Binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati

Reja:

- Dekart ko'paytma.
- Binar munosabatlar.
- Binar munosabatlar kompozisiyasi.
- Binar munosabatlar turlari.
- Ekvivalentlik munosabati.
- Faktor-to'plam.

Matematikada munosabat tushunchasini o'rganish masalasini ko'ramiz. Tartiblangan juftliklar to'plami munosabat sifatida qaraladi. Tartiblangan juftliklar munosabatlarni o'rganishda fundamental ahamiyatga ega. [1]

Some describe or define mathematics as the study of relations. Since a relation is a set of ordered pairs, we get our first glimpse of the fundamental importance of the concept of an ordered pair.

5.1-ta'rif. $A\times B$ to'plamning qism to'plamiga A to'plam B to'plamga **binar munosabatda** yoki R **munosabatda** deyiladi.

Definition 1.3.1 *A* ***binary relation*** *or simply a* ***relation*** *R from a set A into a set B is a subset of $A \times B$.*

[1] S.D.Malik, John N.Mordeson, M.K.Sen, Fundamentals of Abstract Algebra. pp. 21-30.

*S.D.Malik, John N.Mordeson, M.K.Sen, Fundamentals of Abstract Algebra. pp. 21-30.

$A \neq \varnothing$ to'plam berilgan bo'lsin. A^n ning ixtiyoriy ρ to'plamostini A to'plamda aniqlangan n-ar yoki n-o'rinli munosabat deyiladi. Hususan A^2 ning ixtiyoriy to'plamostisi A to'plamida berilgan binar munosabat deyiladi. Agar (a, b) juftliklar ρ binar munosabatga tegishli bo'lsa, $a\rho b$ deb belgilaymiz.

5.2-misol. N^2 ning $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),\dots\}$ to'plamostisi natural sonlar to'plamida aniqlangan tenglik munosabatidir.

5.3-misol. N^2 ning $"<"=\{(1,2),(1,3),\dots,(2,3),(2,4),\dots,(3,4),(3,5),\dots\}$ to'plamostisini qaraylik. Bu munosabat tengsizlik munosabati bo'lib $(a,b)\in"<"$ bo'lishi $a<b$ orqali belgilanadi va a kichik b deb o'qiladi. 5.5-ta'rifdan ko'rinib turibdiki, A da - 0 o'rinli munosabat, bu $A^0=\{\varnothing\}$ to'plamning to'plamostilari bo'lib, faqat $\varnothing$ $\{\varnothing\}$ to'plamlardan iboratdir.

Bir o'rinli munosabat esa A ning ixtiyoriy to'plamostisi bo'lar ekan. Bir o'rinli munosabat unar munosabat deyiladi.

5.4-misol. $A=\{a,b\}$ to'plamda aniqlangan barcha unar munosabatlar

$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$ to'plamlardan iborat.

Binar munosabatlar matematikada ko'p uchraydigan munosabatlardan biri bo'lganligi uchun u bilan to'liqroq tanishib chiqamiz.

5.5-ta'rif. Agar R - A to'plamda berilgan binar munosabat bo'lsa, u holda binar munosabatga tegishli barcha juftliklarning, barcha birinchi koordinatalaridan tuzilgan to'plam $Dom\,R$ orqali, barcha ikkinchi koordinatalaridan tuzilgan to'plam esa $\operatorname{Im} R$ orqali belgilanad. Ular mos ravishda R munosabatning **aniqlanish** va **o'zgarish** sohalari deyiladi.

*S.D.Malik, John N.Mordeson, M.K.Sen, Fundamentals of Abstract Algebra. pp. 21-30.

Let R be a relation from a set A into a set B. By looking at the elements of R, we can find out which elements of A are related to elements of B with respect to R. The elements of A that are related to elements of B form a subset of A, called the **domain** of R, and the elements of B that are in relation with elements of A form a subset of B, called the **range** of R. More formally, we have the following definition.

