функционалов, квадратичных относительно неизвестной функции и ее производных, и следовательно, как указывалось выше, применение метода Ритца в этом случае упрощается.

Вопрос о сходимости приближений, получаемых по методу Ритца, к искомому решению вариационной задачи, а также об оценке степени точности этих приближений является весьма сложным. Поэтому ограничимся здесь лишь немногими замечаниями, отсылая читателя, желающего подробнее ознакомиться с этим вопросом, к книгам Михлина [11] и Канторовича и Крылова [10].

Для определенности будем иметь в виду функционал

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$$

и предполагать, что речь идет о его минимуме. Последовательность координатных функций  $W_1(x), W_2(x), \dots, W_n(x), \dots$  будем считать полной в том смысле, что каждая допустимая функция может быть с любой степенью точности аппроксимирована в смысле близости пер-

вого порядка линейной комбинацией  $\sum_{k=1}^n \alpha_k W_k(x)$  координатных функций, где  $n$  достаточно велико. Тогда, очевидно, что методом Ритца можно получить функции  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ , где  $y_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k W_k(x)$ ,

образующие так называемую минимизирующую последовательность, т. е. последовательность, для которой значения функционала

$$v[y_1], v[y_2], \dots, v[y_n], \dots$$

сходятся к минимуму или к нижней грани значений функционала  $v[y(x)]$ . Однако из того, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} v[y_n(x)] = \min v[y(x)]$ , отнюдь не следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x)$ . Минимизирующая последовательность может и не стремиться к функции, реализующей экстремум в классе допустимых функций.

Действительно, функционал

$$v[y_n(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_n(x), y_n'(x)) dx$$

может мало отличаться от

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx,$$

не только в том случае, когда на всем отрезке интегрирования  $y_n(x)$  близка в смысле близости первого порядка к  $y(x)$ , но и в том случае, когда на достаточно малых частях отрезка  $(x_0, x_1)$  функции  $y_n(x)$  и  $y(x)$  или их производные резко отличаются друг от друга, оставаясь близкими на остальной части отрезка  $(x_0, x_1)$  (рис. 10.2). Поэтому минимизирующая последовательность  $y_1, y_2, \dots, y_n$  может даже не иметь предела в классе допустимых функций, хотя функции  $y_1, y_2, \dots, y_n$  сами и будут допустимыми.

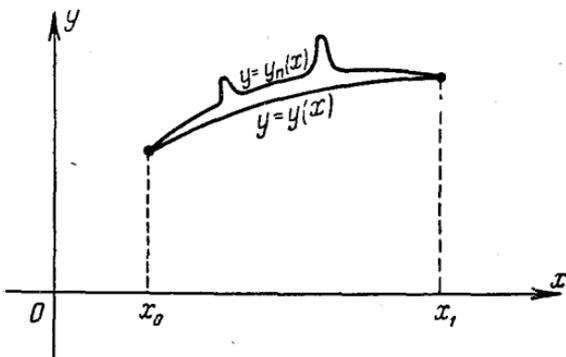


Рис. 10.2.

Условия сходимости последовательности  $y_n$ ,

полученной методом Ритца, к решению вариационной задачи и оценка быстроты сходимости для конкретных, часто встречающихся функционалов были разработаны в трудах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова. Так, например, для функционалов вида

$$v = \int_0^1 [p(x) y'^2 + q(x) y^2 + f(x) y] dx; \quad y(0) = y(1) = 0,$$

где  $p(x) \geq 0$ ;  $q(x) \geq 0$ , часто встречающихся в приложениях, не только доказана сходимость приближений, получаемых по методу Рунге, к функции  $y(x)$ , реализующей минимум функционала, при координатных функциях

$$W_k(x) = \sqrt{2} \sin k\pi x \quad (k = 1, 2, \dots),$$

но и даны весьма точные оценки погрешности  $|y(x) - y_n(x)|$ .

Приведем одну из этих оценок максимума  $|y(x) - y_n(x)|$  на отрезке  $(0, 1)$ :

$$\max |y - y_n| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \left[ \max p(x) + \frac{\max q(x)}{(n+1)^2 \pi^2} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\int_0^1 f^2(x) dx}}{\pi^2 \sqrt{2} [\min p(x)]^{\frac{5}{2}}} \times$$

$$\times \left[ \max |p'(x)| + \frac{1}{\pi} \max q(x) + \pi \min p(x) \right]^*.$$

Даже в этом, сравнительно простом случае, оценка погрешности очень сложна. Поэтому для оценки точности результатов, полученных методом Рунге или другими прямыми методами, обычно пользуются следующим теоретически, конечно, несовершенным, но практически достаточно надежным приемом: вычислив  $y_n(x)$  и  $y_{n+1}(x)$ , сравнивают их между собой в нескольких точках отрезка  $[x_0, x_1]$ . Если в пределах требуемой точности их значения совпадают, то считают, что с требуемой точностью решение рассматриваемой вариационной задачи равно  $y_n(x)$ . Если же значения  $y_n(x)$  и  $y_{n+1}(x)$  хотя бы в некоторых из выбранных точек в пределах заданной точности не совпадают, то вычисляют  $y_{n+2}(x)$  и сравнивают значения  $y_{n+1}(x)$  и  $y_{n+2}(x)$ . Этот процесс продолжается до тех пор, пока значения  $y_{n+k}(x)$  и  $y_{n+k+1}(x)$  не совпадут в пределах заданной точности.

Рис. 10.3.

Пример 1. При изучении колебаний заделанного клина постоянной толщины (рис. 10.3) приходится исследовать на экстремум функционал

$$v = \int_0^1 (ax^3 y'^2 - by^2) dx; \quad y(1) = y'(1) = 0,$$

\*) См. книгу Канторовича и Крылова [10].

где  $a$  и  $b$  — положительные постоянные. За координатные функции, удовлетворяющие граничным условиям, можно взять

$$(x-1)^2, (x-1)^2 x, (x-1)^2 x^2, \dots, (x-1)^2 x^{k-1}, \dots;$$

следовательно,

$$y_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k (x-1)^2 x^{k-1}.$$

Ограничиваясь лишь двумя первыми членами, будем иметь

$$y_2 = (x-1)^2 (\alpha_1 + \alpha_2 x),$$

тогда

$$\begin{aligned} v_2 = v[y_2] &= \int_0^1 [ax^3(6\alpha_2 x + 2\alpha_1 - 4\alpha_2)^2 - bx(x-1)^4(\alpha_1 + \alpha_2 x)^2] dx = \\ &= a \left[ (\alpha_1 - 2\alpha_2)^2 + \frac{24}{5} \alpha_2 (\alpha_1 - 2\alpha_2) + 6\alpha_2^2 \right] - b \left( \frac{\alpha_1^2}{30} + \frac{2\alpha_1 \alpha_2}{105} + \frac{\alpha_2^2}{280} \right). \end{aligned}$$

Необходимые условия экстремума  $\frac{\partial v_2}{\partial \alpha_1} = 0$ ;  $\frac{\partial v_2}{\partial \alpha_2} = 0$  принимают в данном случае вид

$$\left( a - \frac{b}{30} \right) \alpha_1 + \left( \frac{2}{5} a - \frac{b}{105} \right) \alpha_2 = 0$$

и

$$\left( \frac{2}{5} a - \frac{b}{105} \right) \alpha_1 + \left( \frac{2}{5} a - \frac{b}{280} \right) \alpha_2 = 0.$$

Для получения решений, отличных от решения  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , которое соответствует отсутствию колебаний клина, необходимо, чтобы определитель этой однородной линейной системы уравнений был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a - \frac{b}{30} & \frac{2}{5} a - \frac{b}{105} \\ \frac{2}{5} a - \frac{b}{105} & \frac{2}{5} a - \frac{b}{280} \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\left( a - \frac{b}{30} \right) \left( \frac{2}{5} a - \frac{b}{280} \right) - \left( \frac{2}{5} a - \frac{b}{105} \right)^2 = 0.$$

Это уравнение называется уравнением частот. Оно определяет частоту  $b$  собственных колебаний клина, описываемых функцией

$$u(x, t) = y(x) \cos bt.$$

Меньший из двух корней  $b_1$  и  $b_2$  уравнения частот дает приближенное значение частоты основного тона колебаний клина.

