I боб

ЧЕКСИЗ ТЎПЛАМЛАРНИНГ АЖОЙИБ ХОССАЛАРИ

Агар бугун математика чексизлик ғояси билан суғорилган десак, муболаға қилмаган бўламиз. Одатда, математикада айрим объектлар (сонлар, геометрик шакллар) билан эмас, балки бундай объектларнинг бутун бошли синфлари: *барча* натурал сонлар, *ҳамма* учбурчаклар мажмуи ва бошқа объектлар синфи билан қизиқилади. Бундай объектлар мажмуи эса ч е к с и з кўп айрим элементлар тўпламидан ташкил топади.

Шунинг учун математиклар ва файласуфлар чексизлик тушунчаси билан ҳар доим қизиқиб келдилар. Бу қизиқиш ҳар бир натурал сондан кейин навбатдагиси келиши, яъни сонлар қаторининг чексиз эканлиги маълум бўлган пайтдан бошлаб пайдо бўлди. Лекин чексизликни ўрганишдаги дастлабки уринишлароқ жуда кўп парадоксларга олиб келди.

Масалан, грек файласуфи Зенон чексизлик тушунчасидан фойдаланиб, ҳаракатнинг бўлиши мумкин эмаслигини исбот қилмоқчи бўлди. Ҳақиқатда ҳам, — дейди у, — ўқ (стрела) бирор жойга учиб бориши учун олдин шу йўлнинг ярмини босиб ўтиши керак. Лекин ярим йўлни ўтишдан олдин у чорак йўлни учиб ўтиши керак, саккиздан бир бўлак йўлни учиб ўтиши керак ва ҳоказо. Иккига бўлиш процесси ҳеч қачон тугамаганлиги учун (мана сизга чексизлик!), ўқ ҳеч қачон жойидан силжий олмайди. У тезчопар Ахиллес ҳеч қачон секин юрар тошбақага ета олмаслигини худди шу усулда исбот этмоқчи бўлди.

Мана шундай парадокс ва софизмлар туфайли қадимги грек математиклари чексизлик билан иш кўришдан воз кечдилар, уни математик мулоҳазалардан чиқариб юбордилар. Айрим файласуфлар барча геометрик

шакллар чекли сондаги жуда кичик бўлинмас заррачалар (атомлар) дан иборат деб ҳисоблаганлар. Бундай мулоҳаза юритганда, масалан, доирани тенг иккига бўлиб бўлмас, чунки унинг маркази фақат битта қисмга тегишли бўлар эди, бу эса бу бўлакларнинг тенглигига зид бўлади.

Ахиллес ва тошбақа

Ўрта асрларга келиб, асосан, игна учига жойлаша оладиган париштапар тўплами чеклими ёки йўқми, деган мулоҳаза муносабати билан, чексизлик масаласи билан қизиқиб қолдилар. Математикада чексизликдан кенг фойдаланиш XVII асрдан, яъни математик анализ пайдо бўлгандан кейин бошланди. „Чексиз катта миқдор", „чексиз кичик миқдор" каби тушунчалардан математик мулоҳазаларда ҳар қадамда фойдаланилар эди. Бироқ бу даврда чексиз кўп элементи бўлган тўпламлар ўрганилмай, балки ўзгариш процессида орта бориб, олдиндан берилган ҳар қандай қийматдан ҳам ортиб кетадиган миқдор ўрганилар эди. Ҳар қанча катта бўла олиши мумкин деган маънода бундай миқдорлар „потенциал чексиз катта миқдорлар" деб аталган эди (potentia — имконият).

Фақат XIX асрнинг ўрталарига келиб чексиз кўп сондаги элементлардан иборат чексиз тўпламлар ўрганила бошланди, чексизлик тушунчасини текшириш бошланди. Чексиз тўпламларнинг математик назариясини яратувчилар чех олими Б. Больцано (афсуски, унинг асосий асари вафотидан анча йил кейин босиб чиқарилди) ва немис математиги Георг Канторлардир.

Қизиғи шундаки, тупламлар назариясини яратувчиларнинг иккаласи ҳам схоластик фан билан жуда яхши таниш эдилар. Лекин улар схоластикани енгиб, тўпламлар назариясини математиканинг муҳим қисмиға айлантиришга муваффақ булдилар.

Больцано билан Канторнинг асосий ютуқларидан бири чексиз тупламларнинг хоссаларини урганиш булган, чекли тупламларнинг хоссалари улардан илгари ўтган олимларга маълум эди. Маълум булишича, чекли тупламлар билан чексиз тўпламларнинг хоссалари бир бирига мутлақо ўхшамас экан: чекли тупламлар учун уринли булмаган куп мулоҳазалар чексиз тупламлар учун уринли булар экан. Масалан, ҳар бир номерида биттадан меҳмони (ижарачиси) бўлган меҳмонхонага, ҳар бир номерида биттадан киши турадиган қилиб, яна бир кишини жойлаштиришга уриниб куринг. Бундай бўлиши мумкинми? Йуқ, чунки мехмонхонадаги хоналар сони чекли! Агарда меҳмонхонадаги хоналар сони чексиз кўп булса эди... Лекин бундай меҳмонхоналарни Мюнхгаузеннинг космик эра ҳикояларида, польшалик фантастик ёзувчи Станислав Лемнинг „Йон Тихийнинг юлдузлар кундалиги“ асаридаги юлдузлараро саёҳатчи қаҳрамони Йон Тихийнинг ҳикояларида учратиш мумкин. Энди унга суз берамиз*.