ТЎПЛАМЛАРНИ ҚЎШИШ

Энди тўпламларни қўшишни, яъни бир нечта тўпламдан битта тўплам ҳосил қилишни кўрамиз. Бир нечта A, B,... тўпламнинг *йиғиндиси* деб қўшилувчи тупламларнинг ҳеч бўлмаганда бирига кирадиган элементлардан ва фақат шу элементлардан тузилган янги тупламга айтилади. A ва B тупламларнинг йиғиндисини одатда $A+B$ ёки $A \cup B$ деб белгиланади.

Баъзи бир элементлар битта эмас, балки бир нечта қўшилувчи тупламларга киришини назарда тутиш керак. Бундай ҳолда бари бир улар йиғиндига фақат бир марта киради. Шу сабабдан чекли туплам учун йиғиндининг элементлари сони қўшилувчи тупламлар элементлари сонларининг йиғиндисидан кам бўлиши мумкин. Масалан, биринчи туплам „Евгений Онегин“нинг биринчи сатрига кирган рус алфавити ҳарфларидан тузилган булсин, иккинчи туплам эса шу поэманинг иккинчи сатрига кирган ҳарфлардан тузилган булсин. Биринчи тупламни биз ёзган эдик, у 18 ҳарфдан иборат (24 -бетга қаранг).

М, О, Й, Д, Я, С, А, Ы, Х, Ч, Е, Т, Н, П, Р, В, И, Л.

Иккинчи туплам эса 13 та ҳарфдан иборат:

К, О, Г, Д, А, Н, Е, В, Ш, У, Т, З, М.

Бу икки тўпламнинг йиғиндиси қуйидаги 23 та ҳарфлар тупламидан иборат:

М, О, Й, Д, Я, С, А, Ы, Х, Ч, Е, Т, Н, П, Р,
В, И, Л, К, Г, Ш, У, З.

Тупламларнинг купайтмасига кирган О, Д, А, Н, Е, В, Т, М ҳарфлар йиғиндига фақат бир марта кирган, шунинг учун $18+13=31$ эмас фақат 23 ҳарф олдик.

Қушилувчи тупламлар умумий элементларга эга бўлган яна битта мисол курайлик. Синфдаги ҳамма ўқувчилар туплами қуйидаги учта тупламнинг йиғиндисидан иборат:

а) ўзлаштирувчи уқувчилар туплами;
б) қизлар тўплами;
в) узлаштирмовчи ўғил болалар туплами.

Бу синфдаги ҳар бир ўқувчи курсатилган тупламларнинг ҳеч булмаганда биттасига кириши маълум. Бироқ бу тупламлар умумий элементга эга булиши мумкин: ўзлаштирувчи қизлар ҳам биринчи тўпламга, ҳам иккинчи тўпламга кирадилар.

Баъзан йиғинди чексиз кўп сондаги қушилувчи тупламлардан иборат булади. Масалан, махражи n бўлган ҳамма мусбат касрлар тупламини A_n билан белгилайлик:

$$A_1 = \left\{\frac{m}{1}\right\}, \quad A_2 = \left\{\frac{m}{2}\right\}, \ldots, \quad A_n = \left\{\frac{m}{n}\right\}, \ldots .$$

Ҳамма A_1, A_2, ... A_n, ... тупламларнинг йиғиндиси барча мусбат касрлар, яъни $\frac{m}{n}$ кўринишдаги касрлар туплами булади, бунда m ва n натурал сонлардир.

Мунтазам учбурчаклар тупламини A_3 орқали, мунтазам туртбурчаклар тупламини A_4 орқали, мунтазам бешбурчаклар тупламини A_5 орқали белгилайлик ва ҳоказо. Бу ҳолда A туплам бу тупламларнинг ҳаммасининг йиғиндиси булиб, у ҳамма мунтазам кўпбурчаклардан иборат.

Алгебрада ҳам тупламларни қушиш амали учрайди. Агар

$$f(x) = 0$$

тенгламанинг илдизлари тўпламини A деб,

$$\varphi(x) = 0$$

тенгламанинг илдизлари тупламини B деб белгиласак, у ҳолда

$$f(x)\,\varphi(x) = 0$$

тенглама илдизлари туплами $A + B$ бўлади (бунда биз илдизларнинг карралилигини ҳисобга олмаймиз).

Тупламларни қушиш амали сонларни қушишдагига ухшаш купгина хоссаларга эга. Масалан, ўрин алмаштириш ва группалаш қонуни уринли:

$$A + B = B + A$$

ва

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

Тупламларни қўшишда ҳам буш тўплам ноль ролини уйнайди: A туплам ҳар қандай бўлганда ҳам, ҳар доим

$$A + O = A$$

тенглик ўринлидир. Лекин универсал тўпламнинг роли сонларни қўшишда 1 нинг ролига ўхшамайди.

Ҳар қандай туплам учун

$$A + I = I$$

тенглик уринли. Умуман, агар B A тупламнинг қисм тўплами булса, у ҳолда $B+A=A$. Хусусий ҳолда ҳар қандай A тўплам учун

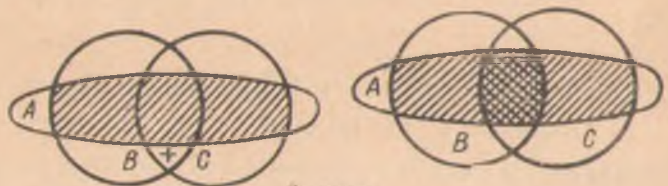
$$A+A=A$$

ўринлидир.

Тупламларни қўшиш ва кўпайтириш амали дистрибутивлик қонунига бўйсунади:

$$A(B+C)=AB+AC. \qquad (1)$$

Бу қонуннинг ўринли эканлигини исботлаш учун тенгликнинг чап томонига кирган ҳар қандай элементнинг ўнг томонига ҳам тегишли эканлигини ва аксинча, унг томонига кирган ҳар қандай элемент чап томонига ҳам тегишли эканини курсатиш керак.



2- расм.

Бу исботни мантиқ жиҳатидан қатъий кўрсатиш унча қийин эмас, лекин бир оз машаққатли ишдир. Шунинг учун биз (1) тенгликни исботловчи иккита расмни кўрсатиш билан чекланамиз (2- расм). Бу расмлардан биринчисида A тупламнинг $B+C$ тўплам билан купайтмаси штрихланган, иккинчи расмда эса A тўпламнинг B билан ва A тупламнинг C билан купайтмаси штрихланган. Бу расмлар (1) тенгликни жуда яққол кўрсатади. Лекин сонларда уринли булмаган иккинчи бир „дистрибутив қонун“ тупламлар учун уринлидир. У қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$A+BC=(A+B)(A+C). \qquad (2)$$

Бу тенгликни исботлаш учун (1) қоида бўйича унг томондаги қавсни очиб, AB ва AC тўплам A тўпламнинг қисм тўплами эканлигини ҳисобга олиш етарлидир, демак, $AC \subset A$ ва $AB \subset A$. Ундан ташқари $AA=A$, шунинг учун

$$AA+AC+BA+BC=A+BC.$$