

## Мисоллар

**1-МИСОЛ.** Агар  $A = \{k: k=4n+1, n \in \mathbb{N}\}$  бўлса,  $A$  тўпламга тегишли бўлган 4 та элементни, тегишли бўлмаган 3 элементни ёзинг

$$\Delta \quad n=1, k=4 \cdot 1+1=5, \quad n=4, k=4 \cdot 4+1=17$$

$$n=7, k=4 \cdot 7+1=29, \quad n=10, k=4 \cdot 10+1=41$$

$k=4n+1$  ифода 3, 6, 8 га тенг бўладиган  $n$  натурал сон мавжуд эмас. Шунинг учун  $3, 6, 8 \notin A, 5, 7, 29, 41 \in A. \nabla$

**2-МИСОЛ.** Кўпайтириш амалининг айириш амалига нисбатан дистрибутивлик қонуни ўринли, яъни

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C) \quad (1)$$

$\Delta$   $x \in (A \setminus B) \cap C$  ихтиёрий элемент бўлсин, бундан  $x \in (A \setminus B)$  ва  $x \in C$ .  $x \in A \setminus B$  бўлгани учун айириш амалининг таърифига кўра  $x \in A$  ва  $x \notin B$ . Шундай қилиб  $x \in A, x \in C$  демак,  $x \in A \cap C$ , аммо  $x \notin B \cap C$ . Охирги муносабатлардан  $x \in (A \cap C) \setminus (B \cap C)$ , демак

$$(A \setminus B) \cap C \subset (A \cap C) \setminus (B \cap C). \quad (2)$$

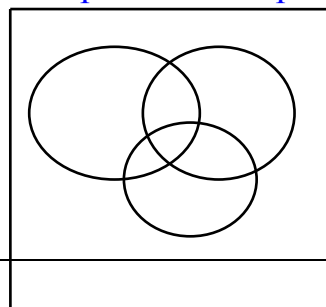
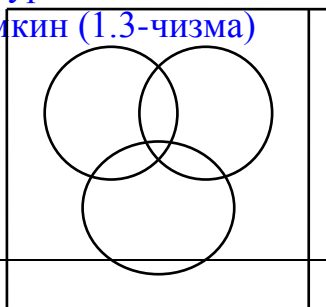
Энди

$$(A \setminus B) \cap C \supset (A \cap C) \setminus (B \cap C) \quad (3)$$

**3-МИСОЛ.**  $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$  муносабатни Эйлер-Виен диаграммалари ёрдамида исботланг.

Берилган муносабатни чап ва ўнг томонида турган тўпламларни Эйлер-Виен диаграммалардаги тасвири

**4-МИСОЛ**  $A \cup (B \setminus C) \supset (A \cup B) \setminus C$  муносабат шринли. Берилган тенгликни ўринли эмаслигини қуйидаги Эйлер-Виен диаграммаларидан ҳам кўриш мумкин (1.3-чизма)



1.2 Қуйидаги тўпламларнинг қайси бири бўш тўплам?

а)  $A = \{x: x^2 + 2x + 10 = 0, x \in \mathbb{R}\}$

б)  $B = \{x: x^2 - 2\pi x + 5 = 0, x \in \mathbb{Z}\}$

в)  $C = \{x: 30 \leq x \leq 40, x \in \mathbb{N}, x - \text{туб сон}\}$

г)  $D = \left\{x: \sin 2x = \frac{1}{2}, x \in \mathbb{R}, x > 0\right\}$

1.3 а) Агар  $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 10, 12\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$  бўлса,  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $B \setminus A$ ,  $A \setminus B$ ,  $A \Delta B$  тўпламларни топинг.

б) Агар  $A = \{k: k = 4n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $B = \{k: k = 4n + 3, n \in \mathbb{Z}\}$  бўлса,  $A \cup B$  тўпламни топинг.

в) Агар  $A = [0; 2]$ ,  $B = [1; 5]$  бўлса,  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $B \setminus A$ ,  $A \setminus B$ ,  $A \Delta B$  тўпламларни топинг.

г) тўпламлар устида амалларни бажаринг.

$$[8; 15] \cap [9; 20]; (-1; 1] \cap [-1; 0); (-1; 0] \cap [1; \infty);$$

$$[1; +\infty) \cup [0; +\infty); [-1; 0) \cup (0; 4]; \{4\} \cup (-\infty; 4);$$

$$(0; 2) \cup [0; 2]; [3; 15] \setminus (5; 16); [3; 16] \setminus [5; 15]$$

$$[3; 5] \Delta [2; 7]; [2; 5] \Delta [3; 7]$$

Х универсал тўпламнинг ихтиёрий А, В ва С қисм тўпламлари учун қуйидаги муносабатларни исботланг ва Эйлер –Виен диаграммаларида тасвирланг.

$$1) A(B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \\ (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$$2) (A \cup B)(A \cap B) =$$

$$3) A(B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

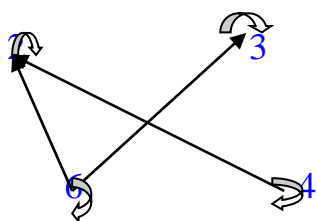
$$4) A(A \setminus B) = A \cap B$$

$$5) A \setminus B = A(A \cap B) \\ B) \setminus C$$

$$6) A \cap (B \setminus C) = (A \cap$$

**МИСОЛ**,  $A = \{2,3,4,6\}$ . Тўпلامда аниқланган

$\tau = \{ \langle 2; 2 \rangle, \langle 3; 3 \rangle, \langle 4; 4 \rangle, \langle 6; 6 \rangle, \langle 6; 2 \rangle, \langle 6; 3 \rangle, \langle 4; 2 \rangle \}$  бинар муносабатни граф ёрдамида ифодаланг (1.7-чизма)



