Мисоллар

1-МИСОЛ. Агар $A=\{k:\ k=4n+1,\ n\in N\}$ бўлса, A тўпламга тегишли бўлган 4 та элементни, тегишли бўлмаган 3 элементни ёзинг

Δ $n=1,\ k=4\cdot 1+1=5,\ \ n=4,\ k=4\cdot 4+1=17$

$n=7,\ k=4\cdot 7+1=29,\ n=10,\ k=4\cdot 10+1=41$

$k=4n+1$ ифода 3, 6, 8 га тенг бўладиган n натурал сон мавжуд эмас. Шунинг учун $3, 6, 8\notin A$, $5, 7, 29, 41\in A$.∇

2-МИСОЛ. Кўпайтириш амалининг айириш амалига нисбатан дистрибутивлик қонуни ўринли, яъни

$$(A\backslash B)\cap C=(A\cap C)\backslash(B\cap C) \qquad (1)$$

Δ $x\in(A\backslash B)\cap C$ ихтиёрий элемент бўлсин, бундан $x\in(A\backslash B)$ ва $x\in C$. $x\in A\backslash B$ бўлгани учун айириш амалининг таърифига кўра $x\in A$ ва $x\notin B$. Шундай қилиб $x\in A$, $x\in C$ демак, $x\in A\cap C$, аммо $x\notin B\cap C$. Охирги муносабатлардан $x\in(A\cap C)\backslash(B\cap C)$, демак

$$(A\backslash B)\cap C\subset(A\cap C)\backslash(B\cap C). \qquad (2)$$

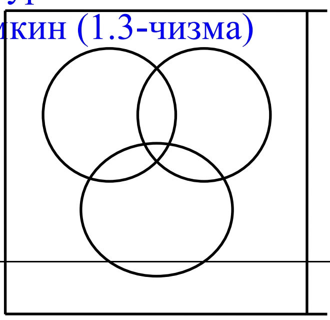
Энди

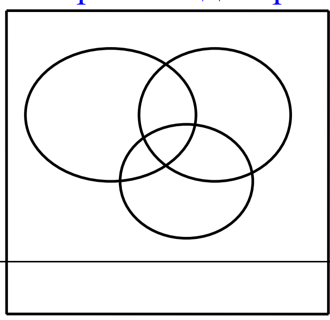
$$(A\backslash B)\cap C\supset(A\cap C)\backslash(B\cap C) \qquad (3)$$

3-МИСОЛ. $A\cap(B\backslash C)=(A\cap B)\backslash C$ муносабатни Эйлер-Виен диаграммалари ёрдамида исботланг.

Берилган муносабатни чап ва ўнг томонида турган тўпламларни Эйлер-Виен диаграммалардаги тасвири

4-МИСОЛ $A\cup(B\backslash C)\ \supset\ (A\cup B)\backslash C$ муносабат щринли. Берилган тенгликни ўринли эмаслигини қуйидаги Эйлер-Виен диаграмалларидан хам кўриш мумкин (1.3-чизма)





1.2 Қуйидаги тўпламларнинг қайси бири бўш тўплам?

а) $A = \{x:\ x^2 + 2x + 10 = 0,\ x \in \mathbb{R}\}$

б)B=$\{x:\ x^2 - 2\pi x + 5 = 0,\ x \epsilon \mathbb{Z}\}$

в)C=$\{x:\ 30 \leq x \leq 40,\ x \in \mathbb{N},\ x - \text{туб сон}\}$

г) $D = \left\{x:\ sin2x = \frac{1}{2},\ x \in \mathbb{R},\ x > 0\right\}$

1.3 а) Агар A$= \{1,2,3,5,7,10,12\}$, $\mathrm{B} = \{2,4,6,8,10\}$бўлса, A∪B, A∩B ,B\A, A\B, AΔB тўпламларни топинг.

б) Агар $A = \{k:\ k = 4n + 1,\ n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{k:\ k = 4n + 3,\ n \in \mathbb{Z}\}$бўлса, A∪B тўпламни топинг.

в) Агар $\mathrm{A} = [0;2]$, $\mathrm{B} = [1;5]$ бўлса, A∪B, A∩B ,B\A, A\B, AΔB тўпламларни топинг.

г) тўпламлар устида амалларни бажаринг.

$[8;15] \cap [9;20]$; $(-1;1] \cap [-1;0)$; $(-1;0] \cap [1;\infty)$;

$[1;+\infty) \cup [0;+\infty)$; $[-1;0) \cup (0;4]$; $\{4\} \cup (-\infty;4)$;

$(0;2) \cup [0;2]$; $[3;15]\setminus(5;16)$; $[3;16]\setminus[5;15]$

$[3;5]\Delta[2;7]$; $[2;5]\triangle[3;7]$

X универсал тўпламнинг ихтиёрий A,B ва C қисм тўпламлари учун қуйидаги муносабатларни исботланг ва Эйлер –Виен диаграммаларида тасвирланг.

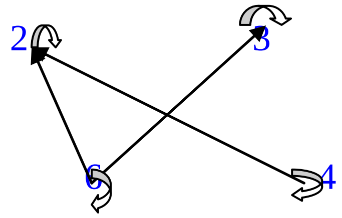
1)$A(B \cup C) = (A\setminus B) \cap (A\setminus C)$2) $(A \cup B)(A \cap B) = (A\setminus B) \cup (B\setminus A)$

3) $A(B \cap C) = (A\setminus B) \cup (A\setminus C)$4) $A(A\setminus B) = A \cap B$

5)$A\setminus B = A(A \cap B)$6) $A \cap (B\setminus C) = (A \cap B)\setminus C$

МИСОЛ, A= {2,3,4,6}. Тўпламда аниқланган

$\tau = \{<2;2>, <3;3>, <4;4>, <6;6>, <6;2>, <6;3>, <4;2>\}$ бинар муносабатни граф ёрдамида ифодаланг (1.7-чизма)



1.7-чизма

1-МИСОЛ. A= {1,2,3}, B={a,b} берилган бўлса, A×B, B×A, A×A, B×B ларни топинг:

