A.A. ABDUMALIKOV, H.M. SATTOROV

MEXANIKA

TOSHKENT

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA
O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON
MILLIY UNIVERSITETI

**Mirzo Ulug'bek nomidagi
O'zbekiston Milliy universitetining
100 yilligiga bag'ishlanadi**

A. A. ABDUMALIKOV, H.M.SATTOROV

MEXANIKA

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan 5140200 – "Fizika", 5140400 – "Astronomiya" ta'lim yo'nalishlari talabalari uchun o'quv qo'llanma sifatida tavsiya etilgan

Toshkent - 2017

UO'K: 531
KBK 22.2 ya 73
A 15

A.A.Abdumalikov, H.M.Sattorov. Mexanika. (O'quv qo'llanma). – T.: "Barkamol fayz media", 2017, 288 bet.

Ushbu o'quv qo'llanma Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan universitetlar fizika va astronomiya ta'lim yo'nalishlari uchun tasdiqlangan o'quv dasturiga mos holda yozilgan. Unda moddiy nuqta va qattiq jism kinematikasi va dinamikasi, kuch va energiya tushunchalari, saqlanish qonunlari, suyuqlik kinematikasi va dinamikasi qonunlari keng va atroflicha ko'rib chiqilgan hamda ularning tatbiqlariga katta e'tibor berilgan. Bundan tashqari, mavzularni mustahkamlash maqsadida har bir bobning oxirida nazorat uchun savollar va shu bobga tegishli masalalar joylashtirilgan. O'quv qo'llanmada fizikani o'rganishda muhim hisoblangan matematik apparatga ham keng o'rin berilgan. Qo'llanmada keltirilgan rasmlar, jadvallar va ilovalar uning matnini to'ldiradi. Qo'llanma universitetlarning fizika va astronomiya ta'lim yo'nalishlarida tahsil olayotgan talabalar uchun mo'ljallangan. Undan pedagogika va boshqa oliy ta'lim muassasalari talabalari va o'qituvchilari ham foydalanishi mumkin.

UO'K: 531
KBK 22.2 ya 73

Taqrizchilar:

D.E.Nazirov – fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent;
O.Burxonho'jaev – texnika fanlari nomzodi, dotsent.

ISNB 978-9943-5143-2-4

1-bob

Fazo, vaqt, harakat

"Kuzatuv, mulohaza qilish va tajriba - ilmiy metodning tashkil qiluvchilaridir".

R. Feynman.

1.1 Mexanika va matematika. Bilishning ilmiy usuli

Harakatni boshqaruvchi obyektiv qonunlarni o'rnatishga urinish antik davrdayoq boshlangan edi. Ammo mexanikani fan sifatida yaratuvchisi Isaak Newton (1642-1727) tomonidan tajriba natijalarining tahlili, yangi fizik tushunchalar kiritish va ular o'rtasidagi mutanosiblikning qat'iy matematik asoslari o'rnatildi va matematika fanda yagona til hamda uning yutuqlarini insoniyat hamjamiyatining amaliy maqsadlarida qo'llashda qudratli vosita bo'lib qoldi.

Matematika fan tili sifatida ikki vazifani bajaradi. Birinchidan, matematik ifodalarning aniqligi fizik kattaliklarni universal usulda aniqlash imkonini berib, istalgan joydagi istalgan mutaxassis tomonidan bu kattalikning berilgan aniq qiymati, istalgan boshqa mutaxassis tomonidan bir xil ma'noda tushuniladi. Masalan, ilmiy oynoma orqali, biror jismning tajribada o'lchangan tezligi "sekundiga bir metr" ekanligi haqidagi xabar yoritilsa, bu ma'lumot barcha, shu sohadagi qiziquvchi kitobxonlar tomonidan, tezlik haqida $\mathbf{v} = dr/dt$ ko'rinishdagi aniq matematik ifoda borligidan, "sekundiga bir metr" nima ekanligi birday tushuniladi. Keyinroq, jismning harakat tezligi tushunchasini qat'iy, obyektiv aniqlash muammosi oliy matematikaning rivojlanishiga turtki bo'lgan.

Ikkinchidan, qandaydir hodisalar o'rtasidagi bog'lanishlarni matematik ifodalar orqali shakllantirish, ularni matematik tildan foydalanmasdan, faqat so'zlar vositasidan foydalanganda muqarrar yuzaga kelishi mumkin bo'lgan noto'g'ri va bir xil ma'noga ega bo'lmagan talqin qilishni bartaraf qiladi. Masalan, Aristotel harakat qonunini shunday ta'riflagan edi: jism harakatini doimiy tezlikda saqlab turish uchun unga biror bir kuch bilan ta'sir qilib turish kerak. Kundalik kuzatuvlar nuqtai nazaridan bir qarashda bunday da'vo o'rinlidek ko'rinadi. Haqiqatan ham, biror jismni gorizontal sirt bo'ylab qo'zg'atish uchun unga aniq bir kuchlanish bilan ta'sir qilish kerak. Shunga qaramasdan, zamonaviy mexanika nuqtai nazaridan bu yanglish da'vo va bu xato, o'sha davrda"kuch" tushunchasini qat'iy matematik aniqlash imkoni bo'lmaganligi sababidan faylasuflar va olimlar ongida (xususan, Aristotelning qadimiy dunyo olimlari orasidagi katta obro'si tufayli) ikki yarim ming yildan ortiq vaqt saqlanib kelgan. Bu xato faqatgina, har birimizga maktabdan ma'lum bo'lgan, Newton tomonidan kuch haqidagi zamonaviy, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ta'rif berilgach to'g'rilandi. Bundan, xususan, jismning doimiy tezlik bilan harakatlanishi uchun (tezlanish a nolga teng bo'lgan holda) tashqi kuchlar zarur emasligi kelib chiqadi, kundalik kuzatuvlar esa bu holda jismga qo'yilgan kuchlarning muvozanatda bo'lishidan dalolat beradi.

Boshqa tabiiy fanlar bilan solishtirganda, fizika, xususan, mexanika ko'p hollarda miqdoriy bayon etilishga yo'l qo'yadi va anchayin formallashtirilgan. Biroq barcha tabiiy fanlarda bo'lgani kabi, tayanch ma'lumotlar asosan tajriba natijalaridan kelib chiqishini ta'kidlash lozim. Shu bilan bir qatorda, tabiiy fanlarda asosiy tushunchalar (mexanikada ham) har qanday formallashtirilgan taqdirda ham, mutlaqo aksiomatik emas, balki insoniyat tajribasiga asoslangan bo'lib, hozirgi kundagi moddiy olamni bilishda erishilgan ma'lumotlarni (yutuqlarni) aks ettirishini ham yodda tutish kerak. Amalda ular o'rtasidagi miqdoriy munosabatlar mavjud bo'lgan tajriba natijalari orqali aniqlanadi.

Shunday qilib, matematika tabiatni tadqiq etishning qurollaridan birini beradi, lekin tabiiy fanlar o'rnini bosa olmaydi. (Bu holatni tushunmaslik "maktabda" - nafaqat maktab o'quvchilari o'rtasida yo'l qo'yiladigan xatolarning manbai bo'ladi.) Biroq tabiiy fanlarning yana bir prinsipial, matematik modellar chegarasidan chiquvchi xossasi mavjud, bu har qanday miqdoriy tavsifning

prinsipial noaniqligi, taqribiyligidir. Mexanika, fizika, kimyo va boshqa fanlarda birorta ham formulani mutlaq to'g'ri deb bo'lmaydi, u faqatgina ko'rsatilgan yoki ko'zda tutilgan qo'llanish chegarasi doirasidagina o'rinli bo'ladi. Shu bilan birga birorta ham tajribada aniqlangan kattalik, agar u qanday sharoitda va qanday aniqlik bilan o'lchanganligi ko'rsatilgan bo'lmasa, ma'noga ega bo'lmaydi.

1.2 Fazo va vaqt

"Harakat" deganda nimani tushunishimizni aniqlashga harakat qilib ko'ramiz. Umuman olganda bu tushuncha mutlaqo aniqlangan deb qaralsa ham bo'ladi, lekin biz shunday bir ta'rif berishimiz kerakki, u o'zida, birinchidan, mumkin bo'lgan harakatlarning turli xil xossalarini aniqlash usullarini ko'rsata oladigan bo'lsin, ikkinchidan, aniqlanadigan bu xossalarni umum qabul qilingan tilda, ya'ni matematik belgi va formulalar yordamida ifodalash imkonini bersin. Harakat to'g'risida yetarli darajada ommabop bo'lgan quyidagi ta'rif mavjud: harakat – bu vaqt o'tishi bilan jismning fazoda tutgan o'rnining nisbiy o'zgarishidir. Bunday ta'rifda, "fazo" va "vaqt" tushunchalari mutlaqo tabiiy va hech qanday maxsus, formal aniqlashtirish talab qilinmaydigan tushunchalar ekanligi oldindan nazarda tutilgandek ko'rinadi.

Amalda esa, bu tushunchalarning o'zi moddiy buyumlar va ular bilan sodir bo'layotgan voqealar orqali aniqlanishi mumkin ekan. Aytish mumkinki, harakat – kuzatilayotgan jismning boshqa jismlarga nisbatan ko'chishidir, ya'ni harakat bo'lishi uchun boshqa jismlarning mavjud bo'lishi shart. Shunday qilib, fazo moddiy obyektlarning joylashishi bilan beriladi. Vaqt esa, o'z navbatida, voqealarning ketma-ketligi orqali anglanadi. Agar hech narsa sodir bo'lmayotgan bo'lsa, vaqtning o'tishi ham bo'lmaydi. Oldimizga shunday savol qo'yamiz: hozirgi zamon tushunchasiga ko'ra bizning olamning evolutsiyasiga sabab bo'lgan "buyuk portlash" dan bir daqiqa oldin nima bo'lgan edi? Javob: agar bizning Koinot evolutsiyasi haqidagi tasavvurlarimiz to'g'ri bo'lsa, bu savol ma'noga ega emas, chunki ungacha uning o'zi bo'lmagan.

Biz uchun qandaydir ko'rish assotsiatsiyasi orqali tushuniladi-gan fazodan farqli o'laroq, vaqt – nisbatan abstraktroq, bizning hayotiy tajribamizga asoslangan tushuncha bo'lib, qaysiki, uning bir tomonga oqishidek fundamental xossasi haqida guvohlik beradi. Sabab - oqibat bog'lanish tushunchalari unga asoslangan.

Bunday paradoksal holat biror bir amaliy qiyinchilikka olib kelmaydi. Masala shundaki, biz fazo va vaqt uchun mantiqiy, bekam-ko'st ta'rifni shakllantira olmasakda, eng asosiy narsa, ya'ni har qanday hodisani o'rganish va tavsiflash uchun kerak bo'ladigan uning xossalarini aniqlash va o'lchash natijalarini matematik tilda taqdim qilish usullarini ko'rsatishimiz mumkin. Ta'rif kiritamiz: qandaydir kattalikni o'lchash – bu, shartli ravishda o'lchov birlik etaloni deb qabul qilingan bir jinsli kattalik bilan taqqoslashdir.

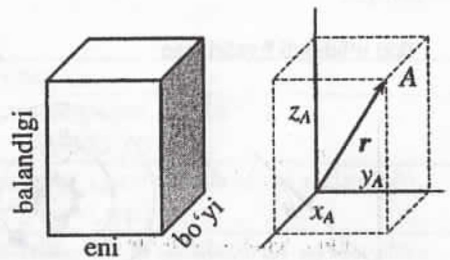
U holda, fazoni bir jismni ikkinchisidan ajratib turuvchi nimadir deb tasavvur qilsak, bu nimani bir jinsli to'g'ri chiziqli qattiq sterjen yordamida o'lchashimiz mumkin va uni fazodagi ixtiyoriy ikki jism o'rtasidagi masofaning etalon o'lchovi deb kelishamiz. Biz qabul qilgan etalon ko'rilayotgan jismlar orasidagi eng qisqa masofaga necha marta joylasha olishini o'lchab, bu masofani yoki boshqacha aytganda, uzunlikni, aniq sonlar ko'rinishida ifodalashimiz mumkin. Ushbu son bizni qiziqtirayotgan, etalon sterjenni tanlash bilan aniqlanadigan, "uzunlik birligi" dagi masofani ifodalaydi.

Uzoq yillar davomida uzunlik etaloni sifatida Fransiyada joylashgan Xalqaro o'lchovlar byurosida saqlanayotgan Platina va Iridiy qotishmasidan tayyorlangan maxsus sterjenda belgilangan ikki shtrix orasidagi, "metr" deb nom olgan, aniq bir masofa xizmat qilib keldi. Bu etalonning aniq nusxalari bir qator mamlakatlarda ham mavjud bo'lgan. Biroq hozir, zamonaviy fan va texnikaning oshib borgan talabini qoniqtirmaganligi va tashqi sharoitning o'zgarishiga o'ta sezgirligi sababli bu etalondan voz kechildi. Bugunga kelib, uzunlik etaloni sifatida, kripton kimyoviy elementining ichki holatini aniq bir o'zgarishidagi elektromagnit nurlanishning to'lqin uzunligi qabul qilingan. Amalda esa, uzunlik o'lchov birligi sifatida 1 metrdan foydalaniladi. Bu uzunlik birligiga yuqorida qayd qilingan etalon to'lqin uzunlikdan 1650763,73 tasi joylashadi.

Jismlar o'rtasidagi fazoviy intervallarni o'lchash usulini bilgan holda, ko'rsatilgan o'lchashlar yordamida tadqiq qilinishi mumkin

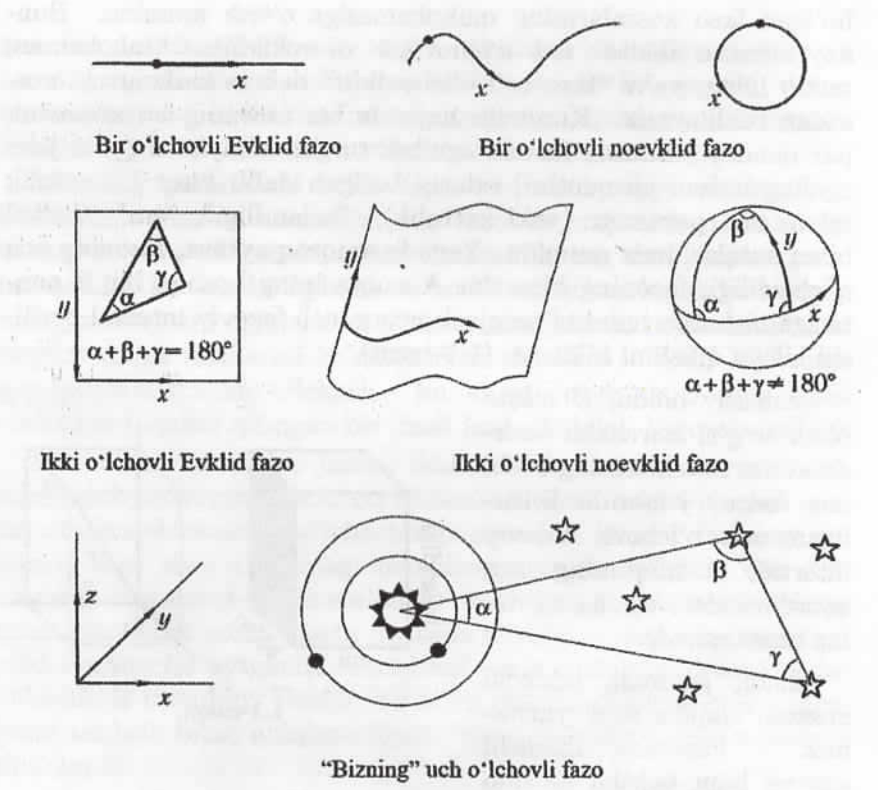
bo'lgan fazo xossalarining muhokamasiga o'tish mumkin. Bunday xossalar ikkita: uch o'lchovlilik va evklidlik. Muhokamani tartib bilan, ya'ni "fazo uch o'lchovlidir" deb ta'kidlanuvchi xossadan boshlaymiz. Kundalik hayotda biz fazoning bu xossasini, har qanday jismning fazoda egallab turgan vaziyatini (yoki jism egallagan fazo elementini) odatiy bo'lgan dalil, biror bir aniqlik bilan, uch parametr (yoki kattalik): "balandligi", "eni", "bo'yi" bilan aniqlashimiz mumkin. Yanada aniqroq aytilsa, fazoning uch o'lchovliligi, fazoning biror bir A nuqtasining boshqa bir B nuqtasiga nisbatan holatini aniqlash uchun uch fazoviy interval berilishi kifoya qilishini bildiradi (1.1-rasm).

Xususiy holda, B nuqta bilan to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasining boshi mos kelsa, yuqorida keltirilgan uch o'lchovli fazoviy interval, A nuqtaning mos koordinatalari x_A, y_A, z_A bilan mos tushadi.



1.1-rasm.

Endi, fazoning ikkinchi xossasi haqida so'z yuritamiz. Fazoning ikkinchi xossasi ham tajriba asosida aniqlanib, "bizning fazo Evklid fazodir" deb ta'kidlanadi, ya'ni unda bizga ma'lum bo'lgan evklid geometriyasidagi barcha teoremalar, masalan, Pifagor teoremasi yoki uchburchakning barcha burchaklari yig'indisi 180° ga tengligi haqidagi teoremalar o'rinlidir. Uch o'lchovlilik kabi fazoning bu xossasi ham yaqqol ko'rinib turgan va uni tasdiqlash uchun hech qanday o'lchashlarni talab qilmaydigan xossadir. Agar biz uch o'lchovli fazoning mumkin bo'lgan geometrik xossalarini emas, balki sodda, tasavvur qilish oson bo'ladigan ikki o'lchovli fazoning (masalan, istalgan jismning holatini ikki koordinata bilan aniqlanishi mumkin bo'lgan stol sirtini) xossalarini o'rganadigan bo'lsak, bu yaqqollik o'z tasdig'ini topmaydi (1.2-rasm). Stolning yassi sirtida Evklid geometriyasining barcha teoremalari o'z tasdig'ini topadi, shuning uchun, bunday ikki o'lchovli fazo ikki o'lchovli Evklid fazosi deb



1.2-rasm.

ataladi. Lekin ikki o'lchovli fazo faqatgina yassi bo'lmay, balki masalan, shar sirti kabi "egri" bo'lishi ham mumkin. Shar sirtida Evklid teoremalari o'rinli bo'lmaydi. Ushbu "noevklidlik" xossasi bevosita o'lchashlar orqali o'rnatilishi mumkin.

Agar ikki o'lchovli fazo egri (noevklid) bo'lsa, unda uch o'lchovli fazo shunday emasligiga qanday ishonch hosil qilish mumkin? Ikki o'lchovli fazoning egriligini, xususan, shar sirti egriligini biz uch o'lchovli fazoda turib idrok qilamiz. Xuddi shunday uch o'lchovli fazoning egriligini, biz uch o'lchovli fazoda turib tasavvur qila olmaydigan, to'rtinchi o'lchovda amalga oshiriladi. Biroq astronomik o'lchashlarning ko'rsatishicha, tadqiq qilish imkoniyati

bo'lgan masofalarda (bu milliard yorug'lik yili) olam fazosining egrilanishi kuzatilmaydi. Faqatgina bevosita yulduzlar yaqinidagina fazoning sezilarsiz lokal egrilanishlari mavjudligi haqida ko'rsatmalar bor. Shuning uchun, ushbu kitobda yoritilayotgan klassik mexanika doirasida fazo evklid ("egrilanmagan") deb qaraladi, ya'ni bu shunday fazoki, unda biz uchun odatiy bo'lgan Evklid geometriyasi teoremalari to'la bajariladi. Demak, ***bizning fazo uch o'lchovli va Evklid***. 1-jadvalda tabiatni tadqiq qilishda duch kelinadigan o'ziga xos fazoviy va vaqt masshtablari keltirilgan.

Bizni o'rab turgan olamning vaqt - fazoviy masshtabi.

1.1-jadval.

Fazo	Vaqt
Yulduzlar orasi 10^{16} m (yorug'lik yili)	Homosapiens, $3 \cdot 10^{12}$ s ($\sim$ 100000 yil)
Quyosh tizimi, 10^{11} m	Yerning Quyosh atrofida aylanishi, 10^7s ($\sim$1 yil)
Yer, 10^6 m	Yerning o'z o'qi atrofida aylanishi, 10^4 s ($\sim$1 sutka)
Inson, 1 m	Yurakning bir urishi, 1 s
Tirik to'qima, 10^{-6} m	Elektromagnit impulsning nerv tolasidan o'tishi, 10^{-1} s
Atom, 10^{-10} m	EHM da bir operatsiya vaqti, 10^{-9} s
Atom yadrosi, 10^{-15} m	Ba'zi bir elementar zarralar yashash vaqti, 10^{-23} s

Harakat, faqatgina fazoda emas, balki vaqtda ham yuz beradi. Fazo tushunchasini ta'riflash misolida shunga amin bo'ldikki, qandaydir dastlabki tushunchani tavsiflayotganda uni bekamiko'st aniqlash mumkin emas ekan, balki qandaydir bir etalon yordamida o'lchash mumkinligini ko'rsatish muhimroq ekan. Qadimda vaqt o'lchov birligi sifatida tabiatda muntazam qaytarilib turuvchi tabiat hodisasi olingan. Chunki, sikllar soni, takrorlanishlar soni vaqt o'lchovi uchun qulay va tabiiy usul hisoblanadi. Juda ko'p yuz yilliklar davomida hammaga ma'lum bo'lgan qum soatlari qo'llanilgan. Galilei tomonidan jismlarning harakat qonunlarini o'rganishda vaqt o'lchovi sifatida o'z tomirining urish pulsidan foydalanganligini kichik bir tabiiy fakt sifatida ta'kidlash mumkin. Fanning rivojlanishi va jamiyatning amaliy ehtiyojining oshishi natijasida har qanday soatni solishtirish mumkin bo'ladigan vaqtning yagona etaloniga zarurat tug'ilgan. Yaqin yillargacha yerning o'z o'qi atrofida aylanish davri bunday etalon vazifasini bajarib kelgan. Aniq aytadigan bo'lsak, vaqtning sekund deb ataluvchi bunday etalon o'lchov birligi sifatida o'rtacha sutkaning 1/86400 qismi qabul qilingan. Biroq hozirda fiziklar, mikro olamda yuz beradigan davriy jarayonlardan foydalanishni o'rganib oldilar. Vaqt o'lchovining bu etaloni, yerning o'z o'qi atrofida o'rtacha aylanish davriga nisbatan yanada aniqroq etalon bo'lib xizmat qilishi mumkin. Hozir vaqt etaloni sifatida, Cseziy kimyoviy elementi ichki energiyasining aniq bir o'zgarishlarida uning atomi chiqaradigan elektromagnit maydon tebranishlar davri qabul qilingan. Bir sekund davomida yuqorida ko'rsatilgan etalon tebranishlardan 9192631770 marta sodir bo'ladi. 1-jadvaldan hayotda va ilmiy amaliyotda qo'llaniladigan xarakterli vaqt va fazoviy intervallar haqida tasavvurga ega bo'lish mumkin .

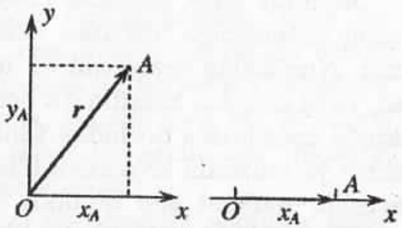
Soat harakati uning xususiy yurishi bilan qanday bog'langan degan savolni qo'yish mumkin. Bugungi kunda ma'lumki, bir-biriga nisbatan harakatlanayotgan soatlarda vaqt turlicha oqadi, biroq bu farqni yorug'lik tezligi $c = 300000$ km/s ga yaqin tezliklarda sezish mumkin. Fiziklar, koinotdan keladigan yoki tezlatgichlarda shunday qiymatlargacha tezlatilgan elementar zarralar harakatida bunday tezliklar bilan to'qnash keladilar. $v \ll c$ bo'lganda soat harakatining vaqtning o'tishiga ta'siri juda kichik bo'lganligi tufayli vaqtni mutlaq deb qarash mumkin.

1.3 Sanoq sistemasi. Harakatlanayotgan nuqtaning radius-vektori

Har qanday harakatning o'ta muhim xossasi uning ***nisbiyligidir***. Haqiqatan ham, kaftimizda turgan buyum kaftimizga nisbatan tinch holatda bo'ladi, biroq shu vaqtda qo'limiz bilan birga tanamizga nisbatan murakkab harakat qilishi mumkin. Agar biz tinch holatda bo'lmasak, buyum bizni o'rab olgan tashqi olamdagi

qandaydir boshqa buyumlarga nisbatan juda murakkab harakatda ishtirok etadi. Va nihoyat, o'sha buyum biz bilan birga, yerning o'z o'qi atrofida va Quyosh atrofida murakkab harakatda ishtirok etadi.

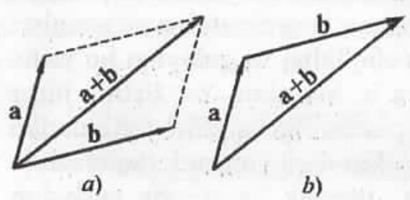
Harakatning biror bir qonuniyatini o'rnatishga urinishni, tabiiy ravishda, bizni qiziqtirayotgan obyektning harakatini o'rganish qaysi jismlar to'plamiga nisbatan muhim yoki qulay bo'lishini tanlashdan boshlash kerak. Bunday jismlar to'plamini ***sanoq sistemasi*** deb atash qabul qilingan. Sanoq sistemasi sifatida, masalan, o'zaro perpendikular joylashtirilgan, bir nuqtada kesishadigan va shu nuqtada bir-biri bilan qattiq bog'langan va deformatsiyalanmaydigan to'g'ri chiziqli uchta sterjenlar to'plamini tasavvur qilish mumkin. Bunday sanoq sistemasining asosiy xususiyati shundaki, uning qayerda joylashishidan qat'i nazar, bizni qiziqtiruvchi ixtiyoriy nuqtaning fazodagi holati sterjen chiziq bo'ylab olingan va ularning kesishgan nuqtasidan hisoblangan uch masofa bilan aniqlanadi. Bu masofalarni x, y, z harflar bilan belgilashga kelishilgan va ular bizga yaxshi tanish bo'lgan Dekart koordinatalar sistemasini tashkil qiladi (1.1-rasmga q.). Bundan boshqa koordinatalar sistemalari ham mavjud va ular maqsadga muvofiqlikligi va qulayligi bo'yicha tanlanadi: qutb, sferik, parabolik va h. Masalan, Yer sirtida biror obyektning holatini aniqlashda ko'pincha "geografik" sistemadan foydalaniladi, bunda obyektning fazodagi o'rnini aniqlashda x, y, z parametrlar o'rniga kenglik, uzoqlik va dengiz sathidan balandlik kabi tushunchalardan foydalaniladi. Nuqtaning o'zaro bog'liq bo'lmagan koordinatalari soni fazoning o'lchoviga teng, umuman olganda koordinatalar soni uchga teng, biroq ko'pgina hollarda fizik hodisalarni modellashtirish (ko'rilayotgan obyektning harakatida uncha muhim bo'lmagan qismlaridan voz kechish hisobiga soddalashtirish yoki ideallashtirish) orqali o'zaro bog'liq bo'lmagan koordinatalarning sonini ikkitaga va hatto bittagacha



1.3-rasm.

kamaytirish mumkin bo'ladi (1.3-rasm). Masalan, matematik mayatnikning tebranishi tekislikda, ya'ni ikki o'lchovli fazoda sodir bo'ladi. Bunda odatda Dekart koordinata o'qlaridan ikkitasi mayatnikning harakat tekisligida tanlanadi. Harakat tekislikda sodir bo'lishiga qaramasdan bog'lanish hisobiga (mayatnik osilgan nuqta harakatsiz) bu masala bir o'lchovli masalaga aylanadi. Shunday qilib, ipga osilgan yukning fazodagi holati bitta koordinata (og'ish burchagi) bilan aniqlanadi. Shu narsani alohida ta'kidlash lozimki, ***koordinatalar sistemasi – matematik tushuncha, sanoq sistemasi esa – fizikaviy turkumdir***.

Shunday qilib, jismning ixtiyoriy nuqtasining holati tanlangan sanoq sistemasiga nisbatan uchta x_A, y_A, z_A sonlar bilan aniqlanadi. Nuqtaning vaziyatini bu uch son o'rniga birgina kattalik bilan, ya'ni nuqtani koordinata boshi bilan bog'lovchi kesma uzunligi hamda koordinata boshidan tanlangan nuqta tomon yo'naltirilgan kesma yo'nalishini ko'rsatish bilan ham aniqlash mumkin. Bunday kattalik, nafaqat son qiymati bilan, balki yo'nalishi bilan ham xarakterlanuvchi kattalik bo'lib, u ***vektor*** deb ataladi. Qat'iy qilib aytganda, moduli va yo'nalishi bilan sifatlanuvchi har qanday kattalikni vektor deb bo'lmaydi. Vektorlar ma'lum qoidalarga bo'ysunishi kerak. Ulardan birinchisi, vektorlarni qo'shish qoidasi bo'lib, u ma'lum shartlarni qanoatlantirishi kerak, ya'ni $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$; $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$; $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$.



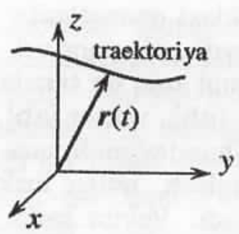
1.4-rasm.

Uch o'lchovli fazoda vektorlarni qo'shish qoidasi 1.4-rasmda keltirilgan. Ulardan klassik mexanikaning fundamental qonuni - Galilei almashtirishlari kelib chiqishini keyinroq ko'ramiz. Vektor komponentalari (proyeksiyalari) ustidagi amallar, bir xil darajada, vektorlar ustidagi algebraik amallar bilan mos tushadi: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})_x = a_x + b_x$; $(\mathbf{a}+\mathbf{b})_y = a_y + b_y$ va h.

Vektorlarni qo'shish qoidasining muhim jihatini quyidagi misolda ko'rsatish mumkin: vektor **b** bilan bir xil yo'nalishga ega, lekin moduli $\sqrt{b}$ ga teng bo'lgan kattalik bu qoidani qanoatlantirmaydi, va demak, uni vektor deb atab bo'lmaydi. Haqiqiy vektor, koordinatalar sistemasi almashtirilganda o'zini aniq bir tarzda tutishi lozim. Nihoyat, vektorlar uchun skalyar (**ab**), vektor [**ab**], aralash ko'paytma **a**[**bc**] amallari aniqlangan. Shunday qilib, qandaydir bir kattalikning vektor ekanligini tasdiqlash, uning fizik xossalari haqida yetarli darajada ma'lumot beradi. Vektor kattalik bilan nafaqat qandaydir nuqtaning fazodagi holati aniqlanadi, balki tabiat hodisalarini tavsiflashda foydalaniladigan juda ko'p muhim kattaliklar – tezlik (**v**) va kuch (**F**), elektr (**E**) va magnit (**H**) maydon kuchlanganligi va hokazolar vektor kattaliklarga misol bo'ladi. Solishtirish uchun shuni aytish kerakki, ba'zi bir kattaliklar, masalan, uzunlik, massa, energiya, temperatura uchun birgina qiymatning berilishi ularni aniqlash uchun yetarli bo'ladi va ularning xossalari, bizning idrokimizda, fazoda hech bir yo'nalish bilan bog'lanmaydi. Vektorlardan farqli ravishda ular ***skalyar kattaliklar*** yoki qisqacha ***skalyar*** deb ataladi.

Oldindan tanlangan koordinatalar sistemasida jismning biror nuqtasining fazodagi holatini aniqlovchi vektor shu nuqtaning ***radius-vektori*** deb ataladi, nuqtaning Dekart koordinatalari x_A, y_A, z_A uning tegishli koordinata o'qlariga bo'lgan proyeksiyalari bo'lib, radius-vektorning uzunligini ham, yo'nalishini ham bir darajada aniqlab beradi. Odatda, radius-vektor **r** (quyuq harf) ko'rinishda yoki ustiga strelka joylashtirilgan o'sha harf $\vec{r}$ bilan belgilanadi.[1] Har qanday vektorning uzunligi uning moduli deb ataladi va oddiy harf bilan belgilanadi, masalan, radius-vektorning moduli $|\mathbf{r}| = r$ ko'rinishda belgilanadi. Har qanday vektorning moduli - skalyar, ta'rif bo'yicha doim musbat: $r = \sqrt{(\mathbf{rr})}$. Jism harakatlanayotgan bo'lsa, vaqt o'tishi bilan harakat davomida uning turli nuqtalarining fazodagi vaziyati va mos ravishda ularning radius-vektorlari ham o'zgarib boradi. Ushbu holda radius-vektor vaqtning funksiyasi bo'ladi: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Uning vaqtga bog'lanishi tanlangan sanoq sistemasidagi uning uch proyeksiyasi $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ larning vaqtga bog'lanishi bilan to'liq aniqlanadi.

[1] Ushbu kitobda vektorlarni quyuq harflar bilan belgilaymiz. Bu qoidani barcha vektorlar, jumladan Grek harflari bilan belgilangan vektor kattaliklar uchun ham qo'llaymiz.



1.5-rasm.

Biz jism harakatini tavsiflash uchun matematikani tatbiq qilishda birinchi va muhim qadamni qo'ydik. Bu shu narsani ko'rsatadiki, harakatdagi jismning ixtiyoriy nuqtasining fazodagi o'rni vaqtga bog'liq radius-vektor $\mathbf{r}(t)$ bilan aniqlanadi va u harakatlanuvchi nuqtalarining fazodagi holatlari o'zgarishi bilan ham qiymati, ham yo'nalishi jihatidan o'zgaradi. Bu yerda so'z bilan ifodalaganda hamma vaqt ham aniq bo'lavermaydigan mexanik hodisalarning ta'rifini qat'iy va hamma uchun birdek tushunarli bo'lgan matematika tili bilan birlashtirildi. Xususan, "Jism harakati – bu vaqt o'tishi bilan jismning fazodagi boshqa jismlarga nisbatan ko'chishi" deb aytilgan fikr, "kuzatilayotgan jismning harakati – tanlangan sanoq sistemasidagi uning barcha nuqtalari radius-vektorlarining o'zgarishidir" degan fikrning o'zi ekanligini ko'rdik. Shunday qilib, ***mexanikaning asosiy masalasi, bu harakatlanayotgan jismlarning turli nuqtalari radius-vektorlarining vaqt o'tishi bilan qanday o'zgarishini ifodalovchi matematik munosabatlarni aniqlashdan iborat***, deb aytish mumkin.

Bunday bog'lanishni topish amaliy masalalardan biri – jismlarning mumkin bo'lgan boshlang'ich shartlarga bog'liq holda qanday harakat qilishini bashorat qila bilish masalasini hal qiladi. Istalgan nuqta radius-vektorining vaqt bo'yicha o'zgarishini grafikda chiziq ko'rinishda tasvirlash mumkin. Radius-vektor uchi ana shu chiziq bo'ylab ko'chadi (1.5-rasm). Bu chiziq mos nuqta harakatining ***trayektoriyasidir***.

1.4 Zarralar va maydonlar. Newton klassik mexanikasi

Klassik mexanika uchun moddiy nuqta tushunchasi o'ta prinsipial hisoblanadi. Aslini olganda, mexanika moddiy nuqta harakati qonunlari asosida quriladi va sekin-asta murakkablashib borgan sari chigal hamda qiyin obyektlar – suyuqlik va gazlar mexanikasini o'rganishgacha o'tib boriladi.

Moddiy nuqta haqidagi dastlabki tushunchalar avvalgi paragrafda muhokama qilingan koordinatalar sistemasiga asoslangan. Ya'ni fizikaviy jismni moddiy nuqta sifatida qarash mumkin bo'ladi, agar uning harakatini tavsiflash uchun uch koordinataning yoki birgina radius-vektor $\mathbf{r}(t)$ ning vaqtga bog'lanishi berilishi yetarli bo'lsa. Eng avvalo, bu o'lchamlarini nazarga olmasa ham bo'ladigan jism uchun o'rinli - moddiy nuqta deb atalishi ham shundan kelib chiqqan. Biroq xuddi shunday yo'l bilan istalgan o'lcham va shakldagi jismlar ko'chishini tavsiflash mumkin, agar ular ilgarilama harakat qilayotgan bo'lsa, bunda jismning barcha nuqtalarining trayektoriyalari bir xil va parallel ko'chish bilan almashtirish mumkin bo'lishi talab etiladi. Nihoyat, nisbatan murakkab bo'lgan harakatlarda, orientatsion koordinatalar muhim bo'lgan holda, jismning massa markazining harakati moddiy nuqta harakat qonunlariga bo'ysunishini keyingi boblarda ko'ramiz. Masalan, Yerning tortish kuchi ta'sirida jismning erkin tushishini bo'shliqda ko'rsak, jismning o'lchamlari va hatto uning qanday materialdan ekanligi muhim emas. Shu vaqtda jismning bunday harakati havoda kuzatilsa, havoning qarshiligi harakatga jiddiy ta'sir ko'rsatadi. Bunda jismni har doim ham moddiy nuqta deb qarab bo'lmaydi.

Newton mexanikasining qonunlari moddalar tuzilishining hozirgi zamon atomistik nazariyasining o'rnatilishidan ancha vaqt ilgari yaratilganligi uchun klassik deb ataladi. Yuqorida aytganimizdek, mexanikadagi har qanday miqdoriy munosabatlar (shu bilan birga fizikaning istalgan sohasidagi qandaydir miqdoriy munosabatlar) ma'noga ega bo'lishi uchun, albatta qo'llash chegarasi ko'rsatilishi shart yoki mumkin bo'lgan maksimal xatolik baholangan bo'lishi kerak.