Пример 2. В задачах, связанных с кручением цилиндра или призмы, приходится исследовать на экстремум функционал

$$v[z(x, y)] = \int_D \int [ \left( \frac{\partial z}{\partial x} - y \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} + x \right)^2 ] dx dy.$$

Для цилиндра с эллиптическим поперечным сечением область интегрирования  $D$  будет ограничена эллипсом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . В этом случае, взяв лишь одну координатную функцию  $xу$ , получим

$$z_1 = axу, \quad v[z_1] = v_1 = \frac{\pi ab}{4} [(a+1)^2 a^2 + (a-1)^2 b^2].$$

Необходимое условие экстремума  $\frac{\partial v_1}{\partial a} = 0$  принимает в данном случае вид  $(a+1)a^2 + (a-1)b^2 = 0$ , откуда

$$a = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}, \quad z_1 = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} xy.$$

Пример 3. Если в условиях предыдущего примера область  $D$  будет прямоугольником со сторонами  $2a$  и  $2b$ ,  $-a \leq x \leq a$ ;  $-b \leq y \leq b$ , то, взяв за координатные функции  $xу$ ,  $xу^3$ ,  $x^3у$ , т. е. положив

$$z_3 = \alpha_1 xy + \alpha_2 xy^3 + \alpha_3 x^3 y,$$

получим

$$\begin{aligned} v_3 = v[z_3] &= \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[ \left( \frac{\partial z_3}{\partial x} - y \right)^2 + \left( \frac{\partial z_3}{\partial y} + x \right)^2 \right] dx dy = \\ &= \frac{4}{3} ab^3 (\alpha_1 - 1)^2 + 4ab^5 \left( \frac{b^2}{7} + \frac{3a^2}{5} \right) \alpha_2^2 + 4a^5 b \left( \frac{a^2}{7} + \frac{3b^2}{5} \right) \alpha_3^2 + \\ &+ \frac{4}{3} a^3 b (\alpha_1 + 1)^2 + \frac{8}{5} ab^5 (\alpha_1 - 1) \alpha_2 + \frac{8}{5} a^3 b (\alpha_1 + 1) \alpha_2 - \\ &- \frac{8}{5} a^5 b (\alpha_1 + 1) \alpha_3 - \frac{8}{5} a^3 b^3 (a^2 + b^2) \alpha_2 \alpha_3 - \frac{8}{3} a^3 b^3 (\alpha_1 - 1) \alpha_3. \end{aligned}$$

Необходимые условия экстремума  $\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_1} = 0$ ,  $\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_2} = 0$ ,  $\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3} = 0$  позволяют вычислить  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ :

$$\alpha_1 = - \frac{7(a^6 - b^6) + 135a^2 b^2 (a^2 - b^2)}{7(a^6 + b^6) + 107a^2 b^2 (a^2 + b^2)},$$

$$\alpha_2 = - \frac{7a^2 (3a^2 + 35b^2)}{21(a^6 + b^6) + 321a^2 b^2 (a^2 + b^2)},$$

$$\alpha_3 = - \frac{7b^2 (35a^2 + 3b^2)}{21(a^6 + b^6) + 321a^2 b^2 (a^2 + b^2)}.$$

Пример 4. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y)$$

внутри прямоугольника  $D$ ,  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ , обращающееся в нуль на границе  $D$ . Функция  $f(x, y)$  предполагается разложимой внутри рассматриваемого прямоугольника в равномерно сходящийся двойной ряд Фурье:

$$f(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \beta_{pq} \sin p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b}.$$

Эту краевую задачу можно свести к вариационной задаче, т. е. подобрать функционал, для которого заданное уравнение было бы уравнением Остроградского, и затем одним из прямых методов найти функцию, реализующую экстремум этого функционала, и тем самым найти решение исходной краевой задачи. Как легко проверить,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y)$$

является уравнением Остроградского для функционала

$$v[z(x, y)] = \int_D \int \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 2zf(x, y) \right] dx dy$$

(см. стр. 315). Граничное условие сохраняется:  $z = 0$  на границе области  $D$ . Исследуем этот функционал на экстремум методом Ритца. В качестве системы координатных функций возьмем

$$\sin m \frac{\pi x}{a} \sin n \frac{\pi y}{b} \quad (m, n = 1, 2, \dots).$$

Каждая из этих функций и их линейные комбинации удовлетворяют граничному условию  $z = 0$  на границе области  $D$ . Свойством полноты эти функции также обладают. Взяв

$$z_{n, m} = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m \alpha_{pq} \sin p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b},$$

будем иметь

$$\begin{aligned} v[z_{nm}] &= \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \frac{\partial z_{nm}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z_{nm}}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2z_{nm} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \beta_{pq} \sin p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b} \right] dx dy = \\ &= \frac{\pi^2 ab}{4} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m \left( \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right) \alpha_{pq}^2 + \frac{ab}{2} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m \alpha_{pq} \beta_{pq}. \end{aligned}$$

Этот результат легко получить, если принять во внимание, что координатные функции  $\sin p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b}$  ( $p, q = 1, 2, \dots$ ) образуют в области  $D$  ортогональную систему т. е.

$$\int_D \int \sin p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b} \sin p_1 \frac{\pi x}{a} \sin q_1 \frac{\pi y}{b} dx dy = 0$$

при любых целых положительных  $p, q, p_1, q_1$ , за исключением случая  $p = p_1, q = q_1$ . При  $p = p_1$  и  $q = q_1$  получаем

$$\int_D \int \sin^2 p \frac{\pi x}{a} \sin^2 q \frac{\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4},$$

Поэтому из всех членов, стоящих под знаком двойного интеграла, равного  $v[z_{nm}]$ , надо учитывать лишь те, которые содержат квадраты функций  $\sin p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b}$ ,  $\sin p \frac{\pi x}{a} \cos q \frac{\pi y}{b}$  и  $\cos p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b}$ . Очевидно,  $v[z_{nm}]$  является функцией  $\varphi(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{nm})$  коэффициентов  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{nm}$ , которые определяются из основного необходимого условия экстремума

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_{pq}} = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, n; \quad q = 1, 2, \dots, m)$$

Эта система уравнений в данном случае имеет вид

$$\alpha_{pq} \left( \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right) \pi^2 + \beta_{pq} = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, n; \quad q = 1, 2, \dots, m),$$

откуда

$$\alpha_{pq} = - \frac{\beta_{pq}}{\pi^2 \left( \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right)}.$$

Следовательно,

$$z_{nm} = - \frac{1}{\pi^2} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m \frac{\beta_{pq}}{\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}} \sin p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b}.$$

Переходя к пределу при  $n$  и  $m$ , стремящихся к бесконечности, в данном случае получим точное решение:

$$z = - \frac{1}{\pi^2} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\beta_{pq}}{\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}} \sin p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b}.$$

#### § 4. Метод Канторовича

При применении метода Рунца к функционалам  $v[z(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ , зависящим от функций нескольких независимых переменных, выбирается координатная система функций

$$W_1(x_1, x_2, \dots, x_n), W_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, W_m(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots$$

и приближенное решение вариационной задачи ищется в виде  $z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k W_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где коэффициенты  $\alpha_k$  — постоянные.

Метод Канторовича также требует выбора координатной системы функций

$$W_1(x_1, x_2, \dots, x_n), W_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, W_m(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots$$

и приближенное решение также ищется в виде

$$z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

однако коэффициенты  $\alpha_k(x_i)$  не постоянные, а являются неизвестными функциями одной из независимых переменных. Функционал  $v[z]$  на классе функций вида

$$z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

превращается в функционал  $\tilde{v}[\alpha_1(x_i), \alpha_2(x_i), \dots, \alpha_m(x_i)]$ , зависящий от  $m$  функций одной независимой переменной

$$\alpha_1(x_i), \alpha_2(x_i), \dots, \alpha_m(x_i).$$

Функции  $\alpha_1(x_i), \alpha_2(x_i), \dots, \alpha_m(x_i)$  выбираются так, чтобы функционал  $\tilde{v}$  достигал экстремума.

Если после этого перейти к пределу при  $m \rightarrow \infty$ , то при некоторых условиях можно получить точное решение, если же предельного перехода не осуществлять, то этим методом будет получено приближенное решение и притом, вообще говоря, значительно более точное, чем при применении метода Рунца с теми же координатными функциями и с тем же числом членов  $m$ .

Большая точность этого метода вызвана тем, что класс функций  $z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$  с переменными  $\alpha_k(x_i)$  значительно шире класса функций

$$z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k W_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

при постоянных  $\alpha_k$  и, следовательно, среди функций вида

$$z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

можно подобрать функции, лучше аппроксимирующие решение вариационной задачи, чем среди функций вида  $\sum_{k=1}^m \alpha_k W_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где  $\alpha_k$  постоянны.

