МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

В. М. Ипатова, О. А. Пыркова, В. Н. Седов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ

второе издание, исправленное и дополненное

Рекомендовано
Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации
по образованию в области прикладных математики и физики
в качестве учебного пособия для студентов вузов
по направлению «Прикладные математика и физика»

МОСКВА
МФТИ
2012

УДК 517.9(075)
ББК 22.161я73
И76

Рецензенты:
Кафедра математического анализа
Московского государственного областного университета
(зав. кафедрой доктор технических наук, профессор *А. В. Латышев*

Доктор физико-математических наук, профессор *В. П. Шутяев*

Ипатова, В. М., Пыркова, О. А., Седов, В. Н.
И76 Дифференциальные уравнения. Методы решений: учеб. пособие / В. М. Ипатова, О. А. Пыркова, В. Н. Седов. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: МФТИ, 2012. – 140 с.
ISBN 978-5-7417-0467-7

Излагаются методы решения основных классов обыкновенных дифференциальных уравнений, которые предлагаются на письменном экзамене по курсу дифференциальных уравнений в Московском физико-техническом институте (государственном университете). После краткого изложения теории приводятся примеры решения задач. В конце каждого параграфа содержится подборка задач из письменных контрольных работ с 2000 по 2006 гг. с ответами. Также в настоящем издании добавлены тесты, предлагавшиеся на переэкзаменовке по дифференциальным уравнениям в 2008/2009 уч. г. и задачи из письменного государственного квалификационного экзамена (ГКЭ) по математике за 2009/2010 и 2010/2011 уч. гг., соответствующие теме «Дифференциальные уравнения».

Предназначено студентам второго курса всех факультетов МФТИ (ГУ) и вузов с углубленным изучением математики

УДК 517.9(075)
ББК 22.161я73

ISBN 978- 5-7417-0467-7

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие предназначено для подготовки студентов к письменному экзамену по дифференциальным уравнениям. Оно составлено в соответствии с требованиями и на основе материалов письменного экзамена по дифференциальным уравнениям, проводящемся в Московском физико-техническом институте (государственном университете) в весеннем семестре второго курса, который вместе с последующим устным экзаменом завершает годовой курс дифференциальных уравнений. В конце осеннего семестра на втором курсе по дифференциальным уравнениям предусмотрен зачет.

Письменная контрольная работа состоит из восьми или девяти задач. Каждой из тем этих задач посвящен отдельный параграф. Он начинается с изложения метода решения рассматриваемых задач или сведений из теории (без доказательств), которые приводят к решению. Далее на примерах из письменных экзаменационных работ демонстрируются рассматриваемые методы. Затем приводится подборка задач, которые давались на экзаменах по этой теме в 2000–2006 годах, а затем ответы к ним. Каждая задача снабжена индентификатором формата (x–yz), где цифра x – порядковый номер задачи в контрольной работе данного года, y – последняя цифра этого года, z – номер варианта. На каждой из контрольных работ давалось по четыре варианта.

В настоящее издание также вошли тесты, предлагавшиеся на переэкзаменовке по дифференциальным уравнениям в 2008/2009 уч. г., и задачи письменного государственного квалификационного экзамена (ГКЭ) по математике за 20009/2010 и 2010/2011 уч. гг.

Хотя пособие составлено на основе письменных экзаменов в МФТИ, его можно использовать и студентам других институтов с повышенной математической подготовкой.

Искренняя благодарность всем преподавателям кафедры высшей математики МФТИ, принимавшим активное участие в составлении задач для письменного экзамена.

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1.1. Основные понятия

Неоднородным линейным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется дифференциальное уравнение вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{1.1}$$

где $x \in \mathrm{R}$ – независимая переменная; $y(x)$ – искомая функция; $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – заданные числа, причем $a_0 \neq 0$; $f(x)$ – известная функция, не равная тождественно нулю. Уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{1.2}$$

называется *однородным.*

Общее решение линейного неоднородного уравнения (1.1) представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения (1.2) и любого частного решения неоднородного уравнения (1.1):

$$y(x) = y_o(x) + y_ч(x). \tag{1.3}$$

1.2. Общее решение однородного уравнения

Фундаментальной системой решений однородного уравнения (1.2) называется совокупность n линейно независимых решений $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ этого уравнения.

Общее решение однородного уравнения (1.2) представляет собой произвольную линейную комбинацию частных решений, входящих в фундаментальную систему решений,

$$y_o = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x). \tag{1.4}$$

Далее мы будем рассматривать уравнения с действительными коэффициентами, их решения будем искать в действительной форме.

Характеристическим уравнением, соответствующим однородному уравнению (1.2), называется алгебраическое уравнение

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \tag{1.5}$$

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ корни характеристического уравнения (1.5), вообще говоря, комплексные.

1.1) Каждому действительному простому корню λ характеристического уравнения (1.5) соответствует частное решение однородного уравнения (1.2), имеющее вид $y = e^{\lambda x}$.

1.2) Каждому действительному корню λ кратности k $(k \geq 2)$ соответствует k линейно независимых частных решений однородного уравнения $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$, ... , $x^{k-1}e^{\lambda x}$. Соответствующая компонента общего решения однородного уравнения (1.2) имеет вид

$$y(x) = \left(C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1}\right)e^{\lambda x}, \tag{1.6}$$

где C_1, C_2, …, C_k – произвольные постоянные.

1.3) Если $\lambda = \alpha + i\beta$, где α и β – действительные, $\beta \neq 0$, а $i^2 = -1$, является корнем характеристического уравнения (1.5), то комплексно-сопряженное число $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ также корень этого уравнения (по свойству алгебраических уравнений с действительными коэффициентами).

Напомним, что для комплексного числа $z = x + iy$, где $x, y \in \mathrm{R}$, его действительной и мнимой частью называются соответственно $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$. Кроме того, имеет место формула Эйлера $e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}\left(\cos\beta t + i\sin\beta t\right)$.

Паре невещественных корней $\alpha \pm i\beta$ соответствуют два линейно независимых действительных частных решения однородного уравнения (1.2) $\operatorname{Re} e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $\operatorname{Im} e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\sin\beta x$, которые включают в фундаментальную систему решений, вместо функций $e^{(\alpha+i\beta)x}$, $e^{(\alpha-i\beta)x}$. Соответствующая компонента общего решения однородного уравнения (1.2) представляется в виде

$$y(x) = \left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)e^{\alpha x}, \tag{1.7}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

1.4) Если среди корней характеристического уравнения (1.5) есть корень $\lambda = \alpha + i\beta$ кратности k $(k \geq 2)$, то и комплексно сопряженный ему корень $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ имеет ту же кратность k. Этим $2k$ невещественным корням соответствуют $2k$ линейно независимых частных действительных решений однородного уравнения (1.2)

$e^{\alpha x}\cos\beta x$, $xe^{\alpha x}\cos\beta x$, ..., $x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$,

$e^{\alpha x}\sin\beta x$, $xe^{\alpha x}\sin\beta x$, ..., $x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Соответствующая компонента общего решения однородного уравнения (1.2) имеет в этом случае вид

$$\begin{aligned} y(x) = \left(C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1}\right)e^{\alpha x}\cos\beta x + \\ + \left(D_1 + D_2 x + \ldots + D_k x^{k-1}\right)e^{\alpha x}\sin\beta x \end{aligned}, \qquad (1.8)$$

где C_1, C_2, ..., C_k, D_1, D_2, ..., D_k – произвольные постоянные.

Так можно построить совокупность решения, являющуюся общим решением уравнения (1.2).

1.3. Частное решение неоднородного уравнения с правой частью специального вида

Пусть правая часть $f(x)$ неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами является квазимногочленом, т.е. является суммой функций вида

$$g(x) = e^{\gamma x}\left(P_m(x)\cos\varphi x + Q_n(x)\sin\varphi x\right),$$

здесь $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены степени m и n соответственно.

В этом случае для поиска частного решения неоднородного дифференциального уравнения можно использовать *метод неопределенных коэффициентов*.

1.5) Пусть правая часть уравнения (1.1) имеет вид $f(x) = P_m(x)e^{\gamma x}$, где $P_m(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ – многочлен степени m.

Если γ не является корнем характеристического уравнения (1.5), то говорят, что имеет место нерезонансный случай; частное решение неоднородного уравнения (1.1) ищется в виде

$$y_ч = Q_m(x)e^{\gamma x}, \qquad (1.9)$$

где $Q_m(x)$ – многочлен той же степени m.

Если γ является корнем (1.5) кратности s, то говорят, что имеет место резонанс кратности s; частное решение (1.1) ищется в виде

$$y_ч = x^s Q_m(x) e^{\gamma x}. \qquad (1.10)$$

Для определения коэффициентов многочлена $Q_m(x)$ следует (1.9) или (1.10) подставить в (1.1), сократить на $e^{\gamma x}$ и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения. Из получившейся системы алгебраических уравнений найдем эти коэффициенты.

1.6) Пусть коэффициенты левой части уравнения (1.1) действительны, а его правая часть имеет вид $f(x) = e^{\gamma x}\left(P_m(x)\cos\varphi x + Q_n(x)\sin\varphi x\right)$.

Если $\gamma + i\varphi$ не является корнем характеристического уравнения (1.5), то говорят, что имеет место нерезонансный случай; частное решение неоднородного уравнения (1.1) ищется в виде

$$y_ч = \left(R_p \cos\varphi x + T_p \sin\varphi x\right) e^{\gamma x}, \qquad (1.11)$$

где $p = \max\{m, n\}$ – наибольшей из степеней многочленов $P_m(x)$ и $Q_n(x)$, R_p и T_p – многочлены степени не выше p.

Если $\gamma + i\varphi$ является корнем (1.5) кратности s, то говорят, что имеет место резонанс кратности s; частное решение (1.1) ищется в виде

$$y_ч = x^s \left(R_p \cos\varphi x + T_p \sin\varphi x\right) e^{\gamma x}. \qquad (1.12)$$

Чтобы найти коэффициенты многочленов R_p и T_p, надо подставить (1.11) или (1.12) в уравнение (1.1), приравнять коэффициенты при подобных членах и решить полученную систему алгебраических уравнений.

Если правая часть уравнения (1.1) представима в виде суммы нескольких функций $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_l(x)$, то частное решение неоднородного уравнения (1.1) состоит из суммы частных решений y_i неоднородных уравнений

$$a_0 y_k^{(n)} + a_1 y_k^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y_k' + a_n y_k = f_k(x) \quad \left(k = \overline{1, l}\right).$$

1.4. Примеры решения задач, предлагавшихся на экзаменационных контрольных работах

Пример 1.1. (1-01). Найти действительные решения уравнения $y^{IV} + 4y'' = 8e^{2x} + 8x^2$.

① Исходное уравнение неоднородное.

1. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y^{IV} + 4y'' = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^4 + 4\lambda^2 = 0$.

Его корни $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 2i$, $\lambda_4 = -2i$.

$\lambda_{1,2} = 0$ (кратности два) соответствуют частные решения $y_1 = e^{0x} = 1$ и $y_2 = xe^{0x} = x$, корням $\lambda_{3,4} = \pm 2i$ – решения $y_3 = \cos 2x$ и $y_4 = \sin 2x$.

Общее решение однородного уравнения в действительной форме

$$y_o = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – действительные произвольные постоянные.

2. Частное решение неоднородного уравнения.

В нашем случае $f(x) = 8e^{2x} + 8x^2$, т.е. $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x) = 8e^{2x}$, $f_2(x) = 8x^2$.

Поиск частного решения проводим методом неопределенных коэффициентов:

$f_1(x) = 8e^{2x} = P_m(x)e^{\gamma x}$, $P_m(x) = 8$, т.е. $m = 0$, $\gamma = 2$. Таких корней у характеристического уравнения нет, следовательно, кратность корня $s = 0$. Т.о. частное решение ищем в виде $y_{ч_1}(x) = ae^{2x}$.

Подставляя $y_{ч_1}(x) = ae^{2x}$ в исходное дифференциальное уравнение при $f(x) = f_1(x)$, получаем

$$16ae^{2x} + 4 \cdot 4ae^{2x} \left(= 32ae^{2x}\right) = 8e^{2x}.$$

Приравнивая коэффициенты при e^{2x}, имеем

$32a = 8$, $a = \dfrac{1}{4}$ и $y_{ч_1} = \dfrac{1}{4}e^{2x}$.

$f_2(x) = 8x^2 = 8x^2 e^{0x} = P_m(x)e^{\gamma x}$, $P_m(x) = 8x^2$, следовательно $m = 2$, $\gamma = 0$ (что соответствует $\lambda_{1,2} = 0$) – резонансный случай, кратность корня $s = 2$, поэтому частное решение ищем в виде $y_{ч_2} = x^2 Q_2 e^{0x} = x^2\left(ax^2 + bx + c\right)$.

Подставляя $y_{ч_2} = ax^4 + bx^3 + cx^2$, в исходное дифференциальное уравнение при $f(x) \equiv f_2(x)$, получаем

$$24a + 4\left(12ax^2 + 6bx + 2c\right) = 8x^2.$$

Приравнивая выражения при одинаковых степенях x, имеем

x^2: $48a = 8$,
x^1: $24b = 0$, это дает $a = \dfrac{1}{6}$, $c = -3a = -\dfrac{1}{2}$ и
x^0: $24a + 8c = 0$;

$$y_{ч_2} = x^2\left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}\right).$$

Частное решение неоднородного уравнения

$$y_ч(x) = y_{ч_1}(x) + y_{ч_2}(x) = \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2}.$$

3. Общее решение неоднородного уравнения

$$y = y_o + y_ч = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x + \frac{e^{2x}}{4} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2}$$ ❶

Пример 1.2. (1-14). Найти действительные решения уравнения

$$y''' + 3y'' + y' - 5y = 10e^x - 5x.$$

② Исходное уравнение неоднородное.

1. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y''' + 3y'' + y' - 5y = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 5 = 0$.

Корень $\lambda_1 = 1$ – угадываем. $(\lambda^2 + 4\lambda + 5)(\lambda - 1) = 0$ дает $\lambda_{2,3} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i$.

Корню характеристического уравнения $\lambda_1 = 1$ соответствует частное решение $y_1 = e^x$, корням $\lambda_{2,3} = -2 \pm i$ – решения $y_2 = e^{-2x}\cos x$ и $y_3 = e^{-2x}\sin x$.

Общее решение однородного уравнения в действительной форме

$$y_o = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}\cos x + C_3 e^{-2x}\sin x,$$

где C_1, C_2, C_3 – действительные произвольные постоянные.

2. Частное решение неоднородного уравнения.

В нашем случае $f(x) = 10e^x - 5x$, т.е. $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x) = 10e^x$, $f_2(x) = -5x$.

Поиск частного решения проводим методом неопределенных коэффициентов:

$f_1(x) = 10e^x = P_m(x)e^{\gamma x}$, $P_m(x) = 10$, т.е. $m = 0$, $\gamma = 1$ (что соответствует $\lambda_1 = 1$) – резонансный случай, кратность корня $s = 1$, поэтому частное решение ищем в виде $y_{ч_1} = x^1 Q_0 e^x = xae^x$.

Подставляя $y_{ч_1}(x) = axe^x$ в исходное дифференциальное уравнение при $f(x) = f_1(x)$, получаем

$10ae^x = 10e^x$.

Приравнивая выражения при одинаковых функциях, имеем

$10a = 10$, $a = 1$ и $y_{ч_1} = xe^x$.

$f_2(x) = -5x = -5xe^{0x} = P_m(x)e^{\gamma x}$, $P_m(x) = -5x$, т.е. $m = 1$, $\gamma = 0$ (таких корней у характеристического уравнения нет), т.е. кратность корня $s = 0$, поэтому частное решение ищем в виде $y_{ч_2} = x^0 Q_1 e^{0x} = ax + b$.

Подставляя $y_{ч_2} = ax + b$ в исходное дифференциальное уравнение при $f(x) \equiv f_2(x)$, получаем $0 + 3 \cdot 0 + a - 5(ax + b) = -5x$. Приравнивая выражения при одинаковых степенях, имеем $\begin{matrix} x^1: & -5a=-5, \\ x^0: & a-5b=0; \end{matrix}$ это дает $a=1$, $b=\frac{1}{5}a=\frac{1}{5}$ и $y_{ч_2}=x+\frac{1}{5}$.

Частное решение неоднородного уравнения

$$y_ч(x)=y_{ч_1}(x)+y_{ч_2}(x)=xe^x+x+\frac{1}{5}.$$

3. Общее решение неоднородного уравнения

$$y=y_o+y_ч=C_1e^x+C_2e^{-2x}\cos x+C_3e^{-2x}\sin x+xe^x+x+\frac{1}{5}.$$ ❷

Пример 1.3. (1-24). Найти все действительные решения уравнения

$$y'''+4y''+y'+4y=34\sin x+\left(34x+\frac{13}{4}\right)e^{4x}.$$

③ Исходное уравнение неоднородное.

1. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$y'''+4y''+y'+4y=0$.

Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^3+4\lambda^2+\lambda+4=0$.

Его корни $\lambda_1=-4$, $\lambda_{2,3}=\pm i$.

$\lambda_1=-4$ соответствует частное решение $y_1=e^{-4x}$, корням $\lambda_{2,3}=\pm i$ – решения $y_2=\sin x$, $y_3=\cos x$.

Общее решение однородного уравнения в действительной форме

$y_o=C_1e^{-4x}+C_2\sin x+C_3\cos x$,

где C_1, C_2, C_3 – действительные произвольные постоянные.

2. Частное решение неоднородного уравнения.

В нашем случае $f(x)=34\sin x+\left(34x+\frac{13}{4}\right)e^{4x}$, т.е. $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, где $f_1(x)=34\sin x$, $f_2(x)=\left(34x+\frac{13}{4}\right)e^{4x}$.

$f_1(x)=34\sin x=e^{\gamma x}\left(P_m(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x\right)$, $P_m(x)=0$, $Q_n(x)=34$, $p=\max\{m,n\}=0$, $\gamma+\beta i=i$ – корень характеристического уравнения резонансный случай, кратность корня $s=1$, поэтому частное решение ищем в виде $y_{ч_1}(x)=x(a\sin x+b\cos x)$.

Подставляя $y_{ч_1}(x)=x(a\sin x+b\cos x)$, в исходное дифференциальное уравнение при $f(x)=f_1(x)$, получаем $8(a\cos x-b\sin x)-2(a\sin x+b\cos x)=34\sin x$.

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и при $\sin x$, имеем

$$\begin{matrix}\cos x: & 8a-2b=0, \\ \sin x: & -8b-2a=34;\end{matrix} \quad \text{это дает} \quad \begin{matrix} a=-1, \\ b=-4\end{matrix} \quad \text{и} \quad y_{ч_1}=-x\sin x-4x\cos x.$$

$$f_2(x)=\left(34x+\frac{13}{4}\right)e^{4x}=P_m(x)e^{\gamma x}, \quad P_m(x)=34x+\frac{13}{4}, \text{ т.е. } m=1,$$

$\gamma=4$ не является корнем характеристического уравнения, кратность корня $s=0$, поэтому частное решение ищем в виде $y_{ч_2}=x^0Q_1e^{4x}=(ax+b)e^{4x}$.

Подставляя $y_{ч_2}=(ax+b)e^{4x}$, в исходное дифференциальное уравнение при $f(x)\equiv f_2(x)$, получаем

$$48a+64(ax+b)+32a+64(ax+b)+a+4(ax+b)+4(ax+b)=34x+\frac{13}{4}.$$

Приравнивая выражения при одинаковых степенях, имеем

$$\begin{matrix}x^1: & 136a=34, \\ x^0: & 136b+81a=\frac{13}{4};\end{matrix} \quad \text{это дает } a=\frac{1}{4},\ b=-\frac{1}{8} \text{ и } y_{ч_2}=\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}\right)e^{4x}.$$

Частное решение неоднородного уравнения

$$y_ч=y_{ч_1}+y_{ч_2}=-x\sin x-4x\cos x+\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}\right)e^{4x}.$$

3. Общее решение неоднородного уравнения

$$y=y_o+y_ч=C_1e^{-4x}+C_2\sin x+C_3\cos x-$$
$$-x\sin x-4x\cos x+\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{8}\right)e^{4x}.$$ ❸

1.5. Задачи для самостоятельного решения

Найти все действительные решения уравнений:

1. (1-01) $y^{IV} + 4y'' = 8e^{2x} + 8x^2$.
2. (1-02) $y^{IV} - y''' = \sin x + e^x$.
3. (1-03) $y^{IV} - y = 2e^x + 5e^x \sin x$.
4. (1-04) $y^{IV} + y''' - y'' - y' = 2x + 2\sin x$.
5. (1-11) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 6e^x + x$.
6. (1-12) $y''' - y'' - y' + y = x^2 + 4e^x$.
7. (1-13) $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 2e^{-x} + 5x + 4$.
8. (1-14) $y''' + 3y'' + y' - 5y = 10e^x - 5x$.
9. (1-21) $y''' - y'' + 9y' - 9y = 60\cos 3x + 4xe^{-x}$.
10. (1-22) $y''' + y'' + 4y' + 4y = 8\sin 2x + 20xe^x$.
11. (1-23) $y''' - 9y'' + y' - 9y = 164\sin x + 18xe^{3x} + \frac{11}{36}e^{-9x}$.
12. (1-24) $y''' + 4y'' + y' + 4y = 34\sin x + \left(34x + \frac{13}{4}\right)e^{4x}$.
13. (1-31) $y''' - 3y' - 2y = 18(1-x)e^{-x} + 100\cos 2x$.
14. (1-32) $y''' - 3y'' + 4y' - 12y = (1-26x)e^{3x} + 30\cos 3x$.
15. (1-33) $y''' + 3y'' - 4y = 18(1-x)e^{-2x} + 40\cos 2x$.
16. (1-34) $y''' + y'' + 16y' + 16y = (34x-4)e^{-x} + 30\sin x$.
17. (1-41) $y^{IV} + 8y'' + 16y = 8\cos 2x$.
18. (1-42) $y'' + y = \sin x \sin 2x$.
19. (1-43) $y'' - 2y' + y = e^{-x}\sin x + 4e^x$.
20. (1-44) $y'' + 2y' + y = xe^{-x} + \cos x$.
21. (1-51) $y''' - y'' + y' - y = 4\cos x - (4x-14)e^{-x}$.
22. (1-52) $y''' + y'' - y' - y = 4\sin x + 8(x+1)e^x$.
23. (1-53) $y''' - y'' - y' + y = 4\cos x + 4(x-4)e^{-x}$.
24. (1-54) $y''' + y'' + y' + y = 4\sin x + 2(x+1)e^x$.
25. (1-61) $y'' + 2y' - 3y = 2e^x \sin^2 x$.

26. (1-62) $y''' - 2y'' + y' = 6xe^x + 4\,\mathrm{sh}\,x$.

27. (1-63) $y'' - y' - 2y = 10e^{2x}\cos^2\dfrac{x}{2}$.

28. (1-64) $y''' + 2y'' + y' = 16\,\mathrm{ch}\,x - 6xe^{-x}$.

1.6. Ответы

1. $y = C_1 + C_2x + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x + x^2\left(\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{4}e^{2x}$.

2. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^x + xe^x + \dfrac{1}{2}(\sin x - \cos x)$.

3. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\sin x + C_4\cos x + \dfrac{1}{2}xe^x - e^x\sin x$.

4. $y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3xe^{-x} + C_4e^x + 2x - x^2 + \dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x)$.

5. $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x + x^3e^x - x - 3$.

6. $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-x} + x^2 + 2x + 4 + x^2e^x$.

7. $y = C_1e^{-x} + C_2\cos xe^{-2x} + C_3\sin xe^{-2x} + xe^{-x} + x - 1$.

8. $y = C_1e^x + C_2\cos xe^{-2x} + C_3\sin xe^{-2x} + xe^x + x + \dfrac{1}{5}$.

9. $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + C_3e^x - \left(\dfrac{x}{5} + \dfrac{7}{50}\right)e^{-x} - x(3\cos 3x + \sin 3x)$.

10. $y = C_1e^{-x} + C_2\sin 2x + C_3\cos 2x + \left(2x - \dfrac{9}{5}\right)e^x - \dfrac{2}{5}x(2\sin 2x + \cos 2x)$.

11. $y = C_1\sin x + C_2\cos x + C_3e^{9x} + 9x\cos x - x\sin x +$
$+(-0.3x + 0.13)e^{3x} - \dfrac{11}{72\cdot 738}e^{-9x}$.

12. $y = C_1e^{-4x} + C_2\sin x + C_3\cos x - x\sin x - 4x\cos x + \left(\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{8}\right)e^{4x}$.

13. $y = (C_1x + C_2)e^{-x} + C_3e^{2x} + (x^3 - 2x^2)e^{-x} - \cos 2x - 7\sin 2x$.

14. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + C_3e^{3x} + (x - x^2)e^{3x} + \cos 3x - \sin 3x$.

15. $y = (C_1x + C_2)e^{-2x} + C_3e^x + (x^3 - 2x^2)e^{-2x} - 2\cos 2x - \sin 2x$.

16. $y = C_1e^{-x} + C_2\cos 4x + C_3\sin 4x + x^2e^{-x} - \cos x + \sin x$.

17. $y = (C_1 + C_2x)\cos 2x + (C_3 + C_4x)\sin 2x - \frac{1}{4}x^2\cos 2x$.

18. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{4}\sin x + \frac{1}{16}\cos 3x$.

19. $y = (C_1 + C_2x)e^x + 2x^2e^x + \frac{3\sin x + 4\cos x}{25}e^{-x}$.

20. $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{6}x^3e^{-x}$.

21. $y = C_1e^x + C_2\cos x + C_3\sin x - x(\cos x + \sin x) + (x-2)e^{-x}$.

22. $y = C_1e^x + (C_2 + C_3x)e^{-x} + x^2e^x + \cos x - \sin x$.

23. $y = C_1e^{-x} + (C_2 + C_3x)e^x + \frac{1}{2}(x^2 - 6x)e^{-x} + \cos x - \sin x$.

24. $y = C_1e^{-x} + C_2\cos x + C_3\sin x - x(\cos x + \sin x) + \frac{1}{4}(2x-1)e^x$.

25. $y = C_1e^x + C_2e^{-3x} + \frac{1}{4}xe^x + \left(\frac{1}{20}\cos 2x - \frac{1}{10}\sin 2x\right)e^x$.

26. $y = C_1 + (C_2 + C_3x)e^x + (x^3 - 2x^2)e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$.

27. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + \frac{5}{3}xe^{2x} + \left(\frac{3}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right)e^{2x}$.

28. $y = C_1 + (C_2 + C_3x)e^{-x} + 2e^x + (x^3 - x^2)e^{-x}$.

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

2.1. Основные понятия

Нормальной линейной однородной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами порядка *n* называется система вида

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \,, \; k = \overline{1, n} \,, \qquad (2.1)$$

где $a_{kj} = \text{const}$.

Вводя в рассмотрение вектор-функцию $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ и матрицу $A = (a_{kj})$, уравнения (2.1) можно представить в векторной форме

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \,. \qquad (2.2)$$

2.2. Общее решение однородной системы

Фундаментальной системой решений однородной системы дифференциальных уравнений (2.1) называется совокупность *n* линейно независимых решений

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \dots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \; \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \dots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}, \dots, \; \vec{x}_n = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \dots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix} \qquad (2.3)$$

этой системы.

Общее решение векторного уравнения (2.2) представляется в виде

$$\vec{x}(t) = C_1 \vec{x}_1(t) + C_2 \vec{x}_2(t) + \ldots + C_n \vec{x}_n(t), \qquad (2.4)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

2.3. Метод Эйлера

(Метод сведения решения системы к задаче отыскания собственных значений и собственных векторов матрицы системы).

Чтобы найти решения (2.2):

1) Вычислим собственные значения матрицы A, решив характеристическое уравнение

$$\det(A-\lambda E)=0 . \tag{2.5}$$

Обозначим $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ корни (2.5), вообще говоря, комплексные.

Для собственного значения λ, отвечающий ему собственный вектор $\vec{h}$ определяется условием

$$A\vec{h}=\lambda\vec{h}\,,\ \vec{h}\neq 0 . \tag{2.6}$$

2.1) Корни характеристического уравнения (2.5) действительные, простые. Тогда существует базис из собственных векторов матрицы A: $A\vec{h}_m=\lambda_m\vec{h}_m$, $\vec{h}_m\neq 0$, $m=\overline{1,n}$.

Вектор-функции $\vec{x}_m=\vec{h}_m e^{\lambda_m t}$, $m=\overline{1,n}$ являются решениями (2.2).

Общее решение векторного уравнения (2.2) есть их произвольная линейная комбинация (C_m – постоянные)

$$\vec{x}=\sum_{m=1}^{n} C_m\vec{h}_m e^{\lambda_m t} . \tag{2.7}$$

2.2) Корни характеристического уравнения (2.5) невещественные, простые.

Еще раз напомним, что для комплексного числа $z=x+iy$, где $x,y\in\mathrm{R}$, его действительной и мнимой частью называются соответственно $\operatorname{Re} z=x$, $\operatorname{Im} z=y$. Кроме того, имеет место формула Эйлера $e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)$.

