УДК 519.62
DOI: 10.15587/2312-8372.2015.41057

Процай Н. Т.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ НА ОСНОВЕ АППАРАТА АЛГЕБРЫ ПРЕДИКАТОВ И ПРЕДИКАТНЫХ ОПЕРАЦИЙ

В статье рассмотрено понятие алгебры предикатов и предикатных операций. Описаны основные понятия и элементарные операции алгебры множеств на основе аппарата алгебры предикатов и предикатных операций. Определены линейный логический оператор и отображение Галуа в терминах алгебры предикатных операций. Решены задачи алгебры множеств посредством алгебры предикатов и предикатных операций.

Ключевые слова: *алгебра предикатов и предикатных операций, алгебра множеств, операции над множествами.*

1. Введение

В основе проектирования различных информационных систем и компьютерных технологий лежит дискретная математика. Определяющими в этих системах являются информационно-логические, дискретные процессы решения разнообразных задач. Дискретная математика нацелена на описание информационных систем, которые функционируют в информационной среде. В связи с этим, сегодня дискретная математика — это бурно развивающаяся ветвь математики. Ее можно рассматривать как теоретические основы компьютерной математики.

Одним из разделов дискретной математики является теория множеств. Теория множеств лежит в основе различных разделов математики — общей топологии, общей алгебры, функционального анализа, теории графов и сетей, комбинаторного анализа, теория алгоритмов. При изучении дискретных структур и моделей, имеющих дискретный характер, возникает все больше необходимости в применении математического аппарата, который позволил бы описывать зависимость между множествами любой природы без накладывания ограничений на вид связи. В работе в качестве такого инструмента предлагается аппарат алгебры предикатов и предикатных операций.

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

С точки зрения высшей алгебры в основе теории множеств лежит алгебра множеств. И задачи, которые встречаются в теории множеств, решаются посредством данной алгебры [1–10]. Задачами теории множеств является, например, доказательство равносильностей (следований) и тождеств (включений), или решение уравнений теории множеств, которые решены в [6–10]. Однако, необходимо отметить, что средствами алгебры множеств можно описать только небольшую часть зависимостей между множествами, а именно такие зависимости, при которых имеется связь лишь между компонентами характеристик множеств с одинаковыми номерами, причем вид связи для всех номеров должен быть одинаковым. И именно такой вид задач решен в [6–10]. А важно иметь возможность описывать зависимости между множествами любой природы. В качестве такого инструмента в статье предложен аппарат алгебры предикатов и предикатных операций. В [4] описаны понятия линейного логического оператора и соответствия Галуа в терминах кванторной алгебры предикатных операций и решена задача теории множеств: однозначного определения данных соответствий по пустой области. В данной работе описываются на основе аппарата алгебры предикатов и предикатных операций понятия множества, включения, операций объединения, пересечения, разности, симметрической разности, дополнения множеств и др. А также исследовано применение данных представлений на примере решения задач теории множеств.

3. Объект, цель и задачи исследований

Объект исследования — математический аппарат теории множеств.

Целью настоящей работы является решение задач теории множеств, на основе аппарата алгебры предикатов и предикатных операций.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Описать основные понятия и элементарные операции алгебры множеств на языке алгебры предикатов и предикатных операций.
2. Определить линейный логический оператор и отображение Галуа в терминах кванторной алгебры предикатных операций.
3. Решить задачи алгебры множеств посредством алгебры предикатов и предикатных операций.

4. Материалы и методы исследований задач теории множеств на основе аппарата алгебры предикатов и предикатных операций

4.1. Аппарат алгебры предикатов и предикатных операций. *Алгеброй предикатов и предикатных операций* называется алгебра предикатных операций вместе с ее подалгеброй, являющейся алгеброй предикатов [1–3].

Пусть U — универсум предметов; $A_1, A_2, ..., A_m$ — его подмножества; $S = A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$ — предметное пространство; $x_1, x_2, ..., x_m$ — предметные переменные с областями изменения $A_1, A_2, ..., A_m$; M — множество всех предикатов $P(x_1, x_2, ..., x_m)$ на пространстве S, называемое *универсумом предикатов*; $B_1, B_2, ..., B_n$ — его непустые подмножества; $T = B_1 \times B_2 \times ... \times B_n$ — *предикатное пространство* размерности n; $X_1, X_2, ..., X_n$ — предикатные переменные с областями изменения $B_1, B_2, ..., B_n$. Элементы множества T называются *предикатными векторами*. Любая функция $F(X_1, X_2, ..., X_n) = Y$, $F : S \to B_j$ $(j = \overline{1,n})$ называется *предикатной операцией*. Ее *тип* определяется набором переменных $X_1, X_2, ..., X_n$ и набором множеств $B_1, B_2, ..., B_n$. Образуем множество N всех предикатных операций заданного типа [1].