Birinchidan, klassik mexanika doirasida harakatlarni qo'shish radius vektorlarni qo'shishga olib kelinadi. Agar moddiy nuqta biror sanoq sistemasiga nisbatan $\mathbf{r}_1(t)$ qonun bilan ko'chayotgan bo'lsa, bu sanoq sistemaning koordinata boshi esa biror bir yangi sistemada $\mathbf{r}_2(t)$ qonun bilan harakatlanayotgan bo'lsa, bu yangi sanoq sistemada moddiy nuqta $\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)$ qonun bilan harakatlanadi. Bu Galilei almashtirishlariga ekvivalent bo'lib, u haqda keyingi paragraflarda so'z yuritiladi. Bu qoida qanchalik tabiiy bo‘lib ko‘rinmasin, Newton vafotidan 200 yil o‘tib, XX asr boshlarida harakatning bunday qo‘shish qoidasi xususiy hol ekanligi, ya’ni jismlarning norelativistik tezliklardagi ($v \ll c = 3 \cdot 10^8$ m/s) harakati uchun o‘rinli ekanligi aniqlandi (bu yerda Einstein nomini eslash lozim). Kundalik hayotda biz anchayin kichik tezliklar bilan ish yuritamiz. Masalan, reaktiv samolyotning tezligi, odatda, tovushning havodagi tezligi, 300 m/s=0.3 km/s dan 2-3 marta katta bo‘lishi mumkin. Yer yo‘ldoshining yoki kosmik kemaning tezligi taxminan 10 km/s . Yerning Quyosh atrofidagi orbita bo‘ylab harakat tezligi ham aynan shu tartibda (30 km/s). Nihoyat, Quyoshning o‘z orbitasi bo‘ylab, Galaktikamiz markazi atrofidagi, harakat tezligi tartibida, bu yorug‘lik tezligidan 1000 marta kichik demakdir. Yorug‘lik tezligi c ga yaqin nisbiy tezliklar bilan harakatlanayotgan jism mexanikasi sezilarli darajada murakkab bo‘lib, bizning idrokimiz doirasi bilan uncha mos kelmaydi. Chunki, inson kundalik amaliyotida bunday harakat tajribasiga ega emas. Bunday mexanika relativistik mexanika deb ataladi, ba’zida u an’anaga ko‘ra maxsus nisbiylik nazariyasi mexanikasi deb ham aytiladi.

Ikkinchidan, molekulalar, atomlar va yanada mayda zarralar fizikasini o‘rganishga o‘tilganda Newton mexanikasi jiddiy taftishga uchraydi. Masalaning bu jihatini XX asrda Bohr, Heisenberg va boshqa ko‘plab buyuk olimlarning sa’y-harakatlari bilan tushunish imkoni paydo bo‘ldi. Mikro olam mexanikasi - kvant mexanikasi - moddiy nuqta tushunchasidan foydalanmaydi, ma’lum bo‘lishicha, barcha mikrozarralar to‘lqin xususiyatiga ega ekan. Biz moddiy nuqta deb qarayotgan jismlarning, haqiqiy o‘lchamlari yoki zarralar orasidagi masofa, boshqacha aytganda, fazoviy masshtablar de Broglie to‘lqin uzunligi $\lambda_B = h/mv$ dan yetarli darajada katta bo‘lganda bu jihatni e’tiborga olmaslik mumkin bo‘ladi. Bu yerda m – jism massasi, v – uning tezligi, $h = 6.6 \cdot 10^{-34}$ J/s- Planck doimiysi. Kvant mexanikasi fizika nuqtai nazaridan valentlik nima, yoki masalan, qattiq jism nima va u qanday tuzilgan degan savollarga javob berish uchun kerak. Chegaraviy o‘tishlar $h \to 0$ va $v/c \ll 1$ da Newton mexanikasi ma’no kasb etadi deb aytish mumkin. Ammo bu chegaraviy holat turli hodisalarni o‘z ichiga oladi va amaliy nuqtai-nazardan shunchalik muhimki, klassik mexanika

nafaqat amaliy qo‘llanish predmeti bo‘lib qolmasdan, balki jonli, rivojlanayotgan tabiiy fanning bir qismi bo‘lib qolmoqda.

Atrof-muhitdagi obyektlarning aksariyati, ayniqsa, inson bevosita (sezgi a’zolari orqali) idrok eta oladigan qismi, modda mayda zarralar – atom va molekulalardan tashkil topgan. Atomlarning tuzilishi va ularning “ichki hayoti” ni aniqlovchi qonunlar klassik mexanika predmeti bo‘la olmaydi. Bundan keyin biz ularni zarralar deb ataymiz. Odatda, atom tarkibiga kiruvchi elektronlar, atom yadrolari, protonlar, neytronlar va juda ko‘pgina elementar zarralar (bular haqida umumiy fizika kursining mos bo‘limlarida gap yuritiladi) ham zarra deb ataladi. Nihoyat, fiziklar, juda ko‘p sondagi atomlardan tashkil topgan makrozarralar tushunchasidan ham foydalanadilar. Klassik mexanika doirasida yetarli darajadagi aniqlik bilan moddiy nuqtaga yaqinlashtirilgan har qanday fizik obyekt zarra deb nomlanishi mumkin.

Biroq bizni o‘rab olgan olam faqat atom va zarralardan tashkil topgan deb bo‘lmaydi. Masalan, yorug‘lik, radioto‘lqinlar yoki televizor signallar ko‘rinishida bizning sezgi organlarimizga tinimsiz ta’sir qiluvchi va bizni o‘rab olgan fazoga kirib boruvchi elektromagnit to‘lqinlar butunlay boshqacha tuzilgan. (Yana bir muhim jihati shundaki, amalda bizning sezgi organlarimiz va unga teng kuchli, barcha o‘lchov asboblari bizni o‘rab olgan olamni elektromagnit o‘zaro ta’sir orqali idrok qiladi). Elektr va magnit maydon ko‘rinishida namoyon bo‘luvchi elektromagnit to‘lqinlar yuqorida bayon qilingan zarralardan farqlanuvchi materiyaning boshqa ko‘rinishidir. Tajriba shuni ko‘rsatadiki, bizni o‘rab turgan barcha narsalar yo zarra, yo maydon, yo zarra va maydonni birlashtiruvchi strukturadan iborat bo‘lsin, ular bir-biriga nisbatan harakat qilishi mumkin. Shuni ta’kidlash lozimki, relativistik kvant fizikasida zarralar va maydon o‘rtasida prinsipial farq yo‘qoladi. Klassik va hatto, relativistik (kvant emas) fizikada zarra va maydon tushunchalari chegaralangan. Bunda zarralar yoki ulardan tashkil topgan makroskopik jismlar harakatini o‘rganish asosiy predmet bo‘lib qoladi, shu vaqtda maydon zarralarning o‘zaro ta’sirlashishini belgilaydi. Maydon manbai mexanik masala doirasidan tashqarida qoladigan hollarda ***berilgan maydondagi*** harakat qaraladi, agar berk sistema hosil qiladigan maydon ta’sirida uning harakati qaralayotgan bo'lsa, masala o'zaro muvofiqlashtirilgan deyiladi.

Hozirda fizikada ma'lum bo'lgan maydonlar to'rt ko'rinishga ega bo'lib, mos ravishda to'rt xil o'zaro ta'sirda namoyon bo'ladi. Biz yoshlikdan, qandaydir ma'noda, og'irlik kuchi bilan tanishmiz va uni o'lchashni bilamiz. Massa to'g'risidagi eng tabiiy tushuncha jism og'irligini o'lchashdan kelib chiqadi. Bu bizga gravitatsion o'zaro ta'sir haqida tushuncha beradi. Mexanikaning juda ko'p xrestomatik masalalarida zarralar yoki zarralar sistemasining gravitatsion maydonda o'zini tutishi o'rganiladi. Bizni o'rab olgan olamda elektromagnit maydon ham xuddi shunday universal holatdadir; aytib o'tganimizdek, tashqi olam bilan barcha bog'lanishlar va o'zaro ta'sirlarga mana shu elektromagnit ta'sir sababchidir. Bu narsa XX asrga kelib, yetarli darajada tushunildi. Gravitatsion ta'sir kabi, elektromagnit o'zaro ta'sir ham masofa bilan chegaralanmaydi, bu holat shoirona ta'bir bilan aytilgan "olis yulduz nuri" so'zlarida o'z aksini topgan.

Endi, kitobimizning mundarijasini aniqlab olishimiz mumkin. Unda makroskopik jismlarning, taxminan kundalik hayotimizda kuzatiladigan (yorug'lik tezligidan yetarli darajada kichik) tezliklardagi harakat qonunlari haqida fikr yuritiladi. Bunday jismlarning nisbiy harakatini o'rganuvchi fan ***klassik mexanika*** deb ataladi.

Savollar

1.1. Bizning fazoning asosiy fizik xossalari nimalardan iborat?
1.2. Soat nima?
1.3. Qanday kattaliklar skalyar va vektor deyiladi?
1.4. Radius-vektor nimani ifodalaydi?
1.5. Koordinata o'qlaridan (x, y yoki z) biriga vektorning proyeksiyasi skalyar kattalik bo'la oladimi?
1.6. Klassik mexanikaning asosiy masalasi nimadan iborat?
1.7. Klassik mexanika qanday obyektlar bilan ish ko'radi?
1.8. Klassik mexanika qonunlari qanday shartlar bajarilganda o'rinli bo'ladi?

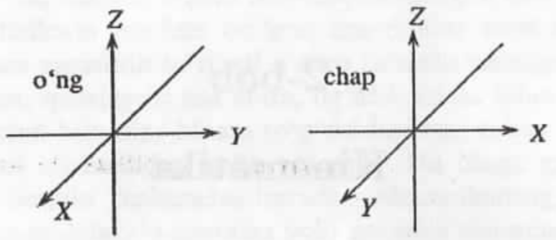
2-bob

Kinematika

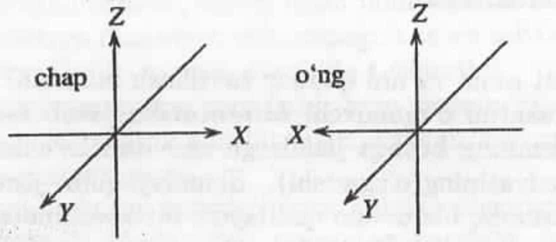
2.1 Moddiy nuqtaning ko'chishi, tezligi, tezlanishi

Harakat nima va uni qanday tavsiflash mumkin? Bu savolga jismlar harakatini o'rganuvchi ***kinematika*** javob beradi. Harakat – bu jismning boshqa jismlarga nisbatan ko'chishidir (uning fazodagi vaziyatining o'zgarishi). Shunday qilib, jism harakatini tavsiflar ekanmiz, biz doimo qandaydir bir koordinatalar sistemasiga (jismning harakati shu sistemaga nisbatan sodir bo'ladi) yoki sanoq sistemasiga bog'lanib ish ko'ramiz. Jismning harakati uning barcha nuqtalari (jismning mayda bo'lakchalari) harakati bilan aniqlanadi, shunga ko'ra biz ***moddiy nuqta*** harakatini tavsiflashdan boshlaymiz. Moddiy nuqta tushunchasiga yangi ta'rif beramiz: ***Muayyan sharoitda o'lchamlarini e'tiborga olmasa ham bo'ladigan jism moddiy nuqta deb ataladi. Bunda jismning massasi bir nuqtaga jamlangan deb qarash mumkin.***

Eng avval koordinatalar sistemasini tanlab olamiz. Eng sodda sistema – bu, Dekart koordinatalar sistemasidir. Ikki, o'ng va chap koordinatalar sistemasi farqlanadi (2.1-rasm). O'ng va chap qo'lqoplarning o'rnini almashtirib bo'lmaganidek, hech qanday fazoviy burishlar orqali bu ikki sistemani ustma-ust tushirib bo'lmaydi. Qo'lqop misolida esa, agar uning ichi tashqarisiga ag'darilsa buni amalga oshirish mumkin bo'ladi. Demak, koordinata o'qlaridan birining yo'nalishi teskariga almashtirilsa (masalan $x \to -x$), o'ng sistema chap sistemaga o'tadi (2.2-rasm). Endi o'qlarni burish va fazoda siljitish bilan ularni ustma-ust tushirish mumkin. Bitta koordinata o'qining yo'nalishini teskariga almashtirish ***ko'zguda akslantirish*** operatsiyasi deyiladi. Bunday nomlanish bejiz emas, haqiqatan ham, ko'zguda o'ng sistema chap bo'lib ko'rinadi.



2.1-rasm. Chap va o'ng Dekart koordinatalar sistemasi.



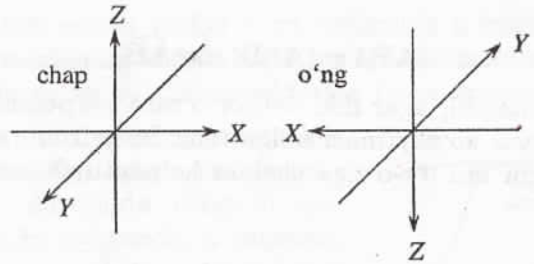
2.2-rasm. O'qlardan birining ishorasi o'zgarishi ($x \to -x$) bilan chap koordinatalar sistemasi o'ng koordinatalar sistemasiga o'tishi.

Uchala koordinata o'qlarining yo'nalishlari bir yo'la teskarisiga almashtirilsa $x \to -x, y \to -y, z \to -z$, yana chap sistema o'ng sistemaga o'tadi. Bunday almashtirish ***inversiya operatsiyasi*** deb ataladi (2.3-rasmga q.).

Tabiat qonunlari, koordinatalar sistemasiga bog'liq bo'lmagan holda ta'riflanishi lozim. Biz aniq bo'lishi uchun o'ng sistemadan foydalanamiz.[1]

Tanlangan koordinatalar sistemasida nuqtaning holati **r** radius-vektor orqali beriladi, uning koordinata o'qlariga proyeksiyasi mos ravishda x, y, z larga teng bo'ladi (2.4*a*-rasm). Shunday qilib, **r** vektor to'laqonli ravishda uning uch proyeksiyalarining berilishi bilan aniqlanadi, lekin bular boshqa uch son bo'lishi ham mumkin, masalan, uzunlik $r = |\mathbf{r}|$ va ikki burchak θ va φ (sferik koordinatalar sistemasida, 2.4*b*-rasm). Dekart va sferik koordinatalar o'zaro quyidagi munosabat bilan bog'langan:

[1]Radius-vektor to'g'risida 1-bobda berilgan ma'lumotlarni kengaytiramiz.

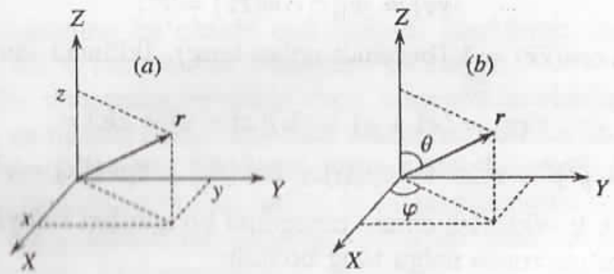


2.3-rasm. Inversiya operatsiyasi.

$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ z = r\cos\theta. \qquad (2.1)$$

Agar koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan uch birlik vektorlar **i, j, k** (birlik ortlar) kiritsak, radius-vektor **r** ni uch vektor yig'indisi ko'rinishida tasvirlash mumkin:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},\ ,|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1 \qquad (2.2)$$



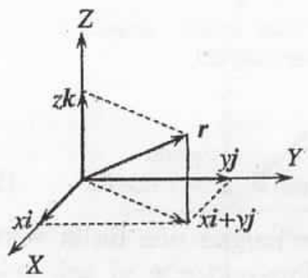
2.4-rasm. Fazodagi nuqtaning radius-vektorni Dekart (a) va sferik (b) koordinatalar sistemasida tasvirlash.

Bu ifoda vektorlarni parallelogramm qoidasiga binoan qo'shish qonunidan kelib chiqadi (2.5-rasm).

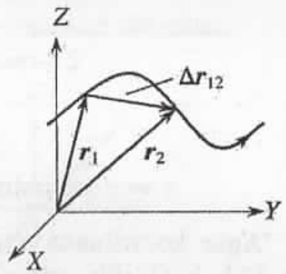
Ikki **A** va **B** vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb, vektorlar uzunligini ular orasidagi burchak kosinusiga ko'paytmasiga teng bo'lgan songa aytiladi, ya'ni

$$(\mathbf{AB}) = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos(\widehat{\mathbf{AB}}) \qquad (2.3)$$

Bundan ko'rinadiki, agar ikki vektor o'zaro perpendikular bo'lsa, ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'ladi. $\mathbf{r}$ radius-vektorning uzunligini uni o'z-o'ziga skalyar ko'paytirish orqali aniqlash mumkin:



2.5-rasm. Radius-vektorni koordinata o'qlari bo'ylab tashkil etuvchilarga ajratish.



2.6-rasm. Moddiy nuqtaning trayektoriyasi va ko'chishi.

$$(\mathbf{rr}) = |\mathbf{r}||\mathbf{r}|\cos(\widehat{\mathbf{rr}}) = r^2, \qquad (2.4)$$

bu yerda $\cos(\widehat{\mathbf{rr}}) = 1$ (burchak nolga teng). Ikkinchi tomondan,

$$(\mathbf{rr}) = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) =$$
$$x^2\mathbf{i}^2 + y^2\mathbf{j}^2 + z^2\mathbf{k}^2 + 2xy(\mathbf{ij}) + 2xz(\mathbf{ik}) + 2yz(\mathbf{jk}) = r^2. \qquad (2.5)$$

i, **j** va **k** vektorlar o'zaro ortogonal bo'lganligi tufayli ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'ladi:

$$(\mathbf{ij}) = (\mathbf{ik}) = (\mathbf{jk}) = 0.$$

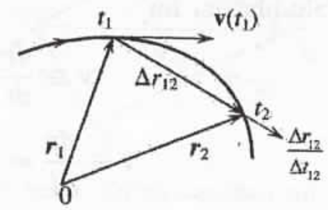
Natijada, vektor uzunligining kvadrati uning proyeksiyalari kvadratlarining yig'indisiga tengligi kelib chiqadi:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \qquad (2.6)$$

Endi trayektoriyasi 2.6-rasmda keltirilgan moddiy nuqtaning harakatini ko'rib chiqamiz va keyingi tushunishlarimiz uchun muhim

bo'lgan moddiy nuqta tezligi $\mathbf{v}$ va tezlanishi $\mathbf{a}$ larni aniqlaymiz. Bu moddiy nuqtaning ketma-ket t_1 va t_2 vaqt momentlaridagi fazodagi holati $\mathbf{r}_1$ va $\mathbf{r}_2$ radius-vektorlar bilan aniqlangan bo'lsin.

Shunday qilib, moddiy nuqta harakatda bo'lganligi uchun radius vektor $\mathbf{r}$ vaqt davomida o'zgarib boradi, boshqacha aytganda, u vaqtning funksiyasidir $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Agar bizga ushbu o'zgarish qonuni ma'lum bo'lsa, istalgan vaqtda moddiy nuqtaning qayerdaligi ma'lum bo'ladi, ya'ni biz uning harakat qonunini bilamiz. $\mathbf{r}(t)$ funksiyaning berilishi, moddiy nuqtaning $x(t), y(t)$ va $z(t)$ uchta koordinatalarining berilishiga ekvivalentdir, chunki



2.7-rasm. Moddiy nuqtaning tezligi.

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}. \qquad (2.7)$$

$\mathbf{r}_2$ va $\mathbf{r}_1$ vektorlar ayirmasi

$$\Delta\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \qquad (2.8)$$

moddiy nuqtaning ***ko'chishi*** deb ataladi. Shubhasiz, bu kattalik vektor bo'lib, u 1-nuqtadan 2-nuqtaga yo'nalgan.

Moddiy nuqtaning ko'chishi $\Delta\mathbf{r}_{12}$ ning shu ko'chishga ketgan vaqt Δt_{12} ga nisbati $\Delta\mathbf{r}_{12}/\Delta t_{12}$ ham vektor kattalik bo'lib, ko'chish vektoriga kollineardir. Shubhasiz, agar vaqt intervali Δt_{12} ning kattaligini kamaytira borilsa (t_2 ni t_1 ga yaqinlashtira borib), mos ravishda $\Delta\mathbf{r}_{12}$ vektorning uzunligi, ya'ni ko'chish kattaligi ham kamaya boradi, (2.7-rasmga q.). Ko'chish $\Delta\mathbf{r}_{12}$ ning Δt_{12} vaqt intervaliga nisbatining, Δt_{12} nolga intilgandagi limiti vektor $\mathbf{r}(t)$ ning ***vaqt bo'yicha hosilasi deb ataladi***:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}_{12}}{\Delta t_{12}}. \qquad (2.9)$$

Bu vektor moddiy nuqta trayektoriyasining t_1 vaqtga to'g'ri keluvchi nuqtasida unga o'tkazilgan urinma bo'ylab yo'nalgan. Shunday qilib, moddiy nuqta tezligi uchun quyidagi ifodani yozish mumkin:

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{2.10}$$

Shubhasiz, bu

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left\{\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right\}, \text{yoki}$$

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left\{\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}\right\}, \text{yoki} \tag{2.11}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt},\ v_z = \frac{dz}{dt},$$

komponentalarga ega bo'lgan, trayektoriyaning t ***vaqt momentiga mos keluvchi nuqtasiga urinma ravishda yo'nalgan vektordir***.

Zarraning tezlik vektori $\mathbf{v}(t)$, radius-vektor kabi, t vaqtning funksiyasi bo'lishi mumkin. Bu holda, zarra harakat tezligining o'zgarish sur'atini aniqlovchi va ***tezlanish*** deb ataluvchi vektor quyidagi tarzda kiritiladi:

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \tag{2.12}$$

Agar bu vektorning qiymati va yo'nalishi vaqt bo'yicha o'zgarmasa, ya'ni

$$\mathbf{a} = \text{const}. \tag{2.13}$$

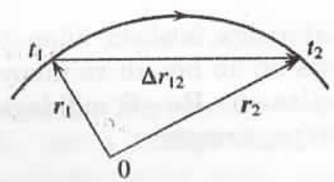
bo'lsa, bunday harakat tekis tezlanuvchan (tekis sekinlashuvchan) harakat deb ataladi. Tekis tezlanuvchan harakat uchun moddiy nuqta tezligi $\mathbf{v}(t)$ va uning radius-vektori $\mathbf{r}(t)$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \mathbf{a}t, \qquad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}(0)t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \tag{2.14}$$

qonunlar bilan o'zgaradi (vaqt bo'yicha hosila olish orqali tekshirish mumkin), bu yerda $\mathbf{v}(0)$ va $\mathbf{r}(0)$ mos ravishda moddiy nuqtaning boshlang'ich vaqt moment ($t = 0$) dagi tezligi va radius-vektori. Tekis tezlanuvchan harakatda yo'lning vaqtga bog'lanishi parabola ko'rinishiga ega ekanligi ma'lum. Tezlanish nolga teng bo'lgan harakat tekis bo'lib, uning trayektoriyasi to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi.

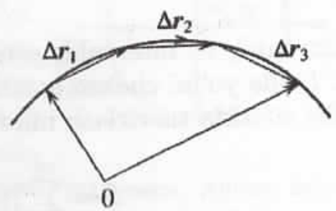
2.2 Moddiy nuqtaning bosib o'tgan yo'li

Endi, moddiy nuqtaning harakat davomida bosib o'tgan yo'lini (zarra trayektoriyasi uzunligi) aniqlash masalasini ko'rib chiqamiz. Faraz qilaylik, moddiy nuqta ixtiyoriy ko'rinishdagi trayektoriya bo'ylab harakat qilayotgan bo'lsin. U vaqtning t_1 momentida trayektoriyaning $\mathbf{r}_1$ va t_2 vaqt momentida esa $\mathbf{r}_2$ radius-vektorlar bilan aniqlanuvchi nuqtalarida bo'lsin (2.8-rasmga q.). Moddiy nuqta shu ikki holat orasida qanday masofani bosib o'tganligini topish lozim. Uning ko'chishi radius vektorlar ayirmasi $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ bilan aniqlanadi, biroq bu vektorning uzunligi, tabiiyki, moddiy nuqta bosib o'tgan yo'lni aniqlamaydi. Moddiy nuqta holatini aniqlovchi ikki vaziyat orasidagi trayektoriya to'g'ri chiziqdan iborat bo'lgan hol bundan mustasno.



2.8-rasm. Yo'lni topishga oid chizma.

Mana shu hol egri chiziqli harakatda jism bosib o'tgan yo'lni qanday topish kerakligiga ishoradir. Buning uchun vaqt intervali $t_2 - t_1$ ni juda kichik vaqt intervallariga, shunday bo'lamizki, bunda har bir kichik Δt interval orasida harakat deyarli to'g'ri chiziqdan iborat bo'lsin (2.9-rasm). Bunday intervallar soni quyidagicha aniqlanadi:



2.9-rasm. Egri chiziqli harakatda yo'lni topish usuli.

$$n = \frac{t_2 - t_1}{\Delta t} \tag{2.15}$$

Mana shu vaqt intervallarining har birida moddiy nuqtaning ko'chishini $\Delta\mathbf{r}_i$ ($i = 1, 2, ..., n$) bilan aniqlaymiz. Tabiiyki, Δt yetarli darajada kichik bo'lganda jismning $t_2 - t_1$ vaqt oralig'ida bosib o'tgan yo'li S, bu vektorlar uzunliklarining yig'indisi sifatida approksimatsiya qilinishi mumkin, ya'ni

$$S = \sum_{i=1}^{n} |\Delta \mathbf{r}_i|. \tag{2.16}$$

Δt nolga intilishi bilan bu yaqinlashish tobora aniq ko'rinishga ega bo'lib boradi va nihoyat n cheksizga intilganda aniq tenglikka aylanadi. Bu yig'indidagi har bir yig'iluvchini Δt ga bo'lamiz va ko'paytiramiz:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{|\Delta \mathbf{r}_i|}{\Delta t} \Delta t. \tag{2.17}$$

Yuqorida aytganimizdek, aniq tenglik $\Delta t \to 0$ chegaraviy holda yuz beradi:

$$S = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{|\Delta \mathbf{r}_i|}{\Delta t} \Delta t. \tag{2.18}$$

Yig'indi amali bilan chegaraviy o'tish amalining o'rnini almashtirish mumkin, chunki yig'indi limiti undagi har bir hadlar limitlarining yig'indisiga teng. Bunda har bir yig'iluvchining limiti

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta t} = \mathbf{v}_i \, , \tag{2.19}$$

zarraning i - intervaldagi tezligi $\mathbf{v}_i$ ga teng ekanligini eslash lozim. U holda yo'lni cheksiz sondagi cheksiz kichik qo'shiluvchilar yig'indisi sifatida tasvirlash mumkin:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} |\mathbf{v}_i(t)| dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{v}(t)| dt. \tag{2.20}$$

Bunday operatsiya matematikada ***aniq integral*** hisoblash deb ataladi. Yana bundan tashqari ***aniqmas integral*** tushunchasi ham mavjud. Shunday, biror funksiya uchun

$$\int f(t) dt = F(t) + \text{const}\,. \tag{2.21}$$

Bu yerda $dF/dt = f(t)$, $F(t)$ funksiya $f(t)$ ga nisbatan boshlang'ich funksiya deb ataladi. Funksiya $f(t)$ dan t_1 dan t_2 gacha

bo'lgan oraliqda olingan aniq integral quyidagi qoida bo'yicha hisoblanadi:

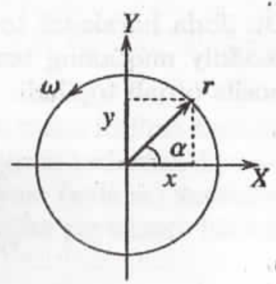
$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = F(t_2) - F(t_1). \tag{2.22}$$

Bu boshlang'ich funksiyaning yuqori va pastki chegaralardagi qiymatlarining farqidir.

Shunday qilib, biz quyidagi natijaga keldik: ***Zarraning t_1 va t_2 vaqt oralig'ida bosib o'tgan yo'li, zarra tezligi modulidan shu chegaralarda vaqt bo'yicha olingan aniq integralga teng.***

2.3 Aylanma harakat. Burchak tezlik va burchak tezlanish.

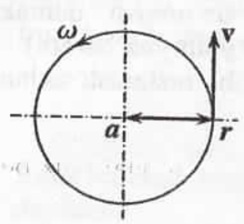
Tekis tezlanuvchan harakatda zarra hamma vaqt, boshlang'ich tezlik vektori $\mathbf{v}(0)$ va o'zgarmas tezlanish $\mathbf{a}$ hosil qilgan bir tekislikda harakatlanadi (buni isbot qiling). Bir tekislikda sodir bo'ladigan harakat ***yassi harakat*** deyiladi. Biroq aniq ravshanki, har doim ham tekislikdagi harakat tekis tezlanuvchan bo'lavermaydi. Yassi notekis tezlanuvchan harakatga misol tariqasida, maktab fizika kursidan ma'lum bo'lgan, ***aylana bo'ylab tekis harakatni*** keltirish mumkin. Shu masalani ko'rib chiqamiz. Bu harakat yassi bo'lganligidan, harakat tekisligi sifatida XY tekisligini va koordinata boshi sifatida aylana markazini tanlaymiz (2.10-rasm). Zarra koordinatalarini aylana radiusi r va burchak α orqali ifodalaymiz:



2.10-rasm. Aylana bo'ylab tekis harakat.

$$x = r\cos\alpha, \; y = r\sin\alpha. \tag{2.23}$$

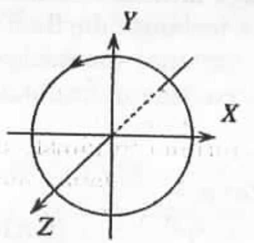
Harakat aylana bo'ylab yuz berayotganligi sababli r vaqtga bog'liq bo'lmaydi. Faqat burchak $\alpha(t)$ vaqtning funksiyasi bo'ladi.



2.11-rasm.

Shu damgacha aylanma harakatni o'rganish davomida vektorlarning koordinata o'qlariga proyeksiyalari bilan ish ko'rdik. Shu bilan birga, koordinata sistemasiga bog'liq bo'lmagan munosabatlar ahamiyatliroq bo'ladi, boshqacha aytganda, munosabatlarning vektor ko'rinishlari muhimroq bo'ladi. Bunga tekis tezlanuvchan harakatda zarraning koordinatalari va tezligi uchun ifodalarni misol sifatida keltirish mumkin ((2.14) ifodaga q.).

Aylanma harakat muhokama qilinganda, burchak tezlik ω tushunchasini, burilish burchagidan vaqt bo'yicha olingan hosila $\omega = d\alpha/dt$ ko'rinishida kiritilgan edi. Endi, burilish burchagi vektor kattalikmi yoki skalyarmi degan masalani hal qilib olamiz. Negaki, burilish haqida gapirilganda faqatgina burilish burchagi kattaligi emas, shu bilan birga, aylanish qaysi o'q atrofida hamda qaysi yo'nalishda (soat mili yo'nalishida yoki unga teskari) bo'layotganligi ko'rsatilishi lozim.



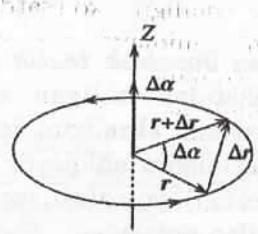
2.12-rasm. Aylanish yo'nalishi.

Yuqorida ko'rilgan misolda aylanish o'qi sifatida Z o'qi olingan edi, unda o'ng koordinatalar sistemasidan foydalanganimiz uchun, aylanish soat mili aylanishi yo'nalishida yuz bergan edi (agar Z o'qi bo'ylab musbat yo'nalishda qaralsa: 2.12-rasm). Bu nuqtai nazardan burilish burchagi vektor kattalik bo'lishi kerak. Biroq ixtiyoriy burilish burchagi, keyingi mavzuda biz bunga ishonch hosil qilamiz, umuman olganda, vektor kattalik bo'la olmaydi. Vektor tushunchasi cheksiz kichik burilish burchaklargagina qo'llaniladi. Shuning uchun, kichik $\Delta\alpha$ burilish haqida gapirilganda, taxminan vektor $\boldsymbol{\Delta\alpha}$ haqida gapirish mumkin. Bu vektorning kattaligi burilish burchagiga teng bo'lib, yo'nalishi aylanish o'qining yo'nalishini ko'rsatadi, bunda buralish soat mili yo'nalishi bo'yicha bo'lishi yoki parma qoidasiga mos kelishi kerak.

Biz ko'rib chiqqan misolda $\boldsymbol{\Delta\alpha}$ vektor Z o'qi yo'nalishi bilan

kollineardir. Moddiy nuqtaning ko'chishi $\Delta\mathbf{r}$ radius-vektor $\mathbf{r}$ ning kichik burchak $\Delta\alpha$ ga burilishi bilan qanday bog'langanligini ko'rib chiqamiz (2.13-rasmda burilish burchagi bilan ko'chish vektorining bog'lanishi keltirilgan.). Agar so'z cheksiz kichik burchak $d\alpha$ ga burilish haqida ketayotgan bo'lsa, bu masala oson yechiladi. Bunda ko'chish $d\mathbf{r}$ ham cheksiz kichik bo'ladi. Bu holda uning kattaligi yoy uzunligi bilan mos tushadi, ya'ni

$$|d\mathbf{r}| = r d\alpha, \tag{2.35}$$

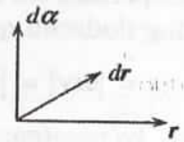


2.13-rasm.

yo'nalishi bo'yicha esa urinma bilan mos keladi, ya'ni $\mathbf{r}$ ga perpendikular. Natijada, o'ng sistemani hosil qiluvchi, uchta o'zaro perpendikular $\mathbf{r}$, $d\mathbf{r}$ va $d\boldsymbol{\alpha}$ vektorlarga ega bo'lamiz (2.14-rasm), shu bilan birga $|d\mathbf{r}| = |d\boldsymbol{\alpha}||\mathbf{r}|$. Endi vektorlarni vektor ko'paytirish amaliga asosan hech bir qiyinchiliksiz $d\mathbf{r}$ ni quyidagi vektor tenglik ko'rinishida yozish mumkin

$$d\mathbf{r} = [d\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}]. \tag{2.36}$$

Haqiqatan ham, ta'rifga ko'ra $\mathbf{A}$ va $\mathbf{B}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi deb $\mathbf{C} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ vektorga aytiladi. Bu yerda $\mathbf{C}$ vektor $\mathbf{A}$ va $\mathbf{B}$ vektorlar joylashgan tekislikka perpendikular bo'lib, parma qoidasiga ko'ra tekislikdan tashqariga yo'nalgan bo'ladi. Vektor ko'paytma natijasida hosil bo'lgan vektorning kattaligi $|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin(\widehat{\mathbf{AB}})$. Bizning holatda, $d\boldsymbol{\alpha}$ va $\mathbf{r}$ orasidagi burchak 90^o bo'lganligi uchun uning sinusi birga teng. Bu fikrlarga asosan (2.36) vektor munosabat to'g'ri ekanligiga ishonch hosil qilamiz.



2.14-rasm. Uch vektor orientatsiyasi.

(2.36) tenglikning har ikkala tomonini $d\alpha$ burchakka burilish uchun ketgan cheksiz kichik vaqt intervali dt ga bo'lib quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left[\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt}, \mathbf{r}\right]. \tag{2.37}$$

Biroq ifodaning chap tomonidagi kattalik zarraning tezligi $\mathbf{v}$ ning o'zidir, o'ng tomondagi hosila

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega \qquad (2.38)$$

esa ***burchak tezlik*** deb ataladi. Yuqorida bu kattalikni moduli jihatidan kiritgan edik, endi esa, burchak tezlikning vektor kattalik ekanligini ko'rsatdik. Uning qiymati burchak tezlikning kattaligini aniqlaydi (aylanish tezligi yoki burchakning o'zgarish tezligi), yo'nalishi esa, burilish o'qiga parallel bo'lib, parma qoidasi bilan aniqlanadi. Shunday qilib, biz quyidagiga ega bo'ldik:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]. \qquad (2.39)$$

Bu uch vektorlarning o'zaro orientatsiyasi 2.15-rasmda keltirilgan. Tezlanishni aniqlash uchun yuqoridagi ifodaning har ikki tomonidan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left[\boldsymbol{\omega}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right] = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}]. \qquad (2.40)$$

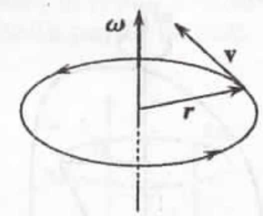
Bundab ko'ramizki, tezlanish aylanishning burchak tezligi $\boldsymbol{\omega}$ ga va aylanish chiziqli tezligi $\mathbf{v}$ ga perpendikular bo'lar ekan. Tezlik urinma ravishda yo'nalganligidan, tezlanish $\mathbf{r}$ ga parallel yoki antiparallel bo'ladi. Bu qanday bo'lishini yuqoridagi formulaga $\mathbf{v}$ ning ifodasini qo'yib aniqlashtirish mumkin:

$$\mathbf{a} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}] = [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]] = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}) - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}) - \omega^2\mathbf{r}. \qquad (2.41)$$

Biz ko'rayotgan misolda koordinata boshi aylana markazida olinganligi uchun, burchak tezlik va radius-vektor o'zaro bir-biriga perpendikular, shuning uchun ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'ladi (umuman olganda, quyida biz ko'ramiz, har doim ham $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}$ bo'lavermaydi). Buni hisobga olib (2.41) ni qayta yozamiz:

$$\mathbf{a} = -\omega^2\mathbf{r}, \qquad (2.42)$$

bundan $\mathbf{a}$ va $\mathbf{r}$ vektorlarning antiparalleligi kelib chiqadi (markazga intilma tezlanish tushunchasini esga oling). Qiymat jihatidan ular: $a = \omega^2 r$, ya'ni ma'lum bo'lgan (2.31) natijaga ega bo'ldik.



