

Мисоллар

1-МИСОЛ. Агар $A = \{k: k=4n+1, n \in \mathbb{N}\}$ бўлса, A тўпламга тегишли бўлган 4 та элементни, тегишли бўлмаган 3 элементни ёзинг

$$\Delta \quad n=1, k=4 \cdot 1+1=5, \quad n=4, k=4 \cdot 4+1=17$$

$$n=7, k=4 \cdot 7+1=29, \quad n=10, k=4 \cdot 10+1=41$$

$k=4n+1$ ифода 3, 6, 8 га тенг бўладиган n натурал сон мавжуд эмас. Шунинг учун $3, 6, 8 \notin A, 5, 7, 29, 41 \in A. \nabla$

2-МИСОЛ. Кўпайтириш амалининг айириш амалига нисбатан дистрибутивлик қонуни ўринли, яъни

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C) \quad (1)$$

Δ $x \in (A \setminus B) \cap C$ ихтиёрий элемент бўлсин, бундан $x \in (A \setminus B)$ ва $x \in C$. $x \in A \setminus B$ бўлгани учун айириш амалининг таърифига кўра $x \in A$ ва $x \notin B$. Шундай қилиб $x \in A, x \in C$ демак, $x \in A \cap C$, аммо $x \notin B \cap C$. Охирги муносабатлардан $x \in (A \cap C) \setminus (B \cap C)$, демак

$$(A \setminus B) \cap C \subset (A \cap C) \setminus (B \cap C). \quad (2)$$

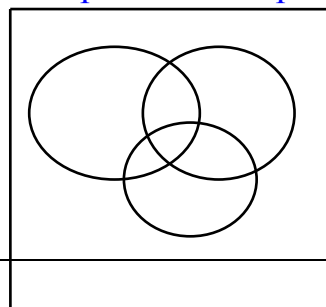
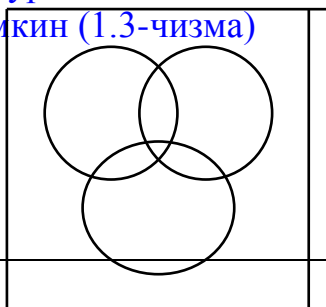
Энди

$$(A \setminus B) \cap C \supset (A \cap C) \setminus (B \cap C) \quad (3)$$

3-МИСОЛ. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$ муносабатни Эйлер-Виен диаграммалари ёрдамида исботланг.

Берилган муносабатни чап ва ўнг томонида турган тўпламларни Эйлер-Виен диаграммалардаги тасвири

4-МИСОЛ $A \cup (B \setminus C) \supset (A \cup B) \setminus C$ муносабат шринли. Берилган тенгликни ўринли эмаслигини қуйидаги Эйлер-Виен диаграммаларидан ҳам кўриш мумкин (1.3-чизма)



1.2 Қуйидаги тўпламларнинг қайси бири бўш тўплам?

а) $A = \{x: x^2 + 2x + 10 = 0, x \in \mathbb{R}\}$

б) $B = \{x: x^2 - 2\pi x + 5 = 0, x \in \mathbb{Z}\}$

в) $C = \{x: 30 \leq x \leq 40, x \in \mathbb{N}, x - \text{туб сон}\}$

г) $D = \left\{x: \sin 2x = \frac{1}{2}, x \in \mathbb{R}, x > 0\right\}$

1.3 а) Агар $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 10, 12\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ бўлса, $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$, $A \setminus B$, $A \Delta B$ тўпламларни топинг.

б) Агар $A = \{k: k = 4n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{k: k = 4n + 3, n \in \mathbb{Z}\}$ бўлса, $A \cup B$ тўпламни топинг.

в) Агар $A = [0; 2]$, $B = [1; 5]$ бўлса, $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$, $A \setminus B$, $A \Delta B$ тўпламларни топинг.

г) тўпламлар устида амалларни бажаринг.

$$[8; 15] \cap [9; 20]; (-1; 1] \cap [-1; 0]; (-1; 0] \cap [1; \infty);$$

$$[1; +\infty) \cup [0; +\infty); [-1; 0] \cup (0; 4]; \{4\} \cup (-\infty; 4);$$

$$(0; 2) \cup [0; 2]; [3; 15] \setminus (5; 16); [3; 16] \setminus [5; 15]$$

$$[3; 5] \Delta [2; 7]; [2; 5] \Delta [3; 7]$$

Х универсал тўпламнинг ихтиёрий А, В ва С қисм тўпламлари учун қуйидаги муносабатларни исботланг ва Эйлер –Виен диаграммаларида тасвирланг.

$$1) A(B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \\ (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$$2) (A \cup B)(A \cap B) =$$

$$3) A(B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

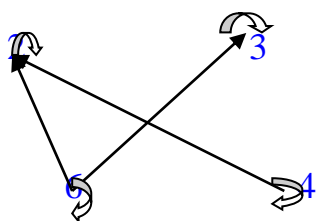
$$4) A(A \setminus B) = A \cap B$$

$$5) A \setminus B = A(A \cap B) \\ B) \setminus C$$

$$6) A \cap (B \setminus C) = (A \cap$$

МИСОЛ, $A = \{2,3,4,6\}$. Тўпلامда аниқланган

$\tau = \{ \langle 2; 2 \rangle, \langle 3; 3 \rangle, \langle 4; 4 \rangle, \langle 6; 6 \rangle, \langle 6; 2 \rangle, \langle 6; 3 \rangle, \langle 4; 2 \rangle \}$ бинар муносабатни граф ёрдамида ифодаланг (1.7-чизма)