Definition 1.3.4 *Let R be a relation from a set A into a set B. Then the **domain** of R, denoted by $\mathcal{D}(R)$, is defined to be the set*

$$\{x \mid x \in A \text{ and there exists } y \in B \text{ such that } (x, y) \in R\}.$$

*The **range** or **image** of R, denoted by $\mathcal{I}(R)$, is defined to be the set*

$$\{y \mid y \in B \text{ and there exists } x \in A \text{ such that } (x, y) \in R\}.$$

5.6-ta'rif. Agar R – ikki o'rinli, ya'ni binar munosat bo'lsa, u holda $\{(a,b)/\forall(b,a)\in R^1\}$ munosabat R^1-munosabatga teskari munosabat deyiladi va R^{-1} orqali belgilanadi. R^{-1} munosabat R ning inversiyasi deyiladi.

5.7-ta'rif. R - A to'plamni B to'plamga munosabat va S B to'plamni C to'plamga munosabat bo'lsin. U holda R va S munosabatlarning **kompositsiyasi**ni $R\circ S$ kabi belgilaymiz va hosil bo'lgan A to'plamni C to'plamga munosabat quyidagicha aniqlanadi: $x(R\circ S)y$ agar, barcha $x\in A,\ y\in C$ lar uchun shunday $z\in B$ topilib xRz va zSy o'rinli bo'lsa.

*S.D.Malik, John N.Mordeson, M.K.Sen, Fundamentals of Abstract Algebra. pp. 21-30.

Definition 1.3.19 *Let R be a relation from a set A into a set B and S be a relation from B into a set C. The* **composition** *of R and S, denoted by $S \circ R$, is the relation from A into C defined by*

$$x(S \circ R)y \text{ if there exists } z \in B \text{ such that } xRz \text{ and } zSy$$

for all $x \in A, y \in C$.

5.8–teorema. Agar f, h, g lar A to'plamida berilgan binar munosabatlar bo'lsa, u holda $f \circ (h \circ g) = (f \circ h) \circ g$ tenglik o'rinli bo'ladi, ya'ni binar munosabatlar kompozisiyasi assosiativdir.

Isbot. $\forall (x,t) \in f \circ (g \circ h)$ bo'lsin, u holda kompazisiya ta'rifga ko'ra shunday $y, z \in A$ elementlar topilib $(x,y) \in f, (y,z) \in g$ va $(z,t) \in L$ bo'ladi. Demak $(x,z) \in f \circ g$ va $(z,t) \in L$ u holda $(x,t) \in (f \circ g) \circ h$ bo'ladi. YA'ni $f \circ (g \circ L) \subseteq (f \circ g) \circ h$. Shunga o'xshash $(f \circ g) \circ h \subseteq f \circ (g \circ h)$ bo'lishi isbotlanadi.

5.9-ta'rif. A to'plamida R –binar munosabat berilgan bo'lsin.

$a)$ Agar $\forall a \in A$ uchun $(a,a) \in R$ bo'lsa, R –binar munosabat **refleksiv** munosabat deyiladi;

$b)$ Agar $(a,b) \in R$ bo'lishidan $(b,a) \in R$ bo'lishi kelib chiqsa, ya'ni $R^{-1} = R$ shart bajarilsa, R-**simmetrik** munosabat deyiladi;

$c)$ Agar $\forall (a,b) \in R$ va $(b,a) \in R$ bo'lishidan $(a,c) \in R$ bo'lishi kelib chiqsa, ya'ni $R \circ R \subset R$ shart bajarilsa, R-**tranzitiv** munosabat deyiladi;

$d)$ refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo'lgan binar munosabat **ekvivalentlik munosabati** deyiladi.

*S.D.Malik, John N.Mordeson, M.K.Sen, Fundamentals of Abstract Algebra. pp. 21-30.

