25 - мавзу: Fazoda to`g`ri chiziqning berilish usullari. To`g`ri chiziqlarning fazoda o`zaro joylashuvi.

Режа:

1. Fazoda to`g`ri chiziqning berilish usullari.
2. To`g`ri chiziqlarning fazoda o`zaro joylashuvi.

Fazodagi to'g'ri chiziq

Fazoda d to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. Bu to'g'ri chiziqqa parallel ixtiyoriy vektorni d to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deyiladi. d to'g'ri chiziq cheksiz ko'p yo'naltiruvchi vektorlarga ega ekanligi ravshan, bularning ixtiyoriy ikkitasi kollinear.

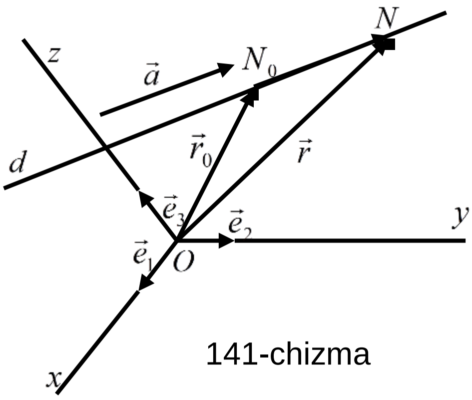
Barcha bunday vektorlar to'plami nol vektor bilan birga, d to'g'ri chiziqning bir o'lchovli vektor fazosini tashkil qiladi.

Fazoda affin koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin.

Fazodagi to'g'ri chiziqning vaziyati:

1) d to'g'ri chiziqning boshlang'ich nuqtasi va yo'naltiruvchi vektorining berilishi bilan;
2) Ikki nuqtasining berilishi bilan;
3) d to'g'ri chiziq bo'ylab kesishuvchi ikki tekislikning berilishi bilan to'liq aniqlanadi.

1. Fazodagi d to'g'ri chiziq o'zining $N_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasi va $\vec{a}(l, m, n)$ yo'naltiruvchi vektorining berilishi bilan to'liq aniqlanadi (141-chizma).



141-chizma

To'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasini $N(x, y, z)$ olaylik. $\overrightarrow{ON_0} = \vec{r}_0$, $\overrightarrow{ON} = \vec{r}$ belgilaylik. $\overrightarrow{N_0N} = \lambda\,\vec{a}$, $\overrightarrow{N_0N} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{ON_0}$. Bulardan

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\,\vec{a} \qquad (18.1)$$

Bu tenglamani d to'g'ri chiziqning vektor parametrik tenglamasi deyiladi. λ parametrga har xil qiymatlar berish bilan to'g'ri chiziqqa tegishli nuqtalarning radius vektorlari topiladi.

(18.1) tenglamadan d to'g'ri chiziqning ushbu parametrik tenglamasini yozish mumkin.

$$\begin{aligned} x &= x_0 + l\lambda, \\ y &= y_0 + m\lambda, \\ z &= z_0 + n\lambda. \end{aligned} \qquad (18.2)$$

Bu tenglamalar sistemasini d to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi deyiladi.

Yuqoridagi (18.2) tenglamadan λ ni yo'qotib,

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \qquad (18.3)$$

tenglamaga ega bo'lamiz, bu tenglamani to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi, bunda $\vec{a}\,(l, m, n) \neq \vec{0}$.

2. Ikki nuqtasi bilan berilgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

Agar d to'g'ri chiziqning ikkita $N_1(x_1, y_1, z_1)$ va $N_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalari berilsa, $d = N_1N_2$ to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida $\overline{N_1\vec{N}_2} = \vec{a}$ vektorni, $N_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta sifatida $N_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtani olish mumkin, u holda
$l = x_2 - x_1, \quad m = y_2 - y_1, \quad n = z_2 - z_1.$

(18.3) tenglamadan foydalanib, d to'g'ri chiziq tenglamasini yozamiz.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (18.4)$$

(18.3) tenglama ikki nuqtasi bilan berilgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

3. Ikkita tekislikning kesishi bilan aniqlangan to'g'ri chiziq tenglamasi.

Kesishuvchi T_1 va T_2 tekisliklar ushbu:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_1 &: A_1\, x + B_1\, y + C_1\, z + D_1 = 0 \\ \mathrm{T}_2 &: A_2\, x + B_2\, y + C_2\, z + D_2 = 0 \end{aligned} \qquad (18.5)$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsin. Bu tenglamalar sistemasi fazodagi to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.

To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini yozish uchun bu to'g'ri chiziqning bitta nuqtasini va yo'naltiruvchi vektorini bilish yetarlidir. (18.5) tenglama uch noma'lumli ikkita tenglama, demak o'zgaruvchilardan biriga, masalan z ga $z = z_0$ qiymat berib, hosil qilingan ikki noma'lumli ikkita tenglamani yechib $x = x_0$, $y = y_0$ qiymatlarni topamiz (bunda $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ deb faraz qilamiz).