Пусть, например, требуется исследовать на экстремум функционал

$$v = \int_{x_0}^{x_1} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy,$$

распространенный на область  $D$ , ограниченную кривыми  $y = \varphi_1(x)$ ,  $y = \varphi_2(x)$  и двумя прямыми  $x = x_0$  и  $x = x_1$  (рис. 10.4). На границе области  $D$  заданы значения функции  $z(x, y)$ . Выбираем последовательность координатных функций:

$$W_1(x, y), W_2(x, y), \dots, W_n(x, y), \dots$$

Ограничиваясь пока  $m$  первыми функциями этой последовательности, мы будем искать решение вариационной задачи в виде суммы функций  $z_m =$

$$= \sum_{k=1}^m \alpha_k(x) W_k(x, y) \text{ или, меняя обозначения } \alpha_k(x) \text{ на } u_k(x), \text{ получим:}$$

$$z_m(x, y) = u_1(x) W_1(x, y) + u_2(x) W_2(x, y) + \dots + u_m(x) W_m(x, y),$$

где  $W_k$  — выбранные нами функции, а  $u_k$  — неизвестные функции, которые мы определяем так, чтобы функционал  $v$  достигал экстремума. Имеем

$$v[z_m(x, y)] = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F\left(x, y, z_m(x, y), \frac{\partial z_m}{\partial x}, \frac{\partial z_m}{\partial y}\right) dy.$$

Так как подынтегральная функция является известной функцией  $y$ , то интеграция по  $y$  может быть выполнена, и функционал  $v[z_m(x, y)]$  будет функционалом вида

$$v[z_m(x, y)] = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, u_1(x), \dots, u_m(x), u_1', \dots, u_m') dx.$$

Функции  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)$  выбираются так, чтобы функционал

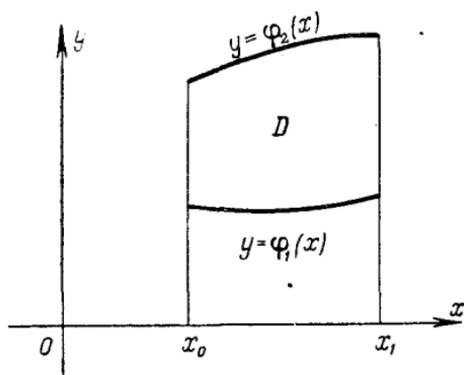


Рис. 10.4.

$v[z_m(x, y)]$  достигал экстремума. Следовательно,  $u_i(x)$  должны удовлетворять системе уравнений Эйлера:

$$\begin{aligned} \varphi_{u_1} - \frac{d}{dx} \varphi_{u_1'} &= 0, \\ \varphi_{u_2} - \frac{d}{dx} \varphi_{u_2'} &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ \varphi_{u_m} - \frac{d}{dx} \varphi_{u_m'} &= 0. \end{aligned}$$

Произвольные постоянные выбираются так, чтобы  $z_m(x, y)$  удовлетворяла на прямых  $x = x_0$  и  $x = x_1$  заданным граничным условиям.

Пример 1. Исследовать на экстремум функционал

$$v[z(x, y)] = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2z \right] dx dy,$$

причем на границе области интегрирования  $z = 0$ . Областью интегрирования является прямоугольник  $-a \leq x \leq a$ ;  $-b \leq y \leq b$ . Решение ищем в виде  $z_1 = (b^2 - y^2)u(x)$ , при этом граничные условия на прямых  $y = \pm b$  будут удовлетворены. Функционал

$$v[z_1] = \int_{-a}^a \left[ \frac{16}{15} b^5 u'^2 + \frac{8}{3} b^3 u^2 - \frac{8}{3} b^3 u \right] dx.$$

Уравнение Эйлера для этого функционала

$$u'' - \frac{5}{2b^2} u = -\frac{5}{4b^2}$$

является линейным уравнением с постоянными коэффициентами, общее решение которого имеет вид

$$u = C_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{x}{b} + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{x}{b} + \frac{1}{2}.$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничных условий  $z(-a) = z(a) = 0$  откуда  $C_2 = 0$ ,  $C_1 = -\frac{1}{2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{a}{b}}$ , и окончательно получаем:

$$u = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{x}{b}}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{a}{b}} \right);$$

следовательно,

$$z_1 = \frac{1}{2} (b^2 - y^2) \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{x}{b}}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{a}{b}} \right).$$

Если необходимо получить более точный ответ, то можно искать решение в виде

$$z_2 = (b^2 - y^2) u_1(x) + (b^2 - y^2)^2 u_2(x).$$

**Пример 2.** Найти непрерывное решение уравнения  $\Delta z = -1$  в области  $D$ , являющейся равносторонним треугольником, ограниченным прямыми  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} x$  и  $x = b$  (рис. 10.5) обращаемое в нуль на границе этой области.

Уравнение  $\Delta z = -1$  является уравнением Остроградского для функционала

$$v[z] = \int_0^b \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3} x}^{\frac{\sqrt{3}}{3} x} \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2z \right] dx dy,$$

причем на границе области интегрирования  $z = 0$ . Следуя методу Канторовича, будем искать первое приближение в виде

$$z_1 = \left[ y^2 - \left( \frac{\sqrt{3}}{3} x \right)^2 \right] u(x).$$

При таком выборе  $z_1$  граничные условия на прямых  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} x$  удовлетворяются.

Функционал  $v[z_1]$  после выполнения интегрирования по  $y$  принимает вид

$$v[z_1] = \frac{8\sqrt{3}}{405} \int_0^b (2x^5 u'^2 + 10x^4 u u' + 30x^3 u^2 + 15x^3 u) dx.$$

Уравнением Эйлера для этого функционала будет  $x^2 u'' + 5x u' - 5u = \frac{15}{4}$ .

Линейные уравнения такого типа в теории дифференциальных уравнений называются уравнениями Эйлера (стр. 110).

Одно частное решение этого неоднородного уравнения очевидно:  $u = -\frac{3}{4}$ . Решение соответствующего однородного уравнения ищем в виде

$u = x^k$  и окончательно получаем  $u = C_1 x + C_2 x^{-5} - \frac{3}{4}$ . Так как около

точки  $x = 0$  решение  $u$  должно быть ограничено, то  $C_2$  следует выбрать равным нулю, а из условия  $u(b) = 0$  полу-

чаем  $C_1 = -\frac{3}{4b}$ . Итак,

$$z_1 = -\frac{3}{4} \left( 1 - \frac{x}{b} \right) \left( y^2 - \frac{1}{3} x^2 \right).$$

**З а м е ч а н и е.** Для приближенного решения краевых задач часто применяется еще один прямой не вариационный метод — метод Б. Г. Галеркина. Этот метод особенно удобен при решении линейных краевых задач, но может быть применен и ко многим нелинейным задачам. Для определенности изложим метод Галеркина в применении к особенно часто встречающимся в приложениях линейным уравнениям второго порядка

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = f(x) \quad (10.1)$$

с однородными граничными условиями  $y(x_0) = 0$ ,  $y(x_1) = 0$  (неоднородные граничные условия  $y(x_0) = y_0$ ,  $y(x_1) = y_1$  заменой переменных

$$z = y - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

легко сводятся к однородным).

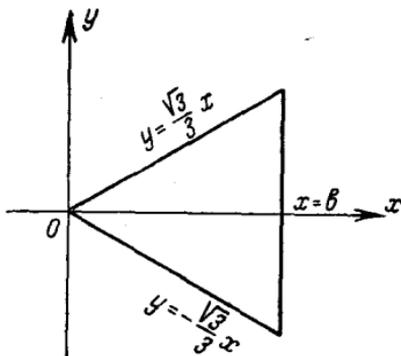


Рис. 10.5.

Уравнение (10.1) кратко запишем в виде

$$L(y) = f(x).$$

Выберем полную на отрезке  $[x_0, x_1]$  систему непрерывных линейно независимых функций

$$w_1(x), w_2(x), \dots, w_n(x), \dots \quad (10.2)$$

удовлетворяющих граничным условиям  $w_n(x_0) = w_n(x_1) = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Приближенное решение краевой задачи будем искать в виде линейной комбинации первых  $n$  функций системы (10.2):

$$y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x).$$

Подставляем  $y_n$  в уравнение (10.1) и выбираем коэффициенты  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), так чтобы функция

$$L\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x)\right) - f(x)$$

была ортогональна на отрезке  $[x_0, x_1]$  каждой из функций  $w_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[ L\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x)\right) - f(x) \right] w_i(x) dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (10.3)$$

Естественно ожидать, что  $y_n$  стремится при  $n \rightarrow \infty$  к точному решению

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i w_i(x),$$

так как, если полученный ряд сходится и допускает двукратное почленное дифференцирование, то функция  $L(\tilde{y}) - f(x)$  ортогональна на отрезке  $[x_0, x_1]$  каждой функции  $w_i(x)$  системы (10.2), а так как система (10.2) полна, то  $L(\tilde{y}) - f(x) \equiv 0$ , а это означает, что  $\tilde{y}$  является решением уравнения (10.1). Очевидно,  $\tilde{y}$  удовлетворяет и граничным условиям  $\tilde{y}(x_0) = \tilde{y}(x_1) = 0$  (так как все  $w_i(x_0) = w_i(x_1) = 0$ ).