1.7-чизма

1-МИСОЛ. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b\}$ берилган бўлса, $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$, $B \times B$ ларни топинг:

$$A \times B = \{ \langle 1;a \rangle, \langle 2;a \rangle, \langle 3;a \rangle, \langle 1;b \rangle, \langle 2;b \rangle, \langle 3;b \rangle \};$$

$$B \times A = \{ \langle a;1 \rangle, \langle b;1 \rangle, \langle a;2 \rangle, \langle b;2 \rangle, \langle a;3 \rangle, \langle b;3 \rangle \};$$

$$A \times A = \{ \langle 1;1 \rangle, \langle 1;2 \rangle, \langle 1;3 \rangle, \langle 2;1 \rangle, \langle 2;2 \rangle, \langle 2;3 \rangle, \langle 3;1 \rangle, \langle 3;2 \rangle, \langle 3;3 \rangle \}$$

$$B \times B = \{ \langle a;a \rangle, \langle a;b \rangle, \langle b;a \rangle, \langle b;b \rangle \}$$

2-МИСОЛ. $A = [1;3]$, $B = [2;4]$ лар берилган бўлса, $A \times B$, $B \times A$ ларни топинг:

$$A \times B = [1;3] \times [2;4] = \{ \langle a;b \rangle : 1 \leq a \leq 3, 2 \leq b \leq 4 \}$$

$$B \times A = [2;4] \times [1;3] = \{ \langle a;b \rangle : 2 \leq a \leq 4, 1 \leq b \leq 3 \}$$

МИСОЛ: M_3 тўпلامда $\tau = \{ \langle 1,2 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle \}$ ва

$\sigma = \{ \langle 1;1 \rangle, \langle 2;2 \rangle, \langle 3;1 \rangle \}$ бинар муносабатлар аниқланган бўлсин, у ҳолда $\tau \cdot \sigma = \{ \langle 1;2 \rangle, \langle 2;2 \rangle, \langle 1;1 \rangle \}$, $\sigma \cdot \tau = \{ \langle 1;2 \rangle, \langle 1;3 \rangle, \langle 2;2 \rangle, \langle 3;2 \rangle, \langle 3;3 \rangle \}$ бўлади.

2. $A = \{6, 8, 9\}$ ва $B = \{2, 3, 4\}$ тўпламларда $a \in A, b \in B$, $a \tau b$ - "а сон b га қаррали бўлиш" муносабатидан иборат бўлсин, у ҳолда

$$\tau = \{ \langle 6;2 \rangle, \langle 6;3 \rangle, \langle 8;2 \rangle, \langle 8;4 \rangle, \langle 9;3 \rangle \} \subset A \times B,$$

$$\tau^{-1} = \{ \langle 2;6 \rangle, \langle 3;6 \rangle, \langle 2;8 \rangle, \langle 4;8 \rangle, \langle 3;9 \rangle \} \subset B \times A,$$

$b \tau^{-1} a$ - "b сон a ни бўлувчиси" муносабати бўлиб,

$$\text{Dom } \tau = A, \text{ Im } \tau = B, \text{ Dom } \tau^{-1} = B, \text{ Im } \tau^{-1} = A \text{ бўлади.}$$

МИСОЛ. $A = \mathbb{Z}, \forall (a, b \in \mathbb{Z}) a \tau b = [(a-b):5]$ ёки $a-b=5n, n \in \mathbb{Z}$. Бу ҳолда τ \mathbb{Z} да эквивалентлик муносабати бўлади.

Δ Ҳақиқатан ҳам.

$$D \otimes = \left| \begin{array}{c} a_{11} a_{12} \dots a_{1\mu} \dots a_{1\nu} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2\mu} \dots a_{2\nu} \dots a_{2n} \\ \hline a_{n1} a_{n2} \dots a_{n\mu} \dots a_{n\nu} \dots a_{nn} \end{array} \right|$$

Бу $\tau(M)$ эквивалентлик муносабати \mathbb{Z} тўпламини ўзаро кесишмайдиган қисм тўпламларга ажратади.

Δ Ҳақиқатан ҳам

$$\bar{0} = \{ \dots, -5k, \dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots, 5k, \dots \}$$

$$\bar{1} = \{ \dots, -5k + 1, \dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots, 5k + 1, \dots \}$$

$$\bar{2} = \{ \dots, -5k + 2, \dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots, 5k + 2, \dots \}$$

$$\bar{3} = \{ \dots, -5k + 3, \dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots, 5k + 3, \dots \}$$

$$\bar{4} = \{ \dots, -5k + 4, \dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots, 5k + 4, \dots \}$$

$$\mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2} \cup \bar{3} \cup \bar{4}, \mathbb{Z} / \tau = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4} \}. \Delta$$

Қуйидаги тўпламларни Декарт координаталар системасида геометрик тасвирини топинг.

1) $[0;1] \times [0;1]$

2) $[-1;1] \times [2;3]$

3) $[1;3] \times (-\infty;3]$

4) $[0; 3] \times [1; +\infty)$

5) $[1;4] \times (-\infty; +\infty)$

6) $[-1; 5] \times \{2,3,4\}$

7) $[0; +\infty) \times \{1,3\}$

8) $(-\infty; +\infty) \times \{1,2,3\}$

Масалалар

МИСОЛЛАР. 1. M - ихтиёрый табиатли элементларнинг қандайдир бўш бўлмаган тўплами, $A = \{B: B \subset M\}$ бўлсин. У ҳолда $f: A \rightarrow A$ акслантиришни $\forall (B \in A) f(B) = M \setminus B$ кўринишда аниқласак, f A тўпланда аниқланган унар амал (оператор) дан иборат бўлади.

2. A 1- мисолдаги тўпланда бўлсин. Агар $f: A^2 \rightarrow A$ акслантириш

$$\forall (B_1, B_2 \in A) f(B_1, B_2) = B_1 \cup B_2 \quad g(B_1, B_2) = B_1 \cap B_2$$

кўринишда берилса, ҳар иккала ҳолда ҳам f - A тўпланда аниқланган бинар амалдан иборат бўлади.