2.15-rasm. $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ va $\boldsymbol{\omega}$ vektorlarning o'zaro orientatsiyasi.

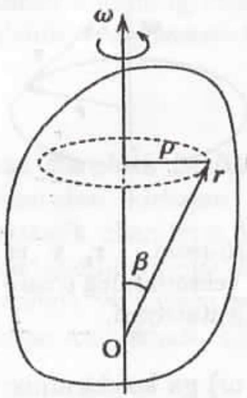
(2.39) va (2.40) formulalarning invariantligi, ya'ni bu munosabatlar koordinata sistemasini tanlashga bog'liq bo'lmasligi to'g'risida qisqacha to'xtalamiz. Bu munosabatlardan birinchisi koordinata boshini aylanish o'qining (ko'rilayotgan hol uchun bu aylana tekisligiga normal va uning markazidan o'tuvchi to'g'ri chiziq) istalgan nuqtasida tanlashga imkon beradi. Bu invariantlik to'g'ridan-to'g'ri vektorlarning vektor ko'paytmasi xossasidan kelib chiqadi.
Koordinata boshini aylanish o'qi bo'ylab $\mathbf{c}(\mathbf{c} \parallel \boldsymbol{\omega})$ ga ko'chiramiz: $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{c}$. Bunday almashtirishga nisbatan (2.39) invariant (o'zgarmaydi) bo'ladi. Bu natija parallel vektorlarning vektor ko'paytmasi nolga tengligidan kelib chiqadi ($\mathbf{c} \parallel \mathbf{b}$ bo'lsa $[\mathbf{c}\mathbf{b}] = 0$). (2.40) tengliklardan ikkinchisi aylana markazi qo'zg'almas bo'lgan holda o'rinli bo'ladi. Shuni ta'kidlash lozimki, kinematik jihatidan u birinchisiga ekvivalentdir. Haqiqatan ham, ikkala $\mathbf{r}$ va $\mathbf{v}$ vektor ham, yuqorida keltirilgan shartlarda, modullarini o'zgartirmagan holda, birgina $\boldsymbol{\omega}$ burchak tezlik bilan bir tekis aylanadi.

Bu mulohazalardan quyidagi qoidani ta'riflash mumkin: Biror $\mathbf{b}$ vektor kattalikning vaqt bo'yicha o'zgarishini qandaydir $\boldsymbol{\omega}$ burchak tezlik bilan bo'layotgan aylanish deb qarash mumkin bo'lsa, quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{b}]. \qquad (2.43)$$

Bu formula kvant fizikasida momentlar masalasi ko'rilganda muhim ahamiyat kasb etadi.

VII bobda qattiq jismning aylanma harakati ko'riladi, unda (2.39) tezliklarni vektor maydoni sifatida talqin qilish mumkinligini ko'ramiz. Bu holda $\mathbf{v}$ tezlik qattiq jism elementi sifatida qaralayotgan moddiy nuqtaga emas, balki fazoning biror nuqtasi bilan bog'lanadi. Jism elementi fazoning ushbu nuqtasiga yetib kelganda shu tezlik bilan harakatlanadi. (Bunday tasavvur suyuqliklarning oqishiga qo'llaniladi.)



2.16-rasm. Qattiq jismning aylanishi.

Agar koordinata boshini moddiy nuqtaning aylanish markazida emas, balki aylanish o'qining biror bir boshqa nuqtasiga joylashtirilsa (2.41) dagi qo'shimcha had $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})$ qanday o'zgaradi? 2.16-rasmni e'tiborga olib, ω va $\mathbf{r}$ o'zaro perpendikular bo'lmagan taqdirda ham, qandaydir biz tanlagan radius-vektori $\mathbf{r}$ bo'lgan nuqta tezligi uchun yuqoridagi munosabat o'rinli bo'lib qolishini ko'rsatish mumkin, ya'ni:

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]. \tag{2.44}$$

Jism $\boldsymbol{\omega}$ burchak tezlik bilan aylanayotgan bo'lsin. Bunda jismning aylanish o'qidan ρ masofada turgan nuqtasi $v = \omega\rho$ tezlik bilan harakatlanadi (2.16-rasm). Ammo $\rho = r\sin\beta$ bo'lganligi sababli (2.44) ifoda o'zgarmaydi.Bu yerda β $\boldsymbol{\omega}$ va $\mathbf{r}$ vektorlar orasidagi burchak. Demak, koordinata boshini aylanish o'qining qaysi nuqtasida olish muhim emas ekan.

Markazga intilma tezlanish ifodasi (2.41) da qo'shimcha hadning yuzaga kelishining sababi endi bizga oydinlashdi (2.17-rasm).

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}) - \omega^2\mathbf{r}. \tag{2.45}$$

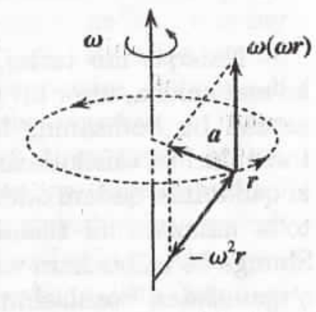
Shunday qilib, a tezlanish aslida markazga emas, balki aylanish o'qiga yo'nalgan va shunga ko'ra uni ***o'qqa intiluvchi*** tezlanish deb atasa to'g'ri bo'lardi. Ammo masala faqat atalishda emas.

Chiziqli va burchak tezlik vektorlarini bog'lovchi $\mathbf{v} = [\omega\mathbf{r}]$ munosabat burchak tezlik o'zgaruvchi, ya'ni $\omega(t)$ vaqtga bog'liq bo'lganda ham o'rinli bo'ladi. Bu holda tezlanish ifodasi (2.40) da qo'shimcha had paydo bo'ladi:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left[\frac{d\omega}{dt}\mathbf{r}\right] + \left[\omega\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right] = [\boldsymbol{\beta}\mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}]. \tag{2.46}$$

Bu yerda $\boldsymbol{\beta} = d\omega/dt$ ***burchak tezlanish*** deb ataladi. Burchak tezlik o'zgarsa, masalan, biror belgilangan o'q atrofida uning son

qiymati o'zgarsa yoki vaqt o'tishi bilan aylanish o'qining o'zi buralsa (yoki ikkala hol ham yuz bersa), bu kattalik paydo bo'ladi.



2.17-rasm. Markazga intilma tezlanish.

Shu bilan birga, burchak tezlik ω bu odatdagi vektor emasligini ta'kidlash lozim. Koordinatalar sistemasining o'qlari burilganda, u haqiqiy vektorlarga o'xshash, masalan, $\mathbf{r}$ va $\mathbf{v}$ kabi qiymatini ham fazodagi yo'nalishini ham saqlaydi. Biroq koordinatalar sistemasi o'qlarini qarama-qarshi tomonga yo'naltirilgan holat ko'rilsa, ya'ni $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$ almashtirilsa (inversiya operatsiyasi, bunda $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$), tenglamalar (2.39) va (2.40) invariant qolishi uchun ω ning ishorasi o'zgarmasligi lozim bo'ladi. Bu xossaning sodda fizik (yoki geometrik) izohi ham mavjud: ω ni biz parma qoidasiga asosan aniqladik, lekin uchala koordinata o'qlarining ishorasi o'zgartirilganda o'ng vint chap vintga aylanib qoladi. Bunday kattaliklar ***psevdovektorlar*** deb ataladi (ilovaga q.). Har qanday ikki haqiqiy vektorning vektor ko'paytmasi psevdovektordir. (Mos ravishda, aralash ko'paytma a[bc] ***psevdoskalar*** deb ataladi). Yuqorida aytilganlarga asosan har qanday yo'nalish va uch proyeksiyada tasvirlash mumkin bo'lgan kattaliklarni vektor kattalik deb atash to'g'ri bo'lavermaydi.

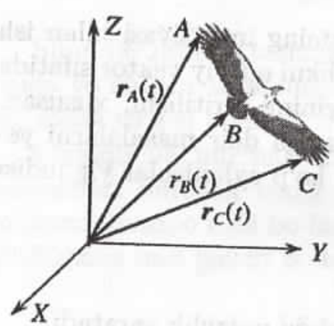
Hozircha biz koordinatalar sistemasining inversiyasi bilan ish ko'rmaganligimiz sababli, ω burchak tezlikni odatiy vektor sifatida qarash mumkin. Burchak tezlik vektorining kiritilishi, xususan, chekli o'lchamdagi qattiq jism dinamikasiga doir masalalarni yechishda jism harakatini ikki yoki undan ko'p aylanishlar yig'indisi sifatida qarash:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$$

yoki teskari operatsiya'ni amalga oshirishda qulaylik yaratadi.

2.4 Mutlaq qattiq jism va moddiy nuqta yaqinlashishi

Nafaqat fan tarixi, balki insonning kundalik hayot tajribasi ko'rsatishicha, biror bir yangi hodisani o'rganishga kirishishda, to'satdan bu hodisaning barcha, aksariyat hollarda o'ta murakkab tomonlari va tafsilotlarining sababini qidirishga kirishmasdan, balki qadamma-qadam oddiy qonuniyatlarni tushunishdan hodisaning to'la manzarasini tushunishga o'tish maqsadga muvofiq bo'ladi. Shunga ko'ra biz ham mexanikani oddiy ko'rinishdagi harakatlarni o'rganishdan boshlashimiz lozim. Ular asosida, bu fanning asosiy g'oya va tushunchalarini o'rgana boramiz, pirovardida o'rganadigan harakatlar doirasini kengaytirib borsak bo'ladi. Haqiqatan ham, dastlabki damlardan murakkab sistemalar harakat qonunlarini tushunib olishga umid qilmasa ham bo'ladi. Masalan, uchib borayotgan qushning tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan vaqtning qandaydir bir momentidagi holatini o'ta aniq bilish uchun turli nuqtalarining radius-vektorlarini bilish kerak (2.18*a*-rasm). Uchishning matematik tavsifi – vaqtga bog'liq bo'lgan ko'p sonli kattaliklarni o'z ichiga olgan munosabatlardan iborat bo'ladi. Bu munosabatlardan uchish trayektoriyasini aniqlash shubhasiz murakkab masaladir.

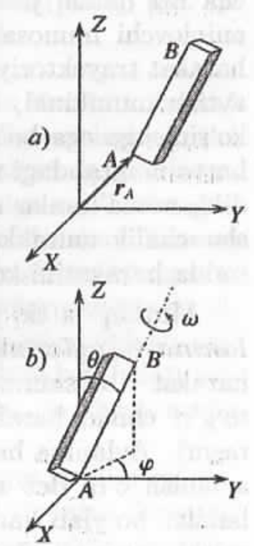


2.18*a*-rasm.

Avvalambor o'ta muhim soddalashtirishni qo'llaymiz. Dastlabki bosqichda ***mutlaq qattiq jism*** harakatini o'rganamiz. Mutlaq qattiq jism, shunday jismki, har qanday harakatlarda ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofa o'zgarmaydi. Boshqacha so'z bilan ta'riflasak, jismning deformatsiyasi inobatga olinmaydi. Tashqi ta'sirlar natijasida har qanday jism ma'lum darajada u yoki bu ko'rinishdagi deformatsiyaga uchraydi. Po'lat sterjen hatto atmosfera bosimi va

temperaturaning kichik o'zgarishlarida ham, o'z shakli va o'lchamlarini o'zgartiradi. Bunday o'zgarishlar faqat o'ta sezgir asboblar yordamida aniqlanishi mumkin. Biroq bu sterjen o'ta qo'pol mexanizmning biror qismi bo'lsa, bunday deformatsiyalarni e'tiborga olmasa ham bo'ladi. Bevosita, uning harakatini mutlaq qattiq jism harakat qonunlariga bo'ysunadi deb, mexanizm konstruksiyasi tayyorlanishi mumkin. Biroq o'sha sterjen murakkab elektron asbobning biror qismi bo'lsa, sterjen deformatsiyasi masalasi konstruktorning asosiy vazifasi bo'lib qoladi va mutlaq qattiq jism yaqinlashishini qo'llab bo'lmaydi. Shuning uchun, mutlaq qattiq jism haqidagi tasavvur, umuman hech bir deformatsiyaga uchramaydigan jism haqidagi tasavvur voqe'likni real sharoitga yaqinlashtirishdan yoki qulay ideallashtirishdan iboratdir (yoki fiziklar tilida model). Uning qo'llanish yoki qo'llanmasligi harakat kuzatilayotgan aniq sharoitga bog'liq bo'ladi.

Mutlaq qattiq jism harakat qonunlarining nisbatan sodda ko'rinishga ega bo'lishi, uning holatini biror bir koordinatalar sistemasida qat'iy matematik tavsiflash uchun, deformatsiyalanuvchi jismlar holatini aniqlash uchun talab qilinadiganga nisbatan kam parametrlar (koordinatalar) zarur bo'ladi. Jismning fazodagi holatini yagona tarzda aniqlash uchun talab qilinadigan o'zaro bog'lanmagan parametrlar soni, uning ***erkinlik darajasi*** deb ataladi. Mutlaq qattiq jismning erkinlik darajasi nimaga teng ekanligini aniqlaylik. Masala yaqqol ko'rinishga ega bo'lishi uchun qattiq jismimiz, 2.18*b*-rasmda tasvirlanganidek, parallellopiped shaklida va AB chiziq uning qandaydir ikki qirrasining kesishish chizig'i bo'lsin. Bunday jismning erkinlik darajasi ikki qismdan iborat bo'ladi. Ulardan biri A nuqtaning erkinlik darajasi bo'lib, uning fazoda ko'chishini aniqlovchi, masalan, oldindan berilgan koordinatalar sistemasida A nuqta radius-



2.18*b*-rasm.

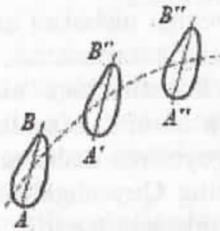
vektori $\mathbf{r}_A$ ni aniqlovchi x_A, y_A, z_A Dekart koordinatalaridir bo'lishi mumkin (2.18a-rasm). Bir A nuqtaning aniq belgilangan holatida butun jismning boshqa nuqtalarining holati turlicha bo'lishi mumkin. Shu sababli jismning fazodagi holatinini to'liq aniqlash uchun yana uchta kattalik kerak bo'ladi. Bu kattaliklar sifatida θ, φ va ω uch burilish burchaklarini tanlash mumkin (2.18b-rasm). θ – AB kesmaning dastlabki koordinatalar sistemasining z o'qiga nisbatan og'ish burchagi. φ – belgilangan θ og'ish burchagi uchun AB kesmaning z o'qi atrofida burilish burchagi, nihoyat, ω – butun jismning AB chiziq atrofidagi burilish burchagi. Shunday qilib, mutlaq qattiq jism erkinlik darajasi 6 ga teng bo'lib, undan uchtasi A nuqtaning koordinatalari x_A, y_A, z_A, yana uchtasi burilish burchaklari θ, φ va ω.

Shunday qilib, qattiq jismning ixtiyoriy harakatini tavsiflash uchun 6 ta parametrlarning vaqtga bog'lanish qonuniyatini bilish yetarli bo'lar ekan, ya'ni $x_A(t), y_A(t), z_A(t), \theta_A(t), \varphi_A(t), \omega_A(t)$ vaqt bo'yicha o'zgaruvchi funksiyalarni bilish shart ekan. Hozircha biz qattiq jism harakati qonunlarini, ya'ni bu funksiyalarni aniqlovchi munosabatlar yoki tenglamalarni va shu asosda jism harakat trayektoriyasini oldindan aniqlashni bilmasakda, oldindan aytish mumkinki, bu qonunlar umuman olganda o'ta murakkab ko'rinishga ega bo'ladi. Bunday deyishimizning sababi shundaki, hatto maktabdagi matematikadan olgan bilimimiz shuni ko'rsatadiki, noma'lumlar soni qancha ko'p bo'lsa, tenglamalarni yechish shunchalik murakkab bo'ladi. Shuning uchun mutlaq qattiq jism sodda harakatini ko'rib chiqamiz.

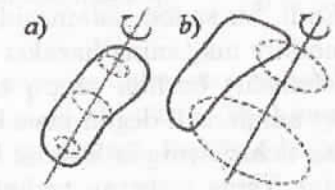
Mutlaq qattiq jism harakatini ikki asosiy harakatga – ***ilgarilanma*** va ***aylanma*** – harakatlarga ajratish mumkin. Ilgarilanma harakat – bu shunday harakatki, jism bilan bog'langan har qanday to'g'ri chiziq harakat davomida o'z-o'ziga parallel qoladi (2.19-rasm). Aylanma harakatda jismning barcha nuqtalari, markazlari aylanish o'qi deb ataluvchi birgina to'g'ri chiziqda yotuvchi aylanalar bo'ylab harakat qiladi (2.20-rasm). Bunda jism orientatsiyasi o'zgaradi. Jismning bir holatdan ikkinchi holatga ko'chishini ilgarilanma harakat va biror o'q atrofidagi buralishlar yig'indisi sifatida qarash mumkin.

Agar mutlaq qattiq jism faqat ilgarilanma harakat qilayotgan

bo'lsa, uning fazodagi barcha holatlari uning faqatgina qandaydir bir nuqtasi, masalan, 2.19-rasmdagi A nuqtasining holati bilan aniqlanadi. Shunday ekan, qattiq jism ilgarilanma harakatini matematik tavsiflaganimizda uning o'lchamlarining ahamiyati yo'q ekan va butun jismni birgina nuqta bilan almashtirish mumkin. Bu nuqtaning fazodagi holati umumiy ko'rinishda uch erkinlik darajasi bilan aniqlanadi. Bu nuqtaning radius-vektorini aniqlovchi $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ Dekart koordinatalardir. Bu esa moddiy nuqta yaqinlashishining o'zginasidir.



2.19-rasm. Mutlaq qattiq jism ilgarilama harakati.



2.20-rasm. Mutlaq qattiq jism aylanma harakati.

Yuqorida ko'rgan qattiq jismning ilgarilanma harakati, "katta" jismni moddiy nuqta bilan almashtirish mumkinligiga birgina misol emas. "Real" jismni moddiy nuqta bilan almashtirish, ko'rilayotgan masala doirasida, jism o'lchamlari ahamiyatga ega bo'lmagan barcha shunday holatlar uchun o'rinli bo'ladi. Masalan, Yerning Quyosh atrofidagi aylanma harakat trayektoriyasi hisoblanganda Yerning o'z o'qi atrofidagi harakatini va o'lchamlarini e'tiboga olmasa ham bo'ladi, chunki ular Yerdan Quyoshgacha bo'lgan masofaga nisbatan juda kichik. Natijada Yerning fazodagi holati birgina nuqta bilan aniqlanadi va uning harakatini tavsiflash ancha soddalashadi.

Moddiy nuqta yaqinlashishi mexanikada g'oyat muhim rol o'ynashining yana bir muhim sababi bor. Masala shundan iboratki, har qanday o'lcham va shakldagi jismni, juda kichik o'zaro ta'sirlashuvchi qismlar to'plamidan iborat deb qarash mumkin. Har bir shunday qismlarni – zarralarni moddiy nuqta deb qarash mumkin va demak, shunday ekan, har qanday jism harakati masalasi moddiy nuqtalar to'plamining harakati masalasiga keltirish mumkin. Qattiq jismlarning aylanma harakati va suyuqliklar harakati qonunlarini aniqlashda, xuddi shu yo'lning qo'llanilishini ko'ramiz. Yuqorida aytilganlardan xulosa shuki, moddiy nuqta yaqinlashishi (yoki ba'zida aytilishicha moddiy nuqta modeli) klassik mexanika asosida yotadi.

2.5 Galilei almashtirishlari va tezliklarni qo'shish qonuni

Endi, bir sanoq sistemasidagi kuzatuvchiga nisbatan aniqlangan moddiy nuqtaning harakat qonuni (uning koordinatasi, tezligi va tezlanishi) boshqa sanoq sistemadagi kuzatuvchiga nisbatan qanday aniqlanadi degan masala ustida to'xtalamiz. Masalan, Yer sirtidan uchirilayotgan kosmik kemaning Quyoshga nisbatan tezligi, uning Yerga nisbatan tezligi bilan Yerning Quyoshga nisbatan tezligini tezliklarni qo'shish qoidasi yordamida aniqlanadi.

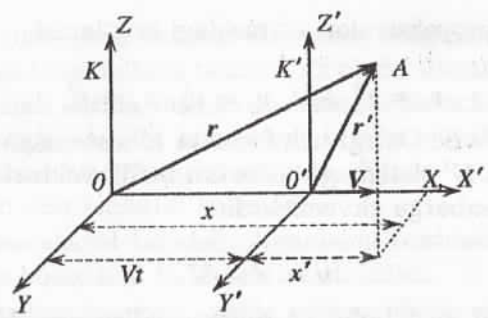
Yuqorida qo'yilgan savolning prinsipial javobi (juda ko'p miqdordagi tajriba ma'lumotlarining umumlashtirish oqibati), nuqtaning fazodagi vaziyati va, mos ravishda, uning tezligi va tezlanishi vektor kattalik ekanligidan kelib chiqadi. U holda vektorlarni qo'shish qoidasi quyidagini beradi:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \rightarrow \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} + \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2}, \tag{2.47}$$

yoki xuddi shuning o'zi,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2. \tag{2.48}$$

Bu masalani batafsilroq ko'rib chiqaylik. Bir-biriga nisbatan doimiy **V** tezlik bilan harakatlanayotgan ikki sanoq sistemasi bor bo'lsin (2.21-rasmga q.). K harfi bilan belgilangan sistemani shartli ravishda qo'zg'almas deb hisoblaymiz. U holda ikkinchi K' sistema tekis va to'g'ri chiziqli harakat qiladi. Soddalik uchun, ikkala sistema koordinata o'qlarini quyidagicha tanlaymiz: Ox va $O'x'$ o'qlar ustma-ust tushsin, Oy va $O'y'$ hamda Oz va $O'z'$ o'qlar bir-biriga parallel bo'lsin.



2.21-rasm. Galilei almashtirishlari.

Qandaydir A moddiy nuqtaning koordinatalari mos ravishda K sistemada x, y, z va K' sistemada esa x', y', z' bo'lsin. Vaqt hisobini ikkala sistema koordinata boshlari ustma-ust tushgan holatdan boshlaymiz.

Avval harakatlanayotgan nuqtaning har ikkala K va K' sistemalardagi koordinatalarining o'zaro bog'lanishini aniqlaymiz, so'ngra, tezliklar o'rtasidagi bog'lanishni aniqlaymiz. Rasmdan ko'rinib turibdiki, $x = x' + Vt, y = y'$ va $z = z'$. Kundalik tajriba va juda ko'p eksperimental ma'lumotlarni umumlashtirish shuni tasdiqlaydiki, klassik mexanikada $V \ll c$ bo'lganda vaqt ***mutlaq***, ya'ni har ikkala sistemada ham vaqtning kechishi birday: $t = t'$. Natijada quyidagi to'rt munosabatga ega bo'lamiz:

$$x = x' + Vt,\ y = y',\ z = z',\ t = t' \tag{2.49}$$

yoki vektor ko'rinishda yozish mumkin:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t',\ t = t'. \tag{2.50}$$

Bu munosabatlar ***Galilei almashtirishlari*** deyiladi.

Tezlik - bu radius-vektordan vaqt bo'yicha olingan hosila ekanligini esga olib, A nuqtaning ikkala sistemadagi tezliklari o'rtasidagi bog'lanishni, (2.49) munosabatni vaqt bo'yicha differensiallab, topamiz:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V,\ \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt},\ \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt},$$

ya'ni tezliklar proyeksiyalari o'rtasidagi bog'lanish:

$$v_x = v'_x + V,\ v_y = v'_y,\ v_z = v'_z$$

ko'rinishda bo'ladi. Oxirgi uch formula K sistemaga nisbatan tezlik vektori $\mathbf{v}$ va K' sistemaga nisbatan tezlik vektori $\mathbf{v}'$ o'rtasidagi quyidagi munosabatga ekvivalentdir:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}. \qquad (2.51)$$

Bu tenglikni vaqt bo'yicha differensiallaymiz. $\mathbf{V}$ ning doimiy ekanini e'tiborga olib,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt},\ \text{yoki}\ \mathbf{a} = \mathbf{a}'. \qquad (2.52)$$

ga ega bo'lamiz. Boshqacha aytganda, qandaydir jismning tezlanishi barcha, bir-biriga nisbatan o'zaro tekis va to'g'ri chiziqli harakatlanayotgan sanoq sistemalarda bir xil bo'ladi.

2.6 Gorizontga burchak ostida otilgan jism harakati (ballistik harakat)

Jismlarning gorizontga nisbatan burchak ostida otilgan harakati – ***ballistik*** deyiladi. Bunday harakatga voleybol koptogining, miltiqdan otilgan o'qning yoki yuqoriga sakragan sportchining harakatini misol sifatida keltirish mumkin. Jismning bunday harakati Yerning tortishish kuchi ta'sirida yuz beradi, havoning qarshiligi harakat trayektoriyasiga kichik tuzatish kiritadi. Bu tuzatish kichik bo'lganligi uchun masalani soddalashtirish maqsadida ko'p hollarda havoning qarshiligi inobatga olinmaydi. Ammo jismning harakati uzoq vaqt davom etsa, havoning qarshiligi ahamiyat kasb eta boshlaydi. Bunga yomg'ir tomchisining harakati misol bo'la oladi. Bu yerdagi tahlilda biz havoning qarshiligini e'tiborga olmaymiz. Soddalik uchun jism harakatini Yer sirti yaqinida sodir bo'layapti deb qaraymiz. Bunda bizga otish jarayoni qanday amalga oshirilganligi ahamiyatga ega emas, va jismning otilgandan keyingi, ya'ni jismning havodagi og'irlik kuchi ta'siridagi erkin harakatini kuzatamiz.

Shunday qilib, jism harakat davomida birgina, pastga yo'nalgan 9,8 m/s^2 ga teng bo'lgan tezlanishni oladi. Jismning gorizontga nisbatan burchak ostida otilgan harakatini birinchi bo'lib Galilei talqin qilib berdi. U, bu harakatni, ikki mustaqil – vertikal va gorizontal tashkil etuvchilarini alohida-alohida tahlil qilish bilan to'la tavsiflash mimkinligini ko'rsatdi.

Ballistik harakatni batafsil o'rganishni boshlashdan avval bir qator umumiy holatlarni ta'kidlab o'tish lozim:

1. Gorizontga burchak ostida otilgan jismning harakati Yer tortish kuchidan boshqa kuchlar (masalan shamol) bo'lmasa, tekislikda, ya'ni ikki o'lchamli fazoda yuz beradi (2.22-rasmga q.). Bu yerda ixtiyoriy vektor ikkita o'zaro perpendikular o'qlarga proyeksiyasi bilan to'liq aniqlanishini eslash yetarli. Bizning misolda o'qlardan biri gorizontal tekislikda yotadi. Bu dekart koordinatalar sistemasining, masalan, X o'qi bo'lsin. Ikkinchisi esa vertikal o'q bo'lib, uni Y o'qi deb olamiz.

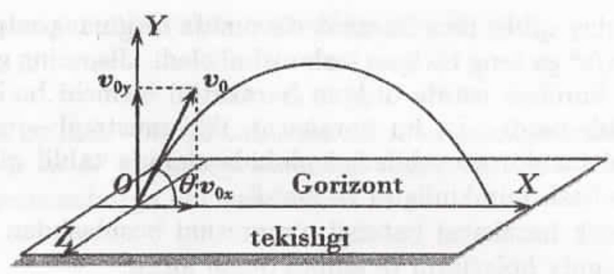
2. Bizga ma'lum bo'lgan barcha hollarda gorizontga burchak ostida otilgan jism harakati Yer sirtiga yaqin masofalarda sodir bo'ladi. Shu sababli barcha jismlarning harakatini birday talqin qilish mumkin, ya'ni erkin tushish tezlanishi $\mathbf{g}$ ni o'zgarmas deb olish mumkin. Haqiqatan ham, Yerning radiusiga ($R_{yer} = 6{,}4 \cdot 10^6$ m) nisbatan amaldagi balandliklarning barchasi juda kichik ekanligi yuqoridagi tasdiqning o'rinli ekanligini ko'rsatadi.

3. Alohida ta'kidlanmasa havoning qarshiligini inobatga olmaymiz.

4. Kinematik masalada harakati o'rganilayotgan jismning shakli va o'lchamlari e'tiborga olinmaydi. Shu tartibga amal qilib otilayotgan jismni moddiy nuqta deb qarash mumkin.

Faraz qilamiz, gorizontga nisbatan θ_0 burchak ostida otilgan jismning boshlang'ich tezligi $\mathbf{v}_0$ bo'lsin (2.22-rasm). Agar jism fazoga, gorizont chizig'idan yuqoriga otilsa, θ_0 musbat, agar gorizont chizig'idan pastga otilsa, θ_0 manfiy bo'ladi.

Dekart koordinatalar sistemasini yuqorida ta'kidlaganimizdek tanlasak, jismning faqat Y o'qi yo'nalishidagi tezlanishi noldan farqli bo'ladi. Shunday qilib, jism tezlanishining mos o'qlarga proyeksiyalari $a_x = 0$, $a_y = -g$. Masalani umumiy holda ko'rib chiqamiz. Jismning otilish vaqtidagi ($t_0 = 0$) koordinatasi $x(0) =$



2.22-rasm. Gorizontga nisbatan burchak ostida otilgan jism harakatiga doir chizma.

$x_0, y(0) = y_0$ bo'lsin. Boshlang'ich tezlik quyidagi proyeksiyalarga ega bo'ladi:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} = v_0 \cos\theta, \\ v_y &= v_{0y} - gt = v_0 \sin\theta - gt. \end{aligned} \tag{2.53}$$

bu yerda $\mathbf{v}_0$ jismning boshlang'ich tezligi, θ otilish burchagi.

Jismning koordinatasi vaqt o'tishi bilan quyidagicha o'zgaradi:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos\theta + x_0, \\ y &= v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2 + y_0. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Olingan natijani tahlil qilamiz. Jismning otilish vaqtidagi ($t_0 = 0$) koordinatasi $x(0) = 0. y(0) = 0$ bo'lsin. Boshqacha tilda, jism boshlang'ich vaqtda Yer sirtida yotibdi.

A. Otilgan jismning uchish – Yerga qaytib tushish vaqtini aniqlaymiz. Buning uchun (2.54) ifodada y koordinatani nolga teng deb olamiz:

$$v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2 = 0, \tag{2.55}$$

ya'ni jism yerga tushish vaqtida balandlik nolga teng bo'ladi. (2.55) tenglama ikkita yechimga ega. Ulardan biri jismning uchish vaqtini aniqlaydi:

$$t_0 = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}. \tag{2.56}$$

$t_1 = 0$ bo'lgan ikkinchi yechim ham ma'noga ega. U jismning otilish vaqtini ko'rsatadi.

B. Jismning uchish masofasini aniqlaymiz. Buning uchun (2.54) ifodalarning birinchisida vaqtning o'rniga uchish vaqti (2.56) qo'yamiz:

$$l = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}. \tag{2.57}$$

Bu ifodadan ko'ramizki, jism boshlang'ich tezligining moduli birday bo'lganda eng uzoq masofaga borib tushishi uchun uni 45° burchak ostida otish kerak ekan.

C. Jism maksimal ko'tarilish balandligiga uchish vaqti (2.56) ning yarmiga teng vaqtda erishadi. Bu balandlikni aniqlash uchun (2.54) tenglamaning ikkinchisidan foydalanib quyidagini topamiz:

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g}. \tag{2.58}$$

D. (2.54) tenglamalardan jismning harakat trayektoriyasi formulasini aniqlash mumkin. Buning uchun (2.54) tenglamalarning birinchisidan vaqtni topib ikkinchisiga qo'yamiz:

$$y - y_0 = x \operatorname{tg}\theta - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x^2. \tag{2.59}$$

Bu ifoda gorizontga burchak ostida otilgan jismning harakat trayektoriyasini aniqlaydi. Bu ifoda shoxlari pastga qaragan parabola tenglamasidir. Bu yerda boshlang'ich tezlik va otilish burchagi o'zgarmas kattalik ekanligini eslatib o'tamiz.

Savollar

2.1. Moddiy nuqtaga ta'rif bering. Misollar keltiring.

2.2. Moddiy nuqta nechta erkinlik darajasiga ega? Velosipedda nechta erkinlik darajasi bor?

2.3. Velosiped harakatini kuzatishda uni moddiy nuqta deb qarash mumkin bo'ladigan masala tuzing.

2.4. O'ng va chap koordinatalar sistemasi nima bilan farqlanadi?

2.5. Jismning bosib o'tgan yo'li qanday aniqlanadi?

2.6. Tezlik va tezlanishga ta'rif bering.

2.7. Aylanma harakatda burchak tezlik qanday kattalik?

2.8. Tekis aylanma harakatda radius-vektor, tezlik, tezlanish va burchak tezliklar orasidagi bog'lanishlar ifodalarini yozing.

2.9. Tekis aylanma harakatda tezlanish nima uchun markazga intilma deyiladi?

2.10. Mutlaq qattiq jism uchun moddiy nuqta yaqinlashishi qachon o'rinli bo'ladi?

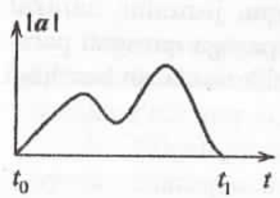
2.11. Mutlaq qattiq jism nechta erkinlik darajasiga ega?

2.12. Yerning Quyosh atrofidagi harakati orbitasini aylanadan iborat deb, uning harakat tezlanishini hisoblang. Bu tezlanishni Yer sirtidagi erkin tushish tezlanishi bilan solishtiring.

2.13. Yer ekvatorida tinch turgan qandaydir jismning Quyoshga nisbatan taxminiy harakat trayektoriyasini chizing.

2.14. Gorizontga burchak ostida otilgan jism harakati qanday xossalarga ega.

Masalalar



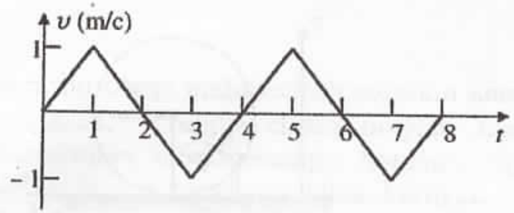
2.1-masalaga oid chizma.

2.1. Rasmda to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlanayotgan jism tezlanishi modulining vaqtga bog'lanish grafigi tasvirlangan. Jism harakat tezligi modulining maksimal qiymatiga mos keluvchi t_x vaqtni aniqlang.

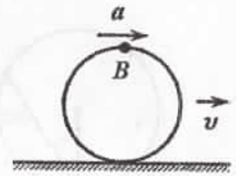
2.2. Rasmda biror bir jism tezligining vaqtga bog'lanish grafigi keltirilgan. Bu jism uchun tezlanish va bosib o'tilgan yo'l grafigini chizing.

2.3. R radiusli shar gorizontal tekislikda **a** tezlanish bilan sirpanishsiz dumalamoqda. Rasmdagi B nuqtaning tezligi v ga teng bo'ladigan vaqt momentidagi tezlanishini aniqlang.

2.4. Minomyot batareyasi gorizontga nisbatan 45^o burchak tashkil qilgan qiyalikka ega bo'lgan tog' bag'rida joylashgan. Mina tog' bag'rining maksimal balandligiga yetishi uchun qurol stvolini



2.2-masalaga oid chizma.



2.3-masalaga oid chizma.

gorizontga nisbatan qanday α burchak ostida o'rnatish lozim? Havoning qarshiligini hisobga olmang.

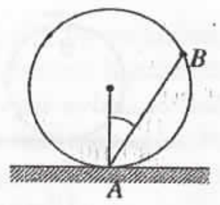
2.5. Qiyaligi 45^o bo'lgan tog' yuqorisidan jism otilmoqda. Jism tog' yon bag'ridan maksimal uzoqlikka tushishi uchun uni tog' tepasidan qanday φ burchak ostida otish kerak?

2.6. Atlet yugurib kelib zarb bilan yadroni uloqtirmoqda. Uloqtirish vaqtida yadroning atletga nisbatan tezligi kattaligini yugurish tezligiga teng deb hisoblab, uchish uzoqligi maksimal bo'lishi uchun yadroni yerga nisbatan qanday α burchak ostida otish kerak. Atletning balandligi e'tiborga olinmasin.

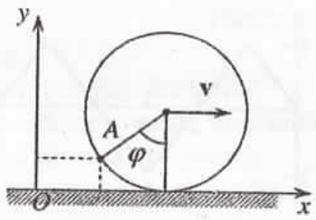
2.7. To'la Quyosh tutilishi vaqtida Yer sirti bo'ylab Oy soyasining harakat tezligini toping. Quyosh tutilishi ekvatorda kuzatilmoqda. Soddalik uchun Quyosh, Yer, Oy bir tekislikda joylashgan, Yer o'qi esa bu tekislikka perpendikular deb hisoblang. Yorug'lik tezligi boshqa barcha tezliklarga nisbatan cheksiz katta deb olinsin. Oy orbitasining radiusi $R_{Oy} = 3,8 \cdot 10^8$ m.

