Predikatlar. Kvantorlar. Predikatlar algebrasining formulasi va uning tadbiqi

Reja:

- Predikat.
- Predikatlar ustida mantiq amallari.
- Kvantorlar.
- Predikatli formulalar, turlari.
- Teorema va uning turlari.
- Matematik tasdiqlarni predikatlar tilida yozish.

- **Maqsadi:**Predikat tushunchasi, predikatlar ustida mantiq amallari, kvantorlar, predikatli formulalar, turlari, teorema va uning turlari, Matematik tasdiqlarni predikatlar tilida yozish haqida bilimlar berish, tasavvurlar hosil qilish.

Predikatlar mantiqining asosiy tushunchalaridan biri predikat tushunchasi bilan tanishib chiqamiz. Birorta bo'sh bo'lmagan M to'plam berilgan bo'lsin. M to'plamning a elementi haqida aytilgan tasdiqni R(a) orqali belgilaymiz. Misol uchun N – natural sonlar to'plami R(a) «a-tub son» degan tasdiq bo'lsin, u holda

R(1)-«1-tub son»- yolg'on mulohaza

R(2)-«2-tub son»- rost mulohaza

R(3)-«3-tub son»- rost mulohaza

R(4)-«4-tub son»- yolg'on mulohaza va hokazo mulohazalarga ega bo'lamiz. Shunday qilib, M to'plamning a elementi haqida aytilgan tasdiq a ning o'rniga M ning aniq bitta elementini qo'ysak mulohaza bo'lar ekan. Bunday tasdiqlarni bir o'zgaruvchili mulohazaviy formula yoki bir o'zgaruvchili predikat deb ataymiz. Shunga o'xshash ikki, uch o'zgaruvchili predikat tushunchalari kiritilishi mumkin.

Yuqoridagidek n ta $x_1, \ldots, x_n$ o'zgaruvchilarga bog'liq R $(x_1, \ldots, x_n)$-tasdiq berilgan bo'lsin. U holda $x_1, \ldots, x_n$ o'zgaruvchilarning mazmunga ega bo'ladigan qiymatlar to'plami, shu o'zgaruvchilarning yo'l qo'yiladigan qiymatlari sohasi deyiladi. Agar $R(x_1,\ldots,x_n)$ tasdiq $x_1,\ldots,x_n$ o'zgaruvchilarning yo'l qo'yilishi mumkin bo'lgan har qanday qiymatlarida mulohazaga aylansa, n- o'zgaruvchili predikat yoki n o'zgaruvchili mulohazaviy formula deyiladi. Bu erda n - 0, 1, 2 va hokazo manfiy bo'lmagan butun qiymatlar qabul qiladi. 0- o'rinli predikat sifatida mulohaza tushuniladi.

3.1-misol. Natural sonlar to'plamidaR (a, b) –predikat $a \geq b$ tengsizlikni bildirsin, u holda R(1, 0) = 1, R(1, 2) = 0,…,R(2, 1) = 1, R(2, 2) = 1, R(2, 3) = 0 va hokazo bo'lishini tushunish qiyin emas.

Predikatlarni P, Q yoki R(x), R(x, u), A(x, u, z) ko'rinishida belgilashni kelishib olamiz.

Bir o'rinli predikatlar bilan to'liqroq tanishib chiqamiz. Predikatlar ustida ham mulohazalar ustida bajarilgan $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ amallarni kiritishimiz mumkin.

3.2-ta'rif. $M \neq \varnothing$ to'plamda aniqlangan bir o'rinli R(x) - predikat berilgan bo'lsin, u holda R(x) - predikatning inkori deb har qanday $x \in M$ element uchun R(x)-predikat rost bo'lganda yolg'on bo'ladigan; R(x) yolg'on bo'lganda rost bo’ladigan $\rceil$ R(x) predikatga aytiladi. Ya’ni, M ning ixtiyoriy elementi uchun ($\rceil$R)(x) = $\rceil$(R(x)) tenglik o’rinli bo’ladi.