A×B=*{<1:a>,<2;a>;<3;a>,<1;b>, <2;b>, <3;b>};*

B×A=*{<a;1>, <b;1>,<a;2>, <b;2>, <a;3>, <b;3> };*

A×A={<1;1>, <1;2>,<1;3>, <2;1>,}<2;2>, <2;3>, <3;1>, <3;2>, <3;3>}

B×B={<a;a>, <a;b>, <b;a>, <b;b>}

2-МИСОЛ. A=[1;3], B=[2;4] лар берилган бўлса, A×B, B×A ларни топинг:

A×B=[1;3] ×[2;4]=*{<a;b>:1≤ a 3, 2≤ b ≤4}*

B× A=[2;4] × [1;3] = {*<a;b>: 2 ≤ a ≤4, 1≤ b ≤3}*

МИСОЛ: M_3тўпламдаτ={<1,2>, <2;2>, <1;3>} ва

σ={<1;1>, <2;2>, <3;1>} бинармуносабатлараниқланганбўлсин, ухолдаτ·σ={<1;2>; <2;2>; <1;1>},σ·τ={<1;2>, <1;3>, <2;2>, <3;2>, <3;3>} бўлади.

2.A={6,8,9} ва B={2,3,4} тўпламлардаа∈A, b∈B, a τ b- "a сон b гакарралибўлиш" муносабатиданиборатбўлсин, ухолда

τ={<6;2>,<6:3>, <8;2>, <8;4>, <9;3>} ⊂ A×B,

τ^{-1}={<2;6>, <3;6>,<2;8>,<4;8>,<3;9>} ⊂ B×A,

bτ^{-1} a - " b сонанибўлувчиси" муносабатибўлиб,

Dom τ=A, Im τ=B, Dom τ^{-1}=B, Im τ^{-1}=A бўлади.

МИСОЛ. $A=Z,\forall(a,b\in Z)a\tau b=[(a-b)\vdots 5]$ ёки a-b=5n, n∈Z. Бу ҳолда τ Z да эквивалентлик муносабати бўлади.

ΔҲақиқатан ҳам.

$$D© = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1\mu}\dots a_{1\nu}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2\mu}\dots a_{2\nu}\dots a_{2n} \\ --------------- \\ a_{n1}a_{n2}\dots a_{n\mu}..a_{n\nu}\dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Бу $\tau(M)$ эквивалентлик муносабати **Z** тўпламни ўзаро кесишмайдиган қисм тўпламларга ажратади.

ΔҲақиқатан ҳам

$$\bar{0}=\{\dots,-5k,\dots.,-10,-5,0,5,10,\dots,5k,\dots\}$$
$$\bar{1}=\{\dots,-5k+1,\dots,-9,-4,1,6,11,\dots,5k+1,\dots\}$$
$$\bar{2}=\{\dots,-5k+2,\dots,-8,-3,2,7,12,\dots,5k+2,\dots\}$$
$$\bar{3}=\{\dots,-5k+3,\dots,-7,-2,3,8,13,\dots,5k+3,\dots\}$$
$$\bar{4}=\{\dots,-5k+4,\dots,-6,-1,4,9,14,\dots,5k+4,\dots\}$$
$$Z=\bar{0}\cup\bar{1}\cup\bar{2}\cup\bar{3}\cup\bar{4},\ Z/_{\vdots}=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}.\Delta$$

Қуйидаги тўпламларни Декарт координаталар системасида геометрик тасвирини топинг.

1) $[0;1]\times[0;1]$ 2) $[-1;1]\times[2;3]$ 3) $[1;3]\times(-\infty;3]$

4) $[0;3]\times[1;+\infty)$ 5) $[1;4]\times(-\infty;+\infty)$ 6) $[-1;5]\times\{2,3,4\}$

7) $[0;+\infty)\times\{1,3\}$	8) $(-\infty;+\infty)\times\{1,2,3\}$

Масалалар

МИСОЛЛАР. 1. M - ихтиёрий табиатли элементларнрнинг қандайдир бўш бўлмаган тўплами, $A=\{B:B\subset M\}$ бўлсин. У ҳолда $f:A\to A$ акслантиршни $\forall(B\in A)$ $f(b)=M\backslash b$ кўринишда аниқласак, f A тўпламда аниқланган унар амал (оператор) дан иборат бўлади.

2. A 1- мисолдаги тўплам бўлсин. Агар $f:A^2\to A$ акслантирш

$\forall(B_1,B\in A)$ $f(B_1,B_2)= B_1\cup B_2$ $f(B_1,B_2)= B_1\cap B_2$

кўринишда берилса, ҳар иккала ҳолда ҳам f-A тўпламда аниқланган бинар амалдан иборат бўлади.

3. **N** натурал сонлар тўплами, $\forall(n\in \mathbf{N})$ тайинланган натурал сон бўсин. У ҳолда $f:A^2\to A$ акслантириш $\forall(m_1,m_2,...,m_n\in \mathbf{N})$ $f(m_1,m_2,...,m_n)=$

$=(m_1,m_2,...,m_n)$ кўринишда берилса, f - **N** тўпламда аниқланган n-ар амал бўлади. Бу жойда $(m_1,m_2,...,m_n)$,- $m_1,m_2,...,m_n$ натурал сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси.

4. Бўлиш амали бутун сонлар системасида аниқланган қисман амалдан иборат.

МИСОЛЛАР. 8. Бутун сонлар системасида 0 қўшиш амалига нисбатан, 1 кўпайтириш амалига нисбатан ҳам ўнг ҳам чап нейтрал элементлардир.

9. $\varnothing$ тўпламларнинг бирлашмаси амалига нисбатан универсал тўплам X тўпламнинг кесишмаси амалига нисбатан нейтрал элементлардир.

МИСОЛЛАР. 10. Бутун сонларни қўшиш амалига нисбатан a га (-a) симметрик (қарама-қарши) элемент бўлади.

11. Рационал сонларни кўпайтириш амалига нисбатан $a\neq 0$ рационал сонга $a^{-1}=1/a$ симметрик (тескари) элемент бўлади.