Если среди корней характеристического уравнения (2.5) есть невещественный корень $\lambda=\alpha+i\beta$, то комплексно сопряженное ему число $\overline{\lambda}=\alpha-i\beta$ также будет корнем этого уравнения (по свойству алгебраических уравнений с действительными коэффициентами). Этой комплексной паре корней соответствуют два линейно независимых частных решения векторного уравнения (2.2)

$\vec{x}(t) = \vec{h}\, e^{\lambda t}$ и $\vec{\bar{x}}(t) = \vec{\bar{h}}\, e^{\bar{\lambda} t}$. Поскольку ставится задача отыскания действительных решений системы дифференциальных уравнений, то в качестве решений, соответствующих такой паре комплексных сопряженных собственных значений матрицы A, выбирают линейные комбинации решений $\vec{x}$ и $\vec{\bar{x}}$, а именно, $\vec{x}_1(t) = \dfrac{\vec{x}(t) + \vec{\bar{x}}(t)}{2}$ и $\vec{x}_2(t) = \dfrac{\vec{x}(t) - \vec{\bar{x}}(t)}{2i}$, или $\vec{x}_1(t) = \mathrm{Re}\, \vec{x}(t)$ и $\vec{x}_2(t) = \mathrm{Im}\, \vec{x}(t)$.

З а м е ч а н и е. В более общем случае, когда собственный вектор для числа $\bar{\lambda}$ берется не сопряженным с вектором $\vec{h}$, действительная и мнимая части соответствующего комплекснозначного решения системы будут линейными комбинациями действительных решений $\vec{x}_1(t) = \mathrm{Re}\left(\vec{h}\, e^{\lambda t}\right)$ и $\vec{x}_2(t) = \mathrm{Im}\left(\vec{h}\, e^{\lambda t}\right)$, найденных для собственного значения λ.

Таким образом., если $\alpha \pm i\beta$ – простые корни характеристического уравнения (2.5), то компонента общего решения системы, соответствующая этой паре комплексных корней, записывается в виде

$$\vec{x} = C_1\, \vec{x}_1(t) + C_2\, \vec{x}_1(t) \ = C_1\, \mathrm{Re}\left(\vec{h}\, e^{\lambda t}\right) + C_2\, \mathrm{Im}\left(\vec{h}\, e^{\lambda t}\right), \qquad (2.8)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, $\vec{h}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda = \alpha + i\beta$.

2.3) Корни характеристического уравнения действительные кратные. В этом случае матрица A может не иметь n линейно независимых собственных векторов. Тогда для построения общего решения (2.2) используется следующее понятие.

Жордановой цепочкой матрицы A, соответствующей собственному значению λ, называется система векторов $\vec{h}_1, \vec{h}_2, ..., \vec{h}_p$ такая, что

$$
\begin{aligned}
&A\vec{h}_1 = \lambda\vec{h}_1, \qquad \vec{h}_1 \neq \vec{0},\\
&A\vec{h}_2 = \lambda\vec{h}_2 + \vec{h}_1,\\
&A\vec{h}_3 = \lambda\vec{h}_3 + \vec{h}_2,\\
&\quad\vdots\\
&A\vec{h}_p = \lambda\vec{h}_p + \vec{h}_{p-1}.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Вектор $\vec{h}_1$ – собственный, а $\vec{h}_2, \vec{h}_3, ..., \vec{h}_p$ – присоединенные векторы.

Равенства (2.9) можно записать также в виде

$$
\begin{aligned}
&(A - \lambda E)\vec{h}_1 = \vec{0}, \qquad \vec{h}_1 \neq \vec{0},\\
&(A - \lambda E)\vec{h}_k = \vec{h}_{k-1}, \ k = \overline{2, p}.
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Каждой цепочке $\vec{h}_1, \vec{h}_2, ..., \vec{h}_p$ соответствует p линейно независимых решений $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_p$ векторного уравнения (2.2):

$$
\begin{aligned}
&\vec{x}_1 = e^{\lambda t}\vec{h}_1,\\
&\vec{x}_2 = e^{\lambda t}\left(\frac{t}{1!}\vec{h}_1 + \vec{h}_2\right),\\
&\vec{x}_3 = e^{\lambda t}\left(\frac{t^2}{2!}\vec{h}_1 + \frac{t}{1!}\vec{h}_2 + \vec{h}_3\right),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\vec{x}_p = e^{\lambda t}\left(\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\vec{h}_1 + \frac{t^{p-2}}{(p-2)!}\vec{h}_2 + \ldots + \frac{t}{1!}\vec{h}_{p-1} + \vec{h}_p\right).
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

З а м е ч а н и е. Приведем правило запоминания формул (2.11). Собственному вектору $\vec{h}_1$ соответствует решение $\vec{x}_1 = e^{\lambda t}\vec{h}_1$. Если везде отбросить $e^{\lambda t}$, то каждая строка правой части (2.11) получается интегрированием по t предыдущей строки, причем постоянную интегрирования надо взять равной следующему по порядку вектору серии.

Для кратного собственного значения λ может существовать несколько жордановых цепочек, содержащих линейно независимые собственные векторы матрицы A.

Компонента общего решения системы, соответствующая действительному собственному значению λ кратности p, имеет вид

$$\vec{x}(t)=\sum_{r} e^{\lambda t}\sum_{l=1}^{k_r} C_l^{(r)}\vec{x}_l^{(r)}(t),$$

где $C_1^{(r)}$, $C_2^{(r)}$, …, $C_{k_r}^{(r)}$ – произвольные постоянные, $\sum_{r} k_r = p$.

Известно, что для любой квадратной матрицы A существует базис, составленный из ее жордановых цепочек, поэтому произвольная линейная комбинация решений вида (2.11) дает общее решение векторного уравнения (2.2).

2.4. Общее решение неоднородной системы

Решение неоднородной системы

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}+\vec{f} \tag{2.12}$$

можно найти методом вариации постоянных, если известно общее решение однородной системы (2.1) с той же матрицей $A=\left(a_{kj}\right)$. Для этого в формуле общего решения (2.4) однородной системы надо заменить произвольные постоянные C_m, $m=\overline{1,n}$, на неизвестные функции $C_m(t)$:

$$\vec{x}(t)=\sum_{m=1}^{n} C_m(t)\vec{x}_m(t). \tag{2.13}$$

Полученные выражения для $\frac{d\vec{x}(t)}{dt}=\sum_{m=1}^{n}\frac{dC_m(t)}{dt}\vec{x}_m(t)+$ $+\sum_{m=1}^{n} C_m(t)\frac{d\vec{x}_m(t)}{dt}$ подставляем в неоднородную систему (2.12). Так как $\sum_{m=1}^{n} C_m(t)\frac{d\vec{x}_m(t)}{dt} = \sum_{m=1}^{n} C_m(t)A\vec{x}_m(t)$, то получаем систему для определения $\frac{dC_m(t)}{dt}$, $m=\overline{1,n}$:

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{dC_m(t)}{dt}\vec{x}_m(t) = \vec{f}\ . \qquad (2.14)$$

Неизвестные функции $C_m(t)$, $m=\overline{1,n}$, находим, проинтегрировав полученные при решении системы (2.14) функции $\frac{dC_m(t)}{dt}$, $m=\overline{1,n}$.

Заметим, что если при нахождении функций $C_m(t)$ записывать всю совокупность первообразных, т.е. сохранять в записи выражений для $C_m(t)$ возникающие при интегрировании произвольные постоянные, то (2.13) будет общим решением неоднородной системы. Частное решение неоднородной системы (2.12) получим, полагая возникающие при интегрировании произвольные постоянные равными конкретному значению, например, равными нулю.

2.5. Примеры решения задач, предлагавшихся на экзаменационных контрольных работах

Пример 2.1. (2-24). Найти все действительные решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} &=& 5x-y-4z \\ \dot{y} &=& -12x+5y+12z\ , \\ \dot{z} &=& 10x-3y-9z \end{cases} \left(\lambda_1=-1,\ \lambda_{2,3}=1\right).$$

① Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & -9 \end{pmatrix}$.

1. Не все корни характеристического уравнения различны: либо а) существует базис из собственных векторов матрицы A системы, либо б) строим жорданову цепочку для матрицы A системы.

$\lambda_1=-1$, $(A-\lambda_1 E)\vec{h}_1=\vec{0}$.

Для краткости записи используются следующие обозначения: выражение $\alpha(n)+\beta(m)$ над стрелочкой означает, что перешли к эквивалентной системе алгебраических уравнений, n-я строка матрицы которой представляет собой линейную комбинацию n-й и m-й строк с коэффициентами α и β соответственно.

$$A-\lambda_1 E=\begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -12 & 6 & 12 \\ 10 & -3 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)-(1)]{\frac{1}{6}(2)} \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)+2(2)]{(1)+2(2)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+(1)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}(2)]{(1)-\frac{1}{2}(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{дает} \quad \vec{h}_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{или}$$

$$\vec{h}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{x}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$\lambda_{2,3}=1$, $(A-\lambda_2 E)\vec{h}_2=\vec{0}$.

$$A-\lambda_2 E=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -12 & 4 & 12 \\ 10 & -3 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}(2)} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 3 \\ 10 & -3 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)+3(2)]{(1)+(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)-(1)]{(2)+3(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ дает } \vec{h}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$. Нашли только один собственный вектор, поэтому строим жорданову цепочку для матрицы A системы.

$$(A - \lambda_2 E)\vec{h}_3 = \vec{h}_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -4 & 1 \\ -12 & 4 & 12 & 0 \\ 10 & -3 & 10 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{4}(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 10 & -3 & 10 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(3)+3(2)]{(1)+(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-(1)]{(2)+3(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$ дает

$\vec{h}_3 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ или (при $\alpha = 0$) $\vec{h}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Общее решение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + e^t \left\{ C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right\}. \text{ ❶}$$

Пример 2.2. (2-14). Найти все действительные решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 7x + y + 2z \\ \dot{y} = 2x + 3y + z \\ \dot{z} = -8x - 2y - z \end{cases}, \ (\lambda_{1,2,3} = 3).$$

② Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -8 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Отметим, что все корни характеристического уравнения равны.

$(A - \lambda E)\vec{h}_1 = \vec{0}$

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -8 & -2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ дает } \vec{h}_1=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ или}$$

$\vec{h}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Нашли только один собственный вектор, поэтому строим жорданову цепочку матрицы A системы:

$(A-\lambda E)\vec{h}_2=\vec{h}_1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -2 & -4 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{ дает } \vec{h}_2=\alpha\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или (при $\alpha=0$) $\vec{h}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$(A-\lambda E)\vec{h}_3=\vec{h}_2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -8 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{ дает}$$

$\vec{h}_2=\beta\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ или (при $\beta=1$) $\vec{h}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Общее решение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] +$$

$$+ C_3 e^{3t} \left[\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$ ❷

Пример 2.3. (2-01). Найти все действительные решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3y \\ \dot{y} = 4y - 3z \\ \dot{z} = -x + 3y + 5z \end{cases}, \quad (\lambda_1 = 5, \lambda_{2,3} = 4 \pm 3i).$$

③ Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Все корни характеристического уравнения различны, следовательно, существует базис из собственных векторов матрицы A системы.

$\lambda_1 = 5$, $(A - \lambda_1 E)\vec{h}_1 = \vec{0}$.

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ дает } \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_2 = 4 + 3i$, $(A - \lambda_2 E)\vec{h}_2 = \vec{0}$.

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -3i & 3 & 0 \\ 0 & -3i & -3 \\ -1 & 3 & 1-3i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ дает } \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В нашем случае $\vec{x}_{\lambda_2} = \vec{h}_2 e^{(4+3i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(4+3i)t} = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} e^{3it} =$

$$= e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos 3t + i \sin 3t) = e^{4t} \left(\begin{pmatrix} \cos 3t \\ -\sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix} \right).$$

Вектор-функции $\vec{x}_2 = \operatorname{Re} \vec{x}_{\lambda_2}$ и $\vec{x}_3 = \operatorname{Im} \vec{x}_{\lambda_2}$ – действительные решения системы.

2. Общее решение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{4t} \left[C_2 \begin{pmatrix} \cos 3t \\ -\sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix} \right].$$ ❸

Пример 2.4. (2-41). Найти все действительные решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = & x + y + \dfrac{e^{2t}}{\cos t} \\ \dot{y} = & -2x + 3y \end{cases}.$$

④ Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Решаем характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$.

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$, откуда $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$.

2. Все корни характеристического уравнения различны, поэтому существует базис из собственных векторов матрицы *A* системы.

$\lambda_1 = 2 + i$, $(A - \lambda_1 E)\vec{h}_1 = \vec{0}$.

$$A-\lambda_1 E=\begin{pmatrix}-1-i & 1\\ -2 & 1-i\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \text{дает}\ \vec{h}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\\ 1\end{pmatrix},$$

или $\vec{h}_1=\begin{pmatrix}1-i\\ 2\end{pmatrix}$, или $\vec{h}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1+i\end{pmatrix}$.

В нашем случае $\vec{x}_{\lambda_1}=\vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}=\begin{pmatrix}1\\ 1+i\end{pmatrix}e^{(2+i)t}=e^{2t}\left(\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ i\end{pmatrix}\right)e^{it}=$

$$=e^{2t}\left(\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t-\sin t\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t+\sin t\end{pmatrix}\right).$$

Вектор функции $\vec{x}_1=\operatorname{Re}\vec{x}_{\lambda_1}$ и $\vec{x}_2=\operatorname{Im}\vec{x}_{\lambda_1}$ – действительные решения системы.

3. Общее решение однородной системы

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1 e^{2t}\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t-\sin t\end{pmatrix}+C_2 e^{2t}\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t+\sin t\end{pmatrix}.$$

4. Решение неоднородной системы ищем методом вариации постоянных, полагая $C_1=C_1(t)$ и $C_2=C_2(t)$.

Подставляя

$$\dot{x}=C_1'(t)e^{2t}\cos t+C_1(t)\left(e^{2t}\cos t\right)'+C_2'(t)e^{2t}\sin t+$$
$$+C_2(t)\left(e^{2t}\sin t\right)'$$

и

$$\dot{y}=C_1'(t)e^{2t}(\cos t-\sin t)+C_1(t)\left(e^{2t}(\cos t-\sin t)\right)'+$$
$$+C_2'(t)e^{2t}(\cos t+\sin t)+C_2(t)\left(e^{2t}(\cos t+\sin t)\right)'$$

в неоднородную исходную систему, получим для определения C_1' и C_2' систему

$$\begin{cases}C_1'(t)e^{2t}\cos t+C_2'(t)e^{2t}\sin t &=\dfrac{e^{2t}}{\cos t},\\ C_1'(t)e^{2t}(\cos t-\sin t)+C_2'(t)e^{2t}(\cos t+\sin t) &=0.\end{cases}$$

Сокращаем оба уравнения на e^{2t}, и умножаем первое уравнение на $\cos t$:

$$\begin{cases} C_1'(t)\cos^2 t + C_2'(t)\sin t\cos t & = 1, \\ C_1'(t)(\cos t - \sin t) + C_2'(t)(\cos t + \sin t) & = 0. \end{cases}$$

К первому уравнению, умноженному на 2, прибавляем второе, умноженное на $(\cos t + \sin t)$:

$$\begin{cases} C_1'(t)\cos^2 t + C_2'(t)\sin t\cos t & = 1, \\ C_1'(t)(\cos^2 t - \sin^2 t) + C_2'(t)(\cos t + \sin t)^2 & = 0. \end{cases}$$

Ко второму уравнению прибавляем первое, умноженное на 2:

$$\begin{cases} C_1'(t) - C_2'(t) = 2, \\ C_1'(t)(\cos t - \sin t) + C_2'(t)(\cos t + \sin t) = 0. \end{cases}$$

Полученный из первого уравнения результат $C_1' = C_2' + 2$ подставляем во второе уравнение $2\left(C_2' + 1\right)\cos t = 2\sin t$, откуда $C_2(t) = \int\left(-1 + \frac{\sin t}{\cos t}\right)dt + c_2 = -t - \int\frac{d\cos t}{\cos t}dt + c_2 =$ $= -t - \ln|\cos t| + c_2$, аналогично находим $C_1(t) = \int\left(1 + \frac{\sin t}{\cos t}\right)dt + c_1 = t - \ln|\cos t| + c_1$.

Общее решение неоднородной системы

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(t - \ln|\cos t| + c_1\right)\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}e^{2t} +$$

$$\left(-t - \ln|\cos t| + c_2\right)\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}e^{2t}.$$ ❹

2.6. Задачи для самостоятельного решения

Найти все действительные решения систем уравнений:

29. (2-01) $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3y \\ \dot{y} = 4y - 3z \\ \dot{z} = -x + 3y + 5z \end{cases}$, ($\lambda_1 = 5$, $\lambda_{2,3} = 4 \pm 3i$).

30. (2-02) $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + z \\ \dot{y} = 2x - 5y + 2z \\ \dot{z} = 3x - 2y - 2z \end{cases}$, ($\lambda_{1,2,3} = -3$).

31. (2-03) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y \\ \dot{y} = 3y + z \\ \dot{z} = 2x - 4y + 4z \end{cases}$, ($\lambda_1 = 4$, $\lambda_{2,3} = 3 \pm 2i$).

32. (2-04) $\begin{cases} \dot{x} = -4x + 2y - 3z \\ \dot{y} = -2y + z \\ \dot{z} = x - y \end{cases}$, $(\lambda_{1,2,3} = -2)$.

33. (2-11) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y - 2z \\ \dot{y} = 5y - 3z \\ \dot{z} = -x + 3y \end{cases}$, ($\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = 3 \pm i$).

34. (2-12) $\begin{cases} \dot{x} = 6x + y + 2z \\ \dot{y} = 2x + 2y + z \\ \dot{z} = -8x - 2y - 2z \end{cases}$, $(\lambda_{1,2,3} = 2)$.

35. (2-13) $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y + 5z \\ \dot{y} = 3x - 2y + 5z \\ \dot{z} = -x + 2y - z \end{cases}$, ($\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm i$).

36. (2-14) $\begin{cases} \dot{x} = 7x + y + 2z \\ \dot{y} = 2x + 3y + z \\ \dot{z} = -8x - 2y - z \end{cases}$, $(\lambda_{1,2,3} = 3)$.

37. (2-21) $\begin{cases} \dot{x} = -4x + 2y + 5z \\ \dot{y} = 6x - y - 6z \\ \dot{z} = -8x + 3y + 9z \end{cases}$, $(\lambda_{1,2} = 1,\ \lambda_3 = 2)$.

38. (2-22) $\begin{cases} \dot{x} = x + y - z \\ \dot{y} = -x + 2y - z \\ \dot{z} = 2x - y + 4z \end{cases}$, $(\lambda_{1,2} = 2,\ \lambda_3 = 3)$.

39. (2-23) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + z \\ \dot{y} = -2x - z \\ \dot{z} = 2x + y + 2z \end{cases}$, $(\lambda_{1,2} = 1,\ \lambda_3 = 2)$.

40. (2-24) $\begin{cases} \dot{x} = 5x - y - 4z \\ \dot{y} = -12x + 5y + 12z \\ \dot{z} = 10x - 3y - 9z \end{cases}$, $(\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = 1)$.

41. (2-31) $\begin{cases} \dot{x} = -4x + y \\ \dot{y} = x - 4y - 2z \\ \dot{z} = -5x + 5y + z \end{cases}$, $(\lambda_1 = -3,\ \lambda_{2,3} = -2 \pm i)$.

42. (2-32) $\begin{cases} \dot{x} = -3x - z \\ \dot{y} = -4x - 2y - 3z \\ \dot{z} = 4x + 2y + 3z \end{cases}$, $(\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = -1)$.

43. (2-33) $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + z \\ \dot{y} = x - 2y + 3z \\ \dot{z} = 5x - 5y + 2z \end{cases}$, $(\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i)$.

44. (2-34) $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - z \\ \dot{y} = -x - 3y + z \\ \dot{z} = y - 2z \end{cases}$, $(\lambda_{1,2,3} = -2)$.

45. (2-41) $\begin{cases} \dot{x} = x + y + \dfrac{e^{2t}}{\cos t} \\ \dot{y} = -2x + 3y \end{cases}$,

46. (2-42) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + t\sqrt{t}e^{3t} \\ \dot{y} = -x + 4y \end{cases}$,

47. (2-43) $\begin{cases} \dot{x} = y + \dfrac{1}{\cos t} \\ \dot{y} = -x + \dfrac{1}{\sin t} \end{cases}$,

48. (2-44) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 2x - y + 15e^{t}\sqrt{t} \end{cases}$,

49. (2-51) $\begin{cases} \dot{x} = -4x + y + 2z \\ \dot{y} = -y + z \\ \dot{z} = -6x + 2y + 2z \end{cases}$, $(\lambda_1 = -1,\ \lambda_{2,3} = -1 \pm i)$.

50. (2-52) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y - z \\ \dot{y} = 4x + 5y - 2z \\ \dot{z} = 8x + 6y - 3z \end{cases}$, $(\lambda_1 = 3,\ \lambda_{2,3} = 1)$.

51. (2-53) $\begin{cases} \dot{x} = -2y - z \\ \dot{y} = 2x + 4y + 2z \\ \dot{z} = -2x - 2y \end{cases}$, $(\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = 1 \pm i)$.

52. (2-54) $\begin{cases}\dot{x}=-7x+10y+8z\\ \dot{y}=-x+z\\ \dot{z}=-3x+6y+4z\end{cases}$, $(\lambda_1=1,\ \lambda_{2,3}=-2)$.

53. (2-61) $\begin{cases}\dot{x}=3x+y+z\\ \dot{y}=x+3y+z\\ \dot{z}=2x-2y+4z\end{cases}$, $(\lambda_1=2,\ \lambda_{2,3}=4)$.

54. (2-62) $\begin{cases}\dot{x}=3x-3y-6z\\ \dot{y}=y+4z\\ \dot{z}=-y-3z\end{cases}$, $(\lambda_1=3,\ \lambda_{2,3}=-1)$.

55. (2-63) $\begin{cases}\dot{x}=2x+y-z\\ \dot{y}=x+3y-z\\ \dot{z}=x+2y\end{cases}$, $(\lambda_1=1,\ \lambda_{2,3}=2)$.

56. (2-64) $\begin{cases}\dot{x}=-3x-y\\ \dot{y}=4x+y\\ \dot{z}=2x+y-2z\end{cases}$, $(\lambda_1=-2,\ \lambda_{2,3}=-1)$.

2.7. Ответы

29. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{5t}\begin{pmatrix}9\\3\\-1\end{pmatrix}+C_2e^{4t}\begin{pmatrix}\cos 3t\\-\sin 3t\\\cos 3t\end{pmatrix}+C_3e^{4t}\begin{pmatrix}\sin 3t\\\cos 3t\\\sin 3t\end{pmatrix}$.

30. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-3t}\left[t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]+\,+C_3e^{-3t}\left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]$.

31. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{4t}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{3t}\begin{pmatrix}\cos 2t\\-\sin 2t\\-2\cos 2t\end{pmatrix}+C_3e^{3t}\begin{pmatrix}\sin 2t\\\cos 2t\\-2\sin 2t\end{pmatrix}$.

32. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+C_2e^{-2t}\left[t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right]+\,+C_3e^{-2t}\left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}\right]$.

33. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{3t}\begin{pmatrix}2\cos t-\sin t\\3\cos t\\\sin t+2\cos t\end{pmatrix}+C_3e^{3t}\begin{pmatrix}2\sin t+\cos t\\3\sin t\\2\sin t-\cos t\end{pmatrix}$.

34. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\left[t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] +$$
$$+ C_3 e^{2t}\left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right].$$

35. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t}\begin{pmatrix} 2\cos t + \sin t \\ \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + C_3 e^{t}\begin{pmatrix} \cos t - 2\sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

36. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t}\left[t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right] +$$
$$+ C_3 e^{3t}\left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right].$$

37. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left[C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\left(t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right]e^{t} + C_3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t}.$$

38. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}e^{3t} + \left[C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3\left(t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right]e^{2t}.$$

39. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t} + \left[C_2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3\left(t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right]e^{t}.$$

40. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{t}\left\{C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3\left[t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\right\}.$$

41. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t} + \left(C_2 \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t - \sin t \\ -\cos t + 2\sin t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\sin t + \cos t \\ -\sin t - 2\cos t \end{pmatrix} \right) e^{-2t}$.

42. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left[C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right] e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$.

43. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \left(C_2 \begin{pmatrix} 3\cos 2t + \sin 2t \\ 4\cos 2t + 3\sin 2t \\ 5\cos 2t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 3\sin 2t - \cos 2t \\ 4\sin 2t - 3\cos 2t \\ 5\sin 2t \end{pmatrix} \right) e^{t}$.

44. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left[C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + C_2 \left(\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right] e^{-2t}$.

45. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} e^{2t} + C_2(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{2t}$, где

$C_1(t) = t - \ln|\cos t| + c_1$, $C_2(t) = -t - \ln|\cos t| + c_2$.

46. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left[C_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2(t) \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right] e^{3t}$, где

$C_1(t) = \frac{2}{7} t^3 \sqrt{t} + \frac{2}{5} t^2 \sqrt{t} + c_1$, $C_2(t) = -\frac{2}{5} t^2 \sqrt{t} + c_2$.

47. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, где $C_1(t) = c_1$,

$C_2(t) = \ln|\sin t| - \ln|\cos t| + c_2$.

48. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left[C_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2(t) \left(2t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right] e^{t}$, где $C_1(t) = 12t^2 \sqrt{t} + c_1$,

$C_2(t) = -10t\sqrt{t} + c_2$.

49. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \left(C_2 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ 2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ -2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} \right) e^{-t}$.

50. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + \left[C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right] e^{t}$.

51. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + \left(C_2 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ -2\cos t \\ 2\cos t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ 2\sin t \\ -2\sin t \end{pmatrix} \right) e^{t}$.

52. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + \left[C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \left(t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right] e^{-2t}$.

53. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + \left[C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right] e^{4t}$.

54. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t} + \left[C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 \left(t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right] e^{-t}$.

55. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + \left[C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \left(t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right] e^{2t}$.

56. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \left[C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right] e^{-t}$.

§ 3. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

3.1. Задача Коши

Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение

$$F\left(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)},\ y^{(n)}\right) = 0, \tag{3.1}$$

где x – независимая переменная, y – искомая функция, функция F определена и непрерывна в некоторой области $G \subseteq \mathsf{R}^{n+2}$ $(n \geq 1)$ и зависит от $y^{(n)}$.

Решением уравнения (3.1) на интервале $I = (a,b)$ называется функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая условиям:

1. $\varphi(x) \in C^n(a,b)$;
2. $\left(x,\ \varphi,\ \varphi',\ \ldots,\ \varphi^{(n-1)},\ \varphi^{(n)}\right) \in G$ при $\forall x \in (a,b)$;
3. $F\left(x,\ \varphi,\ \varphi',\ \ldots,\ \varphi^{(n-1)},\ \varphi^{(n)}\right) = 0$ для $\forall x \in (a,b)$.

Задача Коши, или начальная задача, для уравнения (3.1) ставится следующим образом: заданы числа x_0, $\hat{y}_0$, $\hat{y}_1$, …, $\hat{y}_n$ такие, что $x_0 \in (a,b)$ и $F(x,\ \hat{y}_0,\ \hat{y}_1,\ \ldots,\ \hat{y}_n) = 0$. Требуется найти такое решение $y(x)$ уравнения (3.1), которое удовлетворяет условиям

$$y(x_0) = \hat{y}_0,\ y'(x_0) = \hat{y}_1,\ \ldots,\ y^{(n)}(x_0) = \hat{y}_n. \tag{3.2}$$

З а м е ч а н и е. Характерная особенность задачи Коши состоит в том, что условия на искомое решение $y = y(x)$ задаются в одной и той же точке x_0.

Общим интегралом уравнения (3.1) называется соотношение, связывающее x, y и n произвольных постоянных C_1, C_2, …, C_n

$$\Phi(x,\ y,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n) = 0. \tag{3.3}$$

Значения этих произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ можно найти, при определенных требованиях к функции $F\left(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)},\ y^{(n)}\right)$, используя *n* начальных условий

$$y(x_0)=\hat{y}_0,\ y'(x_0)=\hat{y}_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=\hat{y}_{n-1}. \qquad (3.4)$$

3.2. Основные типы уравнений, допускающие понижение порядка

3.2.1. Простые случаи понижения порядка уравнения.

3.2.1.1. Порядок уравнения легко понижается, если его можно преобразовать в равенство полных производных по x от некоторых выражений.

3.2.1.2. В случае, когда уравнение не содержит y, т.е. оно имеет вид $F\left(x,\ y^{(k)},\ y^{(k+1)},\ \ldots,\ y^{(n)}\right)=0$, порядок уравнения понижается, если сделать замену $z=y^{(k)}$, взяв за новую неизвестную функцию производную от y наименьшего порядка, входящую в уравнение.

3.2.1.3. Когда уравнение не содержит независимое переменное x, т.е. имеет вид $F\left(y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)}\right)=0$, то порядок уравнения понижается, если за новую независимую переменную взять y, а за неизвестную функцию $p(y)=y'$.

При этом $y''=\dfrac{d(y')}{dx}=\dfrac{dp(y)}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=p'(y)\cdot p(y)$.

З а м е ч а н и е. При этом может быть потеряно решение $y=y_0=\text{const}$, которое следует искать отдельно: $F(y,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0)=0$.

3.2.2. Случаи однородного и однородного в обобщенном смысле уравнений.

3.2.2.1. Если уравнение является однородным относительно y и всех производных от y, т.е. уравнение не меняется при одновременной замене y на λy, $y^{(k)}$ на $\lambda y^{(k)}$, $\lambda\neq 0$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, то порядок уравнения можно понизить на единицу, если ввести новую неизвестную функцию $z(x)$ по правилу $y'=yz$.