1.7-чизма

**1-МИСОЛ.**  $A = \{1,2,3\}$ ,  $B = \{a,b\}$  берилган бўлса,  $A \times B$ ,  $B \times A$ ,  $A \times A$ ,  $B \times B$  ларни топинг:

$$A \times B = \{ \langle 1;a \rangle, \langle 2;a \rangle, \langle 3;a \rangle, \langle 1;b \rangle, \langle 2;b \rangle, \langle 3;b \rangle \};$$

$$B \times A = \{ \langle a;1 \rangle, \langle b;1 \rangle, \langle a;2 \rangle, \langle b;2 \rangle, \langle a;3 \rangle, \langle b;3 \rangle \};$$

$$A \times A = \{ \langle 1;1 \rangle, \langle 1;2 \rangle, \langle 1;3 \rangle, \langle 2;1 \rangle, \langle 2;2 \rangle, \langle 2;3 \rangle, \langle 3;1 \rangle, \langle 3;2 \rangle, \langle 3;3 \rangle \}$$

$$B \times B = \{ \langle a;a \rangle, \langle a;b \rangle, \langle b;a \rangle, \langle b;b \rangle \}$$

**2-МИСОЛ.**  $A = [1;3]$ ,  $B = [2;4]$  лар берилган бўлса,  $A \times B$ ,  $B \times A$  ларни топинг:

$$A \times B = [1;3] \times [2;4] = \{ \langle a;b \rangle : 1 \leq a \leq 3, 2 \leq b \leq 4 \}$$

$$B \times A = [2;4] \times [1;3] = \{ \langle a;b \rangle : 2 \leq a \leq 4, 1 \leq b \leq 3 \}$$

**МИСОЛ:**  $M_3$  тўпلامда  $\tau = \{ \langle 1,2 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle \}$  ва

$\sigma = \{ \langle 1;1 \rangle, \langle 2;2 \rangle, \langle 3;1 \rangle \}$  бинар муносабатлар аниқланган бўлсин, у ҳолда  $\tau \cdot \sigma = \{ \langle 1;2 \rangle, \langle 2;2 \rangle, \langle 1;1 \rangle \}$ ,  $\sigma \cdot \tau = \{ \langle 1;2 \rangle, \langle 1;3 \rangle, \langle 2;2 \rangle, \langle 3;2 \rangle, \langle 3;3 \rangle \}$  бўлади.

2.  $A = \{6, 8, 9\}$  ва  $B = \{2, 3, 4\}$  тўпламларда  $a \in A$ ,  $b \in B$ ,  $a \tau b$  - "а сон b га қаррали бўлиш" муносабатидан иборат бўлсин, у ҳолда

$$\tau = \{ \langle 6;2 \rangle, \langle 6;3 \rangle, \langle 8;2 \rangle, \langle 8;4 \rangle, \langle 9;3 \rangle \} \subset A \times B,$$

$$\tau^{-1} = \{ \langle 2;6 \rangle, \langle 3;6 \rangle, \langle 2;8 \rangle, \langle 4;8 \rangle, \langle 3;9 \rangle \} \subset B \times A,$$

$b \tau^{-1} a$  - "b сон a ни бўлувчиси" муносабати бўлиб,

$\text{Dom } \tau = A$ ,  $\text{Im } \tau = B$ ,  $\text{Dom } \tau^{-1} = B$ ,  $\text{Im } \tau^{-1} = A$  бўлади.

**МИСОЛ.**  $A = \mathbb{Z}, \forall (a, b \in \mathbb{Z}) a \tau b = [(a - b) : 5]$  ёки  $a - b = 5n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Бу ҳолда  $\tau$   $\mathbb{Z}$  да эквивалентлик муносабати бўлади.

$\Delta$  Ҳақиқатан ҳам.

$$D \otimes = \left| \begin{array}{l} a_{11} a_{12} \dots a_{1\mu} \dots a_{1\nu} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2\mu} \dots a_{2\nu} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1} a_{n2} \dots a_{n\mu} \dots a_{n\nu} \dots a_{nn} \end{array} \right|$$

Бу  $\tau(M)$  эквивалентлик муносабати  $\mathbb{Z}$  тўпламини ўзаро қесишмайдиган қисм тўпламларга ажратади.

$\Delta$  Ҳақиқатан ҳам

$$\bar{0} = \{ \dots, -5k, \dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots, 5k, \dots \}$$

$$\bar{1} = \{ \dots, -5k + 1, \dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots, 5k + 1, \dots \}$$

$$\bar{2} = \{ \dots, -5k + 2, \dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots, 5k + 2, \dots \}$$

$$\bar{3} = \{ \dots, -5k + 3, \dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots, 5k + 3, \dots \}$$

$$\bar{4} = \{ \dots, -5k + 4, \dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots, 5k + 4, \dots \}$$

$$\mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2} \cup \bar{3} \cup \bar{4}, \mathbb{Z} / \tau = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4} \}. \Delta$$

Қуйидаги тўпламларни Декарт координаталар системасида геометрик тасвирини топинг.

1)  $[0; 1] \times [0; 1]$

2)  $[-1; 1] \times [2; 3]$

3)  $[1; 3] \times (-\infty; 3]$

4)  $[0; 3] \times [1; +\infty)$

5)  $[1;4] \times (-\infty; +\infty)$

6)  $[-1; 5] \times \{2,3,4\}$

7)  $[0; +\infty) \times \{1,3\}$

8)  $(-\infty; +\infty) \times \{1,2,3\}$

## Масалалар

**МИСОЛЛАР.** 1.  $M$  - ихтиёрый табиатли элементларнинг қандайдир бўш бўлмаган тўплами,  $A = \{B: B \subset M\}$  бўлсин. У ҳолда  $f: A \rightarrow A$  акслантиришни  $\forall (B \in A) f(B) = M \setminus B$  кўринишда аниқласак,  $f$   $A$  тўпланда аниқланган унар амал (оператор) дан иборат бўлади.

2.  $A$  1- мисолдаги тўпланда бўлсин. Агар  $f: A^2 \rightarrow A$  акслантириш

$$\forall (B_1, B_2 \in A) f(B_1, B_2) = B_1 \cup B_2 \quad g(B_1, B_2) = B_1 \cap B_2$$

кўринишда берилса, ҳар иккала ҳолда ҳам  $f$ - $A$  тўпланда аниқланган бинар амалдан иборат бўлади.