МИСОЛ. 12. Агар B,C$\in$N, B={2,4,6,...,2n,...}, C={1,3,5,...,2n-1,...} бўлса, B натурал сонларни қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан ёпиқ, C эса кўпайтириш амалига нисбатан ёпиқ.

Қуйидаги тўпламларда +, -, ·, : амалларининг қайси бири алгебраик амал бўлади. Агар алгебраик амал бўлса, улар коммутатив, ассоциатив бўладими?

1) ℕ; 2) 2ℕ=$\{2n: n \in N\}$; 3) T=$\{2n-1: n \in N\}$ 4) ℤ;

5) $2\mathbb{Z} = \{2n: n \in \mathbb{Z}\}$; 6) ℚ; 7) ℝ; 8) ℝ\{0}; 9) $\mathbb{R}^+ = \{x: x \in \mathbb{R}, x > 0\}$;

10) ℝ\ℚ; 11) {0}; 12) {1}; 13) {0,1}.

2.2 Агар $A_1 = \{0,1\}$, $A_2 = \{0,1,2\}$, $A_3 = \{0,1,2,3\}$ тўпламларда $*$ амал мос равишда қуйидаги Келли жадвали ёрдамида берилган бўлса, уни коммутатив ва ассоциатив эканлигини исботланг.

1) 2) 3)

*	0	1
0	0	1
1	1	0

*	1	2	3
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

*	0	1	3
0	0	1	3
1	1	2	0
2	2	3	1
3	3	0	2

2.3 $\mathbb{R}^+ = \{x: x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ тўпламда аниқланган қуйидагиларнинг қайси бири амал бўлади? Агар амал бўлса, улар коммутатив ва ассоциатив бўладими?

1) $a * b = \frac{a+b}{2}$; 2) $a * b = a + b - 1$; 3) $a * b = a \cdot b^2$;

4) $a * b = a^b$; 5) $a * b = \sqrt{a \cdot b}$; 6) $a * b = \log_a b$;

7) $a * b = max\{a, b\}$; 8) $a * b = min\{a, b\}$; 9) $a * b = |a - b|$;

10) $a * b = a$.

2.4 $A = \{a + b\sqrt{2}: a, b \in \mathbb{Z}\}$ тўплам қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан ёпиқ бўладими, бу тўпламда қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан нейтрал элементлар мавжудми?

Қуйидаги тўпламларни қайси бири алгебраик система бўлади:

1) $Z[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}: a,b\in Z\}$; 2) $Q[\sqrt{3}]=\{a+b\sqrt{3}: a,b\in Q\}$;

3) $K=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}: a,b\in Q\right\}$; 4) $L=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ a & b \end{pmatrix}: a,b\in Q\right\}$;

5) $P=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}: a,b\in Q\right\}$; 6) $E=\left\{\begin{pmatrix} -a & b \\ -b & a \end{pmatrix}: a,b\in \mathbb{R}\right\}$;

7) $2\mathbb{Z}$; 8) $\mathbb{R}$; 9) $T=\{2n-1: n\in\mathbb{Z}\}$.

Мисоллар

$z^2+\bar{z}=0$ тенгламани ечинг.

Δ $z=a+bi$ бўлсин, у ҳолда $\bar{z}=a-bi$ бўлади.

$$(a+bi)^2+(a-bi)\Rightarrow a^2+2abi-b^2+a-bi=0\Rightarrow$$
$$(a^2+a-b^2)+(2ab-b)i=0\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} a^2+a-b^2=0 \\ 2ab-b=0 \end{cases}\Rightarrow b(2a-1)=0\Rightarrow\left(b=0 \vee a=\frac{1}{2}\right);$$

$a)$ $b=0$ бўлганда $a^2+a=0\Rightarrow(a_1=0\vee a_2=-1)$,

$$b)\ \ a=\frac{1}{2}\ \text{ бўлганда }\ b^2=\frac{3}{4}\Rightarrow\left(b_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\vee b_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Демак, $z_1=0$, $z_2=-1$, $z_3=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_4=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ лар берилган тенгламанинг илдизлари бўлади. ∇

$z=\sqrt{24-10i}$ ҳисоблансин.

Δ $sign\,(-10)=-1$ бўлгани учун қуйидагига эга бўламиз:

$$z=\pm\left[\sqrt{\frac{24+\sqrt{24^2+10^2}}{2}}-i\sqrt{\frac{-24+\sqrt{24^2+10^2}}{2}}\right]=$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{24+\sqrt{676}}{2}}-i\sqrt{\frac{-24+\sqrt{676}}{2}}\right]=\pm\left[\sqrt{\frac{24+26}{2}}-i\sqrt{\frac{-24+26}{2}}\right]=$$

$$=\pm(5-i),\ \ z_1=5-i\,, z_2=5+i\,.\nabla$$

Алгебраик шаклдаги комплекс сонлар устида амалларни бажаринг.

1) $(5+4i)+(3-7i)-(2+5i)$; 2) $(1+i)(2+i)+\frac{5}{1+2i}$;

3) $\frac{(2-3i)(4-i)}{5-i}$; 4) $\frac{5+i}{(1-2i)(5-i)}$;

5) $\frac{(5+2i)(4-3i)}{(1-2i)(1+3i)}$; 6) $\frac{(1+2i)^2-(1-i)^2}{(3+2i)^2-(2+i)^2}$;

7) $(1+2i)^6$; 8) $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-1}}$;

9) $(1+i)^{1990}$; 10) $(1+2i)^5-(1-2i)^5$.

Мисоллар

$z=1-i$ сонни триганометрик шаклда ёзинг.

Δ $a=1, b=-1$ бўлгани учун

$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}\ \wedge \cos\varphi=\frac{a}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{b}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi \arg z=\frac{7\pi}{4}\ \wedge z=1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right).\nabla$$

$z+\frac{1}{z}=1$ бўлса, $z^{1990}+\frac{1}{z^{1990}}$ ни ҳисобланг.

$$\Delta\ \ z+\frac{1}{z}=1\Rightarrow z^2-z+1=0\Rightarrow z_1=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad z_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

z^{1990} ни ҳисоблаш учун z_1 ни триганометрик шаклга келтирамиз.