3. \mathbb{N} натурал сонлар тўплами, $\forall (n \in \mathbb{N})$ тайинланган натурал сон бўлсин. У ҳолда $f: A^2 \rightarrow A$ акслантириш $\forall (m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{N}) f(m_1, m_2, \dots, m_n) =$

(m_1, m_2, \dots, m_n) кўринишда берилса, f - \mathbb{N} тўпланда аниқланган n -ар амал бўлади. Бу жойда (m_1, m_2, \dots, m_n) , m_1, m_2, \dots, m_n натурал сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси.

4. Бўлиш амали бутун сонлар системасида аниқланган қисман амалдан иборат.

МИСОЛЛАР. 8. Бутун сонлар системасида 0 қўшиш амалига нисбатан, 1 кўпайтириш амалига нисбатан ҳам ўнг ҳам чап нейтрал элементлардир.

9. \emptyset тўплаларнинг бирлашмаси амалига нисбатан универсал тўпланда X тўпланинг кесишмаси амалига нисбатан нейтрал элементлардир.

МИСОЛЛАР. 10. Бутун сонларни қўшиш амалига нисбатан a га $(-a)$ симметрик (қарама-қарши) элемент бўлади.

11. Рационал сонларни кўпайтириш амалига нисбатан $a \neq 0$ рационал сонга $a^{-1} = 1/a$ симметрик (тесқари) элемент бўлади.

МИСОЛ. 12. Агар $B, C \in \mathbb{N}$, $B = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$, $C = \{1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots\}$ бўлса, B натурал сонларни қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан ёпиқ, C эса кўпайтириш амалига нисбатан ёпиқ.

Қуйидаги тўпلامларда $+$, $-$, \cdot , $:$ амалларининг қайси бири алгебраик амал бўлади. Агар алгебраик амал бўлса, улар коммутатив, ассоциатив бўладими?

- 1) \mathbb{N} ; 2) $2\mathbb{N} = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$; 3) $T = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$ 4) \mathbb{Z} ;
 5) $2\mathbb{Z} = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$; 6) \mathbb{Q} ; 7) \mathbb{R} ; 8) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; 9) $\mathbb{R}^+ = \{x : x \in \mathbb{R}, x > 0\}$;
 10) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; 11) $\{0\}$; 12) $\{1\}$; 13) $\{0, 1\}$.

2.2 Агар $A_1 = \{0, 1\}$, $A_2 = \{0, 1, 2\}$, $A_3 = \{0, 1, 2, 3\}$ тўпلامларда $*$ амал мос равишда қуйидаги Келли жадвали ёрдамида берилган бўлса, уни коммутатив ва ассоциатив эканлигини исботланг.

1)

*	0	1
0	0	1
1	1	0

2.3

$\{x : x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ тўпلامда аниқланган

қуйидагиларнинг қайси бири амал бўлади? Агар бўлса, улар коммутатив ва ассоциатив бўладими?

- 1) $a * b = \frac{a+b}{2}$; 2) $a * b = a + b - 1$; 3) $a * b = a \cdot b^2$;
 4) $a * b = a^b$; 5) $a * b = \sqrt{a \cdot b}$; 6) $a * b = \log_a b$;
 7) $a * b = \max\{a, b\}$; 8) $a * b = \min\{a, b\}$; 9) $a * b = |a - b|$;
 10) $a * b = a$.

2.4 $A = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ тўпلام қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан ёпиқ бўладими, бу тўпلامда қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан нейтрал элементлар мавжудми?

2) 3)

*	1	2	3
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

*	0	1	3
0	0	1	3
1	1	2	0
2	2	3	1
3	3	0	2

$\mathbb{R}^+ =$

амал

Куйидаги тўпламларни қайси бири алгебраик система бўлади:

- | | |
|---|---|
| 1) $Z[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in Z\};$ | 2) $Q[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in Q\};$ |
| 3) $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} : a, b \in Q \right\};$ | 4) $L = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & b \end{pmatrix} : a, b \in Q \right\};$ |
| 5) $P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in Q \right\};$ | 6) $E = \left\{ \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\};$ |
| 7) $2Z;$ | 8) $\mathbb{R};$ |
| 9) $T = \{2n - 1 : n \in Z\}.$ | |

Мисоллар

$z^2 + \bar{z} = 0$ тенгламани ечинг.

$\Delta z = a + bi$ бўлсин, у ҳолда $\bar{z} = a - bi$ бўлади.

$$(a + bi)^2 + (a - bi) \Rightarrow a^2 + 2abi - b^2 + a - bi = 0 \Rightarrow$$

$$(a^2 + a - b^2) + (2ab - b)i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 + a - b^2 = 0 \\ 2ab - b = 0 \end{cases} \Rightarrow b(2a - 1) = 0 \Rightarrow \left(b = 0 \vee a = \frac{1}{2} \right);$$

a) $b = 0$ бўлганда $a^2 + a = 0 \Rightarrow (a_1 = 0 \vee a_2 = -1),$

b) $a = \frac{1}{2}$ бўлганда $b^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \left(b_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee b_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$

Демак, $z_1 = 0, z_2 = -1, z_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_4 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

лар берилган тенгламанинг илдизлари бўлади. ∇

$z = \sqrt{24 - 10i}$ ҳисоблансин.

$\Delta \text{sign}(-10) = -1$ бўлгани учун қуйидагига эга бўламиз:

$$z = \pm \left[\sqrt{\frac{24 + \sqrt{24^2 + 10^2}}{2}} - i \sqrt{\frac{-24 + \sqrt{24^2 + 10^2}}{2}} \right] =$$

$$= \pm \left[\sqrt{\frac{24 + \sqrt{676}}{2}} - i \sqrt{\frac{-24 + \sqrt{676}}{2}} \right] = \pm \left[\sqrt{\frac{24 + 26}{2}} - i \sqrt{\frac{-24 + 26}{2}} \right] =$$

$$= \pm(5 - i), z_1 = 5 - i, z_2 = 5 + i. \nabla$$

Алгебраик шаклдаги комплекс сонлар устида амалларни бажаринг.