Алгеброй предикатных операций над N называется любая алгебра, заданная на носителе N. *Операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания над предикатными операциями* определяются следующими равенствами: для любых $X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, ..., X_n \in B_n$:

$$(F \vee G)(X_1, X_2, ..., X_n) = F(X_1, X_2, ..., X_n) \vee G(X_1, X_2, ..., X_n);$$

$$(F \wedge G)(X_1, X_2, ..., X_n) = F(X_1, X_2, ..., X_n) \wedge G(X_1, X_2, ..., X_n);$$

$$(\neg F)(X_1, X_2, ..., X_n) = \neg(F(X_1, X_2, ..., X_n)).$$

Символы $\vee, \wedge, \neg$, стоящие слева от знаков равенства, означают операции над предикатными операциями, справа — над предикатами. *Включение* $F \subseteq G$ *предикатных операций* F и G определяется следующим образом: $F \subseteq G \Leftrightarrow F \vee G = G$. На сегодняшний день существует целое семейство алгебр предикатных операций: булева, дизъюнктивно-конъюнктивная, фундаментальная, кванторная алгебры предикатных операций [1].

4.2. Определение линейного логического оператора и отображения Галуа в терминах кванторной алгебры предикатных операций. С помощью аппарата алгебры предикатных операций удобно описывать отображения различной природы [4]. Пусть $K \subseteq M \times N$ — произвольное бинарное отношение. $K(x, y)$ — заданный на $M \times N$ соответствующий ему предикат. A — произвольное подмножество множества M. В качестве образа B множества A относительно K можно взять либо объединение образов тех элементов, которые составляют A, либо их пересечение:

$$B = \bigcup_{a \in A} S_a, \tag{1}$$

$$B = \bigcap_{a \in A} S_a, \tag{2}$$

причем B, очевидно, будет подмножеством множества N.

Представим выражения (2) и (3) на языке логики предикатов. В случае объединения образов имеем:

$$B(y) = \bigvee_{a \in A} S_a(y) = \exists x \in AK(x, y). \tag{3}$$

Обозначим отображение (3) через $F\colon 2^M \to 2^N$. Это отображение представляет собой общий вид линейного логического оператора в случае объединения образов.

Аналогично выражение (2) можно переписать в виде:

$$B(y) = \bigwedge_{a \in A} S_a(y) = \forall x \in AK(x, y). \tag{4}$$

Данное отображение обозначим через $G\colon 2^M \to 2^N$. Оно является отображением Галуа, в случае, если $B = \bigcap_{a \in A} S_a$.

Используя аппарат кванторной алгебры предикатных операций, выражения (4) и (5) можно представить в виде [4]:

$$B(y) = \bigvee_{a \in A} S_a(y) = \exists x \in AK(x, y) = \bigvee_{a \in A} x/aK(x, y),$$

$$B(y) = \bigwedge_{a \in A} S_a(y) = \forall x \in AK(x, y) = \bigwedge_{a \in A} x/aK(x, y).$$

Для дальнейших формальных преобразований воспользуемся тождествами кванторной алгебры [6–9].

Выразим операцию подстановки через квантор существования:

$$x_i/a(\mathrm{X}) = \exists x_i \in A_i(x_i^a \wedge \mathrm{X}).$$

Используя данное тождество, преобразуем выражение (3):

$$\exists x \in AK(x, y) = \bigvee_{a \in A} x/aK(x, y) =$$
$$= \bigvee_{a \in A} \left(\exists x \in M\left(x^a \wedge K(x, y)\right)\right).$$

Далее преобразуем выражение, применяя тождества дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов [1], и закон дистрибутивности для квантора существования.

$$\bigvee_{a \in A} \left(\exists x \in M\left(x^a \wedge K(x, y)\right)\right) = \exists x \in M\left(\bigvee_{a \in A}\left(x^a \wedge K(x, y)\right)\right) =$$
$$= \exists x \in M\left(\left(\bigvee_{a \in A} x^a\right) \wedge K(x, y)\right) = \exists x \in M\left(A(x) \wedge K(x, y)\right).$$