2.8. R radiusli gardish gorizontal sirt bo'ylab ω burchak tezlik bilan dumalamoqda (chizmaga q.). Ishqalanish yo'q. Uning harakatini oniy A o'q atrofidagi aylanish deb qarash mumkin. Gardishdagi B nuqtaning tezlanishi $\omega^2 x$ va A nuqtaga tomon yo'nalgan deb ta'kidlash o'rinlimi (x – A va B nuqtalar orasidagi masofa)? B nuqtaning harakatini oniy, A o'q atrofidagi aylanish deb qarab uning uchun tezlanish formulasini keltirib chiqaring.

2.9. R radiusli g'ildirak gorizontal yo'l bo'ylab sirpanishsiz **v** tezlik bilan bir tekis dumalamoqda (chizmaga q.). G'ildirak gardishidagi ixtiyoriy A nuqtaning x va y koordinatalarini vaqt t yoki g'ildirak burilish burchagi φ ning funksiyasi ko'rinishida ifodalang. $t = 0$ da: $\varphi = 0, x = 0, y = 0$. Topilgan ifodalar



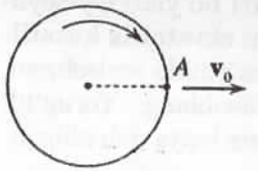
2.8-masalaga oid chizma.



2.9-masalaga oid chizma.

yordamida xOy tekisligida g'ildirak gardishidagi nuqtaning harakat grafigini chizing.

2.10. G'ildiragining radiusi R bo'lgan avtomobil gorizontal yo'lda $\mathbf{v}$ tezlik bilan harakatlanmoqda, shu bilan birga $v^2 > Rg$, bu yerda g – erkin tushish tezlanishi. Avtomobil g'ildiragidan yuqoriga sachrayotgan loy qanday maksimal h balandlikka otilishi mumkin? Avtomobilning xuddi shu tezligida, g'ildirakning loy hammasidan yuqori otiladigan nuqtasini ko'rsating. Yuqoriga otilgan loy harakatiga havoning qarshiligini e'tiborga olmang.



2.11-masalaga oid chizma.

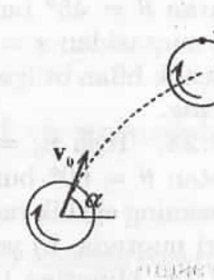
2.11. R radiusli g'ildirak v tezlik bilan gorizontal tekislikda harakat qilmoqda va ω burchak tezlik bilan aylanmoqda. Gardishdagi A nuqta fazoda qandaydir bir trayektoriyani chizadi (chizmaga q.). Shu nuqta g'ildirak markazi sathiga mos kelgan holdagi trayektoriya egrilik radiusi ρ ni toping.

2.12. O'z o'qi atrofida ω burchak tezlik bilan aylanayotgan R radiusli disk gorizontga α burchak ostida v_0 tezlik bilan otildi. Gardishdagi A nuqta fazoda qandaydir trayektoriyani chizadi (chizmaga q.). Eng yuqori ko'tarilishda trayektoriya egrilik radiusi ρ ni toping. Bunda A nuqta g'ildirak markazi ustida bo'lsin.

2.13. Avtomobil dvigatelidan aylanish yetakchi g'ildiraklarga differensial deb ataluvchi qurilma yordamida uzatiladi. Bu qurilma evaziga har bir yetakchi g'ildirak turlicha tezlik bilan aylanishi mumkin. Differensial nima uchun kerak? Nima uchun ikkala yetakchi g'ildiraklarni mustahkam holda dvigateldan aylanish uzatiladi-

gan, bir o'qqa mahkamlash mumkin emas?

2.14. To'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanayotgan moddiy nuqta harakati $S(t) = 4t^3 + 2t + 1$ tenglama bilan berilgan. $t_1 = 1$ s dan $t_2 = 2$ s gacha vaqt oralig'ining boshida va oxirida tezlik va tezlanishning oniy qiymatlarini, tezlikning o'rtacha qiymatini hamda vaqt davomida bosib o'tgan yo'lini toping.



2.12-masalaga oid chizma.

2.15. Ikki jism harakati $x_1(t) = 0,75t^3 + 2,25t^2 + t$, $x_2(t) = 0,25t^3 + 3t^2 + 1.5t$ tenglamalar bilan aniqlanadi. Bu jismlar tezlanishlarining kattaligi bir xil bo'lgan vaqt momentini, shu vaqt momentidagi tezlik va tezlanish qiymatlarini toping.

2.16. Tosh balandligi $h = 122,5$ m bo'lgan qoyadan gorizontal yo'nalishda otildi. Tosh qoya asosidan $s = 92$ m masofada Yerga tushadi. Tosh qanday tezlik bilan otilganligini aniqlang.

2.17. Birinchi jism A nuqtadan erkin tushmoqda. Shu vaqtda B nuqtadan ikkinchi jism birinchi jism bilan to'qnashadigan qilib $\mathbf{v}_0$ tezlik bilan otilgan. Birinchi jism H, ikkinchisi S masofani o'tganda to'qnashish yuz beradi. Bunday to'qnashuv masalasi uchun ikkinchi jismning otilish burchagi θ uning boshlang'ich tezligiga bog'liq emasligini ko'rsating. $H/S = \sqrt{3}$ deb otilish burchagini aniqlang.

2.18. Minoradan 40 m/s tezlik bilan gorizontal yo'nalishda jism otilgan. Harakatning 3-sekundida jismning tezligi nimaga teng bo'ladi va gorizont tekisligi bilan qanday burchak hosil qiladi?

2.19. Ikkita jism vertikal yo'nalishda bir xil tezlik bilan yuqoriga Δt interval bilan ketma-ket otilgan. Birinchi jism otilgandan keyin qancha vaqtdan so'ng jismlar uchrashadi?

2.20. Boshlang'ich tezlik $\mathbf{v}_0$ bilan otilgan jismning $\Delta\mathbf{r}$ ko'chish vektorining vaqtga bog'lanishi $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{g}t^2/2$ ifoda bilan aniqlanishini ko'rsating.

2.21. $h_0 = 20$ sm balandlikdan tashlangan elastik shar qiya o'rnatilgan stolga uriladi. Urilish joyidan qanday masofada sharcha stolga ikkinchi marta uriladi? Stolning gorizontga nisbatan og'ish burchagi $\theta = 45^o$.

2.22. Tosh Yer sirtidan $h = 2,1\,\mathrm{m}$ balandlikdan gorizontga nisbatan $\theta = 45^o$ burchak ostida otildi va gorizontal yo'nalishda otish nuqtasidan $s = 42\,\mathrm{m}$ masofada Yerga tushdi. Toshning qanday tezlik bilan otilganini; uchish vaqtini va ko'tarilish balandligini aniqlang.

2.23. Tosh $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$ boshlang'ich tezlik bilan gorizontga nisbatan $\theta = 60^o$ burchak ostida otildi. Toshning uchish trayektoriyasining egrilik radiusi quyidagi hollar uchun aniqlansin: a) eng yuqori nuqtada; b) yerga qaytib tushish momentida.

2.24. Minutiga 1200 marta aylanayotgan samolet parragi motor o'chirilgandan keyin 8 sekunddan keyin to'xtagan. Parraklarning aylanishini tekis sekinlanuvchi deb qarasak, u bu vaqt ichida necha marta aylangan?

2.25. Tekis yo'lda $20\,\mathrm{m/s}$ tezlik bilan harakatlanayotgan avtomobilning motori o'chirilgan. $20\,\mathrm{s}$ o'tgandan keyin uning tezligi $10\,\mathrm{m/s}$ ga qadar kamaygan. *a*) avtomobil qanday o'rtacha tezlanish bilan harakatlangan? *b*) u qancha masofadan keyin to'xtagan.

2.26. Erkin tushayotgan jism yo'lning birinchi yarmining oxirida $20\,\mathrm{m/s}$ tezlikka erishgan bo'lsa, u qanday balandlikdan tushayotgan bo'lgan.

2.27. Tekis tezlanuvchan harakat qilayotgan avtomobil birinchi $3\,\mathrm{s}$ da $18\,\mathrm{m}$, birinchi $5\,\mathrm{s}$ da esa $40\,\mathrm{m}$ masofani bosib o'tgan. Avtomobilning boshlang'ich tezligini va tezlanishini aniqlang.

2.28. Avtobus ko'ringanda yo'lga chiqayotgan yo'lovchi yo'ldan S, avtobus esa L masovada bo'lgan. Yo'lovchi avtobusga chiqishga ulgirishi uchun qanday minimal tezlik bilan harakat qilishi kerak? Avtobusning tezligi v.

3-bob

Dinamika

3.1 Newton qonunlari. Inersial va noinersial sanoq sistemalar

Mexanikaning asosiy qonunlari klassik ko'rinishda Newton tomonidan aniq ta'riflangan. Bu qonunlarning ta'riflanishi zamonaviy ta'riflar bilan juda ham mos kelmasada, jismlar orasidagi o'zaro ta'sir aniq berilganda ularning harakati haqidagi fanning jismlar harakat dinamikasining muvaffaqiyat bilan shakllanishiga asos bo'lib xizmat qilgan. Newton fizikani chuqur bilishi va kuchli matematik intuitsiyasi tufayli bu maqsad uchun nechta qonun zarur bo'lsa, shuncha, ya'ni uchta qonun yaratdi. Ularning "maktabdagi" ta'riflari o'quvchiga yaxshi tanish.

3.1.1 Newton birinchi qonuni

Agar jism o'z holiga tashlab qo'yilsa, ya'ni hech qanday tashqi kuch ta'sir qilmasa, u tinch holatida qoladi, yoki tezlanishsiz, doimiy tezlik bilan harakatda bo'ladi. Bu

$$\mathbf{F} = 0 \text{ bo'lganda } \mathbf{a} = 0 \tag{3.1}$$

ekanligini bildiradi.

Mexanika qonunlarini ta'riflashda Newton sanoq sistemasiga katta ahamiyat bergan. Shu bilan birga, nafaqat vaqt, balki fazo ham mutlaq deb hisoblagan, ya'ni fazo bilan bog'langan alohida sanoq sistemaning mavjudligi haqidagi postulatni ilgari suradi. U "qo'zg'almas" yulduzlarga bog'langan koordinatalar sistemasi bunday sistema uchun juda yaxshi yaqinlashish deb hisoblagan. Newton bu qonunlarni xuddi mana shu sanoq sistemalarida ta'riflagan. Klassik mexanikaning qo'llanilish chegaralarni aniqlovchi kuchli tengsizliklar doirasida bunday yaqinlashish unchalik yomon emas edi.

Aslida, yulduzlar harakatsiz emasligini bilamiz. Bundan ham muhimi, fizikaning rivojlanishi ilm ahlini mutlaq fazo tushunchasidan voz kechishga majbur qildi. Hozirgi zamon tushunchasiga ko'ra hech bir "unga" o'xshashi (masalan, "olam efiriga" o'xshash) yo'q. Shunga qaramay, mexanika qonunlarini, shu jumladan relyativistik va kvant mexanika qonunlari, boshidan alohida xossaga ega sanoq sistemasida ta'riflashga kelishilgan. U erkin fizik jism tushunchasiga asoslanadi. Bunday jism boshqa jismlar bilan o'zaro ta'sirdan holi bo'lishi kerak. Bu esa faqat mutlaq yakkalangan jism uchun o'rinli bo'lishi mumkin. Aslida butunlay erkin jism tabiatda yo'q. Chunki, ikki, uch va undan ortiq jismlar orasidagi o'zaro ta'sir qanchalik kuchsiz bo'lmasin, ular (ularni uzatuvchi maydonlar) chekli masofada nolga teng bo'lmaydi. Shunday ekan, butunlay erkinlik biz kuzatayotgan jismning boshqa jismlardan yetarlicha cheksiz uzoqlashishini nazarda tutadi.

Real fizika, albatta, bu xossani qandaydir chegaraviy hol ma'nosida talqin qiladi, real holatni esa u yoki bu aniqlikda tavsiflangan ideal holatga yaqinlashish deb qaraladi.

Bunday jism bilan bog'langan sanoq sistemasida hech qanday boshqa jismlar bilan ta'sirlashmayotgan jism tinch holatda bo'ladi. U holda, biz ajratib olgan sanoq sistemaga nisbatan tekis va to'g'ri chiziqli harakat qilayotgan har qanday sanoq sistemasida erkin jismning tezlanishi nolga teng bo'lishi kerak. Norelativistik mexanikada bu fikr to'g'ridan-to'g'ri (2.52) munosabatdan kelib chiqadi, relativistik mexanikada esa bu xossani alohida postulat sifatida tavsiflash lozim bo'ladi. Bunday sistemalar cheksiz ko'p (kontinuum) hamda ularning barchasi teng huquqli va har birida qandaydir mutlaq erkin jism tinch holatda bo'lishi kerak. Umuman olganda, bunga o'xshash ixtiyoriy sanoq sistemasida ixtiyoriy jism qandaydir doimiy tezlik v bilan harakatlanishi lozim.

Mutlaq erkin jism tinch holatda yoki to'g'ri chiziqli tekis harakatda bo'ladigan sanoq sistemasi inersial sanoq sistemasi deb ataladi.

Imkon darajasida universal ma'no berish uchun fizik qonunlarni, xususan mexanika qonunlarini ana shunday sanoq sistemalarida tavsiflash qabul qilingan. Mutlaq erkin jism tushunchasi ideallashtirilgan tushuncha bo'lib, uning mavjudligi fizik tajribalar asosida postulat sifatida qabul qilinishi kerak.

Birgina bo'lsa ham demak, cheksiz sondagi inersial sanoq sistemalarining mavjud bo'lishligi hozirgi kun tushunchasidagi Newton birinchi qonunidir.

3.1.2 Newton ikkinchi qonuni

Jismga ta'sir qiluvchi natijaviy kuch bu jism massasining uning tezlanishiga ko'paytmasiga teng:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{3.2}$$

Ushbu qonunni aniq ko'rinishga keltirishga harakat qilamiz. Buning uchun bizga moddiy nuqta yaqinlashishini qo'llash mumkin bo'lgan eksperimental ma'lumotlarni birmuncha umumlashtirish kerak bo'ladi.

Birinchidan, tajriba ko'rsatadiki, o'lchamlarini e'tiborga olmasa bo'ladigan jismlar uchun yoki masala shartiga ko'ra orientatsion erkinlik darajalari unchalik ahamiyatga ega bo'lmasa, jismlarning o'zaro ta'siri bilan har bir jismning tezlanish vektori aniqlanadi.

Ikkinchidan, berilgan kuch maydonida tezlanishi aniqlanayotgan jismga yana xuddi shunday jism qattiq bog'lansa, tezlanish ikki barobar kamayadi. Yana bitta shunday jism avvalgilariga bikir bog'lansa tezlanish uch marta kamayadi. (Biroq bunda har bir jism alohida va birgalikda moddiy nuqta sifatida qaralishi mumkin bo'lishi kerak.) Bu faktning umumlashtirilishi tezlanish oldidagi koeffitsiyent m additiv ekanligini bildiradi. Bu shundan darak beradiki, istalgan sondagi jismlarning bikir bog'lanishida (3.2) qonun o'z kuchida qoladi, bunda jismlar to'plamining massasi, uni tashkil etuvchi jismlar massalari yig'indisidan iborat bo'ladi. m koeffitsientning o'lchovi ixtiyoriy va etalonga ega bo'lishi kerak.

Uchinchidan, moddiy nuqtalarning o'zaro ta'siri va ularning tashqi maydonda o'zini tutishi biror bir vektor kattalik **F** bilan aniqlanadi. Bu vektorlar uchun mavjud barcha xossalarga, shu jumladan vektorlarni qo'shish xossalariga ham ega bo'ladi. Har bir jismning tezlanishi **F** kuchga proporsional.

Bu kattalik Guk qonuni (9-bob) bilan hamda butun olam tortishish qonuni bilan bog'langan (bu masala keyinroq ko'riladi). Shunday qilib, mexanika oxir oqibat o'zaro bog'langan fizikaviy munosabatlarning murakkab berk sistemasini tashkil qiladi. Yuqorida aytganimizdek (3.2) qonun, birdaniga ikki yangi tushunchani kiritilishni nazarda tutishi, ma'lum mantiqiy qiyinchiliklarni yuzaga keltiradi. Ular massa va kuchni aniqlashdagi ixtiyoriylik bilan bog'langan. Shubhasiz, barcha fizikaviy tushunchalar sistemasi bir butin qaralganda, bu paradoksdan holi bo'linadi.

Jism massasi haqidagi masalani batafsilroq muhokama qilamiz. Massa fundamental fizik kattalik bo'lib, jismlarning inersion va gravitatsion xossalarini aniqlaydi, ya'ni turli fizik hodisalarni aniqlaydi. Newton gravitatsiya nazariyasida massa, barcha jismlarni o'zaro tortishishiga olib keluvchi, butun olam tortishish kuchi manbai bo'lib xizmat qiladi. Buning natijasida gravitatsiya maydonida erkin tushayotgan jism tezlanishi uning na massasiga va na uni tashkil qilgan modda xossasiga bog'liq bo'ladi. Bu qonuniyat Quyosh maydonida 10^{-12} tartibdagi aniqlikda tekshirilgan. Odatda, uni inert va gravitatsion massalar tengligi deyiladi.

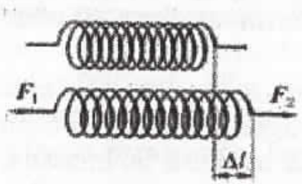
Norelativistik yaqinlashishda, ya'ni yorug'lik tezligidan juda kichik tezliklar bilan ish ko'rganimizda, jism massasi jismda mavjud modda miqdorining o'lchovi vazifasini bajaradi va massa saqlanish qonuni va additvligi o'rinli bo'ladi, ya'ni atrofdan ajratilgan jismlar sistemasining massasi vaqt o'tishi bilan o'zgarmaydi va sistemani tashkil qilgan jismlar massalarining yig'indisiga teng - ***massa additiv kattalikdir***. Shunga ko'ra norelativistik mexanikada jism massasi uning hajmiga proporsionaldir. Shu vaqtda jism massasi relativistik mexanikada additiv kattalik emas. Faqat jism tinch holatdagi energiyasi haqida so'z yuritish to'g'ri bo'ladi. Bu energiya uning tashkil etuvchilarining tinch holatdagi energiyalarining yig'indisiga teng bo'lmaydi, bu yerda yana zarralar o'rtasidagi bog'lanish energiyasini ham e'tiborga olish kerak bo'ladi. Xuddi shuning uchun, masalan, yadro massasi uni tashkil qiluvchi - neytron va protonlar massalarining yig'indisiga teng bo'lmaydi. Biroq makroskopik jismlar bilan ish ko'rishga o'tganimizda bog'lanish energiyasi va sirt energiyalari kattaliklari shu darajada kichik bo'ladiki, ularni e'tiborga olmasa ham bo'ladi. Masalan, suv erkin sirtining massaga qo'shadigan ulushi $7 \cdot 10^{-19} \mathrm{kg/m^2}$ tartibida bo'ladi.

Hozirgi kunda, massaning o'lchovi sifatida ***kilogramm* (kg)** qabul qilingan. ***Fransiyada Xalqaro o'lchov va og'irliklar byurosida saqlanayotgan Platina - Iridiy qotishmasidan ishlangan jismning massasi – kilogramm etaloni sifatida qabul qilingan.***

Kuch, massa va tezlanish o'rtasidagi munosabatga aniqlik kiritish gravitatsiya maydonida jismning og'irligini o'lchashga imkon beradi. Yer sharoitida bu maydon unchalik bir jinsli bo'lmasada, kundalik hayotda to'qnashadigan masalalarda uni bir jinsli deb qarash boshlang'ich tushunchalarni kiritish uchun yetarlidir. Prujinali tarozi bilan o'tkaziladigan tajribaga, prujinaning nisbatan kichik cho'zilishlarida (nochiziqli deformatsiya ta'sir etmasligi uchun) - og'irlik tushunchasini prujinaning cho'zilishiga proporsional bo'lgan kattalik sifatida kiritish mumkin. Jismning og'irligi uning massasiga proporsional $F_g \sim m$. Barcha jismlar bo'shliqda birday g tezlanish bilan tushishiga ishonch hosil qilib, $F_g = mg$ munosabatga kelamiz. Bu ifoda (3.2) ning xususiy holidir.

Og'irlik kuchi gravitatsion o'zaro ta'sirni yoki gravitatsion maydonni ifodalaydi. Gravitatsion o'zaro ta'sirdan tashqari, faqat elektromagnit o'zaro ta'sirgina klassik mexanika predmeti bo'lishi mumkin. Biroq bu ta'sir ko'pincha biz bilgan Coulomb qonuni ko'rinishida emas, balki o'rtacha taqribiy kuchlar, masalan, elastiklik va ishqalanish kuchlari ko'rinishida namoyon bo'ladi. Bularni elektrodinamika qonunlari asosida keltirib chiqarish klassik mexanika doirasidan tashqarida yotadi.

Har qanday real jism tashqi kuch ta'sirida deformatsiyalanadi, ya'ni o'z shakl va o'lchamlarini o'zgartiradi. Shu bilan birga, jismning molekulalari tarkibiga kiruvchi elementar elektr zaryadlar ham o'z joylashishini o'zgartiradi. Endi, bu zarralar orasida yuzaga keluvchi elektromagnit kuchlar ularning dastlabki holatini tiklashga harakat qiladi, shu bilan birga butun jism ham o'zining dastlabki holatiga qaytishga intiladi. Agar, tashqi ta'sir yo'qolganda jism o'zining dastlabki shakl va o'lchamini to'la tiklasa, deformatsiya elastik deb ataladi. Elastik deformatsiya, deformatsiyaga olib keluvchi kuch, har bir jism uchun aniq bir qiymatdan oshmaydigan chegarada kuzatiladi (elastiklik chegarasi). Elastik deformatsiya natijasida, ichki elektr zaryadlar o'zlarining dastlabki holatlarini tiklashga intilishi natijasida yuzaga keluvchi kuch elastiklik kuchi deb ataladi.



3.1-rasm.

Deformatsiyalanmagan, l_0 uzunlikka ega prujinaning ikki uchiga qarama-qarshi yo'naltirilgan, lekin qiymatlari teng bo'lgan $\mathbf{F}_1$ va $\mathbf{F}_2$ kuchlar qo'yamiz (3.1-rasm). Jismga qo'yilgan bu kuchlar ta'sirida prujina biror bir Δl ga cho'ziladi, so'ngra muvozanat yuzaga keladi. Bu, Newton ikkinchi qonuniga asosan, jismga qo'yilgan kuchlarning vektor yig'indisi nolga teng bo'lishini ko'rsatadi. Tashqi kuch qo'yilgan nuqtadagi muvozanat bu kuch bilan elastiklik kuchi o'rtasidagi tenglik sababidan yuzaga keladi. Shu bilan bir vaqtda, cho'zilgan prujinaning ichki har bir nuqtasidagi muvozanat prujinada yuzaga keladigan elastiklik kuchi hisobiga yuz beradi. Tajriba kichik deformatsiyalarda prujinaning uzayishi Δl cho'zuvchi kuchga proporsional bo'lishini ko'rsatadi: $\Delta l \sim F(F = |\mathbf{F}| = |\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2|)$. Demak, elastiklik kuchi prujina uzayishiga to'g'ri proporsional ekan, ya'ni

$$F = k\Delta l. \tag{3.3}$$

Proporsionallik koeffitsiyenti k prujinaning ***bikirlik koeffitsiyenti*** deb ataladi. Elastiklik kuchi va deformatsiya o'rtasidagi proporsionallik, Newtonning mashhur zamondoshi nomi bilan ***Guk qonuni*** deb yuritiladi. U faqatgina prujinaning deformatsiyasiga taalluqli bo'lmay, balki birinchi galda har qanday kristall moddalar namunalarining kichik deformatsiyalariga, shu bilan birga, shartli ravishda amorf va polimer materiallar uchun ham taalluqlidir.

Elektromagnit o'zaro ta'sir bizni o'rab olgan jismlar harakatida muhim o'rin tutuvchi ishqalanish kuchlari asosida ham yotadi. Biz bu hodisa ustida keyinroq batafsil to'xtalamiz, bu yerda esa, ishqalanish hodisasi, jism sirti yaqinidagi atom (molekula) elektron

qobiqlarining o'zaro ta'siri natijasi ekanligini ta'kidlaymiz.

Jismlar harakatini o'rganganda, (3.2) tenglamaning quyidagi ko'rinishidan foydalanish qulay

$$\mathbf{F} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \tag{3.4}$$

Shu bilan birga, notekis va to'g'ri chiziqli bo'lmagan harakatlar o'rganilganda yuzaga kelishi mumkin bo'lgan anglashilmovchiliklar bartaraf qilinadi. Newton ikkinchi qonuni, tajribalarga ko'ra, moddiy nuqtaning ixtiyoriy harakatini tavsiflaydi.

(3.4) qonundan asosiy kattaliklar yordamida kuchning o'lchov birligini va unga mos ravishda, kuch birligi - **1** ***Newton*** **(N)** ni aniqlash mumkin:

$$[F] = [m]\frac{[l]}{[t^2]} \to 1\text{N} = 1\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}. \tag{3.5}$$

3.1.3 Newton uchinchi qonuni

Ikki jismning o'zaro ta'sirlashishida, birinchi jism tomonidan ikkinchi jismga ta'sir qiluvchi $\mathbf{F}_{21}$ kuch, birinchi jismga ikkinchi jism tomonidan ta'sir qiluvchi $\mathbf{F}_{12}$ kuchga son jihatidan teng va qarama-qarshi yo'nalgan

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}, \tag{3.6}$$

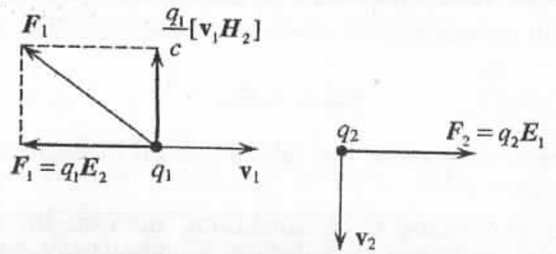
shu bilan birga, bu kuchlar har ikkala kuchni birlashtiruvch to'g'ri chiziqda yotadi.

Uchinchi qonunning qo'llanilishining ma'lum bir chegaralari mavjud. Har qanday signallar, demak, kuchlarning ta'siri ham, bir onda emas, balki ma'lum bir chekli vaqt oralig'ida uzatiladi. Biroq uchinchi qonun ikkala kuchning bir vaqtda o'lchanishini ta'kidlovchi fikrni o'z ichiga oladi. Bunday talab ta'sirning uzatilish tezligi chekli ekanligini ta'kidlovchi faktga ziddir. Shu sababli, Newton uchinchi qonuni atomlar va zaryadlangan elementar zarralar o'rtasidagi ta'sir masalasini ko'rishda har doim ham yetarli darajada yaxshi natija beravermaydi.

Misol tariqasida bir-biriga perpendikular yo'nalishda $\mathbf{v}_1$ va $\mathbf{v}_2$ tezliklar bilan harakatlanayotgan ikki musbat nuqtaviy q_1 va q_2 zaryadlarning o'zaro ta'sirlashishini ko'rib chiqaylik. Zaryadlar o'zaro to'qnashmaydi, ammo ularning harakat yo'llari o'zaro kesishadi, deb faraz qilamiz. Vaqtning biror vaziyatida ularning bir-biriga nisbatan holati 3.2-rasmda ko'rsatilganidek bo'lsin. Rasmga asosan ko'rilayotgan vaqtda ikkinchi zaryad birinchi zaryadning harakat yo'nalishida yotadi. Harakatdagi zaryad o'z atrofida elektr va magnit maydonlarini hosil qiladi. Agar zaryadlarning tezliklari yorug'lik tezligidan yetarli darajada kichik bo'lsa, bu maydonlar

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^3}\mathbf{r}', \quad \mathbf{H} = \frac{q}{c}\frac{[\mathbf{vr}]}{r^3} \tag{3.7}$$

formulalar bilan aniqlanadi. Radius-vektor r zaryaddan maydon kuzatilayotgan nuqtaga yo'naltirilgan. Bu formulalarning ikkinchisidan ko'rinadiki, harakatdagi q_1 zaryad o'z harakat yo'nalishida magnit maydon hosil qilmaydi. Demak, q_2 zaryadga q_1 zaryad tomonidan faqatgina, bu ikki zaryadlarni birlashtiruvchi to'g'ri chiziq bo'ylab yo'nalgan elektr kuchlari ta'sir qiladi. Biroq q_1 zaryadga q_2 zaryad tomonidan elektr kuchlaridan tashqari, harakatdagi q_2 zaryad hosil qilgan magnit maydon kuchi ham ta'sir qiladi. Zaryadlarga ta'sir qiluvchi elektr kuchlari kattaliklari o'zaro teng va qara-



3.2-rasm.

ma-qarshi yo'nalgan, shu vaqtda q_1 zaryadga ta'sir qiluvchi magnit maydonning mavjudligi Newton uchinchi qonunining buzilishiga olib keladi. Ko'rilayotgan misolda zaryadlarning tezliklari uchun $v_1v_2/c^2 \ll 1$ shart o'rinli bo'ladi desak, bu buzilish unchalik katta bo'lmaydi.

Avtomobillar to'qnashuvi misolida Newton uchinchi qonuni yetarli darajada aniq bajariladi, bunday to'qnashuvning davomiyligi yorug'lik signalining (aytgancha, nima uchun yorug'lik signali, tovush signali emas, axir deformatsiya to'lqini tovush tezligida tarqaladiku?) shikastlangan avtomobil bo'ylab o'tishi uchun zarur bo'lgan vaqtdan yetarlicha katta bo'ladi.

$$\frac{L}{c} \approx \frac{3\,\mathrm{m}}{3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}} \approx 10^{-8}\,\mathrm{s}, \tag{3.8}$$

bu yerda L – avtomobilning uzunligi. 10^{-8} s vaqt mobaynida, 100 km/soat, ya'ni $\sim 3 \cdot 10^3$ sm/s tezlik bilan harakatlanayotgan avtomobil $\sim 3 \cdot 10^{-5}$ sm masofani bosib o'tadi.

Jismning harakatini kuzatish inersial sanoq sistemalarida olib borilgan holdagina Newton birinchi va ikkinchi qonunlari o'rinli bo'ladi. Masalan, jism biror inersial sanoq sistemasida o'zgarmas tezlik bilan harakatlanayotgan bo'lsin. Bu sanoq sistemasiga nisbatan tezlanish bilan harakatlanayotgan sanoq sistemada jism tezlanish bilan harakatlanishi ravshan.

Aylanayotgan karusel bilan bog'langan sanoq sistemasini misol sifatida ko'raylik. Bunday sanoq sistemasida jismga kuchlar ta'siri bo'lmasada, uning tezlanishi nolga teng bo'lmaydi. Siz karuselda harakatsiz tinch turishingiz uchun nimagadir tiralib turasiz. Ya'ni muvozanatda bo'lish uchun aylanish o'qiga tik yo'nalishda $m\omega^2r$ ga teng kuch bilan ta'sir qilib itarilishingiz kerak bo'ladi. Bu yerda m – sizning massangiz, ω – karuselning aylanish burchak tezligi, r – sizdan aylanish o'qigacha bo'lgan masofa. Boshqa bir misol sifatida, ko'tarilish vaqtida jadal tezlik olayotgan samolyot bilan bog'langan sanoq sistemasini ko'rsatishi mumkin. Tezlanish hisobiga sizni orqaga, o'rindiqqa siqadi, o'rindiq suyanchig'i tomonidan ta'sir qiluvchi kuch esa sizni bu sistemaga nisbatan tinchlikda (harakatsiz) ushlab turadi.

Agar siz, tezlanishga ega bo'lmagan sanoq sistemasiga nisbatan, tekis harakatda yoki tinch holatda bo'lganingizda edi, bu holatda qolish uchun hech qanday kuch talab qilinmas edi. Biroq siz tezlanish bilan harakatlanayotgan sanoq sistemasiga nisbatan tinch holatda qolishni istasangiz, siz yoki kuch bilan ta'sir qilishingiz yoki qandaydir bir boshqa jismning ta'sir kuchini o'zingizda sezishingiz kerak bo'ladi. Sizga, yiqilmasdan ushlanib qolishingiz uchun, yoki arqon, yoki tiralib turish uchun, o'rindiq kerak bo'ladi. Tezlanish bilan harakatlanayotgan sanoq sistemalaridagi harakat (uning tabiati) fizikada muhim rol o'ynaydi. Bunday sanoq sistemalari ***noinersial*** deb ataladi. Ayniqsa, aylanayotgan sanoq sistemalarda jismlar harakatining tabiatini tushunish muhim (amaliy tatbig'i - sentrifuga). Juda bo'lmaganda biz siz bilan xuddi shunday sanoq sistemasi - Yerda yashashimizni unutmaslik kerak. Biroq hozircha bu ishni amalga oshirmaymiz va qaysi sistemani u yoki bu aniqlikda inersial deb qarash mumkinligi haqidagi savolga javob topishga harakat qilamiz.

Yer o'z o'qi atrofida aylanayotganligi sababli, inersial sanoq sistemasi emasligi (noinersialligi) kundek ravshan. Yerning aylanish burchak tezligi

$$\omega = \frac{2\pi}{1\,\text{sutka}} = \frac{2\pi}{8.6 \cdot 10^4\,\text{s}} \approx 0,73 \cdot 10^{-4}\,\text{s}^{-1}$$

va uning radiusi $R = 6,4 \cdot 10^8\,\text{cm}$ ga tengligini hisobga olsak, ekvatordagi nuqtaning markazga intilma tezlanishi quyidagiga teng ekanligini topamiz:

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \approx 3,4\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}. \tag{3.9}$$

Bu tezlanish erkin tushish tezlanishi $g = 980\,\text{cm/s}^2$ ning 0,3 % ni tashkil qiladi. Shu sababdan, masalan, Shimoliy qutbda og'irlik kuchi tezlanishi ekvatorda kuzatiladigan og'irlik kuchi tezlanishidan katta bo'ladi (u yerda bananlarning og'irligi kam, balki, shuning uchun ularni sotishga shimolga olib borsalar kerak). Shunday qilib, a/g nisbat umuman olganda kichik, ammo pretsision (o'ta aniq) fizik o'lchashlar nuqtai nazaridan juda katta qiymat hisoblanadi. Va uni hisob-kitoblarda e'tiborga olish shart.

Yerning inersial sanoq sistemasi emasligining ikkinchi sababi - bu uning Quyosh atrofida orbita bo'ylab harakatidir. Bunday harakatda Yerning burchak tezligi quyidagiga teng:

$$\Omega = \frac{2\pi}{1\,\text{yil}} = \frac{2\pi}{3 \cdot 10^7\,\text{s (yil)}} \approx 2 \cdot 10^{-7}\,\text{s}^{-1}.$$

Yer orbitasining o'rtacha radiusi $R = 150\,10^6\,\text{km} = 1,5\,10^{13}\,\text{cm}$ ga teng ekanligini inobatga olsak, $a = \Omega^2 R \approx 0,6\,\text{cm/s}^2$ ga teng bo'ladi. Bu, Yerning o'z o'qi atrofida aylanishida yuzaga keladigan tezlanishdan taxminan bir tartibga (10 marta) kichik.

Va nihoyat, Quyosh barcha planetalari bilan birga Galaktikamiz markazi atrofida 300 km/s tezlik bilan aylanadi. Bu tezlik yulduzlar chiqarayotgan yorug'lik spektr chiziqlarining dopler siljishlarini tadqiq qilishda o'lchangan. Galaktikamiz markazigacha bo'lgan masofa R taxminan 30 yorug'lik yiliga teng. Natijada tezlanish

$$a = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} \approx \frac{(3 \cdot 10^7\,\text{cm/s})^2}{3 \cdot 10^{22}\,\text{cm (30 yorug'lik yili)}} \approx 3 \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \tag{3.10}$$

ga teng chiqadi, ya'ni bu juda kichik son. Shuning uchun ba'zi hollarda, harakatsiz yulduzlar bilan bog'langan sanoq sistemasini, juda yuqori aniqlikda, inersial deb qabul qilish mumkin.

