13 - mavzu: Tekislikda harakat klassifikatsiyasi. Harakat gruppasi va uning qism gruppalari.

Режа :

1. Tekislikda harakat klassifikatsiyasi.
2. Harakat gruppasi va uning qism gruppalari.

Harakatning analitik ifodasi

To'g'ri burchakli dekard koordinatalar sistemasini almashtirish formulasi (6.9) dan foydalanamiz.

Teorema. Tekislikdagi ixtiyoriy nuqta va uning aksini koordinatalari

$$x=x^1\cos\alpha-\varepsilon y^1\sin\alpha+x_0,$$
$$y=x^1\sin\alpha+\varepsilon y^1\cos\alpha+y_0 \qquad (29.1)$$

formula bilan bog'langan bo'lsa, u holda bu formula tekislikdagi harakatni aniqlaydi.

Isboti. 1. Tekislikning ixtiyoriy A nuqtasini (29.1) formula yordamida A^1 nuqtaga o'tkazuvchi f almashtirish bir qiymatlidir.

Haqiqatan ham, (29.1) formulada determinant

$$\begin{vmatrix}\cos\alpha & -\varepsilon\sin\alpha\\ \sin\alpha & \varepsilon\cos\alpha\end{vmatrix}=\varepsilon(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\varepsilon\neq 0;$$

agar x,y larni berilgan deb olsak, (29.1) tenglamalar sistemasi x,y larga nisbatan bir qiymatli echimga ega. Shu bilan har birga $A^1(x^1,y^1)$ nuqta bitta faqat bitta acl $A(x,y)$ nuqtaga ega bo'ladi.

Demak (29.1) formula tekislikdagi birorta bir qiymatli f almashtirishni aniqlaydi.

2. Tekislikdagi $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ nuqtalar, ularning akslari $A_1(x^1{}_1,y^1{}_1)$ va $B_1(x^1{}_2,y^1{}_2)$ bo'lsin. (29.1) almashtirishga ko'ra ushbu koordinatalarga ega bo'ladi:

$$x^1{}_1=x_1\cos\alpha-\varepsilon y_1\sin\alpha+x_0,$$
$$y^1{}_1=x_1\sin\alpha+\varepsilon y_1\cos\alpha+y_0$$
$$x^1{}_1=x_2\cos\alpha-\varepsilon y_2\sin\alpha+x_0,$$
$$y^1{}_1=x_2\sin\alpha+\varepsilon y_2\cos\alpha+y_0$$

u holda

$$\rho(A^1,B^1)=\sqrt{(x_2^1-x_1^1)^2+(y_2^1-y_1^1)^2}=\sqrt{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(x_2-x_1)^2+(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(y_2-y_1)^2}=$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\rho(A,B)\text{, bunda } \varepsilon=+1$$

(29.1) almashtirish ta'rifga ko'ra harakat bo'ladi.

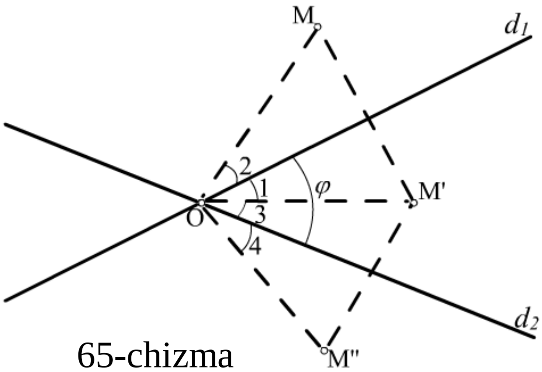
Shunday qilib tekislikdagi harakat (29.1) formula bilan aniqlanadi va uni harakatning analitik ifodasi deyiladi.

Harakatni o'qli simmetriyalar ko'paytmasiga yoyish

1-teorema. *Agar ikkita o'qli simmetriyaning d_1 va d_2 o'qlari O nuqtada kesishib φ burchak hosil qilsa, ularning ko'paytmasi O nuqta atrofida 2? burchakka burish bo'ladi va, aksincha, tekislikni O nuqta atrofida φ burchakka burish o'qlari O nuqtada kesishib, o'zaro $\frac{\varphi}{2}$ burchak hosil qiluvchi ikkita o'qli simmetriya ko'paytmasiga ajraladi.*

Isbot. O nuqtada o'zaro φ burchak hosil qilib kesishuvchi d_1, d_2 to'g'ri chiziqlar tekisligida ixtiyoriy M nuqta olamiz. M' nuqta tekislikning d_1 o'qli simmetriyadagi M nuqtaning obrazi M'' nuqta d_2 o'qli simmetriyada M' nuqtaning obrazi bo'lsin. (65-chizma). Bu ikki o'qli simmetriyani ketma-ket bajarsak, M nuqta M'' nuqtaga o'tadi. O'qli simmetriya harakat bo'lgani uchun quyidagilarni yoza olamiz:

$\rho(O,M)=\rho(O,M')$, $\rho(O,M')=\rho(O,M'')$ bundan $\rho(O,M)=\rho(O,M'')$.