Ekvivalentlik munosabati ba'zan ≡, ~, ≃ kabi ko'rinishlarda ham belgilanadi.

Definition 1.3.7 *Let R be a binary relation on a set A. Then R is called*
(i) ***reflexive*** *if for all $x \in A$, xRx,*
(ii) ***symmetric*** *if for all $x, y \in A$, xRy implies yRx,*
(iii) ***transitive*** *if for all $x, y, z \in A$, xRy and yRz imply xRz.*

Definition 1.3.8 *A binary relation E on a set A is called an* ***equivalence relation*** *on A if E is reflexive, symmetric, and transitive.*

5.10-misol. Z- butun sonlar to'plamida $\forall a, b \in Z$ butun sonlar ayirmasi birdan katta bo'lgan m butun songa qoldiqsiz bo'linsa, a soni b soni bilan, m-modul bo'yicha taqqoslanadi deyiladi va $a \equiv b$ (mad m) deb yoziladi. Bu munosabat refleksiv munosabatidir, haqiqatdan $\forall a \in Z$ uchun $a - a = 0 \vdots m$, ya'ni $a \equiv a$ (mad m); ≡-simmetrik munosabatdir, chunki $a \equiv b$ (mad m) bo'lsa $a - b \vdots m$, demak $-(b-a) \vdots m$, ya'ni $b \equiv a$ (mad m); ≡-tranzitiv munosabatdir, haqiqatdan $a \equiv b$ (mad m) va $b \equiv c$ (mad m) bo'lsa, $(a-b) \vdots m$ va $(b-c) \vdots m$ bo'ladi, u holda $a - c = ((a-b)+(b-c)) \vdots m$, ya'ni $a \equiv c$ (mad m) bo'ladi. SHunday qilib ≡-munosabat-refleksiv, simmetrik, tranzitiv ya'ni ekvivalentlik munosabati ekan.

5.11-misol. Tekislikdagi barcha to'g'ri chiziqlar to'plamida to'g'ri chiziqlarning parallel bo'lishi munosabati ekvivalentlik munosabatidir.

5.12-misol. Tekislikdagi barcha uchburchaklar to'plamida uchburchaklarning o'xshashlik munosabati ekvivalentlik munosabatidir.

5.13-ta'rif. A to'plamda aniqlangan R-ekvivalentlik munosabati berilgan bo'lsin. $\forall a \in A$ uchun $\bar{a}$ orqali A to'plamning a ga ekvivalent bo'lgan barcha

*S.D.Malik, John N.Mordeson, M.K.Sen, Fundamentals of Abstract Algebra. pp. 21-30.

elementlarini belgilaymiz va to'plamni a element yaratgan ekvivalentlik sinfi deb ataymiz. Ekvivalentlik sinfining ixtiyoriy elementi shu sinfning vakili deyiladi.

5.14-misol. Z-butun sonlar to'plamida 3 modul bo'yicha taqqoslash munosabati berilgan bo'lsin, u holda $\bar{0}=\{3z\ /z\in Z\}$ $\bar{1}=\{3z+1/z\in Z\}$ $\bar{2}=\{3z+2\ /z\in Z\}$. Bu ekvivalentlik sinflari 3 modul bo'yicha chegirmalar sinflari deyiladi.

5.15-ta'rif. Bo'sh bo'lmagan ixtiyoriy R ekvivalentlik munosabati berilgan bo'lsin, u holda shu R ekvivalentlik munosabati bo'yicha aniqlangan barcha ekvivalent sinflari to'plami A to'plamning R ekvivalentlik munosabati bo'yicha faktor- to'plami deyiladi.

Yuqoridagi 5.18-misolda $\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$ to'plam, ya'ni 3 modul bo'yicha olingan barcha chegirmalar sinflari to'plami faktor to'plamdir. A to'plamning R ekvivalentlik munosabati bo'yicha faktor to'plami $A/_R$ orqali belgilanadi.