- | | |
|---|---|
| 1) $(5 + 4i) + (3 - 7i) - (2 + 5i);$ | 2) $(1 + i)(2 + i) + \frac{5}{1+2i};$ |
| 3) $\frac{(2-3i)(4-i)}{5-i};$ | 4) $\frac{5+i}{(1-2i)(5-i)};$ |
| 5) $\frac{(5+2i)(4-3i)}{(1-2i)(1+3i)};$ | 6) $\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^2}{(3+2i)^2 - (2+i)^2};$ |
| 7) $(1 + 2i)^6;$ | 8) $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-1}};$ |
| 9) $(1 + i)^{1990};$ | 10) $(1 + 2i)^5 - (1 - 2i)^5.$ |

Мисоллар

$z = 1 - i$ сонни триганометрик шаклда ёзинг.

$\Delta a = 1, b = -1$ бўлгани учун

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \quad \wedge \quad \cos \varphi = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{b}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi \arg z = \frac{7\pi}{4} \quad \wedge \quad z = 1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) . \nabla$$

$z + \frac{1}{z} = 1$ бўлса, $z^{1990} + \frac{1}{z^{1990}}$ ни ҳисобланг.

$$\Delta z + \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

z^{1990} ни ҳисоблаш учун z_1 ни триганометрик шаклга келтирамиз.

$$|z_1| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \quad (\text{Шу каби } |z_2|) .$$

$\varphi_1 = \arg z_1 = \arctg(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{3}$, чунки $\sin \varphi_1 = \frac{1}{2}$, $\cos \varphi_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, шу каби

$$\varphi_2 = \arg z_2 = \arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} . \text{ Демак,}$$

$$z_1 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \Rightarrow z_1^{1990} = \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)^{1990} =$$

$$= \cos \frac{5 \cdot 1990\pi}{3} + i \sin \frac{5 \cdot 1990\pi}{3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{z^{1990}} = z_1^{-1990} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_1^{1990} + \frac{1}{z_1^{1990}} = -1$$

Шу каби $z_2^{1990} + \frac{1}{z_2^{1990}}$ ни хисоблашни ўқувчига қолдирамиз. ▽

Қуйидаги сонларни триганометрик шаклда ёзинг.

- 1) 2; 2) -2; 3) 2i; 4) -2i; 5) 1 + i; 6) -1 + i; 7) -1 - i; 8) 1 + i√3;
 9) -1 + i√3; 10) √3 - i; 11) -√3 - i; 12) $\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$; 13) $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$;
 14) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$; 15) 2 - 2i; 16) 2 + √3 + i.

Жадвалдан фойдаланиб, қуйидаги комплекс сонларни триганометрик шаклда ёзинг.

- 1) 3 + i; 2) 4 - i; 3) -2 + i; 4) -1 - 2i; 5) 2 + i.

1) Агар $z + \frac{1}{z} = 1$ бўлса, $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos \frac{n\pi}{3}$ эканлигини исботланг;

Мисоллар

$x, y \in \mathbb{R}$ деб фараз қилиб, $x + 8i + (y - 3)i = 1$ тенгламадан x ва y ларни топинг.

$$\Delta x + 8i + (y - 3)i = 1 \Rightarrow x + yi = 1 - 5i \Leftrightarrow x = 1, y = -5. \nabla$$

$$\frac{(3-4i)(2-i)}{2+i} - \frac{(3+4i)(2+i)}{2-i} = \frac{(3-4i)(2-i)^2}{(2-i)(2+i)} - \frac{(3+4i)(2+i)^2}{(2-i)(2+i)} =$$

$$= \frac{(3-4i)(3-4i)}{2^2+1^2} - \frac{(3+4i)(3+4i)}{2^2+1^2} = \frac{1}{5} [(-7 - 24i) - (-7 + 24i)] = \frac{48}{5}i. \nabla$$

$$z_1 = a_1 + b_1 i,$$

$z_2 = a_2 + b_2 i$ бўлса, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ бўлишини исботланг.

$$\Delta z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i; \quad \overline{z_1 \cdot z_2} \\ = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i;$$

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a_1 - b_1 i) \cdot (a_2 - b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i;$$

Булардан $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ келиб чиқади. ∇

Қуйидаги тенгламаларда x ва y ларни ҳақиқий сон ҳисоблаб, уларни топинг.

1) $(2 - 3i)x + (3 + 2i)y = 2 - 5i;$

2) $(5 + 2i)x +$

$(1 - 3i)y = 4 - i;$

3) $(2 - i)x + (5 + 6i)y = 1 - 3i;$

4) $x + 8i + (y - 3)i = 1;$

5) $(3 + i)x - 2(1 + 4i)y = -2 - 4i;$

6) $(1 + 2i)x +$

$(3 - 5i)y = 1 = 3i;$

3. Алгебраик шаклдаги комплекс сонлар устида амалларни бажаринг.

1) $(5 + 4i) + (3 - 7i) - (2 + 5i);$

2) $(1 + i)(2 + i) + \frac{5}{1+2i};$

3) $\frac{(2-3i)(4-i)}{5-i};$

4) $\frac{5+i}{(1-2i)(5-i)};$

5) $\frac{(5+2i)(4-3i)}{(1-2i)(1+3i)};$

6) $\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^2}{(3+2i)^2 - (2+i)^2};$

7) $(1 + 2i)^6;$

8) $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-1}};$

9) $(1 + i)^{1990};$

10) $(1 + 2i)^5 - (1 - 2i)^5.$

4. Биринг n -даражали илдизларини топинг.