Т. о., отображение (4) можно представить в виде:

$$B(y) = \exists x \in M\left(A(x) \wedge K(x, y)\right).$$

Для преобразования выражения (4) понадобятся все вышеперечисленные тождества, а также законы де Моргана (законы отрицания) для кванторов [6–9].

$$\forall x \in AK(x, y) = \overline{\overline{\forall x \in AK(x, y)}} = \overline{\exists x \in A\overline{K(x, y)}} =$$
$$= \overline{\bigvee_{a \in A} x/a\overline{K(x, y)}} = \overline{\bigvee_{a \in A}\left(\exists x \in M\left(x^a \wedge \overline{K(x, y)}\right)\right)} =$$

$$=\overline{\exists x\in M\left(\underset{a\in A}{\vee}\left(x^a\wedge\overline{K(x,y)}\right)\right)}=\overline{\exists x\in M\left(\left(\underset{a\in A}{\vee}x^a\right)\wedge\overline{K(x,y)}\right)}=$$

$$=\overline{\exists x\in M\left(A(x)\wedge\overline{K(x,y)}\right)}=\forall x\in M\overline{\left(A(x)\wedge\overline{K(x,y)}\right)}=$$

$$=\forall x\in M\left(\overline{A(x)}\vee K(x,y)\right).$$

Тогда выражение $G\colon 2^M\to 2^N$ можно представить в виде [4]:

$$B(y)=\forall x\in M\left(\overline{A(x)}\vee K(x,y)\right).$$

5. Результаты моделирования основных понятий и элементарных операций алгебры множеств на языке алгебры предикатов и предикатных операций

Любое множество $A=\{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_l\}$ можно представить в виде уравнения алгебры конечных предикатов:

$$x^{\sigma_1}\vee x^{\sigma_2}\vee\ldots\vee x^{\sigma_l}=1. \qquad (5)$$

Множество всех корней этого уравнения совпадает с множеством A. Уравнение (5) представляет собой формальную запись утверждения $x\in A$.

Дополнение $\overline{A}$ *множества* A можно представить в виде:

$$\overline{x^{\sigma_1}\vee x^{\sigma_2}\vee\ldots\vee x^{\sigma_l}}=1.$$

Пусть $B=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_m\}$. *Объединение* $A\cup B$, *пересечение* $A\cap B$, *разность* $A\backslash B$ *и симметрическая разность* $A-B$ *множеств* A *и* B будем описывать соответственно уравнениями:

$$(x^{\sigma_1}\vee x^{\sigma_2}\vee\ldots\vee x^{\sigma_l})\vee(x^{\varepsilon_1}\vee x^{\varepsilon_2}\vee\ldots\vee x^{\varepsilon_m})=1,$$

$$(x^{\sigma_1}\vee x^{\sigma_2}\vee\ldots\vee x^{\sigma_l})\wedge(x^{\varepsilon_1}\vee x^{\varepsilon_2}\vee\ldots\vee x^{\varepsilon_m})=1,$$

$$(x^{\sigma_1}\vee x^{\sigma_2}\vee\ldots\vee x^{\sigma_l})\Theta(x^{\varepsilon_1}\vee x^{\varepsilon_2}\vee\ldots\vee x^{\varepsilon_m})=1,$$

$$(x^{\sigma_1}\vee x^{\sigma_2}\vee\ldots\vee x^{\sigma_l})\oplus(x^{\delta_1}\vee x^{\delta_2}\vee\ldots\vee x^{\delta_l})=1.$$

Пусть $u=\{a_1,a_2,\ldots,a_l\}$ — универсум. Любое подмножество A множества U можно описать уравнением вида:

$$p_1x^{a_1}\vee p_2x^{a_2}\vee\ldots\vee p_lx^{a_l}=1,$$

где $p_1,p_2,\ldots,p_l$ — логические константы. Если $a_i\in A$ $(1\le i\le l)$, то следует принять $p_i=1$, если же $a_i\notin A$, то принимаем $p_i=0$.

Набор $(p_1,p_2,\ldots,p_l)$ называется *характеристикой множества* A. Пусть, к примеру, $U=\{a,b,c,d\}$, тогда множество $A=\{b,c\}$ имеет характеристику (0,1,1,0); характеристике (1,0,1,0) соответствует множество $\{a,c\}$. По левой части уравнения (9) можно построить *универсальный распознаватель принадлежности* [5].

Введем сокращенную запись $(\xi_i)_1^l$ для характеристики $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_l)$ переменного множества X. Для универсального множества $\xi_i=1$, для пустого множества $\xi_i=0$.