5.16-ta'rif. A to'plamning bo'sh bo'lmagan to'plamostilaridan tuzilgan $B=\{A_\alpha\ /\alpha\in\Omega\}$ to'plam berilgan bo'lsin. Agar B ixtiyoriy ikkita elementining kesishmasi bo'sh to'plmadan iborat bo'lib, B ning barcha elementlarining yig'indisi A ga teng bo'lsa, u holda B to'plam A to'plamning bo'laklangani deyiladi.

5.17–teorema. A to'plamda berilgan har bir R ekvivalentlik munosabati uchun $A/_R$ faktor to'plam A to'plamning bo'laklanganidir. Aksincha, B to'plam A ning bo'laklangani bo'lsa, u holda A to'plamda shunday ~ ekvivalentlik munosabat mavjud bo'lib, A/~=V bo'ladi.

*S.D.Malik, John N.Mordeson, M.K.Sen, Fundamentals of Abstract Algebra. pp. 21-30.

Isboti. Haqiqatdan A/R A ning R ekvivalentlik munosabati bo'yicha faktor to'plami bo'lsin. $\forall \bar{a}, \bar{b} \in A/R$ elementlar uchun $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \varnothing$ deb faraz qilaylik, u holda $\exists c \in \bar{a} \cap \bar{b}$. Demak, cRa va cRb. Endi R ekvivalentlik munosabati tranzitiv munosabatligini hisobga olsak aRb, ya'ni $\bar{a} = \bar{b}$ bo'ladi. A to'plamning har bir elementi, o'zi aniqlagan ekvivalentlik sinfida yotishini, eslasak A to'plamning R munosabat barcha ekvivalentlik sinflari yig'indisiga tengligi kelib chiqadi. SHunday qilib A/R - A ning bo'laklanganidir.

$B = \{A_\alpha \ /\alpha \in \Omega\}$- to'plam A ning bo'laklangani bo'lsin. A to'plamning ixtiyotiy ikkita elementi A_α larning faqat bittasigagina tegishli bo'lsa, bu elementlar ~ munosabatda deymiz va $a \sim b$ belgilaymiz, u holda $\forall a \in A$ uchun $a \sim a$ bo'lishi ravshan, chunki a faqat bitta A_α gagina tegishli. YA'ni ~ refleksiv munosabardir.

Faraz qilaylik $a \sim b$, ya'ni a, b lar A_α larning faqat biriga tegishli bo'lsin. Aniqlik uchun $a,b \in A_\alpha^{'}$ bo'lsin, u holda b, a lar ham $A_\alpha^{'}$ ga tegishli, demak $b \sim a$ bo'ladi. Demak, ~ simmetrik munosabat bo'lar ekan.

$a \sim b$ va $b \sim c$ bo'lsin. YAna aniqlik uchun $a,b \in A_\alpha^{'}$ deylik, u holda $b \sim c$ bo'lgani uchun a, b, c lar ham faqat $A_\alpha^{'}$ to'plamgagia tegishli, demak a, c lar ham shu $A_\alpha^{'}$ gagina tegishli, ya'ni $a \sim c$ bo'ladi. Bu esa ~ munosabatning tranzitivligidir.

Shunday qilib ~ munosabat A to'plamda aniqlangan ekvivalentlik munosabati, A_α lar esa ~ ekvivalentlik munosabati bo'yicha aniqlangan ekvivalentlik sinflari ekan.

Takrorlash uchun savollar:

*S.D.Malik, John N.Mordeson, M.K.Sen, Fundamentals of Abstract Algebra. pp. 21-30.