3.  $\mathbb{N}$  натурал сонлар тўплами,  $\forall (n \in \mathbb{N})$  тайинланган натурал сон бўлсин. У ҳолда  $f: A^n \rightarrow A$  акслантириш  $\forall (m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{N}) f(m_1, m_2, \dots, m_n) =$

$(m_1, m_2, \dots, m_n)$  кўринишда берилса,  $f$  -  $\mathbb{N}$  тўпланда аниқланган  $n$ -ар амал бўлади. Бу жойда  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$  -  $m_1, m_2, \dots, m_n$  натурал сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси.

4. Бўлиш амали бутун сонлар системасида аниқланган қисман амалдан иборат.

**МИСОЛЛАР.** 8. Бутун сонлар системасида 0 қўшиш амалига нисбатан, 1 кўпайтириш амалига нисбатан ҳам ўнг ҳам чап нейтрал элементлардир.

9.  $\emptyset$  тўплаларнинг бирлашмаси амалига нисбатан универсал тўпланда  $X$  тўпланинг кесишмаси амалига нисбатан нейтрал элементлардир.

**МИСОЛЛАР.** 10. Бутун сонларни қўшиш амалига нисбатан  $a$  га  $(-a)$  симметрик (қарама-қарши) элемент бўлади.

11. Рационал сонларни кўпайтириш амалига нисбатан  $a \neq 0$  рационал сонга  $a^{-1} = 1/a$  симметрик (тесқари) элемент бўлади.

**МИСОЛ. 12.** Агар  $B, C \in \mathbb{N}$ ,  $B = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$ ,  $C = \{1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots\}$  бўлса,  $B$  натурал сонларни қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан ёпиқ,  $C$  эса кўпайтириш амалига нисбатан ёпиқ.

Қуйидаги тўпلامларда  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $:$  амалларининг қайси бири алгебраик амал бўлади. Агар алгебраик амал бўлса, улар коммутатив, ассоциатив бўладими?

- 1)  $\mathbb{N}$ ; 2)  $2\mathbb{N} = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ ; 3)  $T = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$  4)  $\mathbb{Z}$ ;  
 5)  $2\mathbb{Z} = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$ ; 6)  $\mathbb{Q}$ ; 7)  $\mathbb{R}$ ; 8)  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; 9)  $\mathbb{R}^+ = \{x : x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ ;  
 10)  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ; 11)  $\{0\}$ ; 12)  $\{1\}$ ; 13)  $\{0, 1\}$ .

2.2 Агар  $A_1 = \{0, 1\}$ ,  $A_2 = \{0, 1, 2\}$ ,  $A_3 = \{0, 1, 2, 3\}$  тўпلامларда  $*$  амал мос равишда қуйидаги Келли жадвали ёрдамида берилган бўлса, уни коммутатив ва ассоциатив эканлигини исботланг.

1)

*	0	1
0	0	1
1	1	0

2.3

$\{x : x \in \mathbb{R}, x > 0\}$  тўпلامда аниқланган

қуйидагиларнинг қайси бири амал бўлади? Агар бўлса, улар коммутатив ва ассоциатив бўладими?

- 1)  $a * b = \frac{a+b}{2}$ ; 2)  $a * b = a + b - 1$ ; 3)  $a * b = a \cdot b^2$ ;  
 4)  $a * b = a^b$ ; 5)  $a * b = \sqrt{a \cdot b}$ ; 6)  $a * b = \log_a b$ ;  
 7)  $a * b = \max\{a, b\}$ ; 8)  $a * b = \min\{a, b\}$ ; 9)  $a * b = |a - b|$ ;  
 10)  $a * b = a$ .

2.4  $A = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$  тўпلام қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан ёпиқ бўладими, бу тўпلامда қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан нейтрал элементлар мавжудми?

2) 3)

*	1	2	3
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

*	0	1	3
0	0	1	3
1	1	2	0
2	2	3	1
3	3	0	2

$\mathbb{R}^+ =$

амал

Куйидаги тўпламларни қайси бири алгебраик система бўлади:

- 1)  $Z[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in Z\}$ ;      2)  $Q[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in Q\}$ ;  
 3)  $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} : a, b \in Q \right\}$ ;      4)  $L = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & b \end{pmatrix} : a, b \in Q \right\}$ ;  
 5)  $P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in Q \right\}$ ;      6)  $E = \left\{ \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ ;  
 7)  $2Z$ ;      8)  $\mathbb{R}$ ;      9)  $T = \{2n - 1 : n \in Z\}$ .

### Мисоллар

$z^2 + \bar{z} = 0$  тенгламани ечинг.

$\Delta z = a + bi$  бўлсин, у ҳолда  $\bar{z} = a - bi$  бўлади.

$$(a + bi)^2 + (a - bi) \Rightarrow a^2 + 2abi - b^2 + a - bi = 0 \Rightarrow$$

$$(a^2 + a - b^2) + (2ab - b)i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 + a - b^2 = 0 \\ 2ab - b = 0 \end{cases} \Rightarrow b(2a - 1) = 0 \Rightarrow \left( b = 0 \vee a = \frac{1}{2} \right);$$

a)  $b = 0$  бўлганда  $a^2 + a = 0 \Rightarrow (a_1 = 0 \vee a_2 = -1)$ ,

b)  $a = \frac{1}{2}$  бўлганда  $b^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \left( b_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee b_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ .

Демак,  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = -1$ ,  $z_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $z_4 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

лар берилган тенгламанинг илдизлари бўлади.  $\nabla$

$z = \sqrt{24 - 10i}$  ҳисоблансин.

$\Delta \text{sign}(-10) = -1$  бўлгани учун қуйидагига эга бўламиз:

$$z = \pm \left[ \sqrt{\frac{24 + \sqrt{24^2 + 10^2}}{2}} - i \sqrt{\frac{-24 + \sqrt{24^2 + 10^2}}{2}} \right] =$$

$$= \pm \left[ \sqrt{\frac{24 + \sqrt{676}}{2}} - i \sqrt{\frac{-24 + \sqrt{676}}{2}} \right] = \pm \left[ \sqrt{\frac{24 + 26}{2}} - i \sqrt{\frac{-24 + 26}{2}} \right] =$$

$$= \pm(5 - i), \quad z_1 = 5 - i, \quad z_2 = 5 + i. \quad \nabla$$

Алгебраик шаклдаги комплекс сонлар устида амалларни бажаринг.