Natijada $A(x_0, y_0, z_0)$ nuqta d to'g'ri chiziqda yotadi, u holda (18.5) ni quyidagicha yozib olamiz:

$A_1\,(x - x_0) + B_1\,(y - y_0) + C_1\,(z - z_0) = 0,$

$A_2\,(x - x_0) + B_2\,(y - y_0) + C_2\,(z - z_0) = 0.$

Bulardan quyidagilarni topamiz:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \qquad (18.6)$$

Agar (64) tenglamani dekart koordinatalar sistemasida qarasak, T_1 tekislikning normal vektori $\vec{n}_1\,(A_1, B_1, C_1)$, T_2 tekislikning normal vektori $\vec{n}_2\,(A_2, B_2, C_2)$ bo'ladi. d to'g'ri chiziq yo'naltiruvchi vektori $\vec{p} = [\vec{n}_1\ \vec{n}_2]$ dan iborat bo'ladi.

Ikkita to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyati

Fazodagi ikki d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlarning qanday vaziyatlarda bo'lishini o'rganaylik. Bu to'g'ri chiziqlar o'zlarining parametrik tenglamalari bilan berilgan bo'lsin.

$$d_1:\begin{cases} x = x_1 + l_1\,t, \\ y = y_1 + m_1\,t, \\ z = z_1 + n_1\,t. \end{cases} \qquad d_2:\begin{cases} x = x_2 + l_2\,t, \\ y = y_2 + m_2\,t, \\ z = z_2 + n_2\,t. \end{cases}$$

Bu yerda $M_1(x_1, y_1, z_1) \in d_1$, $\vec{p}_1(l_1, m_1, n_1)$ vektor d_1 to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori. $M_2(x_2, y_2, z_2) \in d_2$, $\vec{p}_2(l_2, m_2, n_2)$ vektor d_2 to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori. $\overline{M_1 M_2}$, $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ vektorlarga qarab, d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlarni fazodagi vaziyatlarini to'la aniqlash mumkin.

Ushbu to'rtta hollardan biri o'rinli bo'ladi:

1) d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar ayqash;
2) d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar kesishadi;
3) d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar parallel;
4) d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushadi.

Bu hollarning har birini alohida ko'rib chiqamiz. Berilgan d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlarning bir tekislikda yotishi uchun $\overline{M_1 M_2}$, $\vec{p}_1$ va $\vec{p}_2$ vektorlarning komplanar bo'lishi zarur va yetarlidir, demak

$$\left(\overline{M_1 M_2}\ \vec{p}_1\ \vec{p}_2\right) = 0 \text{ yoki } \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (19.1)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

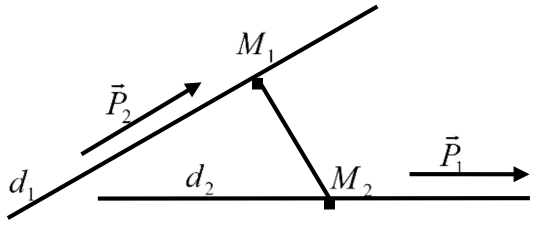
Ta'rif. Agar ikkita to'g'ri chiziq bir tekislikda yotmasa, u holda bunday to'g'ri chiziqlarni ayqash to'g'ri chiziqlar deyiladi.

1) Demak, ikkita d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar ayqash bo'lishi uchun,

$$\left(\overline{M_1 M_2}\ \vec{p}_1\ \vec{p}_2\right) \neq 0 \qquad (19.2)$$

shartning o'rinli bo'lishi zarur va yetarlidir.

2) d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar kesishsa, ular bir tekislikda yotadi, demak, ular uchun (18.1) shart bajariladi. Shunday qilib, d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlarning kesishi uchun $\left(\overline{M_1 M_2}\ \vec{p}_1\ \vec{p}_2\right) = 0$ bo'lib, $\vec{p}_1$ va $\vec{p}_2$ vektorlar nokollinear bo'lishi zarur va yetarlidir.
3) Agar d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar bir tekislikda yotib, umumiy nuqtaga ega bo'lmasa, ular parallel bo'ladi.
Bu vaqtda $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$ bo'lib, $\overline{M_1 M_2}$ va $\vec{p}_1$ vektorlar nokollinear bo'ladi. Demak, d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlarning parallel bo'lishi uchun $\vec{p}_1$ va $\vec{p}_2$ vektorlarning kollinear, $\overline{M_1 M_2}$ va $\vec{p}_1$ vektorlarning nokollinear bo'lishi zarur va yetarlidir.



142-

4) d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlarning ustma-ust tushishi uchun

$$\vec{p}_1 = \lambda \overrightarrow{M_1M_2},$$
$$\vec{p}_2 = \mu \overrightarrow{M_1M_2}.$$
shartlarni bajarishi zarur va yetarli ekanligi ravshan (142-chizma).