1. Tartiblangan juftlik nima?
2. Tartiblangan juftliklar qachon teng bo'ladi?
3. To'plamlarning to'g'ri (Dekart) ko'paytmasi nima?
4. Tartiblangan n lik qanday hosil qilinadi?
5. Binar munosabatga ta'rif bering. Misollar keltiring.
6. Binar munosabatning aniqlanish sohasiga misol keltiring.
7. Binar munosabatning o'zgarish sohasiga ta'rif bering.
8. Binar munosabat inversiyai qanday xosil qilinadi?
9. Binar munosabatlar kompozisiyasini misol yordamida tushuntiring.
10. Refleksiv binar munosabatni ta'riflang va misol keltiring.
11. Simmetrik binar munosabatni ta'riflang va misol keltiring.
12. Tranzitiv binar munosabatni ta'riflang va misol keltiring.
13. Ekvivalentlik binar munosabatini ta'riflang va misol keltiring.
14. To'plamni bo'laklash deganda nimani tushunasiz?
15. Faktor-to'plamni tushuntiring.

Foydalaniladigan adabiyotlar ro'yxati

Asosiy adabiyotlar:

1. Malik D.S., Mordeson J.N., Sen M.K. Fundamental of abstract algebra. WCB McGrew-Hill, 1997.
2. Martyn R. Dixon, Leonid A. Kurdachenko, Igor Ya. Subbotin, "ALGEBRA AND NUMBER THEORY" 2010.
3. Кострикин А.М. Введение в алгебру.- М.- «Мир».- 1977.
4. Под ред. Кострикина, Сборник задач по алгебре, М.Наука, 1986.

*S.D.Malik, John N.Mordeson, M.K.Sen, Fundamentals of Abstract Algebra. pp. 21-30.

5. Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.
6. Курош А.Г. Олий алгебра курси, Тошкент, «Ўқитувчи». 1975й.
7. Гельфанд И.М. Чизиқли алгебрадан лекциялар. «Олий ва ўрта мактаб». 1964.
8. Р.Н.Назаров, Б.Т. Тошпўлатов, А.Д.Дусумбетов, Алгебра ва сонлар назарияси 1 қисм, 2 қисм, 1993й., 1995й.
9. A.Yunusov , D.Yunusova , Algebra va sonlar nazariyasi. Modul texnologiyasi asosida tuzilgan musol va mashqlar to'plami. O'quv qo'llanma. 2009.

Qo'shimcha adabiyotlar:

1. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре, М., "Наука"1984г.
2. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре, М.: Наука, 1977 г.
3. Поскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 1978г.
4. Ламбек И. Кольца и модули.- М.- «Мир».- 1971.
5. Херстейн. Некоммутативные кольца. М.- «Мир».- 1967.
6. Vilnis Detlovs, Karlis Podnieks, Introduction to Mathematical Logic. University of Latvia. Version released: August 25, 2014.
7. А.Юнусов , Д.Юнусова, М.Маматқулова, Г.Артикова, Модул технологияси асосида тайёрланган мустақил ишлар тўплами. 1−3−қисмлар, 2010.
8. Скорняков Л.Ф. Элементи обшей алгебри. М., 1983 г.
9. Петрова В.Т. лексия по алгебре и геометрии. Ч.1,2. Москва,1999г.
10. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari. T.,

*S.D.Malik, John N.Mordeson, M.K.Sen, Fundamentals of Abstract Algebra. pp. 21-30.

"Yangi asr avlodi". 2006.
11. Yunusov A., Yunusova D. Sonli sistemalar. T., «Moliya–iqtisod», 2008.
12. Мазуров В.Д. и др. Краткий конспект курса висшей алгебри.

Elektron ta'lim resurslari

1. www.Ziyo.Net
2. http://vilenin.narod.ru/Mm/Books/
3. http://www.allmath.ru/
4. http://www.pedagog.uz/
5. http://www.ziyonet.uz/
6. http://window.edu.ru/window/
7. http://lib.mexmat.ru;
8. http://www.mcce.ru,
9. http://lib.mexmat.ru
10. http://techlibrary.ru;

*S.D.Malik, John N.Mordeson, M.K.Sen, Fundamentals of Abstract Algebra. pp. 21-30.