- |   |   |
|---|---|
| 1) $(5 + 4i) + (3 - 7i) - (2 + 5i);$    | 2) $(1 + i)(2 + i) + \frac{5}{1+2i};$               |
| 3) $\frac{(2-3i)(4-i)}{5-i};$           | 4) $\frac{5+i}{(1-2i)(5-i)};$                       |
| 5) $\frac{(5+2i)(4-3i)}{(1-2i)(1+3i)};$ | 6) $\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^2}{(3+2i)^2 - (2+i)^2};$ |
| 7) $(1 + 2i)^6;$                        | 8) $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-1}};$                   |
| 9) $(1 + i)^{1990};$                    | 10) $(1 + 2i)^5 - (1 - 2i)^5.$                      |

### Мисоллар

$z = 1 - i$  сонни триганометрик шаклда ёзинг.

$\Delta a = 1, b = -1$  бўлгани учун

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \quad \wedge \quad \cos \varphi = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{b}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi \arg z = \frac{7\pi}{4} \quad \wedge \quad z = 1 - i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) . \nabla$$

$z + \frac{1}{z} = 1$  бўлса,  $z^{1990} + \frac{1}{z^{1990}}$  ни ҳисобланг.

$$\Delta z + \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

$z^{1990}$  ни ҳисоблаш учун  $z_1$  ни триганометрик шаклга келтирамиз.

$$|z_1| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \quad (\text{Шу каби } |z_2|) .$$

$\varphi_1 = \arg z_1 = \arctg(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{3}$ , чунки  $\sin \varphi_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\cos \varphi_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , шу каби

$$\varphi_2 = \arg z_2 = \arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} . \text{ Демак,}$$

$$z_1 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \Rightarrow z_1^{1990} = \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)^{1990} =$$



$$= \cos \frac{5 \cdot 1990\pi}{3} + i \sin \frac{5 \cdot 1990\pi}{3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{z^{1990}} = z_1^{-1990} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_1^{1990} + \frac{1}{z_1^{1990}} = -1$$

Шу каби  $z_2^{1990} + \frac{1}{z_2^{1990}}$  ни хисоблашни ўқувчига қолдирамиз. ▽

Қуйидаги сонларни триганометрик шаклда ёзинг.

- 1) 2; 2) -2; 3)  $2i$ ; 4)  $-2i$ ; 5)  $1+i$ ; 6)  $-1+i$ ; 7)  $-1-i$ ; 8)  $1+i\sqrt{3}$ ;  
 9)  $-1+i\sqrt{3}$ ; 10)  $\sqrt{3}-i$ ; 11)  $-\sqrt{3}-i$ ; 12)  $\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$ ; 13)  $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  
 14)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; 15)  $2-2i$ ; 16)  $2+\sqrt{3}+i$ .

Жадвалдан фойдаланиб, қуйидаги комплекс сонларни триганометрик шаклда ёзинг.

- 1)  $3+i$ ; 2)  $4-i$ ; 3)  $-2+i$ ; 4)  $-1-2i$ ; 5)  $2+i$ .

1) Агар  $z + \frac{1}{z} = 1$  бўлса,  $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos \frac{n\pi}{3}$  эканлигини исботланг;

## Мисоллар

$x, y \in \mathbb{R}$  деб фарз қилиб,  $x + 8i + (y - 3)i = 1$  тенгламадан  $x$  ва  $y$  ларни топинг.

$$\Delta x + 8i + (y - 3)i = 1 \Rightarrow x + yi = 1 - 5i \Leftrightarrow x = 1, y = -5. \nabla$$

$$\frac{(3-4i)(2-i)}{2+i} - \frac{(3+4i)(2+i)}{2-i} = \frac{(3-4i)(2-i)^2}{(2-i)(2+i)} - \frac{(3+4i)(2+i)^2}{(2-i)(2+i)} =$$

$$= \frac{(3-4i)(3-4i)}{2^2+1^2} - \frac{(3+4i)(3+4i)}{2^2+1^2} = \frac{1}{5} [(-7 - 24i) - (-7 + 24i)] = \frac{48}{5}i. \nabla$$

$$z_1 = a_1 + b_1 i,$$

$z_2 = a_2 + b_2 i$  бўлса,  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$  бўлишини исботланг.

$$\Delta z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i; \quad \overline{z_1 \cdot z_2} \\ = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i;$$

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a_1 - b_1 i) \cdot (a_2 - b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i;$$

Булардан  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$  келиб чиқади.  $\nabla$

Қуйидаги тенгламаларда  $x$  ва  $y$  ларни ҳақиқий сон ҳисоблаб, уларни топинг.

1)  $(2 - 3i)x + (3 + 2i)y = 2 - 5i;$

2)  $(5 + 2i)x +$

$(1 - 3i)y = 4 - i;$

3)  $(2 - i)x + (5 + 6i)y = 1 - 3i;$

4)  $x + 8i + (y - 3)i = 1;$

5)  $(3 + i)x - 2(1 + 4i)y = -2 - 4i;$

6)  $(1 + 2i)x +$

$(3 - 5i)y = 1 = 3i;$

3. Алгебраик шаклдаги комплекс сонлар устида амалларни бажаринг.

1)  $(5 + 4i) + (3 - 7i) - (2 + 5i);$

2)  $(1 + i)(2 + i) + \frac{5}{1+2i};$

3)  $\frac{(2-3i)(4-i)}{5-i};$

4)  $\frac{5+i}{(1-2i)(5-i)};$

5)  $\frac{(5+2i)(4-3i)}{(1-2i)(1+3i)};$

6)  $\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^2}{(3+2i)^2 - (2+i)^2};$

7)  $(1 + 2i)^6;$

8)  $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-1}};$

9)  $(1 + i)^{1990};$

10)  $(1 + 2i)^5 - (1 - 2i)^5.$

4. Биринг  $n$ -даражали илдиэларини топинг.