$|z_1|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$ (Шу каби $|z_2|$).

$\varphi_1=\arg z_1=arctg(-\sqrt{3})=\frac{5\pi}{3}$, чунки $\sin\varphi_1=\frac{1}{2}, \cos\varphi_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, шу каби

$\varphi_2=\arg z_2=arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$. Демак,

$$z_1 = \cos\frac{5\pi}{3} + isin\ \frac{5\pi}{3} \Rightarrow z_1^{1990} = \left(\cos\frac{5\pi}{3} + isin\ \frac{5\pi}{3}\right)^{1990} =$$

$$= \cos\frac{5\cdot 1990\pi}{3} + isin\ \frac{5\cdot 1990\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} + isin\ \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{z^{1990}} = z_1^{-1990} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\ , \qquad z_1^{1990} + \frac{1}{z_1^{1990}} = -1$$

Шу каби $z_2^{1990} + \frac{1}{z_2^{1990}}$ ни ҳисоблашни ўқувчига қолдирамиз.∇

Қуйидаги сонларни триганометрик шаклда ёзинг.
1) 2; 2) -2; 3) $2i$; 4) $-2i$; 5) $1+i$; 6) $-1+i$; 7) $-1-i$; 8) $1+i\sqrt{3}$;
9) $-1+i\sqrt{3}$; 10) $\sqrt{3}-i$; 11) $-\sqrt{3}-i$; 12) $\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$; 13) $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$;
14) - $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$; 15) $2-2i$; 16) $2+\sqrt{3}+i$.

Жадвалдан фойдаланиб, фуйидаги комплекс сонларни триганометрик шаклда ёзинг.
1) $3+i$; 2) $4-i$; 3) $-2+i$; 4) $-1-2i$; 5) $2+i$.

1) Агар $z+\frac{1}{z}=1$ бўлса, $z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos\frac{n\pi}{3}$ эканлигини исботланг;

Мисоллар

x,y∈R деб фараз қилиб, $x+8i+(y-3)i=1$ тенгламадан x ва y ларни топинг.

$$\Delta\ \ x+8i+(y-3)i=1 \Rightarrow x+yi=1-5i \Leftrightarrow x=1, y=-5.\nabla$$

$$\frac{(3-4i)(2-i)}{2+i}-\frac{(3+4i)(2+i)}{2-i}=\frac{(3-4i)(2-i)^2}{(2-i)(2+i)}-\frac{(3+4i)(2+i)^2}{(2-i)(2+i)}=$$

$$=\frac{(3-4i)(3-4i)}{2^2+1^2}-\frac{(3+4i)(3+4i)}{2^2+1^2}=\frac{1}{5}[(-7-24i)-(-7+24i)]$$
$$=\frac{48}{5}i.\ \nabla$$

$z_1=a_1+b_1i$,
$z_2=a_2+b_2i$ бўлса , $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ бўлишини исботланг.

$\Delta\ z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+a_2b_1)i;\ \ \overline{z_1\cdot z_2}$
$=(a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+a_2b_1)i;$

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(a_1-b_1i)\cdot(a_2-b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+a_2b_1)i;$

Булардан $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ келиб чиқади. ∇

Қуйидаги тенгламаларда x ва y ларни ҳақиқий сон ҳисоблаб, уларни топинг.

1) $(2-3i)x+(3+2i)y=2-5i$; 2) $(5+2i)x+(1-3i)y=4-i$;
3) $(2-i)x+(5+6i)y=1-3i$; 4) $x+8i+(y-3)i=1$;
5) $(3+i)x-2(1+4i)y=-2-4i$; 6) $(1+2i)x+(3-5i)y=1=3i$;

3. Алгебраик шаклдаги комплекс сонлар устида амалларни бажаринг.

1) $(5+4i)+(3-7i)-(2+5i)$; 2) $(1+i)(2+i)+\frac{5}{1+2i}$;
3) $\frac{(2-3i)(4-i)}{5-i}$; 4) $\frac{5+i}{(1-2i)(5-i)}$;
5) $\frac{(5+2i)(4-3i)}{(1-2i)(1+3i)}$; 6) $\frac{(1+2i)^2-(1-i)^2}{(3+2i)^2-(2+i)^2}$;
7) $(1+2i)^6$; 8) $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-1}}$;
9) $(1+i)^{1990}$; 10) $(1+2i)^5-(1-2i)^5$.

4. Бирнинг n-даражали илдизларини топинг.

1) n=3 2) n=4 3) n=6 4) n=8

Мисоллар

1. МИСОЛЛАР ЕЧИШ.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

Системани ечинг.

Δ Берилган системанинг 1-тенгламасини ҳар икки томонини (-3) га , (-2) га, (-1) га кўпайтириб мос равишда 2-, 3-, 4- тенгламаларига қўшамиз (бу бажарилган элементар алмаштиришларни юқоридагидек схематик тасвирлаймиз) натижада берилган системага тенг кучли бўлган

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ -4x_2 - 7x_3 - 11x_4 = -7 \\ x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 8 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \end{cases}$$

системага эга бўламиз. Бу системадаги 2- ва 4- тенгламаларнинг ўринларини ўзаро алмаштириб, унга эквивалент бўлган (бу алмаштиришни схематик равишда юқоридагидек белгилаймиз)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 8 \\ -4x_2 - 7x_3 - 11x_4 = -7 \end{cases}$$

Системани ҳосил қиламиз. Схемада кўрсатилган элементар алмаштиришни бажариб,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ -6x_3 - 3x_4 = -3 \\ -3x_3 - 27x_4 = -27 \end{cases} \quad :3$$

системага келамиз. Бу системани 3-тенгламасини 3 га, 4- тенгламасини (-3) га қисқартириб (ҳар икки томонини бўлиб) уларнинг ўринларини алмаштириб ёзамиз (схематик белгилашга қаранг)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ x_3 + 9x_4 = 9 \\ -2x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ x_3 + 9x_4 = 9 \\ 17x_4 = 17 \end{cases}$$

Охирги системанинг 4- тенгламасидан $x_4 = 1$, x_4 нинг бу қийматини системанинг 3- тенгламасига қўйиб $x_3 = 0$ ни топамиз, x_3 , x_4 ларни бу қийматларини 2- тенгламага қўйиб $x_2 = -1$ ни топамиз, x_2, x_3 , x_4 ларни бу топилган қийматларини 1- тенгламага қўйиб $x_1 = -1$ ни топамиз. Демак, берилган система ягона $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ ечилмага эга. ∇

2.МИСОЛ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 = 0 \end{cases}$ Системани ечинг.

$$\Delta \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 0 \\ 3x_2 + 9x_3 + 19x_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Бу системадан $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$ ларни топамиз. Демак, берилган система ягона ноль ечилма ($x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$) га эга .∇

МУСТАҚИЛ ИШ УЧУН МИСОЛЛАР.