Определить все  $\alpha_i$  из линейной по отношению к ним системы (10.3) и совершить предельный переход при  $n \rightarrow \infty$  удается весьма редко, поэтому обычно ограничиваются лишь конечным и притом весьма небольшим числом  $n$  ( $n = 2, 3, 4, 5$ , а иногда даже  $n = 1$ ).

При этом, конечно, надо выбрать лишь  $n$  функций  $w_i(x)$ , поэтому условие полноты отпадает и их надо выбирать лишь линейно независимыми и удовлетворяющими граничным условиям

$$w_i(x_0) = w_i(x_1) = 0.$$

Часто в качестве таких так называемых координатных функций берут многочлены:

$$(x - x_0)(x - x_1), (x - x_0)^2(x - x_1), (x - x_0)^3(x - x_1), \dots \\ \dots, (x - x_0)^n(x - x_1), \dots \quad (10.3)$$

(удобно при этом начало координат перенести в точку  $x_0$ , и тогда в (10.3)  $x_0 = 0$ ) или тригонометрические функции

$$\sin \frac{n\pi(x-x_0)}{x_1-x_0} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Этот метод применим к уравнениям любого порядка  $n$ , к системам уравнений и к уравнениям в частных производных.

### Задачи к главе 10

1. Найти приближенное решение уравнения  $\Delta z = -1$  внутри квадрата  $-a \leq x \leq a$ ,  $-a \leq y \leq a$ , обращающееся в нуль на границе этого квадрата.

Указание. Задача сводится к исследованию на экстремум функционала

$$\int_D \int \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2z \right] dx dy.$$

Приближенное решение можно искать в виде

$$z_0 = \alpha(x^2 - a^2)(y^2 - a^2).$$

2. Найти приближенное решение задачи об экстремуме функционала

$$v[y(x)] = \int_0^1 (x^3 y''^2 + 100xy^2 - 20xy) dx; \quad y(1) = y'(1) = 0.$$

Указание. Решение можно искать в виде

$$y_n(x) = (x-1)^2 (\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n);$$

провести вычисления при  $n = 1$ .

3. Найти приближенное решение задачи о минимуме функционала

$$v[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - 2xy) dx; \quad y(0) = y(1) = 0,$$

и сравнить с точным решением.

Указание. Приближенное решение можно искать в виде

$$y_n = x(1-x)(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n);$$

провести вычисление при  $n = 0$  и  $n = 1$ .

4. Найти приближенное решение задачи об экстремуме функционала

$$v[y(x)] = \int_1^2 \left( xy'^2 - \frac{x^2-1}{x} y^2 - 2x^2 y \right) dx; \quad y(1) = y(2) = 0,$$

и сравнить с точным решением.

Указание. Решение можно искать в виде

$$y = \alpha(x-1)(x-2).$$

5. Найти методом Рунца приближенное решение задачи о минимуме функционала

$$v[y(x)] = \int_0^2 (y'^2 + y^2 + 2xy) dx; \quad y(0) = y(2) = 0.$$

и сравнить с точным решением.

Указание. См. задачу 3.

6. Найти методом Рунца приближенное решение дифференциального уравнения  $y'' + x^2y = x$ ;  $y(0) = y(1) = 0$ . Определить  $y_2(x)$  и  $y_3(x)$  и сравнить их значения в точках  $x = 0,25$ ,  $x = 0,5$  и  $x = 0,75$ .

---

## ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ

### К главе 1

1.  $\sin y \cos x = c$ . 2.  $6x^2 + 5xy + y^2 - 9x - 3y = c$ . 3.  $x^2 - 2cy = c^2$ .
4.  $y = \frac{c}{x} + \frac{x^3}{4}$ . 5.  $\frac{y^2}{2} + \frac{y}{x} = c$ . 6.  $x = ce^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t}$ . 7.  $y = c \cos x + \sin x$ .
8.  $e^x - e^y = c$ . 9.  $x = ce^t - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$ . 10. Однородное уравнение:  
 $x = ye^{cy+1}$ . 11.  $y = cx$  и  $y^2 - x^2 = c$ . 12.  $y^2 = \frac{1}{(3x+c)^2}$ . 13.  $\ln|t| = c - e^{-\frac{x}{t}}$ .
14. Можно ввести параметр, полагая  $y' = \cos t$   $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + c. \end{cases}$
15.  $y = cx + \frac{1}{c}$ ; особое решение  $y^2 = 4x$ . 16.  $\begin{cases} x = p^3 - p + 2, \\ y = \frac{3}{4}p^4 - \frac{p^2}{2} + c. \end{cases}$  17. Урав-
- нение линейно относительно  $x$  и  $\frac{dx}{dy}$ ,  $x = cy + \frac{y^3}{2}$ . 18.  $\begin{cases} x = \frac{4}{3}p^3 - \frac{3}{2}p^2 + c, \\ y = p^4 - p^3 - 2. \end{cases}$
19. Гиперболы  $x^2 - y^2 = c$ . 20. Дифференциальное уравнение искомым кривых  $\frac{y}{2x} = y'$ . *Отв.*  $y^2 = 2cx$ . 21. Дифференциальное уравнение искомым кривых  $y - xy' = x$ . *Отв.*  $y = cx - x \ln|x|$ . 22.  $x^2 + y^2 - 2cy = 0$ . Особенно просто задача решается в полярных координатах. 23. Дифференциальное уравнение задачи  $\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$ . *Отв.* Через 1 час. 24. Дифференциальное уравнение задачи  $\frac{dv}{dt} = kv$ , где  $v$  — скорость. *Отв.*  $v \approx 0,466$  км/час.
25. Если поместить начало координат в заданную точку и направить ось абсцисс параллельно данному в условиях задачи направлению, то дифференциальное уравнение кривых, вращением которых образуется искомая поверхность, имеет вид  $y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$  (или  $dx - \rho dr = 0$ , где  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ). *Отв.* Осевое сечение искомой поверхности определяется уравнением  $y^2 = 2cx + c^2$ , поверхность является параболоидом вращения. 26.  $y = 2 \sin(x - c)$ .
27. Дифференциальное уравнение искомым кривых  $y' = -\frac{y}{x}$ . *Отв.* Гипербо-

лы  $xy = c$ . 28.  $(x + y + 1)^3 = c(x - y + 3)$ . 29.  $y = \frac{2(1+x)}{c+2x+x^2}$ . 30.  $y(0,5) \approx 0,13$ . 31.  $y(0,6) \approx 0,07$ . 32.  $y(0,02) \approx 1,984$ ;  $y(0,04) \approx 1,970$ ;  $y(0,06) \approx 1,955$ ;  $y(0,08) \approx 1,942$ ;  $y(0,10) \approx 1,930$ ;  $y(0,12) \approx 1,917$ ;  $y(0,14) \approx 1,907$ ;  $y(0,16) \approx 1,896$ ;  $y(0,18) \approx 1,886$ ;  $y(0,20) \approx 1,877$ ;  $y(0,22) \approx 1,869$ ;  $y(0,24) \approx 1,861$ ;  $y(0,26) \approx 1,854$ ;

$y(0,28) \approx 1,849$ ;  $y(0,30) \approx 1,841$ . 33.  $\begin{cases} x = \frac{c}{p^2} + \frac{2p}{3}, & \text{и } y = 0. \\ y = 2px - p^2. \end{cases}$  34.  $x + \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} = c$ .

36.  $(x + y + 1)^3 = ce^{2x+y}$ . 37.  $y = c$ ;  $y = e^x + c$ ;  $y = -e^x + c$ . 38.  $y^2 = 2cx + c^2$ .

39. Не имеет. 40.  $y_1 = \frac{x^2-1}{2}$ ;  $y_2 = \frac{x^2-1}{2} + \frac{2}{15} - \frac{1}{4}x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{20}$ .

41.  $y = 2x^2 - x$ . 42. Не имеет. 43.  $x = ce^{\frac{x}{y}}$ . 44.  $x^2 + \frac{3y^2}{2} = c^2$ . 45.  $x = 2t$ .