Xuddi shunday $M \neq \varnothing$ to’plamda aniqlangan P(x) va Q(x) bir o’rinli predikatlar uchun $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ amallari quyidagi tengliklar yordamida aniqlanadi:

$(R\wedge Q)(x) = R(x) \wedge Q(x);$

$(R\vee Q)(x) = R(x) \vee Q(x);$

$(R\rightarrow Q)(x) = R(x) \rightarrow Q(x);$

$(R\leftrightarrow Q)(x) = R(x) \leftrightarrow Q(x).$

3.3-misol.N – naturalsonlarto’plamida aniqlanganR(x)-«x-toqson»; Q(x)-«x birorta naturalsonningkvadratiga teng»-predikatlarniqaraylik. Uholda x=1, 4, 5, 9 qiymatlaruchunR$\wedge$Q, R$\vee$Qpredikatlarningqiymatlariquyidagicha bo’ladi:

$(R\wedge Q)(1) = R(1) \wedge Q(1) = 1 \wedge 1 = 1$

$(R\wedge Q)(2) = R(2) \wedge Q(2) = 0 \wedge 0 = 0$

$(R\wedge Q)(3) = R(3) \wedge Q(3) = 1 \wedge 0 = 0$

$(R\wedge Q)(5) = R(5) \wedge Q(5) = 1 \wedge 0 = 0$

$(R\wedge Q)(9) = R(9) \wedge Q(9) = 1 \wedge 1 = 1$

$(R\vee Q)(1) = R(1) \vee Q(1) = 1 \vee 1 = 1$

$(R\vee Q)(2) = R(2) \vee Q(2) = 0 \vee 0 = 0$

$(R\vee Q)(3) = R(3) \vee Q(3) = 1 \vee 0 = 1$

$(R \vee Q)(5) = R(5) \vee Q(5) = 1 \vee 0 = 1$

$(R \vee Q)(9) = R(9) \vee Q(9) = 1 \vee 1 = 1$

Shunga o'xshash $R \rightarrow Q$, $R \leftrightarrow Q$, $\rceil R$, $\rceil Q$ predikatlarningqiymatlarinihisoblabchiqishmumkin.

3.4-ta'rif. $M \neq \varnothing$ to'plamda aniqlanganR(x) predikatberilganbo'lsin, uholda R(x) predikatnirostmulohazaga aylantiradigan x ningMto'plamga tegishlibarcha elementlarini $E_r$orqalibelgilaymiz. E_r-R(x) predikatningrostliksohasideyiladi.

Rostliksohasiquyidagi xossalarga ega.

$1^{\circ}.\quad E_{\bar{p}} = M \setminus E_p$

$2^{\circ}.\quad E_{p \wedge q} = E_p \cap E_q$

$3^{\circ}.\quad E_{p \vee q} = E_p \cup E_q$

$4^{\circ}.\quad E_{p \rightarrow q} = E_{\bar{p}} \cup E_q$

M to'plamda aniqlangan bir o'zgaruvchili R(x)-predikat berilgan bo'lsin. U holda $\forall x R(x)$ ifoda, M to'plamning barcha elementlari uchun R(x) rost bo'lganda rost, M to'plamning kamida bitta x_0 elementi uchun $R(x_0)$ yolg'on bo'lganda yolg'on bo'ladigan mulohazadir. Bu erdagi $\forall$ belgi umumiylik kvantorini bildiradi.

Endi umumiylik kvantorining ko'p o'zgaruvchili predikatlarga qo'llanilishi bilan tanishib chiqamiz. M to'plamda aniqlangan $R(x_1,\ldots,x_n)$ predikat berilgan bo'lsin. U holda $\forall x_1 R(x_1,\ldots,x_n)$-(n-1) o'zgaruvchili predikatdir. Haqiqatdan $x_2,\ldots,x_n$ lar o'rniga M to'plamning $a_2,\ldots,a_{n-1}$ elementlarini qo'ysak, $\forall x_1 R(x_1,a_2,\ldots,a_{n-1})$ - mulohazaga ega bo'lamiz. Bu mulohaza yo rost, yo yolg'on qiymatni qabul qiladi.