1)  $n=3$  2)  $n=4$  3)  $n=6$  4)  $n=8$

## Мисоллар

### 1. МИСОЛЛАР ЕЧИШ.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases} \quad \text{Системани ечинг.}$$

Δ Берилган системанинг 1-тенгламасини ҳар икки томонини (-3) га, (-2) га, (-1) га кўпайтириб мос равишда 2-, 3-, 4- тенгламаларига қўшамиз (бу бажарилган элементар алмаштиришларни юқоридагидек схематик тасвирлаймиз) натижада берилган системага тенг кучли бўлган

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ -4x_2 - 7x_3 - 11x_4 = -7 \\ x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 8 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \end{cases}$$

системага эга бўламиз. Бу системадаги 2- ва 4- тенгламаларнинг ўринларини ўзаро алмаштириб, унга эквивалент бўлган (бу алмаштиришни схематик равишда юқоридагидек белгилаймиз)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 8 \\ -4x_2 - 7x_3 - 11x_4 = -7 \end{cases}$$

Системани ҳосил қиламиз. Схемада кўрсатилган элементар алмаштиришни бажариб,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ -6x_3 - 3x_4 = -3 \\ -3x_3 - 27x_4 = -27 \end{cases} \quad :3$$

системага келамиз. Бу системани 3-тенгламасини 3 га, 4- тенгламасини (-3) га қисқартириб (ҳар икки томонини бўлиб) уларнинг ўринларини алмаштириб ёзамиз (схематик белгилашга қаранг)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ x_3 + 9x_4 = 9 \\ -2x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ x_3 + 9x_4 = 9 \\ 17x_4 = 17 \end{cases}$$

Охирги системанинг 4- тенгламасидан  $x_4 = 1$ ,  $x_4$  нинг бу қийматини системанинг 3- тенгламасига қўйиб  $x_3 = 0$  ни топамиз,  $x_3, x_4$  ларни бу қийматларини 2- тенгламага қўйиб  $x_2 = -1$  ни топамиз,  $x_2, x_3, x_4$  ларни бу топилган қийматларини 1- тенгламага қўйиб  $x_1 = -1$  ни топамиз.

Демак, берилган система ягона  $x_1 = -1$  ,  $x_2 = -1$  ,  $x_3 = 0$  ,  $x_4 = 1$  ечилмага эга. ▽

2.МИСОЛ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 = 0 \end{cases}$$

Системани ечинг.

$$\Delta \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 0 \\ 3x_2 + 9x_3 + 19x_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Бу системадан  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$  ларни топамиз. Демак, берилган система ягона ноль ечилма ( $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$ ) га эга. ▽

### МУСТАҚИЛ ИШ УЧУН МИСОЛЛАР.

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

4)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_3 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$$

8)

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 12x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

**$\lambda$  нинг қайси қиймаларида фуйидаги тенгламалар системалари биргалашган бўлади?**

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 = \lambda \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5 \\ -12x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -6 \\ \lambda x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

4)

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 1 \\ -6x_1 + 8x_2 - 5x_3 - x_4 = 9 \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 3 \\ -3x_1 + 7x_2 + 17x_3 + 17x_4 = \lambda \end{cases}$$

## Мисоллар

### 1. МИСОЛЛАР ЕЧИШ.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

Системани ечинг.

Δ Берилган системанинг 1-тенгламасини ҳар икки томонини (-3) га , (-2) га, (-1) га кўпайтириб мос равишда 2-, 3-, 4- тенгламаларига қўшамиз (бу бажарилган элементар алмаштиришларни юқоридагидек схематик тасвирлаймиз) натижада берилган системага тенг кучли бўлган

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ -4x_2 - 7x_3 - 11x_4 = -7 \\ x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 8 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \end{cases}$$

системага эга бўламиз. Бу системадаги 2- ва 4- тенгламаларнинг ўринларини ўзаро алмаштириб, унга эквивалент бўлган (бу алмаштиришни схематик равишда юқоридагидек белгилаймиз)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 8 \\ -4x_2 - 7x_3 - 11x_4 = -7 \end{cases}$$

Системани ҳосил қиламиз. Схемادا кўрсатилган элементар алмаштиришни бажариб,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ -6x_3 - 3x_4 = -3 \\ -3x_3 - 27x_4 = -27 \end{cases} :3$$

системага келамиз. Бу системани 3-тенгламасини 3 га, 4- тенгламасини (-3) га қисқартириб (ҳар икки томонини бўлиб) уларнинг ўринларини алмаштириб ёзамиз (схематик белгилашга қаранг)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ x_3 + 9x_4 = 9 \\ -2x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ x_3 + 9x_4 = 9 \\ 17x_4 = 17 \end{cases}$$

Охирги системанинг 4- тенгламасидан  $x_4 = 1$  ,  $x_4$  нинг бу қийматини системанинг 3- тенгламасига қўйиб  $x_3 = 0$  ни топамиз,  $x_3$  ,  $x_4$  ларни бу қийматларини 2- тенгламага қўйиб  $x_2 = -1$  ни топамиз,  $x_2$  ,  $x_3$  ,  $x_4$  ларни бу топилган қийматларини 1- тенгламага қўйиб  $x_1 = -1$  ни топамиз. Демак, берилган система ягона  $x_1 = -1$  ,  $x_2 = -1$  ,  $x_3 = 0$  ,  $x_4 = 1$  ечилмага эга. ▽

## МУСТАҚИЛ ИШ УЧУН МИСОЛЛАР.

### 4.1. Қуйидаги тенгламалар системаларини Гаусс усулида ечинг:

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

4)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_3 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$$

8)

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 12x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_4 = -1 \\ 5x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 5 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ 7x_1 - x_2 + x_3 - 9x_4 = -4 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2 \end{cases}$$

10)

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 5x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases} \quad 12)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$$

### Мисоллар

Мисол.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

система ечимларининг фундаментал системасини топинг.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Охирги системанинг умумий ечими

$$x_1 = 11x_3 - 7x_4, \quad x_2 = -5x_3 + 3x_4 \quad \text{бўлади.}$$

$x_1 = 1, x_2 = 0$  сўнгра  $x_3 = 0, x_4 = 1$  деб,  $x_1, x_2$  ларнинг тегишли қийматларини топамиз.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
11	-5	1	0
-7	3	0	1

Қуйидаги бир жинсли тенгламалар системаси ечимларини топинг.



$$\begin{array}{l}
 1) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{array} \right. \quad 2) \\
 \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{array} \right. \\
 3) \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{array} \right. \\
 4) \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$1) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0 \end{array} \right. \quad 6)$$

### Мисоллар

**МИСОЛЛАР. 1.**  $S_3$  нинг барча элементларини топинг.

$$\Delta \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \\
 \varphi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Демак,  $S_3$  нинг элементлари  $3! = 6$  та экан.  $\nabla$

2.  $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$  – 3 - даражали ўринга кўйишларнинг  $\varphi_2 \cdot \varphi_1$  ва  $\varphi_1 \cdot \varphi_2$  кўпайтмаларини топинг.

$$\Delta \varphi_1 \cdot \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2 \cdot \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Демак,  $\varphi_2 \cdot \varphi_1 \neq \varphi_1 \cdot \varphi_2$ . Бундан умумий ҳолда ўринга кўйишларни кўпайтириш коммутативлик хоссосига эга эмас деган ҳулосага келамиз.  $\nabla$

3.  $S_3$  даги ҳамма жуфт ва тоқ ўринга кўйишларнинг сонларини топинг.