При такой замене $y'' = (y')' = (yz)' = y' \cdot z + y \cdot z' = = yz \cdot z + y \cdot z' = y(z' + z^2)$.

З а м е ч а н и е. Отдельно следует рассмотреть случай $y = 0$.

3.2.2.2. Пусть теперь уравнение является однородным в обобщенном смысле, т.е. существует такое число s, что уравнение не меняется при одновременной замене x на λx, y на $\lambda^s y$, при этом y' заменяется на $\lambda^{s-1} y'$, y'' – на $\lambda^{s-2} y''$, … , $y^{(k)}$ – на $\lambda^{s-k} y^{(k)}$, где $\lambda \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Чтобы узнать, будет ли уравнение однородным, и найти число s, надо приравнять друг другу показатели степеней, в которых число λ будет входить в каждый член уравнения после указанной выше замены. Если же полученные уравнения для s будут несовместными, то дифференциальное уравнение не является однородным в указанном смысле.

После того как число s найдено, при $x > 0$ вводим новую независимую переменную t и новую неизвестную функцию $z(t)$ с помощью замены

$x = e^t$, $y = ze^{st}$.

З а м е ч а н и е. При $x < 0$ полагаем $x = -e^t$.

Тогда уравнение приводится к виду, в который не входит t. Следовательно, порядок уравнения понижается по правилу, изложенному в пункте 3.2.1.3.

З а м е ч а н и е. При решении задач с начальными условиями целесообразно использовать заданные условия в самом процессе решения.

3.3. Примеры решения задач, предлагавшихся на экзаменационных контрольных работах

Пример 3.1. (8-24). Решить задачу Коши

$$2yy'' \ln y = (y')^2 (1 + 2\ln y),\ y(0) = e,\ y'(0) = e.$$

①Так как x явно не входит в уравнение, то делаем замену $y' = p(y)$, при которой $y''_{xx} = p'_y y'_x = pp'$.

Исходное дифференциальное уравнение принимает вид

$$2ypp'\ln y = p^2(1+2\ln y).$$

1) при $p=0$ получаем $y'=0$ и $y=\text{const}$ – не годится из-за начальных условий;

2) при $p\neq 0$ получаем $2yp'\ln y = p(1+2\ln y)$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$$2\frac{dp}{p}=\frac{(1+2\ln y)}{y\ln y}dy\text{, или } 2\frac{dp}{p}=\left[\frac{2}{y}+\frac{1}{y\ln y}\right]dy.$$

$2\ln|p| = 2\ln y + \ln|\ln y| + \ln C_0$ (здесь $C_0>0$), т.о., $p^2 = Cy^2\ln y$ (здесь C – произвольное, т.к. а) сняли знак модуля; б) учли возможность $p=0$).

Для определения постоянной C используем начальные условия $y(0)=y'(0)=e$. Таким образом, $e^2=Ce^2\ln e$ и $C=1$, тогда $\dfrac{dy}{dx}=p=\pm y\sqrt{\ln y}$ – уравнение с разделяющимися переменными: $\dfrac{dy}{y\sqrt{\ln y}}=dx$ (выбираем верхний знак из-за начальных условий). $\displaystyle\int\frac{d\ln y}{\sqrt{\ln y}}=x+C$ дает $2\sqrt{\ln y}=x+C$. Подставляя сюда начальное значение $y(0)=e$, получаем $C=2$.

Частное решение, соответствующее поставленным начальным условиям: $y=e^{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}$. ❶

Пример 3.2. (7-01) Решить задачу Коши

$$2y^2y''\sin x - 2y^2y'\cos x + (y')^3 - 2y(y')^2\sin x = 0,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1.$$

② Нетрудно заметить, что исходное уравнение является однородным относительно y, y', y'', поэтому делаем замену $y' = yz$, при которой $y'' = y'z + yz' = yz \cdot z + yz' = y\left(z^2 + z'\right)$.

Исходное дифференциальное уравнение принимает вид:

$$2y^2 y\left(z^2 + z'\right)\sin x - 2y^2 yz\cos x + (yz)^3 - 2y(yz)^2 \sin x = 0 .$$

1. $y = 0$ – не удовлетворяет начальным условиям;
2. при $y \neq 0$ имеем $2\left(z^2 + z'\right)\sin x - 2z\cos x + z^3 - 2z^2 \sin x = 0$ или $2z' \sin x - 2z\cos x = -z^3$ – это уравнение Бернулли.

Стандартная замена $p = \dfrac{1}{z^2}$, $p' = -\dfrac{2}{z^3} z'$.

Уравнение $-\dfrac{2z' \sin x}{z^3} + \dfrac{2z\cos x}{z^3} = 1$ переходит в $p' \sin x + 2p\cos x = 1$ – неоднородное линейное уравнение первого порядка по *p*, которое решаем методом вариации постоянной.

1) Сначала решаем однородное уравнение: $p' \sin x + 2p\cos x = 0$ – переменные разделяются.

$p \neq 0$ $\quad \dfrac{dp}{p} = -\dfrac{2\cos x dx}{\sin x}$ дает $\ln|p| = -2\ln|\sin x| + \ln C_0$ и $p = \dfrac{C}{\sin^2 x}$.

2) Полагая $C = C(x)$, подставляем $p = \dfrac{C(x)}{\sin^2 x}$ в линейное неоднородное уравнение

$\dfrac{C'}{\sin^2 x}\sin x - \dfrac{2C\cos x}{\sin^3 x}\sin x + 2\dfrac{C}{\sin^2 x}\cos x = 1$ дает $C' = \sin x$, т.е. $dC = \sin x dx$ и $C(x) = -\cos x + C_1$

3) Используя найденное значение $C(x)$, получаем

$p = \dfrac{-\cos x + C_1}{\sin^2 x}$, т.е. $z^2 = \dfrac{1}{p} = \dfrac{\sin^2 x}{-\cos x + C_1}$.

Для определения постоянной C_1 используем начальные условия $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$. Таким образом,

$$z\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{y'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{y\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{-1}=-1 \text{ дает } z^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=1=\frac{1}{C_1} \text{ и } C_1=1$$

и

$\frac{y'}{y}=\pm\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$, т.к. y и y' при $x=\frac{\pi}{2}$ имеют разные знаки, то выбираем знак минус: $\frac{y'}{y}=\frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ – уравнение с разделяющимися переменными, т.е. $\frac{dy}{y}=\frac{-\sin dx}{\sqrt{1-\cos x}}$ и $\ln|y|=-2\sqrt{1-\cos x}+C_2$.

Подставляя сюда начальное значение $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, находим $\ln|1|=-2\sqrt{1-0}+C_2$, откуда $C_2=2$ и $\ln|y|=2-2\sqrt{1-\cos x}$, или, т.к. $y>0$, получаем частное решение, соответствующее поставленным начальным условиям: $y=\exp\left(2-2\sqrt{1-\cos x}\right)$. ❷

3.4. Задачи для самостоятельного решения

Решить задачу Коши:

57. (7-01) $2y^2y''\sin x-2y^2y'\cos x+(y')^3-2y(y')^2\sin x=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

58. (7-02) $4yy''+\left(4y^2-1\right)(y')^6+(y')^2=0$, $y(2)=1$, $y'(2)=-1$.

59. (7-03) $2y^2y''\cos x+2y^2y'\sin x+(y')^3-2y(y')^2\cos x=0$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$, $y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{\frac{3}{2}}$.

60. (7-04) $4yy'' + (y^2 - 9)(y')^6 + (y')^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -\frac{1}{2}$.

61. (6-11) $yy' + 2x(y')^2 = xyy''$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$.

62. (6-12) $3yy'' - 3(y')^2 = 4y(y')^5$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

63. (6-13) $yy' - xyy'' + x(y')^2 = 2x(y')^2 \ln x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -2$.

64. (6-14) $y''(y-1)^2 + (y')^2(y-1) = (y')^3$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

65. (8-21) $2x\left(y^2 y'' + (y')^3\right) = y'y^2 + 2xy(y')^2$, $y(1) = y'(1) = 1$.

66. (8-22) $y''(y-1) + y'(y-1)^2 = (y')^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$.

67. (8-23) $xyy'' = yy' + x(y')^2 + 4x^5 y^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.

68. (8-24) $2yy'' \ln y = (y')^2 (1 + 2\ln y)$, $y(0) = e$, $y'(0) = e$.

69. (8-31) $yy'' = (y')^2 \left(y^2 y' + 1\right)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$.

70. (8-32) $y''y^2x^2 - xy^2y' - x^2(y')^2 y - \frac{e^{-x}}{2}(y')^3 = 0$, $y(2) = 1$, $y'(2) = -2e$.

71. (8-33) $y'y'' - (y')^3 \operatorname{ctg} y + \cos^2 y \sin^4 y = 0$, $y(0) = \frac{\pi}{4}$, $y'(0) = \frac{1}{2}$.

72. (8-34) $yy'' - yy' - (y')^2\left(e^x + 1\right) = 0$, $y(1) = \operatorname{sh} 1$, $y'(1) = -1$.

73. (5-41) $x^2 yy'' - 2x^2(y')^2 + xyy' = 0$, $y(e) = 1$, $y'(e) = -\frac{1}{e}$.

74. (5-42) $xyy'' - 2x(y')^2 + yy' = 0$, $y(1) = y'(1) = 1$.

75. (5-43) $y^2 y'' - y(y')^2 - y^3 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

76. (5-44) $xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0$, $y(1) = 4$, $y'(1) = 1$.

77. (5-51) $3y^2 y'y'' + 2y(y')^3 = 4y^3$, $y(1) = -1$, $y'(1) = 1$.

78. (5-52) $4yy'' + (y')^2 + y(y')^4 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$.

79. (5-53) $2(y+1)y'' + (y')^2 = 2(y+1)$, $y(2) = 0$, $y'(2) = -1$.

80. (5-54) $yy'' + 3(y')^2 = y^2(y')^3$, $y(4) = 2$, $y'(4) = \frac{1}{4}$.

81. (5-61) $xyy'' + 2x^3(y')^2 - yy' = 0$, $y(1) = y'(1) = 1$.

82. (5-62) $y'' + (y')^2 \operatorname{tg} y - (y')^4 \sin 2y = 0$, $y(0) = \frac{\pi}{6}$, $y'(0) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.

83. (5-63) $xyy'' + x^4(y')^2 + 3yy' = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.

84. (5-64) $y'' - (y')^2 \operatorname{th} y + (y')^4 \operatorname{sh} 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

3.6. Ответы

57. $y = \exp\left\{2 - 2\sqrt{1 - \cos x}\right\}$.

58. $y = \dfrac{1}{2}\left[(7 - 3x)^{2/3} + 1\right]$.

59. $y = \exp\left\{\sqrt{2} - 2\sqrt{\sin x}\right\}$.

60. $y = \left(8 - \dfrac{3}{2}x\right)^{2/3} - 3$.

61. $y = \dfrac{2}{x^2 + 1}$.

62. $y = \left(1 - \dfrac{4}{3}x\right)^{3/4}$.

63. $y = 1 - 2\ln x$.

64. $y = 1 + e^{2x}$.

65. $y = e^{2\sqrt{x} - 2}$.

66. $y = \dfrac{2e^x}{2e^x - 1}$.

67. $y = e^{\frac{x^6 - 1}{6}}$.

68. $y = e^{\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2}$.

69. $y = \sqrt[3]{1 - 9x}$.

70. $y = \exp\left((4 - 2x)e^{\frac{x}{2}}\right)$.

71. $y = \operatorname{arctg}\left(e^x\right)$.

72. $y = \left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)\dfrac{(e - 1)^2}{2e}$.

73. $y = \dfrac{1}{\ln x}$.

74. $y = \dfrac{1}{1 - \ln x}$.

75. $y = e^{x + \frac{1}{2}x^2}$.

76. $y = 2\sqrt{x^2 + 3}$.

77. $y = \left(\dfrac{x-4}{3}\right)^3$.

78. $y = \left(\dfrac{5-3x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$.

79. $y = \left(\dfrac{x-4}{2}\right)^2 - 1$.

80. $y = \sqrt[3]{3x - 4}$.

81. $y = \dfrac{2x^2}{x^2 + 1}$.

82. $y = \arcsin\left(\dfrac{1}{2} - x\right)$.

83. $y = \dfrac{\left(2x^3 - 1\right)^{2/3}}{x^2}$.

84. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \iff x = \operatorname{sh} y$.

§ 4. ЭЛЕМЕНТЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

4.1. Основные понятия

Пусть M – некоторое множество функций.

Функционалом $J = J(y)$ называется переменная величина, зависящая от функции $y(x)$, если каждой функции $y(x) \in M$ по некоторому правилу поставлено в соответствие число.

Множество M функций $y(x)$, на котором определен функционал $J(y)$, называется его областью определения.

В приложениях часто встречаются функционалы вида

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx, \qquad (4.1)$$

где $F(x, y, p)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция для $\forall x \in [a, b]$ и $\forall (y, p) \in R^2_{(y,p)}$ – плоскости с декартовыми прямоугольными координатами y, p.

Будем обозначать через $C^1[a, b]$ пространство всех непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций с нормой $\|y\| = \max_{x\in[a,b]}|y(x)| + \max_{x\in[a,b]}|y'(x)|$.

Говорят, что функция $\hat{y}(x) \in M$, дает (слабый локальный) минимум функционала $J(y)$, если $\exists$ число $\varepsilon > 0$ такое, что $\forall y(x) \in M$, для которого $\|y(x) - \hat{y}(x)\| < \varepsilon$, выполнено неравенство $J(y) \geq J(\hat{y})$.

Говорят, что функция $\hat{y}(x) \in M$, дает (слабый локальный) максимум функционала $J(y)$, если $\exists$ число $\varepsilon > 0$ такое, что $\forall y(x) \in M$, для которого $\|y(x) - \hat{y}(x)\| < \varepsilon$, выполнено неравенство $J(y) \geq J(\hat{y})$.

4.2. Простейшая вариационная задача

Простейшей вариационной задачей называется задача нахождения слабого локального экстремума функционала (4.1) в классе непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций $y(x)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$y(a)=A\,,\ y(b)=B\,. \tag{4.2}$$

Если функция $\hat{y}(x)$ является решением простейшей вариационной задачи, то она на $[a,b]$ необходимо удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0 \tag{4.3}$$

(здесь $\dfrac{d}{dx}$ – полная производная по x).

Экстремалью называется всякое решение уравнения Эйлера (4.3).

4.3. Задача со свободным концом (концами)

Пусть функционал (4.1) рассматривается при граничном условии

$$y(a)=A\,. \tag{4.4}$$

Тогда говорят, что $x=a$ – закрепленный конец, $x=b$ – свободный конец.

Задачей со свободным концом называется задача нахождения слабого локального экстремума функционала (4.1) в классе непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций $y(x)$, удовлетворяющих условию (4.4).

Если функция $\hat{y}(x)$ является решением задачи со свободным концом, то она на $[a,b]$ необходимо удовлетворяет уравнению Эйлера (4.3) и граничному условию при $x=b$ вида

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\big(b,\hat{y}(b),\hat{y}'(b)\big)=0\,. \tag{4.5}$$

Если функционал $J(y)$ рассматривается при граничном условии

$$y(b)=B\,, \tag{4.6}$$

то $x=a$ – свободный конец. Функция $\hat{y}(x)$, доставляющая $J(y)$ слабый локальный экстремум, должна удовлетворять уравнению

Эйлера (4.3), граничному условию (4.6) и граничному условию при $x = a$:

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\left(a, \hat{y}(a), \hat{y}'(a)\right) = 0\,. \tag{4.7}$$

Если граничных условий не ставится, то есть оба конца свободные, то $\hat{y}(x)$ должна удовлетворять уравнению Эйлера (4.3) и граничным условиям (4.5), (4.7).

4.4. Решение уравнения Эйлера

Линейным дифференциальным уравнением *n*-го порядка с переменными коэффициентами называется дифференциальное уравнение вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \tag{4.8}$$

где $x \in [a, b]$ – независимая переменная; $y(x)$ – искомая функция; $f(x)$, $a_0(x)$, $a_1(x)$, …, $a_n(x)$ – заданные на $[a, b]$ функции, причем $\forall x : x \in [a, b]$ функция $a_0(x) \neq 0$.

Уравнением Эйлера называется линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами вида $a_k(x) = b_k x^{n-k}$, $k = \overline{0, n}$, где b_0, b_1, …, b_n - заданные числа, причем $b_0 \neq 0$:

$$b_0 x^n y^{(n)} + b_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1} x y' + b_n y = f(x). \tag{4.9}$$

Заменой $x = e^t$ $(t = \ln x)$ (4.9) сводится к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Действительно, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} = e^{-t}\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = $ $= e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) = e^{-2t}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$. Допустим, что *k*-я производная имеет вид $\frac{d^k y}{dx^k} = e^{-kt}\left(\frac{d^k y}{dt^k} + \alpha_1 \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} + \ldots + \alpha_{k-1}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{x^k}\left(\frac{d^k y}{dt^k} + \alpha_1 \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} + \ldots + \alpha_{k-1}\frac{dy}{dt}\right)$, где α_1, α_2, …, α_{k-1} - постоянные.

Тогда (k+1)-я производная будет равна $\frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^k y}{dx^k}\right)=$

$$=e^{-t}\frac{d}{dt}\left(\frac{d^k y}{dx^k}\right)=e^{-(k+1)t}\left(\frac{d^{k+1}y}{dt^{k|+1}}+(\alpha_1-k)\frac{d^k y}{dt^k}+\ldots-k\alpha_{k-1}\frac{dy}{dt}\right)=$$

$$\frac{1}{x^{k+1}}\left(\frac{d^{k+1}y}{dt^{k|+1}}+(\alpha_1-k)\frac{d^k y}{dt^k}+\ldots-k\alpha_{k-1}\frac{dy}{dt}\right).$$

Так как в преобразованном уравнении, в случае отсутствия кратных корней характеристического уравнения, решения имеют вид $y=e^{\lambda t}$, следовательно, в исходном уравнении они имеют вид $y=x^\lambda$. Поэтому можно непосредственно подставить его в уравнение Эйлера (4.9). Поскольку $x^k\frac{d^k x^\lambda}{dxk}=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)$ при $k\le\lambda$, то характеристическое уравнение имеет вид

$$b_0\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)+\ldots+b_{n-2}\lambda(\lambda-1)+b_{n-1}\lambda+b_n=0\,. \qquad (4.10)$$

Каждому простому корню λ уравнения (4.10) соответствует частное решение однородного уравнения Эйлера x^λ; каждому действительному корню λ кратности l $(l\ge 2)$ соответствует l линейно независимых частных решений однородного уравнения Эйлера x^λ, $x^\lambda\ln x$, ..., $x^\lambda(\ln x)^{l-1}$. В случае невещественных корней λ надо учитывать, что $x^{i\beta}=e^{i\beta\ln x}$, т.о., паре комплексно сопряженных корней $\alpha\pm i\beta$ уравнения (4.10) будут соответствовать два решения однородного уравнения Эйлера $x^\alpha\cos(\beta\ln x)$ и $x^\alpha\sin(\beta\ln x)$.

4.5. Примеры решения задач, предлагавшихся на экзаменационных контрольных работах

Пример 4.1. (5-01). Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал

$$\int_1^4 \left(\frac{9y^2}{x^2} - \frac{15yy'}{x} + 2(y')^2 - \frac{4y}{x\sqrt{x}} \right) dx, \ y(1) = 2, \ y(4) = -5.$$

① Составляем уравнение Эйлера $F_y - \dfrac{d}{dx} F_{y'} = 0$:

$$F(x, y, y') = \frac{9y^2}{x^2} - \frac{15yy'}{x} + 2(y')^2 - \frac{4y}{x\sqrt{x}},$$

$$F_y = \frac{18y}{x^2} - \frac{15y'}{x} - \frac{4}{x\sqrt{x}},$$

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = -\frac{15y'}{x} + \frac{15y}{x^2} + 4y'',$$

$$F_{y'} = -\frac{15y}{x} + 4y',$$

Уравнение Эйлера (4.3) имеет вид

$$\frac{18y}{x^2} - \frac{15y'}{x} - \frac{4}{x\sqrt{x}} + \frac{15y'}{x} - \frac{15y}{x^2} - 4y'' = 0 \text{ или}$$

$$4x^2 y'' - 3y = -4\sqrt{x}. \qquad (4.1.1)$$

Для его решения применяем стандартный алгоритм:

1. Решения однородного линейного уравнения ищем в виде $y = x^{\lambda}$.

   Характеристическое уравнение $4\lambda(\lambda - 1) - 3 = 0$ или

   $4\lambda^2 - 4\lambda - 3 = 0$.

   $(2\lambda)^2 - 2(2\lambda) - 3 = 0$, $(2\lambda - 3)(2\lambda + 1) = 0$.

   Его корни $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2}, \lambda_2 = \dfrac{3}{2}$.

   Соответствующее общее решение однородного уравнения

   $y_o = C_1 x^{-\frac{1}{2}} + C_2 x^{\frac{3}{2}}$.

2. Частное решение (случай нерезонансный) ищем в виде $y_ч = a\sqrt{x}$.

$y_ч{}' = \frac{a}{2\sqrt{x}}$, $y_ч{}'' = -\frac{a}{4x\sqrt{x}}$. Подставляя $y_ч$, $y_ч{}'$, $y_ч{}''$ в неоднородное уравнение Эйлера, получаем $-\frac{4x^2}{4x\sqrt{x}} - 3a\sqrt{x} = -4\sqrt{x}$, или $-4a = -4$, т.е. $a = 1$, и $y_ч = \sqrt{x}$.

3. Общее решение неоднородного уравнения Эйлера $y = \frac{C_1}{\sqrt{x}} + C_2 x\sqrt{x} + \sqrt{x}$.

Постоянные C_1 и C_2 находим из граничных условий $\begin{cases} C_1 + C_2 + 1 = 2, \\ \frac{C_1}{2} + 8C_2 + 2 = -5; \end{cases}$ или $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 + 16C_2 = -14; \end{cases}$ откуда получаем $15C_2 = -15$, т.е. $C_2 = -1$, $C_1 = 2$.

Стационарная точка $\hat{y} = \frac{2}{\sqrt{x}} - x\sqrt{x} + \sqrt{x}$.

4. Исследование на экстремум.

Пусть $h \in C^1[1;4]$, $h(1) = h(4) = 0$. Рассмотрим $\Delta J = J(\hat{y} + h) - J(\hat{y})$. Поскольку уравнение Эйлера выполняется на рассматриваемой кривой $\hat{y}$, то линейная по h часть приращения функционала $\delta J(\hat{y}) = 0$. В этом можно при желании убедиться непосредственно используя прием интегрирования по частям, граничные условия и уравнение Эйлера (на экстремали оно обращается в ноль).

Следовательно,

$$\Delta J = \int_1^4 \left(\frac{9h^2}{x^2} - \frac{15hh'}{x} + 2(h')^2 \right) dx.$$

Интегрируя по частям и учитывая равенства $h(1) = h(4) = 0$, находим

$$\int_1^4\left(-\frac{15hh'}{x}\right)dx=\int_1^4\left(-\frac{15}{2x}\right)dh^2=-\frac{15h^2}{2x}\bigg|_1^4+\int_1^4\left(-\frac{15h^2}{2x^2}\right)dx=$$

$$=-\int_1^4\frac{15h^2}{2x^2}dx.$$

Таким образом,

$\Delta J=\int_1^4\left(\frac{9h^2}{x^2}-\frac{15h^2}{2x^2}+2(h')^2\right)dx=\int_1^4\left(\frac{3h^2}{2x^2}+2(h')^2\right)dx\geq 0$, т.е. минимум. ❶

Пример 4.2. (4-24). Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения

$$J(y)=\int_1^{e^2}\left(x(y')^2+\frac{1}{x}y^2-2y'-2\frac{\ln x}{x}y\right)dx,\ y(1)=0.$$

② Задача со свободным концом. Составляем уравнение Эйлера $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$:

$$F(x,y,y')=x(y')^2+\frac{1}{x}y^2-2y'-2\frac{\ln x}{x}y,$$

$$F_y=\frac{2}{x}y-2\frac{\ln x}{x},\ F_{y'}=2xy'-2,\ \frac{d}{dx}F_{y'}=2y'+2xy''.$$

Уравнение Эйлера (4.3) имеет вид $\frac{2}{x}y-2\frac{\ln x}{x}-2y'-2xy''=0$

или

$$x^2y''+xy'-y=-\ln x. \tag{4.2.1}$$

Для его решения применяем стандартный алгоритм:

1. Заменой $x=e^t$ $(t=\ln x)$ сведем (4.2.1) к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$y'_x=y'_t\cdot t'_x=\frac{y'_t}{x},$$

$$y''_{xx}=\left(\frac{y'_t}{x}\right)'_x=-\frac{y'_t}{x^2}+\frac{(y'_t)'_x}{x}=\frac{y''_{tt}\cdot t'_x}{x}-\frac{y'_t}{x^2}=\frac{y''_{tt}-y'_t}{x^2}$$

и $y''_{tt} - y'_t + y'_t - y = -t$ или

$$y''_{tt} - y = -t \,. \tag{4.2.2}$$

2. Решения однородного линейного уравнения (4.2.2) ищем в виде $y = e^{\lambda t}$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 1 = 0$.

Его корни $\lambda_{1,2} = \pm 1$.

Соответствующее решение однородного уравнения $y_o = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$.

3. Частное решение (случай нерезонансный) ищем в виде $y_ч = at + b$.

Подставляя $y_ч$ в неоднородное уравнение Эйлера, получаем $-at - b = -t$, т.е. $a = 1$, $b = 0$, и $y_ч = t$.

4. Общее решение неоднородного уравнения Эйлера $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^t + t$ или, возвращаясь к независимой переменной x:

$$y = C_1 \frac{1}{x} + C_2 x + \ln x \,.$$

Постоянные C_1 и C_2 находим из следующих краевых условий:

$y(1) = 0$, $F_{y'}\big|_{x=e^2} = 0$.

Таким образом,

$$F_{y'}\big|_{x=e^2} = (2xy' - 2)\big|_{x=e^2} = 2e^2\left(-C_1 e^{-4} + C_2 + e^{-2}\right) - 2 = 0$$ и

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ -2e^{-2}C_1 + 2e^2 C_2 + 2 - 2 = 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ -C_1 + e^4 C_2 = 0; \end{cases} \quad \text{откуда}$$

получаем $\left(1 + e^2\right)C_2 = 0$, т.е. $C_2 = 0$, $C_1 = 0$.

Стационарная точка $\hat{y} = \ln x$.

5. Исследование на экстремум.

Пусть $h \in C^1\left[1, e^2\right]$, $h(1) = 0$ и $F_{y'}\big|_{x=e^2} = 0$. Рассмотрим $\Delta J = J(\hat{y} + h) - J(\hat{y})$. Поскольку уравнение Эйлера выполняется на рассматриваемой кривой $\hat{y}$, то линейная по h часть приращения функционала $\delta J(\hat{y}) = 0$. В этом можно при желании убедиться непосредственно используя прием интегрирования по частям, граничные условия и уравнение Эйлера. Следовательно, $\Delta J = \int_1^3 \left(x(h')^2 + \frac{1}{x} h^2 \right) dx \geq 0 \quad \left(x \in \left[1, e^2\right] \to x > 0\right)$, т.е. минимум. ❷

Пример 4.3. Найти стационарные точки функционала

$$J(y) = \int_1^2 \left[x(y')^2 - 8x^2 y' + 16xy - \frac{4}{x} y^2 \right] dx .$$

③ Задача без ограничений. Составляем уравнение Эйлера $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$: $x^2 y'' + xy' + 4y = 16x^2$.

Для его решения применяем стандартный алгоритм:

1. Решения однородного линейного уравнения ищем в виде $y = x^{\lambda}$.

   Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4 = 0$.
   Его корни $\lambda_1 = -2i, \lambda_2 = 2i$.
   Соответствующее решение однородного уравнения $y_o = C_1 \sin(2 \ln x) + C_2 \cos(2 \ln x)$.
2. Частное решение ищем в виде $y_ч = ax^2$: $y_ч = 2x^2$.
3. Общее решение неоднородного уравнения Эйлера $y = C_1 \sin(2 \ln x) + C_2 \cos(2 \ln x) + 2x^2$.

   Постоянные C_1 и C_2 находим из следующих краевых условий: $F_{y'}\big|_{x=1} = 0$, $F_{y'}\big|_{x=2} = 0$.

   Т.к. $F_{y'} = 2xy' - 8x^2 = 4C_1 \cos(2 \ln x) - 4C_2 \sin(2 \ln x)$, то

$$\begin{cases} 4C_1 = 0, \\ -4C_2 \sin(2 \ln 2) = 0, \end{cases} \quad \text{т.е. } C_1 = 0,\ C_2 = 0 .$$

   Стационарная точка $\hat{y} = 2x^2$.
4. Исследование на экстремум.