3.5-misol. Natural sonlar to'plamida aniqlangan «x⋮u», ya'ni, «x natural son u natural songa qoldiqsiz bo'linadi» degan predikatni R(x,u) - deb belgilaylik. U holda $\forall x R(x,u)$ - ifoda ixtiyoriy natual son u natural songa bo'linadi, degan bir o'zgaruvchili predikatni bildiradi. Agar u=1 bo'lsa, $\forall x R(x,1) = 1$, u = 2, 3, … bo'lsa, $\forall x R(x,2) = 0$, $\forall x R(x,3) = 0$,… bo'ladi.

Kelgusida $\forall x_1 R(x_1,\ldots,x_n)$ ifoda «barcha x_1 lar uchun $R(x_1,\ldots,x_n)$», yoki «ixtiyoriy x_1 uchun $R(x_1,\ldots,x_n)$» deb o'qiladi. $\forall x_1 R(x_1,\ldots,x_n)$ ifodadagi x_1 o'zgaruvchi bog'liq o'zgaruvchi, $x_2,\ldots,x_n$ o'zgaruvchilar erkin o'zgaruvchilar deyiladi.

YAna bitta kvantor bilan tanishib chiqamiz. M to'plamda aniqlangan bir o'zgaruvchili R(x) predikat berilgan bo'lsin. U holda $\exists x R(x)$ mulohaza bo'lib, M to'plamning kamida bitta x_0 elementi uchun $R(x_0)$ rost bo'lganda rost qolgan hollarda, ya'ni M to'plamning barcha elementlari uchun R(x)- yolg'on bo'lganda yolg'on bo'ladigan mulohazadir.

M to'plamda aniqlangan $R(x_1,\ldots,x_n)$ predikat berilgan bo'lsin, u holda $\exists x_1 R(x_1,\ldots,x_n)$- ifoda n-1 o'zgaruvchili predikat bo'lishini ko'rib chiqamiz. Haqiqatdan, $x_2,\ldots,x_n$ o'zgaruvchilar M to'plamdan olingan $a_2,\ldots,a_{n-1}$ qiymatlarni qabul qilsin, u holda $\exists x_1 R(x_1,a_2,\ldots,a_{n-1})$ ifodalar x_1 ning M to'plamdan olingan kamida bitta qiymatida rost bo'lsa rost, aks holda yolg'on bo'ladigan mulohazadir. Ko'rinib turibdiki, $\exists x_1 R(x_1,\ldots,x_n)$ - predikat $x_2,\ldots,x_n$ o'zgaruvchilarning M dagi qiymatlari bilan aniqlanib x_1 ga bog'liq emas ekan. Ya'ni n-1 o'zgaruvchili predikat ekan.

$\exists x_1 R(x_1,\ldots,x_n)$ - ifoda «Shunday x_1 mavjud-ki, $R(x_1,\ldots,x_n)$ bo'ladi» deb o'qiladi. $\exists$ - simvol esa mavjudlik kvantori deyiladi.

3.6-misol. Natural sonlar to'plamida aniqlangan «$x^2+u^2=16$» - ikki o'zgaruvchili R(x, u) predikat berilgan bo'lsin, u holda:

$\exists xR(x, 1) = 0$; $\exists xR(x, 2) = 0$; $\exists xR(x, 3) = 0$;

$\exists xR(x, 4) = 1$; $\exists xR(x, 5) = 0$,…, va hokazo.

$\exists x_1R(x_1,\ldots,x_n)$ predikatda x_1 o'zgaruvchibog'liqo'zgaruvchi, qolgan $x_2,\ldots,x_n$larerkino'zgaruvchilardeyiladi.

Amaliyotda predikatlarga kvantorlarketma-ketbirnecha marta qo'llanishhollariuchraydi. Masalan, $\forall x\exists uR(x,u)$ ko'rinishdagimulohazani$\forall x(\exists uR(x, u))$ debtushunishkerak.

3.7-misol.R(x,u)- butunsonlarto'plami Z da aniqlangan «x+u>0» mazmunidagipredikatbo'lsin, uholda

$\forall x\forall uR(x,u)$- «ixtiyoriyikkita butunsonyig'inidisimusbatbo'ladi» - yolg'onmulohaza;

$\forall x\exists uR(x,u)$-«harqandaybutunson x uchunshundayubutunsonmavjudbo'libulraningyig'indisimusbat» - rostmulohaza;

$\exists x\forall uR(x,u)$-«shunday x butunsonmavjudbo'lib, uningixtiyoriyubutunsonbilanyig'idisimusbat» - yolg'onmulohaza;

$\exists x\exists uR(x,u)$-«shunday x va ubutunsonlarmavjud-ki, ularningyig'indisimusbat» - rostmulohaza bo'ladi.