1) $n=3$ 2) $n=4$ 3) $n=6$ 4) $n=8$

Мисоллар

1. МИСОЛЛАР ЕЧИШ.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases} \quad \text{Системани ечинг.}$$

Δ Берилган системанинг 1-тенгламасини ҳар икки томонини (-3) га, (-2) га, (-1) га кўпайтириб мос равишда 2-, 3-, 4- тенгламаларига қўшамиз (бу бажарилган элементар алмаштиришларни юқоридагидек схематик тасвирлаймиз) натижада берилган системага тенг кучли бўлган

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ -4x_2 - 7x_3 - 11x_4 = -7 \\ x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 8 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \end{cases}$$

системага эга бўламиз. Бу системадаги 2- ва 4- тенгламаларнинг ўринларини ўзаро алмаштириб, унга эквивалент бўлган (бу алмаштиришни схематик равишда юқоридагидек белгилаймиз)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 8 \\ -4x_2 - 7x_3 - 11x_4 = -7 \end{cases}$$

Системани ҳосил қиламиз. Схемада кўрсатилган элементар алмаштиришни бажариб,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ -6x_3 - 3x_4 = -3 \\ -3x_3 - 27x_4 = -27 \end{cases} \quad :3$$

системага келамиз. Бу системани 3-тенгламасини 3 га, 4- тенгламасини (-3) га қисқартириб (ҳар икки томонини бўлиб) уларнинг ўринларини алмаштириб ёзамиз (схематик белгилашга қаранг)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ x_3 + 9x_4 = 9 \\ -2x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ x_3 + 9x_4 = 9 \\ 17x_4 = 17 \end{cases}$$

Охириги системанинг 4- тенгламасидан $x_4 = 1$, x_4 нинг бу қийматини системанинг 3- тенгламасига қўйиб $x_3 = 0$ ни топамиз, x_3, x_4 ларни бу қийматларини 2- тенгламага қўйиб $x_2 = -1$ ни топамиз, x_2, x_3, x_4 ларни бу топилган қийматларини 1- тенгламага қўйиб $x_1 = -1$ ни топамиз.

Демак, берилган система ягона $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ ечилмага эга. ▽

2.МИСОЛ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 = 0 \end{cases}$$

Системани ечинг.

$$\Delta \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 0 \\ 3x_2 + 9x_3 + 19x_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Бу системадан $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$ ларни топамиз. Демак, берилган система ягона ноль ечилма ($x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$) га эга. ▽

МУСТАҚИЛ ИШИ УЧУН МИСОЛЛАР.

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

4)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_3 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$$

8)

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 12x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

λ нинг қайси қиймаларида фуйидаги тенгламалар системалари биргалашган бўлади?

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 = \lambda \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5 \\ -12x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -6 \\ \lambda x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

4)

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 1 \\ -6x_1 + 8x_2 - 5x_3 - x_4 = 9 \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 3 \\ -3x_1 + 7x_2 + 17x_3 + 17x_4 = \lambda \end{cases}$$

Мисоллар

1. МИСОЛЛАР ЕЧИШ.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

Системани ечинг.

Δ Берилган системанинг 1-тенгламасини ҳар икки томонини (-3) га , (-2) га, (-1) га кўпайтириб мос равишда 2-, 3-, 4- тенгламаларига қўшамиз (бу бажарилган элементар алмаштиришларни юқоридагидек схематик тасвирлаймиз) натижада берилган системага тенг кучли бўлган

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ -4x_2 - 7x_3 - 11x_4 = -7 \\ x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 8 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \end{cases}$$

системага эга бўламиз. Бу системадаги 2- ва 4- тенгламаларнинг ўринларини ўзаро алмаштириб, унга эквивалент бўлган (бу алмаштиришни схематик равишда юқоридагидек белгилаймиз)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 8 \\ -4x_2 - 7x_3 - 11x_4 = -7 \end{cases}$$

Системани ҳосил қиламиз. Схемада кўрсатилган элементар алмаштиришни бажариб,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ -6x_3 - 3x_4 = -3 \\ -3x_3 - 27x_4 = -27 \end{cases} :3$$

системага келамиз. Бу системани 3-тенгламасини 3 га, 4- тенгламасини (-3) га қисқартириб (ҳар икки томонини бўлиб) уларнинг ўринларини алмаштириб ёзамиз (схематик белгилашга қаранг)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ x_3 + 9x_4 = 9 \\ -2x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ x_3 + 9x_4 = 9 \\ 17x_4 = 17 \end{cases}$$

Охирги системанинг 4- тенгламасидан $x_4 = 1$, x_4 нинг бу қийматини системанинг 3- тенгламасига қўйиб $x_3 = 0$ ни топамиз, x_3 , x_4 ларни бу қийматларини 2- тенгламага қўйиб $x_2 = -1$ ни топамиз, x_2 , x_3 , x_4 ларни бу топилган қийматларини 1- тенгламага қўйиб $x_1 = -1$ ни топамиз. Демак, берилган система ягона $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ ечилмага эга. ▽

МУСТАҚИЛ ИШ УЧУН МИСОЛЛАР.

4.1. Қуйидаги тенгламалар системаларини Гаусс усулида ечинг:

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

4)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_3 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$$

8)

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 12x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_4 = -1 \\ 5x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 5 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ 7x_1 - x_2 + x_3 - 9x_4 = -4 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2 \end{cases}$$

10)

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 5x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases} \quad 12)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$$

Мисоллар

Мисол.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

система ечимларининг фундаментал системасини топинг.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Охирги системанинг умумий ечими

$x_1 = 11x_3 - 7x_4$, $x_2 = -5x_3 + 3x_4$ бўлади.