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_3 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 12x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

λ нинг қайси қиймаиларида фуйидаги тенгламалар системалари биргалашган бўлади?

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 = \lambda \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = \text{ғ}3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5 \\ -12x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -6 \\ \lambda x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 1 \\ -6x_1 + 8x_2 - 5x_3 - x_4 = 9 \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 3 \\ -3x_1 + 7x_2 + 17x_3 + 17x_4 = \lambda \end{cases}$

Мисоллар

1. МИСОЛЛАР ЕЧИШ.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

Системани ечинг.

Δ Берилган системанинг 1-тенгламасини ҳар икки томонини (-3) га, (-2) га, (-1) га кўпайтириб мос равишда 2-, 3-, 4- тенгламаларига қўшамиз (бу бажарилган элементар алмаштиришларни юқоридагидек схематик тасвирлаймиз) натижада берилган системага тенг кучли бўлган

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ -4x_2 - 7x_3 - 11x_4 = -7 \\ x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 8 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \end{cases}$$

системага эга бўламиз. Бу системадаги 2- ва 4- тенгламаларнинг ўринларини ўзаро алмаштириб, унга эквивалент бўлган (бу алмаштиришни схематик равишда юқоридагидек белгилаймиз)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 8 \\ -4x_2 - 7x_3 - 11x_4 = -7 \end{cases}$$

Системани ҳосил қиламиз. Схемада кўрсатилган элементар алмаштиришни бажариб,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ -6x_3 - 3x_4 = -3 \\ -3x_3 - 27x_4 = -27 \end{cases} \quad :3$$

системага келамиз. Бу системани 3-тенгламасини 3 га, 4- тенгламасини (-3) га қисқартириб (ҳар икки томонини бўлиб) уларнинг ўринларини алмаштириб ёзамиз (схематик белгилашга қаранг)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ x_3 + 9x_4 = 9 \\ -2x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ x_3 + 9x_4 = 9 \\ 17x_4 = 17 \end{cases}$$

Охирги системанинг 4- тенгламасидан $x_4 = 1$, x_4 нинг бу қийматини системанинг 3- тенгламасига қўйиб $x_3 = 0$ ни топамиз, x_3 , x_4 ларни бу қийматларини 2- тенгламага қўйиб $x_2 = -1$ ни топамиз, x_2, x_3 , x_4 ларни бу топилган қийматларини 1- тенгламага қўйиб $x_1 = -1$ ни топамиз. Демак, берилган система ягона $x_1 = -1$, $x_2 = -1$,$x_3 = 0$,$x_4 = 1$ ечилмага эга. ∇

МУСТАҚИЛ ИШ УЧУН МИСОЛЛАР.

4.1. Қуйидаги тенгламалар системаларини Гаусс усулида ечинг:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_3 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 12x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_4 = -1 \\ 5x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 5 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ 7x_1 - x_2 + x_3 - 9x_4 = -4 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2 \end{cases}$ 10)

$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 5x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$ 12)

$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$

Мисоллар

Мисол.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

система ечимларининг фундаментал системасини топинг.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Охирги системанинг умумий ечими

$x_1 = 11x_3 - 7x_4$, $x_2 = -5x_3 + 3x_4$ бўлади.

$x_1 = 1, x_2 = 0$ сўнгра $x_3 = 0, x_4 = 1$ деб, x_1, x_2 ларнинг тегишли қийматларини топамиз.

x_1	x_2	x_3	x_4
11	-5	1	0
-7	3	0	1

Қуйидаги бир жинсли тенгламалар системаси ечимларини топинг.

1) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0 \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0 \end{cases}$ 2)

$\begin{cases} x_1-x_3+x_5=0 \\ x_2-x_4+x_6=0 \\ x_1-x_2+x_5-x_6=0 \\ x_2-x_3+x_6=0 \\ x_1-x_4+x_5=0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0 \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0 \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x_1+3x_2+x_3+3x_4+5x_5=0 \\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0 \\ 9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+4x_3+8x_4=0 \end{cases}$

1) $\begin{cases} x_1+x_2-4x_3=0 \\ 3x_1+5x_2+2x_3=0 \\ 4x_1+7x_2+5x_3=0 \\ 2x_1+9x_2+6x_3=0 \end{cases}$ 6)

$\begin{cases} 3x_1-x_2+4x_3+4x_4-5x_5=0 \\ 6x_1-2x_2+2x_3+5x_4+7x_5=0 \\ 9x_1-3x_2+4x_3+8x_4+9x_5=0 \\ 6x_1-2x_2+6x_3+7x_4+x_5=0 \end{cases}$

Мисоллар

МИСОЛЛАР. 1. S_3нинг барча элементларини топинг.

$$\Delta \quad \varphi_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\quad \varphi_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\quad \varphi_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},$$

$$\varphi_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\quad \varphi_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\quad \varphi_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

Демак, S_3нинг элементлари $3! = 6$ та экан. ∇

2. $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$ -3 - даражали ўринга қўйишларнинг $\varphi_2 \cdot \varphi_1$ ва $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ кўпайтмаларини топинг.

$$\Delta \quad \varphi_1 \cdot \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2 \cdot \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Демак, $\varphi_2 \cdot \varphi_1 \neq \varphi_1 \cdot \varphi_2$. Бундан умумий ҳолда ўринга қўйишларни кўпайтириш коммутативлик хоссосига эга эмас деган ҳулосага келамиз. ∇