Bizga R(x) R(x, u)…Q($x_1,\ldots,x_n$) A, Vko'rinishdagipredikatlarberilganbo'lsin. Harqandayn(n=0, 1, 2) o'rinlipredikatnielementarformuladeb ataymiz. Xususanharqandaymulohaza hamelementarformuladir.

3.8-ta'rif. 1) harqandayelementarformula predikatlarmantiqiningformulasidir;

2) agar A va Vlarpredikatlarmantiqiningformulalaribo'lsa, uholda ($\rceil$ A), (A $\wedge$V), (A $\vee$V), (A $\leftrightarrow$V), ($\exists$xA), ($\forall$xA) ifodalarhampredikatlarmantiqiningformulalaridir;

3) boshqa usulbilanpredikatlarmantiqiningformulalarinihosilqilibbo'lmaydi.

Formula ifodasiniixchamlashtirishtartibimulohazalar algebrasidek, ya'nitashqiqavslarnitashlabyozamiz, qolganqavslar amallarningbajarilishtartibiga mosravishda tashlabyoziladi. Undantashqarihardoim avvalkvantorbilanbog'lashbajariladidebhisoblaymiz, masalan, ($\forall$xA(x)) $\rightarrow$Vko'rinishdagiforlulani$\forall$xA(x) $\rightarrow$Vko'rinishda yozishmumkin.

Predikatlarmantiqining A formulasitarkibidagielementarformulalarni, harqandaypredikatlarbilan almashtirishnatijasida aynanrostpredikathosilbo'lsabundayformula <u>aynanrostformula</u>yoki<u>mantiqqonun</u>yo<u>umumqiymatliformula</u>deyiladi. Predikatlar algebrasiningikkita formulasiularga kirganbarcha predikatlarniharqandaypredikatlarbilan almashtirganimizda bir xilqiymatlarqabulqilsalar, ular<u>tengkuchli</u>deyiladi. A va Vformulalartengkuchliligi A $\equiv$Vko'rinishida belgilanadi.

Mulohazalar algebrasidagi asosiytengkuchliliklarda mulohazalarnipredikatlarmantiqiningformulalaribilan almashtiribpredikatlarmantiqiningtengkuchliformulalarinihosilqilishimizmumkin, masalan, $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$ tengkuchlilikdagi A, Vmulohazalarnipredikatlarmantiqiningmosravishda A va Vformulalaribilan almashtirsak $\overline{\mathcal{A}} \wedge \overline{\mathcal{B}} \equiv \overline{\mathcal{A}} \vee \overline{\mathcal{B}}$ tengkuchlilikka ega bo'lamiz, xususan $\overline{F(x) \wedge F(y)} \equiv \overline{F(x)} \vee \overline{F(y)}$

Butengkuchliliklardantashqaripredikatlarmantiqningo'zigagina xosbo'lgantengkuchliformulalarhambor. Shunday teng kuchli formulalar namunalarini keltiramiz:

1. $\rceil(\forall x R(x)) \equiv \exists x \rceil R(x)$.
2. $\rceil(\exists x R(x)) \equiv \forall x \rceil R(x)$.
3. $\forall x R(x) \equiv \rceil(\exists x \rceil R(x))$.
4. $\exists x R(x) \equiv \rceil(\forall x \rceil R(x))$.
5. $\exists x A(x) \vee \exists x V(x) \equiv \exists x(A(x) \vee V(x))$.
6. $\forall x A(x) \wedge \forall x V(x) \equiv \forall(x)(A(x) \wedge V(x))$.

3.9-misol. $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \equiv \forall x(P(x) \wedge Q(x))$ tengkuchlilikniisbotlang.