$x_1 = 1, x_2 = 0$ сўнгра $x_3 = 0, x_4 = 1$ деб, x_1, x_2 ларнинг тегишли қийматларини топамиз.

x_1	x_2	x_3	x_4
11	-5	1	0
-7	3	0	1

Қуйидаги бир жинсли тенгламалар системаси ечимларини топинг.

$$\begin{array}{l}
 1) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{array} \right. \quad 2) \\
 \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{array} \right. \\
 3) \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{array} \right. \\
 4) \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$1) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0 \end{array} \right. \quad 6)$$

Мисоллар

МИСОЛЛАР. 1. S_3 нинг барча элементларини топинг.

$$\Delta \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \\
 \varphi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Демак, S_3 нинг элементлари $3! = 6$ та экан. ∇

2. $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$ – 3 - даражали ўринга кўйишларнинг $\varphi_2 \cdot \varphi_1$ ва $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ кўпайтмаларини топинг.

$$\Delta \varphi_1 \cdot \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2 \cdot \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Демак, $\varphi_2 \cdot \varphi_1 \neq \varphi_1 \cdot \varphi_2$. Бундан умумий ҳолда ўринга кўйишларни кўпайтириш коммутативлик хоссосига эга эмас деган хулосага келамиз. ∇

3. S_3 даги ҳамма жуфт ва тоқ ўринга кўйишларнинг сонларини топинг.

Δ φ_1 даги тартибсизлик йўқ. φ_2 да $\{3; 2\}$ – битта тартибсизлик бор. Шу каби φ_3 да ҳам $\{2, 1\}$ – битта. φ_4 да $\{2, 1\}, \{3, 1\}$ – иккита тартибсизлик бор. $\varphi_1, \varphi_4, \varphi_5$ лар жуфт, $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_6$ – лар тоқ ўринга кўйишлар экан. ∇

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 12 & 31 & 62 \\ 122 & 315 & 623 \end{vmatrix} \quad \text{3-тартибли детерминантни ҳисобланг.}$$

$$\Delta \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 120 & 310 & 620 \\ 120+2 & 310+5 & 620+3 \end{vmatrix} \\ = \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 120 & 310 & 620 \\ 120 & 310 & 620 \end{vmatrix} + \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 120 & 310 & 620 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 12 & 31 & 62 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 10+2 & 30+1 & 60+2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 10 & 30 & 60 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 + 12 + 60 - 18 - 10 - 12 = 35 . \nabla$$

МУСТАҚИЛ ИШ УЧУН МИСОЛЛАР.

5.16. Қуйидаги ўринга кўйишларни кўрсатилган тартибда кўпайтиринг:

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}; & 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \\
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}; & \\
 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; & 4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \\
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}; & \\
 5) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}; & 6) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \\
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}. &
 \end{array}$$

5.17. Қуйидаги ўринга қўйишларни жуфт ёки тоқлигини аниқланг.

$$\begin{array}{lll}
 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}; & 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \\
 4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}; & 5) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 9 & 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}; \\
 6) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}; & 7) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$

Мисоллар

$$\begin{array}{l}
 D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 12 & 31 & 62 \\ 122 & 315 & 623 \end{vmatrix} \quad \text{3-тартибли детерминантни ҳисобланг.} \\
 \Delta = \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 120 & 310 & 620 \\ 120+2 & 310+5 & 620+3 \end{vmatrix} \\
 = \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 120 & 310 & 620 \\ 120 & 310 & 620 \end{vmatrix} + \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 120 & 310 & 620 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \\
 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 12 & 31 & 62 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 10+2 & 30+1 & 60+2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 10 & 30 & 60 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\
 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \\
 = 3 + 12 + 60 - 18 - 10 - 12 = 35 . \nabla
 \end{array}$$

Ушбу детерминантни детерминант хоссаларидан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 2(1 \cdot (-1) \cdot (-11)) = 22$$

Қуйидаги детерминантлар ҳисоблансин.

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$; 7) $\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$;

8) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$; 9) $\begin{vmatrix} a+b & b+d \\ a+c & c+d \end{vmatrix}$; 10) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$;

11) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; 12) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; 13) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$;

14) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; 15) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & cd \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$; 16) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$;

17) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$; 18) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$; 19)

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -3 & -1 \\ 6 & 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

Мисоллар

Мисоллар. 1. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ детерминантни 3- сатри бўйича ёйиб

чиқинг.

$$\Delta \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(-2)(-4 + 4 + 0 + 0 - 8 - 1) + 3(0 - 6 - 3 + 0 - 12 - 3) = (-2)(-9) + 3(-24) = 18 - 72 = -54.$$

МУСТАҚИЛ ИШ УЧУН МИСОЛЛАР.

Қуйдаги детерминантларни мақсадга мувофиқ танлаб олинган сатри (устун) элементлари бўйича ёйиб ҳисоблансин:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix};$

2) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix};$ 3)

$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix};$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix};$

5) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix};$ 6)

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix};$

$$7) \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix}; \quad 8) \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a' & 1 & 0 & 0 \\ b' & 0 & 1 & 0 \\ c' & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad 9) \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}.$$

Мисоллар

1-мисол. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$ матрицага тескари матрицани топинг.

Δ A ва I матрицаларга бир вақтда 1), 2) сатр элементар алмаштиришларини бажариб A ни бирлик матрицага келтирсак, I бирлик матрица A^{-1} матрицага келади. Яъни:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Демак, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ҳақиқатан ҳам

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+6-2 & -1-3+4 & 2-2 \\ -6+10-4 & -2-5+8 & 4-4 \\ -9+14-5 & -3-7+10 & 6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \nabla$$

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР.

5.13. Қуйидаги матрицаларга тескари матрицаларни топинг.

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3)

$$4) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & -8 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$5) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

6)

$$7) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$8) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

9) $A =$

$$10) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$11) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

12) $A =$

Мисоллар

МИСОЛЛАР: 1. $\vec{a}_1 = \langle 1, 1, 1 \rangle$, $\vec{a}_2 = \langle 1, 2, 3 \rangle$, $\vec{a}_3 = \langle 1, 3, 6 \rangle$ уч ўлчовли векторлар системасининг чизикли боғланмаган (эркли) экалиги кўрсатилсин.