Пусть $h \in C^1[1,\,2]$, $F_{y'}\Big|_{x=1} = 0$ и $F_{y'}\Big|_{x=2} = 0$. Рассмотрим $\Delta J = J(\hat{y}+h) - J(\hat{y})$. Поскольку уравнение Эйлера выполняется на рассматриваемой кривой $\hat{y}$, то линейная по h часть приращения функционала $\delta J(\hat{y}) = 0$. В этом можно при желании убедиться непосредственно используя прием интегрирования по частям, граничные условия и уравнение Эйлера (на экстремали оно обращается в ноль). Следовательно,

$$\Delta J = \int_1^2 \left(x(h')^2 - \frac{4}{x}h^2 \right) dx .$$

Т.к., полагая $h = \varepsilon x^{\alpha}$, получаем $\Delta J =$ $= \varepsilon^2 \int_1^2 \left(x\left(\alpha x^{\alpha-1}\right)^2 - \frac{4}{x}x^{2\alpha} \right) dx \;\; = \varepsilon^2 \int_1^2 \left(\alpha^2 - 4\right) x^{2\alpha-1} dx$, т.е. $\Delta J > 0$ при $\alpha > 2$ и $\Delta J < 0$ при $\alpha < 2$, то
нет ни минимума, ни максимума. ❸

4.6. Задачи для самостоятельного решения

Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал:

85. (5-01) $\int_1^4 \left(\frac{9y^2}{x^2} - \frac{15yy'}{x} + 2(y')^2 - \frac{4y}{x\sqrt{x}} \right) dx$, $y(1) = 2$, $y(4) = -5$.

86. (5-02) $\int_1^2 \left(\frac{18yy'}{x} - \frac{7y^2}{x^2} + (y')^2 - \frac{2y}{x} \right) dx$, $y(1) = -\frac{1}{2}$, $y(2) = 4$.

87. (5-03) $\int_{1/4}^1 \left(\frac{11y^2}{x^2} - \frac{25yy'}{x} - 2(y')^2 - \frac{5y}{x^3} \right) dx$, $y\left(\frac{1}{4}\right) = 0$, $y(1) = -1$.

88. (5-04) $\int_1^2 \left(\frac{2yy'}{x} - \frac{7y^2}{x^2} - (y')^2 - \frac{12y}{x} \right) dx$, $y(1) = 3$, $y(2) = -1$.

89. (4-11) $\int_0^{\pi/2} \left[-(y')^2 + 4yy' - y^2 + 4y\sin^2 x \right] dx$, $y(0) = \frac{4}{5}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{6}{5}$.

90. (4-12) $\int_0^{\pi/2} \left[yy' - (y')^2 - y^2 - 4y'\cos^2 x \right] dx$, $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

91. (4-13) $\int\limits_0^{\pi/2}\left[(y')^2 - yy' + y^2 + 4y\cos^2 x\right]dx$, $y(0) = -\frac{6}{5}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{4}{5}$.

92. (4-14) $\int\limits_0^{\pi/2}\left[(y')^2 - 4yy' + y^2 - 2y'\sin^2 x\right]dx$, $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения:

93. (4-21) $J(y) = \int\limits_0^2\left[4e^{2x}y + 6e^{2x}y' - 4y^2 - (y')^2\right]dx$, $y(2) = 3e^4$.

94. (4-22) $J(y) = \int\limits_1^4\left[5y' + \frac{y}{x} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}y^2 - \sqrt{x}(y')^2\right]dx$, $y(1) = 2$.

95. (4-23) $J(y) = \int\limits_0^1\left[(y')^2 + y^2 - 8e^x y - 8xe^x y'\right]dx$, $y(1) = e$.

96. (4-24) $J(y) = \int\limits_1^{e^2}\left(x(y')^2 + \frac{1}{x}y^2 - 2y' - 2\frac{\ln x}{x}y\right)dx$, $y(1) = 0$.

Найти экстремаль и исследовать функционал на экстремум, определив знак приращения:

97. (5-31) $J(y) = \int\limits_1^2\left[\frac{6y}{x} - x^3(y')^2 - xy^2 + 2x^2yy'\right]dx$, $y(1) = 0$, $y(2) = -\frac{7}{4}$.

98. (5-32) $J(y) = \int\limits_1^2\left[2xy^2 + 2x^2yy' + x^2(y')^2 + 12x^2y\right]dx$, $y(1) = 2$,

$y(2) = 5$.

99. (5-33) $J(y) = \int\limits_1^e\left[x^2(y')^2 - 10yy' + 12y^2 + (24\ln x - 2)y\right]dx$, $y(1) = 1$,

$y(e) = -1 + e^3$.

100. (5-34) $J(y) = \int\limits_1^2\left[2yy' - x^2(y')^2 + 12x^2y\right]dx$, $y(1) = 3$, $y(2) = 0$.

101. (8-41) $J(y) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[y^2 - (y')^2 + 6y\sin 2x\right]dx$, $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

102. (8-42) $J(y)=\int\limits_0^1\left[\pi^2y^2-4(y')^2-2xy\right]dx$, $y(0)=0$, $y(1)=\dfrac{1}{\pi^2}$.

103. (8-43) $J(y)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(y')^2-y^2+10ye^{2x}\right]dx$, $y(0)=1$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{\pi}$.

104. (8-44) $J(y)=\int\limits_1^2\left[2y-yy'+x(y')^2\right]dx$, $y(1)=1$.

Исследовать на экстремум функционал:

105. (4-51) $\int\limits_1^3\left[4x^2(y')^2-2x\left(x^2+8\right)yy'-3x^2y^2\right]dx$, $y(1)=3$, $y(3)=\dfrac{1}{3}$.

106. (4-52) $\int\limits_1^2\left[3x^2y^2+2(x+1)\left(x^2-x+3\right)yy'-x^2(y')^2+4y\right]dx$, $y(1)=4$, $y(2)=7$.

107. (4-53) $\int\limits_1^4\left[9x^2(y')^2-4x\left(9+\sqrt{x}\right)yy'-3\sqrt{x}y^2\right]dx$, $y(1)=4$, $y(4)=16$.

108. (4-54) $\int\limits_2^4\left[\ln x\cdot y^2+2x(\ln x+5)yy'-x^2(y')^2\right]dx$, $y(2)=1$, $y(4)=4$.

109. (4-61) $\int\limits_1^2\left[3y^2+30xyy'-x^2(y')^2+20xy\right]dx$, $y(1)=-1$, $y(2)=-14$.

110. (4-62) $\int\limits_1^2\left[x^3(y')^2-4x^2yy'-xy^2-6xy\right]dx$, $y(1)=4$, $y(2)=7$.

111. (4-63) $\int\limits_1^2\left[y^2+26xyy'-x^2(y')^2+24y\right]dx$, $y(1)=0$, $y(2)=-7$.

112. (4-64) $\int\limits_1^2\left[x^3(y')^2-x^2yy'+2xy^2-6xy\right]dx$, $y(1)=0$, $y(2)=-1$.

4.7. Ответы

85. Уравнение Эйлера: $4x^2y''-3y=-4\sqrt{x}$, $\hat{y}=\frac{2}{\sqrt{x}}-x\sqrt{x}+\sqrt{x}$, $y=\frac{C_1}{\sqrt{x}}+C_2x\sqrt{x}+\sqrt{x}$, минимум.

86. Уравнение Эйлера: $2x^2y''-4y=-2x$, $\hat{y}=-\frac{2}{x}+x^2+\frac{x}{2}$, $y=\frac{C_1}{x}+C_2x^2+\frac{x}{2}$, минимум.

87. Уравнение Эйлера: $4x^2y''-3y=\frac{5}{x}$, $\hat{y}=-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}$, $y=\frac{C_1}{\sqrt{x}}+C_2x\sqrt{x}+\frac{1}{x}$, максимум.

88. Уравнение Эйлера: $x^2y''-6y=6x$, $\hat{y}=\frac{4}{x^2}-x$, $y=\frac{C_1}{x^2}+C_2x^3-x$, максимум.

89. Уравнение Эйлера: $y''-y=\cos 2x-1$, $\hat{y}=1-\frac{\cos 2x}{5}$, $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+1-\frac{\cos 2x}{5}$, максимум.

90. Уравнение Эйлера: $y''-y=2\sin 2x$, $\hat{y}=-\frac{2}{5}\sin 2x$, $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{2}{5}\sin 2x$, максимум.

91. Уравнение Эйлера: $y''-y=\cos 2x+1$, $\hat{y}=-1-\frac{\cos 2x}{5}$, $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-1-\frac{\cos 2x}{5}$, минимум.

92. Уравнение Эйлера: $y''-y=\sin 2x$, $\hat{y}=-\frac{1}{5}\sin 2x$, $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{5}\sin 2x$, минимум.

93. Уравнение Эйлера: $y''-4y=4e^{2x}$, $\hat{y}=(1+x)e^{2x}$, $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+xe^{2x}$, максимум.

94. Уравнение Эйлера: $2x^2 y'' + xy' - y = -\sqrt{x}$, $\hat{y} = x + \sqrt{x}$, $y = C_1 x + \dfrac{C_2}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$, максимум.

95. Уравнение Эйлера: $y'' - y = 4xe^x$, $\hat{y} = (x^2 - x + 1)e^x$, $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + (x^2 - x)e^x$, минимум.

96. Уравнение Эйлера: $x^2 y'' + xy' - y = -\ln x$, $\hat{y} = \ln x$, $y = C_1 x + \dfrac{C_2}{x} + \ln x$, минимум.

97. Уравнение Эйлера: $x^2 y'' + 3xy' - 3xy = -\dfrac{3}{x}$, $\hat{y} = -x + \dfrac{1}{x^2}$, $y = C_1 x + \dfrac{C_2}{x^3} + \dfrac{1}{x^2}$, максимум.

98. Уравнение Эйлера: $x^2 y'' + 2xy' = 6x^2$, $\hat{y} = x^2 + 1$, $y = C_1 + C_2 x + x^2$, минимум.

99. Уравнение Эйлера: $x^2 y'' + 2xy' - 12y = 12\ln x - 1$, $\hat{y} = x^3 - \ln x$, $y = C_1 x^3 + \dfrac{C_2}{x^4} - \ln x$, минимум.

100. Уравнение Эйлера: $x^2 y'' + 2xy' = -6x^2$, $\hat{y} = 4 - x^2$, $y = C_1 + \dfrac{C_2}{x} - x^2$, максимум.

101. Уравнение Эйлера: $y'' + y = -3\sin 2x$, $\hat{y} = \sin 2x$, $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \sin 2x$, максимум.

102. Уравнение Эйлера: $4y'' + \pi^2 y = x$, $\hat{y} = \dfrac{x}{\pi^2}$, $y = C_1 \cos\dfrac{\pi x}{2} + C_2 \sin\dfrac{\pi x}{2} + \dfrac{x}{\pi^2}$, максимум.

103. Уравнение Эйлера: $y'' + y = 5e^{2x}$, $\hat{y} = e^{2x}$, $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^{2x}$, минимум.

104. Уравнение Эйлера: $x^2 y'' + xy' = x$, $\hat{y} = x + \dfrac{2\ln x}{\ln 2 - 2}$, $y = C_1 + C_2 \ln x + x$, минимум.

105. Уравнение Эйлера: $x^2y''+2xy'-2y=0$, $\hat{y}=\dfrac{3}{x^2}$, $y=\dfrac{C_1}{x^2}+C_2x$, минимум.

106. Уравнение Эйлера: $\hat{y}=3x+1$, $x^2y''+2xy'-2y=-2$, $y=C_1x+\dfrac{C_2}{x^2}+1$, максимум.

107. Уравнение Эйлера: $x^2y''+2xy'-2y=0$, $\hat{y}=4x$, $y=\dfrac{C_1}{x^2}+C_2x$, минимум.

108. Уравнение Эйлера: $x^2y''+2xy'-6y=0$, $\hat{y}=\dfrac{1}{4}x^2$, $y=\dfrac{C_1}{x^3}+C_2x^2$, максимум.

109. Уравнение Эйлера: $x^2y''+2xy'-12y=-10x$, $\hat{y}=x-2x^3$, $y=C_1x^3+\dfrac{C_2}{x^4}+x$, $\Delta J=-\int\limits_1^2\left(12h^2+x^2(h')^2\right)dx\le 0$, максимум.

110. Уравнение Эйлера: $x^2y''+3xy'-3y=-3$, $\hat{y}=3x+1$, $y=C_1x+\dfrac{C_2}{x^3}+1$, $\Delta J=\int\limits_1^2\left(3xh^2+x^3(h')^2\right)dx\ge 0$, минимум.

111. Уравнение Эйлера: $x^2y''+2xy'-12y=-12$, $\hat{y}=1-x^3$, $y=C_1x^3+\dfrac{C_2}{x^4}+1$, $\Delta J=-\int\limits_1^2\left(12h^2+x^2(h')^2\right)dx\le 0$, максимум.

112. Уравнение Эйлера: $x^2y''+3xy'-3y=-3$, $\hat{y}=1-x$, $y=C_1x+\dfrac{C_2}{x^3}+1$, $\Delta J=\int\limits_1^2\left(3xh^2+x^3(h')^2\right)dx\ge 0$, минимум.

§ 5. УРАВНЕНИЯ, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

5.1. Способы решения

Уравнениями первого порядка, неразрешенными относительно производной, называются уравнения вида

$$F(x, y, y') = 0 . \tag{5.1}$$

Уравнение (5.1) можно решать следующими методами:

а) разрешить уравнение относительно y', т.е. из уравнения (5.1) выразить y' через x и y; получается одно или несколько уравнений вида $y' = f(x, y)$, каждое из которых надо решить;

б) методом введения параметра, позволяющим свести уравнение (5.1) к уравнению, разрешенному относительно производной.

5.2. Метод введения параметра

5.2.1. Уравнения, разрешенные относительно искомой функции. Пусть уравнение (5.1) можно разрешить относительно искомой функции *y*, т.е. записать в виде $y = f(x, y')$. Введя параметр $p = \dfrac{dy}{dx} = y'$, получим $y = f(x, p)$. Взяв полный дифференциал от обеих частей последнего равенства $dy = f_x(x, p)dx + f_p(x, p)dp$ и заменив dy через pdx, получим уравнение вида

$$M(x, p)dx + N(x, p)dp = 0 , \tag{5.2}$$

где $M(x, p) = f_x(x, p) - p$, $N(x, p) = f_p(x, p)$.

а) Если решение этого уравнения будет найдено в виде $p = p(x, C)$, то подставляя его в равенство $y = f(x, p)$, сразу получаем $y = f(x, p(x, C))$ – общее решение уравнения (5.1).

б) Если решение этого уравнения найдено в виде $x = \varphi(p, C)$, то получим решение исходного уравнения в параметрической записи $\begin{cases} x = \varphi(p, C), \\ y = f(\varphi(p, C), p). \end{cases}$ Исключив теперь параметр *p*, получим общее решение уравнения (5.1) в явном виде.

З а м е ч а н и е. Было бы ошибкой в левой части выражения $p = p(x, C)$ заменить p на y' и проинтегрировать уравнение $y' = p(x, C)$, т.к. решение последнего $y = \int p(x, C)dx + C_1$ в общем случае не удовлетворяет уравнению $y = f(x, p)$.

5.2.2. Уравнения, разрешенные относительно аргумента. Пусть теперь уравнение (5.1) можно разрешить относительно независимого переменного *x*, т.е. записать в виде $x = f(y, y')$. Аналогично рассмотренному выше случаю, введя параметр $p = \frac{dy}{dx} = y'$, получим $x = f(y, p)$. Взяв полный дифференциал от обеих частей последнего равенства $dx = f_y(y, p)dy + f_p(y, p)dp$ и заменив dx через $\frac{dy}{p}$, получим уравнение вида

$$M(y, p)dy + N(y, p)dp = 0, \tag{5.3}$$

где $M(y, p) = f_y(y, p) - \frac{1}{p}$, $N(y, p) = f_p(y, p)$.

а) Если решение этого уравнения будет найдено в виде $p = p(y, C)$, то подставляя его в равенство $x = f(y, p)$, сразу получаем $x = f(y, p(y, C))$ – общее решение уравнения (5.1).

б) Если решение этого уравнения найдено в виде $y = \psi(p, C)$, то получим решение исходного уравнения в параметрической записи $\begin{cases} y = \psi(p, C), \\ x = f(\psi(p, C), p). \end{cases}$ Исключив теперь параметр *p*, получим общее решение уравнения (5.1) в явном виде.

З а м е ч а н и е. В некоторых задачах удобно вводить параметр $p = \frac{1}{y'} = \frac{dx}{dy}$, тогда $dx = pdy$.

5.3. Особые решения

Задача Коши для уравнения (5.1) ставится следующим образом: задана точка $(x_0, y_0, p_0) \in G$, для которой $F(x_0, y_0, p_0) = 0$. Требуется найти такое решение уравнения (5.1), которое удовлетворяет *начальным условиям*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = p_0. \tag{5.4}$$

Достаточные условия существования и единственности задачи Коши дает

Теорема. *Пусть в области G функция* $F(x, y, p)$ *непрерывно дифференцируема и пусть* $\dfrac{\partial F(x_0, y_0, p_0)}{\partial p} \neq 0$. *Тогда найдется такое число* $\delta > 0$, *что при* $|x - x_0| \leq \delta$ *решение задачи Коши (5.1), (5.4) существует и единственно.*

Особым решением уравнения (5.1) на множестве I называется его решение $y_o = g(x)$, если $\forall x_0 \in I$ через точку его графика $(x_0, g(x_0))$ проходит другое решение, отличное от него в сколь угодно малой окрестности этой точки, и имеющее ту же касательную.

Для существования особого решения необходимо, чтобы в области G нарушались условия теоремы существования и единственности задачи Коши, т.е. для непрерывно дифференцируемой функции $F(x, y, p)$ необходимо

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ \dfrac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0 \end{cases}, \tag{5.5}$$

Множество точек $(x, y, p) \in G$, удовлетворяющее условию $(F(x, y, p) = 0) \cap \left(\dfrac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0 \right)$, называется p-дискриминантным множеством уравнения (5.1).

График особого решения уравнения (5.1) лежит в p-дискриминантном множестве.

Однако p-дискриминантное множество не всегда задает особое решение:

а) p-дискриминантное множество не обязано быть гладкой кривой,

б) p-дискриминантное множество не обязано определять решение уравнения (5.1).

Для нахождения особых решений требуется:

1. Найти решение (5.1).

2. Найти p-дискриминантное множество, исключив параметр p из системы $\begin{cases} F(x,y,p)=0, \\ \dfrac{\partial F(x,y,p)}{\partial p}=0. \end{cases}$

3. Отобрать те из решений уравнения (5.1), которые лежат в p-дискриминантном множестве.

4. Для отобранных решений проверить выполнение определения особого решения, т.е. проверить выполнение при $\forall x_0 \in I$ условий касания $\begin{cases} y_o(x_0)=y(x_0,C) \\ y_o'(x_0)=y'(x_0,C) \end{cases}$, где $y(x,C)$ - семейство решений (5.1), не совпадающих с $y_o(x)$.

5.4. Примеры решения задач, предлагавшихся на экзаменационных контрольных работах

Пример 5.1. (5-24). Решить уравнение, найти особые решения, начертить интегральные кривые

$$3(y')^2+8xy'+16x^2+16y=0 .$$

① 1. Вводим параметр $p=\dfrac{dy}{dx}$. Тогда $3p^2+8xp+16x^2+16y=0$, или

$$y=-\frac{3p^2+8xp+16x^2}{16} . \qquad (5.1.1)$$

Взяв полный дифференциал от обеих частей последнего равенства и заменив dy через pdx, получаем

$p=-\frac{3}{8}pp'-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}xp'-2x$, или $\frac{3}{2}p+\frac{3}{8}pp'=-2x\left(\frac{1}{4}p'+1\right)$, откуда $\left(2x+\frac{3}{2}p\right)\left(\frac{1}{4}p'+1\right)=0$.

Возможны два случая:

1) $p=-\frac{4}{3}x$. Из (5.1.1) получаем, что $y=-\frac{3}{16}\frac{16}{9}x^2+\frac{1}{2}x\frac{4}{3}x-x^2$, следовательно, $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x^2-x^2$, или $y=-\frac{2}{3}x^2$.

2) $p'+4=0$. Интегрируя, находим $p=-4x+C$, $C\in\mathrm{R}$. Подставляя $p=-4x+C$ в (5.1.1), определяем y: $y=-\frac{3\left(16x^2-8xC+C^2\right)}{16}-\frac{x(-4x+C)}{2}-x^2$, или $y=-3x^2+$ $+\frac{3xC}{2}-\frac{3C^2}{16}+2x^2-\frac{xC}{2}-x^2$, или $y=-2x^2+xC-\frac{3C^2}{16}$.

2. Найдем p-дискриминантное множество, исключив параметр p из уравнений

$$3p^2+8xp+16x^2+16y=0 \qquad (5.1.1^*)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(3p^2+8xp+16x^2+16y\right)=0. \qquad (5.1.2)$$

Из второго уравнения системы $\begin{cases}3p^2+8xp+16x^2+16y=0,\\ 6p+8x=0\end{cases}$ следует, что $p=-\frac{4}{3}x$, поэтому $y=-\frac{2}{3}x^2$.

Так как $y=-\frac{2}{3}x^2$ – решение, то это кандидат в особые решения.

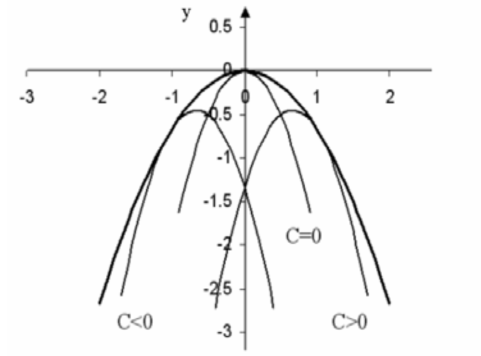


Рис. 5.1

3. Докажем, что это решение особое (проверяем касание):

$\forall x_0 \in \mathrm{R}$ $\begin{cases} -\dfrac{2}{3}x_0^2 = -2x_0^2 + x_0 C - \dfrac{3C^2}{16}, \\ -\dfrac{4}{3}x_0 = -4x_0 + C, \end{cases}$ следовательно, при $C = \dfrac{8}{3}x_0$ в тождество обращается второе уравнение и первое уравнение: $-\dfrac{2}{3}x_0^2 = -2{x_0}^2 + \dfrac{8}{3}x_0^2 - \dfrac{3}{16}\cdot\dfrac{64}{9}{x_0}^2 = \dfrac{-6+8-4}{3}{x_0}^2$.

Через точку $\left(x_0, -\dfrac{2}{3}{x_0}^2\right)$ проходит решение $y = -2x^2 + xC - \dfrac{3C^2}{16}$ при $C = \dfrac{8}{3}x_0$, касающееся решения $y = -\dfrac{2}{3}x^2$ в этой точке и не совпадающее с ним ни в какой окрестности этой точки при $x \neq x_0$.

Интегральные кривые представлены на рис. 5.1, где особое решение отмечено жирной линией. ❶

Пример 5.2. (6-33). Решить уравнение, найти особые решения, начертить интегральные кривые $2xy' + 2y - y'y^2 - \dfrac{2}{y'} = 0$.

② 1. Вводим параметр $p=\dfrac{1}{y'}=\dfrac{dx}{dy}$. Тогда $2\dfrac{x}{p}+2y-\dfrac{y^2}{p}-2p=0$, или

$$x=\frac{y^2}{2}+p^2-yp. \qquad (5.2.1)$$

Взяв полный дифференциал от обеих частей последнего равенства и заменив dx через pdy, получаем $pdy=(y-p)dy+(2p-y)dp$, или $(2p-y)dy-(2p-y)dp=0$, откуда $(2p-y)(dy-dp)=0$.

Возможны два случая:

1) $p=\dfrac{y}{2}$. Из (5.2.1) получаем, что $x=\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}$, следовательно $x=\dfrac{y^2}{4}$.
2) $dy-dp=0$, или $dy=dp$. Интегрируя, находим $y+C=p$, $C\in\mathrm{R}$. Подставляя $p=y+C$ в (5.2.1), определяем x: $x=\dfrac{y^2}{2}+(y+C)^2-y(y+C)$, или $x=\dfrac{y^2}{2}+y^2+2Cy+C^2-y^2-yC$, или $x=\dfrac{y^2}{2}+Cy+C^2$, или $x(y,C)=\dfrac{1}{2}(y+C)^2+\dfrac{C^2}{2}$.

2. Найдем p-дискриминантное множество, исключив параметр p из уравнений

$$x-\frac{y^2}{2}-p^2+yp=0 \qquad (5.1.1^*)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(x-\frac{y^2}{2}-p^2+yp\right)=0. \qquad (5.1.2)$$

Из второго уравнения системы $\begin{cases} x-\dfrac{y^2}{2}-p^2+yp=0, \\ -2p+y=0 \end{cases}$ следует,

что $p=\dfrac{y}{2}$, поэтому $x=\dfrac{y^2}{4}$.

Так как $x=\dfrac{y^2}{4}$ – решение, то это кандидат в особые решения.

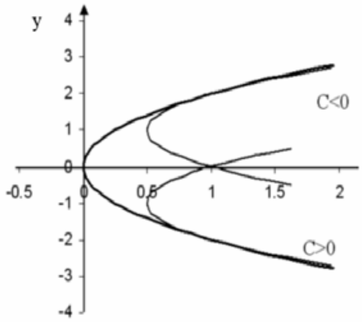


Рис. 5.2

3. Докажем, что это решение особое (проверяем касание):

$\forall y_0 \in \mathrm{R}$ $\begin{cases} \dfrac{y_0^2}{4}=\dfrac{1}{2}(y_0+C)^2+\dfrac{C^2}{2}, \\ \dfrac{y_0}{2}=y_0+C, \end{cases}$ следовательно, при $C=-\dfrac{y_0}{2}$

в тождество обращается второе уравнение и первое уравнение:

$$\frac{y_0^2}{4}=\frac{1}{2}\left(y_0+-\frac{y_0}{2}\right)^2+\frac{\left(-\dfrac{y_0}{2}\right)^2}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right){y_0}^2.$$

Через точку $\left(\dfrac{y_0^2}{4}, y_0\right)$ проходит решение $x(y,C)=\dfrac{1}{2}(y+C)^2+\dfrac{C^2}{2}$ при $C=-\dfrac{y_0}{2}$, касающееся решения

$x=\dfrac{y^2}{4}$ в этой точке и не совпадающее с ним ни в какой окрестности этой точки при $y\neq y_0$.

Интегральные кривые представлены на рис. 5.2, где особое решение отмечено жирной линией. ❷

Пример 5.3. (8-01). Найти общее решение, найти особые решения, начертить интегральные кривые уравнения $(6x+6y)^5=y'(y'+6)^5$.

③ 1. Вводим параметр $p=\dfrac{dy}{dx}$. Тогда

$$6x+6y=p^{\frac{1}{5}}(p+6). \qquad (5.3.1)$$

Взяв полный дифференциал от обеих частей последнего равенства и заменив dy через pdx, получаем $6(1+p)=\dfrac{1}{5}p^{-\frac{4}{5}}p'(p+6)+p^{\frac{1}{5}}p'$ или $6(1+p)p^{\frac{4}{5}}=\dfrac{6}{5}p'(p+1)$, откуда $(1+p)\left(p^{\frac{4}{5}}-\dfrac{p'}{5}\right)=0$.

Возможны два случая:

1) $p=-1$. Из (5.3.1) получаем $y=-x-\dfrac{5}{6}$.

2) $p'=5p^{\frac{4}{5}}$. Это уравнение с разделяющимися переменными: $\dfrac{1}{5}p^{-\frac{4}{5}}dp=dx$. Интегрируя, находим $p^{\frac{1}{5}}=x+C$, $C\in\mathrm{R}$. Подставляя $p=(x+C)^5$ в (5.3.1), определяем y: $y=-x+\dfrac{1}{6}(x+C)\left((x+C)^5+6\right)$, или $y=C+\dfrac{1}{6}(x+C)^6$.

2. Найдем p-дискриминантное множество, исключив параметр p из уравнений

$$(6x+6y)^5=p(p+6)^5 \qquad (5.3.1^*)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial p}\left((6x+6y)^5 - p(p+6)^5\right) = 0\,. \qquad (5.3.2)$$

Из второго уравнения системы $\begin{cases} (6x+6y)^5 = p(p+6)^5, \\ (p+6)^5 + 5p(p+6)^4 = 0 \end{cases}$ получаем $6(p+1)(p+6)^4 = 0$, следовательно, $\begin{matrix} 1)\ p=-6, \\ 2)\ p=-1. \end{matrix}$

1) Если $p=-6$, то согласно (5.3.1*) $y=-x$ – это не решение исходного дифференциального уравнения.

2) Если $p=-1$, то согласно (5.3.1*) $y=-x-\dfrac{5}{6}$.

Так как $y=-x-\dfrac{5}{6}$ – решение, то это единственный кандидат в особые решения.

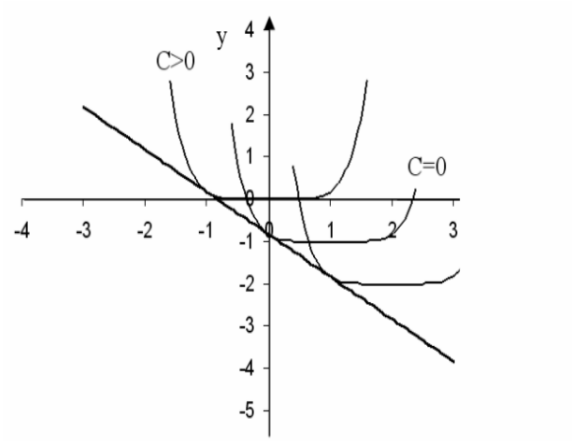


Рис. 5.3

3. Докажем, что это решение особое (проверяем касание):

$$\forall x_0 \in \mathrm{R} \quad \begin{cases} -x_0 - \dfrac{5}{6} = C + \dfrac{1}{6}(x_0+C)^6, \\ -1 = (x_0+C)^5, \end{cases}$$

следовательно, $-1 = x_0 + C$, т.е. при $C = -x_0 - 1$ в тождество обращается второе уравнение и первое уравнение.