65-chizma

Shuningdek, $\angle 1=\angle 2$ va $\angle 3=\angle 4$, lekin $\angle 1+\angle 3=\varphi \Rightarrow \angle 2+\angle 4=\varphi$. Shunday qilib, M nuqtani M'' nuqtaga o'tkazuvchi $S_{d_2}\cdot S_{d_1}$ almashtirish uchun quyidagi ikki shart bajariladi:

$\rho(O,M)=\rho(O,M'')$, $(\angle MOM'')=2\varphi$.

Demak $S_{d_2}\cdot S_{d_1}$ almashtirish tekislikda O nuqta atrofida 2? burchakka burishdan iborat.

Aksincha R_O^{α} tekislikda O nuqta atrofida α burchakka burish bo'lsin. O nuqta orqali shunday ikki d_1, d_2 to'g'ri chiziqni o'tkazamizki, ular orasidagi burchak $(d_1\hat{,}d_2)=\frac{\varphi}{2}$ bo'lsin. Tekislikni avval d_1 to'g'ri chiziqqa nisbatan, so'ngra d_2 to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirishga duch keltiramiz. Teoremaning birinchi qismiga ko'ra bu o'qli simmetriyalarning ko'paytmasi $S_{d_2} \cdot S_{d_1}$ almashtirish tekislikda O nuqta atrofida $2(\frac{\varphi}{2}) = \varphi$ burchakka burish bo'ladi, bundan $R_O^{\varphi} = S_{d_2} \cdot S_{d_1}$.

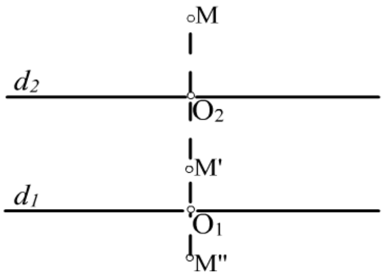
2- teorema. *Agar ikkita o'qli simmetriyaning o'qlari d_1, d_2 parallel bo'lsa, u holda ularning ko'paytmasi uzunligi $2\rho(d_1, d_2)$ bo'lgan va bu o'qlarga perpendikulyar $\vec{p} \neq 0$ vektor qadar parallel ko'chirishdir va aksincha tekislikni $\vec{p} \neq 0$ vektor qadar parallel ko'chirish , o'qlari parallel va o'qlari orasidagi masofa $\frac{|p|}{2}$ bo'lgan ikkita o'qli simmetriya ko'paytmasiga ajraladi.*

Isbot. $d_1 // d_2$ to'g'ri chiziqlar tekisligida ixtiyoriy M nuqta olamiz. Tekislikda avval d_1 to'g'ri chiziqqa nisbatan, so'ngra d_2 to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirishni bajaraylik.

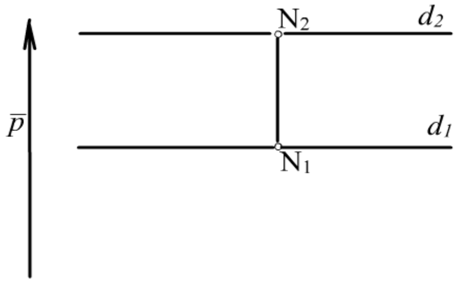
$$S_{d_2}(M) = M', S_{d_1}(M') = M''$$

bo'lsin (66-chizma). Natijaviy $S_{d_2} \cdot S_{d_1}$ almashtirish M nuqtani M'' *nuqtaga* o'tkazadi.

O'qli simmetriya ta'rifiga ko'ra $\rho(O_1,M)=\rho(O_1,M')$, $\rho(O_2,M')=\rho(O_2,M'')$. Bu yerda M_1 nuqta MM' kesmaning, O_2 nuqta esa $M'M''$ kesmaning o'rtasi:



66-chizma



67-chizma

$\rho(M,M'')=\rho(M,O_2)+\rho(O_2,O_1)+\rho(O_1,M'')=\rho(O_1,M')+\rho(O_1,O_2)+\rho(M',O_2)=2\rho(O_1,O_2)$ (30.1)

M nuqta d_1, d_2 to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan polosaga tegishli bo'lganda ham (30.1) tenglikning bajarilishiga ishonch hosil qilish mumkin.(67-chizma).

(30.1) dan ko'rinib turibdiki, tekislikda $S_{d_2} \cdot S_{d_1}$ almashtirish uni $2\rho(O_1,O_2)$

uzunlikdagi vektor qadar parallel ko'chirishdan iborat.

Aksincha, $T_{\vec{p}}$ tekislikda $\vec{p}$ vektor qadar parallel ko'chirish bo'lsin. Tekislikda shunday N_1, N_2 nuqtalarni olamizki, $\overrightarrow{N_1N_2} = \frac{1}{2}\vec{p}$ bo'lsin. N_1, N_2 nuqtalar orqali N_1N_2 to'g'ri chiziqqa perpendikulyar d_1, d_2 to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz (67-chizma). U holda $d_1 // d_2$ va $\rho(d_1, d_2) = \frac{1}{2}|\vec{p}|$ bo'ladi, $S_{d_2} \cdot S_{d_1}$ ni bajarsak , teoremaning birinchi qismiga ko'ra almashtirish tekislikda $\vec{p}$ vektor yo'nalishida $2(\frac{1}{2}|\vec{p}|) = |\vec{p}|$ masofa qadar parallel ko'chirish bo'ladi. Demak, $T_{\vec{p}} = S_{d_2} \cdot S_{d_1}$.