46.  $x = t^2$ . 47.  $y = -x + 1$  и  $y = -\frac{x^2}{4}$ . 48. Действительного решения не существует.

49.  $3x - 4y + 1 = ce^{x-y}$ . 50.  $x = (4t + c) \sin t$ . 51.  $y = cx + \frac{c^2 - x^2}{2}$

и особое решение  $y = -x^2$ . 52.  $y = \frac{7x^3}{x^2 + c}$ ,  $y = 0$ . 53.  $x - c = \frac{a}{2}(2t - \sin 2t)$ ,

$y = \frac{a}{2}(1 - \cos 2t)$  — семейство циклоид. Особое решение  $y = a$ . Указания:

удобно ввести параметр  $t$ , полагая  $y' = \operatorname{ctg} t$ . 54.  $3(x^2 + y) + xy^3 = cx$ .

55.  $\mu = \frac{c}{(y^2 + x)^3}$ . 56.  $x = ce^{\frac{x}{y}}$ . 57.  $x^2 + 2xy - y^2 - 6x - 2y = c$ .

58.  $y = \frac{1}{1 + cx + \ln x}$  и  $y = 0$ . 59.  $(x^2 - 1)y - \sin x = c$ . 60.  $8y + 4x + 5 = ce^{4x - 8y - 4}$ .

61.  $y^3 + x^3 - 3xy = c$ . 62.  $y = c(x^2 + y^2)$ . 63.  $y^3 = x + \frac{c}{x}$ .

64.  $y = c(x + a) + c^2$  и особое решение  $y = -\frac{(x+a)^2}{4}$ . 65.  $x = \frac{2}{3}t + \frac{c}{t^2}$ ,

$y = 2xt - t^2$  и  $y = 0$ ,  $y = \frac{3}{4}x^2$ . 66.  $y = \frac{c}{1 \pm \cos x}$ .

#### К главе 2

1.  $y = 5e^{3x} \sin x + 10$ . 2.  $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{3} \cos 2t - \frac{t \cos t}{2}$ .

3.  $(y - c_3)^2 = c_1 x + c_2$ . 4.  $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \frac{1}{2 \sin x}$ .

5.  $y = c_1 x^2 + c_2 x^3 + \frac{1}{3}$ . 6.  $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{1}{2} \operatorname{ch} x$ . 7.  $y = \frac{1}{c_1 x + c_2} + 1$ .

8.  $x = e^{2t}(c_1 + c_2 t) + \frac{t^2 e^{2t}}{2} + e^t + \frac{1}{4}$ . 9.  $y = -\frac{x}{c_1} + \frac{c_1^2 + 1}{c_1^2} \ln |1 + c_1 x| + c_2$ .

10.  $c_1 x^2 + 1 = c_1^2 (t + c_2)^2$ . 11.  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x - \frac{x^2}{16} + \frac{1}{15} e^x$ .

12.  $y = \cos(x - c_1) + c_2 x + c_3$ . 13.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x^3 + c_4 x^2 + c_5 x + c_6 - \frac{x^4}{24}$ .

14.  $x = e^t(c_1 + c_2 t) + e^{-t}(c_3 + c_4 t) + 1 + t^2$ . 15.  $y = c_0 \left(1 - \frac{4x^3}{2 \cdot 3} + \right.$

$$+ \frac{4^2 x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \dots + \frac{(-1)^k 4^k x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots (3k-1) 3k} + \dots) + c_1 \left( x - \frac{4x^4}{3 \cdot 4} + \right. \\ \left. + \frac{4^2 x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} - \dots + \frac{(-1)^k 4^k x^{3k+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \dots 3k \cdot (3k+1)} + \dots \right). \quad 16. y =$$

$$= c_1 J_{\frac{1}{5}}(3x) + c_2 J_{-\frac{1}{5}}(3x). \quad 17. y = x. \quad 18. y = \left( \frac{1}{2} x + 1 \right)^4. \quad 19. y = c_1 \cos x +$$

$$+ c_2 \sin x + 1 + x \cos x - \sin x \ln |\sin x|. \quad 20. u = \frac{c_1}{r} + c_2. \quad 21. \text{Дифференциальное уравнение задачи}$$

$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{k}{r^2}$  или  $v \frac{dv}{dr} = \frac{k}{r^2}$ , где  $r$  — расстояние от центра Земли до тела,  $v$  — скорость,  $k = -6400^2 g$ . *Отв.*  $v \approx 11$  км/сек.

22. Дифференциальное уравнение движения  $\frac{d^2 x}{dt^2} = -g + k \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$ .

*Отв.*  $x = \frac{75^2}{g} \ln \operatorname{ch} \frac{g}{75} t$ . 23. Дифференциальное уравнение движения

$\frac{d^2 s}{dt^2} = k(s+1)$  или  $\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{g}{6}(s+1)$ . *Отв.*  $t = \sqrt{\frac{6}{g}} \ln(6 + \sqrt{35})$ .

$$24. t = \frac{3}{\sqrt{g}} \ln(9 + \sqrt{80}). \quad 25. s = \frac{F-a}{b} t - \frac{(F-a)p}{b^2 g} (1 - e^{-\frac{bg}{p} t}).$$

$$26. x = A \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t. \quad 27. x = a \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t. \quad 28. \text{Дифференциальное уравнение}$$

движения  $\ddot{x} + k_1 \dot{x} - k_2 x = 0$ ,  $k_2 > 0$ . *Отв.*  $x = c_1 e^{\left( -\frac{k_1}{2} + \sqrt{\frac{k_1^2}{4} + k_2} \right) t} +$

$$+ c_2 e^{\left( -\frac{k_1}{2} - \sqrt{\frac{k_1^2}{4} + k_2} \right) t}. \quad 29. x = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nt}{(n^2 - 2)n^3}. \quad 30. y^2 =$$

$$= c_1 (x^2 + x \sqrt{1+x^2} + \ln |x + \sqrt{1+x^2}|) + c_2. \quad 31. y = c_2 e^{c_1 x} + c_1, y = \frac{4}{c-x}.$$

$$32. x = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t - \frac{1}{12} t^2 \cos 3t + \frac{1}{36} \sin 3t. \quad 33. y = e^{-x} \left( c_1 + c_2 x - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} x^2 \right) + \frac{1}{8} e^x. \quad 34. y = c_1 e^x + e^{-\frac{1}{2} x} \left( c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + \frac{1}{3} x e^x.$$

$$35. y = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{x e^x \cos x}{4} + \frac{x^2 e^x \sin x}{4}. \quad 36. y = c_1 (x - x^3) + \\ + c_2 \left[ 4 - 6x^2 + 3(x^3 - x) \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \right] - \frac{1}{6}. \quad 37. u = c_1 \ln(x^2 + y^2) + c_2.$$

$$38. u = \frac{c_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + c_2. \quad 39. \text{Дифференциальное уравнение движе-}$$

ния  $m\ddot{x} = mg - kx$ . *Отв.*  $x = \frac{mg}{k} t - \frac{m^2 g}{k^2} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right)$ . 40. а)  $t - t_0 =$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} \int_{x_0}^x f(x) dx}}. \quad 6) \quad x - x_0 = m \int_{v_0}^v \frac{v dv}{f(v)}; \quad t - t_0 = m \int_{v_0}^v \frac{v dv}{f(v)},$$

где  $v = \dot{x}$ . 41.  $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + e^x(c_4 + c_5x + c_6x^2) - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{24}$ .

42.  $x = (c_1 + c_2t) \cos t + (c_3 + c_4t) \sin t - \frac{1}{8}t^2 \cos t$ . 43.  $y = c_1 \cos \ln(1+x) +$

$+ c_2 \sin \ln(1+x) + \ln(1+x) \sin \ln(1+x)$ . 44.  $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-n^2) \sin nt - 2n \cos nt}{[(2-n^2)^2 + 4n^2] n^4}$ .

45.  $x = \frac{\alpha_0}{2a_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{-(n^2 - a_2) \alpha_n - a_1 n \beta_n}{(n^2 - a_2)^2 + a_1^2 n^2} \cos nt + \frac{a_1 n \alpha_n - (n^2 - a_2) \beta_n}{(n^2 - a_2)^2 + a_1^2 n^2} \sin nt \right]$ ,

где  $\alpha_0, \alpha_n, \beta_n$  — коэффициенты Фурье функции  $f(t)$ . 46.  $x = \frac{\cos t}{2} +$

$+ \frac{\mu}{24} (1 + 3 \cos 2t)$ . 47.  $y = c_1x + c_2xe^{-\frac{1}{x}}$ . 48.  $x^2y'' + xy' - y = 0$ .