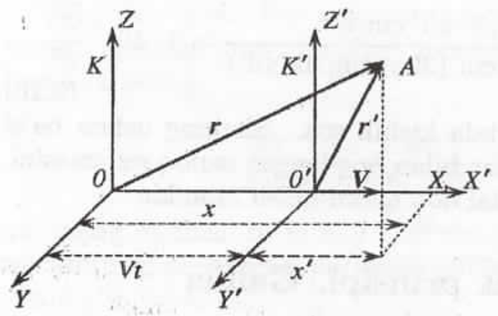
3.2 Galilei nisbiylik prinsipi. Galilei almashtirishlari

Agar birgina bo'lsa ham inersial sanoq sistemasi mavjud bo'lsa, bunday sistemalar cheksiz ko'p bo'lishi kerak, chunki, inersial sistemaga nisbatan o'zgarmas tezlik bilan harakatlanayotgan har qanday sistema ham inersial bo'ladi. ***Galilei nisbiylik prinsipi*** deb ataluvchi fundamental fizikaviy prinsip mavjud.[1] ***Bir-biriga nisbatan o'zgarmas tezlik bilan (tezlanishsiz) harakatlanayotgan barcha sanoq sistemalarida fizikaning asosiy qonunlari bir xilda ta'riflanadi.***

Bu prinsipga asosan, derazasiz xonada o'tirgan kuzatuvchi, tajribada o'zining, qo'zg'almas yulduzlarga nisbatan, tinch yoki

[1]Galilei davrida fizika qonunlari deganda asosan mexanika qonunlari tushunilgan. Keyinchalik, XX asr boshlarida bu prinsip yorug'likning tarqalish tezligi chekli ekanligi bilan birlashtirilib, Eynshtein nisbiylik prinsipi deb atala boshlangan. Galilei davrida esa yorug'likning tarqalish tezligi cheksiz deb hisoblangan.

to‘g‘ri chiziqli tekis harakatdaligini aniqlay olmaydi. Faqatgina derazadan qarab o‘zining harakatini yulduzlar harakati bilan taqqoslab, kuzatuvchi o‘zining ularga nisbatan tekis harakat qilayotganligini aytishi mumkin. Biroq shunda ham u o‘zi harakatdami yoki yulduzlarmi degan masalani yecha olmaydi. Galilei nisbiylik prinsipi fizikadagi asosiy prinsiplarning birinchlaridan bo‘lib, u Newton tomonidan taklif qilingan Olamning tuzilishi uchun asosiy prinsip bo‘lib hisoblanadi. Bu prinsip juda ko‘p tajriba - sinovlardan o‘tgan va hozir maxsus nisbiylik nazariyasining asosiy g‘oyasi bo‘lib xizmat qiladi.



3.3-rasm. Galilei almashtirishlariga oid chizma.

Endi Galilei nisbiylik prinsipiga matematik shakl berishga harakat qilamiz. Qandaydir inersial sanoq sistemasini K bilan belgilaymiz, K' bilan esa, birinchiga nisbatan, ma’lum bir o‘zgarmas $\mathbf{V}$ tezlik bilan harakatlanayotgan boshqa bir inersial sanoq sistemasini belgilaymiz. Bu sanoq sistemalarda nuqtaning fazodagi holatini dekart koordinatalari bilan aniqlaymiz (3.3-rasm). K' sistemaning X', Y', Z' o‘qlari K sistemaning X, Y, Z o‘qlariga parallel bo‘lsin. Bu o‘qlarni $\mathbf{V}$ vektor X o‘qiga parallel bo‘ladigan qilib tanlaymiz. Biz K sistemaga nisbatan tinch turgan kuzatuvchi tomonidan vaqt va masofani o‘lchash natijalarini K' sistemaga nisbatan tinch turgan kuzatuvchining xuddi shunday o‘lchash natijalari bilan solishtirmoqchimiz. Bunday solishtirish qanday natija berishini faqat tajriba yo‘li bilan yechish mumkin.

Agar ikki kuzatuvchining har biri ko‘p miqdorda, mutlaq bir xil yuruvchi soatlarga ega bo‘lsa, ular quyidagi ishni amalga oshirishlari mumkin. Avval K sanoq sistemasidagi kuzatuvchi soatlarini bir vaqtga to‘g‘rilab, X o‘qi bo‘ylab bir xil masofalarda joylashtirib chiqsin. Xuddi shunday ishni ikkinchi kuzatuvchi K'

sanoq sistemasida ham amalga oshirsin. Bu ishni amalga oshirish unchalik ham oson emas. Biroq bu o‘lchashlarni qanday qilib aniq amalga oshirish mumkinligi haqidagi mulohazalarni, aynan shunday tajribalarni maxsus nisbiylik nazariyasi nuqtai nazaridan qarab chiqqanimizga qadar orqaga surib turamiz.

Agar biz, yorug‘lik tezligini cheksiz katta deb hisoblaydigan bo‘lsak, u holda barcha soatlarning boshlang‘ich ko‘rsatishlari bir xilligiga ishonch hosil qilish uchun, “nazar” tashlash yetarli bo‘ladi. Endi har ikkala sanoq sistemalaridagi soatlarning ko‘rsatishlarini solishtirish mumkin. K' sistemadagi soatlarning ko‘rsatishlarini K sistemadagi soatlar yonidan o‘tayotganda K sistemadagi 1, 2, 3, ... soatlarning ko‘rsatishlari bilan solishtirish mumkin. Shu ishni amalga oshirib, quyidagi xulosaga kelamiz:

$$t' = t \,(V \ll c).$$

Bu K' sistemada amalga oshirilgan vaqt o‘lchashlari, K sistemada amalga oshirilgan vaqt o‘lchovlariga teng ekanligidan dalolat beradi. Bu yerda $t-K$ sistemadagi, t' esa K' sistemadagi hodisa vaqtini bildiradi.

Biz hatto, soatlar yordamida harakatsiz va harakatda bo‘lgan o‘lchov chizg‘ichining nisbiy o‘lchamlarini aniqlashimiz mumkin. Masalan, bir metrli o‘lchagich K' sistemada tinch turgan bo‘lsin. K sistemadagi kuzatuvchiga nisbatan u qanday o‘lchamga ega ekanligini aniqlashimiz kerak. Buning sodda usuli - harakatlanayotgan chizg‘ichning uchlari holatini qayd etishda soatlardan foydalanishdan iborat. Chizg‘ichning old va orqa uchlarining K sistemadagi vaziyatlari mos nuqtalarda turgan soatlarning birday ko‘rsatishida amalga oshiriladi. Tajriba orqali biz quyidagini aniqlaymiz:

$$L' = L \,(V \ll c). \tag{3.11}$$

Endi $t' = t$ va $L' = L$ tengliklarni K' sanoq sistemasida qandaydir hodisaning koordinatalari x', y', z' va vaqti t' larni shu hodisaning K sistemadagi koordinatalari va vaqti t bilan bog‘lovchi almashtirishlar ko‘rinishida ifodalashimiz mumkin. Natijada quyidagi almashtirish tenglamalariga ega bo‘lamiz:

$$t = t', \; x = x' + Vt, \; y = y', \; z = z'. \tag{3.12}$$

Bu almashtirishlar Galilei almashtirishlarining o'zidir. (3.12) almashtirishlarning keyingi uchtasini 3.3-rasmdan foydalanib ham hosil qilish mumkin (shunday ishni 2-bobda amalga oshirgan edik). Almashtirish (3.12) ning vektor ko'rinishi, ravshanki, quyidagicha yoziladi:

$$t = t', \; \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t. \tag{3.13}$$

Agar Galilei almashtirishlarini, K va K' sistemalarda aniqlangan fizika qonunlari aynan bo'lishligi haqidagi asosiy postulat bilan taqqoslansa, quyidagi xulosaga kelishimiz mumkin: ***Fizika qonunlari Galilei almashtirishlariga nisbatan invariant bo'lishi kerak. Qonunlarning ko'rinishi bunday almashtirishlar natijasida o'zgarmasligi kerak, ya'ni invariantdir.***

Bu xulosa, Galilei nisbiylik prinsipiga nisbatan xususiy xarakterga ega. Yorug'lik tezligini cheksiz katta deb hisoblash natijasida, ikkala sistemada soatlarni bir vaqtda uyg'unlashtirish mumkin, ya'ni $t' = t$ bo'lishi kerak degan xulosa kelib chiqdi. Aslida esa yorug'likning tarqalish tezligi chekliligidan barcha tabiat qonunlarini invariant saqlaydigan almashtirishlar Galilei almashtirishlari emas, balki, Lorentz almashtirishlaridir. Bu almashtirishlargina Galilei nisbiylik prinsipini to'g'ri ifodalaydi (chalkashtirmang: Galilei nisbiylik prinsipi aniq va to'g'ri, Galilei almashtirishlari esa taxminiy bo'lib, $V \ll c$ shart bajarilgandagina o'rinlidir).

Endi, Newton ikkinchi qonunini Galilei almashtirishlariga nisbatan invariant ekanligini ko'rib chiqamiz:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \tag{3.14}$$

$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, va $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ bo'lganligidan, Galilei almashtirishlaridan quyidagi natija kelib chiqadi:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}' + \mathbf{V}t) = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \mathbf{V} \text{ yoki } \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}. \tag{3.15}$$

Bu ifodani klassik mexanikada tezliklarni almashtirish formulasini beradi. (3.16) dani vaqt bo'yicha yana bir marta differensiallab,

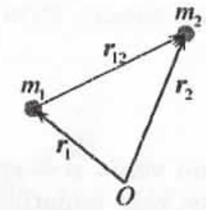
$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} \text{ (chunki } \mathbf{V} = \text{const)} \tag{3.16}$$

ni hosil qilamiz, yoki $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$, ya'ni moddiy nuqta tezlanishi har ikkala sistemada birday ekan. Ikkinchi tomondan, Newton ikkinchi qonuni ikkala sanoq sistemasida ham bir xil ko'rinishga ega bo'lishi kerakligi nisbiylik prinsipidan kelib chiqadi, ya'ni

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \quad m\mathbf{a}' = \mathbf{F}' \tag{3.17}$$

(massa tezlikka bog'liq emas deb hisoblaymiz). Modomiki $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$ ekan, shunga ko'ra, $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$ bo'ladi, ya'ni har qanday inersial sanoq sistemasida zarraga ta'sir qiluvchi kuch bir xil bo'ladi.

Yuqorida aytilgan fikr, masalan, butun olam tortishish qonuniga mos keladi. Bu qonunga binoan: ikki jism o'rtasida tortishish kuchlari mavjud bo'lib, u massalar ko'paytmasiga to'g'ri proporsional va ular orasidagi masofa r_{12} ning kvadratiga teskari proporsional (3.4-rasm). U barcha inersial sanoq sistemalarida bir xildir ($V \ll c$ shart bajarilganda).



3.4-rasm.

$$F_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}. \tag{3.18}$$

bu yerda m_1, m_2 – jismlarning massalari, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ – koordinata boshidan ularga o'tkazilgan radius-vektorlar, $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. 1- va 2-nuqtalar orasidagi masofa barcha inersial sanoq sistemalarida bir xil bo'lganligi sababli kuch ham bir xilda bo'lishi ravshan. Bunga ishonch hosil qilish uchun Galilei almashtirishlarini tatbiq qilamiz, ya'ni

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1' + \mathbf{V}t', \; \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2' + \mathbf{V}t'. \tag{3.19}$$

Bulardan

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_{12}' \tag{3.20}$$

kelib chiqadi. Shu bilan birga, jismlar massalari ularning tezliklariga bog'liq emas deb faraz qildik, ya'ni har ikkala inersial sanoq sistemalarida bir xil.

3.3 Impuls saqlanish qonuni. Inersiya markazi

Newton ikkinchi qonuning (3.4) ko'rinishi, nafaqat bir o'lchamli, balki, moddiy nuqtaning har qanday murakkablikdagi harakatini, uning barcha ko'rinishdagi trayektoriyasining xususiyatlarini aniqlash imkonini beradi. Qonunning "maktab"dan ma'lum bo'lgan (3.2) ko'rinishiga nisbatan uning (3.4) ko'rinishidan albatta, ko'proq ma'lumot olish mumkin. Chunki, u bizga to'g'ridan-to'g'ri differensial tenglamani beradi. Bu tenglamaning oldindan berilgan boshlang'ich shartlarda topilgan yechimi $\mathbf{r}(t)$ trayektoriyani aniqlaydi.

Ammo fizika nuqtai nazaridan bu qonunning (3.4) ko'rinishi uning mukammal shakli emas, balki uning boshqacha ko'rinishi muhimdir, ya'ni

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \tag{3.21}$$

bu yerda $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ - moddiy nuqtaning impulsi deb ataladi (uning ba'zida ishlatiladigan eski nomi - "harakat miqdori"). Yuqorida zarraning massasi m tezlikka (demak, vaqtga) bog'liq emas deb faraz qilgan edik, ya'ni

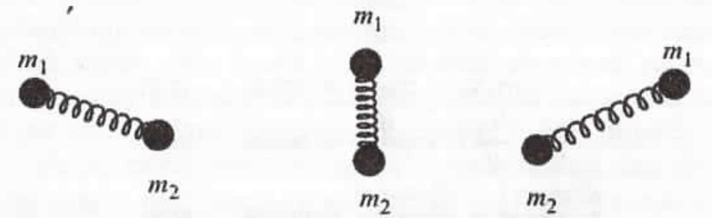
$$m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{3.22}$$

Agar massa tezlikka bog'liq bo'lsachi? Relativistik zarralar harakatini tavsiflovchi Newton ikkinchi qonunining qaysi ko'rinishi o'rinli bo'ladi? Yoki massasi o'zgaruvchi sistemalar uchun, masalan, kosmik kema harakatini o'rganishda bu qonunning qaysi ko'rinishi to'g'ri bo'ladi? Javob esa quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \tag{3.23}$$

Shunday qilib, impuls – tezlikka nisbatan fundamental tushunchadir. Bu narsa, moddiy nuqtalardan tashkil topgan sistemaning harakati misolida yaqqol ko'rinadi.

Prujina orqali o'zaro bog'langan m_1 va m_2 massali jismlarning erkin harakatini kuzatamiz (3.5-rasm). Soddalik uchun bu sistemani vaznsiz holatda deb qaraymiz. Bu sistemaga tashqi kuchlar ta'sir qilmaydi, shuning uchun, Newton birinchi qonuniga ko'ra, sistema tinch holda, yoki qiymat va yo'nalish jihatidan o'zgarmas tezlik bilan harakatda bo'lishi kerak. Biroq sistema bir vaqtning o'zida ilgarilanma, tebranma va aylanma harakatda bo'lishi mumkin. Shu sababli, harakat jarayonida jismlarning har birining tezligi kattalik va yo'nalish jihatidan murakkab ravishda o'zgarib boradi. Demak, Newton birinchi qonunini sistemaning barcha nuqtalari uchun birday qo'llab bo'lmaydi. Biz ko'rayotgan misolda doimiy tezlik bilan harakatlanayotgan nuqta qayerga joylashgan? Bunday nuqta (birgina bo'lsa ham) mavjud bo'lishi kerak, aks holda Newton birinchi qonuni o'rinli bo'lmas edi.



3.5-rasm. Prujina orqali bog'langan ikki jismning erkin harakati.

Qo'yilgan savolga javob berish uchun, Newton ikkinchi qonunini ifodalovchi tenglamalarni har ikkala moddiy nuqta uchun yozamiz:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_{12}, \quad \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_{21}, \tag{3.24}$$

bu yerda $\mathbf{F}_{12}$ - ikkinchi zarra tomonidan birinchi zarraga ta'sir qiluvchi kuch, $\mathbf{F}_{21}$ esa birinchi zarra tomonidan ikkinchi zarraga ta'sir qiluvchi kuch. Newton uchinchi qonuniga ko'ra, bu kuchlar son jihatidan teng va yo'nalishlari esa bir-biriga qarama-qarshi bo'ladi:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \tag{3.25}$$

Endi, ikkala harakat tenglamalarini hadlab qo'shamiz:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0. \tag{3.26}$$

Buni boshqacha ko'rinishda ham yozish mumkin

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathrm{const}\,. \tag{3.27}$$

Natijada, ikki jismdan iborat bo'lgan sistema uchun impuls saqlanish qonunini olamiz:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \mathrm{const}\,. \tag{3.28}$$

Bunga zarralar uchun impulslar ifodasini qo'yib, quyidagi ketma-ket o'zgartirishlarni amalga oshiramiz:

$$\begin{aligned}
m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 &= \mathrm{const}, \quad \text{yoki}\\
m_1\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} &= \mathrm{const}, \quad \text{yoki}\\
\frac{d(m_1\mathbf{r}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\mathbf{r}_2)}{dt} &= \mathrm{const}, \quad \text{yoki}\\
\frac{d}{dt}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2) &= \mathrm{const}\,.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Oxirgi tenglikning har ikki tomonini massalar yig'indisi $m = m_1 + m_2$ ga bo'lib, quyidagi tenglikni olamiz:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{\mathrm{const}}{m_1 + m_2} = \mathrm{const}'\,. \tag{3.30}$$

Endi yangi vektor kattalik kiritamiz:

$$\mathbf{R}_{im} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \tag{3.31}$$

Koordinatasi $\mathbf{R}_{im}$ bo'lgan nuqta ikki moddiy nuqtadan iborat sistemaning ***inersiya markazi*** (yoki ***massalar markazi***) deyiladi. (3.30) tenglamadan ko'rinadiki, jismlardan har birining

harakati har qancha murakkab bo'lmasin, $d\mathbf{R}_{im}/dt = \mathrm{const}$. Shunday qilib, ko'rilayotgan sistemaning inersiya markazi doimiy tezlik bilan harakat qiladi (tebranma va aylanma harakatlarning mavjud bo'lish-bo'lmasligidan qat'iy nazar). Bu tezlikni $\mathbf{V}_{im}$ deb belgilaymiz:

$$\frac{d\mathbf{R}_{im}}{dt} = \mathbf{V}_{im}. \tag{3.32}$$

Bu yerga $\mathbf{R}_{im}$ ning ifodasini qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \mathbf{V}_{im}. \tag{3.33}$$

Bu formula inersiya markazining $\mathbf{V}_{im}$ tezligini sistema tarkibiga kiruvchi zarralar massalari va tezliklari orqali aniqlaydi. Newton birinchi qonuni sistemaning xuddi shu nuqtasiga taalluqli, shu bilan birga bu nuqtaning tezligini butun sistemaning tezligi deb hisoblash kerak. $\mathbf{V}_{im}$ tezlik bilan harakatlanayotgan sanoq sistemasida moddiy nuqtalar sistemasining impulsi nolga teng bo'ladi.

Agar biz, bir butun sistemaning tezligi uchun bunday ta'rifni qabul qilsak, unda sistemaning bir butun holdagi impulsi sistemaning $(m_1 + m_2)$ umumiy massasini $\mathbf{V}_{im}$ inersiya markazining tezligiga ko'paytmasiga teng bo'lishi kerak, ya'ni $(m_1 + m_2)\mathbf{V}_{im}$. Boshqa tomondan,

$$(m_1 + m_2)\mathbf{V}_{im} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \tag{3.34}$$

formuladan sistemaning impulsi, uning tarkibiga kiruvchi zarralar impulslarining yig'indisiga teng ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib, impuls ***additiv*** kattalik ekan, xuddi shunday fikrni massa haqida gapirgan edik. Biz bu yerda tashqi kuchlar mavjud bo'lmaganida ikki zarradan tashkil topgan sistemaning impulsi vaqt o'tishi bilan o'zgarmas qolishini, ya'ni saqlanishini isbotladik. Ravshanki, yuqorida keltirilgan fikrlar, ko'p sonli zarralardan (moddiy nuqtalar) iborat sistemaga ham taalluqlidir.

Agar tashqi kuchlar ta'siri mavjud bo'lsa, masalan, birinchi jismga $\mathbf{F}_1$ va ikkinchi jismga $\mathbf{F}_2$ kuchlar ta'sir qilayotgan bo'lsa, moddiy nuqtalarning har biri uchun harakat tenglamalari quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_1, \quad \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_2. \qquad (3.35)$$

Bu tenglamalarni qo'shib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \text{ yoki}$$

$$m\frac{d\mathbf{V}_{im}}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2. \qquad (3.36)$$

Bundan quyidagicha xulosa qilish mumkin: ***Sistema massalar markazi, massasi butun sistemaning massasiga teng bo'lgan moddiy nuqta sifatida harakatlanadi, ta'sir qiluvchi kuch esa sistemaga ta'sir qiluvchi barcha tashqi kuchlarning geometrik yig'indisiga teng.***

Parabola bo'yicha harakatlanayotgan snaryad harakati bunga misol bo'la oladi. Agar vaqtning biror momentida snaryad mayda bo'laklarga parchalansa, bu bo'lakchalar bundan keyin turli tomonlarga sochilib ketadi. Biroq parchalanish natijasida hosil bo'lgan bo'laklar va gazlarning massa markazi xuddi parchalanish yuz bermagandek, o'z harakatlarini parabolik trayektoriya bo'yicha davom ettiradi.

Endi ixtiyori makroskopik jismni (qattiq, suyuq, mayda kukun - ahamiyati yo'q) moddiy nuqtalar to'plamidan iborat deb tasavvur qilamiz va ularning har birini, umumiy holda i indeks bilan ta'minlaymiz. U holda (3.21) ifodaga asosan bir butun jism uchun quyidagini yozish mumkin:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F}, \quad \mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i, \qquad (3.37)$$

bu yerda $\mathbf{P}$ – moddiy nuqtalar sistemasining to'liq impulsi.

Tajriba (shu jumladan presision eksperimentlar) ko'rsatadiki, (3.21), (3.37) munosabatlar faqatgina (3.4) dan kelib chiqadigan trivial hol uchun emas, balki o'zgaruvchi massali jismlar bilan ish ko'rilganda ham o'rinli bo'ladi. Bundan ham muhimi (3.21),(3.37)

dinamika tenglamalarini (3.4) qonun o'rinli bo'lmagan relativistik mexanikada ham ishlaydi. Kvant mexanikada esa tezlik tushunchasidan deyarli foydalanilmaydi, u yerda impuls o'ta muhim bo'lib, fundamental rol o'ynaydi. Energiya bilan bir qatorda impuls fizikaning universal tiliga oid bo'lib, undan har qanday sharoitda foydalanish mumkin. Newton uchinchi qonuni (3.6) nafaqat Newton mexanikasida, balki har qanday hol uchun xuddi mana shu tilda ta'riflanadi.

Inersial sanoq sistema tushunchasini kiritishda, yakkalangan fizik jism ideallashtirilgan modeliga suyangan edik. Shu bilan birga bu jismni moddiy nuqta yoki o'zaro bikir bog'langan moddiy nuqtalar to'plami sifatida tasavvur qilish mumkin deb taxmin qilgan edik. Bu albatta, ancha qo'pol model, chunki yakkalangan mustahkam bog'langan jismlar tabiatda yo'q. Har qanday makroskopik jismni tashkil qilgan atomlar umuman olganda statik sistema emas, chunki atomdagi elektronlarning yoki yadrodagi nuklonlarning harakati jismning ajralmas xususiyati ekanligini misol sifatida keltirish mumkin.

Nisbatan erkinroq sistemani qarab chiqamiz. Moddiy nuqtalar o'zaro mustahkam bog'lanmagan bo'lsin. Umuman olganda, ular o'zaro ta'sirlashadi, ba'zan bu ta'sirni, berilgan aniqlik doirasida e'tiborga olmasa ham bo'ladi, ayrim hollarda esa, buning aksi, ta'sirlashish natijasida - makroskopik jismlar sistemasi hosil bo'ladi. Shunday qilib, biz mutlaq izolyatsiyalangan jism g'oyasidan berk fizikaviy jismlar sistemasi g'oyasiga, ya'ni o'sha-o'sha ***izolyatsiyalangan moddiy nuqtalar sistemasiga*** o'tamiz.

Impuls saqlanish qonuni tabiatning fundamental qonunlaridan biri bo'lib hisoblanadi: ***Inersial sanoq sistemasida berk sistemani tashkil qilgan barcha jismlar impulslarining vektor yig'indisi vaqt o'tishi bilan o'zgarmaydi***, vaholanki har bir jismning impulsi alohida olinganda, vaqt o'tishi bilan yetarli darajada o'zgarishlarga uchrashi mumkin. Agar berk sistema N ta jismdan tashkil topgan bo'lsa, ular uchun impuls saqlanish qonunini quyidagicha yoziladi:

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i(t) = m_1\mathbf{v}_1(t) + m_2\mathbf{v}_2(t) + ... + m_N\mathbf{v}_N(t) = \text{const}. \qquad (3.38)$$

Bu saqlanish qonuniga kirgan o'zgarmasning qiymati turlicha bo'lishi mumkin, u boshlang'ich shartlardan, ya'ni jismlar berk sistemani tashkil qilish momentidagi barcha jismlarning impulslari bilan aniqlanadi.

Impuls saqlanish qonuni, biz ta'kidlagandek, zamonaviy fizika nuqtai nazaridan yetarlicha universal bo'lib, klassik mexanikada an'anaviy (3.6) ko'rinishda yozilgan Newton uchinchi qonunida, ayniqsa statikada - fizik jismlar va sistemalar muvozanati haqidagi fanda yetarli darajada munosib o'rin egallaydi.

3.4 Galilei nisbiylik prinsipi va impuls saqlanish qonuni

Galilei nisbiylik prinsipi va Newton qonunlarini shakllantirib, biz shu narsani aniqladikki, ular bir-biriga zid emas ekan, ya'ni Newton ikkinchi qonuni Galilei almashtirishlariga nisbatan invariantdir. So'ngra Newtonning ikkinchi va uchinchi qonunlaridan biz impuls saqlanish qonunini keltirib chiqardik (umuman olganda bu ikki qonunning o'zi yetarli: birinchi qonun - ikkinchi qonunning, kuch nolga teng bo'lgandagi xususiy holidir). Shunday qilib, tabiiy ravishda Galilei nisbiylik prinsipi nuqtai nazaridan impuls saqlanish qonunini tekshirishga xohish uyg'onadi. Chunonchi: agar bu saqlanish qonuni biror inersial sanoq sistemasida o'rinli bo'lsa, u holda bu sanoq sistemasiga nisbatan o'zgarmas tezlik bilan harakatlanayotgan, barcha sanoq sistemalarida ham o'rinli bo'lishini ko'rsatish mumkin.

Haqiqatan, ikki K, K' koordinata sistemalarini ko'raylik, ikkinchisi birinchisiga nisbatan o'zgarmas $\mathbf{V}$ tezlik bilan harakat qilayotgan bo'lsin. Agar $\mathbf{v}$ – zarraning K sistemadagi, $\mathbf{v}'$ esa K' sistemadagi tezligi bo'lsa, yuqorida ko'rganimizdek ((3.15) formulaga q.), bu tezliklar quyidagi munosabat bilan o'zaro bog'langan:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}. \tag{3.39}$$

K sanoq sistemasida massalari m_1 va m_2, tezliklari $\mathbf{v}_1$ va $\mathbf{v}_2$ bo'lgan zarralarning to'qnashishi yuz berayotgan bo'lsin. To'qnashish natijasida ular turli tomonlarga, faqat endi boshqacha, $\mathbf{u}_1$

va $\mathbf{u}_2$ tezliklar bilan otilib ketadi. U holda K sanoq sistemasida impuls saqlanish qonuni quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2. \tag{3.40}$$

Endi K' sanoq sistemasiga o'tamiz:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_1' + \mathbf{V}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2' + \mathbf{V}, \\ \mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}_1' + \mathbf{V}, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2' + \mathbf{V}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Bularni (3.40) ga qo'yib quyidagini hosil qilamiz:

$$m_1(\mathbf{v}_1' + \mathbf{V}) + m_2(\mathbf{v}_2' + \mathbf{V}) = m_1(\mathbf{u}_1' + \mathbf{V}) + m_2(\mathbf{u}_2' + \mathbf{V}), \text{ yoki} \tag{3.42}$$

$$m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2' + (m_1 + m_2)\mathbf{V} = m_1\mathbf{u}_1' + m_2\mathbf{u}_2' + (m_1 + m_2)\mathbf{V}.$$

Bu tenglikning har ikkala tomonini $(m_1 + m_2)\mathbf{V}$ ga qisqartirib, K' sistemada ham impuls saqlanish qonuni bajariladi, degan xulosaga kelamiz:

$$m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2' = m_1\mathbf{u}_1' + m_2\mathbf{u}_2'. \tag{3.43}$$

Bu xulosani, to'qnashish jarayonida zarralarning massalari qayta taqsimlanadigan hol uchun ham umumlashtirish mumkin, Biroq bunda massaning saqlanish qonuni

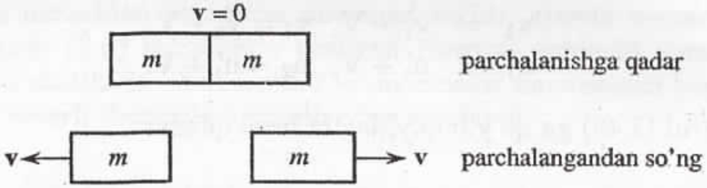
$$m_1 \to M_1 \text{ va } m_2 \to M_2 \text{ lekin } m_1 + m_2 = M_1 + M_2. \tag{3.44}$$

o'rinli bo'lishini inobatga olish kerak. Shunday qilib, impuls saqlanish qonuni Galilei nisbiylik prinsipiga zid emasligini ko'rsatdik:

Agar biror inersial sanoq sistemasida impuls saqlansa, bu sanoq sistemaga nisbatan ixtiyoriy o'zgarmas tezlik bilan harakatlanayotgan boshqa barcha sanoq sistemalarida ham saqlanadi.

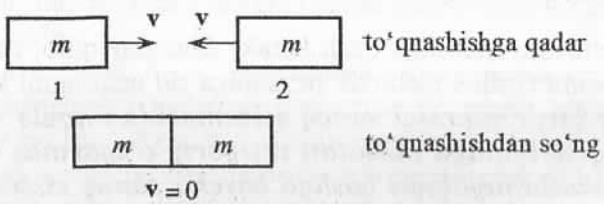
Bunday tasdiqdan so'ng, shunday bir qiziqarli savol paydo bo'ladi. Birgina Galilei nisbiylik prinsipining o'zidan kelib chiqib, impuls saqlanish qonunini keltirib chiqarish mumkinmi? Bu savolga javobning ijobiy bo'lishining o'zi ajoyib.

Keling, quyidagi misolni ko'rib chiqaylik. Har jihatidan bir xil ikki jism prujina yoki shunga o'xshash moslama bilan o'zaro bog'langan va tinch holda turgan bo'lsin, so'ngra ularni to'satdan bo'shatib yuboriladi va prujina ta'sirida, yoki qandaydir kichik portlash natijasida ular turli tomonlarga sochilib ketsinlar (3.6-rasm).



3.6-rasm. Ikki teng massalarning portlash natijasida turli tomonlarga sochilishi.

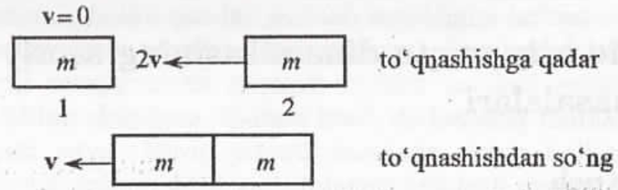
Soddalik uchun bir yo'nalishdagi harakatni ko'rib chiqamiz. Yana, jismlar o'ta (mutlaq) simmetrik joylashgan, deb faraz qilamiz. Ularning o'rtasida portlash yuz bergan vaqtda, ulardan biri o'ng tomonga qandaydir **u** tezlik bilan uchib ketadi. U holda tabiiyki, ikkinchi jism chap tomonga o'shanday tezlik bilan uchadi, chunki ikkala jism aynan bir xil va chap tomon o'ng tomonga nisbatan afzalroq emas. Natijada, simmetriyaga asosan sistemaning impulslari saqlanadi (parchalanishga qadar va parchalanishdan so'ng u nolga teng). Endi teskari jarayonni, ikki butunlay bir xil jismlar teng tezliklar bilan bir-biriga tomon harakatlanayotgan holni qarab chiqamiz, to'qnashuvdan so'ng ular bir-biriga yopishib qolsin (3.7-rasm). Bu yerda bizga yordamga yana sim-



3.7-rasm. Ikki massalari teng jismlarning mutlaq noelastik to'qnashuvi.

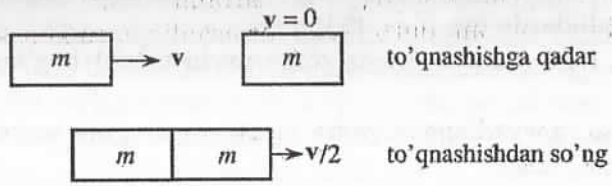
metriya haqidagi qarashlar yordam beradi (ya'ni o'ng va chap tomonlar o'rtasida hech bir farq yo'q), natijada ulardan hosil bo'lgan jism to'qnashish joyida qolishi kerak, degan xulosaga kelamiz.

Bu jarayonni, birinchi jism bilan bog'langan sanoq sistemasida turib kuzatamiz (3.8-rasm). U holda ikkinchi jism birinchisiga qarab $2v$ tezlik bilan harakatlanadi. Ravshanki, bunday sanoq sistemasida jismlar bir-biriga yopishib qolgan holda chap tomonga qarab, ikki marotaba kichik, ya'ni v ga teng tezlik bilan harakatlanadi. Bundan, shunday xulosa kelib chiqadi, agar tinch turgan jismga v tezlik bilan harakatlanayotgan ikkinchi shunday jism kelib urilsa, to'qnashuvdan so'ng ular bir-biriga yopishgan holda, o'sha yo'nalishda, ikki marta kichik $v/2$ tezlik bilan harakatlanadi (3.9-rasm). Impuls yana saqlanadi!



3.8-rasm. Massalari teng bo'lgan ikki jismlarning ulardan biri bilan bog'langan sanoq sistemasidagi noelastik to'qnashuvi.

Xuddi shunday, bir-biriga qarab ixtiyoriy tezliklar bilan harakatlanayotgan ikkita bir xil jismlarning noelastik to'qnashuvlarini ham ko'rib chiqish mumkin. Yana jismlar biri bilan bog'langan sanoq sistemasiga o'tamiz. Bunda noelastik to'qnashishdan keyin bir-biriga yopishib qolgan bir butun jism ikkinchi jism harakat yo'nalishida $(v_1 + v_2)/2$ tezlik bilan harakatlanishiga iqror bo'lish qiyin emas.



3.9-rasm. Massalari teng bo'lgan ikki jismning ulardan biri tinch turgan sanoq sistemasidagi noelastik to'qnashuvi.

Shunday qilib, Galilei prinsipi bir xil massali jismlarning noelastik to'qnashuvlarini tahlil qilish imkonini berishini ko'rdik. Biz yuqorida bir o'lchamli masalani ko'rgan bo'lishimizga qaramasdan, uni ixtiyoriy hol uchun tatbiq qilish mumkin. Faqat bunda, jism harakat yo'nalishida emas, balki bu yo'nalishga biror burchak ostida harakat qilayotgan sanoq sistemasiga o'tish lozim bo'ladi. Prinsip o'sha-o'sha qoladi, faqat ba'zi tafsilotlari biroz murakkablashadi. Ravshanki, bunday jarayonni istalgancha davom ettirish va mutlaq noelastik to'qnashuvda ishtirok etayotgan ikki jism masalarining nisbati ixtiyoriy bo'lgan hol uchun impuls saqlanish qonunini keltirib chiqarish mumkin. Ammo biz bu yerda yuqorida ko'rilgan hol bilan chegaralanamiz.

3.5 Moddiy nuqta dinamikasining asosiy masalalari

3.5.1 Kuch

Shunday qilib, moddiy nuqta harakatini aniqlash uchun, Newton harakat tenglamasini yechish lozim bo'ladi

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \qquad (3.45)$$

bu yerda $\mathbf{F}$ - kuch umumiy holda:

• zarraning koordinatasi $\mathbf{r}$ ga (prujinaga osilgan yukning tebranishida $F = -kx$, Yerning orbital harakatida $F \sim 1/r^2$;

• zarraning tezligi $\mathbf{v}$ ga (qarshilik kuchi: kichik tezliklarda $F \sim v$, katta tezliklarda esa $F \sim v^2$);

• vaqt t ga (vaqt bo'yicha o'zgaruvchi ta'sir) bog'liq bo'lishi mumkin.

Masalan, zaryadlangan zarra elektr va magnit maydonlarida harakatlansa, unga

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}[\mathbf{vH}] \qquad (3.46)$$

Lorentz kuchi ta'sir qiladi, q zarraning zaryadi. Bu yerda ikkala qo'shiluvchi ham qutb vektorlar ekanligini ta'kidlash joiz!

Biroq kuchning berilishi bilan harakat hali birday to'la aniqlanmaydi. Shu bilan birga yana boshlang'ich shartlar ham berilishi, ya'ni qandaydir biror boshlang'ich vaqt momenti, masalan $t = 0$ dagi koordinata va tezlik qiymatlari $\mathbf{r}(0)$ va $\mathbf{v}(0)$ berilishi kerak bo'ladi.[2] U holda, differensial tenglamalar nazariyasida isbotlanishi-cha, (3.45) tenglamaning boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ yagona bo'ladi.

Newton ikkinchi qonunini ifodalovchi tenglamaga, nafaqat $\mathbf{r}(t)$ funksiya, balki uning vaqt bo'yicha birinchi $d\mathbf{r}/dt$ va ikkinchi $d^2\mathbf{r}/dt^2$ tartibli hosilalari ham kiradi, shuning uchun bu tenglama ***ikkinchi tartibli differensial*** tenglamadir. Bunday tenglamalarni umumiy holda qanday yechish kerakligini ko'rsatuvchi universal nazariya yoki tavsiya mavjud emas. Faqatgina, bunday tenglamalarni kompyuterda raqamli yechish usullari yetarli darajada yaxshi ishlab chiqilgan. Bunda kuch ifodasining murakkabligining ahamiyati yo'q. Biroq yetarli darajada sodda hollarda bunday tenglamalarning analitik yechimlarini aniqlash mumkin.