Через точку $\left(x_0, -x_0 - \frac{5}{6}\right)$ проходит решение $y = C + \frac{1}{6}(x + C)^6$ при $C = -x_0 - 1$, касающееся решения $y = -x - \frac{5}{6}$ в этой точке и не совпадающее с ним ни в какой окрестности этой точки при $x \neq x_0$.

Интегральные кривые представлены на рис. 5.3, где особое решение отмечено жирной линией. ❸

5.5. Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения, найти особые решения, начертить интегральные кривые:

113. (8-01) $(6x + 6y)^5 = y'(y' + 6)^5$.
114. (8-02) $y'(y' + 4)^3 + (4x + 4y)^3 = 0$.
115. (8-03) $(2y - 2x)^5 + y'(y' - 6)^5 = 0$.
116. (8-04) $y'(y' - 4)^3 = (y - x)^3$.
117. (7-11) $(y')^2 - y + \frac{4}{x} y' = 2\ln x - \frac{4}{x^2}$.
118. (7-12) $4y - 4y' + (y')^2 + 12 = 8x$.
119. (7-13) $(y')^2 - y + 2e^{-x} y' + e^{-2x} + e^{-x} = 0$.
120. (7-14) $5x^3 y' - 10x^2 y + (y')^2 = 0$.
121. (5-21) $3(y')^2 - 8xy' + 8x^2 - 4y = 0$.
122. (5-22) $(y')^2 + 8xy' - 16x^2 - 16y = 0$.
123. (5-23) $(y')^2 + 8xy' + 8x^2 - 4y = 0$.
124. (5-24) $3(y')^2 + 8xy' + 16x^2 + 16y = 0$.
125. (6-31) $27(y')^3 \cdot x^2 + 3xy' - y = 0$.
126. (6-32) $\frac{y}{y'} - \ln y' - x = 0$.
127. (6-33) $2xy' + 2y - y'y^2 - \frac{2}{y'} = 0$.
128. (6-34) $xy' + \ln x - \ln y' - 2y = 0$.

129. (6-41) $2y(y'+2)-x(y')^2=0$.

130. (6-42) $x(y')^2=yy'+1$.

131. (6-43) $(y')^2-yy'+e^x=0$.

132. (6-44) $(y')^3-4xyy'+8y^2=0$.

133. (8-51) $4x^2y-2x^3y'+(y')^2=0$.

134. (8-52) $3(y')^3-3x^2y'+4xy=0$.

135. (8-53) $x^2(y')^2-4xy'+\dfrac{2y}{\ln x}=0$, $x>1$.

136. (8-54) $2y(y')^2+2x^2-x(y')^3=0$.

137. (8-61) $x(y')^3-y(y')^2+1=0$.

138. (8-62) $\ln y'-xy'+y=0$.

139. (8-63) $x(y')^{3/2}-y(y')^{1/2}+1=0$, $x>0$.

140. (8-64) $y'-\ln(xy'-y)=0$.

5.6. Ответы

113. $y=-x-\dfrac{5}{6}$ – особое решение; $y(x,\ C)=\dfrac{1}{6}(x+C)^6+C$.

114. $y=\dfrac{3}{4}-x$ – особое решение; $y(x,\ C)=-\dfrac{1}{4}(x+C)^4+C$.

115. $y=x+\dfrac{5}{2}$ – особое решение; $y(x,\ C)=3C-\dfrac{1}{2}\left(C-\dfrac{x}{3}\right)^6$.

116. $y=x-3$ – особое решение; $y(x,\ C)=\left(\dfrac{x}{4}+C\right)^4-4C$.

117. $y=-2\ln x$ – особое решение; $y(x,\ C)=\left(\dfrac{x}{2}+C\right)^2-2\ln x$.

118. $y=2x-2$ – особое решение; $y(x,\ C)=-(x+C)^2-2C-3$.

119. $y=e^{-x}$ – особое решение; $y(x,\ C)=\left(\dfrac{x}{2}+C\right)^2+e^{-x}$.

120. $y=-\frac{5}{8}x^4$ – особое решение; $y(x,\ C)=Cx^2+\frac{2}{5}C^2$.

121. $y=\frac{2}{3}x^2$ – особое решение; $y(x,\ C)=x^2+Cx+\frac{3}{4}C^2$.

122. $y=-2x^2$ – особое решение; $y(x,\ C)=2x^2+Cx+\frac{C^2}{16}$.

123. $y=-2x^2$ – особое решение; $y(x,\ C)=-(x-C)^2+2C^2$.

124. $y=-\frac{2}{3}x^2$ – особое решение; $y(x,\ C)=-2x^2+xC-\frac{3C^2}{16}$.

125. $x=-\frac{27}{4}y^2$ – особое решение, $x(y,\ C)=\left(\frac{y}{C}-C^2\right)^3$, $y=0$.

126. $x=-1-\ln(-y)$, $y<0$ – особое решение, $x(y,\ C)=\frac{y}{C}-\ln C$, $C>0$.

127. $x=\frac{y^2}{4}$ – особое решение, $x(y,\ C)=\frac{1}{2}(y+C)^2+\frac{C^2}{2}$.

128. $y=\ln x+\frac{1}{2}$, $x>0$ – особое решение, $y(x,\ C)=\frac{Cx^2}{2}-\frac{\ln C}{2}$, $C>0$.

129. $y=0$, $y=-4x$ – особые решения, $y(x,\ C)=\frac{(C-x)^2}{C}$.

130. $y=\pm 2\sqrt{-x}$, $x\le 0$ – особое решение, $y(x,\ C)=\frac{x-C^2}{C}$.

131. $y=\pm 2e^{\frac{1}{2}x}$ – особое решение, $y(x,\ C)=Ce^x+\frac{1}{C}$.

132. $y=\frac{4x^3}{27}$, $y=0$ – особые решения, $y(x,\ C)=C(x-C)^2$.

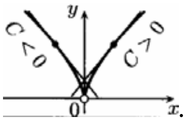
133. $y=\frac{1}{4}x^4$ – особое решение, $y(x,\ C)=Cx^2-C^2$.

134. $y=\pm\frac{x^2}{2\sqrt{3}}$ – особые решения, $y(x,\ C)=\frac{3}{4}\left(Cx^{\frac{4}{3}}-C^3\right)$.

135. $y = 2\ln x$ – особое решение, $y(x,\ C) = 2C\sqrt{\ln x} - \dfrac{C^2}{2}$.

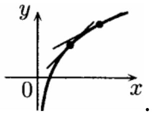
136. $y = -\dfrac{3x^{\frac{4}{3}}}{2\sqrt[3]{2}}$ – особое решение, $y(x,\ C) = \dfrac{Cx^2}{2} - \dfrac{1}{C^2}$.

137. $y = 3\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{4}}$, $x \neq 0$ – особое решение, $y(x,\ C) = Cx + \dfrac{1}{C^2}$, $C \neq 0$;



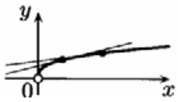
.

138. $y = 1 + \ln x$ – особое решение, $y(x,\ C) = Cx - \ln C$, $C > 0$;

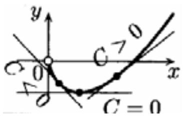


.

139. $y = 3\sqrt[3]{\dfrac{x}{4}}$, $x > 0$ – особое решение, $y(x,\ C) = Cx + \dfrac{1}{\sqrt{C}}$, $C > 0$;



140. $y = x\ln x - x$ – особое решение, $y(x,\ C) = Cx - e^C$;



§ 6. УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

6.1. Решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка

Линейным однородным уравнением первого порядка в частных производных называется уравнение вида

$$a_1(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + a_n(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0\,, \tag{6.1}$$

где $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \Omega \subset \mathrm{R}^n$, $a_1(\vec{x})$, $a_2(\vec{x})$, $\ldots$, $a_n(\vec{x})$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции в области, причем в каждой точке Ω имеет место $a_1{}^2(\vec{x}) + a_2{}^2(\vec{x}) + \ldots + a_n{}^2(\vec{x}) \neq 0$; $u = u(\vec{x})$ – непрерывно дифференцируемая функция, подлежащая определению.

З а м е ч а н и е. Уравнение (6.1) имеет очевидное решение $u = C \quad (C = \text{const})$.

Характеристической системой обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме, соответствующей однородному линейному уравнению с частными производными (6.1), называется система

$$\frac{dx_1}{a_1(\vec{x})} = \frac{dx_2}{a_2(\vec{x})} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n(\vec{x})}\,. \tag{6.2}$$

Характеристической системой однородного уравнения (6.1) в нормальной форме Коши называется автономная система для функций $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, … , $x_n = x_n(t)$ вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(\vec{x}), \\ \dot{x}_2 = a_2(\vec{x}), \\ \quad\vdots \\ \dot{x}_n = a_n(\vec{x}), \end{cases} \tag{6.3}$$

где t – независимая переменная.

З а м е ч а н и е. Если в некоторой точке $\vec{x}^{\,0} \in \Omega$ имеет место $a_m\left(\vec{x}^{\,0}\right) \neq 0$, т.е. в силу непрерывности функции $a_m(\vec{x})$ найдется такая окрестность точки $\vec{x}^{\,0}$ в области Ω, в которой $a_m(\vec{x}) \neq 0$, то в качестве независимой переменной можно выбрать x_m. При $t = x_m$ система в нормальной форме Коши имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx_m} = \dfrac{a_1(\vec{x})}{a_m(\vec{x})}, \\ \dfrac{dx_2}{dx_m} = \dfrac{a_2(\vec{x})}{a_m(\vec{x})}, \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dx_m} = \dfrac{a_n(\vec{x})}{a_m(\vec{x})}. \end{cases} \tag{6.3'}$$

Первым интегралом системы (6.2) (или (6.3)) называется непрерывно дифференцируемая в Ω функция $u(\vec{x})$ такая, что для любого решения $\vec{x}(t)$ системы (6.2) (или (6.3)) $u(\vec{x}(t)) = \text{const}$.

Непрерывно дифференцируемая в Ω функция $u(\vec{x})$ является решением уравнения (6.1) тогда и только тогда, когда она является первым интегралом характеристической системы (6.2).

Если есть несколько первых интегралов $u_1(\vec{x})$, … , $u_k(\vec{x})$, то произвольная непрерывно дифференцируемая функция $\Phi(u_1(\vec{x}), \ldots, u_k(\vec{x}))$ – тоже первый интеграл.

Пусть $u_1(\vec{x})$, … , $u_k(\vec{x})$ – первые интегралы характеристической системы (6.2), определенные в некоторой окрестности точки $\vec{y} \in \Omega$. Они называются независимыми в точке $\vec{y}$, если

$$Rg\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}(\vec{y}) & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n}(\vec{y}) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial u_k}{\partial x_1}(\vec{y}) & \cdots & \dfrac{\partial u_k}{\partial x_n}(\vec{y}) \end{pmatrix} = k .$$

Для каждой точки $\vec{y} \in \Omega$ существует ровно $(n-1)$ независимых в $\vec{y}$ первых интегралов (6.2).

Общее решение (6.1) имеет вид

$$u(\vec{x}) = \Phi(u_1(\vec{x}), \ldots, u_{n-1}(\vec{x})), \tag{6.4}$$

где $u_1(\vec{x}), \ldots, u_{n-1}(\vec{x})$ – независимые первые интегралы характеристической системы (6.2), $\Phi(u_1(\vec{x}), \ldots, u_{n-1}(\vec{x}))$ - непрерывно дифференцируемая функция.

Чтобы решить уравнение (6.1), надо найти $(n-1)$ независимых первых интеграла характеристической системы (6.2) (или (6.3)) $u_1(\vec{x}), \ldots, u_{n-1}(\vec{x})$. Это можно сделать, например, путем отыскания интегрируемых комбинаций, используя свойство равных дробей: если $\dfrac{dx_1}{a_1} = \dfrac{dx_2}{a_2} = \cdots = \dfrac{dx_n}{a_n} = t$, то при любых $k_1, k_2, \ldots, k_n$ таких, что $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n \neq 0$, имеем $\dfrac{k_1 dx_1 + k_2 dx_2 + \ldots + k_n dx_n}{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n} = t$.

6.2. Задача Коши для линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка

Достаточные условия существования и единственности задачи Коши дает

Теорема. *Пусть в области* Ω *множество* Π *задано уравнением* $g(\vec{x}) = 0$, *где функция* $g(\vec{x})$ *непрерывна в* Ω *вместе с* $\dfrac{\partial g(\vec{x})}{\partial \vec{x}}$. *Пусть точка* $\vec{y} \in \Pi$. *Пусть в точке* $\vec{y}$ *имеет место* $\left.\left(a_1(\vec{x}) \dfrac{\partial g}{\partial x_1} + a_2(\vec{x}) \dfrac{\partial g}{\partial x_2} + \ldots + a_n(\vec{x}) \dfrac{\partial g}{\partial x_n} \right)\right|_{\vec{x}=\vec{y}} \neq 0$. *Пусть в некоторой окрестности точки* $\vec{y}$ *задана непрерывно дифференцируемая функция* $\varphi(\vec{x})$. *Тогда в некоторой окрестности точки* $\vec{y}$ *существует и притом единственное решение* $u(\vec{x})$ *уравнения (6.1), удовлетворяющее условию* $u(\vec{x}) = \varphi(\vec{x})$ *на* Π.

З а м е ч а н и е. Поверхность Π, задаваемая уравнением $g(\vec{x}) = 0$, называется начальной поверхностью.

В дальнейшем будем рассматривать трехмерное пространство: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Omega \subset \mathrm{R}^3$.

Пусть уравнение $g(x, y, z) = 0$ задает в области Ω гладкую поверхность Π, и $\varphi(x, y, z)$ – непрерывно дифференцируемая функция, заданная на Π.

Задача Коши для уравнения в частных производных (6.1) в R^3 ставится следующим образом: среди всех решений этого уравнения найти такое решение

$$u = f(x, y, z), \tag{6.5}$$

которое удовлетворяет начальным условиям:

$$u = \varphi(x, y, z) \text{ при } g(x, y, z) = 0. \tag{6.6}$$

Для решения задачи Коши:

1. Составляем соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (6.2), или (6.3), и находим два независимых первых интеграла
$$u_1(x, y, z),\ u_2(x, y, z). \tag{6.7}$$

2. Из системы:
$$\begin{cases} u_1(x, y, z) = u_1, \\ u_2(x, y, z) = u_2, \\ u = \varphi(x, y, z), \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{6.8}$$
исключаем x, y, z и находим u как функцию u_1 и u_2:
$$u = \Phi(u_1, u_2).$$

3. Подставляем в последнее выражение вместо u_1 и u_2 первые интегралы (6.7):
$$u(x, y, z) = \Phi(u_1(x, y, z), u_2(x, y, z)).$$

Т.о., получаем функцию, которая и дает решение задачи Коши.

6.3. Примеры решения задач, предлагавшихся на экзаменационных контрольных работах

Пример 6.1. (7-24). Найти все решения уравнения $\left(y^2+1\right)z\frac{\partial u}{\partial x}+\left(x^2-1\right)z\frac{\partial u}{\partial y}+\left(x^2-1\right)y\frac{\partial u}{\partial z}=0$ и решить задачу Коши: $u=z^2$ при $y=x$ $\left(x>1,\ z>0\right)$.

① 1. Составляем соответствующую (характеристическую) систему обыкновенных дифференциальных уравнений (в симметрической форме):

$$\frac{dx}{\left(y^2+1\right)z}=\frac{dy}{\left(x^2-1\right)z}=\frac{dz}{\left(x^2-1\right)y}.$$

Найдем 2 независимых первых интеграла:

1) $\frac{dy}{\left(x^2-1\right)z}=\frac{dz}{\left(x^2-1\right)y}$, $ydy=zdz$, $\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{2}z^2+C$. Первый интеграл $u_1=y^2-z^2$.

2) $\frac{dx}{\left(y^2+1\right)z}=\frac{dy}{\left(x^2-1\right)z}$, $\left(x^2-1\right)dx=\left(y^2+1\right)dy$, $\frac{1}{3}x^3-x=$ $=\frac{1}{3}y^3+y+C$. Первый интеграл $u_2=y^3-x^3+3(x+y)$.

3) Общее решение имеет вид: $u=\Phi\left(y^2-z^2, y^3-x^3+3(x+y)\right)$.

2. $\left.\begin{array}{l} u_1=y^2-z^2, \\ u_2=y^3-x^3+3(x+y), \\ u=z^2, \\ y=x, \end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l} z^2=y^2-u_1, \\ 6y=u_2, \\ u=z^2, \\ y=x. \end{array}\right\}$

3. Откуда $\left.u\right|_{y=x}=\left.z^2\right|_{y=x}=\left(\frac{u_2}{6}\right)^2-u_1=\frac{u_2^{\,2}}{36}-u_1$.

4. Подставляя значения первых интегралов, получаем решение задачи Коши:

$$u=z^2-y^2+\frac{\left(y^3-x^3+3(x+y)\right)^2}{36}$$ ❶

Пример 6.2. (6-01). Найти общее решение уравнения $-y\frac{\partial u}{\partial x}+4x\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{4x^2-y^2}{xy}\frac{\partial u}{\partial z}=0$ и решить задачу Коши $u=\frac{z}{x^4}$ при $x=y$ $(x>0,\, z>0)$.

② 1. Составляем соответствующую (характеристическую) систему обыкновенных дифференциальных уравнений (в симметрической форме)

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{4x}=\frac{dz}{z\left(\frac{4x^2-y^2}{xy}\right)}.$$

Найдем 2 независимых первых интеграла:

1) $\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{4x}$, $4xdx=-ydy$, $4\frac{x^2}{2}=-\frac{y^2}{2}+C$. Первый интеграл $u_1=4x^2+y^2$.

2) $\frac{dy}{4x}=\frac{dz}{z\left(\frac{4x^2-y^2}{xy}\right)}$, $\frac{dy}{4x^2y}=\frac{dz}{z\left(4x^2-y^2\right)}$.

Используя найденный первый интеграл, имеем $4x^2=$ $=u_1-y^2$, т.о., $\frac{dy}{\left(u_1-y^2\right)y}=\frac{dz}{z\left(u_1-y^2-y^2\right)}$, $\frac{dz}{z}=$ $=\frac{\left(u_1-y^2-y^2\right)dy}{\left(u_1-y^2\right)y}$, $\frac{dy}{y}-\frac{ydy}{\left(u_1-y^2\right)}=\frac{dz}{z}$, $\ln|y|+\frac{1}{2}\ln\left|u_1-y^2\right|=$ $=\ln|z|+\tilde{C}$, $y\sqrt{u_1-y^2}=\approx{C}\,z$, $\approx{C}=\frac{y\sqrt{u_1-y^2}}{z}$. Первый интеграл $u_2=\frac{xy}{z}$.

3) Общее решение имеет вид: $u=\Phi\left(4x^2+y^2,\frac{xy}{z}\right)$.

2. $\left.\begin{aligned} &u_1 = 4x^2 + y^2, \\ &u_2 = \frac{xy}{z}, \\ &u = \frac{z}{x^4}, \\ &y = x, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &5x^2 = u_1, \\ &\frac{x^2}{z} = u_2, \\ &u = \frac{z}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2}, \\ &y = x. \end{aligned}\right\}$

3. Откуда $u\Big|_{y=x} = \frac{z}{x^4}\Bigg|_{y=x} = \frac{1}{u_2} \cdot \frac{5}{u_1}$.

4. Подставляя значения первых интегралов, получаем решение задачи Коши:

$$u = \frac{5z}{\left(4x^2 + y^2\right)xy} \quad ❷$$

Пример 6.3. (7-02). Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши

$$2y\cos^2 x\frac{\partial u}{\partial x} + \left(1 + y^2 \sin 2x\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\sin 2z}{y}\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

$$u = x - 1 + \operatorname{ctg} z \ \text{ при } \ y^2\cos^2 x = 1 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < z < \pi\right).$$

③ 1. Составляем соответствующую (характеристическую) систему обыкновенных дифференциальных уравнений (в симметрической форме)

$$\frac{dx}{2y\cos^2 x} = \frac{dy}{1 + y^2 \sin 2x} = \frac{dz}{\frac{1}{y}\sin 2z}.$$

1) В этом случае интегрирование системы проведем путем подбора так называемых интегрируемых комбинаций. Для этого сначала характеристическую систему дифференциальных уравнений перепишем в виде (6.3):

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y\cos^2 x, \\ \dot{y} = 1 + y^2 \sin 2x, \\ \dot{z} = \dfrac{1}{y}\sin 2z. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения, умноженного на $\cos x$, первое, умноженное на $y\sin x$, получаем $-y\dot{x}\sin x + \dot{y}\cos x = \cos x$ или $\left(y\cos x\right)^{\bullet} = \cos x$. $\dfrac{d\left(y\cos x\right)}{y\cos x} = \dfrac{dt}{y}$. Нетрудно заметить, что $\dfrac{dz}{\sin 2z} = \dfrac{dt}{y}$. Таким образом, получили интегрируемую комбинацию $\dfrac{d\left(y\cos x\right)}{y\cos x} = \dfrac{dz}{\sin 2z}$.

$$\ln\left|y\cos x\right| = \int\frac{dz}{\sin 2z} = \frac{1}{2}\int\frac{dv}{\sin v} = \frac{1}{2}\int\frac{\sin v dv}{\sin^2 v} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{d\cos v}{\left(1-\cos^2 v\right)} = -\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{1-\zeta} + \frac{1}{1+\zeta}\right)d\zeta =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\frac{1+\zeta}{1-\zeta} + C = \frac{1}{4}\ln\frac{1-\cos 2z}{1+\cos 2z} + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{2\sin^2 z}{2\cos^2 z} + C = \frac{1}{2}\ln\left(\operatorname{tg} z\right) + C.$$ Первый интеграл $u_1 = y^2\cos^2 x \operatorname{ctg} z$.

2) Замечая, что $\dfrac{dx}{2\cos^2 x} = ydt = y^2\dfrac{dt}{y}$ и $\dfrac{dz}{\sin 2z} = \dfrac{dt}{y}$, используя найденный первый интеграл, получаем $\dfrac{dx}{2\cos^2 x} = \dfrac{u_1 \operatorname{tg} z}{\cos^2 x}\dfrac{dz}{2\sin z\cos z}$, $dx = \dfrac{u_1 dz}{\cos^2 z}$, $x = u_1 \operatorname{tg} z + \widetilde{C}$.

Первый интеграл $u_2 = y^2\cos^2 x - x$.

3) Общее решение имеет вид:

$$u = \Phi\left(y^2\cos^2 x \operatorname{ctg} z, y^2\cos^2 x - x\right).$$

2. $\left.\begin{aligned} &u_1 = y^2\cos^2 x\,\mathrm{ctg}\,z,\\ &u_2 = y^2\cos^2 x - x,\\ &u = x-1+\mathrm{ctg}\,z,\\ &y^2\cos^2 x = 1, \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} &\mathrm{ctg}\,z = u_1,\\ &1 - x = u_2,\\ &u = x - 1 + \mathrm{ctg}\,z,\\ &y^2\cos^2 x = 1. \end{aligned}\right\}$

3. Откуда $u\big|_{y^2\cos^2 x=1} = \left(x - 1 + \mathrm{ctg}\,z\right)\big|_{y^2\cos^2 x=1} = u_1 - u_2$.

4. Подставляя значения первых интегралов, получаем решение задачи Коши:

$$u = y^2\cos^2 x\left(\mathrm{ctg}\,z - 1\right) + x\,.$$ ❸

6.4. Задачи для самостоятельного решения

Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши:

141. (6-01) $-y\dfrac{\partial u}{\partial x} + 4x\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{4x^2 - y^2}{xy}\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = \dfrac{z}{x^4}$ при $x = y$ $(x > 0,\ z > 0)$.

142. (6-02) $\dfrac{y}{2x^2}\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{2x^4 - y^2}{4x^3 y}z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = \dfrac{z^2}{x}$ при $y = x^2$ $(x > 0,\ z > 0)$.

143. (6-03) $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial u}{\partial y} - z(x+y)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = \dfrac{z}{x}$ при $x = 3y$ $(x > 0,\ z > 0)$.

144. (6-04) $3z^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + y^2 e^x\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2zye^x\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = e^x y^4$ при $y^2 z = 1$ $(y > 0)$.

145. (5-11) $2x^2 z\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2y^2 z\dfrac{\partial u}{\partial y} - (x+y)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = e^{z^2}$ при $x = 2y$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

146. (5-12) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - x^2\dfrac{\partial u}{\partial y} + \left(x^2 - y - z\right)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = (2 - z)x$ при $x = y$ $(x > 0)$.

147. (5-13) $y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}+z(x+y)\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=3y^2ze^{-3y}$ при $x=2y$ $(x>0)$.

148. (5-14) $yz\frac{\partial u}{\partial x}+xz\frac{\partial u}{\partial y}+(x-y)\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=z^2-3x^2-2x$ при $y=2x$ $(x>0,\ z>0)$.

Найти все решения уравнений и решить задачу Коши:

149. (7-21) $\left(x^3+3xy^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}+2y^3\frac{\partial u}{\partial y}+2y^2z\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=2z$ при $x=y$ $(x>0,\ z>0)$.

150. (7-22) $2xy\frac{\partial u}{\partial x}+\left(y^2-x^2-z^2\right)\frac{\partial u}{\partial y}+2yz\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=z^2+z+y^2$ при $z=x^2$ $(x>0,\ y>0)$.

151. (7-23) $x\left(y^2-z^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}-y\left(x^2+z^2\right)\frac{\partial u}{\partial y}+z\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=x^2\left(1+z^2\right)$ при $y=xz$ $(x>0,\ y>0)$.

152. (7-24) $\left(y^2+1\right)z\frac{\partial u}{\partial x}+\left(x^2-1\right)z\frac{\partial u}{\partial y}+\left(x^2-1\right)y\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=z^2$ при $y=x$ $(x>1,\ z>0)$.

153. (7-31) $zx\frac{\partial u}{\partial x}+z(2x-y)\frac{\partial u}{\partial y}+\left(x^2+z^2-xy\right)\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=\frac{z^2}{x}$ при $x-y=1$ $(x>0)$.

154. (7-32) $\left(z^2+2y\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(z^2+2x\right)\frac{\partial u}{\partial y}-z\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=3z^2x$ при $x+y=z^2$ $(x\neq y)$.

155. (7-33) $x\frac{\partial u}{\partial x}+y^2(z+x)^2\frac{\partial u}{\partial y}-(2x+z)\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=z(x-z)$ при $xyz=1$.

156. (7-34) $\left(z+y^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(z+x^2\right)\frac{\partial u}{\partial y}-2z(x+y)\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=(x-y)z$ при $z+3xy=0$ $(x\neq y)$.

Решить уравнение и задачу Кошия

157. (7-41) $xz\frac{\partial u}{\partial x}+yz\frac{\partial u}{\partial y}+\left(x-\left(x^2+y^2\right)\right)\frac{\partial u}{\partial z}=0 \quad (x>0,\, z>0)$,

$u=z^2-2x+1$ при $x^2+y^2=1$.

158. (7-42) $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{y-x}{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=1+z^2+2x(x-1)$ при $x-y=1$.

159. (7-43) $xy\frac{\partial u}{\partial x}-y^2\frac{\partial u}{\partial y}+x\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=-\frac{x^2}{2}$ при $xyz=1$.

160. (7-44) $\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}+2xy\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{x^3-xy^2}{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0 \quad (x>0,\, y>0,\, z>0)$,

$u=z^2$ при $y^2-x^2=1$.

Найти общие решения уравнений и решить задачу Коши:

161. (6-51) $x>0$, $z>0$: $\left(3xz^2-x^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}+yz^2\frac{\partial u}{\partial y}+xz\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=y^3$

при $z^2=2x$.

162. (6-52) $x>0$, $z>0$: $xz\frac{\partial u}{\partial x}+x^3\frac{\partial u}{\partial y}-\left(4x^3z+z^2\right)\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=4y$ при

$z=x^3$.

163. (6-53) $y>0$, $z>0$: $5xz^4\frac{\partial u}{\partial x}+\left(5yz^4-y^2\right)\frac{\partial u}{\partial y}+yz\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=x$

при $y=3z^4$.

164. (6-54) $x>0$, $y>0$, $z>0$: $\left(x^3+3x^2y^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}-x^2y\frac{\partial u}{\partial y}+3xy^2z\frac{\partial u}{\partial z}=0$,

$u=\frac{1}{z}$ при $x=y^2$.

165. (6-61) $\frac{x}{3}\frac{\partial u}{\partial x}+(x+z\cos z)\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=3-y$ при $x=1$.

166. (6-62) $\left(3y^2+2ze^{-y}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+2z\frac{\partial u}{\partial y}+3y^2\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=x+1$ при $y=0$,

$z>0$.

167. (6-63) $\frac{x}{5}\frac{\partial u}{\partial x}+\left(ze^z-x\right)\frac{\partial u}{\partial y}-z\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=y+5$ при $x=1$.

168. (6-64) $y^3\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{x}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\left(y^3\sin x-x\right)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=z$ при $y=0$, $x>0$.

6.5. Ответы

141. Общ. реш.: $u=\Phi\left(4x^2+y^2,\dfrac{xy}{z}\right)$, реш. задачи Коши: $u=\dfrac{5z}{\left(4x^2+y^2\right)xy}$.