$\Delta$   $\varphi_1$  даги тартибсизлик йўқ.  $\varphi_2$  да  $\{3; 2\}$  – битта тартибсизлик бор. Шу каби  $\varphi_3$  да ҳам  $\{2, 1\}$  – битта.  $\varphi_4$  да  $\{2, 1\}, \{3, 1\}$  – иккита тартибсизлик бор.  $\varphi_1, \varphi_4, \varphi_5$  лар жуфт,  $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_6$  – лар тоқ ўринга кўйишлар экан.  $\nabla$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 12 & 31 & 62 \\ 122 & 315 & 623 \end{vmatrix} \quad \text{3-тартибли детерминантни ҳисобланг.}$$

$$\Delta \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 120 & 310 & 620 \\ 120+2 & 310+5 & 620+3 \end{vmatrix} \\ = \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 120 & 310 & 620 \\ 120 & 310 & 620 \end{vmatrix} + \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 120 & 310 & 620 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 12 & 31 & 62 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 10+2 & 30+1 & 60+2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 10 & 30 & 60 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 + 12 + 60 - 18 - 10 - 12 = 35 . \nabla$$

### МУСТАҚИЛ ИШ УЧУН МИСОЛЛАР.

5.16. Қуйидаги ўринга кўйишларни кўрсатилган тартибда кўпайтиринг:

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}; & 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \\
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}; & \\
 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; & 4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \\
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}; & \\
 5) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}; & 6) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \\
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}. &
 \end{array}$$

5.17. Қуйидаги ўринга қўйишларни жуфт ёки тоқлигини аниқланг.

$$\begin{array}{lll}
 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}; & 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \\
 4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}; & 5) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 9 & 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}; \\
 6) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}; & 7) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$

### Мисоллар

$$\begin{array}{l}
 D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 12 & 31 & 62 \\ 122 & 315 & 623 \end{vmatrix} \quad \text{3-тартибли детерминантни ҳисобланг.} \\
 \Delta = \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 120 & 310 & 620 \\ 120+2 & 310+5 & 620+3 \end{vmatrix} \\
 = \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 120 & 310 & 620 \\ 120 & 310 & 620 \end{vmatrix} + \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 120 & 310 & 620 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \\
 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 12 & 31 & 62 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 10+2 & 30+1 & 60+2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 10 & 30 & 60 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\
 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \\
 = 3 + 12 + 60 - 18 - 10 - 12 = 35 . \nabla
 \end{array}$$

Ушбу детерминантни детерминант хоссаларидан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 2(1 \cdot (-1) \cdot (-11)) = 22$$

Қуйидаги детерминантлар ҳисоблансин.

- 1)  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ ;      2)  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ ;      3)  $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}$ ;      4)  $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}$ ;
- 5)  $\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$ ;      6)  $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$ ;      7)  $\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$ ;
- 8)  $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$ ;      9)  $\begin{vmatrix} a+b & b+d \\ a+c & c+d \end{vmatrix}$ ;      10)  $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$ ;
- 11)  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ ;      12)  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ ;      13)  $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$ ;
- 14)  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ ;      15)  $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & cd \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$ ;      16)  $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ ;
- 17)  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ ;      18)  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ ;      19)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -3 & -1 \\ 6 & 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ ;

## Мисоллар

**Мисоллар. 1.**  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$  детерминантни 3- сатри бўйича ёйиб

чиқинг.

$$\Delta \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(-2)(-4 + 4 + 0 + 0 - 8 - 1) + 3(0 - 6 - 3 + 0 - 12 - 3) = (-2)(-9) + 3(-24) = 18 - 72 = -54.$$

### МУСТАҚИЛ ИШ УЧУН МИСОЛЛАР.

Қуйдаги детерминантларни мақсадга мувофиқ танлаб олинган сатри (устун) элементлари бўйича ёйиб ҳисоблансин:

1)  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix};$

2)  $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix};$  3)

$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix};$

4)  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix};$

5)  $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix};$  6)

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix};$

$$7) \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix}; \quad 8) \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a' & 1 & 0 & 0 \\ b' & 0 & 1 & 0 \\ c' & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad 9) \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}.$$

### Мисоллар

1-мисол.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$  матрицага тескари матрицани топинг.

$\Delta$   $A$  ва  $I$  матрицаларга бир вақтда 1), 2) сатр элементар алмаштиришларини бажариб  $A$  ни бирлик матрицага келтирсак,  $I$  бирлик матрица  $A^{-1}$  матрицага келади. Яъни:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Демак,  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  ҳақиқатан ҳам

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+6-2 & -1-3+4 & 2-2 \\ -6+10-4 & -2-5+8 & 4-4 \\ -9+14-5 & -3-7+10 & 6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \nabla$$

## МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР.

### 5.13. Қуйидаги матрицаларга тескари матрицаларни топинг.

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3)

$$4) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & -8 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$5) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

6)

$$7) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$8) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

9)  $A =$

$$10) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$11) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

12)  $A =$

## Мисоллар

**МИСОЛЛАР:** 1.  $\vec{a}_1 = \langle 1, 1, 1 \rangle$ ,  $\vec{a}_2 = \langle 1, 2, 3 \rangle$ ,  $\vec{a}_3 = \langle 1, 3, 6 \rangle$  уч ўлчовли векторлар системасининг чизикли боғланмаган (эркли) экалиги кўрсатилсин.