3.5.2 Ish

O'rta maktab fizika kursidan ma'lumki, ish – skalyar kattalik bo'lib, kuch va ko'chishning va ular orasidagi burchak kosinusining ko'paytmasiga teng. Kichik ko'chish $\Delta\mathbf{r}$ uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

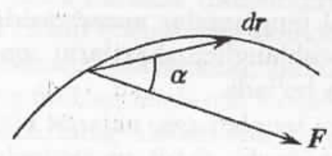
$$\Delta A = \mathbf{F}\Delta\mathbf{r} = F\Delta r\cos\alpha, \qquad (3.47)$$

bu yerda ikki vektorning skalyar ko'paytmasi tushunchasidan foydalandik. Umumiy holatda, moddiy nuqta egri chiziqli trayektoriya bo'ylab harakatlanayotganida chekli uzunlikdagi yo'lni bosib o'tsin. Bu yo'lni fikran juda ko'p mayda bo'laklarga bo'lish va ularning har birida $\mathbf{F}$ kuchni taxminan doimiy deb hisoblash mumkin bo'lsin, u holda elementar ishni $dA = \mathbf{F}d\mathbf{r}$ formula asosida hisoblab topish mumkin bo'ladi (3.10-rasm). Agar barcha elementar ishlarni qo'shib chiqsak, ish uchun integral ko'rinishdagi ifodaga

[2] Boshqa bir juft kattaliklarni berish mumkin, masalan, koordinata (yoki tezlik)ning ikki turli vaqt momentlaridagi qiymatlari.

ega bo'lamiz:

$$A = \int_L \mathbf{F} d\mathbf{r}. \tag{3.48}$$



3.10-rasm. Ish kuch va ko'chishning skalyar ko'paytmasiga teng.

Bu ifoda L egri chiziq bo'ylab $\mathbf{F}$ vektordan ***egri chiziqli integral*** deb ataladi.

Vaqt birligida energiyaning o'zgarishi shu vaqt oraligida bajarilgan ishga teskari ishora bilan teng bo'ladi. Energiya kamaysa ish musbat, ortsa manfiy bo'ladi:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{dA}{dt}. \tag{3.49}$$

Bu kattalik mashina yoki mexanizmlar uchun ishlatilganda quvvat deb ataladi.

Elementar ishni quyidagi ko'rinishlarda yozish mumkin

$$dA = \frac{dA}{dt}dt = \mathbf{F}\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt. \tag{3.50}$$

Bu ifodalardan foydalanib, ish uchun formulani quyidagi ko'rinishda qayta yozish mumkin:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\mathbf{v} dt, \tag{3.51}$$

ya'ni chekli vaqtda bajarilgan ishni quvvatdan yoki kuchni zarra tezligiga skalyar ko'paytmasidan vaqt bo'yicha integral ko'rinishda ishni ifodalash mumkin. Oxirgi holatdan, agar zarraga ta'sir qiluvchi kuch tezlik $\mathbf{v}$ ga perpendikular bo'lsa, bunday kuchning bajargan ishi nolga tengligi kelib chiqadi. Shunga ko'ra, masalan, magnit maydon zarra ustida hech qanday ish bajarmaydi ((3.46) dagi ikkinchi qo'shiluvchiga q.).

Endi Newton ikkinchi qonuni formulasidan foydalanib, kuchni impulsdan vaqt bo'yicha hosila $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ orqali ifodalaymiz:

$$A = \int \mathbf{F}\mathbf{v} dt = \int \frac{d\mathbf{p}}{dt}\mathbf{v} dt = \int \mathbf{v} d\mathbf{p}. \tag{3.52}$$

$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ bo'lganligidan, $d\mathbf{p} = md\mathbf{v}$ bo'ladi. Shuning uchun

$$A = \int d\mathbf{p}\mathbf{v} = \int m\mathbf{v}d\mathbf{v} = m\int \mathbf{v}d\mathbf{v} = m\int d\Big(\frac{v^2}{2}\Big) = \frac{mv^2}{2} + \text{const}. \tag{3.53}$$

Bu yerda biz $dv^2 = d(\mathbf{v}\mathbf{v}) = 2\mathbf{v}d\mathbf{v}$ ekanligidan foydalandik. Agar endi biz, moddiy nuqtaning 1-holatdan 2-holatga ko'chirishda bajarilgan ishini qarab chiqadigan bo'lsak, u holda ish quyidagiga teng bo'ladi:

$$A_{12} = \int_1^2 d\mathbf{p}\mathbf{v} = m\int_1^2 \mathbf{v}d\mathbf{v} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \tag{3.54}$$

Skalyar kattalik

$$T = \frac{mv^2}{2} \tag{3.55}$$

zarraning ***kinetik energiyasi*** deb atalishi ma'lum.

Shunday qilib, biz quyidagini isbotladik: ***Moddiy nuqtaning ko'chirishda kuchning bajargan ishi uning kinetik energiyasi orttirmasiga teng bo'ladi.*** Bunda kuch deganda, nuqtaga ta'sir qiluvchi to'la kuchni tushunish lozim. Masalan, siz chanani, unchalik sirg'anchiq bo'lmagan (qum sepilgan muz) yo'lda sudrayotgan bo'lsangiz, unda siz bajarayotgan ish noldan farqli bo'ladi. Biroq chana kinetik energiyasining biror bir orttirmasi yuzaga kelmaydi. Bunga sabab shuki, ishqalanish kuchi ham ish (manfiy) bajaradi. Natijada to'la kuch va ish nolga teng bo'ladi.

Olingan natijani biror bir qiyinchiliksiz, ixtiyoriy moddiy nuqtalar sistemasi uchun umumlashtirish mumkin. Sistemaning kinetik energiyasi deb, sistemani tashkil qilgan moddiy nuqtalar kinetik energiyalarining yig'indisiga aytiladi:

$$T = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} \tag{3.56}$$

Natijada quyidagi qoidani ta'riflash mumkin: ***Moddiy nuqtalar sistemasiga ta'sir qiluvchi barcha kuchlarning bajargan ishlarining yig'indisi, shu sistemaning kinetik energiyasining orttirmasiga teng.***

Shu bilan birga, barcha ichki kuchlarning ishini ham e'tiborga olish kerak. Solishtiring: ichki kuchlar sistemaning to'liq impulsini o'zgartirmaydi (faqat tashqi kuchlar o'zgartirishi mumkin), uning kinetik energiyasini esa o'zgartiradi. Masalan, urilish jarayonida shunday moment bo'ladiki bunda ikkala to'qnashayotgan jismlar to'xtab qoladi. Bu vaqt momentida kinetik energiya nolga teng bo'ladi, elastik deformatsiya energiyasi esa maksimal bo'ladi. Agar to'qnashuv elastik bo'lsa, undan keyin kinetik energiya, ravshanki, tiklanadi va to'qnashuvdan oldin qanday bo'lsa, shunday bo'lib qoladi.

3.5.3 Konservativ va nokonservativ kuchlar

Makroskopik jismlar mexanikasida uchraydigan barcha kuchlarni konservativ va nokonservativ kuchlarga ajratish qabul qilingan. Konservativ kuchlar shunday kuchlarki, ularning bajargan ishi ikki nuqta orasidagi masofani jism qanday yo'l bilan bosib o'tishiga bog'liq bo'lmaydi (3.11*a*-rasm):

$$A_{12}(a) = A_{12}(b) = A_{12}(c)$$

Konservativ kuchlarning berk trayektoriyada bajargan ishi nolga teng bo'lishi kerak (3.11*b*-rasm)

$$A_{12}(a) = -A_{21}(c), \Rightarrow A_{12}(a) + A_{21}(c) = 0.$$

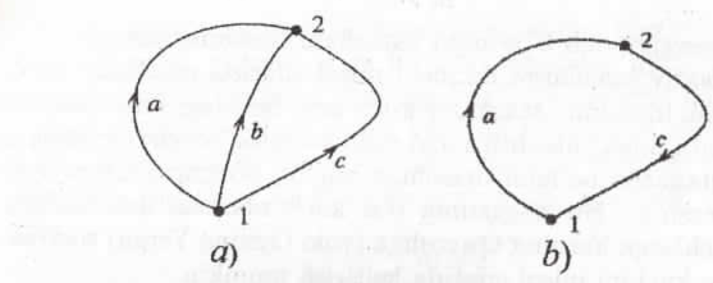
Bu holat matematik tilda quyidagicha yoziladi:

$$\oint \mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = 0. \tag{3.57}$$

Konservativ kuchlarga, masalan, og'irlik kuchi misol bo'la oladi. Moddiy nuqtaning $\mathbf{r}_{12}$ to'g'ri chiziqli kesma bo'ylab 1-holatdan 2-holatga o'tishidagi bu kuchning bajargan ishini hisoblaymiz:

$$A_{12} = m\mathbf{g}\mathbf{r}_{12} = mgr_{12}\cos\alpha = mg(h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2, \tag{3.58}$$

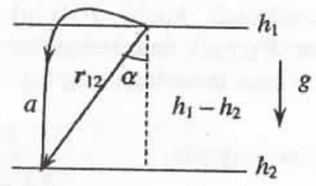
bu yerda h_1 va h_2 yo'lning boshi va oxirida moddiy nuqta turgan balandliklar (3.12-rasm). Ular qandaydir ixtiyoriy sathdan hisoblanadi, masalan yer sirtidan yoki dengiz sathidan.



3.11-rasm.

Og'irlik kuchi bajargan ishning formulasi (3.58) ixtiyoriy egri chiziq bo'ylab ko'chish uchun ham o'rinli bo'ladi. Bu tasdiqni isbotlash uchun butun yo'lni gorizontal tekisliklar bilan mayda bo'laklarga, ulardan har birini to'g'ri chiziq deb qarash mumkin bo'ladigan qilib, bo'lib chiqish kerak (3.12-rasm, egri chiziq).

Har bir bunday bo'lakka keltirib chiqarilgan (3.58) formulani qo'llaymiz va olingan natijalarni yig'ib chiqib, avvalgi natijaga kelamiz. ***Shunday qilib, og'irlik kuchining ishi yo'lning shakliga bog'liq bo'lmaydi. U faqat ko'chayotgan nuqtaning boshlang'ich va oxirgi holati bilan aniqlanadi.***



3.12-rasm.

Bundan tashqari, (3.54) va (3.58) formulalarni taqqoslab, quyidagi xulosaga kelamiz:

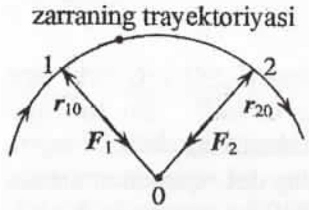
$$mgh_1 + \frac{mv_1^2}{2} = mgh_2 + \frac{mv_2^2}{2}, \tag{3.59}$$

ya'ni og'irlik kuchi maydonidagi harakatda quyidagi kattalik saqlanadi:

$$E = mgh + \frac{mv^2}{2} = \text{const}. \tag{3.60}$$

Bu kattalik sistemaning ***to'liq energiyasi*** deb atalib, u ***kinetik*** va ***potensial*** energiyalar yig'indisidan iborat bo'ladi. Bu yerda potensial energiya deb $U = mgh$ kattalikni tushunish kerak.

Konservativ kuchlarga ikkinchi misol sifatida markaziy kuchlarni keltirish mumkin. Markaziy kuch deb, fazodagi biror nuqtani moddiy nuqta bilan tutashtiruvchi radius-vektor bo'ylab yo'nalgan va shu nuqtagacha bo'lgan masofaga bog'liq bo'lgan kuchga aytiladi (3.13-rasm). Bu nuqtaning o'zi kuch markazi deb ataladi. Bunday kuchlarga Yerning Quyoshga (yoki Oyning Yerga) tortilish gravitatsiya kuchini misol sifatida keltirish mumkin.

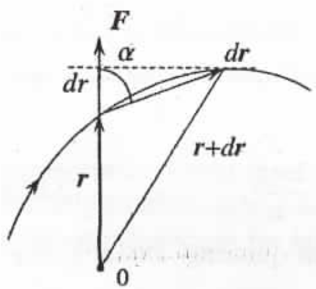


3.13-rasm. Gravitatsion tortishish kuchi $\mathbf{F}_1(\mathbf{r}_{10})$ va $\mathbf{F}_2(\mathbf{r}_{20})$ markazigacha bo'lgan masofaga bog'liq.

Agar markaziy kuch itarishish kuchi bo'lsa (ikkita bir xil ishorali zaryadlarning ta'sirlashishi), 3.13-rasmda faqat kuchlarning yo'nalishini qarama-qarshi tomonga o'zgartirish kifoyadir. Bu rasmda ular tortishish kuchlari sifatida tasvirlangan.

Markaziy kuchlarning ishi ham yo'lning shakliga bog'liq bo'lmasdan, moddiy nuqtaning boshlang'ich va oxirgi holatlari bilangina aniqlanishini ko'rsatamiz. Buning uchun dr cheksiz kichik ko'chishda maydon bajargan ishni hisoblaymiz:

$$dA = \mathbf{F}d\mathbf{r} = |\mathbf{F}||d\mathbf{r}|\cos\alpha,$$



3.14-rasm. Markaziy kuchlar ishini hisoblashga doir chizma.

bu yerda $|dr|\cos\alpha = dr$ - moddiy nuqtaning markazgacha bo'lgan masofaning orttirmasi (3.14-rasmga q.).

Shunday qilib, ish dr bilan aniqlanganligi uchun markaziy maydonda bajarilgan ish yo'lga ham, ko'chishga ham bog'liq emasligi kelib chiqadi. U faqat markazgacha bo'lgan masofaning o'zgarishiga bog'liq, ya'ni $dA = Fdr$. Chekli ko'chishda bajarilgan ish:

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F}d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr. \quad (3.61)$$

Aniq integralning qiymati faqat integralning pastki va yuqori chegaralari r_1 va r_2 ga bog'liq bo'ladi. Shunday qilib, markaziy kuchlarning ishini, yo'lning shakliga bog'liq emasligini ko'rsatdik.

Misol tariqasida gravitatsiya kuchining bajargan ishini hisoblaymiz. Massalari m va M bo'lgan moddiy nuqtalar orasidagi gravitatsiya tortishish kuchlari faqatgina ular orasidagi masofaga bog'liq:

$$\mathbf{F} = -G\frac{mM}{r^3}\mathbf{r}. \quad (3.62)$$

Koordinata boshi M massali jism joylashgan nuqta bilan mos tushsin (masalan, bu Yer bo'lsin), u holda birinchi jismdan r masofada joylashgan m massali ikkinchi jism unga (3.62) kuch bilan tortiladi (3.15-rasm). Bu kuchning ishi

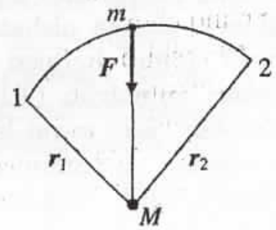
$$\begin{aligned} A_{12} &= \int_1^2 \mathbf{F}d\mathbf{r} = -\int_1^2 G\frac{mM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}d\mathbf{r} = -GmM\int_1^2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}d\mathbf{r} = \\ &= -GmM\int_1^2 \frac{dr}{r^2} = GmM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \end{aligned} \quad (3.63)$$

ifoda bilan aniqlanadi. Bunda, biz $\mathbf{r}d\mathbf{r} = d(r)^2/2 = rdr$ dan foydalandik. Shunday qilib,

$$A_{12} = \frac{GmM}{r_2} - \frac{GmM}{r_1} \quad (3.64)$$

Ish kinetik energiyaning o'zgarishi ekanligini e'tiborga olib, quyidagini yozish mumkin:

$$A_{12} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{GmM}{r_2} - \frac{GmM}{r_1}. \quad (3.65)$$



3.15-rasm.

Shunday qilib, harakat jarayonida:

$$A_{12} = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{GmM}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{GmM}{r_2} = \text{const} \quad (3.66)$$

kattalik doimiy qolishini aniqladik. U xuddi avvalgidek, to'liq energiya deb ataladi va kinetik hamda potensial energiyalar yig'indisiga teng bo'ladi:

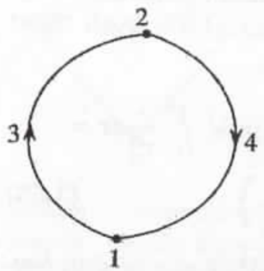
$$E = T + U, \tag{3.67}$$

bu yerda potensial energiya deb,

$$U = -\frac{GmM}{r} \tag{3.68}$$

kattalikni tushunish kerak. Bu kuch tortishishga mos kelganligi uchun manfiydir.

Endi, 1- va 2- nuqtalarni birlashtiruvchi berk konturni ko'rib chiqamiz. Agar kuch konservativ bo'lsa, $A_{132} = A_{241}$. Harakat yo'nalishini o'zgartirsak va 1- dan 2- ga emas, balki 2- dan 1- ga harakat qilsak, yo'llarning har bir qismida kuch avvalgidek bo'ladi, ko'chish esa ishorasini o'zgartiradi (3.16-rasm), ya'ni $A_{142} = -A_{241}$ natijada yoki $A_{132} + A_{241} = 0$. Shunday qilib, muhim bir natijaga kelamiz: ***konservativ kuchlarning berk konturdagi ishi nolga teng.***



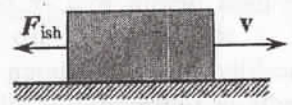
3.16-rasm. Konservativ kuchlarning berk konturda ishi nolga teng.

Konservativ bo'lmagan barcha kuchlar nokonservativ kuchlar deb ataladi. Bular toifasiga, eng avvalo, dissipativ kuchlar, masalan, bizga maktab kursidan ma'lum bo'lgan ishqalanish kuchlari taalluqlidir. Bu kuchlar bir jismning ikkinchi jismga nisbatan sirpanishida yuzaga keladi. Ishqalanish kuchi doimo harakat tezligiga qarama-qarshi, ya'ni ko'chishga teskari yo'nalgan (3.17-rasm). Bu kuchning ishi doim manfiy. Masalan, jism avval bir tomonga so'ngra orqaga qaytsa, u holda ravshanki, umumiy ish manfiy bo'lib, noldan farqli bo'ladi. Shunday qilib, berk kontur bo'ylab harakatda sirpanish ishqalanish kuchi ishi nolga teng emas.

Dissipativ kuchlar sirasiga suyuqlik yoki gazlardagi qovushoqlik kuchlari kiradi. Masalan, havoning qarshilik kuchi parashutchiga erkin tushish tezlanishi g bilan tushishga imkon bermaydi. Bu kuchlar ba'zan qovushoq ishqalanish kuchlari ham deb ataladi. Sirpanish ishqalanish kuchlaridan farqli o'laroq, ular jism tezligining absolut qiymatiga bog'liq bo'lib, unga qarama-qarshi yo'nalgan

bo'ladi. Shunday qilib, dissipativ kuchlar deb, bajargan ishi to'liq energiyani kamaytiruvchi kuchlarga aytiladi (dissipatsiya - so'nish, energiyaning sochilishi degan ma'noni anglatadi). Bunday kuchlarning mavjudligi birgina mexanika doirasida energiya saqlanish qonuni (3.60), katta yoki kichik aniqlikda taxminan o'rinli bo'lishini belgilaydi.

Umuman olganda, mexanik sistemaning to'liq energiyasi $E = T + U$ vaqt davomida ortib borishi ham mumkin. Bu sistemaning boshqa jismlardan yaxshi izolatsiya qilinmaganligi va ular sistema ustidan ish bajarayotganligini bildiradi. Shu sababga ko'ra (3.60) qonunning aniqligi, harakat qonunlarini tashqi olamga bog'liq emas deb qaray olishimiz aniqligidan yuqori bo'la olmaydi.



3.17-rasm.

Mexanik sistemani har qancha izolatsiyalashga harakat qilmaylik, miqdoriy jihatidan tashqi muhit ta'sirini e'tiborga olmaslikka qanchalik harakat qilmaylik, hech qachon (3.60) shartni oldindan berilgan aniqlikda bajara olmaymiz, bundan tashqari to'liq energiyaning o'zgarishi bevosita yo'qotish tomonga yuz beradi. Bu o'yinga dissipatsiya qo'shilganini va (3.60) ning aniqligi xuddi shu dissipatsiya darajasi bilan belgilanishini bildiradi. Ko'pincha bunda, "energiya saqlanadi, lekin boshqa turga o'tadi" deb yuritiladi, biroq bu "boshqa turlar" qanday energiya ekanligini aniqlash lozim.

Bu yerda shuni ta'kidlash lozimki, shu vaqtgacha mikroskopik doirada aniqlangan, elementar zarralar o'rtasidagi barcha ta'sir kuchlari konservativdir! Shunday qilib, makroskopik masalalarda kuchlarning nokonservativligi – jismlarni tashkil etuvchi atomlar, molekulalar, elektronlar va h. harakatlarini sinchiklab qarashimizning oqibatidir. Agar jismni tashkil etuvchi barcha zarralar ***konfiguratsiya fazosida*** berk konturni tasavvur qila olsak, bu kontur bo'ylab barcha kuchlarning bajargan ishi har doim nolga teng bo'lgan bo'lar edi. Dastlabki holatga faqat makroskopik jism qaytadi, u ham bo'lsa taxminan, chunki jismni tashkil qiluvchi molekulalar endi tezroq harakat qiladi - jism qiziydi. Jismni o'rab turgan atrof-muhit ham ishqalanish hisobiga qiziydi, ya'ni u ham o'z holatini o'zgartiradi. Shunday qilib, makroskopik jismning berk kontur bo'ylab harakati natijasida butun sistema, qat'iy aytilsa, boshlang'ich holatiga qaytmaydi! Shunga ko'ra ish ham noldan farqlidir. Bu ish oxir oqibat issiqlikka aylanadi. Sarf qilingan energiyani qaytaruvchi usul yo'q. Bu jarayon qaytmasdir!

Kuchlarning yana bir turi – bu ***giroskopik kuchlardir***. Giroskopik deb ataluvchi kuchlarning bajargan ishi doimo nolga aniq teng bo'ladi. Ravshanki, $\mathbf{F}$ kuch nolga teng bo'lmaganda, $\mathbf{F}d\mathbf{r} \equiv 0$ bo'lishi uchun $\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$ bo'lishi kerak. $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ bo'lganligi uchun $\mathbf{F} \perp d\mathbf{r}$ ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib, bunday kuchlar moddiy nuqta tezligiga bog'liq bo'ladi, shu bilan birga u doimo tezlikka perpendikulardir. Shuning uchun bunday kuchlarning bajargan ishi doimo nolga teng bo'ladi. Shunga ko'ra, ularni shartli ravishda konservativ kuchlar sirasiga qo'shish mumkin. Inersial sanoq sistemalarida giroskopik kuchlarga yagona misol sifatida, magnit maydonida harakatlanuvchi zaryadlangan zarralarga ta'sir qiluvchi kuchni keltirish mumkin

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{vH}]/c. \qquad (3.69)$$

3.5.4 Konservativ kuchlar maydonidagi harakatning qaytuvchanlik prinsipi

Kuch konservativ bo'lishi uchun u zarraning tezligiga va vaqtga oshkora bog'liq bo'lmasligi yetarlidir:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \equiv \mathbf{F}(\mathbf{r}). \qquad (3.70)$$

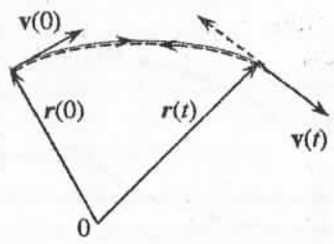
Oshkor bo'lmagan holda u vaqtga $\mathbf{r}(t)$ orqali bog'lanishi mumkin. Bu holda zarraning harakat tenglamasi (3.45) ***vaqt inversiyasi operatsiyasi*** $t \to -t$ ga nisbatan invariantdir. Boshqacha aytganda, agar biz

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \qquad (3.71)$$

harakat tenglamasining $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ yechimini topgan bo'lsak, $\mathbf{r}' = \mathbf{r}(-t)$ ham bu tenglamaning yechimi bo'ladi. Oxirgi natijaning o'rinli bo'lishining sababi shundaki, ikki karra differensiallash operatsiyasi $t \to -t$ vaqt inversiyasiga nisbatan invariantligidadir:

$$\frac{d^2}{dt'^2} = \frac{d^2}{dt^2}. \qquad (3.72)$$

Bu simmetriyaning namoyon bo'lishi shundaki, masalan, zarraning koordinata va tezligi qandaydir boshlang'ich qiymatlar bilan aniqlanuvchi biror trayektoriya bo'ylab harakatlanayotgan bo'lsa, va biz vaqtning qandaydir bir momentida, zarra tezligini qarama-qarshi tomonga o'zgartirib, harakatni qaytarsak, bu tezlik va koordinatani yangi boshlang'ich shart deb qabul qilsak, sistema o'sha trayektoriya bo'ylab va (ishoragacha aniqlikda) o'sha tezlik bilan orqaga harakatlanadi (3.18-rasm).



3.18-rasm.

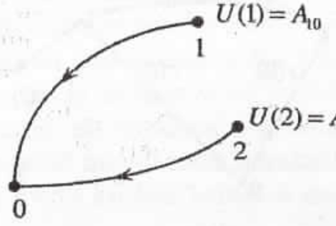
Bu xuddi biz jismning harakatini kino tasmaga tushirib, so'ngra uni orqaga qaytarganimizdek bo'ladi. Bu muhim prinsip harakatning ***qaytuvchanlik prinsipi*** deb ataladi. Bu prinsip zarraning (yoki jism) konservativ (tezlikka bog'liq bo'lmagan) kuchlar maydonidagi harakatlar uchun o'rinli bo'ladi.

Harakatning qaytuvchanlik prinsipi har qanday kuchlar uchun, masalan, giroskopik kuchlar uchun o'rinli bo'ladimi? Giroskopik kuchlar bajargan ish nolga teng bo'lsada va ular konservativ kuchlar toifasiga kiritilsa ham, ularga avvalgi ko'rinishdagi harakatning qaytariluvchanlik prinsipini qo'llab bo'lmaydi. Sababi, bu kuchlar nafaqat moddiy nuqta joylashish holatiga, shu bilan birga uning tezligiga ham bog'liq. Shuning uchun, masalan, zaryad elektr va magnit maydonlarida qandaydir bir trayektoriya bo'ylab harakatlanayotgan bo'lsin. Vaqtning qandaydir momentida harakatni orqaga qaytarsak, zaryad orqaga o'sha avvalgi trayektoriya bo'ylab harakatlanmaydi. Bu faqat, agar bir vaqtning o'zida $\mathbf{H}$ magnit maydon ishorasini ham o'zgartirsak yuz berishi mumkin:

$$[\mathbf{vH}] = [(-\mathbf{v})(-\mathbf{H})]. \qquad (3.73)$$

3.6 Potensial energiya. Mexanikada energiyaning saqlanish qonuni

Bajargan ishi yo'lning shakliga bog'liq bo'lmagan konservativ kuchlar uchun, ***potensial energiya*** deb ataladigan muhim tushunchani kiritish mumkin. Bunday kattalikni yuqorida xususiy hol sifatida, og'irlik va gravitatsiya kuchlari uchun kiritgan edik. Endi bu kattalikni umumiy holda kiritamiz.



3.19-rasm. Potensial energiyani aniqlash.

Sistemaning qandaydir bir ixtiyoriy va uning moddiy nuqtalarining berilgan koordinatalari bilan xarakterlanuvchi holatini shartli ravishda nolinchi holat deb qabul qilamiz. Unda ***sistemaning biror holatidan nolinchi holatga o'tishda konservativ kuchlarning bajargan ishiga, sistemaning bu holatdagi U potensial energiyasi deyiladi*** (3.19-rasm).

Konservativ kuchlarning ishi o'tish yo'liga bog'liq bo'lmaydi va shunga ko'ra potensial energiyasi sistemaning qat'iy belgilangan nolinchi holatida faqat sistema moddiy nuqtalarining koordinatalariga bog'liq bo'ladi. Boshqacha aytganda, ***sistemaning potensial energiyasi U koordinatalar funksiyasi bo'ladi.***

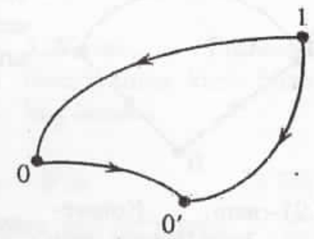
Potensial energiyaning qiymati, umuman olganda, sistemaning qaysi holati, shartli ravishda, nolinichi deb olinganiga bog'liq. Agar nolinchi holat deb **0** nuqta olingan bo'lsa, sistemaning **1**- holatdagi potensial energiyasi, uning **1**- holatdan **0** -holatga o'tishidagi konservativ kuchlarning bajargan ishiga teng bo'ladi, ya'ni $U = A_{10}$ (3.20-rasm). Agar nolinchi holat sifatida **0'** nuqta olingan bo'lsa, potensial energiya $U = A_{00'}$ ga teng bo'ladi. Kuchlarning konservativligi oqibatida

$$A_{10'} = A_{10} + A_{00'} \text{ yoki } U' = U_1 + A_{00'}. \qquad (3.74)$$

Ish $A_{00'}$ o'zgarmas, ya'ni qaralayotgan **1**-holatdagi sistemaning

koordinatalariga bog'liq bo'lmaydi. U to'la ravishda nolinchi holatlar **0** va **0'** nuqtalarning tanlanishi bilan aniqlanadi.

Shunday qilib, yuqoridagilardan ko'rinadiki, nolinchi holat boshqasi bilan almashtirilsa, sistemaning potensial energiyasi doimiy qiymatga o'zgaradi. Agar nolinchi holatdagi potensial energiyani nolga tenglamasdan qandaydir ixtiyoriy qiymatga tenglashtirilsa, noaniqlikni yanada kuchaytirgan bo'lamiz. U holda yuqorida keltirilgan potensial energiya uchun berilgan ta'rifda potensial energiya o'rniga uning ikki holatdagi farqlari haqida gapirish kerak bo'ladi. ***Qaralayotgan va nolinchi holatlardagi potensial energiyalar farqi deb, konservativ kuchlar tomonidan sistemaning qaralayotgan holatdan nolinchi holatga otishidagi bajargan ishiga aytiladi.*** Shunday qilib, potensial energiya biror absolut qiymatigacha emas balki biror doimiy kattalik aniqligida aniqlanadi. Bu ixtiyoriylik unchalik qo'rqinchli emas, chunki aslida doimo potensial energiyalar farqi muhimdir.



3.20-rasm. Potensial energiya nolinchi holatning tanlanishiga bog'liq.

Faraz qilaylik sistema **1** - holatdan **2** - holatga ikki yo'l bilan o'tishi mumkin bo'lsin (3.21-rasm). U holda, bajarilgan ish

$$A_{12} = A_{10} + A_{02} = A_{10} - A_{20} =$$

$$U_1 - U_2 = -(U_2 - U_1).$$

bo'ladi, ya'ni sistemaning **1** - nuqtadan **2** - nuqtaga o'tishidagi konservativ kuchlarning ishi sistemaning potensial energiyasining kamayishiga teng.

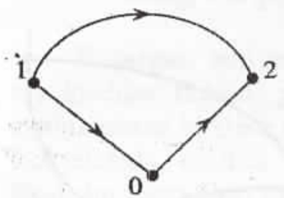
Ikkinchi tomondan, kuchlarning ishi kinetik energiya orttirmasiga teng

$$A_{12} = U_1 - U_2 = K_2 - K_1, \qquad (3.75)$$

shuning uchun

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2. \qquad (3.76)$$

Kinetik va potensial energiyalar yig'indisi sistemaning to'la energiyasi deb ataladi. Uni E harfi bilan belgilaymiz. 1- va 2- holatlardagi to'la energiya bir-biriga tengligini ($E_1 = E_2$) aniqladik, ya'ni to'la energiya saqlanadi:



3.21-rasm. Konservativ kuchlarning ishi potensial energiyaning kamayishiga teng.

$$E = K + U = \text{const}. \qquad (3.77)$$

Shunday qilib, ***konservativ (va giroskopik) kuchlar mavjud sistemada to'la energiya doimiy qoladi. Faqatgina potensial energiyaning kinetik energiyaga aylanishi va teskarisi yuz berishi mumkin, lekin sistemaning to'la zahira energiyasi o'zgarmay qoladi.*** Bu holat mexanikada ***energiyaning saqlanish qonuni*** deb ataladi.

Ba'zi sodda hollar uchun potensial energiyaga misollar keltiramiz:

• $U = mgh$ – bir jinsli og'irlik maydonidagi potensial energiya. Sanoq boshi $h = 0$ sathda olingan.

• $U = kx^2/2$ – prujinaning potensial energiyasi. Sanoq boshi $x = 0$ nuqtada olingan.

• $U = -GMm/r$ – m va M ikki nuqtaviy massalarning gravitatsiya tortishish potensial energiyasi. Sanoq boshi cheksiz uzoqlikdagi nuqtada olingan.

3.7 Kuch va potensial energiya

Kuchni moddiy nuqta koordinatalari funksiyasi sifatida, ya'ni $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) \equiv \mathbf{F}(\mathbf{r})$ ma'lum bo'lsa, integrallash yo'li bilan (ishni topish) sistemaning potensial energiyasini aniqlash mumkin

$$U_1 = U(x, y, z) - U(0) = A_{10} = -A_{01} = -\int_0^1 \mathbf{F}d\mathbf{r}, \qquad (3.78)$$

integralda **0** nuqtadan **1** nuqtaga, ya'ni 3.22-rasmda tasvirlangan yo'nalishga qarama-qarshi yo'nalishda yurilganligi sababli integral oldida manfiy ishora qo'yilgan.

Yana bir masala - berilgan potensial energiyaga $U(x, y, z)$ orqali $\mathbf{F}(x, y, z)$ kuchni aniqlash. Bu, tabiiyki, differensiallash bo'lib - integrallashga teskari bo'lgan amaldir. Faraz qilaylik, bizda bir-biriga cheksiz yaqin $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ va $\mathbf{r}$ nuqtalar berilgan bo'lsin. U holda,

3.22-rasm. Potensial energiyaning kuch bilan bog'lanishi.

$$U(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}) = dU = -\mathbf{F}d\mathbf{r}. \qquad (3.79)$$

Skalyar ko'paytmani ochib chiqib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$dU = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz). \qquad (3.80)$$

Natijada,

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{y,z=\text{const}} \equiv -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad (3.81)$$

(bu xususiy hosila) va shunga o'xshash,

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \; F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (3.82)$$

Batafsilroq quyidagicha yozish mumkin:

$$F_x(x, y, z) = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}, \; F_y(x, y, z) = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y},$$

$$F_z(x, y, z) = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}.$$

Shunday qilib, kuchning komponentlarini, sistemaning potensial energiyasini x, y va z koordinatalar bo'yicha differensiallab topish mumkin.

Agar x, y va z o'qlar bo'ylab birlik ortlar **i**, **j** va **k** larni kiritsak, kuch ifodasini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\mathbf{F} \;=\; \mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} = -\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k} =$$

$$= -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\right) \equiv -\operatorname{grad} U, \qquad (3.83)$$

bu yerda quyidagi belgilashni kiritildi:

$$\operatorname{grad} U \equiv \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \equiv \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{3.84}$$

Chap tomonda turgan kattalik ***skalyar funksiya U ning gradienti*** deyiladi. Moddiy nuqtaga ta'sir qiluvchi kuchni aniqlaganligi uchun bu kattalik vektor bo'ladi.

Gradientni $\operatorname{grad} U$ ko'rinishdagi belgilash bilan bir qatorda ∇U belgilash ham qo'llaniladi, bu yerda ∇ - ***nabla*** operatori quyidagi ko'rinishda aniqlanadi:

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \equiv \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{3.85}$$

3.8 Gradientning geometrik ma'nosi

Gradientning geometrik ma'nosini aniqlash uchun, ekvipotensial sirtlar degan tushunchani kiritish maqsadga muvofiq, ya'ni bu sirtda skalyar funksiya U doimiy qoladi:

$$U(x, y, z) = \text{const}. \tag{3.86}$$

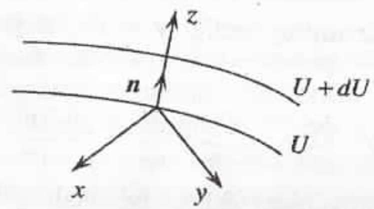
Faraz qilaylik, U – shunday funksiyalardan biri bo'lsin va u fazodagi gradient aniqlanadigan O nuqtadan o'tsin (3.23-rasm). Bu nuqtaga koordinata boshini joylashtiramiz. z o'qini sirtga tik qilib tanlaymiz ($\mathbf{n}$ – normal yo'nalishidagi birlik vektor), x va y o'qlar O nuqtada sirtga o'tkazilgan urinma tekislikda yotadi. Shuning uchun, birinchi yaqinlashishda U funksiya x va y o'qlar bo'ylab o'zgarmaydi:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = 0. \tag{3.87}$$

Natijada,

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{n}, \tag{3.88}$$

Chunki ushbu holda $\mathbf{k} = \mathbf{n}$.



3.23-rasm. Potensial funksiyaning gradientini aniqlashga doir chizma.

Agar U funksiya z o'qi bo'yicha ortib borsa, $\partial U/\partial z > 0$ bo'ladi. Demak, gradientning yo'nalishi – ekvipotensial sirtga o'tkazilgan normal bo'ylab potensial energiyaning ortishi tomon yo'nalgan ekan. Ravshanki, bu yo'nalishda potensial energiyaning o'zgarishi eng tez yuz beradi:

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial n}\mathbf{n}. \tag{3.89}$$

Shunday qilib, quyidagi xulosaga kelamiz: ***Skalyar funksiyaning gradienti vektordir. Bu vektor ekvipotensial sirtga o'tkazilgan normal bo'ylab potensial energiyaning ortishi tomon yo'nalgan. Uning uzunligi son jihatidan ekvipotensial sirtga o'tkazilgan normal bo'yicha potensial energiyadan olingan hosilaga teng.*** Bu ta'rif koordinatalar sistemasining tanlanishiga bog'liq emas, ya'ni invariantdir.