142. Общ. реш.: $u=\Phi\left(x^4+y^2,xyz^2\right)$, реш. задачи Коши: $u=\dfrac{2xyz^2}{x^4+y^2}$.

143. Общ. реш.: $u=\Phi\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x},(x-y)z\right)$, реш. задачи Коши: $u=\dfrac{3}{8}\dfrac{z(x-y)^3}{x^2y^2}$.

144. Общ. реш.: $u=\Phi\left(\dfrac{y^2}{z},e^x-\dfrac{z^2}{y}\right)$, реш. задачи Коши: $u=\dfrac{y^2e^x}{z}-yz+\sqrt[4]{\dfrac{z}{y^2}}$.

145. Общ. реш.: $u=\Phi\left(\dfrac{x-y}{xy};(x-y)e^{z^2}\right)$, реш. задачи Коши: $u=2\dfrac{(x-y)^2}{xy}e^{z^2}$.

146. Общ. реш.: $u=\Phi\left(xy+xz;x^2+2y\right)$, реш. задачи Коши: $u=-xy-xz+x^2+2y$.

147. Общ. реш.: $u=\Phi\left(x^2-y^2;ze^{-x-y}\right)$, реш. задачи Коши: $u=\left(x^2-y^2\right)ze^{-x-y}$.

148. Общ. реш.: $u=\Phi\left(x^2-y^2;z^2+2x-2y\right)$, реш. задачи Коши: $u=x^2-y^2+z^2+2x-2y$.

149. Общ. реш.: $u=\Phi\left(\frac{y}{z};y+\frac{y^3}{x^2}\right)$, реш. задачи Коши: $u=z\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)$.

150. Общ. реш.: $u=\Phi\left(\frac{x}{z};\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)$, реш. задачи Коши: $u=\frac{z\left(x^2+y^2+z^2\right)}{x^2}$.

151. Общ. реш.: $u=\Phi\left(x^2+y^2+z^2;\frac{yz}{x}\right)$, реш. задачи Коши: $u=x^2+y^2+z^2-\frac{yz}{x}$.

152. Общ. реш.: $u=\Phi\left(y^2-z^2,y^3-x^3+3(x+y)\right)$, реш. задачи Коши: $u=z^2-y^2+\frac{\left(y^3-x^3+3(x+y)\right)^2}{36}$.

153. Общее решение: $u=\Phi\left(x^2-xy;\frac{z^2+x^2-xy}{x^2}\right)$, реш. задачи Коши: $u=(x-y)\left(\frac{z^2+x^2-xy}{x}\right)-1$.

154. Общее решение: $u=\Phi\left(\frac{z^2}{x-y};2x^2-2y^2+z^2(x-y)\right)$, реш. задачи Коши: $u=\frac{\left(2x+2y+z^2\right)\left(z^2+x-y\right)}{2}$.

155. Общее решение: $u=\Phi\left(x^2+zx;\frac{(x+z)^2}{2}-\frac{1}{y}\right)$, реш. задачи Коши: $u=\frac{2}{y}-z^2-xz$.

156. Общее решение: $u=\Phi\left(\frac{z}{(x-y)^2};x^3-y^3+z(x-y)\right)$, реш. задачи Коши: $u=\frac{z\left(x^2+y^2+xy+z\right)}{x-y}$.

157. Общее решение: $u=\Phi\left(\frac{y}{x},\, x^2+y^2+z^2-2x\right)$, реш. задачи Коши: $u=x^2+y^2+z^2-2x$.

158. Общее решение: $u=\Phi\left(x+y,\, xy-\frac{1}{2}z^2\right)$, реш. задачи Коши: $u=x^2+y^2+z^2$.

159. Общее решение: $u=\Phi\left(xy,\, \frac{1}{2}x^2-xyz\right)$, реш. задачи Коши: $u=xyz-\frac{x^2}{2}-1$.

160. Общее решение: $u=\Phi\left(y-\frac{x^2}{y},\, y^2+z^2-x^2\right)$, реш. задачи Коши: $u=y^2+z^2-x^2-1$.

161. Общее решение: $u=\Phi\left(xz-z^3,\, \frac{y^3}{xz}\right)$, реш. задачи Коши: $u=\left(\frac{z^2}{x}-1\right)y^3$.

162. Общее решение: $u=\Phi\left(x^4+xz,\, xze^{4y}\right)$, реш. задачи Коши: $u=4y+\ln\left(\frac{2z}{x^3+z}\right)$.

163. Общее решение: $u=\Phi\left(yz-z^5,\, \frac{x}{yz}\right)$, реш. задачи Коши: $u=\frac{3}{2}x\left(1-\frac{z^4}{y}\right)$.

164. Общее решение: $u=\Phi\left(xy+y^3,\, \frac{xy}{z}\right)$, реш. задачи Коши: $u=\frac{2x}{z\left(x+y^2\right)}$.

165. Общее решение: $u = \Phi\left(\frac{z}{x^3},\, 3x - y + \sin z\right)$, реш. задачи Коши: $u = 3x - y + \sin z - \sin\frac{z}{x^3}$.

166. Общее решение: $u = \Phi\left(z^2 - y^3,\, x - z + e^{-y}\right)$, реш. задачи Коши: $u = x - z + e^{-y} + \sqrt{z^2 - y^3}$.

167. Общее решение: $u = \Phi\left(x^5 z,\, 5x + y + e^z\right)$, реш. задачи Коши: $u = 5x + y + e^z - e^{x^5 z}$.

168. Общее решение: $u = \Phi\left(x^2 - y^4,\, 2y + z + \cos x\right)$, реш. задачи Коши: $u = 2y + z + \cos x - \cos\sqrt{x^2 - y^4}$.

§ 7. ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Автономной системой для функций $x(t)$, $y(t)$ называется система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \tag{7.1}$$

где правые части не зависят от переменной t.

Пусть $x = f(t)$, $y = g(t)$ – решение (7.1).

Фазовой траекторией системы (7.1) называется параметрически заданная кривая $x = f(t)$, $y = g(t)$ на плоскости $\mathsf{R}^2_{x,y}$. Принято отмечать стрелкой на траектории направление движения точки с ростом времени.

Фазовым портретом системы называется картина, которую образуют фазовые кривые.

Положением равновесия, или точкой покоя, автономной системы дифференциальных уравнений (7.1) называется ее решение вида $x = x_0$, $y = y_0$.

Отметим, что траектория положения равновесия – точка, и $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$.

В простейшем случае, когда *P*, *Q* линейны, т.е. $P(x, y) = ax + by$, $Q(x, y) = cx + dy$, где *a, b, c, d* – постоянные, система принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy. \tag{7.2}$$

Введем матрицу $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, составленную из коэффициентов системы (7.2).

7.1. Исследование положений равновесия

Исследование положения равновесия проводится по следующей схеме:

1. Сначала находят корни $\lambda_{1,2}$ характеристического уравнения

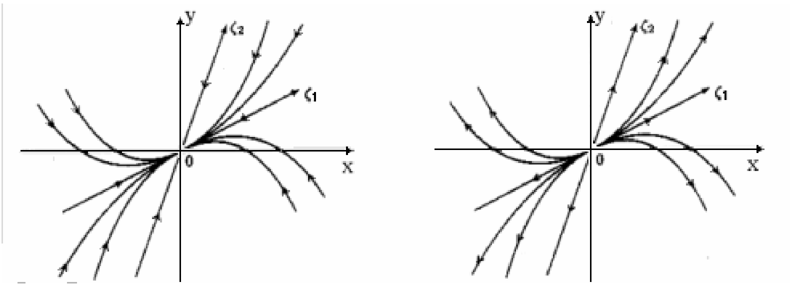
$$\det(A-\lambda E)=0. \tag{7.3}$$

Решение системы (7.2) имеет вид $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\vec{h}_2 e^{\lambda_2 t}$, где $\vec{h}_1$ и $\vec{h}_2$ – собственные векторы, отвечающие собственным значениям λ_1 и λ_2, соответственно. Обозначим $\zeta_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}$, $\zeta_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}$ координаты точки в базисе из собственных векторов $\vec{h}_1$, $\vec{h}_2$.

2. ① Если корни вещественные, различные $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ и одного знака $(\lambda_1\lambda_2 > 0)$, то положение равновесия называется *узлом*. Узел называется устойчивым, если $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, и неустойчивым, если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Положим для определенности $0 < |\lambda_1| < |\lambda_2|$.

   В случае $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ обе координаты с ростом t стремятся к нулю, но вторая координата стремится к нулю быстрее, т.е. точки по всем интегральным траекториям приближаются к началу координат. Общая касательная для всех траекторий, кроме одной, отвечающей $C_1 = 0$, параллельна вектору $\vec{h}_1$, отвечающему меньшему по абсолютной величине собственному значению λ_1. Кроме того, система уравнений (7.2) имеет фазовые траектории в виде лучей, по которым точки стремятся к началу координат (положению равновесия). Эти лучи параллельны собственными векторами $\vec{h}_1$ и $\vec{h}_2$ матрицы A. При $t \to -\infty$ координаты приближаются к прямым, параллельным вектору $\vec{h}_2$, удаляясь от начала координат. В случае устойчивого узла движение по фазовым траекториям происходит к положению равновесия.

   В случае $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ характер расположения траекторий полностью сохраняется (можно устремить t к $-\infty$ и провести рассуждения, аналогичные для $t \to +\infty$). В случае неустойчивого узла движение по фазовым траекториям происходит от положения равновесия.



а) б)

Рис. 7.1

Схематически фазовый портрет системы (7.2) в случае а) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ и б) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ показан на рис. 7.1. Здесь и далее ζ_1 и ζ_2 – координаты точки в базисе из собственных векторов матрицы A.

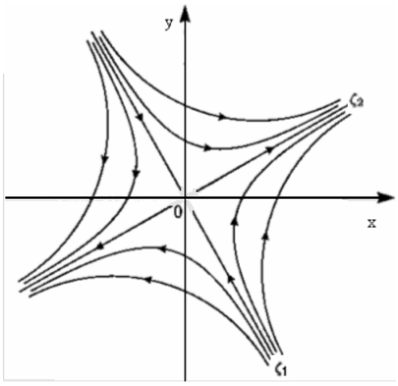
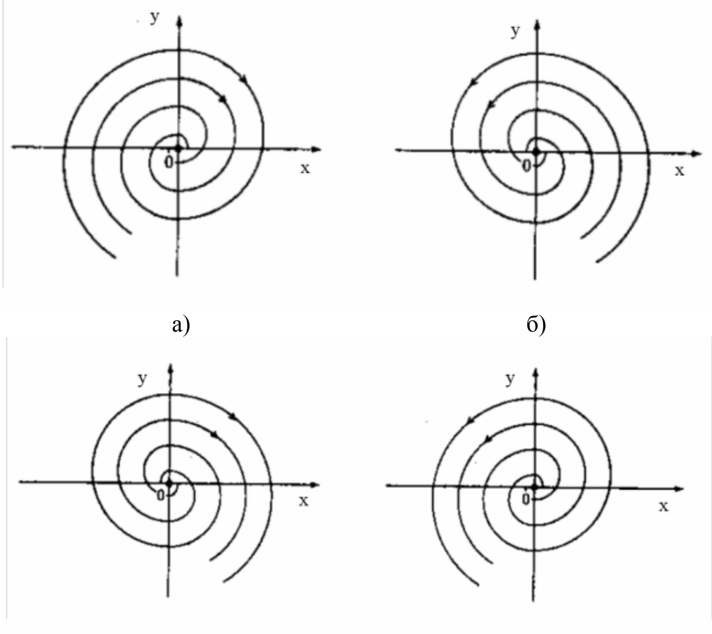


Рис. 7.2

② Если корни имеют разные знаки $(\lambda_1 \lambda_2 < 0)$, то положение равновесия называется *седлом*. Пусть для определенности $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. С ростом t при $C_2 = 0$ точки на траектории будут приближаться к началу координат вдоль лучей, входящих в начало координат параллельно собственному вектору $\vec{h}_1$, и удаляться от него при $C_1 = 0$ вдоль лучей, исходящих из начала координат параллельно $\vec{h}_2$. Эти траектории, называющиеся сепаратрисами, служат асимптотами траекториям, отвечающим

$C_1 \neq 0$ и $C_2 \neq 0$, при $t \to -\infty$ и $t \to +\infty$, соответственно. Движение по траекториям при $C_1 \neq 0$ и $C_2 \neq 0$ согласуется с движением по асимптотам $O\zeta_1$ и $O\zeta_2$. Схематически фазовый портрет системы (7.2) в этом случае показан на рис. 7.2.



а) б)

в) г)

Рис. 7.3

③ Если корни $\lambda_{1,2} = \mu + i\nu$ невещественные при $\mu \neq 0$, то положение равновесия называется *фокусом*. Фокус называется устойчивым, если $\mu < 0$, и неустойчивым, если $\mu > 0$. Фазовые траектории имеют вид искаженных логарифмических спиралей, закручивающихся вокруг начала координат. Движение по спирали происходит к положению равновесия в случае устойчивого фокуса и от положения равновесия, если фокус неустойчивый. Требуется нарисовать качественную картину, т.е. вдоль какого направления сжата траектория или по какому направлению она вытянута, определять не нужно. Надо только определить направление закручивания траекторий. Для этого нужно построить в какой-нибудь точке (x, y) вектор скорости $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$, определяемый по формулам (7.2).

Схематически фазовый портрет системы (7.2) в случае фокуса изображен на рис. 7.3, причем случаи а) и б) соответствуют устойчивому фокусу, а случаи в) и г) – неустойчивому.

З а м е ч а н и е. В случае фокуса не требуется находить собственные векторы матрицы A.

④ Кроме перечисленных выше основных положений равновесия различают еще несколько вырожденных случаев, которые мы здесь рассматривать не будем.

7.2. Практические приемы исследования положений равновесия

Для исследования положения равновесия (x_0, y_0) более общей системы (7.1) разложить функции P и Q, если они дифференцируемы, в окрестности этой точки по формуле Тейлора, ограничиваясь членами первого порядка. Тогда система (7.1) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + o(\rho), \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + o(\rho), \end{aligned} \tag{7.4}$$

при $\rho \to 0$, где $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Перенося начало координат в точку (x_0, y_0) и сделав замену $x = u + x_0$, $y = v + y_0$, а также отбросив $o(\rho)$, получим линеаризованную систему

$$\frac{du}{dt} = au + bv, \quad \frac{dv}{dt} = cu + dv, \tag{7.5}$$

где постоянные *a, b, c, d* можно вычислить по формулам

$$a = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0), \; b = \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0),$$

$$c=\frac{\partial Q}{\partial x}\left(x_0,y_0\right),\ d=\frac{\partial Q}{\partial y}\left(x_0,y_0\right). \tag{7.6}$$

Если $u=0$, $v=0$ – не вырожденное положение равновесия линеаризованной системы (7.5), то фазовые траектории автономной системы (7.1), при большей гладкости функций *P* и *Q*, ведут себя в окрестности положения равновесия $x=x_0$, $y=y_0$ качественно так же, как и фазовые траектории системы (7.5).

7.3. Примеры решения задач, предлагавшихся на экзаменационных контрольных работах

Пример 7.1. (4-01). Найти положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории линеаризованных систем $\begin{cases}\dot{x}= & x\operatorname{arctg}\left(1-y^2\right),\\ \dot{y}= & \ln\dfrac{y}{x}.\end{cases}$.

① Здесь $P(x,y)=x\operatorname{arctg}\left(1-y^2\right)$, $Q(x,y)=\ln\dfrac{y}{x}$. Положения равновесия находим из системы уравнений $\begin{cases}P(x,y)=0,\\ Q(x,y)=0,\end{cases}$ или $\begin{cases}x\operatorname{arctg}\left(1-y^2\right)=0,\\ \ln\dfrac{y}{x}=0.\end{cases}$ Решая ее, находим $\begin{cases}y= & \pm 1\\ y= & x\end{cases}$. Таким образом, получаем два положения равновесия:

при $y=1$ имеем $x=1$, положение равновесия: **M(1, 1)**;

при $y=-1$ имеем $x=-1$, положение равновесия: **N(–1, –1)**.

<u>I способ</u>.

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}=\operatorname{arctg}\left(1-y^2\right),\ \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{-2xy}{1+\left(1-y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{x}{y}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{1}{x},\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}=\frac{x}{y}\frac{1}{x}=\frac{1}{y}.$$

Исследуем положение равновесия **M(1, 1)**.

$$\frac{\partial P(1,1)}{\partial x}=\operatorname{arctg}(1-1)=0,\ \frac{\partial P(1,1)}{\partial y}=\frac{-2}{1+(1-1)^2}=-2,$$
$$\frac{\partial Q(1,1)}{\partial x}=-\frac{1}{1}=-1,\ \frac{\partial Q(1,1)}{\partial y}=\frac{1}{1}=1.$$

Линеаризованная система имеет вид $\begin{cases}\dot{x}= & -2(y-1),\\ \dot{y}= & -1(x-1)+(y-1).\end{cases}$ Находим собственные значения матрицы $A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ этой линеаризованной системы $\begin{vmatrix}-\lambda & -2\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(-\lambda)(1-\lambda)-2=$ $=\lambda^2-\lambda-2=(\lambda-2)(\lambda+1)=0$, $\lambda_1=-1$ и $\lambda_2=2$. Таким образом, положение равновесия **M(1, 1)** – седло.

Найдем собственные векторы, являющиеся ненулевыми решениями системы $(A-\lambda E)\vec{h}=0$:

$$\lambda_1=-1;\ A-\lambda E=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix};\ \vec{h}_1=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix};$$
$$\lambda_2=2;\ A-\lambda E=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix};\ \vec{h}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Решение линеаризованной системы
$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+C_1e^{-t}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Координата точки фазовой кривой $\xi_1=C_1e^{-t}$ в базисе $\vec{h}_1,\vec{h}_2$ стремится к нулю при $t\to\infty$, а координата $\xi_2=C_2e^{2t}\xrightarrow[t\to\infty]{}\infty$.

Исследуем положение равновесия **N(–1, –1)**.

$$\frac{\partial P(-1,-1)}{\partial x}=\operatorname{arctg}\left(1-(-1)^2\right)=0,\qquad \frac{\partial P(-1,-1)}{\partial y}=\frac{-2\cdot(-1)\cdot(-1)}{1+(1-(-1))^2}=-2,$$
$$\frac{\partial Q(-1,-1)}{\partial x}=-\frac{1}{(-1)}=1,\ \frac{\partial Q(-1,-1)}{\partial y}=\frac{1}{(-1)}=-1.$$

Линеаризованная система имеет вид $\begin{cases} \dot{x} = & -2(y+1), \\ \dot{y} = & (x+1)-(y+1). \end{cases}$

Находим собственные значения матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ этой линеаризованной системы $\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-1-\lambda)+2 =$ $= \lambda^2 + \lambda + 2 = 0$, $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$. Таким образом, положение равновесия **N(–1, –1)** – устойчивый фокус.

На полуоси $x > -1$, $y = -1$ $\dot{y} = (x+1) > 0$, и фокус закручивается против часовой стрелки.

На окончательной «картинке» собственные векторы в случае седла можно не обозначать, но направления собственных векторов надо выдерживать, и стрелочки на собственных направлениях, указывающие направление движения точки при возрастании времени, уточнят портрет.

Между фазовыми траекториями, соответствующими разным положениям равновесия, следует сделать зазор – они не должны пересекаться или переходить друг в друга: линеаризация в невырожденном случае дает нам адекватную картину лишь в малой окрестности положения равновесия, и ответ на вопрос о поведении фазовых траекторий на больших расстояниях от положений равновесия требует иных методов исследования.

Полученный с помощью линеаризации фазовый портрет системы представлен на рис. 7.4.

II способ.

Исследуем положение равновесия **M(1, 1)**. Замена $\begin{matrix} x = u+1 \\ y = v+1 \end{matrix}$. Система $\begin{cases} \dot{u} = (u+1)\operatorname{arctg}(1 - v^2 - 2v - 1) \\ \dot{v} = \ln\dfrac{v+1}{u+1} = \ln(1+v) - \ln(1+u) \end{cases}$ после линеаризации принимает вид $\begin{cases} \dot{u} = -2v \\ \dot{v} = v - u \end{cases}$.

Матрица линеаризованной системы $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0$: $\begin{vmatrix} 0-\lambda & -2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+1)=0$.

Собственные значения: : $\lambda_1=-1$ и $\lambda_2=2$ вещественные и разных знаков – седло.

Собственные векторы $(A-\lambda E)\vec{h}=0$:

$\lambda_1=-1$; $A-\lambda E = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\vec{h}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\lambda_2=2$; $A-\lambda E = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $\vec{h}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Исследуем положение равновесия **N(–1, –1)**. Замена $\begin{matrix} x=u-1, \\ y=v-1. \end{matrix}$ Система $\begin{cases} \dot{u}=(u-1)\operatorname{arctg}(1-v^2+2v-1), \\ \dot{v}=\ln\dfrac{v-1}{u-1}=\ln(1-v)-\ln(1-u) \end{cases}$ после линеаризации принимает вид $\begin{cases} \dot{u}=-2v, \\ \dot{v}=u-v. \end{cases}$

Матрица линеаризованной системы $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

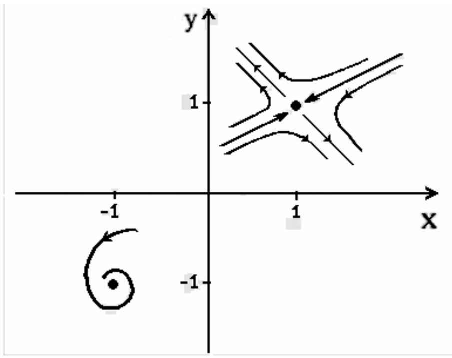


Рис. 7.4

Характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0$: $\begin{vmatrix} 0-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+\lambda+2=0$.

Собственные значения: $\lambda_{1,2}=\dfrac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$. Корни комплексные, $\operatorname{Re}\lambda<0$ – устойчивый фокус.

Направление закручивания: $\begin{matrix} u=\varepsilon, \\ v=0, \end{matrix} \begin{cases} \dot u=-2v & =0, \\ \dot v=u-v & =\varepsilon \end{cases}$ – против часовой стрелки. ❶

Пример 7.2. (3-14). Найти положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем $\begin{cases} \dot x= & \arcsin(xy), \\ \dot y= & e^{x+2y-3}-1. \end{cases}$.

② Здесь $P(x,y)=\arcsin(xy)$, $Q(x,y)=e^{x+2y-3}-1$. Положения равновесия находим из системы уравнений $\begin{cases} P(x,y)=0, \\ Q(x,y)=0, \end{cases}$ или $\begin{cases} \arcsin(xy)=0, \\ e^{x+2y-3}-1=0, \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} xy=0, \\ x+2y-3=0. \end{cases}$ Решая ее, находим $(3-2y)y=0$. Таким образом, получаем два положения равновесия:

при $y=\dfrac{3}{2}$ имеем $x=0$, положение равновесия: **M(0, $\mathbf{\frac{3}{2}}$)**;

при $y=0$ имеем $x=3$, положение равновесия: **N(3, 0)**.

Исследуем положение равновесия **M(0, $\frac{3}{2}$)**. Замена $\begin{matrix} x = u, \\ y = v + \frac{3}{2}. \end{matrix}$ Система $\begin{cases} \dot{u} = \arcsin\left(uv + \frac{3}{2}u\right), \\ \dot{v} = e^{u+2v+3-3} - 1 \end{cases}$ после линеаризации принимает вид

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{3}{2}u, \\ \dot{v} = u + 2v. \end{cases}$$

Матрица линеаризованной системы $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2} - \lambda & 0 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{2} - \lambda\right)(2 - \lambda) = 0.$$

Собственные значения: $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ и $\lambda_2 = 2$ различные, вещественные, положительные (одного знака) – неустойчивый узел.

Собственные векторы $(A - \lambda E)\vec{h} = 0$:

$$\lambda_1 = \frac{3}{2};\ A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix};\ \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2 = 2;\ A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Исследуем положение равновесия **N(3, 0)**. Замена $\begin{matrix} x = u + 3, \\ y = v. \end{matrix}$ Система $\begin{cases} \dot{u} = \arcsin(uv + 3v), \\ \dot{v} = e^{u+3+2v-3} - 1 \end{cases}$ после линеаризации принимает вид

$$\begin{cases} \dot{u} = 3v, \\ \dot{v} = u + 2v. \end{cases}$$

Матрица линеаризованной системы $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

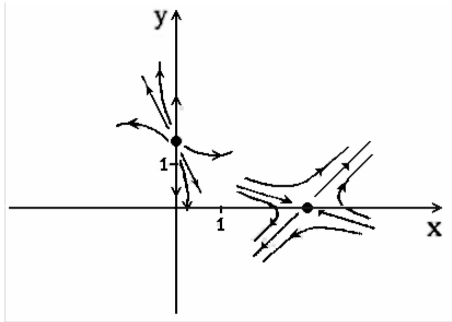


Рис. 7.5

Характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0$: $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda+1)=0$.

Собственные значения: $\lambda_1=-1$ и $\lambda_2=3$ вещественные и разных знаков – седло.

Собственные векторы $(A-\lambda E)\vec{h}=0$:

$$\lambda_1=-1;\ A-\lambda E=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};\ \vec{h}_1=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2=3;\ A-\lambda E=\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\ \vec{h}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$ ❷

7.4. Задачи для самостоятельного решения

Найти положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем:

169. (4-01) $\begin{cases} \dot{x}=x\,\mathrm{arctg}\left(1-y^2\right), \\ \dot{y}=\ln\dfrac{y}{x}. \end{cases}$

170. (4-02) $\begin{cases} \dot{x} = e^{x+y} - x^2, \\ \dot{y} = \arcsin\left(x - x^3\right). \end{cases}$

171. (4-03) $\begin{cases} \dot{x} = \ln(x + y), \\ \dot{y} = \sqrt{2x^2 + 2y - 5} - 1. \end{cases}$

172. (4-04) $\begin{cases} \dot{x} = -y\ln\left(2y^2 - 1\right), \\ \dot{y} = x - y - 2y^2. \end{cases}$

173. (3-11) $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{arctg}(y - x + 1), \\ \dot{y} = \operatorname{sh}\left(x - y - x^2\right). \end{cases}$

174. (3-12) $\begin{cases} \dot{x} = e^{x-y-1} - 1, \\ \dot{y} = \ln\left(x^2 + y\right). \end{cases}$.

175. (3-13) $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{arctg}\left(2 + y - y^2\right), \\ \dot{y} = 1 - e^{y^2 - x}. \end{cases}$

176. (3-14) $\begin{cases} \dot{x} = \arcsin(xy), \\ \dot{y} = e^{x+2y-3} - 1. \end{cases}$

177. (6-21) $\begin{cases} \dot{x} = 4x - x^2 + y, \\ \dot{y} = \ln\left(1 + 2x + x^2 + 5y\right). \end{cases}$

178. (6-22) $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{th}(2x - y - xy), \\ \dot{y} = 5x - 4y - xy. \end{cases}$

179. (6-23) $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sh}\left(5x + x^2 - 3y\right), \\ \dot{y} = 3x + x^2 - y. \end{cases}$

180. (6-24) $\begin{cases} \dot{x} = 3 - \sqrt{4 + x^2 + y}, \\ \dot{y} = \ln\left(x^2 - 3\right). \end{cases}$

181. (4-31) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - \dfrac{2}{y^2} + 1, \\ \dot{y} = \operatorname{sh}(x - y). \end{cases}$

182. (4-32) $\begin{cases} \dot{x} = e^{2y} + e^{y} - 2, \\ \dot{y} = \dfrac{2}{3}\left(x^2 - x\right) + 3y - 4xy. \end{cases}$

183. (4-33) $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{arctg}(x + y), \\ \dot{y} = x^2 - \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{1}{4y^2} - \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

184. (4-34) $\begin{cases} \dot{x} = 6x + 2(y^2 - y) - 4xy, \\ \dot{y} = e^{2x} + 2e^x - 3. \end{cases}$

185. (4-41) $\begin{cases} \dot{x} = 2xy - 4y - 8, \\ \dot{y} = 4y^2 - x^2. \end{cases}$

186. (4-42) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y^2 - 1, \\ \dot{y} = 6x - y^2 + 1. \end{cases}$

187. (4-43) $\begin{cases} \dot{x} = x - y^2, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 2. \end{cases}$

188. (4-44) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = \ln \dfrac{1 - x + x^2}{3}. \end{cases}$

189. (3-51) $\begin{cases} \dot{x} = \ln(x + y^2 - 1), \\ \dot{y} = \arcsin(x^2 - x - 6). \end{cases}$

190. (3-52) $\begin{cases} \dot{x} = -2\arcsin(xy + x + 2), \\ \dot{y} = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2 - y^2). \end{cases}$

191. (3-53) $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{arctg}(y + 2 - y^2), \\ \dot{y} = \ln(1 - x^2 - y). \end{cases}$

192. (3-54) $\begin{cases} \dot{x} = -6\operatorname{arctg}(xy + y + 2), \\ \dot{y} = \dfrac{1}{2}\operatorname{sh}(x^2 - xy - 2y^2). \end{cases}$

193. (3-61) $\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{5}{4}\operatorname{arctg}(y^2 - 1), \\ \dot{y} = e^{x^2 + 2xy + 3y} - 1. \end{cases}$

194. (3-62) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2x^2 + y - 1, \\ \dot{y} = (1 - x)\ln(1 - 4x + 2x^2). \end{cases}$

195. (3-63) $\begin{cases} \dot{x} = e^{\operatorname{sh} y} - 1, \\ \dot{y} = -3y + 4\ln\dfrac{x^2+1}{2}. \end{cases}$

196. (3-64) $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sh}(2xy - 4y - 8), \\ \dot{y} = \arcsin(4y^2 - x^2). \end{cases}$

7.5. Ответы

169. $M(1,\,1)$: седло, неуст., $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -1$, $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 2$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $N(-1,\,-1)$: фокус, уст., $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$, против часовой стрелки.