$\Delta \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$  лар учун  $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{\theta}$  ёки  $[\langle \lambda_1, \lambda_1, \lambda_1 \rangle + \langle \lambda_2, 2\lambda_2, 3\lambda_2 \rangle + \langle \lambda_3, 3\lambda_3, 6\lambda_3 \rangle] = \langle 0, 0, 0 \rangle$  бўлсин. Бундан  $\langle \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3, \lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$  бу қуйидаги бир жинсли тенгламалар системасига тенг кучли.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Охириги тенгламалар системасини ечиб,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  га эга бўламиз. Демак, берилган векторлар системаси чизикли боғланмаган экан.  $\nabla$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Бу система чексиз кўп ноль ечилмаларга эга. Масалан  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1$ , бу ҳолда  $\vec{b}_1 - \vec{b}_2 + \vec{b}_3 = \vec{\theta}$  боғланиш ўринга эга. Демак,  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$  векторлар системаси чизикли боғланган системани ташкил қилади.  $\nabla$

## Мисоллар



**МИСОЛЛАР:**  $\vec{b}_1 = \langle 1, 1, 2 \rangle$ ,  $\vec{b}_2 = \langle 2, 3, 4 \rangle$ ,  $\vec{b}_3 = \langle 1, 2, 2 \rangle$   
 векторлар системасидаги чизиқли боғланиш текширилсин.

$\Delta \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$  лар учун  $\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \lambda_3 \vec{b}_3 = \vec{\theta}$  ёки  $[\langle \lambda_1, \lambda_1, 2\lambda_1 \rangle + \langle 2\lambda_2, 3\lambda_2, 4\lambda_2 \rangle + \langle \lambda_3, 2\lambda_3, 2\lambda_3 \rangle] = \langle 0, 0, 0 \rangle$  бўлсин. Бундан  $\langle \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3, \lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$  бу қуйидаги бир жинсли тенгламалар системасига тенг кучли.

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Бу система чексиз кўп ноль ечилмаларга эга. Масалан  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1$ , бу ҳолда  $\vec{b}_1 - \vec{b}_2 + \vec{b}_3 = \vec{\theta}$  боғланиш ўринга эга. Демак,  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$  векторлар системаси чизиқли боғланган системани ташкил қилади.  $\nabla$

Қуйидаги векторлар системасини чизиқли боғланган ёки боғланмаган эканлигини текширинг.

- 1)  $\vec{a}_1 = \langle 1, 1, 1, 1 \rangle, \vec{a}_2 = \langle 1, -1, 1, -1 \rangle, \vec{a}_3 = \langle 2, 3, 1, 4 \rangle$
- 2)  $\vec{a}_1 = \langle 1, 1, 1 \rangle, \vec{a}_2 = \langle 1, 2, -1 \rangle, \vec{a}_3 = \langle -1, 3, 1 \rangle$
- 3)  $\vec{a}_1 = \langle 1, 2, 1 \rangle, \vec{a}_2 = \langle 4, 3, -2 \rangle, \vec{a}_3 = \langle -5, -4, -1 \rangle$
- 4)  $\vec{a}_1 = \langle 1, 2, 1, 1 \rangle, \vec{a}_2 = \langle 2, 5, 1, 3 \rangle, \vec{a}_3 = \langle -1, 3, -6, 4 \rangle, \vec{a}_4 = \langle 1, -1, 4, 2 \rangle$
- 5)  $\vec{a}_1 = \langle 1, 1, 1, 0 \rangle, \vec{a}_2 = \langle 1, 1, 0, -1 \rangle, \vec{a}_3 = \langle 1, 0, -1, -1 \rangle, \vec{a}_4 = \langle 0, -1, -1, 0 \rangle$
- 6)  $\vec{a}_1 = \langle 1, 4, 1, 2 \rangle, \vec{a}_2 = \langle 3, -9, -11, 1 \rangle, \vec{a}_3 = \langle 2, 8, -2, 4 \rangle, \vec{a}_4 = \langle -3, 15, 5, -7 \rangle$
- 7)  $\vec{a}_1 = \langle 2, -3, 1 \rangle, \vec{a}_2 = \langle 3, -1, 5 \rangle, \vec{a}_3 = \langle 1, -4, 3 \rangle$
- 8)  $\vec{a}_1 = \langle 5, 4, 3 \rangle, \vec{a}_2 = \langle 3, 3, 2 \rangle, \vec{a}_3 = \langle 8, 1, 3 \rangle$
- 9)  $\vec{a}_1 = \langle 1, 2, 1 \rangle, \vec{a}_2 = \langle 2, 3, 3 \rangle, \vec{a}_3 = \langle 3, 7, 1 \rangle$

## Мисоллар

МИСОЛ.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$  матрицанинг рангини топинг.

Ечиш.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & -5 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & -5 \\ 0 & 0 & -18 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r(A) = \rho(A) = R(A) = 3.$$

## МУСТАҚИЛ ИШ УЧУН МИСОЛЛАР.

5.8. Қуйидаги матрицаларни рангини топинг.

1)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 7 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$1) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}; \quad 5) \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}; \quad 6) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$$

$$7) \begin{pmatrix} 4 & 9 & 0 & 7 & 2 \\ -1 & 1 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 & 9 & 6 \end{pmatrix}; \quad 8) \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ -6 & 9 & -1 & -2 & 6 \\ -4 & 6 & 1 & 12 & -3 \end{pmatrix}; \quad 9) \begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix};$$

$$9) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad 11) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad 12) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$13) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 & 5 & 11 \\ -1 & -4 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}; \quad 14) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ -8 & -5 & -12 & 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad 15) \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мисол.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

система ечимларининг фундаментал системасини топинг.

Ечиш. Берилган системанинг асосий матричасини рангини топамиз.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A)=2$  ва

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Охирги системанинг умумий ечими

$$x_1 = 11x_3 - 7x_4, \quad x_2 = -5x_3 + 3x_4 \quad \text{бўлади.}$$

$R(A)$  бўлгани учун 5.8-теоремага асосан берилган биржинсли тенгламалар системаси фундаментал ечимлари 2 та ечимдан иборат бўлади. Уни топиш учун аввал  $x_1 = 1, x_2 = 0$  сўнгра  $x_3 = 0, x_4 = 1$  деб,  $x_1, x_2$  ларнинг тегишли қийматларини топамиз.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
11	-5	1	0
-7	3	0	1

$$\vec{a}_1 = \langle 11, -5, 1, 0 \rangle, \quad \vec{a}_2 = \langle -7, 3, 0, 1 \rangle$$

векторлар системаси чизиқли эркин, берилган системанинг ихтиёрый ечими  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  системанинг чизиқли комбинацияси шаклида ифодалаш мумкин.