$\Delta \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$ лар учун $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{\theta}$ ёки $[\langle \lambda_1, \lambda_1, \lambda_1 \rangle + \langle \lambda_2, 2\lambda_2, 3\lambda_2 \rangle + \langle \lambda_3, 3\lambda_3, 6\lambda_3 \rangle] = \langle 0, 0, 0 \rangle$ бўлсин. Бундан $\langle \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3, \lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$ бу қуйидаги бир жинсли тенгламалар системасига тенг кучли.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Охирги тенгламалар системасини ечиб, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ га эга бўламиз. Демак, берилган векторлар системаси чизикли боғланмаган экан. ∇

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Бу система чексиз кўп ноль ечилмаларга эга. Масалан $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1$, бу ҳолда $\vec{b}_1 - \vec{b}_2 + \vec{b}_3 = \vec{\theta}$ боғланиш ўринга эга. Демак, $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ векторлар системаси чизикли боғланган системани ташкил қилади. ∇

Мисоллар

МИСОЛЛАР: $\vec{b}_1 = \langle 1, 1, 2 \rangle$, $\vec{b}_2 = \langle 2, 3, 4 \rangle$, $\vec{b}_3 = \langle 1, 2, 2 \rangle$
 векторлар системасидаги чизиқли боғланиш текширилсин.

$\Delta \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$ лар учун $\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \lambda_3 \vec{b}_3 = \vec{\theta}$ ёки $[\langle \lambda_1, \lambda_1, 2\lambda_1 \rangle + \langle 2\lambda_2, 3\lambda_2, 4\lambda_2 \rangle + \langle \lambda_3, 2\lambda_3, 2\lambda_3 \rangle] = \langle 0, 0, 0 \rangle$ бўлсин. Бундан $\langle \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3, \lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$ бу қуйидаги бир жинсли тенгламалар системасига тенг кучли.

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Бу система чексиз кўп ноль ечилмаларга эга. Масалан $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1$, бу ҳолда $\vec{b}_1 - \vec{b}_2 + \vec{b}_3 = \vec{\theta}$ боғланиш ўринга эга. Демак, $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ векторлар системаси чизиқли боғланган системани ташкил қилади. ∇

Қуйидаги векторлар системасини чизиқли боғланган ёки боғланмаган эканлигини текширинг.

- 1) $\vec{a}_1 = \langle 1, 1, 1, 1 \rangle, \vec{a}_2 = \langle 1, -1, 1, -1 \rangle, \vec{a}_3 = \langle 2, 3, 1, 4 \rangle$
- 2) $\vec{a}_1 = \langle 1, 1, 1 \rangle, \vec{a}_2 = \langle 1, 2, -1 \rangle, \vec{a}_3 = \langle -1, 3, 1 \rangle$
- 3) $\vec{a}_1 = \langle 1, 2, 1 \rangle, \vec{a}_2 = \langle 4, 3, -2 \rangle, \vec{a}_3 = \langle -5, -4, -1 \rangle$
- 4) $\vec{a}_1 = \langle 1, 2, 1, 1 \rangle, \vec{a}_2 = \langle 2, 5, 1, 3 \rangle, \vec{a}_3 = \langle -1, 3, -6, 4 \rangle, \vec{a}_4 = \langle 1, -1, 4, 2 \rangle$
- 5) $\vec{a}_1 = \langle 1, 1, 1, 0 \rangle, \vec{a}_2 = \langle 1, 1, 0, -1 \rangle, \vec{a}_3 = \langle 1, 0, -1, -1 \rangle, \vec{a}_4 = \langle 0, -1, -1, 0 \rangle$
- 6) $\vec{a}_1 = \langle 1, 4, 1, 2 \rangle, \vec{a}_2 = \langle 3, -9, -11, 1 \rangle, \vec{a}_3 = \langle 2, 8, -2, 4 \rangle, \vec{a}_4 = \langle -3, 15, 5, -7 \rangle$
- 7) $\vec{a}_1 = \langle 2, -3, 1 \rangle, \vec{a}_2 = \langle 3, -1, 5 \rangle, \vec{a}_3 = \langle 1, -4, 3 \rangle$
- 8) $\vec{a}_1 = \langle 5, 4, 3 \rangle, \vec{a}_2 = \langle 3, 3, 2 \rangle, \vec{a}_3 = \langle 8, 1, 3 \rangle$
- 9) $\vec{a}_1 = \langle 1, 2, 1 \rangle, \vec{a}_2 = \langle 2, 3, 3 \rangle, \vec{a}_3 = \langle 3, 7, 1 \rangle$

Мисоллар

МИСОЛ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ матрицанинг рангини топинг.

Ечиш.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & -5 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & -5 \\ 0 & 0 & -18 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r(A) = \rho(A) = R(A) = 3.$$

МУСТАҚИЛ ИШ УЧУН МИСОЛЛАР.

5.8. Қуйидаги матрицаларни рангини топинг.

1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 7 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$

$$1) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}; \quad 5) \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}; \quad 6) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$$

$$7) \begin{pmatrix} 4 & 9 & 0 & 7 & 2 \\ -1 & 1 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 & 9 & 6 \end{pmatrix}; \quad 8) \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ -6 & 9 & -1 & -2 & 6 \\ -4 & 6 & 1 & 12 & -3 \end{pmatrix}; \quad 9) \begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix};$$

$$9) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad 11) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad 12) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$13) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 & 5 & 11 \\ -1 & -4 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}; \quad 14) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ -8 & -5 & -12 & 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad 15) \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мисол.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

система ечимларининг фундаментал системасини топинг.

Ечиш. Берилган системанинг асосий матричасини рангини топамиз.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A)=2$ ва

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Охирги системанинг умумий ечими

$x_1 = 11x_3 - 7x_4$, $x_2 = -5x_3 + 3x_4$ бўлади.

$R(A)$ бўлгани учун 5.8-теоремага асосан берилган биржинсли тенгламалар системаси фундаментал ечимлари 2 та ечимдан иборат бўлади. Уни топиш учун аввал $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ сўнгра $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ деб, x_1, x_2 ларнинг тегишли қийматларини топамиз.

x_1	x_2	x_3	x_4
11	-5	1	0
-7	3	0	1

$$\vec{a}_1 = \langle 11, -5, 1, 0 \rangle, \vec{a}_2 = \langle -7, 3, 0, 1 \rangle$$

векторлар системаси чизиқли эркин, берилган системанинг ихтиёрий ечими \vec{a}_1, \vec{a}_2 системанинг чизиқли комбинацияси шаклида ифодалаш мумкин.