170. $M(-1,\,1)$: узел, неуст. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 2$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $N(1,\,-1)$: фокус, уст., $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$, по часовой стрелке.

171. $M(2,\,-1)$: седло, неуст., $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 3$, $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -1$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $N(-1,\,2)$: фокус, неуст., $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{2}$, по часовой стрелке.

172. $M(3,\,1)$: уст. узел, $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -1$, $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -4$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $N(1,\,-1)$: фокус, неуст., $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2} \dfrac{3 \pm i\sqrt{7}}{2}$, против часовой стрелки.

173. $M(-1,-2)$: седло, $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -1-\sqrt{3}$, $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -1+\sqrt{3}$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$; $N(1, 0)$: уст. фокус, $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$, по часовой стрелке.

174. $M(1, 0)$: неуст. фокус, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{2}$, против часовой стрелки; $N(-2,-3)$: седло, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -1$, $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 3$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

175. $M(1,-1)$: седло, $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -1$, $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 3$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $N(4, 2)$: уст. узел, $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -1$, $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -3$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

176. $M\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$: неуст. узел, $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = \dfrac{3}{2}$, $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 2$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $N(3, 0)$: седло, $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -1$, $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 3$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

177. $M(0, 0)$: неуст. узел, $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 3$, $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 6$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $N(3,-3)$: седло, $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 6$, $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -3$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

178. $M(0, 0)$: седло, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -3$, $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 1$,

$\vec{h}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; $N(1,\,1)$: уст. узел, $\begin{pmatrix}1 & -2\\4 & -5\end{pmatrix}$, $\lambda_1=-1$, $\vec{h}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$;

$\lambda_2=-3$, $\vec{h}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

179. $M(0,\,0)$: вырожденный узел, $\begin{pmatrix}5 & -3\\3 & -1\end{pmatrix}$, $\lambda=2$, $\vec{h}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; $N(-2,\,-2)$: седло, $\begin{pmatrix}1 & -3\\-1 & -1\end{pmatrix}$, $\lambda_1=2$, $\vec{h}_1=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$; $\lambda_2=-2$, $\vec{h}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

180. $M(-2,\,1)$: седло, $\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{6}\\-4 & 0\end{pmatrix}$, $\lambda_1=\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$, $\vec{h}_1=\begin{pmatrix}-1-\sqrt{7}\\12\end{pmatrix}$; $\lambda_2=\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}$, $\vec{h}_2=\begin{pmatrix}\sqrt{7}-1\\12\end{pmatrix}$; $N(2,\,1)$: уст. фокус, $\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{1}{6}\\4 & 0\end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2}=\dfrac{-1\pm i\sqrt{5}}{3}$, против часовой стрелки.

181. $M(1,\,1)$: седло, $\begin{pmatrix}2 & 4\\1 & -1\end{pmatrix}$, $\lambda_1=3$, $\vec{h}_1=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$; $\lambda_2=-2$, $\vec{h}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$; $N(-1,\,-1)$: уст. фокус, $\begin{pmatrix}-2 & -4\\1 & -1\end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2}=\dfrac{-3\pm i\sqrt{15}}{2}$, против часовой стрелки.

182. $M(0,\,0)$: неуст. узел, $\begin{pmatrix}0 & 3\\-\frac{2}{3} & 3\end{pmatrix}$, $\lambda_1=1$, $\vec{h}_1=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$; $\lambda_2=2$, $\vec{h}_2=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$; $N(1,\,0)$: седло, $\begin{pmatrix}0 & 3\\\frac{2}{3} & -1\end{pmatrix}$, $\lambda_1=1$, $\vec{h}_1=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$; $\lambda_2=-2$, $\vec{h}_2=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

183. $M(1,-1)$: седло, $\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}$, $\lambda_1=2$, $\vec{h}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; $\lambda_2=-1$, $\vec{h}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$; $N(-1,1)$: неуст. фокус, $\begin{pmatrix}1&1\\-2&0\end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2}=\dfrac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$, по часовой стрелке.

184. $M(0,0)$: неуст. узел, $\begin{pmatrix}6&-2\\4&0\end{pmatrix}$, $\lambda_1=2$, $\vec{h}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; $\lambda_2=4$, $\vec{h}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; $N(0,1)$: седло, $\begin{pmatrix}2&2\\4&0\end{pmatrix}$, $\lambda_1=4$, $\vec{h}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; $\lambda_2=-2$, $\vec{h}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

185. $M(4,2)$: неуст. узел, $\begin{pmatrix}4&4\\-8&16\end{pmatrix}$, $\lambda_1=8$, $\vec{h}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; $\lambda_2=12$, $\vec{h}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; $N(-2,-1)$: уст. фокус, $\begin{pmatrix}-2&-8\\4&-8\end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2}=-5\pm i\sqrt{23}$, против часовой стрелки.

186. $M(0,1)$: седло, $\begin{pmatrix}2&2\\6&-2\end{pmatrix}$, $\lambda_1=-4$, $\vec{h}_1=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$; $\lambda_2=4$, $\vec{h}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; $N(0,-1)$: неуст. фокус, $\begin{pmatrix}2&-2\\6&2\end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2}=2\pm 2i\sqrt{3}$, против часовой стрелки.

187. $M(1,1)$: неуст. фокус, $\begin{pmatrix}1&-2\\2&2\end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2}=\dfrac{3\pm i\sqrt{15}}{2}$, против часовой стрелки; $N(1,-1)$: седло, $\begin{pmatrix}1&2\\2&-2\end{pmatrix}$, $\lambda_1=-3$, $\vec{h}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$; $\lambda_2=2$, $\vec{h}_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

188. $M(2,\ 4)$: неуст. узел, $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 2-\sqrt{3}$, $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 2+\sqrt{3}$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$; $N(-1,\ 1)$: седло, $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -1-\sqrt{2}$, $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -1+\sqrt{2}$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

189. $M(-2,\ 2)$: неуст. фокус, $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{79}}{2}$, по часовой стрелке; $N(-2,\ -2)$: седло, $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 5$, $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -4$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

190. $M(2,\ -2)$: неуст. фокус, $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2} = 2 \pm i2\sqrt{2}$, против часовой стрелки; $N(-1,\ 1)$: уст. узел, $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -2$, $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -3$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

191. $M(1,\ -1)$: уст. фокус, $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{23}}{2}$, по часовой стрелке; $N(-1,\ -1)$: седло, $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -3$, $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 2$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

192. $M(1,\ -1)$: неуст. фокус, $\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2} = \dfrac{15 \pm i3\sqrt{23}}{4}$, против часовой стрелки; $N(-2,\ 2)$: уст. узел, $\begin{pmatrix} -12 & 6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -6$, $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -9$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

193. $M(3,\,-1)$ - седло, $\begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 10$, $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -1$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$; $N(-1,\,-1)$ - неуст. фокус, $\begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{39}}{2}$, по часовой стрелке.

194. $M(2,\,3)$: уст. узел, $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -4$, $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -1$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $N(0,\,1)$ - неуст. фокус, $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm i\sqrt{7}}{2}$, по часовой стрелке.

195. $M(1,\,0)$: седло, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -4$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$; $N(-1,\,0)$ - уст. фокус, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2} = \dfrac{-3 \pm i\sqrt{7}}{2}$, по часовой стрелке.

196. $M(4,\,2)$: неуст. узел, $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -8 & 16 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 8$, $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 12$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $N(-2,\,-1)$ - уст. фокус, $\begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2} = -5 \pm i\sqrt{23}$, против часовой стрелки.

§ 8. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

8.1. Основные понятия

Линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка с переменными коэффициентами называется уравнение вида

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x), \tag{8.1}$$

где на рассматриваемом промежутке $I \in \mathsf{R}^1$ $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $f(x)$ – известные непрерывные функции и $a(x) \neq 0$.

Решения $y_1(x)$, $y_2(x)$ однородного уравнения

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0, \tag{8.2}$$

называются линейно зависимыми, если существуют постоянные α и β, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, такие, что $\alpha \cdot y_1(x) + \beta \cdot y_2(x) \equiv 0$ на I.

Решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимы тогда и только тогда когда определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \tag{8.3}$$

не обращается в нуль на I.

Общее решение однородного уравнения (8.2) представимо в виде

$$y_o(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{8.4}$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ – линейно независимые решения (8.2).

Если y_1 и y_2 – два (любые) решения однородного уравнения (8.2), то для определителя Вронского (8.3) справедлива формула Остроградского-Лиувилля уравнения второго порядка

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right), \ \forall x_0 \in I, \ \forall x \in I, \tag{8.5}$$

где $p(t) = \dfrac{b(t)}{a(t)}$.

8.2. Схема отыскания частного решения однородного уравнения

Универсального алгоритма для отыскания частного решения однородного линейного уравнения второго порядка (8.2) в квадратурах не существует.

Если коэффициенты уравнения многочлены, то можно попытаться найти частное решение путем подбора:

а) В виде $e^{\alpha x}$. Подставляя $y = e^{\alpha x}$ в уравнение (8.2) , приравниваем нулю коэффициенты при соответствующих степенях *x*. Получаем значение α.

б) В виде x^{α} или многочлена. Подставляя $y = x^{\alpha}$ в уравнение (8.2), приравниваем нулю коэффициенты при самой старшей степени *x*, получая значение α, затем проверяем, является ли $y = x^{\alpha}$ решением (8.2).

Если $\alpha = n$ – натуральное число, но при этом $y = x^{\alpha}$ не является решением (8.2), то можно попытаться найти частное решение методом неопределенных коэффициентов в виде многочлена $y = x^n + d_1 x^{n-1} + \ldots + d_n$. Коэффициенты $d_1, \ldots, d_n$ определяются подстановкой в (8.2).

8.3. Общее решение однородного уравнения

Пусть решение y_1 уравнения (8.2) найдено. Из формулы Остроградского–Лиувилля (8.5) получаем $y_1 y_2' - y_2 y_1' = Ce^{-\int p(x)dx}$, т.е. получаем линейное уравнение первого порядка относительно y_2. Проще всего оно решается следующим способом. Разделив обе части уравнения на $y_1^{\,2}$, получим слева производную от дроби y_2 / y_1:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^{\,2}} = \frac{C}{y_1^{\,2}} e^{-\int p(x)dx}.$$

Поскольку y_1 известно, то

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{C}{y_1^{\,2}} e^{-\int p(x)dx} dx + C_2,$$

откуда получаем общее решение уравнения (8.2).

$$y_2 = y_1 \int \frac{C}{y_1^{\,2}} e^{-\int p(x)dx} dx + C_2 y_1. \qquad (8.6)$$

Замечание. Если известно частное решение y_1 линейного однородного уравнения (8.2), то порядок уравнения можно понизить, сохранив его линейность, если подставить $y = y_1 z$ в уравнение (8.2), а затем произвести замену $z' = u$.

8.4. Общее решение неоднородного уравнения (метод вариации постоянных)

Если известно общее решение однородного уравнения (8.2), то общее решение неоднородного уравнения (8.1) с непрерывной на I правой частью можно найти, применяя метод вариации произвольных постоянных, заключающийся в следующем.

Для отыскания общего решения неоднородного уравнения (8.1) поступают следующим образом:

1) предполагают, что в общем решении однородного уравнения (8.4) коэффициенты $C_1 = C_1(x)$ и $C_2 = C_2(x)$ – дифференцируемые функции;

2) общее решение ищут в виде

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x); \qquad (8.7)$$

3) функции $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ определяют из системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = \dfrac{f(x)}{a(x)}; \end{cases} \qquad (8.8)$$

система (8.8) имеет единственное решение, т.к. определитель ее основной матрицы есть определитель Вронского для линейно независимых решений уравнения (8.2) и, следовательно, отличен от нуля;

4) получив решения $C_1'(x)=f_1(x)$ и $C_2'(x)=f_2(x)$ системы (8.8), интегрируют эти уравнения:

$$C_1(x)=\int f_1(x)dx+c_1,\ C_2(x)=\int f_2(x)dx+c_2, \qquad (8.9)$$

где c_1, c_2 – постоянные;

5) найденные значения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ подставляют в (8.7).

8.5. Примеры решения задач, предлагавшихся на экзаменационных контрольных работах

Пример 8.1. (3-01). Решить уравнение

$$(x+1)y''-3(2x+1)y'+9xy=2e^{4x}.$$

① 1. Частное решение ищем путем подбора в виде $e^{\alpha x}$: подставляя $y_1=e^{\alpha x}$, $y_1'=\alpha e^{\alpha x}$, $y_1''=\alpha^2 e^{\alpha x}$ в однородное дифференциальное уравнение

$$(x+1)y''-3(2x+1)y'+9xy=0, \qquad (8.1.1)$$

получаем $\alpha^2(x+1)e^{\alpha x}-3(2x+1)\alpha e^{\alpha x}+9xe^{\alpha x}=0$ или $\left(x\left(\alpha^2-6\alpha+9\right)+\left(\alpha^2-3\alpha\right)\right)e^{\alpha x}=0$.

Так как функции 1 и x линейно независимы, то

$$\begin{matrix} x: & \alpha^2-6\alpha+9=0, \\ 1: & \alpha^2-3\alpha=0, \end{matrix} \quad \alpha=3 \text{ и } y_1=e^{3x}.$$

2. Согласно формуле Остроградского–Лиувилля $\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)'=\dfrac{C}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}$.

В нашем случае $p(x)=-\dfrac{3(2x+1)}{x+1}=-6+\dfrac{3}{x+1}$,

$$-\int p(x)dx=\int\left(6-\frac{3}{x+1}\right)dx=6x-3\ln|x+1|+\widetilde{C},$$

$$y_2=e^{3x}\int \widetilde{\widetilde{C}}e^{-6x}e^{6x-3\ln|x+1|}dx+C_2e^{3x}.$$

Так как $\int e^{-6x} e^{6x-3\ln|x+1|} dx = \int \frac{1}{|x+1|^3} dx = -\frac{\operatorname{sign}(x+1)}{2|x+1|^2} + C^*$, то

$y_2 = \frac{e^{3x}}{(x+1)^2} \tilde{\tilde{C}} + \tilde{\tilde{C}} C^* e^{3x}$ – общее решение однородного уравнения (8.1.1):

$$y_o = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{3x} + C_2 \frac{e^{3x}}{(x+1)^2}.$$

3. Решение исходного неоднородного дифференциального уравнения ищем методом вариации постоянных.

$$\begin{cases} C_1'(x) e^{3x} + C_2'(x) \dfrac{e^{3x}}{(x+1)^2} = & 0, \\ 3C_1'(x) e^{3x} + C_2'(x) \left(3\dfrac{e^{3x}}{(x+1)^2} - 2\dfrac{e^{3x}}{(x+1)^3} \right) = & \dfrac{2e^{4x}}{x+1}. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения утроенное первое, получаем $-2C_2'(x) \frac{e^{3x}}{(x+1)^3} = \frac{2e^{4x}}{x+1}$ или, умножив на $-\frac{(x+1)^3}{2e^{3x}}$, $C_2'(x) = -e^x (x+1)^2$ дает $C_2(x) = -\int e^x (x^2 + 2x + 1) dx =$
$= -\int x^2 e^x dx - \int 2xe^x dx - \int e^x dx = = -x^2 e^x + \int 2xe^x dx - \int 2xe^x dx - e^x$
$= -x^2 e^x - e^x + c_2$.

Из первого уравнения системы получаем $C_1'(x) = -C_2'(x) \frac{1}{(x+1)^2} = e^x$, откуда $C_1(x) = e^x + c_1$.

$$y = (e^x + c_1) e^{3x} + \left(- x^2 e^x (x+1)^2 - e^x + c_2\right) \frac{e^{3x}}{(x+1)^2} =$$

$$= e^{4x} + c_1 e^{3x} - \frac{(x^2+1) e^{4x}}{(x+1)^2} + c_2 \frac{e^{3x}}{(x+1)^2}.$$

Окончательно получаем

$$y = \frac{2xe^{4x}}{(x+1)^2} + c_1 e^{3x} + c_2 \frac{e^{3x}}{(x+1)^2}$$ ❶

Пример 8.2. (3-24). Найти все действительные решения уравнения

$$x^2y''-\left(x^2+4x\right)y'+2(x+3)y=12x^4e^{-2x},\ x>0.$$

② Частное решение ищем путем подбора в виде x^α: подставляя $y_1=x^\alpha$, $y_1{}'=\alpha x^{\alpha-1}$, $y_1{}''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ в однородное дифференциальное уравнение

$$x^2y''-\left(x^2+4x\right)y'+2(x+3)y=0, \qquad (8.2.1)$$

получаем

$x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}-\left(x^2+4x\right)\alpha x^{\alpha-1}+2(x+3)x^\alpha=0$ или

$x^{\alpha+1}(-\alpha+2)+x^\alpha(\alpha(\alpha-1)-4\alpha+6)=0$.

Коэффициент при самой старшей степени x равен $2-\alpha=0$, таким образом, $\alpha=2$.

Подставляя $y_1=x^2$ в (8.2.1), убеждаемся, что это решение.

2. **<u>I способ</u>.** Согласно формуле Остроградского–Лиувилля $y_2=y_1\int\frac{C}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx+C_2y_1$.

В нашем случае $p(x)=-\frac{x^2+4x}{x^2}=-1-\frac{4}{x}$, $-\int p(x)dx=$ $=\int\left(1+\frac{4}{x}\right)dx=\quad x+4\ln x+C=\quad x+\ln x^4+C$, следовательно, $y_2=x^2\int\tilde{\tilde{C}}\frac{1}{x^4}e^{x+\ln x^4}dx$.

$\int\frac{1}{x^4}e^{x+\ln x^4}dx=\int\frac{1}{x^4}e^xx^4dx\quad=\int e^xdx\quad=e^x+C^*$, откуда $y_2=x^2e^x\tilde{\tilde{C}}+\tilde{\tilde{C}}C^*x^2$ – общее решение однородного уравнения (8.2.1):

$$y_o=C_1y_1+C_2y_2=C_1x^2+C_2x^2e^x.$$

<u>II способ</u>. Подставляем $y_o=x^2z$ в (8.2.1). Т.к. $y_o{}'=2xz+x^2z'$, $y_o{}''=2z+4xz'+x^2z''$, то

$x^2\left(2z+4xz'+x^2z''\right)-\left(x^2+4x\right)\left(2xz+x^2z'\right)+2(x+3)x^2z=0$, или

$\left(2z+4xz'+x^2z''\right)-(x+4)(2z+xz')+2(x+3)z=0$, или
$x^2z''(x+1)+z'(4x-x(x+4))+z(2-2(x+4)+2(x+3))=0$, или
$x^2z''-x^2z'=0$, или $z''-z'=0$.

Порядок последнего уравнения понижаем заменой $z'=u$: $u'-u=0$.

$u'=u$ – уравнение с разделяющимися переменными.

Интегрируя уравнение с разделенными переменными $\dfrac{du}{u}=dx$, получаем $\ln|u|=x+\ln\widetilde{C}$ (здесь $\widetilde{C}>0$) или $u=\hat{C}e^x$ (здесь $\hat{C}$ – произвольное, т.к. а) сняли знак модуля; б) учли возможность $u=0$).

Откуда $z=\hat{C}e^x+C_1$ и $y_o=C_1x^2+C_2x^2e^x$.

3. Решение исходного неоднородного дифференциального уравнения ищем методом вариации постоянных.

$$\begin{cases} C_1'(x)x^2+C_2'(x)x^2e^x=0, \\ C_1'(x)2x+C_2'(x)\left(2xe^x+x^2e^x\right)=\dfrac{12x^4e^{-2x}}{x^2}. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, умноженное на $\dfrac{2}{x}$, получаем $x^2e^xC_2'(x)=12x^2e^{-2x}$ или $C_2'(x)=12e^{-3x}$, откуда $C_2(x)=-4e^{-3x}+c_2$.

Из первого уравнения системы получаем $C_1'(x)=-C_2'(x)e^x=-12e^{-2x}$, $C_1(x)=-12\int e^{-2x}dx$ или $C_1(x)=6e^{-2x}+c_1$.

$$y=\left(6e^{-2x}+c_1\right)x^2+\left(-4e^{-3x}+c_2\right)x^2e^x=$$
$$=6x^2e^{-2x}-4x^2e^{-2x}+c_1x^2+c_2x^2e^x$$

Окончательно получаем

$y=c_1x^2+c_2x^2e^x+2x^2e^{-2x}$.❷

8.6. Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнение:

197. (3-01) $(x+1)y''-3(2x+1)y'+9xy=2e^{4x}$.

198. (3-02) $xy''-(x+3)y'+\left(1+\dfrac{3}{x}\right)y=\dfrac{x^3e^x}{x-1}$ $(x>1)$.

199. (3-03) $(x+3)y''+2(2x+7)y'+4(x+4)y=xe^{-3x}$

200. (3-04) $(x^3+2x^2)y''+2xy'-2y=\dfrac{(x+2)^2}{x}$ $(x>0)$.

201. (8-11) $(3x-4)y''+(17-15x)y'+(12x-4)y=\dfrac{(3x-4)^2}{x-1}e^x$, $x>\dfrac{4}{3}$.

202. (8-12) $x(x^2+1)y''-(x^2+5)y'+\dfrac{8}{x}y=\dfrac{2x^4}{x^2+1}$, $x>0$.

203. (8-13) $(2x+3)y''+(8x+10)y'+(6x+3)y=\dfrac{(2x+3)^2}{x+1}e^{-x}$, $x>-1$.

204. (8-14) $x(1-x^2)y''+(2x^2-5)y'+\left(\dfrac{8}{x}-2x\right)y=\dfrac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}$, $0<x<1$.

Найти все действительные решения уравнений:

205. (3-21) $x^2y''+(4x+2x^2)y'+2(1+2x)y=2e^{-2x}$, $x>0$.

206. (3-22) $x^2y''+(3x^2-2x)y'+(2-3x)y=-3x^3e^{-3x}$, $x>0$.

207. (3-23) $xy''+(2-2x)y'+(-2+x)y=-4e^x$.

208. (3-24) $x^2y''-(x^2+4x)y'+2(x+3)y=12x^4e^{-2x}$, $x>0$.

209. (3-31) $x^2y''+(4x+x^2)y'+2(1+x)y=e^x$, $x>0$.

210. (3-32) $x^2y''+(x^2-4x)y'+2(3-x)y=-(2x+1)x^4$, $x>0$.

211. (3-33) $xy''+(2+3x)y'+3y=-3e^{-3x}$, $x>0$.

212. (3-34) $xy''+2(1+x)y'+(2+x)y=4e^{-x}$, $x>0$.

213. (3-41) $x^4(2x^2-3)y''-x(2x^4+9x^2-9)y'+6(4x^2-3)y=0$ $\left(x>\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$.

214. (3-42) $x^2y''+(x^2+1)xy'+(x^2-1)y=0$ $(x>0)$.

215. (3-43) $x^3y''-3x^2(1+2x^2)y'+3x(1+2x^2)y=0$ $(x>0)$.

216. (3-44) $x^2(2+x)y''-x(x^2+2x-2)y'-(x^2+4x+2)y=0$ $(x>0)$.

Найти общее решение уравнений:

197. (7-51) $x^2y''-(6+x)xy'+(12+3x)y=x^5e^{3x}$.

198. (7-52) $x^2y''-(x-4)xy'+(2-2x)y=e^{-2x}$.

199. (7-53) $x^2y''-(4+x)xy'+(6+2x)y=x^4e^{2x}$.

200. (7-54) $x^2y''-(x-6)xy'+(6-3x)y=\dfrac{e^{-3x}}{x}$.

Решить уравнения:

201. (7-61) $y''x^2\sin x-x(2\sin x+x\cos x)y'+(2\sin x+x\cos x)y=$
$=-x^4\sin^2 x$, $0<x<\pi$.

202. (7-62) $y''\sin x-(\cos x+\sin x)y'+y\cos x=-2e^x\sin^2 x$, $0<x<\pi$.

203. (7-63) $y''x^2\cos x-x(2\cos x-x\sin x)y'+(2\cos x-x\sin x)y=$
$=x^4\cos^2 x$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

204. (7-64) $y''\cos x+(\cos x+\sin x)y'+y\sin x=2e^{-x}\cos^2 x$, $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$.

8.7. Ответы

197. $y=C_1e^{3x}+C_2\dfrac{e^{3x}}{(x+1)^2}+\dfrac{2xe^{4x}}{(x+1)^2}$.

198. $y=C_1x+C_2(x^2-x)e^x-xe^x+(x^2-x)e^x\ln(x-1)$.

199. $y=C_1e^{-2x}+C_2\dfrac{e^{-2x}}{x+3}+\dfrac{x+2}{x+3}e^{-3x}$.

200. $y=C_1x+C_2\dfrac{x+1}{x}-1-\dfrac{1}{2x}-\ln x-\dfrac{\ln x}{x}$.

201. $y=C_1e^{4x}+C_2(x-1)e^x-\dfrac{e^x}{3}-(x-1)e^x\ln(x-1)$.

202. $y=C_1x^2+C_2\dfrac{x^2}{x^2+1}+x^2\operatorname{arctg}x-\dfrac{x^3}{x^2+1}$.

203. $y=C_1e^{-3x}+C_2(x+1)e^{-x}-\dfrac{e^{-x}}{2}+(x+1)e^{-x}\ln(x+1)$.

204. $y = C_1 x^2 + C_2 \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - x^2 \arcsin x + \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$.

205. $y = C_1 \dfrac{e^{-2x}}{x^2} + C_2 \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{e^{-2x}}{x}$.

206. $y = C_1 x e^{-3x} + C_2 x + x^2 e^{-3x}$.

207. $y = C_1 e^x + C_2 \dfrac{e^x}{x} - 2xe^x$.

208. $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 e^x + 2x^2 e^{-2x}$.

209. $y = C_1 \dfrac{e^{-x}}{x^2} + C_2 \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{e^x}{2x^2}$.

210. $y = C_1 e^{-x} x^2 + C_2 x^2 + x^3 - x^4$.

211. $y = C_1 \dfrac{e^{-3x}}{x} + C_2 \dfrac{1}{x} + e^{-3x}$.

212. $y = C_1 \dfrac{e^{-x}}{x} + C_2 e^{-x} + 2xe^{-x}$.

213. $y = C_1 x^2 + C_2 e^{-\frac{3}{2x^2}}$.

214. $y = \dfrac{C_1}{x} + \dfrac{C_2}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

215. $y = C_1 x + C_2 x e^{3x^2}$.

216. $y = \dfrac{C_1}{x} + C_2 x e^x$.

217. $y = C_1 x^3 + C_2 x^3 e^x + \dfrac{x^3}{6} e^{3x}$.

218. $y = \dfrac{C_1 + C_2 e^x}{x^2} + \dfrac{e^{-2x}}{6x^2}$.

219. $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 e^x + \dfrac{x^2}{2} e^{2x}$.

220. $y = \dfrac{C_1 + C_2 e^x}{x^3} + \dfrac{e^{-3x}}{12x^3}$.

221. $y = C_1 x + C_2 x \cos x - x^2 \sin x + \frac{1}{2} x^3 \cos x$.

222. $y = C_1 e^x + C_2 (\sin x + \cos x) + 2e^x \cos x$.

223. $y = C_1 x + C_2 x \sin x + x^2 \cos x + \frac{1}{2} x^3 \sin x$.

224. $y = C_1 e^{-x} + C_2 (\sin x + \cos x) - 2e^{-x} \sin x$.

§ 9. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

В качестве последней (девятой) задачи на письменной контрольной работе могут быть даны или задачи на доказательство, или, реже, задачи повышенной сложности.

9.1. Примеры решения задач, предлагавшихся на экзаменационных контрольных работах

Пример 9.1. (9-04) Найти первый интеграл системы
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3x^2 y, \\ \dot{y} = 2y + xy^2. \end{cases}$$

① Первым интегралом автономной системы $\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$ называется не равная тождественно постоянному непрерывно дифференцируемая функция $u(x, y)$ такая, что для любого решения $x(t)$, $y(t)$ системы $u(x(t), y(t)) = \text{const}$.

Для нахождения первого интеграла разделим, например, первое уравнение системы на второе, считая $g(x, y) \neq 0$ в рассматриваемой области. Используя выражение для производной для параметрически заданной функции, получим $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{f}{g}$, или $gdx = fdy$. Пусть решение этого уравнения имеет вид $u(x, y) = C$. Тогда функция $u(x, y)$ и является интегралом исходной системы.