49.  $x = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} \left( c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + c_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t \right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \left( c_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + c_4 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t \right) + t^3$ .

50.  $x = t^3 + t + 1, y = \frac{3}{8}t^6 + \frac{3}{10}t^5 + \frac{3}{16}t^4 + \left( c_1 + \frac{1}{6} \right) t^3 + c_1t + c_2$ . 51.  $x =$

$= (c_1 + c_2t)e^{-5t} + \frac{2^t}{(5 + \ln 2)^2} + \frac{t^3 e^{-5t}}{6}$ . 52.  $y = c_2 e^{c_1 x^2}$ . 53.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} +$

$+ e^{\frac{x}{2}} \left( c_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + e^{-\frac{x}{2}} \left( c_5 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_6 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) +$

$+ \frac{e^{2x}}{63}$ . 54.  $y = (c_1x + c_2) \cos x + (c_3x + c_4) \sin x + c_5 + c_6x + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{4}e^x$ .

55.  $y = (c_1x + c_2)^8 + c_3x + c_4$ . 56.  $y = e^{1+c_1x} \left( \frac{x}{c_1} - \frac{1}{c_1^2} \right) + c_2$ . 57.  $y = c_1 \cos x +$

$+ c_2 \sin x - \frac{\sin 2x}{6} - \frac{\sin 4x}{30}$ . 58.  $y = -\frac{1}{x-2}$ . 59.  $y = c_2 e^{c_1 x} + \frac{1}{c_1}$ .

К главе 3

1.  $x = \sin t, y = \cos t$ . 2.  $x_1 = 2e^t, x_2 = 2e^t$ . 3.  $x = c_1 e^{(-1 + \sqrt{15})t} + c_2 e^{(-1 - \sqrt{15})t} + \frac{2}{11}e^t + \frac{1}{6}e^{2t}$ ;  $y$  находим из первого уравнения:  $y = e^t -$

$-\frac{dx}{dt} - 5x$ . 4.  $x = c_1 e^t + e^{-\frac{1}{2}t} \left( c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right)$ ;  $y$  и  $z$  опре-

деляются из уравнений:  $y = \frac{dx}{dt}, z = \frac{d^2x}{dt^2}$ . 5.  $x = c_1 e^{c_2 t}, y = c_1 c_2 e^{c_2 t}$ .

6.  $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 3; y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$ . 7.  $y = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x); z = x [c_1 J_0'(x) + c_2 Y_0'(x)]$ . 8.  $x + y + z = c_1, x^2 + y^2 + z^2 = c_2^2$ . 9.  $x = c_1 e^t +$

- $+ c_2 e^{-2t}$ ;  $y = c_1 e^t + c_3 e^{-2t}$ ;  $z = c_1 e^t - (c_2 + c_3) e^{-2t}$     10.  $x = c_1 t + \frac{c_2}{t}$ ;  
 $y = -c_1 t + \frac{c_2}{t}$ .    11.  $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t - t \cos t + \sin t \ln |\sin t|$ ;  $y$  опре-  
 деляется из уравнения  $y = \frac{dx}{dt} - 1$ .    12.  $x^2 - y^2 = c_1$ ,  $y - x - t = c_2$ .  
 13.  $x = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \sin t$ ;  $y = -c_1 e^t + c_2 e^{-t}$ .    14.  $x = e^t$ ;  $y = 4e^t$ .  
 15.  $\theta(1) \approx 0,047$ .    16.  $x = e^{at} (c_1 \cos t + c_2 \sin t)$ .  $y = e^{at} (c_1 \sin t - c_2 \cos t)$ .  
 17.  $x = 2c_1 e^{-t} + c_2 e^{-7t}$ ,  $y = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{-7t}$ .    18.  $x = e^{-6t} (2c_1 \cos t +$   
 $+ 2c_2 \sin t)$ ,  $y = e^{-6t} [(c_1 - c_2) \cos t + (c_1 + c_2) \sin t]$ .    19.  $x = c_1 e^t + c_2$ ,  $y =$   
 $= (c_1 t + c_3) e^t - t - 1 - c_2$ ,  $z = y - c_1 e^t$ .    20.  $x + y + z = c_1$ ,  $xyz = c_2$ .  
 21.  $x^2 + y^2 + z^2 = c_1^2$ ,  $xyz = c_2$ .    22.  $X = \begin{vmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^t + 3c_2 e^{-t} \end{vmatrix}$ .

## К главе 4

1. Точка покоя асимптотически устойчива. 2. Точка покоя неустойчива.  
 3. При  $\alpha < -\frac{1}{2}$  точка покоя асимптотически устойчива, при  $\alpha = -\frac{1}{2}$  устой-  
 чива, при  $\alpha > -\frac{1}{2}$  неустойчива. 4. При  $\alpha \leq 0$  точка покоя асимптотически  
 устойчива, при  $\alpha > 0$  неустойчива. 5. При  $1 < t < 2$   $x(t, \mu) \rightarrow \sqrt{4 - t^2}$ ; при  
 $2 < t < 3$   $x(t, \mu) \rightarrow -\sqrt{9 - t^2}$ ; при  $t > 3$   $x(t, \mu) \rightarrow \infty$ . 6.  $x(t, \mu) \rightarrow \infty$ . 7. Точка  
 покоя неустойчива. 8. Точка покоя устойчива. 9. Точка покоя неустойчива.  
 10. Точка покоя устойчива. 11. Седло. 12. Периодическое решение  $x =$   
 $= \frac{1}{5} \sin t - \frac{2}{5} \cos t$  асимптотически устойчиво. 13. Все решения, в том числе  
 и периодические, асимптотически устойчивы. 14. Точка покоя неустойчива.  
 Функция  $v = x^4 - y^4$  удовлетворяет условиям теоремы Четаева. 15. Все реше-  
 ния неустойчивы. 16. Решение  $x \equiv 0$  неустойчиво. 17. При  $1 < \alpha < 2$  реше-  
 ние  $x \equiv 0$  асимптотически устойчиво. При  $\alpha = 1$  и при  $\alpha = 2$  решение  $x \equiv 0$   
 устойчиво. При  $\alpha > 2$  и при  $\alpha < 1$  решение  $x \equiv 0$  неустойчиво. 18. Решение  
 $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$  устойчиво при постоянно действующих возмущениях. Функция  
 $v = 4x^2 + 3y^2$  удовлетворяет условиям теоремы Малкина. 19. Решение  
 $X(t) \equiv 0$  неустойчиво. 20. Все решения устойчивы, но асимптотической устой-  
 чивости нет. 21. Все решения устойчивы, но асимптотической устойчивости  
 нет. 22. Периодическое решение  $x = \frac{\cos t - \sin t}{2}$  неустойчиво. 23. Область  
 устойчивости  $0 \leq \alpha \leq 1$ , область асимптотической устойчивости  $0 < \alpha < 1$ .  
 24. Область устойчивости  $\alpha \geq 5$ , область асимптотической устойчивости  $\alpha > 5$ .

## К главе 5

1.  $z = \Phi(x + y)$ . 2.  $z = e^{2x} \Phi(x - y)$ . 3.  $z = e^x \Phi(x)$ . 4.  $\Phi\left(z, ye^{\frac{x}{z}}\right) = 0$ .  
 5.  $z = 5 + \frac{\Phi(x^3 y^5)}{y^5}$ . 6.  $u = \Phi(x - y, y - z)$ . 7.  $u = x^4 \Phi\left(\frac{y}{x^2}, \frac{z}{x^3}\right)$ . 8.  $z =$   
 $= x\Phi_1(y) + \Phi_2(y)$ . 9.  $z = (x^2 + y - 1)^2$ . 10.  $z = ye^{\frac{x-2}{y}}$ . 11.  $z = 3x$ . 12.  $z =$   
 $= \left(y^z - \frac{2x}{z}\right)^{3/2}$ . 13.  $\Phi(z^2 + x^2, x^2 - y^2) = 0$ . 14.  $\Phi(z^2 - x^2, x^2 - y^2) = 0$ .

