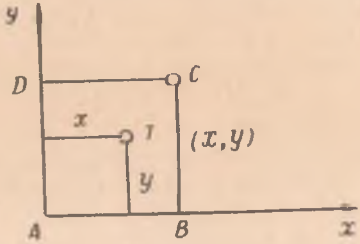
Кесмада қанча нуқта булса, чексиз туғри чизиқда ҳам шунча нуқта бор деган фикрга математиклар ижирғаниб булса ҳам рози бўлишди. Лекин Канторнинг эришган кейинги натижаси ундан ҳам кутилмаган булди! Кесмага нисбатан кўпроқ элементга эга булган тўплам-ни излаб, у квадратнинг нуқталари тупламига мурожаат этди. Қандай натижа чиқишига шубҳа йуқ эди, ахир кесма квадратнинг битта томонига жойлашади, лекин квадратни ёйиш мумкин булган ҳамма кесмалар тупла-мининг узи эса континуум қувватига эга.



7- расм.

Уч йил (1871 йилдан 1874 йилгача) давомида Кантор кесманинг нуқталари билан квадратнинг нуқталари уртасида узаро бир қийматли мослик урнатиш мумкин эмас деган фикрнинг исботини излади.

Йиллар кетидан йиллар утди, лекин изланган натижа чиқмас эди ва бирданига у, мумкин эмас деб ҳисоблаган бир қийматли мосликни топишга муяссар булди! Аввал унинг ўзи бунга ишонмади. Математик Дедекиндга „Мен буни кўриб турибман, лекин унга ишонмаяпман", деб ёзди.

Лекин интуиция бу ерда ҳам бизни алдаган эди — кесмада нечта нуқта бўлса, квадратда ҳам шунча нуқта бор экан. Бу теореманинг қатъий исботи сонларнинг ўнли системада ёзилиши бир қийматли бўлмаганлиги сабабли бир оз қийинлашади. Шунинг учун биз Кантор исботининг фақат эскизини берамиз.

[0,1] кесмани ва томони 1 га тенг булган квадратни оламиз. Биз бу квадрат 7- расмда курсатилгандек жойлаштирилган деб ҳисоблашимиз мумкин. Биз кесманинг нуқталари билан квадратнинг нуқталари ўртасида ўзаро бир қийматли мослик урнатишимиз керак. Квадрат нуқта-

ларини AB кесмага проекциялаш бу ерда ёрдам бер-майди, чунки проекциялаган вақтда кесманинг битт нуқтасига квадрат нуқталарининг чексиз тўплами мос келади (масалан, A нуқтага DA кесманинг ҳамма нуқтас мос келади).

Масала қуйидагича ечилади. $ABCD$ квадратнинг ҳа бир T нуқтасини иккита сон: унинг x ва y координа-талари (ёки унинг AB ва AD томонгача бўлган масо-фаси) ёрдамида берилиши мумкин. Бу сонларни чек-сиз ўнли касрлар кўринишида ёзиш мумкин. x ва y 1 дан катта бўлмагани учун, бу касрларни

$$x = 0,\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \ldots\ \alpha_n\ \ldots \qquad (1)$$

$$y = 0,\ \beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \ldots\ \beta_n\ \ldots \qquad (2)$$

кўринишда ёзиш мумкин (соддалик учун биз квадрат-нинг томонларида ётган нуқталарни олмай, фақат унинг ички нуқталарини олдик). Бу ерда α_n ва β_n лар x ва y сонларнинг каср хоналаридир, масалан, агар $x = 0{,}63205\ldots$ ва $y = 0{,}21357\ \ldots$ булса, у ҳолда $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 2$ ва ҳоказо, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 3$ ва ҳоказо.

Энди биз AB кесманинг T нуқтага мос келувчи Q нуқтасини топишимиз керак. Бунинг учун AQ кесма-нинг узунлигини топиш кифоя. Биз бу узунликни z сонига тенг қилиб оламиз, унинг каср хоналарини x ва y сонларнинг каср хоналарининг „жойларини алмаш-тириш“ йўли билан ҳосил қиламиз. Бошқача қилиб айтганда, (1) ва (2) кўринишдаги икки ёзувдан учинчи ёзувни ҳосил қиламиз, бунда уларнинг каср хонала-рини биттадан оралатиб ёзамиз:

$$z = 0,\ \alpha_1\ \beta_1\ \alpha_2\ \beta_2\ \alpha_3\ \beta_3\ \ldots\ \alpha_n\ \beta_n\ \ldots\ .$$

Масалан, агар

$$x = 0{,}515623\ \ldots$$

ва

$$y = 0{,}734856\ \ldots$$

бўлса, у ҳолда

$$z = 0{,}571354682536\ \ldots$$

z нуқта $[0,\ 1]$ кесмада ётади ва квадратнинг ҳар хил нуқтасига кесманинг ҳар хил нуқтаси мос келиши равшан. Агар T ва T' нуқталар устма-уст тушмаса, у ҳолда x ва x' ёки y ва y' сонларнинг ўнли система-даги ёзувида ҳеч бўлмаганда битта рақами бошқача булади. Бу эса z ва z' сонларининг ўнли каср кўринишидаги ёзувлари бир-биридан фарқ қилишини кўрсатади. Бир оз тўлароқ текширилганда бундай нуқталарнинг ўзлари ҳам устма-уст тушмаслиги кўринади.

Шундай қилиб биз квадрат нуқталари билан [0,1] кесма нуқталарининг бир қисми ўртасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатдик. Бу квадратнинг нуқталари тўпламининг қуввати кесма нуқталари тўпламининг қувватидан катта эмаслигини кўрсатади. Лекин унинг қуввати кичик ҳам эмас, шунинг учун ҳам бу қувватлар бир-бирига тенг.

Фақат квадрат эмас, балки куб ҳам кесмада қанча нуқта бўлса шунча нуқтага эга. Умуман, ҳеч бўлмаганда битта чизиққа эга бўлган ихтиёрий геометрик шакл кесмада қанча нуқта бўлса, шунча нуқтага эга бўлади. Бундай тўпламлар *континуум* қувватли тўпламлар дейилади (*continuum* — латинча узлуксиз деган сўздир).