Fazoning har bir nuqtasidan ekvipotensial sirt bilan birga, kuch chiziqlari deb ataluvchi chiziqlarni ham o'tkazish mumkin. Har bir nuqtada, unga o'tkazilgan urinmaning yo'nalishi, bu nuqtada zarraga ta'sir qiluvchi kuch yo'nalishi bilan mos tushadi. Ravshanki, kuch chiziqlari va ekvipotensial sirtlar o'zaro ortogonal.

Gradient tushunchasidan foydalanib, Newton ikkinchi qonunini harakatlanayotgan moddiy nuqta uchun quyidagi ko'rinishda tasvirlanishi mumkin

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \equiv -\operatorname{grad} U. \tag{3.90}$$

Endi, bu tenglamadan qanday qilib energiyaning saqlanish qonuni kelib chiqishini ko'ramiz. Buning uchun, tenglamaning chap va o‘ng tomonlarini zarraning tezligi $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ ga skalyar ko‘paytiramiz:

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{\partial U(\mathbf{r}(t))}{\partial t} \qquad (3.91)$$

bunda murakkab funksiyani differensiallash qoidasidan foydalandik. Ifodaning chap tomonini zarra kinetik energiyasidan vaqt bo‘yicha hosila ko‘rinishida yozish mumkin

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}^2}{2}\right) = -\frac{dU}{dt}, \qquad (3.92)$$

Yoki hammasini chap tomonga o‘tkazib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}^2}{2} + U\right) = 0 \to \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + U = \text{const}, \qquad (3.93)$$

Bu mexanikada energiyaning saqlanish qonunidir: ***Konservativ sistemaning to‘liq mexanik energiyasi saqlanadi***. Bu qonunni keltirib chiqarishda zarra potensial energiyasining vaqtga oshkora ravishda bog‘liq emasligi muhim ekanligini ta’kidlash lozim. Potensial energiyaning vaqtga bog‘lanishi radius-vektorning vaqtga bog‘lanishi orqali $\mathbf{r}(t)$ kiradi, ya’ni potensial energiya vaqtga oshkora bo‘lmagan.

3.9 Impuls va energiyaning saqlanish qonunlari. Fazo-vaqtning bir jinsligi

Agar potensial energiya koordinatalardan birortasiga, masalan, birgina x ga bog‘liq bo‘lmasa, unda $\partial U/\partial x = 0$, va natijada,

$$\frac{dp_x}{dt} = 0, \qquad (3.94)$$

ya’ni p_x – bu yo‘nalishda zarraning impulsi saqlanadi. Potensial energiya U ning x koordinataga bog‘liq bo‘lmasligi, x o‘qi yo‘nalishida fazo bir jinsli. Bu yo‘nalishdagi har qanday ko‘chishlarda potensial energiya o‘zgarmaydi. Shunday qilib, biror yo‘nalishda impuls

proyeksiyasining saqlanishi, shu yo‘nalishda fazoning bir jinsligi bilan bog‘langan ekan.

Shunga o‘xshash xulosani, sistemaning to‘la energiyasi E ga nisbatan ham chiqarish mumkin. Yuqorida biz ko‘rganimizdek, agar sistemaning potensial energiyasi $U(x, y, z)$ oshkor holda vaqt t ga bog‘liq bo‘lmasa, ya’ni faqat sistema koordinatalarining funksiyasi $U(x, y, z)$ bo‘lsa, u holda energiyaning saqlanish qonuni o‘rinli bo‘ladi

$$E = T + U = \text{const}. \qquad (3.95)$$

Shuning uchun, aytish mumkinki, impuls saqlanish qonuniga o‘xshash energiyaning saqlanish qonuni vaqt bir jinsligi bilan bog‘liq.

Savollar

3.1. Moddiy nuqtaga ta’rif bering. Qanday misollar keltirish mumkin?

3.2. Qanday sanoq sistemalari inersial va noinersial deyiladi?

3.3. Yer bilan bog‘langan sanoq sistemasi qanday toifaga kiradi?

3.4. Newton qonunlarini ta’riflang.

3.5. Newton qonunlari qanday sanoq sistemalarda o‘rinli bo‘ladi?

3.6. Massa nima? Uning fizik ma’nosini tushuntiring.

3.7. Erkin tushayotgan jismning og‘irligi nimaga teng?

3.8. Moddiy nuqtaning kinetik energiyasi bilan nuqtaga qo‘yilgan kuchning ishi o‘rtasida qanday bog‘lanish mavjud?

3.9. Moddiy nuqtaning potensial energiyasi konservativ kuchlar bilan qanday bog‘langan?

3.10. Ishqalanish kuchlari konservativ bo‘la oladimi?

3.11. Moddiy nuqtaga ta’sir qiluvchi kuchlarning bajargan ishi qachon nolga teng bo‘ladi?

3.12. Berk sistema deganda nima tushuniladi? Bu sistemaning holatlarining o‘zgarishi va bajarilgan ish haqida nima bilasiz?

3.13. Inersiya markazi sanoq sistemasida moddiy nuqtalar sistemasining impulsi nimaga teng?

Masalalar

3.1. Yerdan H balandlikda turgan massasi m bo'lgan jism v_0 tezlik bilan yuqoriga tik otilgan. Harakat boshlangandan keyin o'tgan t vaqt ichida jism qanday masofani bosib o'tadi? Havoning qarshilik kuchi o'zgarmas bo'lib F ga teng. Jismning zichligi havoning zichligidan ancha katta.

3.2.* Qandaydir biror vaqt momentida jism qiya tekislik bo'ylab yuqoriga v_0 tezlik bilan sirpanib ko'tarila boshladi. Tekislikning qiyalik burchagi α. Ishqalanish koeffitsienti μ. Boshlang'ich vaqt momentidan hisoblangan t vaqt ichida jism qanday masofani bosib o'tadi? Tekislikni yetarlicha uzun deb hisoblang.

3.3. Avtomobilni yo'lda harakat qilishga majbur qiluvchi kuch qaysi nuqtalarga qo'yiladi?

3.4. Odam harakatsiz holda tura olmaydigan muz ustida yugurishi mumkin. Buning sababini tushuntiring.

3.5. Bir qirrasi boshqa ikkitasidan ancha katta bo'lgan to'g'ri burchakli chorqirra (yog'och parallelepiped) berilgan. Bir chizg'ich yordamida chorqirra bilan stol orasidagi ishqalanish koeffitsientini aniqlash mumkinmi?

3.6. Yassi taxta, chorqirra va transportir berilgan. Chorqirraning taxtaga ishqalanish koeffitsientini qanday aniqlash mumkin?

3.7. Poyezd stansiyadan qo'zg'algandan keyin u bir muncha vaqt tezlanish bilan harakatlanadi. Ip, 100 grammli qadoqtosh va chizg'ich yordamida poyezdning tezlanishini qanday topish mumkin?

3.8. Gorizontal sirtda tezlanish bilan harakatlanuvchi taxta ustida chorqirra turibdi. Taxta qanday maksimal tezlanish a_{max} bilan harakatlanganida chorqirra sirpanib ketmaydi? Sirpanish ishqalanish koeffitsienti μ berilgan.

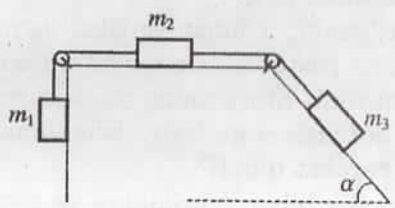
3.9. Ochilish burchagi $\alpha = 90^o$ bo'lgan ikki yoqlama burchak ko'rinishidagi novdan sirpanib tushayotgan silindrning tezlanishini toping. Novning har ikkala yoni gorizont bilan bir xil burchak hosil qiladi, uning qirrasi esa gorizontga $\beta = 60^o$ burchak bilan og'gan. Silindr va nov o'rasidagi ishqalanish koeffitsienti $\mu = 0,7$.

3.10. Uncha katta bo'lmagan chorqirrani qiyaligi $\alpha = 60^o$ bo'lgan tekislikdan boshlang'ich v_0 tezlik bilan yuqoriga itarib yuborilgan. Ishqalanish koeffitsienti $\mu = 0,8$. Chorqirraning yuqoriga ko'tarilish vaqti t_1 ning boshlang'ich nuqtaga qaytib tushish vaqti t_2 ga nisbatini aniqlang.

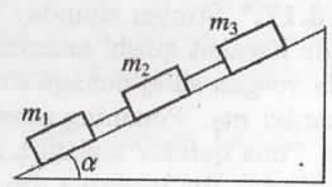
3.11.* Massasi $m = 1$ kg bo'lgan chorqirra qiyaligi $\alpha = 30^o$ tekislik bo'ylab yuqoriga tortib chiqarilmoqda. Ishqalanish koeffitsienti $\mu = 0,8$. Ipning tarangligi eng kichik bo'lishi uchun ip bilan qiya tekislik orasidagi burchak β nimaga teng bo'lishi kerak?

3.12. Jismlar sistemasi vaznsiz va cho'zilmaydigan iplar bilan bog'langan. Jismlarning boshlang'ich tezliklari nolga teng deb, m_2 va m_3 jismlar orasidagi ipning tarangligini aniqlang. Jismlarning massalari $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $m_3 = 3$ kg ; m_3 massali jism turgan tekislikning qiyalik burchagi $\alpha = 60^o$; m_2 massali jism bilan u turgan gorizontal tekislik orasidagi ishqalanish koeffitsienti $\mu = 0,3$; m_1 va m_3 jismlar va mos tekisliklar orasida hamda bloklarda ishqalanish yo'q.

3.13. Jismlar sistemasi vaznsiz va cho'zilmaydigan iplar bilan bog'langan. Jismlarning boshlang'ich tezliklari nolga teng deb, m_2, m_3 yuklar va jismlar orasidagi ipning tarangligini aniqlang. Jismlar massalari $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $m_3 = 3$ kg; qiya tekislikning gorizontga og'ish burchagi $\alpha = 30^o$, m_3 massali jism bilan u turgan qiya tekislik orasidagi ishqalanish koeffitsienti $\mu = 0,3$; boshqa joylarda ishqalanish yo'q.



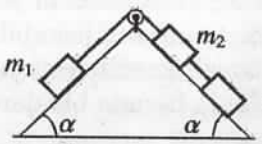
3.12-masalaga oid chizma.



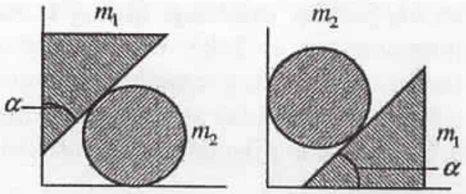
3.13-masalaga oid chizma.

3.14. Jismlar sistemasi vaznsiz va cho'zilmaydigan iplar bilan bog'langan. Jismlarning boshlang'ich tezliklari nolga teng deb, m_1 va m_2 va jismlar orasidagi ipning tarangligini aniqlang. Jismlar massalari $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $m_3 = 3$ kg; Jismlar turgan tekislikning qiyalik burchagi $\alpha = 45^o$, m_1 massali jism bilan u turgan qiya tekislik orasidagi ishqalanish koeffitsienti $\mu = 0,3$;m_2 va m_3 jismlar va tekislik orasida va bloklarda ishqalanish yo'q.

3.15.* Shar va pona qanday tezlanish bilan harakatlanishini aniqlang. Ponaning massasi m_1 va shar massasi m_2, Ponaning qirralari orasidagi burchak berilgan. Jismlarning harakati vertikal va gorizontal tekisliklar bilan chegaralangan. Ishqalanish yo'q. Shar va ponaning bir-biriga nisbatan joylashishiga qarab, masalani ikki holda yeching (rasmga q.).



3.14-masalaga oid chizma.



3.15-masalaga oid chizma.

3.16.* Ikkita bir xil silindr va prizma qanday tezlanish bilan harakat qilishini aniqlang. Prizmaning massasi m_1 va har bir silindrniki m_2, prizmaning qirralari orasidagi burchak α. Prizmaning simmetriya o'qi vertikal yo'nalgan. Jismlarning harakati gorizontal tekislik bilan chegaralangan. Ishqalanish yo'q.

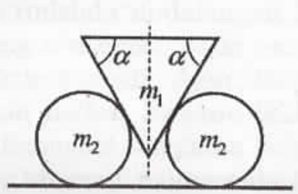
3.17.* Sterjen shunday o'rnatilganki, u faqat vertikal yo'nalishda harakat qilishi mumkin. Uning pastki uchi gorizontal tekislikda yotgan silliq ponaga tiralib turibdi. Sterjenning massasi m_1, ponaniki m_2. Ponaning asosidagi burchak α ga teng. Ishqalanish yoq. Pona qanday tezlanish bilan harakat qiladi?

3.18.* Bir vaqtning o'zida **v** tezlik bilan ilgarilanma va rasm tekisligiga perpendikular o'q atrofida ω ($\omega R \gg v$) burchak tezlik bilan aylanma harakat qilayotgan sharcha gorizontal tekislikka elastik uriladi. Sharchaning radiusi R, tushish burchagi α (rasmga q.), ishqalanish koeffitsienti μ. Sharcha to'qnashgandan so'ng burchak tezligini bir oz o'zgartirib ilgarigi o'q atrofida aylanishni davom ettiradi. Sharchaning qaytish burchagi β ni aniqlang. To'qnashish vaqti kichik. Masalani sharcha aylanishining ikki hol uchun ko'ring.

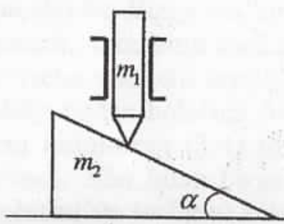
3.19. Dvigateli o'chirilgan va doiraviy orbita bo'ylab uchayotgan Yerning sun'iy yo'ldoshi ichidagi jismlar nima uchun vaznsiz holatda bo'ladi?

3.20. Muz ustida turgan ikki bola massalarini solishtirib, qaysi birining massasi ikkinchisinikidan necha marta katta ekanligini bilishmoqchi. Bu masalani faqat ruletka yordamida amalga oshirish mumkinmi?

3.21. Oqmaydigan suvda qayiq tinch turibdi. Qayiqning burun qismida turgan odam uning quyruq tomoniga o'tdi. Bunda qayiq qirg'oqqa nisbatan qanday l masofaga siljiydi? Odamning massasi m, qayiqniki M ga teng, qayiqning uzunligi esa L. Suvning qarshiligini inobatga olmang.



3.16-masalaga oid chizma.



3.17-masalaga oid chizma.

3.22. Kub shaklidagi quti gorizontal sirt bo'ylab bir tekis ko'chirilmoqda. Uni sudrab va ag'darib ko'chirishdagi ishlarning nisbatini toping. Kub qirrasining uzunligi a, og'irligi P, ishqalanish koeffitsienti μ.

3.23. Massasi $m = 1$ kg bo'lgan tosh yuqoriga tik otilgan. $H = 30$ m balandlikka $t = 6$ sekundda ko'tarilishi uchun unga qanday kinetik energiya berish kerak? Havoning qarshiligi hisobga olinmasin. $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

3.24. Jism avval balandligi H bo'lgan silliq tepalikdan sirpanib tushadi, so'ngra g'adir-budur gorizontal sirtda (ishqalanish koeffitsienti μ) harakat qiladi. Jismning boshlang'ich tezligi nolga teng bo'lsa, u to'xtagunga qadar yo'lning gorizontal qismida qanday masofani bosib o'tadi?

3.25. Avtomobil gorizont bilan α burchak hosil qilgan yaxlagan qiyalikka motorini o'chirgan holda ko'tarila boshladi. Qiyalikning boshlanish joyida avtomobilning tezligi v, g'ildiraklari va yo'l orasidagi ishqalanish koeffitsienti μ bo'lsa, u qanday balandlikka ko'tarila oladi?

3.26. Sun'iy yo'ldosh doiraviy orbita bo'ylab aylanganida, unga ta'sir qiluvchi Yerning tortish kuchi ish bajaradimi? Elliptik orbita bo'ylab aylangandachi?

3.27. Yo'ldosh dvigateli o'chirilgan holda elliptik orbita bo'ylab harakat qilganda uning kinetik, potensial va to'liq energiyalari qanday o'zgaradi? Qarshilik kuchi yo'q.

4-bob

Newton qonunlarining tatbig'i

4.1 Moddiy nuqtaning harakat qonunlarini o'rganish

Harakat qonunini o'rganish deganda, jismning fazodagi o'rnini aniqlashga imkon beruvchi barcha koordinatalarning vaqtga bog'lanishini aniqlash tushiniladi. Xususan, moddiy nuqta uchun $\mathbf{r}(t)$ bog'lanishni aniqlovchi uch koordinatalardir. Bizga ma'lumki, (3.4) ko'rinishda ifodalangan Newton qonuni, tarkibida radius-vektorning o'zi emas, balki uning vaqt bo'yicha ikkinchi tartibli hosilasi ishtirok etadi. Agar, kuchning moddiy nuqta holatiga bog'lanishi aniq bo'lsa, Newton ikkinchi qonuni ahiqlovchi (3.4) munosabat differensial tenglama ko'rinishiga o'tadi. Shu bilan birga qandaydir bir vaqt momentida jismning holatini va tezligini bilsak, (3.4) tenglama orqali uning keyingi istalgan vaqt momentidagi holati va tezligini hisoblab topishimiz mumkin. Boshlang'ich vaqt sifatida $t = 0$ momentni olish mumkin. Bunda (3.4) tenglamaning $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ va $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi qo'yilgan masalaning yechimiga aylanadi. Shunday qilib, Newton ikkinchi qonuni moddiy nuqtaning barcha keyingi vaqtlarda harakat trayektoriyasini aniqlash imkonini beradi.

Shuni ta'kidlash lozimki, sportchi toshni yoki koptokni nishonga irg'itishda, qo'lning dastlabki holati va uning boshlang'ich tezligi bilan irg'itilgan jismning keyingi trayektoriyasi orasidagi bog'lanishdan orttirgan tajribalardan to'plagan ko'nikmalardan intuitiv holda foydalanadi. Tajribalarda egallangan bunday bilimdan insoniyat o'z evolutsiyasining dastlabki qadamlaridan boshlab foydalangan, faqatgina XVII yuz yillikda Newton ikkinchi qonunining yaratilishi bilan insoniyatda jism harakatini intuitiv bashorat qilish o'rniga aniq hisoblash imkoni yuzaga keldi. Bu esa texnik taraqqiyotning keskin jadallashishiga sababchi bo'ldi.

Endi harakat trayektoriyasini hisoblashda ikkinchi qonundan qurol sifatida qanday foydalanishni ko'rsatamiz. Oldimizda biror bir inersial sanoq sistemasida m massali, moddiy nuqta deb qarash mumkin bo'lgan jismning harakat trayektoriyasining vaqtga bog'lanishini hisoblash vazifasi turgan bo'lsin. Jismga ta'sir qiluvchi kuchning, fazoning istalgan nuqtasidagi, qiymati va yo'nalishini aniq deb hisoblaymiz, ya'ni bu kuchning jism radius vektoriga bog'lanishi $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ aniq bo'lsin. Bunday holat tez-tez uchrab turadi. Masalan, Yer sirti yaqinida og'irlik kuchi mg ta'sirida biror jismning harakatini misol sifatida keltirish mumkin. Og'irlik kuchini Yer sirti yaqinida juda yuqori aniqlikda hamma joyda bir xil kattalikka ega va Yer sirti tomon yo'nalgan deb qarash mumkin.

Kuzatilayotgan jism harakati uchun boshlang'ich shart sifatida quyidagini olishimiz mumkin. Boshlang'ich t_0 vaqt momentida jismning fazodagi holati (ya'ni uning boshlang'ich radius-vektori $\mathbf{r}_0$,) ikkinchidan, uning shu vaqtdagi (boshlang'ich) tezligi $\mathbf{v}_0$ ma'lum bo'lsin. Bu boshlang'ich holat 4.1a-rasmda tasvirlangan, shu bilan birga chizmada, bir-biridan Δt vaqtga farq qiluvchi $t_1, t_2, t_3, \ldots$ vaqt momentlarining shkalasi ham keltirilgan.

Δt vaqt intervalini shu darajada kichik qilib olamizki, oxir-oqibatda u nolga intiltirish mumkin bo'lsin. Bu narsa bizga fizik kattaliklarni (tezlik, tezlanish) mos funksiyalardan vaqt bo'yicha hosila orqali ifodalash imkonini beradi. Tasavvur qilish oson bo'lishi uchun Δt ni hozircha juda kichik deb qabul qilamiz.

Endi $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}_0$ larni va shu nuqtada jismga ta'sir qiluvchi $\mathbf{F}_0$ kuchni bilgan holda Newton ikkinchi qonuni yordamida jismning Δt vaqtdan keyingi yangi holati $\mathbf{r}_1$ va tezligi $\mathbf{v}_1$ ni aniqlashimiz mumkin.

Avval $\mathbf{r}_1$ ni topamiz. Δt ni yetarlicha kichik ekanligini e'tiborga olib tezlik ifodasini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \tag{4.1}$$

Agar, bu munosabatni $\mathbf{r}_0$ nuqta uchun qo'llasak, Δt vaqt ichida radius-vektorning o'zgarishi $\Delta \mathbf{r}_0$ ni aniqlash mumkin, ya'ni

$$\Delta \mathbf{r}_0 = \mathbf{v}_0 \Delta t.$$

Jismning berilgan boshlang'ich holatining o'zgarishini bilgan holda uning yangi holatini, ya'ni t_1 momentdagi radius-vektorini bilish mumkin (4.1b-rasmga q.):

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 \Delta t. \tag{4.2}$$

Endi, Newton ikkinchi qonuniga asosan, tezlikning t_1 momentdagi yangi $\mathbf{v}_1$ qiymatini aniqlaymiz. Bunda t_0 momentda $\mathbf{r}_0$ nuqtada

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{4.3}$$

munosabatlardan foydalanib tezlik orttirmasini aniqlaymiz:

$$\Delta \mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{F}_0}{m}\Delta t. \tag{4.4}$$

$\Delta \mathbf{v}_0$ ni bilgan holda, tezlikning $\mathbf{r}_1$ nuqtadagi yangi qiymati uchun

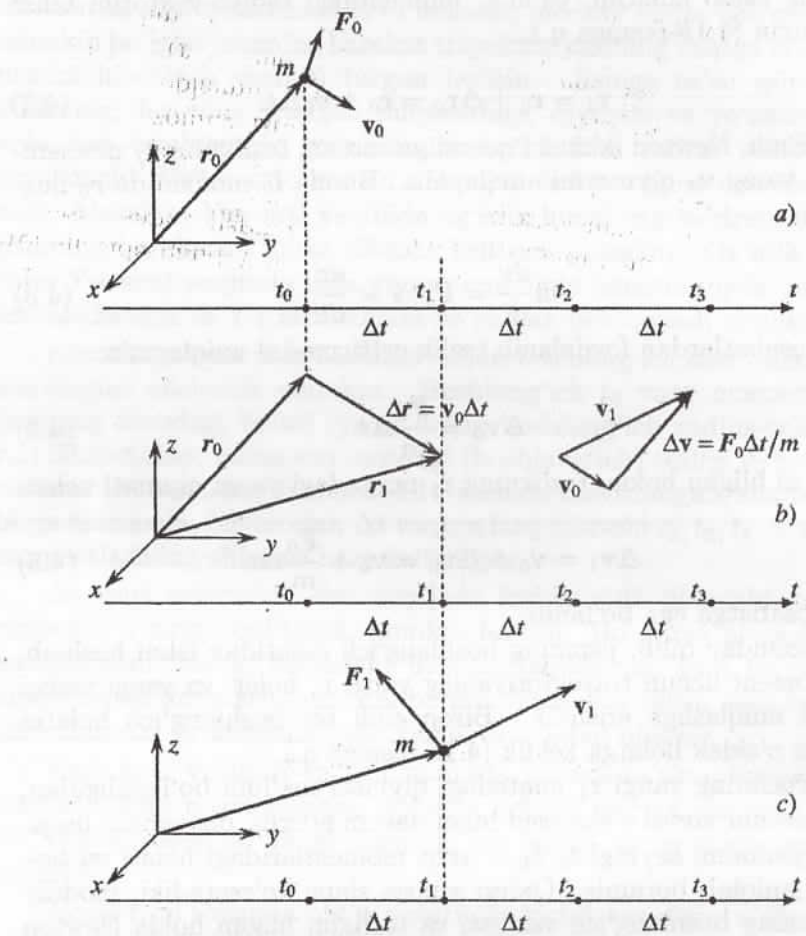
$$\Delta \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \Delta \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{F}_0}{m}\Delta t. \tag{4.5}$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, jismning boshlang'ich holatidan ishni boshlab, t_1 moment uchun trayektoriyaning yangi $\mathbf{r}_1$ holati va yangi tezligi $\mathbf{v}_1$ ni aniqlashga erishdik. Biroq endi biz boshlang'ich holatni aynan o'zidek holatga keldik (4.1c-rasmga q.).

Kuchning yangi $\mathbf{r}_1$ nuqtadagi qiymati ma'lum bo'lganligidan, hisoblashni xuddi o'sha usul bilan davom ettirib, biz qadam-baqadam jismning keyingi $t_2, t_3, \ldots$ vaqt momentlaridagi holati va tezligini aniqlab boramiz. Oxirgi xulosa shuni ko'rsatadiki, moddiy nuqtaning boshlang'ich vaziyati va tezligini bilgan holda Newton ikkinchi qonunidan foydalanib uning trayektoriyasidagi keyingi holatlarni hisoblash yoki oldindan bashorat qilish mumkin.

Amalda trayektoriyani hisoblash ikki usuldan biri bilan amalga oshiriladi. Birinchisi, komputerdan foydalanish mumkin. Buning uchun komputerga, yuqorida biz aytganimizdek, trayektoriya nuqtalarini ketma-ket topish amalini bajarish vazifasini yuklash lozim



4.1-rasm. Jismning harakat trayektoriyasini hisoblashda Newton ikkinchi qonundan foydalanish sxemasi.

bo'ladi. Bunda kompyuterga vaqt qadami Δt ning qiymatini berish bilan kifoyalanib, (4.1)-(4.5) munosabatlar bilan aniqlanadigan, hisoblash dasturini kiritish lozim bo'ladi. Ko'p hollarda, kompyuterdan foydalanmaslik ham mumkin. Biz yuqorida aytganimizdek Newton ikkinchi qonuni differensial tenglama bo'lib, uning aniq ko'rinishi masalaning fizik shartiga (aniqroq aytsak, jismga ta'sir qiluvchi kuchning uning fazoviy koordinatalarga bog'lanish - $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ga) bog'liq bo'ladi. Bunday masalalarning yechimini aksariyat hollarda yaxshi ma'lum bo'lgan differensiallash va integrallash qoidalaridan foydalanib aniqlash mumkin. Ba'zi hollarda esa, (darslik kitoblarida asosan shunday masalalar beriladi) hatto elementar algebra yordamida ham masalani yechsa bo'ladi. Quyida bunday yechimlarga ba'zi misollarni ko'rib chiqamiz.

4.2 Doimiy kuch ta'sirida moddiy nuqtaning harakati

Hozir trayektoriyani hisoblash vositasi bo'lgan Newton ikkinchi qonunining umumiy xossalarining muhokamasidan, mexanikaning shu asosiy tenglamasi yordamida batafsil tekshirish mumkin bo'lgan aniq masala va harakatlarni qarab chiqishga o'tamiz. Har qanday hodisani o'rganishdagi kabi, shunday harakatlarni tadqiq qilishdan boshlash kerakki, ular bir tomondan, masalani oddiy matematik yechish imkonini bersin, ikkinchi tomondan, juda muhim amaliy ahamiyatga ega bo'lsin. Jismning harakat qonuni, ya'ni uning $\mathbf{r}$ radius-vektorining t vaqtga bog'lanishi, jismga ta'sir qiluvchi kuchning xarakteri bilan aniqlanadi va Newton ikkinchi qonuniga asosan (4.3) tenglamaning yechimi bo'ladi.

Jismga tashqi kuchlar ta'sir qilmagan holda, ya'ni $\mathbf{F} = 0$, (4.3) tenglamaning yechimi doimiy tezlik $\mathbf{v} = \text{const}$ bilan sodir bo'ladigan harakatni ifodalaydi. Bu eng sodda harakat turlaridan biri – erkin harakatdir. Murakkablik jihatidan harakatning keyingi turi, bu shunday harakatki, bunda jismga ta'sir qiluvchi kuch nolga teng bo'lmasada, biroq jismning ko'chishi davomida ham qiymati, ham yo'nalish jihatidan o'zgarmaydi. Bu shuni bildiradiki, (4.3) tenglamadan birinchisining o'ng tomoni o'zgarmas bo'ladi. Har qanday tenglamaga kiruvchi koeffitsiyentlar vaqt va koordinataga bog'liq bo'lmasa, ya'ni o'zgarmas bo'lsa, bunday tenglama bilan ifodalanuvchi harakat eng sodda harakatlar qatoriga kiradi. Harakatning bunday turi matematik tadqiqot nuqtai nazaridan unchalik murakkab bo'lmaydi. Ikkinchi tomondan, o'zgarmas kuch ta'sirida yuz beradigan harakat amaliy nuqtai nazardan juda muhim bo'lib, kundalik turmushda juda ko'p uchraydi.

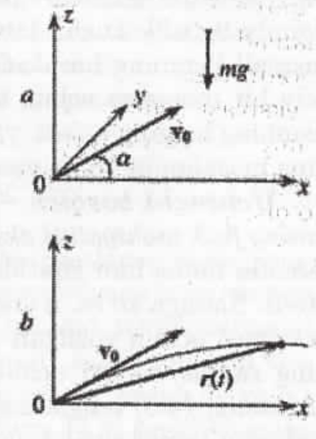
Avvalambor, bunday turdagi harakatga, ma'lum bir sharoitda og'irlik kuchi ta'siridagi harakat mos keladi. Og'irlik kuchi, har qanday kuch kabi vektor kattalikdir. Masalani soddalashtirish maqsadida bu kuchning moduli doimiy bo'lib, mg ga teng bo'lsin deb faraz qilamiz. Ammo bu kuch Yer markaziga yo'nalgan bo'lgani uchun, Yer sirtining turli nuqtalarida uning yo'nalishi turlicha bo'ladi. Biroq Yer radiusiga ($R = 6400$ km) nisbatan juda kichik masofalarga ko'chayotgan jismlar harakatini kuzatganimizda, Yer sirti egriligini e'tiborga olmaslik mumkin. Shu sababli yetarli darajada aniqlik bilan og'irlik kuchi o'z yo'nalishini o'zgartirmay va doim bu tekislikka perpendikular qoladi deb hisoblash mumkin. Shunday qilib, bu shartlar bajariladi deb hisoblasak, og'irlik kuchini doim modul hamda yo'nalish jihatidan doimiy deb qarash mumkin. Og'irlik kuchidan tashqari, doimiy kuchlar bilan turli xil texnik qurilmalarning ishini kuzatganda to'qnash kelamiz.

Biz doimiy kuch ta'sirida yuz beradigan harakatni aniq misolda, ya'ni otilgan jismning harakatini, yoki quroldan otilgan snaryadning harakati qonunini batafsil ko'rib chiqamiz. Otilgan toshning harakati trayektoriyasi qanday ko'rinishda bo'ladi? Uchish uzoqligi nimalarga bog'liq bo'ladi? Aristotelning ta'kidlashicha Yer sirtiga nisbatan burchak ostida otilgan jism trayektoriyasining boshlang'ich qismi to'g'ri chiziqdan iboratdir va bu qarash bevosita kuzatishlarda o'z tasdig'ini topgandek ko'rinadi. Biroq aslida trayektoriya uchishning barcha qismlarida egri bo'lishini tushunish uchun deyarli ikki ming yil zarur bo'ldi.

Otilgan jismning harakatini o'rganish mexanik masalalarni yechishda muhim bo'lgan bir qancha bosqichlarni o'z ichiga oladi.

***Birinchi bosqich** – harakat turini aniqlash.* Bizning holda, bu qo'yilgan masalani yechishda jism o'lchamlarini e'tiborga olmaslik mumkin yoki mumkin emasligi haqidagi savolni hal qilishdan, ya'ni

uning harakatini moddiy nuqta harakati deb qarash va (3.98) Newton ikkinchi qonunini qo'llash mumkinligi haqidagi masalani hal qilishdan iboratdir. Umumiy holda, otilgan jismga og'irlik kuchidan tashqari, jism o'lchamlariga bog'liq bo'lgan havoning qarshilik kuchi ham ta'sir qiladi. Bunday kuchning mavjudligi real masalalarni yechishda ancha murakkabliklarni keltirib chiqarishi va amalda jismning uchish trayektoriyasini chalkash ko'rinishga olib kelishi mumkin. Bu yerda avstraliyalik aborigenlar tomonida yaratilgan, otilgandan so'ng ovchining qo'liga qaytib keladigan, bumerangni esga olish kifoya qiladi. Ammo, ko'pgina hollarda havoning qarshiligini yetarli darajada aniqlik bilan e'tiborga olmaslik mumkin. Biz ana shunday holni ko'rib chiqamiz, ya'ni masalani yechishda moddiy nuqta harakat (4.3) tenglamasidan foydalanamiz.



4.2-rasm.

***Ikkinchi bosqich** – masalani fizikaviy shakllantirish: sanoq sistemasini tanlash, ta'sir qiluvchi kuchlar va boshlang'ich shartlarni aniqlash.* Jismning harakati Yer sirtining biror nuqtasida boshlanayotgan bo'lsin.

Dekart koordinatalar sistemasi boshini boshlang'ich vaqtda jism turgan nuqtaga joylashtiramiz. Koordinata o'qlarini 4.2-rasmda ko'rsatilganidek yo'naltiramiz. $\mathbf{v}_0$ boshlang'ich tezlik vektorini 4.2a rasmdagi kabi, zOx tekisligida joylashtiramiz. Boshlang'ich tezlik moduli v_0 va yo'nalishi, ya'ni $\mathbf{v}_0$ va Ox o'qi orasidagi burchak α, tosh yoki snaryadni harakatga keltiruvchi shart va sabablar bilan aniqlanadi. Bu, masalan, toshni otishdagi qo'lning joylashish holati va tezligi yoki qurolning og'ishi va porox zaryadining quvvati bo'lishi mumkin.

Yer sirti bilan bog'langan sanoq sistemasi, qat'iy aytilganda inersial bo'lmaydi. Bunga sabab Yer sirtining istalgan nuqtasi o'z o'qi atrofida va Quyosh atrofida aylanishidan kelib chiqadigan tezlanishli harakatda bo'lishidadir. Biroq ko'pgina amaliy masalalarda bu noinersiallik effekti ahamiyatli bo'lmaydi, shunga ko'ra biz ham bu effektni e'tiborga olmaymiz va tanlangan sanoq sistemasini inersial sanoq sistemasi deb qaraymiz. Inersial sanoq sistemalarida (4.3) Newton ikkinchi qonuni o'rinli bo'ladi va bu yerda **F** kuchni doimiy og'irlik kuchi deb tushiniladi. 4.2*a*-rasmda bu kuchni, m massali jismning harakati boshlanganidan keyingi vaqtning ixtiyoriy bir momenti uchun tasvirladik. Vaqtning turli momentlarida jismning haqiqiy holati, ya'ni uning harakat trayektoriyasini, faqatgina masalaning to'liq yechimi topilgandan so'ng aniqlash mumkin.

Uchinchi bosqich *– masalani matematik ifodalanishi: masalaning fizik mohiyatini aks ettiruvchi tenglamani yozish.* (4.3) tenglamada noma'lum sifatida $\mathbf{r}(t)$ va $\mathbf{v}(t)$ vektor kattaliklar ishtirok etadi. Shunga ko'ra, u yuqorida keltirilgan kattaliklarning uch proyeksiyasi uchun yozilgan uchta tenglamadan iborat bo'ladi. Jismning radius-vektori uchun $r_x = x, r_y = y, r_z = z$ belgilashlarni kiritamiz. (4.3) tenglamaning o'ng va chap tomonlarini koordinata o'qlariga proyeksiyalab uchta tenglamani hosil qilamiz:

$$m\frac{dv_x}{dt} = 0, \quad v_x = \frac{dx}{dt}, x(0) = 0, \quad v_x(0) = v_0 \cos\alpha, \tag{4.6}$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = 0, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, y(0) = 0, \quad v_y(0) = 0, \tag{4.7}$$

$$m\frac{dv_z}{dt} = -mg, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.z(0) = 0, \quad v_z(0) = v_0 \sin\alpha. \tag{4.8}$$

Har bir qatordagi tenglamalarning o'ng tomonida masala mohiyatining ajralmas qismi bo'lgan boshlang'ich shartlar yozilgan. Oxirgi tenglamadagi mg oldidagi "manfiy" ishora, og'irlik kuchi Oz o'qiga teskari yo'nalganligini bildiradi.

To'rtinchi bosqich *– masalaning matematik yechimi.* Endi faqat toza "texnik" ish - yuqorida shakllantirilgan tenglamalarni matematikada ma'lum bo'lgan yo'llar bilan yechish qoldi. Ixtiyoriy holda tenglamalar shunchalik murakkab bo'lib qolishi mumkinki, ularni hisoblash texnikasini qo'llamasdan yechib bo'lmaydi. Bizning holda esa, nisbatan sodda tenglamaning boshlang'ich shartlarini qanoatlantiruvchi yechimi, elementar funksiyalardan hosila olish kabi bilimlar asosida topilishi mumkin.