Берилган системанинг ечимлари тўплами

$$L(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \{ \vec{a} : \vec{a} = c_1 \langle 11, -5, 1, 0 \rangle + c_2 \langle -7, 3, 0, 1 \rangle, c_1, c_2 \in R \}$$

бўлиб,  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  бу вектор фазонинг базиси бўлади.

### Мисоллар

1.  $5x^4 - x^2 + 6$  купхадни  $x^2 + 3x + 2$  купхадга колдикли булинг.

2. Куйидаги купхад коэффициентлари йигиндисини топинг:

$$(x^4 - 4x^3 + 2)^{100}.$$

3. Горнер схемасидан фойдаланиб  $f(1)$  ни хисобланг:  $f(x) = x^5$ .

4. Куйидаги купхаднинг рационал илдизларини топинг:

$$x^3 - 6x^2 + 15x - 14.$$

**5-мисол.**  $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 4$  ва  $g(x) = x^2 - 3x + 1$  кўпхадларнинг кўпойтиринг.

$$\begin{aligned} g(x) \cdot f(x) &= (x^2 - 3x + 1)(2x^3 - 5x^2 + 3x - 1) = \\ &= 2x^5 - 5x^4 + 3x^3 - x^2 - 6x^4 + 15x^2 - 9x + 3x + \\ &+ 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1 = 2x^5 - 11x^4 + 5x^3 + 9x^2 - 3x - 1. \end{aligned}$$

**6-мисол.**  $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 4x^2 - 5x + 7$  кўпхадни  $x - 3$  га бўлишдаги  $q(x)$  бўлинмани ва  $f(3) = r$  қолдиқни Горнер схемаси ёрдамида топамиз:

2	-3	0	4	-5	7
2	3	9	31	88	271

Шундай қилиб, бўлинма

$$q(x) = 2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 31x + 88,$$

Қолдиқ эса

$$r = f(3) = 271 \text{ бўлади.}$$

Горнер усули нафақот кўпхаднинг илдизларини топишни тезлаштиради, балки унинг қийматини ҳисоблашни осонлаштиради.

### Мисоллар

**1-мисол.** 1.  $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1$  ни  $g(x) = x^2 - 3x + 1$  га қолдиқли бўлиш қондасидан фойдаланиб бўламиз:

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1 \mid x^2 - 3x + 1 \\ \underline{2x^3 - 6x^2 + 2x} \quad 2x + 1 = q(x) \\ x^2 + x - 1 \\ \underline{x^2 - 3x + 1} \\ 4x - 2 = r(x) \end{array}$$

Ва демак

$$f(x) = g(x)(2x+1) + (4x-2)$$

Тенгликни ҳосил қиламиз, бу ерда  $\deg r(x) = 1 < 2 = \deg g(x)$ .

**2-мисол.**  $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 1$  ни  $g(x) = 2x^2 + x - 1$  га қолдиқли бўлинг

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 2x^2 - x + 1 \quad | \quad 2x^2 + x + 1 \\ \hline 3x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x \quad \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} = q(x) \in Q[x] \\ \hline \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \\ \hline -\frac{11}{2}x + \frac{1}{3} = r(x) \in Q[x] \end{array}$$

Ва демак

$$f(x) = g(x) \left( \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \right) + \left( -\frac{11}{2}x + \frac{1}{3} \right)$$

Тенгликни ҳосил қиламиз.

**3-misol .**  $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$  ва  $g(x) = x^3 - 1$  кўпхадларнинг ЭКУБини топиш учун бу кўпхадларга Евклид алгоритми тузамиз:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \cdot 1 + (x^3 - x), \\ g(x) &= (x^2 - x)(x+1) + (x-1), \\ (x^2 - x) &= (x-1) \cdot x \end{aligned}$$

ва демак  $(f(x), g(x)) = x - 1$  бўлади.

**4-мисол.** Куйидаги купхадлар учун  $fM + gN = d$  тенгликни каноатлантирувчи  $M(x), N(x)$  купхадлар топилсин.

**5-мисол.** Куйидаги купхад коэффициентлари йигиндисини топинг:

$$(x^4 - 4x^3 + 2)^{100}.$$

**6-мисол.** Горнер схемасидан фойдаланиб  $f(1)$  ни ҳисобланг:  $f(x) = x^5$ .

**7-мисол.** Куйидаги кўпхаднинг рационал илдиэларини топинг:

$$x^3 - 6x^2 + 15x - 14.$$

**Мисол.**  $R$  да  $\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$  тўғри касрни оддий касрларга ёйамиз. Бу каср  $\frac{A_1}{x-1}$  ва  $\frac{A_2x+A_3}{x^2+1}$  оддий касрларнинг йигиндисига ёйилади. Бу йигиндидан

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2x+A_3}{x^2+1}$$

$A_1, A_2, A_3$  ларни топамиз. Бунинг учун тенгликнинг иккала қисмини  $(x-1)(x^2+1)$  касрларнинг умумий махражига кўпойтирсак

$$1 = A_1(x^2+1) + (A_2x+A_3)(x^2-1)$$

Тенглик ҳосил бўлади.  $A_1, A_2, A_3$  коэффициентларни топамиз, яъни  $1, x, x^2$  лар олдидаги лар oldidagi коэффициентларни тенглаштириб,

$$x^0 = 1: \quad A_1 - A_3 = 1,$$

$$x: \quad -A_2 + A_3 = 0,$$

$$x^2: \quad A_1 + A_2 = 0.$$

Учта  $A_1, A_2, A_3$  номаълумли учта тенгламалар системасини ҳосил қиламиз ва уни ечиб,

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = -\frac{1}{2}, \quad A_3 = -\frac{1}{2}$$

ларни топамиз. Шундай қилиб,

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)}$$

бўлади.