Берилган системанинг ечимлари тўплами

$$L(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \{ \vec{a} : \vec{a} = c_1 \langle 11, -5, 1, 0 \rangle + c_2 \langle -7, 3, 0, 1 \rangle, c_1, c_2 \in R \}$$

бўлиб, \vec{a}_1, \vec{a}_2 бу вектор фазонинг базиси бўлади.

Мисоллар

1. $5x^4 - x^2 + 6$ купхадни $x^2 + 3x + 2$ купхадга колдикли булинг.

2. Куйидаги купхад коэффициентлари йигиндисини топинг:

$$(x^4 - 4x^3 + 2)^{100}.$$

3. Горнер схемасидан фойдаланиб $f(1)$ ни ҳисобланг: $f(x) = x^5$.

4. Куйидаги купхаднинг рационал илдизларини топинг:

$$x^3 - 6x^2 + 15x - 14.$$

5-мисол. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 4$ ва $g(x) = x^2 - 3x + 1$ кўпхадларнинг кўпойтиринг.

$$\begin{aligned} g(x) \cdot f(x) &= (x^2 - 3x + 1)(2x^3 - 5x^2 + 3x - 1) = \\ &= 2x^5 - 5x^4 + 3x^3 - x^2 - 6x^4 + 15x^2 - 9x + 3x + \\ &+ 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1 = 2x^5 - 11x^4 + 5x^3 + 9x^2 - 3x - 1. \end{aligned}$$

6-мисол. $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 4x^2 - 5x + 7$ кўпхадни $x - 3$ га бўлишдаги $q(x)$ бўлинмани ва $f(3) = r$ қолдиқни Горнер схемаси ёрдамида топамиз:

2	-3	0	4	-5	7
2	3	9	31	88	271

Шундай қилиб, бўлинма

$$q(x) = 2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 31x + 88,$$

Қолдиқ эса

$$r = f(3) = 271 \text{ бўлади.}$$

Горнер усули нафақот кўпхаднинг илдизларини топишни тезлаштиради, балки унинг қийматини ҳисоблашни осонлаштиради.

Мисоллар

1-мисол. 1. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ ни $g(x) = x^2 - 3x + 1$ га қолдиқли бўлиш қондасидан фойдаланиб бўламиз:

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1 \mid x^2 - 3x + 1 \\ \underline{2x^3 - 6x^2 + 2x} \quad 2x + 1 = q(x) \\ x^2 + x - 1 \\ \underline{x^2 - 3x + 1} \\ 4x - 2 = r(x) \end{array}$$

Ва демак

$$f(x) = g(x)(2x+1) + (4x-2)$$

Тенгликни ҳосил қиламиз, бу ерда $\deg r(x) = 1 < 2 = \deg g(x)$.

2-мисол. $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 1$ ни $g(x) = 2x^2 + x - 1$ га қолдиқли бўлинг

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 2x^2 - x + 1 \quad | \quad 2x^2 + x + 1 \\ \hline 3x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x \quad \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} = q(x) \in Q[x] \\ \hline \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \\ \hline -\frac{11}{2}x + \frac{1}{3} = r(x) \in Q[x] \end{array}$$

Ва демак

$$f(x) = g(x) \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \right) + \left(-\frac{11}{2}x + \frac{1}{3} \right)$$

Тенгликни ҳосил қиламиз.

3-misol . $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ ва $g(x) = x^3 - 1$ кўпхадларнинг ЭКУБини топиш учун бу кўпхадларга Евклид алгоритми тузамиз:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \cdot 1 + (x^3 - x), \\ g(x) &= (x^2 - x)(x+1) + (x-1), \\ (x^2 - x) &= (x-1) \cdot x \end{aligned}$$

ва демак $(f(x), g(x)) = x - 1$ бўлади.

4-мисол. Куйидаги купхадлар учун $fM + gN = d$ тенгликни каноатлантирувчи $M(x), N(x)$ купхадлар топилсин.

5-мисол. Куйидаги купхад коэффициентлари йигиндисини топинг:

$$(x^4 - 4x^3 + 2)^{100}.$$

6-мисол. Горнер схемасидан фойдаланиб $f(1)$ ни ҳисобланг: $f(x) = x^5$.

7-мисол. Куйидаги кўпхаднинг рационал илдиэларини топинг:

$$x^3 - 6x^2 + 15x - 14.$$

Мисол. R да $\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$ тўғри касрни оддий касрларга ёйамиз. Бу каср

$\frac{A_1}{x-1}$ ва $\frac{A_2x + A_3}{x^2 + 1}$ оддий касрларнинг йигиндисига ёйилади. Бу йигиндидан

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2x + A_3}{x^2 + 1}$$

A_1, A_2, A_3 ларни топамиз. Бунинг учун тенгликнинг иккала қисмини $(x-1)(x^2+1)$ касрларнинг умумий махражига кўпойтирсак

$$1 = A_1(x^2 + 1) + (A_2x + A_3)(x^2 - 1)$$

Тенглик ҳосил бўлади. A_1, A_2, A_3 коэффициентларни топамиз, яъни $1, x, x^2$ лар олдидаги лар oldidagi коэффициентларни тенглаштириб,

$$x^0 = 1: \quad A_1 - A_3 = 1,$$

$$x: \quad -A_2 + A_3 = 0,$$

$$x^2: \quad A_1 + A_2 = 0.$$

Учта A_1, A_2, A_3 номаълумли учта тенгламалар системасини ҳосил қиламиз ва уни ечиб,

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = -\frac{1}{2}, \quad A_3 = -\frac{1}{2}$$

ларни топамиз. Шундай қилиб,

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)}$$

бўлади.