3. S_3 даги ҳамма жуфт ва тоқ ўринга қўйишларнинг сонларини топинг.

Δ φ_1 даги тартибсизлик йўқ. φ_2 да $\{3;2\} -$ битта тартибсизлик бор. Шу каби φ_3 да ҳам $\{2,1\} -$ битта. φ_4 да $\{2,1\}, \{3,1\} -$ иккита тартибсизлик бор. φ_1 , φ_4, φ_5 лар жуфт, $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_6 -$ лар тоқ ўринга қўйишлар экан.∇

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 12 & 31 & 62 \\ 122 & 315 & 623 \end{vmatrix}$$ 3-тартибли детерминантни ҳисобланг.

$$\Delta \quad \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 120 & 310 & 620 \\ 120+2 & 310+5 & 620+3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 120 & 310 & 620 \\ 120 & 310 & 620 \end{vmatrix} + \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 120 & 310 & 620 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 12 & 31 & 62 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 10+2 & 30+1 & 60+2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 10 & 30 & 60 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 + 12 + 60 - 18 - 10 - 12 = 35 \ .\nabla$$

МУСТАҚИЛ ИШ УЧУН МИСОЛЛАР.

5.16. Қуйидаги ўринга қўйишларни кўрсатилган тартибда кўпайтиринг:

1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$;	2) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4\end{pmatrix}$;
3) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$;	4) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2\end{pmatrix}$;
5) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4\end{pmatrix}$;	6) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

5.17. Қуйидаги ўринга қўйишларни жуфт ёки тоқлигини аниқланг.

1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$	2) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$;	3) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1\end{pmatrix}$;
4) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 6 & 3 & 1 & 2 & 5 & 4\end{pmatrix}$;	5) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 1 & 9 & 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 8\end{pmatrix}$;	
6) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 5\end{pmatrix}$;	7) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 7\end{pmatrix}$.	

Мисоллар

$$D_3 = \begin{vmatrix}1 & 3 & 6\\ 12 & 31 & 62\\ 122 & 315 & 623\end{vmatrix}$$ 3-тартибли детерминантни ҳисобланг.

$$\Delta\ \frac{1}{10}\begin{vmatrix}1 & 3 & 6\\ 120 & 310 & 620\\ 120+2 & 310+5 & 620+3\end{vmatrix} = \frac{1}{10}\begin{vmatrix}1 & 3 & 6\\ 120 & 310 & 620\\ 120 & 310 & 620\end{vmatrix} + \frac{1}{10}\begin{vmatrix}1 & 3 & 6\\ 120 & 310 & 620\\ 2 & 5 & 3\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix}1 & 3 & 6\\ 12 & 31 & 62\\ 2 & 5 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 3 & 6\\ 10+2 & 30+1 & 60+2\\ 2 & 5 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 3 & 6\\ 10 & 30 & 60\\ 2 & 5 & 3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 3 & 6\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 5 & 3\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}1 & 3 & 6\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 5 & 3\end{vmatrix} =$$

$$= 3 + 12 + 60 - 18 - 10 - 12 = 35\ .\nabla$$

Ушбу детерминантни детерминант хоссаларидан фойдаланиб хисоблаймиз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 2\big(1\cdot(-1)\cdot(-11)\big) = 22$$

Қуйидаги детерминантлар ҳисоблансин.

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; 7) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$;

8) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$; 9) $\begin{vmatrix} a+b & b+d \\ a+c & c+d \end{vmatrix}$; 10) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$;

11) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; 12) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; 13) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$;

14) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; 15) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & cd \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$; 16) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$;

17) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$; 18) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$; 19) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -3 & -1 \\ 6 & 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

Мисоллар

Мисоллар. 1. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ детерминантни 3- сатри бўйича ёйиб чиқинг.

$$\Delta \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$(-2)(-4+4+0+0-8-1)+3(0-6-3+0-12-3)=(-2)(-9)+3(-24)=18-72=-54.$$

МУСТАҚИЛ ИШ УЧУН МИСОЛЛАР.

Қуйдаги детерминантларни мақсадга мувофиқ танлаб олинган сатри (устун) элементлари бўйича ёйиб ҳисоблансин:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a' & 1 & 0 & 0 \\ b' & 0 & 1 & 0 \\ c' & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; 9) $\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$.

Мисоллар

1-мисол. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$ матрицага тескари матрицани топинг.

Δ A ва I матрицаларга бир вақтда 1), 2) сатр элементар алмаштиришларини бажариб A ни бирлик матрицага келтирсак, I бирлик матрица A^{-1} матрицага келади. Яъни:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Демак, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ҳақиқатан ҳам

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+6-2 & -1-3+4 & 2-2 \\ -6+10-4 & -2-5+8 & 4-4 \\ -9+14-5 & -3-7+10 & 6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \nabla$$

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР.

5.13. Қуйидаги матрицаларга тескари матрицаларни топинг.

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & -1 & 2\\ 2 & 4 & -5\end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 3) $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}$

4) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & 4 & -5\end{pmatrix}$ 5) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 3 & 5 & 7\end{pmatrix}$ 6) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 7 & -8\\ -1 & -3 & 4\end{pmatrix}$

7) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5 & 7\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 8) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ 9) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -2\\ 3 & 8 & 0 & 4\\ 2 & 2 & -4 & -3\\ 3 & 8 & -1 & -6\end{pmatrix}$

10) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ 11) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -2\\ 2 & 5 & -3 & 5\\ 0 & 0 & 5 & 4\\ 0 & 0 & 6 & 5\end{pmatrix}$ 12) $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 1 & 4\\ 2 & 7 & 6 & -1\\ 1 & 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$

Мисоллар

МИСОЛЛАР: 1.$\overrightarrow{a_1} =< 1,1,1 >$, $\overrightarrow{a_2} =< 1,2,3 >$, $\overrightarrow{a_3} =< 1,3,6 >$уч ўлчовли векторлар системасининг чизиқли боғланмаган (эркли) экалиги кўрсатилсин.