15. Не интегрируется. 16.  $2xy + y^2 + 6xz^2 = c$ . 17.  $z = ax^3 + \frac{y^3}{9a} + b$  (возможны и другие ответы). 18.  $z = ax + by + a^3b^3$  (возможны и другие ответы). 19.  $z = be^{a^{\frac{3}{2}(a^2x+y)}}$  (возможны и другие ответы). 20.  $z = x \sin a + ay + b$  (возможны и другие ответы). 21.  $x^2y - 3xyz = c$ . 22. Такого семейства поверхностей нет, так как условие  $(F \cdot \text{rot } F) = 0$  не выполнено. 23. Уравнение векторных линий  $\frac{y}{x} = c_1$ ,  $xz = c_2$ . Уравнение векторных поверхностей  $z = \frac{1}{x} \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$ . Уравнение поверхностей, ортогональных к векторным линиям  $x^2 + y^2 - z^2 = c$ . 24.  $z = xy + 1$ . 25.  $z = 3xy$ . 26.  $z = x^2 + y^2$ .

К главе 6

1. Экстремалами являются окружности  $(x - C_1)^2 + y^2 = C_2^2$ . 2. Интеграл не зависит от пути интегрирования. Вариационная задача лишена смысла. 3. В классе непрерывных функций экстремум не достигается. 4. Экстремалами являются гиперболы  $y = \frac{C_1}{x} + C_2$ . 5.  $y = C_1 \sin(4x - C_2)$ . 6.  $y = -\frac{x^2}{4} + C_1x + C_2$ . 7.  $y = \text{sh}(C_1x + C_2)$ . 8.  $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x$ . 9.  $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$ . 10.  $y = \frac{x^7}{7!} + C_1x^5 + C_2x^4 + C_3x^3 + C_4x^2 + C_5x + C_6$ . 11.  $y = (C_1x + C_2) \cos x + (C_3x + C_4) \sin x$ ,  $z = 2y + y''$ , откуда  $z$  легко определяется. 12.  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ . 13.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z)$ . 14.  $y = C_1x^4 + C_2$ . 15.  $y = \frac{1}{2}xe^x + C_1e^x + C_2e^{-x}$ . 16.  $y = -\frac{x \cos x}{2} + C_1 \cos x + C_2 \sin x$ . 17.  $y = C_1 \text{ch } x + C_2 \text{sh } x + x \text{sh } x - \text{ch } x \ln \text{ch } x$ . 18.  $y = C_1x + \frac{C_2}{x^2} + \frac{1}{3}x \ln|x|$ . 19.  $y = (C_1 + C_2x) \cos x + (C_3 + C_4x) \sin x - \frac{x^2 \sin x}{4}$ . 20.  $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + e^{\frac{x}{2}} \left( C_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + e^{-\frac{x}{2}} \left( C_5 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_6 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + x^3$ .

К главе 7

1.  $y = -x$  при  $0 \leq x \leq 1$ ;  $y = x - 2$  при  $1 < x \leq 4$  и  $y = x$  при  $0 \leq x \leq 3$ ;  $y = -x + 6$  при  $3 < x \leq 4$ . На той и другой ломаной функционал достигает абсолютного минимума. 2. Не существует. 3. Ломаные, проходящие через заданные граничные точки, составленные из прямолинейных отрезков с угловыми коэффициентами  $\sqrt{3}$  и  $-\sqrt{3}$ . 4.  $\frac{\Phi' - y'}{1 + y'\Phi'} = 1$ , т. е. экстремали должны пересекать кривую  $y_1 = \Phi(x_1)$ , по которой скользит граничная точка, под углом  $\frac{\pi}{4}$ . 5.  $y = \frac{x^5}{120} + \frac{1}{24}(x^2 - x^3)$ . 6.  $y = \pm \frac{3}{4}x$  при  $0 \leq x \leq \frac{16}{5}$ ;  $y = \pm \sqrt{9 - (x - 5)^2}$  при  $\frac{16}{5} < x \leq \frac{34}{5}$ ;  $y = \mp \frac{3}{4}(x - 10)$  при  $\frac{34}{5} < x \leq 10$ .

т. е. кривая состоит из отрезка прямой, касающейся окружности, дуги окружности и снова отрезка касательной к окружности. 7.  $y \equiv 0$ . 8. Дуги окружности  $y = \pm \sqrt{8x - x^2}$ .

### К главе 8

1. При  $y = -\frac{x^2}{4} + 1$  достигается сильный минимум. 2. При  $y = 0$  достигается сильный минимум, если  $0 < a < \frac{\pi}{4}$ , если же  $a > \frac{\pi}{4}$ , то минимума нет. 3. Экстремум на непрерывных кривых не достигается. 4. При  $y = 7 - \frac{4}{x}$  — сильный минимум. 5. При  $y = 1$  — сильный минимум. 6. При  $y = \sin 2x - 1$  достигается сильный максимум. 7. При  $y = x^3$  достигается сильный минимум. 8. При  $y = \frac{1}{3} e^{2x}$  достигается сильный минимум. 9. При  $y = \sin 2x$  достигается сильный максимум. 10. На прямой  $y = \frac{y_1}{x_1} x$  достигается слабый минимум. 11. На прямой  $y = \frac{y_1}{x_1} x$  достигается слабый минимум. 12. При  $y = x^2$  достигается слабый минимум. 13. При  $y = x^3 - 1$  достигается сильный максимум. 14. При  $y = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2} + x$  достигается сильный минимум.

### К главе 9

1.  $y = \pm 2 \sin n\pi x$ , где  $n$  — целое число. 2.  $\varphi = C_1 + C_2 z$ ;  $r = R$ . 3.  $y = \lambda x^2 + C_1 x + C_2$ , где  $C_1$ ,  $C_2$  и  $\lambda$  определяются из граничных условий и из изопериметрического условия. 4.  $\frac{d}{dx} (p(x) y') + [\lambda r(x) - q(x)] y = 0$ ;  $y(0) = 0$ ;  $y(x_1) = 0$ . Тривиальное решение  $y \equiv 0$  не удовлетворяет изопериметрическому условию, а нетривиальные решения, как известно, существуют лишь при некоторых значениях  $\lambda$ , называемых собственными значениями. Следовательно,  $\lambda$  должно быть собственным значением. Одна произвольная постоянная общего решения уравнения Эйлера определяется из условия  $y(0) = 0$ , другая — из изопериметрического условия. 5.  $y = -\frac{5}{2} x^2 + \frac{7}{2} x$ ;  $z = x$ .

### К главе 10

1.  $z_1 = \frac{5}{16a^2} (x^2 - a^2) (y^2 - b^2)$ . Если необходима большая точность, то решение можно искать в виде  $z_2 = (x^2 - a^2) (y^2 - b^2) [\alpha_0 + \alpha_1 (x^2 + y^2)]$ . 2.  $y_1 = (x - 1)^2 (0,124 + 0,218x)$ . 3. Точное решение  $y = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$ . 4. Решение уравнения Эйлера  $y = 3,6072J_1(x) + 0,75195Y_1(x) - x$ , где  $J_1$  и  $Y_1$  — функции Бесселя. 5. Точное решение  $y = \frac{2 \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2} - x$ . 6. Если искать решение в виде:  $y_2 = x(x - 1)(\alpha_1 + \alpha_2 x)$ ,  $y_3 = x(x - 1)(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2)$ , то  $y_2 = x(x - 1)(0,1708 + 0,17436x)$ ,  $y_3 = x(x - 1)(0,1705 + 0,1760x - 0,0018x^2)$ . В заданных точках значения  $y_2$  и  $y_3$  с точностью до 0,0001 совпадают.

# РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

## К части I

1. И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, изд. 5-е, «Наука», 1964.
2. И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения. Гостехиздат. 1952 (к гл. IV).
3. И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956 (к § 8 гл. 2).
4. А. Н. Тихонов, О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра, Математический сборник, т. 22 (64):2 (1948) и т. 31 (72):3 (1952) (к § 6 гл. 4).
5. В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, изд. 8-е, Физматгиз, 1959.
6. А. Н. Крылов, Лекции о приближенных вычислениях, изд. 5-е, Гостехиздат, 1950 (к § 7 гл. 1 и § 6 гл. 3).
7. И. С. Березини и Н. П. Жидков, Методы вычислений, т. II, Физматгиз, 1960 (к § 7 гл. 1 и § 6 гл. 3).