AgarR(x) va Q(x) predikatlarbirvaqtda aynanrostbo'lsalar, uholda

$R(x) \wedge Q(x)$ predikatham aynanrostbo'ladi. Bundanesa

$\forall x R(x)$, $\forall x Q(x)$, $\forall x(R(x) \wedge Q(x))$ mulohazalarningrostqiymatqabulqilishikelibchiqadi. Ya'nibuholda tengkuchlilikningikkala tomoni «rost» qiymatqabulqiladi.

FarazqilamizberilganR(x) va Q(x) predikatlarningkamida bittasimasalan, R(x) aynanrostbo'lmasin. Uholda $R(x) \wedge Q(x)$ predikatham aynanrostbo'lmaydi, bundanesa $\forall x R(x)$, $\forall x R(x) \wedge \forall x Q(x)$, $\forall x(R(x) \wedge Q(x))$

mulohazalaryolg'onbo'ladi. YA'nibuholda hamtengkuchlilikningikkala tomonibir xil (yolg'on) qiymatqabulqiladi.

Mulohazalar algebarsidagidekpredikatlarmantiqiningtengkuchliformulalarida «≡» tengkuchlilikbelgisini «⇔» ekvivalensiya amalibilan almashtirsak, aynanrostformulalar, ya’nimantiqqonunlarihosilbo’ladi. Masalan, $\rceil(\forall x R(x)) \Leftrightarrow \exists x \rceil R(x)$; $\rceil(\exists x R(x)) \Leftrightarrow \forall x \rceil R(x)$- formulalarmantiqqonunlardir.

Matematikmantiqelementlarimavzuningo’qitilishidanqo’yilganasosiymaqsad– matematikmantiqfaniningalgebra, geometriya, matematiktahlilkabibirqanchamatematikfanlargatadbiqiningengsoddako’rinishlarid anbiri-matematikjumlalar (aksioma, teorema, ta’rif,...)larnimulohazalarvapredikatlaralgebralaritiliorqaliifodalashgao’quvchilarni o’rgatishdir.

Predikatliformulalarga kvantorlarniqo’llashnatijasida hosilqilinganmulohazaviyformulalaryordamida ta’rif, teoremalarniifodalashga birnechta misollarko’ribchiqamiz.

3.10-misol. Naturalsonlarto’plamida qaralgantubsontushunchasiuchunquyidagiformulanikeltirishmumkin :

$(\forall n \in N)((n \text{ - tubson}) \Leftrightarrow (n \neq 1 \wedge n \vdots p \Rightarrow p=1 \vee p=n))$.

Yokiquyidagibelgilashlarnikiritsak :

A(x) – «x-tubson», V(x) – «x≠1», S(x) –« x:p», D(x) – «x=1», P(x) – «x=p» , u xolda yuqoridagiformulaniquyidagicha ifodalashmumkin :

$(\forall x \in N)\ (A(x) \Leftrightarrow B(x) \wedge C(x) \Rightarrow D(x) \vee P(x))$.

3.11-misol. Sonli ketma-ketlik limitini ifodalovchi formula :

$(a = \lim a_n) \Leftrightarrow \forall(\varepsilon > 0 \wedge \varepsilon \in R)\ \exists(n_0 \in N)\ \forall(n \in N)\ ((n \geq n_0) \Rightarrow |a_n - a < \varepsilon)$.

$n \to \infty$

3.12-misol. Monoton o'suvchi funksiyani ifodalovchi formula:

(E to'plamdaaniqlangan $u = f(x)$ funksiya–o'suvchi) $\Leftrightarrow$

$\forall(x_1 \in E)\ \forall(x_2 \in E)\ ((x_1 < x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$.

Teorema va uningturlari. Harqandayteorema shartva natijadaniborat. Agar A teoremaningshartiVesa uninghulosasibo'lsa, uholda teoremani $A \Rightarrow V$ (1) ko'rinishda yozishimizmumkin.

$V \Rightarrow A$ (2) teoremaga (1) teoremaga teskariteorema deyiladi.

$\rceil A \Rightarrow \rceil V$ (3) teoremaga (1) teoremaga qarama-qarshiteorema deyiladi.