Δ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$ лар учун $\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \lambda_3\overrightarrow{a_3} = \vec{\boldsymbol{\theta}}$ёки [$<\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1> + <\lambda_2, 2\lambda_2, 3\lambda_2> + <\lambda_3, 3\lambda_3, 6\lambda_3>$]=<0,0,0> бўлсин. Бундан $<\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3, \lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3>$=<0,0,0> бу қуйидаги бир жинсли тенгламалар системасига тенг кучли.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Охирги тенгламалар системасини ечиб, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ га эга бўламиз. Демак, берилган векторлар системаси чизиқли боғланмаган экан.∇

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Бу система чексиз кўп ноль ечилмаларга эга. Масалан $\lambda_1 = 1, \lambda_1 = -1, \lambda_1 = -1$, бу ҳолда $\overrightarrow{b_1} - \overrightarrow{b_2} + \overrightarrow{b_3} = \vec{\theta}$ боғланиш ўринга эга. Демак, $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$ векторлар системаси чизиқли боғланган системани ташкил қилади.∇

Мисоллар

МИСОЛЛАР: $\overrightarrow{b_1} =< 1,1,2 >$, $\overrightarrow{b_2} =< 2,3,4 >$, $\overrightarrow{b_3} =< 1,2,2 >$ векторлар системасидаги чизиқли боғланиш текширилсин.

Δ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$ лар учун $\lambda_1\overrightarrow{b_1} + \lambda_2\overrightarrow{b_2} + \lambda_3\overrightarrow{b_3} = \boldsymbol{\vec{\theta}}$ ёки [$<\lambda_1, \lambda_1, 2\lambda_1>$ + $<2\lambda_2, 3\lambda_2, 4\lambda_2>$ + $<\lambda_3, 2\lambda_3, 2\lambda_3>$]=<0,0,0> бўлсин. Бундан $<\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3, \lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3>$=<0,0,0> бу қуйидаги бир жинсли тенгламалар системасига тенг кучли.

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Бу система чексиз кўп ноль ечилмаларга эга. Масалан $\lambda_1 = 1, \lambda_1 = -1, \lambda_1 = -1$, бу ҳолда $\overrightarrow{b_1} - \overrightarrow{b_2} + \overrightarrow{b_3} = \vec{\theta}$ боғланиш ўринга эга. Демак, $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$ векторлар системаси чизиқли боғланган системани ташкил қилади.∇

Қуйдаги векторлар системасини чизиқли боғланган ёки боғланмаган эканлигини текширинг.

1) $\overrightarrow{a_1} =< 1,1,1,1 >, \overrightarrow{a_2} =< 1,-1,1,-1 >, \overrightarrow{a_3} =< 2,3,1,4 >$

2) $\overrightarrow{a_1} =< 1,1,1 >, \overrightarrow{a_2} =< 1,2,-1 >, \overrightarrow{a_3} =< -1,3,1 >$

3) $\overrightarrow{a_1} =< 1,2,1 >, \overrightarrow{a_2} =< 4,3,-2 >, \overrightarrow{a_3} =< -5,-4,-1 >$

4) $\overrightarrow{a_1} =< 1,2,1,1 >, \overrightarrow{a_2} =< 2,5,1,3 >, \overrightarrow{a_3} =< -1,3,-6,4 >, \overrightarrow{a_4} =< 1,-1,4,2 >$

5) $\overrightarrow{a_1} =< 1,1,1,0 >, \overrightarrow{a_2} =< 1,1,0,-1 >, \overrightarrow{a_3} =< 1,0,-1,-1 >, \overrightarrow{a_4} =< 0,-1,-1,0 >$

6) $\overrightarrow{a_1} =< 1,4,1,2 >, \overrightarrow{a_2} =< 3,-9,-11,1 >, \overrightarrow{a_3} =< 2,8,-2,4 >, \overrightarrow{a_4} =< -3,15,5,-7 >$

7) $\overrightarrow{a_1} =< 2,-3,1 >, \overrightarrow{a_2} =< 3,-1,5 >, \overrightarrow{a_3} =< 1,-4,3 >$

8) $\overrightarrow{a_1} =< 5,4,3 >, \overrightarrow{a_2} =< 3,3,2 >, \overrightarrow{a_3} =< 8,1,3 >$

9) $\overrightarrow{a_1} =< 1,2,1 >, \overrightarrow{a_2} =< 2,3,3 >, \overrightarrow{a_3} =< 3,7,1 >

Мисоллар

МИСОЛ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ матрицанинг рангини топинг.

Ечиш.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & -5 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & -5 \\ 0 & 0 & -18 & 5 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = \rho(A) = R(A) = 3.$$

МУСТАҚИЛ ИШ УЧУН МИСОЛЛАР.

5.8. Қуйидаги матрицаларни рангини топинг.

1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 7 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$

1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 0 & 7 & 2 \\ -1 & 1 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 & 9 & 6 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ -6 & 9 & -1 & -2 & 6 \\ -4 & 6 & 1 & 12 & -3 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2-3 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 & 5 & 11 \\ -1 & -4 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ -8 & -5 & -12 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; 15) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Мисол.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

система ечимларининг фундаментал системасини топинг.

Ечиш. Берилган системанинг асосий матрицасини рангини топамиз.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R(A)=2 ва

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Охирги системанинг умумий ечими

$x_1 = 11x_3 - 7x_4$, $x_2 = -5x_3 + 3x_4$ бўлади.

R(A) бўлгани учун 5.8-теоремага асосан берилган биржинсли тенгламалар системаси фундаментал ечимлари 2 та ечимдан иборат бўлади. Уни топиш учун аввал $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ сўнгра $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ деб, x_1 , x_2 ларнинг тегишли қийматларини топамиз.

x_1	x_2	x_3	x_4
11	-5	1	0
-7	3	0	1

$\vec{a}_1 =< 11,-5,1,0 >$,$\vec{a}_2 =< -7,3,0,1 >$

векторлар системаси чизиқли эркли, берилган системанинг ихтиёрий ечими $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ системанинг чизиқли комбинацияси шаклида ифодалаш мумкин.