Пусть $(\xi_i)_1^l$ и $(\eta_i)_1^l$ — характеристики множеств X и Y. Отношения *равенства* $X=Y$ и *включения* $X\subseteq Y$ этих *множеств* могут быть записаны соответственно в виде следующих систем уравнений: $\xi_i^1\sim\eta_i^1=1$, $\xi_i^1\supset\eta_i^1=1$. При $X=Y$: $\xi_i^0=\eta_i^0$, $\xi_i^1=\eta_i^1$.

Операция дополнения Y *множества* X *запишется следующей системой равенств*:

$$\xi_i^1=\eta_i^0,\ \xi_i^0=\eta_i^1.$$

Отношения $X\cup Y=Z$, $X\cap Y=Z$, $X\backslash Y=Z$, $X\dot{-}Y=Z$, представимы в виде следующих систем уравнений:

$$\xi_i^1\vee\eta_i^1\sim\zeta_i^1=1,\quad \xi_i^1\wedge\eta_i^1\sim\zeta_i^1=1,\quad \xi_i^1\Theta\eta_i^1\sim\zeta_i^1=1,$$

$$\xi_i^1\oplus\eta_i^1\sim\zeta_i^1=1.$$

Выразим в явном виде переменную ζ как функцию от ξ и η, учитывая $\zeta_i^0\vee\zeta_i^1=1$. В результате получаем зависимости, описывающие *операцию* $X\cup Y$:

$$\xi_i^0\wedge\eta_i^0=\zeta_i^0,\ \xi_i^1\wedge\eta_i^1=\zeta_i^1,$$

операцию $X\cap Y$:

$$\xi_i^0\vee\eta_i^0=\zeta_i^0,\ \xi_i^1\vee\eta_i^1=\zeta_i^1,$$

операцию $X\backslash Y$:

$$\xi_i^0\vee\eta_i^1=\zeta_i^0,\ \xi_i^1\wedge\eta_i^0=\zeta_i^1,$$

операцию $X\dot{-}Y$:

$$\xi_i^0\sim\eta_i^0=\zeta_i^0,\quad \xi_i^1\oplus\eta_i^1=\zeta_i^1.$$

6. Обсуждение результатов на примере решения задач алгебры множеств посредством алгебры предикатов и предикатных операций

После того, как с помощью алгебры предикатов и предикатных операций были описаны основные понятия и операции алгебры множеств, можно некоторые задачи алгебры множеств решать на основе алгебры предикатов и предикатных операций. Рассмотрим для примера решение уравнений алгебры множеств

Пусть заданы множества A, B и Y. Решить систему уравнений $Y\cup X=A$, $Y\cap X=B$. На языке алгебры конечных предикатов эта система запишется в виде:

$$(y_i^1\xi_i^1\sim a_i^1)(y_i^1\vee\xi_i^1\sim b_i^1)=1,$$

или

$$(a_i^1\supset y_i^1)(y_i^1\supset b_i^1)=1.$$

Таким образом, автор данной работы приходит к следующему необходимому и достаточному условию существования единственного решения системы:

$$A \subseteq Y \subseteq B, \tag{6}$$

$$a_i^1 \vee (y_i^1 \oplus b_i^1) = \xi_i^1,\ (\overline{y_i^1}\,\overline{a_i^1} \vee y_i^1 a_i^1) b_i^1 = \xi_i^1. \tag{7}$$

Выражение (7) соответствует следующим выражениям для множества X:

$$X = A \bigcup (Y \dot{-} B), \tag{8}$$

$$X = ((\overline{Y} \bigcap \overline{A}) \bigcup (Y \bigcap A)) \bigcap B. \tag{9}$$

С другой стороны:

$$X = (B \backslash Y) \cup A, \tag{10}$$

$$X = (\overline{Y} \bigcup A) \bigcap B. \tag{11}$$

Все четыре выражения (8)–(11) представляют собой одно и то же множество, учитывая ограничение (6)

В качестве еще одного примера можно рассмотреть систему $Y \backslash X = A$, $X \backslash Y = B$, где Y, A, B — известные, X — неизвестное множества. Попробуем определить при каких A, B, Y система имеет единственное решение.