$\rceil V \Rightarrow \rceil A$ (4) teoremaga berilgan (1) teoremaningteskarisiga qarama-qarshi (yokiberilgan (1) teoremaningqarama-qarshisiga teskari) teorema deyiladi.

Rostlikjadvallari orqali $A \Rightarrow V \equiv \rceil V \Rightarrow \rceil A$ va $V \Rightarrow A \equiv \rceil A \Rightarrow \rceil V$

tengkuchliliklarniisbotqilib, quyidagi xulosanichiqaramiz:

$A \Rightarrow V$teorema o'rniga $\rceil V \Rightarrow \rceil A$ teoremaniisbotqilib, $A \Rightarrow V$rost, ya'nito'g'rideb aytishimizmumkin.

Isbottushunchasi. A_1, A_2, ... , A_n (1) mulohazalarberilganbo'lib, quyidagishartlarbajarilsa:

1. A_1 - aksioma yoki avvalisbotqilinganmulohaza bo'lsin.
2. Harbir A_i, $i \geq 2$ yokio'zidan oldingimulohazadankeltiribchiqarilsin, yoki avvalisbotqilinganmulohaza bo'lsin.

Uholda (1) ketma-ketliknibiz $A_n$mulohazaningisbotideymiz.

Isbotqilishusullari.Isbotqilishusullarinishartliravishda ikkiturga bo’lishmumkin:

1. Bevosita - to’g’ridan-to’g’riisbotqilish.

2. Mantiqqonunlari (isbotqilishsxemalari) orqaliisbotqilish.

Teorema shartiningrostligidan, xulosaningrostliginito’g’ridan-to’g’rikeltiribchiqarishnibevosita isbotqilishdebtushunamiz. Mantiqqonunlari orqaliisbotqilishga, teskarisidanisbotqilish, uchinchisiniinkorqilishqonuni orqaliisbotqilish, induksiyayordamida isbotqilishva h.k.larkiradi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Predikatga ta’rif bering.
2. Predikatning qiymatlar sohasi, rostlik sohasi nima? Misollar yordamida tushuntiring
3. Predikatlar diz’yunksiyasi, kon’yunksiyasi, implikasiyasi, ekvivalensiyasiga misollar keltiring.
4. Mantiq amallarini qo’llash natijasida hosil bo’ladigan predikat o’zgaruvchilarining soni haqida nima deyish mumkin?
5. Umumiylik va mavjudlik kvantorlarini qo’llashga misollar keltiring.
6. Predikatli formula qanday hosil qilinadi?
7. Predikatli formulaning qanday turlarini bilasiz?

8. Teoremaning qanday turlarini bilasiz?
9. Teoremalarni isbotlash usullari qanday?
10. Matematik tasdiqlarni predikatlar tilida ifodalashga misol keltiring.

Foydalaniladigan adabiyotlar ro'yxati

Asosiy adabiyotlar:

1. Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.
2. Р.Н.Назаров, Б.Т. Тошпўлатов, А.Д.Дусумбетов, Алгебра ва сонлар назарияси 1 қисм, 2 қисм, 1993й., 1995й.
3. A.Yunusov , D.Yunusova , Algebra va sonlar nazariyasi. Modul texnologiyasi asosida tuzilgan musol va mashqlar to'plami. O'quv qo'llanma. 2009.

Qo'shimcha adabiyotlar:

1. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari. T., "Yangi asr avlodi". 2006.

2. А.Юнусов , Д.Юнусова, М.Маматқулова, Г.Артикова, Модул технологияси асосида тайёрланган мустақил ишлар тўплами. 1−3−қисмлар, 2010.

3. Скорняков Л.Ф. Элементи обшей алгебри. М., 1983 г.

4. Vilnis Detlovs,Karlis Podnieks,Introduction to MathematicalLogic. University of Latvia. Version released: August 25, 2014.

Elektron ta'lim resurslari

1. www.Ziyo.Net

2. http://vilenin.narod.ru/Mm/Books/

3. http://www.allmath.ru/

4. http://www.pedagog.uz/

5. http://www.ziyonet.uz/

6. http://window.edu.ru/window/

7. http://lib.mexmat.ru;

8. http://www.mcce.ru,

9. http://lib.mexmat.ru

10. http://techlibrary.ru;