4 – Мавзу. Vektorlarning skalyar, vektor va aralash ko’paytmalari.

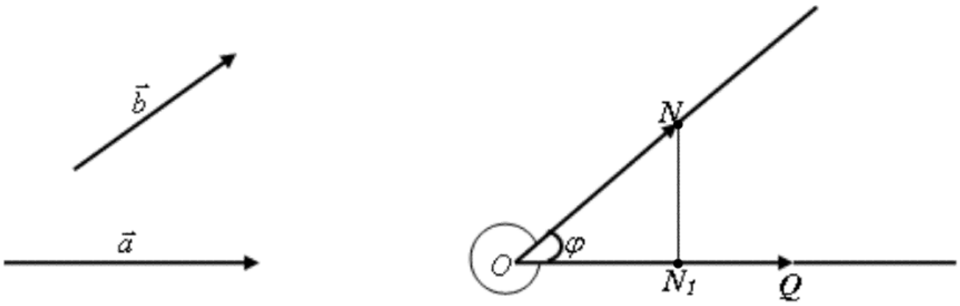
Режа:

1. **Vektorlarning skalyar ko’paytmalari.**
2. **Vektorlarning vektor va aralash ko’paytmalari**

Vektorlarning skalyar ko’paytmasi.

Yuqorida, vektorlar ustidagi chiziqli amallar: vektorni qo’shish va ayirish, vektorni songa ko’paytirish amallari bilan tanishdik. Endi chiziqli bo’lmagan yangi amal, vektorni skalyar ko’paytirish amali bilan tanishaylik.

Fazoda (yoki tekislikda) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar berilgan bo’lsin. O nuqtaga $\vec{a}=\overrightarrow{OQ}, \vec{b}=\overrightarrow{ON}$ vektorlarni qo’yamiz (11-chizma).



11-chizma

O,Q,N nuqtalar orqali aniqlangan tekislikda, OQ va ON nurlar yordamida ikkita burchak aniqlanadi, bulardan biri φ ikkinchisi $2\pi-\varphi$.

Bu burchaklarning eng kichigini $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak deb aytiladi va $(\vec{a}\ \vec{b})=\varphi$ ko’rinishda belgilaymiz.

1-tarif. $\vec{A}$ va $\vec{B}$ vektorlarning uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusini ko’paytirishdan hosil bo’lgan son bu vektorlarning skalyar ko’paytmasi deb aytiladi.

Vektorlarning skalyar ko’paytmasi $\vec{A}\cdot\vec{B}$ yoki $\overrightarrow{AB}$ ko’rinishida yoziladi.

Ta’rifga ko’ra

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta, \qquad (5.1)$$[1]

[1] Introduction to Calculus Volume II. p 7, mazmun – mohiyatidan foydalanildi

Natija. Nol vektorning har qanday vektorga skalyar ko'paytmasi nolga teng.

Skalyar ko'paytma xossalari

1^0. Ixtiyoriy ikkita vektor uchun $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$; (komutativ)

2^0. Ixtiyoriy uchta $\vec{A}$, $\vec{B}$ va $\vec{C}$ vektorlar uchun $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$;

3^0. Ixtiyoriy $\vec{A}$ vektor uchun $\vec{A}\cdot\vec{A}=A^2=\left|\vec{A}\right|^2$

4^0. $\vec{a}\,\vec{a}$ coni $\vec{a}$ vektorning skalyar kvadrati deyiladi va $\vec{a}^{\,2}$ kabi belgilanadi. $\sqrt{\vec{a}^{\,2}}$ soni $\vec{a}$ vektorning uzunligi deyiladi va $|\vec{a}|$ bilan belgilanadi.

5^0. Agar $\vec{a}=0$ bo'lsa, $\vec{a}^{\,2}=0$.[2]

Isbot. 1^0-xossani isbotlaylik.