В соответствии с вышесказанным составим уравнение
$$\left(2y + xy^2\right)dx - \left(2x + 3x^2 y\right)dy = 0 . \qquad (9.1.1)$$

Интегрирующим множителем уравнения в дифференциалах $a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0$ называется такая непрерывно дифференцируемая функция $\mu(x, y) \neq 0$, что уравнение $\mu a dx + \mu b dy = 0$ является уравнением в полных дифференциалах, т.е. существует функция $u(x, y)$ такая, что $du = \mu a dx + \mu b dy$. Тогда решение уравнения $\mu a dx + \mu b dy = 0$ и, следовательно, уравнения $adx + bdy = 0$ будет иметь вид $u(x, y) = C$. Интегрирующий множитель удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial(\mu a)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu b)}{\partial x}. \qquad (9.1.2)$$

Вернемся к рассматриваему примеру. Для уравнения (9.1.2), исходя из вида правой части системы, интегрирующий множитель будем искать в виде $\mu = x^{\alpha} y^{\beta}$. Согласно (9.1.2) уравнение для его нахождения

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[x^{\alpha} y^{\beta}\left(2y + xy^2\right)\right] = -\frac{\partial}{\partial x}\left[x^{\alpha} y^{\beta}\left(2x + 3x^2 y\right)\right],$$

или

$$\beta x^{\alpha} y^{\beta-1}\left(2y + xy^2\right) + x^{\alpha} y^{\beta}(2 + 2xy) =$$
$$= -\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta}\left(2x + 3x^2 y\right) - x^{\alpha} y^{\beta}(2 + 6xy),$$

или

$$2\beta x^{\alpha} y^{\beta} + \beta x^{\alpha+1} y^{\beta+1} + 2x^{\alpha} y^{\beta} + 2x^{\alpha+1} y^{\beta+1} =$$
$$= -2\alpha x^{\alpha} y^{\beta} - 3\alpha x^{\alpha+1} y^{\beta+1} - 2x^{\alpha} y^{\beta} - 6x^{\alpha+1} y^{\beta+1}.$$

Приравнивая коэффициенты у слагаемых с одинаковыми степенями x и y в левой и правой частях последнего равенства, имеем

$$x^{\alpha+1} y^{\beta+1}: \quad \beta + 2 = -3\alpha - 6,$$
$$x^{\alpha} y^{\beta}: \quad 2\beta + 2 = -2\alpha - 2.$$

Из системы $\begin{cases} \beta + 3\alpha = -8, \\ 2\beta + 2\alpha = -4 \end{cases}$ находим, что $\alpha = -3$, $\beta = 1$.

Таким образом, функция $\mu = \dfrac{y}{x^3}$ является интегрирующим множителем в каждой из полуплоскостей $x > 0$ и $x < 0$.

После умножения на интегрирующий множитель уравнение (9.1.1) принимает вид

$$\left(\frac{2y^2}{x^3} + \frac{y^3}{x^2}\right)dx - \left(\frac{2y}{x^2} + \frac{3y^2}{x}\right)dy = 0.$$

Пусть дифференциал du функции $u = u(x, y)$ равен левой части последнего уравнения. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2y^2}{x^3} + \frac{y^3}{x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\left(\frac{2y}{x^2} + \frac{3y^2}{x}\right). \qquad (9.1.3)$$

Интегрируя второе из равенств (9.1.3), получим

$$u(x,y) = -\left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{y^3}{x}\right) + C(x)$$

(постоянная интегрирования по y будет зависеть от x). Тогда $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2y^2}{x^3} + \frac{y^3}{x^2} + C'(x)$. Приравнивая это выражение для $\frac{\partial u}{\partial x}$ полученному ранее первому из равенств (9.1.3), находим $C'(x) = 0$, следовательно, $C(x) = \text{const}$, и решение уравнения (9.1.) имеет вид $\frac{y^2}{x^2} + \frac{y^3}{x} = C$, а функция $u(x,y) = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^3}{x}$ является первым интегралом исходной системы. ❶

Пример 9.2. (9-21). Доказать, что задача Коши $y' = xy + 2 + \sin y$, $y(0) = 0$, имеет решение, определенное при $-\infty < x < \infty$.

② <u>I способ</u>. Утверждение этой задачи, как и теоретических задач 2, 3 и 4 вариантов экзаменационной работы 2002, года вытекает из следующей теоремы.

<u>Теорема</u>. *Пусть* $a(x)$ *– непрерывная функция на всей числовой прямой, функция* $f(x,y)$ *непрерывна на плоскости* $\mathsf{R}^2_{x,y}$*, ограничена и имеет ограниченную на* $\mathsf{R}^2_{x,y}$ *производную* $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$*. Тогда решение задачи Коши* $y' = a(x)y + f(x,y)$*,* $y(x_0) = y_0$*, с произвольными* x_0*,* y_0 *существует и определено на всей числовой прямой.*

<u>Доказательство</u>. ○ Пусть l – любое положительное число. Из непрерывности $a(x)$ следует, что существует число K такое, что $|a(x)| \le K$ при $|x - x_0| \le l$.

По условию $f(x,y)$ и $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ – ограниченные функции: $|f(x,y)| \le M$, $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \le N$.

Задача Коши эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \Big(a(\xi)\, y(\xi) + f\big(\xi, y(\xi)\big) \Big) d\xi . \qquad (9.2.1)$$

Последовательность

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \Big(a(\xi)\, y_n(\xi) + f\big(\xi, y_n(\xi)\big) \Big) d\xi$$

при $y_0(x) \equiv y_0$ сходится равномерно на $[x_0 - l, x_0 + l]$ по признаку Вейерштрасса, т.к. имеют место следующие оценки:

$$\left| y_{n+1}(x) - y_n(x) \right| \le \frac{C(K+N)^{n+1}}{(n+1)!} \left| x - x_0 \right|^n \le Cl \frac{L^n}{(n+1)!}, \qquad (9.2.2)$$

где $C = K|y_0| + M$, $L = (K+N)l$.

Докажем их. ◇ При $n = 0$ имеем

$$|y_1(x) - y_0| \le \left| \int_{x_0}^{x} \big(a(\xi) y_0 + f(\xi, y_0) \big) d\xi \right| \le$$

$$\le \big(K|y_0| + M \big) |x - x_0| = C|x - x_0| .$$

Пусть оценка (9.2.2) справедлива для номера n.

Тогда

$$|y_{n+2}(x) - y_{n+1}(x)| =$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} \Big(a(\xi)\big(y_{n+1}(\xi) - y_n(\xi) \big) + f\big(\xi, y_{n+1}(\xi)\big) - f\big(\xi, y_n(\xi)\big) \Big) d\xi \right| .$$

Из формулы конечных приращений

$$\left| f\big(\xi, y_{n+1}(\xi)\big) - f\big(\xi, y_n(\xi)\big) \right| \le N \left| y_{n+1}(\xi) - y_n(\xi) \right| .$$

Поэтому $$|y_{n+2}(x) - y_{n+1}(x)| \le \int_{x_0}^{x} (K+N) |y_{n+1}(\xi) - y_n(\xi)| d\xi \le$$

$$\le \frac{C(K+N)^{n+1}}{(n+1)!} \int_{x_0}^{x} |\xi - x_0|^{n+1} d\xi \le \frac{C(K+N)^{n+1}}{(n+2)!} |x - x_0|^{n+2} \le Cl \frac{L^{n+1}}{(n+2)!},$$

т.о., оценка (9.2.2) доказана и для номера $n+1$. Т.е. неравенство (9.2.2) доказано для любого n. ◆

Последовательность $y_n(x)$ сходится равномерно на $[x_0 - l, x_0 + l]$ к решению интегрального уравнения (9.2.1), и, следовательно, на $[x_0 - l, x_0 + l]$ существует решение задачи Коши.

Из произвольности $l > 0$ следует утверждение теоремы. ●

<u>II способ</u>. Эти же задачи могут быть решены и другими способами. Дадим, например, второе доказательство рассматриваемой задачи (9-21).

Замена $y(x) = u(x)\, e^{\frac{x^2}{2}}$ приводит к уравнению для функции $u(x)$:

$$u'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(2 + \sin\left(u(x)\, e^{\frac{x^2}{2}}\right)\right)$$

и начальному условию $u(0) = 0$.

Эта новая задача удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши: функция $f(x,u) = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(2 + \sin\left(ue^{\frac{x^2}{2}}\right)\right)$ определена и непрерывна на всей плоскости $\mathsf{R}^2_{x,y}$ и имеет на ней непрерывную производную $\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}$. Теорема утверждает, что если $a > 0$, $b > 0$, то существует решение новой задачи Коши (для u), определенное на отрезке $|x| \le \delta = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$, где M – любое число такое, что $|f(x,u)| \le M$ на прямоугольнике $|x| \le a$, $|u| \le b$. В качестве M можно взять, например, 3. Возьмем $b = 3a$. Тогда $\delta = a$, т.е. на любом отрезке $|x| \le a$ существует и единственно решение задачи Коши для функции $u(x)$, и, следовательно, для функции $y(x)$.

Утверждение о существовании решения на всей числовой прямой следует из произвольности $a > 0$.

З а м е ч а н и е. Первое решение носит более общий характер, хотя и длиннее. Доказанная теорема включает в себя как частные случаи утверждения теоретических задач всех четырех вариантов 2002 года. Она получается развитием доказательства теоремы существования и единственности решения задачи Коши для линейных систем применительно к нелинейным уравнениям рассматриваемого вида. Второе решение короче, но носит более частный характер и существенно использует особенности данного уравнения. ❷

Пример 9.3. (9-51). Пусть вещественная функция $y(x)$, $-\infty < x < \infty$, является решением дифференциального уравнения $y' = \sin^2 x + \sin^2 y$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$.

③ Возьмем $x_1 < x_2$, а в остальном произвольные.

$$y(x_2) - y(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} y'(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\sin^2 x + \sin^2 y(x)\right)dx \geq \int_{x_1}^{x_2} \sin^2 x dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{x_2 - x_1}{2} - \frac{\sin 2x_2 - \sin 2x_1}{4} \geq \frac{x_2 - x_1}{2} - \frac{1}{2}.$$

Зафиксируем какое-либо x_1, тогда $y(x_2) \geq y(x_1) + \dfrac{x_2 - x_1}{2} - \dfrac{1}{2}$ $\xrightarrow[x_2\to+\infty]{} +\infty$.

При фиксированном x_2

$$y(x_1) \leq y(x_2) + \frac{x_1 - x_2}{2} + \frac{1}{2} \xrightarrow[x_1\to-\infty]{} -\infty.$$ ❸

Пример 9.4. (9-52). Пусть вещественная функция $y(x)$, $0 \leq x < +\infty$, является решением дифференциального уравнения $y' = -\left(1 + \sin^2 x + \sin^2 y\right)y$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

④ При любых начальных данных решение задачи Коши для рассматриваемого уравнения единственно. Поэтому если для некоторого x_0 $y(x_0) = 0$, то $y(x) = 0$ для всех x; тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

Пусть $y(x)$ не обращается в 0. Тогда $\frac{y'}{y} =$ $= -\left(1 + \sin^2 x + \sin^2 y\right) \le -1$. Поэтому при $x > 0$ $\int\limits_0^x \frac{y'(\xi)}{y(\xi)} d\xi \le -x$, откуда $\ln \frac{|\,y(x)|}{|\,y(0)|} \le -x$ и, следовательно, $|\,y(x)| \le |\,y(0)|e^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. ❹

Пример 9.5. (9-53) Пусть вещественная функция $y(x)$, $0 \le x < +\infty$, является решением дифференциального уравнения $y' = \left(1 + \sin^2 x + \sin^2 y\right) y$. Пусть существует x_0, $0 \le x_0 < +\infty$, такое, что $y(x_0) \ne 0$. Доказать, что $\lim\limits_{x \to +\infty} |\,y(x)| = +\infty$.

⑤ Из $y(x_0) \ne 0$ следует, что $y(x) \ne 0$ для всех x (см. пример 9.2.).

Тогда $\frac{y'}{y} = 1 + \sin^2 x + \sin^2 y \ge 1$ и $\int\limits_0^x \frac{y'(\xi)}{y(\xi)} d\xi \ge x$. Поэтому $\ln \frac{|\,y(x)|}{|\,y(0)|} \ge x$ и, следовательно, $|y(x)| \ge |\,y(0)|e^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. ❺

Пример 9.6. (9-54) Пусть функция $y(x)$ является решением дифференциального уравнения

$y' = y^2 + \sin^2 x + 2\cos^2 x + 3\sin^2 y$, рассматриваемого при $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$. Доказать, что $y(x)$ определена лишь на конечном промежутке.

⑥ Из уравнения получаем $\frac{y'}{1 + y^2} = 1 + \frac{\cos^2 x + 3\sin^2 y}{1 + y^2} \ge 1$.

Пусть x_1 и x_2, $x_1 < x_2$, принадлежат области определения $y(x)$.

Тогда $\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{y'(x)dx}{1 + y^2(x)} \ge x_2 - x_1$.

Поэтому $\operatorname{arctg} y(x_2) - \operatorname{arctg} y(x_1) \ge x_2 - x_1$.

Множество значений функции $\operatorname{arctg} y$ есть $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому $\pi > x_2 - x_1$, что и доказывает утверждение задачи. ❻

Пример 9.7. (9-61) Доказать, что существует решение уравнения $y'' \operatorname{sh} x + y = 0$, не ограниченное на интервале $(1, +\infty)$.

⑦ Уравнение имеет вид $y'' + g(x)y = 0$, где $g(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$ непрерывная, $g(x) > 0$, и $\int\limits_1^{+\infty} g(x)dx$ сходится.

Пусть $y(x)$ – ограниченное решение: $|y(x)| \le C$.

Тогда $|y''(x)| = |g(x)y(x)| \le Cg(x)$ и $\int\limits_1^{+\infty} y''(x)dx$ сходится. Отсюда следует, что $y'(x) = y'(1) + \int\limits_1^x y''(\xi)d\xi$ имеет конечный предел при $x \to +\infty$. Этот предел равен нулю, т.к. в противном случае $y(x)$ была бы неограниченной.

Итак, если $y(x)$ ограниченная, то $y'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Если предположить, что все решения ограниченные, то взяв два линейно независимых решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, будем иметь $y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, т.е. определитель Вронского $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, что противоречит формуле Остроградского–Лиувилля, т.к. по этой формуле $W(x) = \text{const} \ne 0$. ❼

Пример 9.8. (9-81) Доказать, что любое решение уравнения $y'' + (2 + \cos 3x)y = 0$ имеет хотя бы один нуль на отрезке $[-1, 3]$.

⑧ $Q(x) = 2 + \cos 3x \ge 1$ на $[-1, 3]$. Уравнение $z'' + z = 0$ имеет решение $z_0(x) = \sin(x+1)$, которое обращается в нуль в точках

$x_1=-1$ и $x_2=\pi-1$. По теореме Штурма между x_1 и x_2 лежит хотя бы один нуль каждого нетривиального решения уравнения $y''+(2+\cos 3x)y=0$. ❽

Пример 9.9. (9-82) Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $\sqrt{1+x^3}\,y''+y=0$ имеет не более одного нуля на отрезке $[2,\,6]$.

⑨ $q(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}\le\dfrac{1}{3}$ на $[2,\,6]$. Уравнение $z''+\dfrac{z}{3}=0$ имеет решение $z_0(x)=\cos\left(\dfrac{x-4}{\sqrt{3}}\right)$, которое не обращается в нуль на $[2,\,6]$. Предположим, что какое-либо нетривиальное решение уравнения $\sqrt{1+x^3}\,y''+y=0$ имеет на отрезке $[2,\,6]$ два различных нуля x_1 и x_2. По теореме Штурма между x_1 и x_2 лежит хотя бы один нуль функции $z_0(x)$, что невозможно. ❾

9.2. Задачи для самостоятельного решения

225. (9-01) Найти первый интеграл системы $\begin{cases}\dot{x}=2x^3-xy^3,\\ \dot{y}=5y^4+7x^2y.\end{cases}$

226. (9-02) Найти первый интеграл системы $\begin{cases}\dot{x}=x^2+xy^2,\\ \dot{y}=3xy-2y^3.\end{cases}$

227. (9-03) Найти первый интеграл системы $\begin{cases}\dot{x}=8xy^5-3x^5,\\ \dot{y}=3x^4y+y^6.\end{cases}$

228. (9-22) Доказать, что задача Коши $y'=2xy+1+\cos y$, $y(0)=1$, имеет решение, определенное при $-\infty<x<+\infty$.

229. (9-23) Доказать, что задача Коши $y'=x^2y+2+e^{-y^2}$, $y(1)=0$, имеет решение, определенное при $-\infty<x<+\infty$.

230. (9-24) Доказать, что задача Коши $y'=2x^2y+1+\dfrac{y}{1+y^2}$, $y(1)=1$, имеет решение, определенное при $-\infty<x<+\infty$.

231. (9-62) Доказать, что существует решение уравнения $x^3 y'' + y = 0$, не ограниченное на интервале $(1, +\infty)$.

232. (9-63) Доказать, что существует решение уравнения $y'' \operatorname{ch} x + y = 0$, не ограниченное на интервале $(1, +\infty)$.

233. (9-64) Доказать, что существует решение уравнения $x^2 \sqrt{x} y'' + y = 0$, не ограниченное на интервале $(1, +\infty)$.

234. (9-83) Доказать, что любое решение уравнения $y'' + x^x y = 0$ имеет хотя бы один нуль на отрезке [2,4].

235. (9-84) Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $\sqrt{15 + x} y'' + y = 0$ имеет не более одного нуля на отрезке [1,4].

9.3. Ответы

225. $u = x^5 y + \dfrac{x^7}{y^2}$, интегрирующий множитель $\dfrac{x^4}{y^3}$.

226. $u = x^2 y - \dfrac{x^3}{y}$, интегрирующий множитель $\dfrac{x}{y^2}$.

227. $u = x^3 y^3 - \dfrac{y^8}{x}$, интегрирующий множитель $\dfrac{y^2}{x^2}$.

§ 10. ТЕСТ

Варианты тестов, предлагающиеся на переэкзаменовке по дифференциальным уравнениям, содержат облегченные варианты задач, соответствующие письменной контрольной работе.

10.1. Пример варианта тестирования

1. Решить уравнение $y'+2xe^{y}=0$.

   Ответ: $y=-\ln(x^2+C)$.

2. Записать действительное общее решение соответствующего однородного уравнения и указать, в каком виде следует искать частное решение неоднородного уравнения по методу неопределенных коэффициентов:

$$y''-2y'+y=x^2e^x+\cos x.$$

   Ответ: $y_{\text{о}}=(C_1+C_2x)e^x$,

$$y_{\text{н}}=x^2(ax^2+bx+c)+A\sin x+B\cos x.$$

3. Понизить порядок уравнения

$$y^2y''+(y')^3\sin x+y^3=0.$$

   Ответ: $z'+z^2+z^3\sin x+1=0$, замена $y'=z(x)y$.

4. Записать уравнение Эйлера для задачи со свободным концом и недостающее граничное условие:

$$J(y)=\int_1^2\left(x^3(y')^2+xy'+\sin y\right)dx, \qquad y(2)=10.$$

   Ответ: $2x^3y''+6x^2y'-\cos y+1=0, \quad y'(1)=-1/2$.

5. Найти положение равновесия системы, определить его тип и начертить фазовые траектории линеаризованной системы, указав на них направление движения:

$$\begin{cases}\dot{x}=-2x+y+5xy,\\ \dot{y}=-3y.\end{cases}$$

   Ответ: $M(0,0)$: $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}$, $\lambda_1=-2$, $h_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; $\lambda_2=-3$, $h_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, устойчивый узел, касание к оси Ox.

6. Используя формулу Лиувилля-Остроградского, найти общее решение уравнения

$$4xy''-4(x+1)y'+\left(2+\frac{3}{x}\right)y=0,$$

если известно его частное решение $y_1(x)=\sqrt{x}$.

Ответ: $y=C_1\sqrt{x}+C_2\sqrt{x}e^x$.

10.2. Задачи для самостоятельного решения

236. (1-92) Решить уравнение $y'+3x^2y^2=0$.

237. (1-93) Свести уравнение $y'=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$ к уравнению с разделяющимися переменными.

238. (1-94) Свести уравнение $y'=\cos\left(\frac{y}{x}\right)$ к уравнению с разделяющимися переменными.

239. (2-92) Записать действительное общее решение соответствующего однородного уравнения и указать, в каком виде следует искать частное решение неоднородного уравнения по методу неопределенных коэффициентов:

$$y''+2y'+2y=xe^{-x}\sin x+e^{5x}.$$

240. (2-93) Найти все действительные решения уравнения $y^{(4)}-16y=1$.

241. (2-94) Найти все действительные решения уравнения $y^{(4)}+9y''=e^x$.

242. (3-92) Понизить порядок уравнения $y''+y'\cos y+y^6=0$.

243. (3-93) Решить систему $\begin{cases}\dot{x}=x-4y,\\ \dot{y}=x-3y,\end{cases}$ $(\lambda_{1,2}=-1)$.

244. (3-94) Решить систему $\begin{cases}\dot{x}=5x+y,\\ \dot{y}=-9x-y,\end{cases}$ $(\lambda_{1,2}=2)$.

245. (4-92) Записать уравнение Эйлера для задачи со свободным концом и недостающее граничное условие:

$$J(y)=\int_2^3\left(x(y')^2-x^2y'+e^{2y}\right)dx, \qquad y(2)=-8.$$

246. (4-93) Записать уравнение Эйлера для задачи $J(y)=\int_0^2\left((y'')^2+(y')^2\sin x-xy\right)dx$,
$y(0)=1,\ y'(0)=0,\ y(2)=y'(2)=7.$

247. (4-94) Записать уравнение Эйлера для задачи $J(y)=\int_{-1}^0\left((y'')^2+x^2(y')^2+y\cos x\right)dx$,
$y(-1)=y'(-1)=1,\ y(0)=0,\ y'(0)=3.$

248. (5-92) Найти положение равновесия системы, определить его тип и начертить фазовые траектории линеаризованной системы, указав на них направление движения: $\begin{cases}\dot{x}=4x,\\ \dot{y}=3x+y-2x^2y.\end{cases}$

249. (5-93) Найти положение равновесия системы, определить его тип и начертить фазовые траектории линеаризованной системы, указав на них направление движения: $\begin{cases}\dot{x}=-x+4y+6xy,\\ \dot{y}=3y.\end{cases}$

250. (5-94) Найти положение равновесия системы, определить его тип и начертить фазовые траектории линеаризованной системы, указав на них направление движения: $\begin{cases}\dot{x}=5y,\\ \dot{y}=-x+2y-8xy.\end{cases}$

251. (6-92) Используя формулу Лиувилля-Остроградского, найти общее решение уравнения
$$x^2y''+(x^2-6x)y'+\left(12-3x\right)y=0,$$
если известно его частное решение $y_1(x)=x^3$.

252. (6-93) Найти общее решение уравнения
$$xe^y\frac{\partial u}{\partial x}+2x^2\frac{\partial u}{\partial y}+3ze^y\frac{\partial u}{\partial z}=0 \quad (z>0).$$

253. (6-94) Найти общее решение уравнения
$$3z^2\frac{\partial u}{\partial x}+5xy\frac{\partial u}{\partial y}+xz\frac{\partial u}{\partial z}=0 \quad (y>0).$$

10.3. Ответы

236. $y=(x^3+C)^{-1}, \quad y=0$.

237. $z'x+z=\sqrt{1+z^2}$, замена $y=zx$.

238. $z'x+z=\cos z$, замена $y=zx$.

239. $y_{\text{о}}=(C_1\sin x+C_2\cos x)e^{-x}$,

$y_{\text{н}}=x(a_1x+b_1)e^{-x}\sin x+x(a_2x+b_2)e^{-x}\cos x+Ae^{5x}$.

240. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\sin 2x+C_4\cos 2x-1/16$.

241. $y=C_1+C_2x+C_3\sin 3x+C_4\cos 3x+e^x/10$.

242. $pp'+p\cos y+y^6=0$, замена $y'=p(y)$.

243. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\left[t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]$.

244. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\left[t\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]$.

245. $xy''+y'-e^{2y}-x=0, \quad y'(3)=3/2$.

246. $2y^{(4)}-2y''\sin x-2y'\cos x-x=0$.

247. $2y^{(4)}-2x^2y''-4xy'+\cos x=0$.

248. $M(0,0)$: $\begin{pmatrix}4&0\\3&1\end{pmatrix}$, $\lambda_1=1$, $h_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\lambda_2=4$, $h_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, неустойчивый узел, касание к оси Oy.

249. $M(0,0)$: $\begin{pmatrix}-1&4\\0&3\end{pmatrix}$, $\lambda_1=-1$, $h_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\lambda_2=3$, $h_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, седло.

250. $M(0,0)$: $\begin{pmatrix}0&5\\-1&2\end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2}=1\pm 2i$, неустойчивый фокус, по часовой стрелке.

251. $y=C_1x^3+C_2x^3e^{-x}$.

252. $u=F\left(x^2-e^y,\dfrac{x^3}{z}\right)$.

253. $u=F\left(x^2-3z^2,\dfrac{z^5}{y}\right)$.

§ 11. ЗАДАЧИ ИЗ ПИСЬМЕННОЙ РАБОТЫ ГКЭ

Письменная работа Государственного Квалификационного Экзамена (ГКЭ) по математике также содержит задачи по дифференциальным уравнениям.

11.1. Задачи для самостоятельного решения

254. (13-101) Найти интегральную кривую уравнения $\left(3x+y^4\right)y'=y$, проходящую через точку $(1;1)$.
255. (13-102) Найти интегральную кривую уравнения $2xy'+3y+x^4y^3=0$, проходящую через точку $(1;1)$.
256. (13-103) Найти интегральную кривую уравнения $\left(2x+3y^5\right)y'=y$, проходящую через точку $(1;1)$.
257. (13-104) Найти интегральную кривую уравнения $xy'+5y-2x^3y^2=0$, проходящую через точку $(1;1)$.
258. (13-105) Найти интегральную кривую уравнения $\left(5x-3y^2\right)y'=y$, проходящую через точку $(1;1)$.
259. (14-101) Найти все действительные решения системы уравнений $\begin{cases}\dot{x}=x-2y,\\ \dot{y}=x+3y.\end{cases}$
260. (14-102) Найти все действительные решения системы уравнений $\begin{cases}\dot{x}=3x-y,\\ \dot{y}=x+y.\end{cases}$
261. (17-1105) Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases}\dot{x}=\ \ x+2y,\\ \dot{y}=-2x-3y.\end{cases}$
262. (15-101) Найти все действительные решения уравнения $y'''+y''-5y'+3y=16e^{-3x}$.
263. (15-102) Найти все действительные решения уравнения $y'''+y''-5y'+3y=16e^{-3x}$.
264. (15-103) Найти все действительные решения уравнения $y'''+y''-5y'+3y=16e^{-3x}$.

265. (15-104) Найти все действительные решения уравнения $y''' + y'' - 5y' + 3y = 16e^{-3x}$.

266. (18-1105) Найдите общее решение дифференциального уравнения $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 2x$. Решите для этого уравнения задачу Коши $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

267. (18-1106) Найдите общее решение дифференциального уравнения $x^2 y'' + xy' - y = \frac{2}{x}$. Решите для этого уравнения задачу Коши $y(1) = 2$, $y'(1) = -1$.

268. (18-1107) Найдите общее решение дифференциального уравнения $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x$. Решите для этого уравнения задачу Коши $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.

269. (18-1108) Найдите общее решение дифференциального уравнения $x^2 y'' - 2y = 3x^2$. Решите для этого уравнения задачу Коши $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

11.2. Ответы

254. $x = y^4$.

255. $y = \frac{1}{x^2}$.

256. $x = y^5$.

257. $y = \frac{1}{x^3}$.

258. $x = y^2$.

259. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \sin t \end{pmatrix} e^{2t}$.

260. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{2t}$.

261. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{-t}$.

262. $y = xe^{-3x} + C_1 e^x + C_2 xe^x + C_3 e^{-3x}$.

263. $y = xe^x + C_1e^x + C_2e^{2x}\cos x + C_3e^{2x}\sin x$.

264. $y = xe^{-x} + C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3e^{-x}$.

265. $y = xe^x + C_1e^x + C_2e^{3x}\cos x + C_3e^{3x}\sin x$.

266. Общее решение: $y(x) = -x\ln x + C_1x + C_2x^3$.

Решение ЗК: $y(x) = -x\ln x - x + x^3$.

267. Общее решение: $y(x) = -\frac{1}{x}\ln x + C_1x + \frac{C_2}{x}$.

Решение ЗК: $y(x) = -\frac{1}{x}\ln x + x + \frac{1}{x}$.

268. Общее решение: $y(x) = -x\ln x + C_1x^2 + C_2x$.

Решение ЗК: $y(x) = -x\ln x + x^2$.

269. Общее решение: $y(x) = x^2\ln x + \frac{C_1}{x} + C_2x^2$.

Решение ЗК: $y(x) = x^2\ln x + \frac{1}{x}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961.
2. *Егоров А.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. – 2-е изд. – М.: Физматлит, 2003.
3. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – 7-е изд. – М.: Изд-во МГУ, 1984.
4. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – 5-е изд. – М.: Наука, 1985.
5. *Романко В.К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2000.
6. *Сборник* задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению /под ред. В.К. Романко. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.
7. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – 7-е изд. – М.: ГИФМЛ, 1958.
8. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. – М.: Физматгиз, 1985.
9. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – 2-е изд. – М.: Наука, 1985.
10. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1979, 1985, 1992.
11. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ

ИПАТОВА Валентина Михайловна

ПЫРКОВА Ольга Анатольевна

СЕДОВ Валерий Николаевич

Редактор *В.А. Дружинина*. Корректор *О. П. Котова.*

Подписано в печать 05.10.2012. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 8,75.
Уч.- изд. л. 6,5. Тираж 150 экз. Заказ № 254.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: rio@mail.mipt.ru.

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: polygraph@miptic.ru.