## К части II

1. И. М. Гельфанд и С. В. Фомин, Вариационное исчисление. Физматгиз. 1961.
2. М. А. Лаврентьев и Л. А. Люстерник, Курс вариационного исчисления, изд. 2-е, Гостехиздат, 1950.
3. В. И. Смирнов, В. И. Крылов и Л. В. Канторович, Вариационное исчисление, КУБУЧ, 1933.
4. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 4, изд. 4-е, Физматгиз, 1958.
5. Н. М. Гюнтер, Курс вариационного исчисления, Гостехиздат, 1941.
6. Н. И. Ахиезер, Лекции по вариационному исчислению, Гостехиздат, 1955.
7. М. А. Лаврентьев и Л. А. Люстерник, Основы вариационного исчисления, ч. 1 и 2, Гостехиздат, 1935.
8. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1961.
9. Р. Беллман, Динамическое программирование, ИЛ, 1960.
10. Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, изд. 5-е, Физматгиз, 1962.
11. С. Г. Михлин, Прямые методы в математической физике, Гостехиздат, 1950.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Асимптотически устойчивое решение 204
- Бернулли** уравнение 30
- Бесселя** уравнение 139  
— функции 141—143
- Бигармоническое** уравнение 317
- Близость кривых** 285, 286
- Брахистохрона** 281, 304, 332, 364
- Вариации постоянной** метод 28
- Вариационная задача** 281  
— — в параметрической форме 317—320  
— — на условный экстремум 375—393  
— —, прямые методы решения 394—413  
— — с подвижными границами 327—350
- Вариационное исчисление** 281  
— —, основная лемма 295
- Вариационный принцип** 281, 320
- Вариация** 284, 288, 289, 309, 313
- Вейерштрасса** функция 359
- Векторная линия** 245  
— поверхность 244
- Взаимности принцип** 388
- Влияния функция** 123, 161—165
- Вронского определитель** 97, 185
- Галеркина** метод 410
- Гамильтона — Якоби** уравнение 370
- Гамма-функция** 140
- Геодезическая линия** 282, 381
- Голономные связи** 382
- Граничная задача** 13, 159
- Грина** функция 161—165
- Гурвица** теорема 227
- Дикритический узел** 211
- Динамическая система** 170
- Дирихле** задача 315
- Дифференциальное уравнение** 9  
— — Бернулли 30  
— — Бесселя 139  
— — в полных дифференциалах 32
- Дифференциальное уравнение в частных производных** 10  
— — — — — первого порядка 241—279  
— — — — — высшего порядка 85—167  
— —, интеграл 20  
— —, интегрирование 10  
— —, — с помощью рядов 137—146  
— — Клеро 73  
— — Лагранжа 73  
— — линейное высшего порядка 93—106, 113—124  
— — — неоднородное с постоянными коэффициентами 124—136  
— — — однородное с постоянными коэффициентами 107—110  
— — — первого порядка 27  
— — —, фундаментальная система решений 100  
— —, не решенное относительно производной 68  
— —, общее решение 15, 86  
— —, общий интеграл 20, 32  
— — обыкновенное 10  
— — однородное 25  
— —, операторный метод решения 129—136  
— —, особое решение 57, 78  
— —, периодические решения 143—146  
— —, порядок 10  
— — Пфаффа 255  
— —, решение 10, 169  
— — Риккати 31  
— — с разделенными переменными 19  
— — с разделяющимися переменными 21  
— —, теорема существования и единственности решения 39—61, 75—82, 85—87  
— — Эйлера 110—113, 136
- Изоклины** 17
- Изопериметрическая задача** 282, 317, 385
- Изопериметрические условия** 282, 386

- Интеграл дифференциального уравнения 20  
 — первый 89, 179  
 — полный 261  
 Интегральная кривая 16, 169  
 — — особая 78  
 — поверхность 261, 268  
 Интегрируемая комбинация 178  
 Интегрирующий множитель 35
- Канторовича метод 406—412  
 Квазилинейное уравнение в частных производных 243  
 Клеро уравнение 73  
 Ковалевской теорема 242  
 Коши задача 13  
 — метод 121, 268  
 Красная задача 13, 159
- Лагранжа уравнение 73  
 Лагранжа — Шарпи метод 264  
 Лагранжиан 324  
 Лапласа уравнение 315  
 Лежандра условие 362  
 Линейная зависимость 96, 185  
 — система дифференциальных уравнений 181—192  
 — — — с постоянными коэффициентами 192—199  
 Линейное дифференциальное уравнение 27  
 — — — в частных производных неоднородное 243  
 — — — — — однородное 243  
 — — — высших порядков 93—106, 113—124  
 — — — с постоянными коэффициентами 107—110, 124—136  
 — — —, фундаментальная система решений 100  
 Линейный дифференциальный оператор 94—183  
 — функционал 287  
 Липшица условие 40  
 Ляпунова второй метод 215  
 — теорема 215, 217  
 — функция 215
- Максимум функционала 289  
 — — сильный 290  
 — — слабый 290  
 — — строгий 289
- Малкина теорема 235  
 Малого параметра метод 147—158  
 Метрическое пространство 48  
 Минимум функционала 289
- Минимум функционала сильный 290  
 — — слабый 290
- Наклон поля 351  
 Наложения принцип 114, 189  
 Начальная задача 13  
 Неголономные связи 382  
 Непрерывный функционал 285, 286  
 Неустойчивое решение 204  
 Неустойчивый предельный цикл 226  
 — узел 208, 211  
 — фокус 209
- Общее решение дифференциального уравнения 15, 86  
 Общий интеграл дифференциального уравнения 20  
 Обыкновенное дифференциальное уравнение 10  
 Огибающая 74  
 Оператор линейный дифференциальный 94, 183  
 Операторный метод решения дифференциальных уравнений 129—136  
 — многочлен 129  
 Определитель Вронского 97, 185  
 Оптимальная функция 391  
 Оптимальное управление 391  
 Особая интегральная кривая 78  
 — точка 57  
 Особое решение дифференциального уравнения 57, 78  
 Остроградского уравнение 314  
 Остроградского — Гамильтона принцип 320  
 Остроградского — Лиувилля формула 106
- Первого приближения система уравнений 221  
 Первый интеграл 89, 179  
 Периодические решения дифференциального уравнения 143—146  
 Периодичности условия 157  
 Плотность функции Лагранжа 324  
 Покоя точка 171, 205  
 Поле собственное 351  
 — центральное 351  
 — экстремалей 352
- Полная интегрируемость уравнения Пфаффа 256  
 Полное пространство 48  
 Полный интеграл 261  
 Полуустойчивый предельный цикл 226

- Порядок дифференциального уравнения 10
- Последовательных приближений метод 199
- Предельный цикл 23, 226
- — неустойчивый 226
- — полустойчивый 226.
- — устойчивый 226
- Пространство метрическое 48
- полное 48
- равномерной сходимости 50
- фазовое 12, 170
- Прямые методы в вариационном исчислении 394—413
- Пуассона уравнение 315
- Пфаффа уравнение 255
- Равномерной сходимости пространство 50
- Расстояние 48
- Резонанс 145, 152
- Риккати уравнение 31
- Ритца метод 397—406
- Рунге метод 64, 201
- Связи голономные 382
- неголономные 382
- Связный экстремум 282
- Седло 59, 208
- Сжатых отображений принцип 48
- Сильный экстремум 290, 360
- Системы дифференциальных уравнений 168—202
- линейных дифференциальных уравнений 181—192
- — — с постоянными коэффициентами 192—199
- Слабый экстремум 290, 359, 360
- Собственное поле 351
- Специальные решения 253
- Стационарного действия принцип 320
- Строгий экстремум 290
- Суперпозиции принцип 114, 189
- Трансверсальности условие 331, 336
- Узел 58
- дикритический 211
- неустойчивый 208, 211
- устойчивый 207, 211
- Управление оптимальное 391
- Управляющая функция 391
- Уравнения в частных производных 10
- — — первого порядка 241—279
- Уравнивание 61
- Условный экстремум 282, 375—393
- Устойчивое решение (по Ляпунову) 204
- — по отношению к постоянно действующим возмущениям 236
- Устойчивый предельный цикл 222
- узел 207, 211
- фокус 209
- Фазовая траектория 170
- Фазовое пространство 12, 170
- Фокус 59
- неустойчивый 209
- устойчивый 209
- Фундаментальная система решений 100
- Функционал 280, 284
- линейный 287
- непрерывный 285, 286
- Характеристик метод 268
- Характеристики 245, 248, 254, 268, 269, 273
- Характеристическая полоса 269, 273
- Характеристическое уравнение 107, 194
- Центр 59, 210
- Центральное поле 351
- Цикл предельный 23, 226
- Четаева теорема 218
- Штермера метод 62, 200
- Эйлера дифференциальное уравнение 110—113, 136
- конечно-разностный метод 395—397
- ломаная 13, 40
- метод 39, 61, 199
- уравнение (в вариационном исчислении) 297, 306, 368, 377
- Эйлера — Пуассона уравнение 310
- Экстремаль 297, 310
- Экстремум связанный 282
- условный 282, 375—393
- функционала 290
- — сильный 290, 360
- — слабый 290, 359, 360
- Якоби первый метод 277
- уравнение 356
- условие 355