Ta'rifga ko'ra $\begin{matrix}\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})\\ \vec{b}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{b}\wedge\vec{a})\end{matrix}$.

Kosinus juft funksiya ekanini e'tiborga olsak, u holda $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

3^0-xossa, skalyar ko'paytma ta'rifiga ko'ra $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=|\lambda\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\lambda\vec{a},\vec{b})$, lekin $|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ va $\cos(\lambda\vec{a},\vec{b})=\cos(\vec{a}\,\vec{b})$. Shuning uchun $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

4^0-xossa skalyar ko'paytma ta'rifidan

$\vec{a}\,\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos(\vec{a}\wedge\vec{a})=|\vec{a}|^2\cos 0^0=|\vec{a}|$ $\quad |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}}$.

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar perpendikulyar bo'lsa, skalyar ko'paytma nolga teng:

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\vec{b}=0 \qquad (5.2)$$

Buning isboti ta'rifdan kelib chiqadi.

Ortanormallangan $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ bazis uchun

$$\vec{e}_i\,\vec{e}_j=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases} \quad i,\ j=1,\ 2,\ 3 \qquad (5.3)$$

Haqiqatan skalyar ko'paytma ta'rifidan

$\vec{e}_i\,\vec{e}_j=|\vec{e}_i|\,|\vec{e}_j|\cos(\vec{e}_i\wedge\vec{e}_j)=1\cdot 1\cos\frac{\pi}{2}=0$

Xususiy holda

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_i=\left|\vec{e}_i\right|^2=1 \qquad (5.4)$$

---

[2] Introduction to Calculus Volume II. p 7, mazmun – mohiyatidan foydalanildi

Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning skalyar ko'paytmasi.

Uch o'lchovli vektor fazoda ortonormal bazis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ berilgan bo'lsin, bu bazisga nisbatan $\vec{A}(A_1, A_2, A_3)$, $\vec{B}(B_1, B_2, B_3)$ koordinatalarga ega:

$$\vec{A} = A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3$$
$$\vec{B} = B_1e_1 + B_2e_2 + B_3e_3$$

$\vec{A}$ va $\vec{B}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini hisoblashda (5.2) va (5.4) larni e'tiborga olsak, quyidagilarga ega bo'lamiz.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3)\cdot(B_1e_1 + B_2e_2 + B_3e_3)$$

Demak, koordinatalari bilan berilgan ikkita vektorning skalyar ko'paytmasi bu vektorlarning mos koordinatalari ko'paytmasining yig'indisiga teng. Ya'ni:

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= A_1B_1e_1 + A_1B_2e_1e_2 + A_1B_3e_1e_3 + \\ &+A_2B_1e_2e_1 + A_2B_2e_2e_2 + A_2B_3e_2e_3 + \\ &+A_3B_1e_3e_1 + A_3B_2e_3e_2 + A_3B_3e_3e_3.\end{aligned} \qquad (6.1)$$

bu tenglikdan $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$

Natijalar. 1. $\vec{A}(A_1, A_2, A_3)$ vektor uzunligi

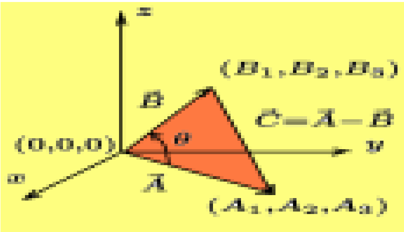
$$|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^3} \qquad (6.2)$$

2. Ikki $\vec{A}$, $\vec{B}$ vektorlar orasidagi burchak (5.1) ga ko'ra

$$\cos(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \qquad (6.3)$$

Agar $\vec{A}$ va $\vec{B}$ vektor koordinatalar bilan berilgan bo'lsa, bu vektorlar orasidagi burchak ushbu formula bilan aniqlanadi.[3]

$$\cos(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \qquad (6.4)$$



[3] Introduction to Calculus Volume II. pp 10-11 mazmun – mohiyatidan foydalanildi