Берилган системанинг ечимлари тўплами

$$L(\vec{a}_1,\vec{a}_2) = \{\vec{a}: \vec{a} = c_1 < 11,-5,1.0 > +c_2 < -7,3,0,1 > , c_1, c_2 \in R\}$$

бўлиб, $\vec{a}_1,\vec{a}_2$бу вектор фазонинг базиси бўлади.

Мисоллар

1. $5x^4 - x^2+6$ купхадни $x^2 +3x+2$ купхадга колдикли булинг.

2. Куйидаги купхад коеффициентлари йигиндисини топинг:

$(x^4 - 4x^3+2)^{100}$.

3. Горнер схемасидан фойдаланиб f(1) ни хисобланг: $f(x)= x^5$.

4.Куйидаги купхаднинг рационал илдизларини топинг:

$x^3 - 6x^2+15x – 14$.

5-мисол. $f\left(x\right)=2x^3-5x^2+3x-4$ ва $g\left(x\right)=x^2-3x+1$ кўпхoдларнинг кўпойтиринг.

$$g(x)\cdot f(x)=\left(x^2-3x+1\right)\left(2x^3-5x^2+3x-1\right)=$$
$$=2x^5-5x^4+3x^3-x^2-6x^4+15x^2-9x+3x+$$
$$+2x^3-5x^2+3x-1=2x^5-11x^4+5x^3+9x^2-3x-1.$$

6-мисол. $f(x)=2x^5-3x^4+4x^2-5x+7$ кўпҳадни $x-3$ га бўлишдаги $q(x)$ бўлинмани ва $f(3)=r$ қолдиқни Горнер схемаси ёрдамида топамиз:

2	-3	0	4	-5	7
2	3	9	31	88	271

Шундай қилиб, бўлинма

$$q(x)=2x^4+3x^3+9x^2+31x+88,$$

Қолдиқ эса

$$r=f(3)=271 \text{ бўлади.}$$

Горнер усули нафақот кўпҳаднинг илдизларини топишни тезлаштиради, балки унинг қийматини ҳисоблашни осонлаштиради.

Мисоллар

1-мисол. 1. $f(x)=2x^3-5x^2+3x-1$ ни $g(x)=x^2-3x+1$ га қолдиқли бўлиш қоидасидан фойдаланиб бўламиз:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-5x^2+3x-1 & x^2-3x+1 \\ \cline{2-2} \underline{2x^3-6x^2+2x} & 2x+1=q(x) \\ \quad x^2+x-1 & \\ \quad \underline{x^2-3x+1} & \\ \qquad 4x-2=r(x) & \end{array}$$

Ва демак

$$f(x)=g(x)(2x+1)+(4x-2)$$

Тенгликни ҳосил қиламиз, бу ерда $\deg r(x)=1<2=\deg g(x)$.

2-мисол. $f(x)=3x^3+2x^2-x+1$ ни $g(x)=2x^2+x-1$ га қолдиқли бўлинг

$$\begin{array}{l|l} 3x^3+2x^2-x+1 & \underline{2x^2+x+1} \\ \underline{3x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x} & \frac{3}{2}x+\frac{1}{4}=q(x)\in Q[x] \\ \quad \frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+1 & \\ \quad \underline{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}} & \\ \qquad -\frac{11}{2}x+\frac{1}{3}=r(x)\in Q[x] & \end{array}$$

Ва демак

$$f(x)=g(x)\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{11}{2}x+\frac{1}{3}\right)$$

Тенгликни ҳосил қиламиз.

3-misol . $f(x)=x^3+x^2-x-1$ ва $g(x)=x^3-1$ кўпҳадларнинг ЭКУБини топиш учун бу кўпҳадларга Евклид алгоритми тузамиз:

$$f(x)=g(x)\cdot 1+\left(x^3-x\right),$$

$$g(x)=\left(x^2-x\right)(x+1)+(x-1),$$

$$\left(x^2-x\right)=(x-1)\cdot x$$

ва демак $\left(f(x),g(x)\right)=x-1$ бўлади.

4-мисол. Куйидаги купхадлар учун $fM+gN=d$ тенгликни каноатлантирувчи $M(x),N(x)$ купххадлар топилсин.

5-мисол. Куйидаги купхад коеффициентлари йигиндисини топинг:

$(x^4 - 4x^3+2)^{100}$.

6-мисол. Горнер схемасидан фойдаланиб f(1) ни хисобланг: $f(x)= x^5$.

7-мисол. Куйидаги кўпхаднинг рационал илдизларини топинг:

$x^3 - 6x^2+15x - 14$.

Мисол. R да $\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$ тўғри касрни оддий касрларга ёйамиз. Бу каср $\frac{A_1}{x-1}$ ва $\frac{A_2x+A_3}{x^2+1}$ оддий касрларнинг йиғиндисига ёйилади. Бу йиғиндидан

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2x+A_3}{x^2+1}$$

$A_1,\ A_2,\ A_3$ ларни топамиз. Бунинг учун тенгликнинг иккала қисмини $(x-1)(x^2+1)$ касрларнинг умумий махражига кўпойтирсак

$$1 = A_1(x^2+1) + (A_2x+A_3)(x^2-1)$$

Тенглик ҳосил бўлади. $A_1,\ A_2,\ A_3$ коеффициентларни топамиз, яъни $1, x, x^2$ лар олдидаги lar oldidagi коеффициентларни тенглаштириб,

$$x^0 = 1: \quad A_1 \quad - A_3 = 1,$$

$$x: \quad -A_2 + A_3 = 0,$$

$$x^2: \quad A_1 + A_2 \quad = 0.$$

Учта $A_1,\ A_2,\ A_3$ номаълмли учта тенгламалар системасини ҳосил қиламиз ва уни ечиб,

$$A_1 = \frac{1}{2},\ A_2 = -\frac{1}{2},\ A_3 = -\frac{1}{2}$$

ларни топамиз. Шундай қилиб,

$$\frac{1}{(x-1)\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{x+1}{2\left(x^2+1\right)}$$

бўлади.