Представим систему в терминах алгебры предикатов и предикатных операций:

$$(y_i^1 \xi_i^0 \sim a_i^1)(\xi_i^1 y_i^0 \sim b_i^1) = 1. \tag{12}$$

Решение уравнения (12) для ξ_i:

$$(y_i^1 0^0 \sim a_i^1)(0^1 y_i^0 \sim b_i^1) \oplus (y_i^1 1^0 \sim a_i^1)(1^1 y_i^0 \sim b_i^1) = 1.$$

Или:

$$(\overline{a_i^1} \vee y_i^1)\overline{y_i^1 b_i^1} = 1. \tag{13}$$

Из (13) получаем: $a_i^1 \supset y_i^1 = 1$ и $y_i^1 b_i^1 = 0$. Следовательно, система имеет единственное решение, при условии:

$$A \subseteq Y, Y \bigcap B = \varnothing.$$

7. Выводы

В результате проведения исследований:

1. Описан аппарат алгебры предикатов и предикатных операций.
2. Определены линейный логический оператор и отображение Галуа в терминах кванторной алгебры предикатных операций.
3. Описаны начальные понятия теории множеств, используя аппарат алгебры предикатов и предикатных операций.
4. Описаны операции объединения, пересечения, дополнения, разности, включения множеств.
5. Решены задачи алгебры множеств посредством алгебры предикатов и предикатных операций

Важно заметить, что средствами алгебры множеств [6–10] можно описать только небольшую часть зависимостей между множествами, а именно такие зависимости, при которых имеется связь лишь между компонентами характеристик множеств с одинаковыми номерами, причем вид связи для всех номеров должен быть одинаков. Средствами же алгебры предикатов и предикатных операций можно описать любые возможные виды связей между множествами.

Литература

1. Бондаренко, М. Ф. Алгебра предикатов и предикатных операций [Текст] / М. Ф. Бондаренко, З. В. Дударь, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко, В. А. Чикина, Н. Т. Процай, В. В. Черкашин // Радіоелектроніка та інформатика. — 2005. — № 1. — С. 80–86.
2. Процай, Н. Т. Кванторная алгебра предикатных операций [Текст] / Н. Т. Процай // Біоніка інтелекту. — 2008. — № 1(68). — С. 69–73.
3. Бондаренко, М. Ф. Об алгебре предикатов [Текст] / М. Ф. Бондаренко, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко // Бионика интеллекта. — 2004. — № 1(61). — С. 15–26.
4. Процай, Н. Т. Определение образа линейного логического оператора и отображения Галуа по пустой области в терминах кванторной алгебры [Текст] / Н. Т. Процай, И. Д. Вечирскаяч // Бионика интеллекта. — 2014. — № 2(83). — С. 30–34.
5. Бондаренко, М. Ф. Теория интеллекта [Текст] / М. Ф. Бондаренко, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко. — Х.: СМИТ, 2006. — 563 с.
6. Weiss, A. R. An introduction to set theory [Text] / A. R. Weiss. — University of Toronto, 2008. — 119 p.
7. Enderton, H. B. Elements of Set Theory [Text]: Hardcover / H. B. Enderton. — Elsevier BV, 1979. — 279 p. doi:10.1016/B978-0-08-057042-6.50006-5
8. Bourbaki, N. Elements of Mathematics. Theory of Sets [Text] / N. Bourbaki. — Springer, 2004. — 414 p. doi:10.1007/978-3-642-59312-3
9. Herrlich, H. Axiom of Choice [Text] / H. Herrlich // Lecture Notes in Mathematics. — Springer-Verlag, 2006. —194 p. doi:10.1007/3-540-34268-0_4
10. Ciesielski, K. Set Theory for the Working Mathematician [Text] / K. Ciesielski. — Cambridge University Press, 1997. — 252 p. doi:10.1017/cbo9781139173131

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ МНОЖИН НА ОСНОВІ АЛГЕБРИ ПРЕДИКАТІВ ТА ПРЕДИКАТНИХ ОПЕРАЦІЙ

У статті розглядається поняття алгебри предикатів та предикатних операцій. Описані основні поняття та елементарні операції алгебри множин за допомогою апарату алгебри предикатів та предикатних операцій. Визначені лінійний логічний оператор та відображення Галуа у термінах алгебри предикатних операцій. Розвязано деякі задачі теорії множин за допомогою апарату алгебри предикатів та предикатних операцій.

Ключові слова: алгебра предикатів та предикатних операцій, алгебра множин, операції над множинами.

Процай Наталья Тимофеевна, *кандидат технических наук, доцент, кафедра компьютерной математики и математического моделирования, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», Украина,*
e-mail: protsai.cmmm@gmail.com.

Процай Наталія Тимофіївна, *кандидат технічних наук, доцент, кафедра комп'ютерної математики і математичного моделювання, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Україна.*

Protsai Nataliia, *National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Ukraine,* ***e-mail: protsai.cmmm@gmail.com***