Misol uchun (4.8) tenglamani ko'raylik. Bu tenglamani bir

marta integrallab, tezlikning Z tashkil etuvchisi $v_z = C_1 - gt$ ko'rinishga ega bo'lishini topamiz. Bu yerda C_1 doimiyni $v_z(0) = v_0 \sin\alpha = C_1$ shartdan aniqlaymiz. Tenglamani yana bir marta integrallab, $z(t) = C_2 + v_0 t \sin\alpha - gt^2/2$ topamiz. Yangi C_2 doimiyni $z(0) = 0$ shartdan aniqlaymiz. (4.6) va (4.7) tenglamalarning yechimlari ham shu kabi topiladi. Natijada, qo'yilgan masalaning yechimi quyidagi ko'rinishga ega bo'lishini aniqlaymiz:

$$x(t) = v_0 t \cos\alpha, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \tag{4.9}$$

Bu ifodalar, og'irlik kuchi ta'sirida harakatlanayotgan jismning $\mathbf{r}(t)$ radius-vektorining barcha uch proyeksiyalarining vaqtga bog'lanishini aniqlaydi. Shu bilan birga, harakat trayektoriyasini aniqlash haqidagi masala o'z yechimini topdi. Endi, topilgan trayektoriyaning qanday geometrik chiziq (giperbola, parabola va h.) ko'rinishga ega bo'lishini aniqlab olish uchun, (4.9) tengliklarning birinchisidan t vaqtni x orqali ifodalash va natijani $z(t)$ ifodasiga qo'yish yetarli bo'ladi. Bu zOx tekisligidagi trayektoriya tenglamasini beradi:

$$z = \mathrm{tg}\,\alpha\, x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2. \tag{4.10}$$

Geometriyadan ma'lumki, bu tenglama parabola tenglamasini ifodalaydi, demak, jismning uchish trayektoriyasi o'zining hech bir qismida to'g'ri chiziq ko'rinishiga ega bo'lmaydi (4.2b- rasmga q.).

(4.10) munosabatdan, masalan, jismning x_m uchish uzoqligini aniqlash mumkin. Jism sirtga tushganda $z(0) = 0$ bo'ladi va bu shartdan, (4.10) yordamida, quyidagini aniqlaymiz:

$$x_m = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \tag{4.11}$$

Beshinchi bosqich *– olingan natijani tekshirish.* Bu, oxirgi bosqich har qanday fizikaviy masalaning ajralmas va muhim elementi bo'lib hisoblanadi. Bunda eng aniq usul masala yechimini bosqichma-bosqich takrorlashdir. Biroq bundan tashqari, olingan javobda qo'pol xatolarning mavjudligini tez aniqlash imkonini beruvchi usullar mavjud. Bunday usullardan ikkitasi ustida to'xtalamiz.

Birinchi usul – *o'lchov birliklari orqali javobni tekshirish.* Bu yerda gap, olingan natijaning, oldingi bobda aytganimizdek, o'lchov birliklar qoidasini qoniqtirishi haqida bormoqda. Agar hisoblash natijasi tezlikka tegishli bo'lsa, unda, olingan natija ham tezlik o'lchov birligiga ega bo'lishi kerak va h. Bizning holda, olingan javob to'g'ri:

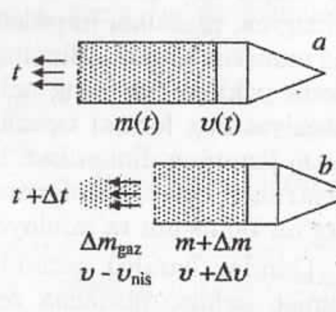
$$[x_m] = [v_0^2]/[g] = \left(L^2T^{-2}\right)/\left(LT^{-2}\right) = L.$$

Ikkinchi usul – *oldindan ma'lum bo'lgan natijalar asosida tekshirish.* Ko'p hollarda masala shartiga kirgan fizik kattaliklarning ba'zi qiymatlarida javobni "oldindan aytish" mumkin bo'ladi. Masalan, vaqt yoki masofaning nolga teng yoki cheksizga intilgan qiymatlarida, jismning massasi juda kichik yoki juda katta bo'lganda va shu kabi boshqa kattaliklarning chegaraviy qiymatlarida masala ancha soddalashadi va yechish unchalik qiyinchilik tug'dirmaydi. Shu usul bilan jismning uchish uzoqligi masalasi uchun olingan (4.11) natijani tekshirib ko'ramiz. Masalan, boshlang'ich tezlik $\mathbf{v}_0$ nolga teng bo'lganda jism o'zining dastlabki holatida qoladi va uchish uzoqligi x_m ham nolga teng bo'lishi kerak. Bu shart (4.11) tenglamadan yaqqol ko'rinib turibdi. Bundan shu narsa ma'lum bo'ladiki, biz aniqlagan yechim bu shartni qoniqtiradi. Yana shu narsa ham aniq, agar boshlang'ich tezlik yuqoriga tik yo'nalgan bo'lsa, jismning uchish uzoqligi nolga teng bo'lishi kerak, va (4.11) dan shuni ko'ramizki, haqiqatan ham, $\alpha = \pi/2$ da $x_m = 0$. Va nihoyat, shu narsa ravshanki, og'irlik kuchi bo'lmaganda (ya'ni $g = 0$ da) uchish uzoqligi cheksiz bo'lishi kerak va (4.11) dan ko'rinadiki, bizning javobimiz bu shartni ham qoniqtiradi. O'lchov birliklari bilan bo'lgan holdagidek, yuqorida bajarilgan tekshiruv xatoning yo'qligi haqida yuz foizli kafolat bera olmaydi (juda bo'lmaganda, masalan, miqdoriy koeffitsiyentlarda). Lekin u, bizni juda bo'lmaganda qo'pol xato qilishdan saqlaydi.

4.3 Reaktiv harakat

Ko'p hollarda moddiy nuqtaning harakat trayektoriyasi va vaqt xarakteristikalarini Newton qonunlariga umuman murojaat qilmasdan aniqlash mumkin. Bunday holga misol sifatida, qandaydir yo'nalishda jismning umumiy massasining bir qismini chiqarib yuborish hisobiga yuz beradigan reaktiv harakatni keltirish mumkin. Xuddi shunday yo'sinda, masalan, kosmik kema va oddiy yoritish raketalari harakatlanadi.

Reaktiv harakat masalasini dastlab sodda hol uchun, ya'ni uzoq koinotda, Yer va turli planetalarning uning uchishiga ta'sirini e'tiborga olmasa ham bo'ladigan sharoitda harakatlanayotgan raketa uchun ko'rib chiqamiz. Harakat haqidagi har qanday masala, biz endi bilamiz, sanoq sistemasini tanlashdan boshlanadi. Bunday sistema sifatida biror bir inersial sistemani tanlaymiz. Sanoq sistemasi Quyosh bilan yoki qandaydir boshqa bir yulduz bilan bog'langan bo'lishi mumkin. Lekin ushbu masala uchun sanoq boshining qayerda bo'lishining ahamiyati yo'q.



4.3-rasm.

Qandaydir bir t vaqt momenti uchun uchayotgan raketa harakatining sxematik ko'rinishi 4.3a-rasmda tasvirlangan. Bu vaqt momentida raketaning to'liq massasi $m(t)$ (qobig'i va undagi mavjud yonilg'ining massasi), tezligi $v(t)$ ga teng bo'lib, yo'nalishi esa dekart koordinatalar sistemasidagi x o'qining musbat yo'nalishi bilan mos tushgan bo'lsin. Bu yerda yoqilg'i (o'ta qizdirilgan gaz ko'rinishida) raketaning orqa qismidan shunday otilib chiqadiki, raketa va tashqariga chiqarib yuborilayotgan gaz x o'qi bilan mos tushuvchi bir to'g'ri chiziq bo'ylab harakat qiladi, deb faraz qilamiz.

Tashqariga otilib chiqarilayotgan gazning raketa qobig'iga nisbatan harakat tezligi v_{nis} aniq deb qaraladi. Bu tezlik raketaning konstruksiya xususiyatlari bilan aniqlanib, yonilg'ining, soploning turiga, yonilg'ining soplodagi yonish temperaturasiga va boshqa parametrlarga bog'liq bo'ladi. Yana v_{nis} uchish vaqtida doimiy qoladi, deb faraz qilamiz. Bizning maqsad, raketa qanday qonuniyat bilan harakat qilishini va vaqt o'tishi bilan uning tezligi va massasi qanday o'zgarishini aniqlashdan iborat.

Sanoq sistemasi tanlanib va masalaning fizik shartlari berilganidan so'ng, raketa harakatini o'lchamlariga bog'liq emasligini aniqlab olishimiz kerak. Ya'ni raketani harakat davomida moddiy nuqta deb qarash mumkinmi yoki yo'qmi. Mumkin bo'lgan holdagina, masalan, impulsning saqlanish qonunidan foydalanishimiz mumkin bo'ladi. Bizning holda bu taxmin o'rinli bo'lishi uchun raketa yoki snaryadning uchish vaqtida dumalamasligi kerak. Bu xususiyatning formal tavsifiga to'xtalmasdan (chekli o'lchamdagi qattiq jismning dinamikasi bilan bog'langan), uchish apparatining konstruksiyasi uchish davomida uning harakatini yetarli darajada turg'un bo'lishini ta'minlaydi deb qabul qilamiz.

Qanday harakat qonunlaridan foydalanishimiz lozimligini tushunish uchun, qisqacha reaktiv harakat prinsipiga to'xtalamiz. Bu prinsip juda sodda. Raketa soplodan chiqayotgan moddaga (gazlar) ma'lum bir ko'rinishda ta'sir ko'rsatadi. Soplodan chiqarilayotgan modda, o'z navbatida, raketaga ta'sir qilib, qarama-qarshi yo'nalishda uning tezligini oshiradi. Agar boshqa jismlarning ta'sirini, bizning holdagiga o'xshash, e'tiborga olmaslik mumkin bo'lsa, raketa chiqarilgan modda bilan birgalikda berk sistemani tashkil qiladi. Bunday sistemaning to'liq impulsi vaqt davomida o'zgarmaydi va shu sababli impulsning saqlanish qonunini ko'rilayotgan masalani yechishda asos qilib olamiz.

Faraz qilamiz, kichik Δt vaqt oralig'ida raketaning massasi va tezligi mos ravishda Δm va Δv orttirma olsin (Δm kattalik manfiy). 4.3*b*-rasmda $t + \Delta t$ vaqt momentiga mos holat tasvirlangan: bu vaqt momentida raketa to'liq massa $m + \Delta m$ va tezlik $v + \Delta v$ ga ega bo'ladi, shu damda, Δt vaqt ichida chiqarib tashlangan gaz massasi Δm_{gaz} esa tanlangan sanoq sistemasiga nisbatan $v_{gaz} = v - v_{nis}$ tezlik bilan uchib chiqadi. Bu kattalik tezliklarni qo'shish qoidasiga asosan hosil bo'ladi. Bunda raketaning uchish tezligi x o'qining musbat, yonish natijasida hosil bo'lgan gazning chiqish tezligi teskari yo'nalishda ekanligini e'tiborga olindi.

Impuls saqlanish qonunidan kelib chiqadigan xulosa: raketa va yoqilg'i sistemasining to'liq impulsi t va $t + \Delta t$ momentlarda bir xil qiymatga ega bo'ladi, ya'ni

$$mv = (m + \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m_{gaz} v_{gaz} \tag{4.12}$$

Agar, Δt vaqt oralig'i va u bilan birga Δm va Δv orttirmalar nolga intilganda, (4.12) dagi $\Delta m \Delta v$ ikkinchi tartibli cheksiz kichik miqdorni, birinchi tartibdagi kichik miqdorlarga ($m\Delta v$ va $\Delta m v$) nisbatan juda kichik kattalik sifatida tashlab yuborish mumkin. To'liq massaning saqlanishidan ($\Delta m + \Delta m_{gaz} = 0$) foydalanib, (4.13) dan quyidagini hosil qilamiz:

$$dv = -v_{nis} \frac{dm}{m}; \tag{4.13}$$

bu yerda cheksiz kichik orttirmalar nolga intilganda, ularni mos differensiallar bilan almashtirdik.

(4.13) tenglik - cheksiz kichik kattaliklar o'rtasidagi munosabatdir. Bundan, raketa tezligi va massasini o'lchash imkoniyati bo'ladigan chekli kattaliklar o'rtasidagi munosabatlarga o'tish uchun (4.13) tenglikning chap va o'ng tomonlarini chekli vaqt oralig'ida yuz beradigan o'zgarishlarni yig'ib chiqish kerak bo'ladi. Cheksiz kichik kattaliklarni bunday yig'ish, integrallash operatsiyasi bilan ifodalanadi:

$$\int dv = -v_{nis} \int \frac{dm}{m},$$

bu yerda biz, gaz v_{nis} tezligi doimiy bo'lgani uchun integral belgisidan tashqariga chiqardik. Integrallashning ma'lum qoidalaridan foydalanib,

$$v = -v_{nis} \ln m + C$$

ga ega bo'lamiz. Integrallash doimiysi C boshlang'ich shartlardan aniqlanadi. Masalan, vaqtning boshlang'ich momentida raketaning tezligi nolga, uning massasi esa m_0 ga teng bo'lsin. U holda oxirgi tenglik

$$0 = -v_{nis} \ln m_0 + C$$

ni beradi. Bundan $C = v_{nis} \ln m_0$ ga ega bo'lamiz. Natijada,

$$v = v_{nis} \ln \frac{m_0}{m}, \text{ yoki } \frac{m}{m_0} = \exp\left(-\frac{v}{v_{nis}}\right). \tag{4.14}$$

(4.14) munosabat ***Siolkovskiy formulasi*** deb ataladi.

Siolkovskiy formulasi, raketaga aniq bir v tezlikni berish uchun kerak bo'ladigan, yonilg'i zaxirasini hisoblash imkonini beradi. Masalan, raketaga "birinch kosmik tezlikni" berish kerak bo'lsin, ya'ni shunday tezlikni berish kerak bo'lsinki, bunda raketa Yer atrofida aylana bo'ylab harakatlana boshlasin. Bu tezlik taxminan $v = 8$ km/s (keyinroq, nima uchin birinch kosmik tezlik xuddi shu qiymatga teng bo'lishini ko'ramiz). Zamonaviy raketalarda gaz oqimining tezligi sekundiga bir necha kilometrlarni tashkil etadi. Agar gaz oqimining tezligini $v_{nis} = 2\,\text{km/s}$ ga teng deydigan bo'lsak, Siolkovskiy formulasidan, $v = 8\,\text{km/s}$ tezlikka erishish uchun, raketa massasining oxirgi qiymatining dastlabki qiymatiga nisbati $m_0/m = 54,6$ ga teng bo'lishi kerakligi kelib chiqadi. Bu raketa massasining deyarli 98% yoqilg'iga to'g'ri kelishini ko'rsatadi.

Yuqorida ko'rganimizni gaz oqimi tezligining vaqt bo'yicha o'zgaruvchan holi uchun umumlashtirish unchalik qiyinchilik tug'dirmaydi. Buning uchun (4.13) munosabatni dt ga bo'lish kifoya qiladi. Shuni ham e'tiborga olish kerakki, (4.12) munosabatga kiruvchi barcha impulslar va ularning orttirmalari haqiqiy vektorlardir, va natijaviy tenglamaga vektor shaklini beramiz:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u}\frac{dm}{dt}, \tag{4.15}$$

bu yerda $\mathbf{u}$ – soplodan chiqayotgan gaz oqimining tezligi. Tenglama vektor ko'rinishda bo'lganligi uchun "-", ishorani qo'yishning hojati yo'q. (4.15) tenglama (4.13) va (4.14) larga nisbatan boy mazmunga ega. Bu tenglamadan v va u parallel bo'lmagan holda ham, masalan, raketaning burilishida foydalanish mumkin. (4.15) tenglama Newton ikkinchi qonunining modifikatsiyalangan ko'rinishi ekanligidan, unga ixtiyoriy tashqi kuchlarni qo'shish mumkin, masalan, shu yo'sinda Yerning og'irlik kuchi maydonida raketaning ko'tarilishini aniqlash mumkin:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u}\frac{dm}{dt} + \mathbf{F}. \tag{4.16}$$

Bundan ko'rinadiki, Newton ikkinchi qonunini to'g'ridan-to'g'ri qo'llash, saqlanish qonunlariga nisbatan, katta imkoniyatlar yaratadi, biroq shu bilan birga masalani yechish nisbatan murakkablashadi. Bu paragrafning oxirida shu narsani ta'kidlash joizki, (4.16) ko'rinishdagi tenglamalar fizikada ***dinamik tenglama***, bu tenglamalarning yechimi esa ***tenglamalar integrali*** ((4.14) ko'rinishidagi munosabatlar kabi) deb atash qabul qilingan.

Bundan tashqari, har qanday mexanik sistemalarda harakat davomida doimiy qoluvchi funksiyalar mavjud bo'ladi. Bunday funksiyalar ***harakat integrallari*** deyiladi. Bular qatoriga, masalan, berk sistemaning energiyasi va impulsi kiradi.

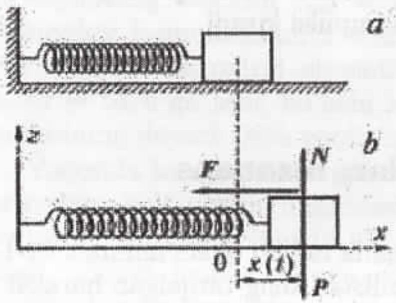
4.4 Tebranma harakat: garmonik tebranishlar, rezonans

Newton ikkinchi qonuni yordamida tadqiq qilish mumkin bo'lgan yana bir misolni, tabiat va texnikada keng tarqalgan harakatlardan birining o'ziga xos xususiyatlarini ko'rib chiqamiz. Gap, jismlarning u yoki bu ma'romda o'z harakat trayektoriyasini takrorlovchi, tebranishlar haqida bormoqda. Ko'pincha bunday harakatlar elastik kuchlar ta'sirida yuz beradi - masalan, prujina yoki qurilish konstruksiyalarining tebranishlari. Og'irlik kuchi ta'sirida yuzaga keladigan tebranishlar ham bunga misol bo'ladi.

Tebranishlarni o'rganishning yana bir ahamiyatli tomoni shundaki, tebranma jarayonlar nafaqat mexanik harakatlar ichida uchraydi, ular juda ko'p tabiat hodisalariga ham xosdir. Masalan, butun radiotexnika tebranma jarayonlarga asoslangan. Qattiq jismlardagi atomlar tinimsiz tebranma harakat qiladilar va bu harakatning tabiati bizni o'rab olgan olamning muhim bo'lgan, mustahkamlik yoki issiqlik o'tkaza olish xususiyati kabi, xossalarini belgilaydi.

Tebranma harakat juda murakkab ko'rinishga ega bo'lishi mumkin. Biz sodda ko'rinishdagi tebranishlar - garmonik tebranishlarni qarab chiqamiz: ***Garmonik tebranishlar, shunday tebranishlarki, unda tebranuvchi kattaliklar vaqt o'tishi bilan sinus yoki kosinus qonuni bo'yicha o'zgaradi.*** Mayatnikning yoki prujinaga osilgan yukning muvozanat holatidan kichik chetlashishi, tebranish konturidagi kondensatorda zaryad miqdorining o'zgarishi va h. garmonik tebranishlarga misol bo'ladi.

Tebranishlarning bu turi, o'zining soddaligiga qaramasdan, ikki sababga ko'ra juda muhim: birinchidan, tabiat va texnikadagi juda ko'p tebranishlar garmonik tebranishlarga yaqin, ikkinchidan, vaqtga bog'lanishi ixtiyoriy bo'lgan davriy jarayonlarni toza garmonik tebranishlarning qo'shilishi (superpozitsiya) ko'rinishda tasvirlanishi mumkin.



4.4-rasm.

Garmonik tebranishlarning asosiy tomonlarini gorizontal sirtda joylashgan, prujinaga ilingan m massali jismning tebranishlari misolida ko'rib chiqamiz. Bunda, sistemaning sirt bilan ishqalanishini e'tiborga olmaymiz (4.4a-rasm).

Bizning maqsadimiz – jismning trayektoriyasini aniqlash va masalani yuqoridagi paragrafdagi kabi, bir necha bosqichlarga bo'lib yechish.

Birinchi bosqich - qanday harakat turi bilan ish ko'rayotganimizni aniqlash. Jismning harakat trayektoriyasini aniqlashda Newton ikkinchi qonunidan foydalanish mumkin bo'lishi uchun, uni moddiy nuqta deb qaraymiz. Oldingi paragrafdagi kabi, bunday yondoshishning o'rinli bo'lishi va undan mumkin bo'lgan chetlashishlar haqidagi masalani, hozircha, chekli o'lchamdagi qattiq jismlarning dinamikasi bilan tanishguncha qadar orqaga surib turamiz.

Ikkinchi bosqich – koordinatalar sistemasini tanlash, jismga ta'sir qiluvchi kuchlarni va boshlang'ich shartlarni aniqlash. Bizning misolda tabiiy holda Ox o'qi prujina bo'ylab yo'naltirilgan, koordinatalar boshini esa, prujina cho'zilmagan va siqilmagan ho-

liga to'g'ri keluvchi jismning muvozanatiga mos nuqtada bo'lgan Dekart koordinatalar sistemasini tanlaymiz.

Bu yerda yana prujinaning elastiklik xossalariga aniqlik kiritishimiz lozim: Prujina faqat siqilishda yoki faqat cho'zilishda ishlamasligi kerak. Prujina qo'yilgan yuk ta'siridagi siqilishi va cho'zilishi birday bo'ladi deb faraz qilamiz:

$$F = -kx(t),$$

bu yerda k - prujinaning bikirlik koeffitsienti. $x(t) > 0$ da prujina cho'zilgan va elastiklik kuchi Ox o'qning musbat yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalgan (4.4b- rasmdagidek). $x(t) < 0$ da prujina siqilgan va elastiklik kuchi Ox o'qning musbat yo'nalish bo'ylab yo'nalgan.

Elastiklik kuchidan tashqari jismga Yer tomonidan og'irlik kuchi $\mathbf{P}$ va sirt tomonidan - $\mathbf{N}$ tayanch reaksiyasi ta'sir qiladi. Bu kuchlar vertikal, Oz o'qi bo'ylab yo'nalgan. Gorizontal tebranishlarda, bu yo'nalishda jism tezlanish olmaganligi uchun, bu kuchlarning yig'indisi nolga teng bo'ladi.

Endi, boshlang'ich shartlarni tanlash kerak. Odatda, bu shartlar masala qo'yilishida berilgan bo'ladi. Masalan, boshlang'ich vaqt momentida prujina ma'lum bir masofaga cho'zilgan, tezligi esa vaqtning bu momentida nolga teng bo'lsin. (3.4) Newton ikkinchi qonunining chap va o'ng tomonlarini Ox o'qiga proyektsiyalab, tebranayotgan jismning harakatini aniqlovchi masalaning matematik qo'yilishini hosil qilamiz:

$$m\ddot{x} = -kx, \ \ x(0) = x_0, \ \ \dot{x}(0) = 0. \qquad (4.17)$$

bu yerda ko'p hollarda qabul qilinganidek, x ustiga qo'yiladigan bir yoki ikki nuqta $(\dot{x}, \ddot{x})$ bilan vaqt bo'yicha birinchi va ikkinchi tartibli hosila belgilanadi (bunday belgilashlar odatda tebranishlar nazariyasida qabul qilingan). (4.17) tenglamaning o'ng tomonidagi "manfiy" ishora shu narsani aks ettiradiki, musbat x da (prujina cho'zilgan) elastiklik kuchi Ox o'qining manfiy tomoniga yo'nalgan, manfiy x da (prujina siqilgan) bu kuch Ox o'qining musbat tomoniga yo'nalgan. Umuman olganda, jismni tebranma harakat qilishga majbur qiluvchi kuch doim uni muvozanat holatga qaytarish tomoniga yo'nalgan bo'ladi.

Endi keyingi bosqichga o'tish mumkin – (4.17) tenglamaning boshlang'ich shartlarini qoniqtiruvchi yechimini topish. Bu vazifa, bundan oldin jismning og'irlik kuchi ta'siridagi harakat trayektoriyasini aniqlashda yechgan masalamizdan bir oz murakkab. Endi kuch koordinataga bog'liq bo'lib, bu bog'lanish chiziqli qonun bilan ifodalanadi: kuch koordinataga proporsional. (4.17) tenglamani qanoatlantiradigan $x(t)$ funksiyani aniqlash uchun avval bu tenglamani universal ko'rinishda yozib olamiz:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x, \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{4.18}$$

Matematikada (4.18) kabi tenglamalarni yechishning maxsus qoidalari mavjud. Lekin biz nisbatan sodda yo'lni tanlaymiz. (4.18) tenglamaning ko'rinishi, uning yechimini sodda yo'l topish mumkinligiga ishora qiladi. Topilishi lozim bo'lgan kattalik $x(t)$ dan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosila "minus" ishora bilan olingan o'sha $x(t)$ ni doimiy kattalik ω_0^2 ga ko'paytmasiga teng. Bunday xossaga $\sin\omega_0 t$ ega. Haqiqatan ham undan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosila $\omega_0\cos\omega_0 t$ ga ikkinchi tartibli hosila esa $-\omega_0^2\sin\omega_0 t$ ga teng. Shu sababli $\sin\omega_0 t$ funksiya (4.18) tenglamaning yechimi bo'ladi. E'tibor bering, tenglamaning yechimi, hali masalaning yechimi emas.

Aniqlangan funksiyani masalaning yechimiga aylantirishi uchun uni umumiyroq ko'rinishda yozib olamiz:

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi), \tag{4.19}$$

bu yerda A va φ hozircha ikki ixtiyoriy doimiylar, ularni aniqlash uchun masalaning qo'yilishida berilgan ikki boshlang'ich sharti yetarli bo'ladi. Bu funksiya $\sin\omega_0 t$ kabi (4.18) tenglamaning yechimi bo'ladi.

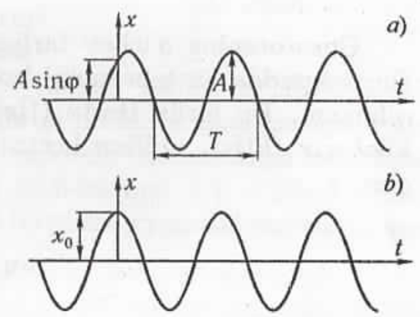
(4.17) boshlang'ich shartlardan foydalanib, A va φ kattaliklarni aniqlash uchun ikkita tenglamaga ega bo'lamiz:

$$x(0) = x_0 = A\sin\varphi, \quad \dot{x}(0) = A\omega_0\cos\varphi = 0.$$

Bu tenglamalarning birinchisidan $A = x_0$, ikkinchisidan $\varphi = \pi/2$

kelib chiqadi. Endi, masalaning boshlang'ich shartlarini qanoatlantiruvchi yechimini quyidagi ko'rinishda yoza olamiz:

$$x(t) = x_0\sin(\omega_0 t + \pi/2). \tag{4.20}$$



4.5-rasm.

Shunday qilib, prujinaga ilingan jismning muvozanat holatidan og'ishi vaqt o'tishi bilan sinus qonuni bo'yicha o'zgaradi, ya'ni ***garmonik tebranishlar*** bajaradi. 4.5*a*-rasmda A va φ larning qandaydir ixtiyoriy qiymatlari uchun (4.19) bog'lanishning grafigi keltirilgan, 4.5*b*-rasmda esa (4.20) yechim bilan aniqlangan x ning vaqtga bog'lanishi tasvirlangan. Trigonometrik funksiya sinus -1 dan +1 oralig'ida o'zgarganligi sababli, doimiy kattalik A jismning muvozanat $x = 0$ holatiga nisbatan har ikki tomonga maksimal og'ishni aniqlaydi. Garmonik tebranishlarda muvozanat holatdan maksimal og'ish ***tebranishlar amplitudasi*** deyiladi. Bu kattalik doim musbat bo'ladi. Bizning masalada amplituda x_0 - jismning muvozanat vaziyatidan boshlang'ich og'ishiga teng. $(\omega_0 t + \varphi)$ ***tebranish fazasi***, φ ***tebranishning boshlang'ich fazasi*** deb ataladi. Bizning masalada boshlang'ich faza $\pi/2$ ga teng. $\sin\omega_0 t$ davri 2π bo'lgan davriy funksiya bo'lganligi uchun, garmonik tebranishlar bajarayotgan jismning ixtiyoriy aniq bir holati tebranishlar fazasi har gal 2π ga ortganda takrorlanadi. Takrorlanish vaqti quyidagi shartdan aniqlanadi:

$$(\omega_0 t + \varphi) + 2\pi = \omega_0(t + T) + \varphi,$$

bundan

$$T = 2\pi/\omega_0. \tag{4.21}$$

Bu kattalik ***tebranishlar davri*** deb ataladi. Vaqt birligi ichidagi tebranishlar soni ν ***tebranishlar chastotasi*** (ba'zan chiziqli chastota) deb ataladi. ν bilan bitta tebranish davomiyligi T o'rtasidagi bog'lanishni aniqlash uchun, ravshanki, vaqt birligini T ga bo'lish kerak bo'ladi:

$$\nu = \frac{1}{T}. \tag{4.22}$$

Chastotaning o'lchov birligi sifatida davri bir sekundga teng (bir sekundda bir tebranish) bo'lgan tebranishlar chastotasi qabul qilingan. Bu birlik Hertz (Hz) deyiladi. Ming gerts chastotani kilohertz (kHz), million hertz megahertz(MHz) deyiladi. (4.21) dan

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{4.23}$$

kelib chiqadi.

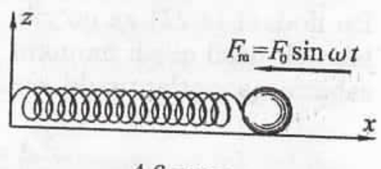
(4.22) va (4.23) ifodalarni taqqoslab, vaqt son jihatdan 2π sekunddagi tebranishlar soni ω_0 ga teng ekanligini ko'ramiz. ω_0 ***davriy*** yoki ***siklik*** chastota deyiladi. U chiziqli chastota bilan quyidagi munosabat orqali bog'langan:

$$\omega_0 = 2\pi\nu. \tag{4.24}$$

Ko'rilgan masalada, ya'ni prujinaga ilingan jismning yassi sirtdagi tebranishlari (4.18) munosabat orqali aniqlangan davriy chastota ω_0 bilan tavsiflanadi. Shunday qilib, garmonik tebranishlar chastotasi masaladagi asosiy kattaliklar (ko'rilgan holda yuk massasi va prujinaning bikirlik koeffitsienti) bilan aniqlanadi. Boshqa sistemalarda garmonik tebranishlar chastota shu sistemaga xos kattaliklar bilan aniqlanadi. Shunga o'xshash matematik mayatnikning (kichik tebranishlari garmonik bo'ladi) garmonik tebranishlar chastotasi mayatnik ipining uzunligi va erkin tushish tezlanishi bilan aniqlanadi:

$$\omega_0 = \sqrt{g/l}.$$

Radiotexnika qurilmalarda elektr toklarning tebranishlari uchun chastota induktivlik, sig'im kabi elektr xarakteristikalarga bog'liq bo'ladi.



4.6-rasm.

Tebranma harakat ajoyib bir qiziqarli va amaliy xossaga ega. Bu tebranayotgan jismning garmonik qonun bilan o'zgaruvchi tashqi kuchlarga nisbatan sezgirligidir. Bu hodisaning asosiy tomonlarini tushunish uchun, yuqorida harakati ko'rib chiqilgan, prujinaga ilingan jismni ko'rib chiqamiz. Faqat bu yerda avvalgi holdan farqli ravishda, endi jismga prujina bo'ylab unga yana tashqi, "majburlovchi" deb atashga kelishilgan, $F_m(t)$ kuch ham ta'sir qiladi (4.6-rasmga q.). Bu kuchning gorizontal proyeksiyasining vaqt bo'yicha o'zgarishi quyidagi qonun bilan aniqlansin:

$$F_m(t) = F_0 \sin\omega t. \tag{4.25}$$

Bu holda ko'rilayotgan jismning harakati qanday o'zgaradi? Qo'shimcha kuchni e'tiborga olganda harakat tenglamasi, ravshanki, quyidagi ko'rinishni oladi:

$$m\ddot{x} = -kx + F_0 \sin\omega t. \tag{4.26}$$

Bu tenglamaning har ikki tomonini m ga bo'lamiz, so'ngra (4.18) ni e'tiborga olib, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t. \tag{4.27}$$

Hattoki, maxsus matematikani qo'llamasdan turib, vaqt o'tishi bilan jismning harakati, majburlovchi kuchga, tabiiy ravishda, hamohang bo'lib qolishini kutish mumkin. Bu narsa, masalan, arg'imchoqda uchishda kuzatiladi. Eng sodda fikr – bu, shundan iboratki, ma'lum bir vaqt o'tgandan so'ng jism, majburlovchi kuchning o'zgarish chastotasiga teng chastota bilan tebrana boshlaydi, ya'ni (4.27) harakat tenglamasining yechimi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi deb faraz qilish mumkin:

$$x(t) = A\sin\omega t. \tag{4.28}$$

Bu ifodani (4.27) ga qo'yib, to'g'ri yechimni topganligimizga oson ishonch hosil qilish mumkin. Bunda, amplituda A quyidagi munosabatni qanoatlantirishi kerak:

$$-\omega^2 A = -\omega_0^2 A + F_0/m. \tag{4.29}$$

Bu yerdan A ni aniqlab, (4.27) harakat tenglamasining qidirilayotgan yechimini aniqlaymiz:

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega t. \tag{4.30}$$

Shunday qilib, majburlovchi kuch ta'sirida jism, o'sha kuch o'zgarayotgan ω chastota bilan garmonik tebranadi. Bundan tashqari, majburlovchi kuch chastotasi ω, jismning erkin tebranishlar chastotasi ω_0 ga (*xususiy chastotaga*) qanchalik yaqin bo'lsa, jismning natijaviy tebranishlar amplitudasi shunchalik katta, $\omega = \omega_0$ bo'lganda esa amplituda, umuman, formal ravishda cheksiz bo'lib qoladi. Real sharoitda amplituda har doim chekli bo'ladi. $\omega = \omega_0$ da cheksizlikning yuzaga kelishiga sabab, birinchidan, ko'rilgan masala chiziqli ($\ddot{x} \propto -x$), ikkinchidan ishqalanish kuchlarini e'tiborga olinmadi. Ishqalanish e'tiborga olinganda amplituda keskin o'sa olmaydi.

Tashqi davriy o'zgaruvchan kuchning chastotasi tebranuvchi sistemaning xususiy tebranish (erkin tebranishlar) chastotasi bilan mos tushganda tebranishlar amplitudasining keskin ortib ketish hodisasiga rezonans deyiladi. Bu hodisa fan va texnikada juda muhim rol o'ynaydi. Eng avvalo shuni ta'kidlash lozimki, ko'pgina mashina va mexanizmlarning qismlari elastik materiallardan tayyorlanadi. Shu sababli ular qandaydir aniq bir xususiy tebranish chastotasiga ega bo'ladi. Mexanizmning boshqa qismlari ularga davriy ravishda, majburlovchi kuch vazifasini o'tovchi, kuch bilan ta'sir qilishi mumkin. Agar bu ta'sir chastotasi xususiy chastotaga yaqin bo'lib qolsa, rezonans hisobiga, mexanizmlar ishiga salbiy ta'sir qiladi va hatto uning buzilib ketishiga sabab bo'luvchi katta amplitudali tebranma harakatlar yuzaga keltirishi mumkin.

Biroq rezonans hodisasining foydali tomonlari bilan texnika va fanda juda ko'p to'qnash kelish mumkin. Misol tariqasida,

radiotexnikada keng qo'llaniladigan bir masala ustida to'xtalamiz: elektr zanjirlaridagi elektr toki tebranishlari amplitudasi, zanjirga ulangan tashqi elektromagnit maydon (majburlovchi kuch vazifasini bajaruvchi) chastotasining zanjirdagi tok tebranishlari xususiy chastotasi bilan mos tushganda, keskin ortadi. Radiopriyomnikni aniq bir to'lqinga sozlab, biz priyomnikdagi tok tebranishlari xususiy chastotasining, bevosita, xuddi shu chastota bilan mos tushuvchi, uzoqdan yetib kelayotgan kuchsiz elektromagnit to'lqindan biriga sozlaymiz. Ilmiy tadqiqotlarda rezonans hodisasi, spektral metod deb ataluvchi usulning asosi sifatida juda keng qo'llaniladi. Rezonans hodisasi tadqiq qilinayotgan obyektning xususiy chastotasini (xususiy chastotalar spektri) majburlovchi davriy kuch bilan ta'sir qilish yordamida aniqlash mumkin. Boshqa tomondan xususiy chastota ma'lum bir ko'rinishda tadqiqot obyektining ichki xususiyatlari bilan bog'langan, shunga ko'ra, obyektning xususiy chastotasini o'lchash bilan uning ko'pgina muhim ichki xossalari haqida, boshqa usul bilan olish qiyin yoki umuman mumkin bo'lmagan, ma'lumotlar olish mumkin.

Savollar

4.1. Berilgan kuch ta'sirida moddiy nuqtaning harakat trayektoriyasini hisoblash uchun qanday boshlang'ich shartlar ma'lum bo'lishi kerak?

4.2. Sistemaning massasi o'zgaruvchi bo'lsa, Newton ikkinchi qonuni qanday ko'rinisga ega bo'ladi?

4.3. Reaktiv harakat qanday yuzaga keladi?

4.4. Tebranma harakatga ta'rif bering.

4.5. Qanday tebranishlarni bilasiz? Misollar keltiring.

4.6. Garmonik tebranish nima?

4.7. Garmonik tebranish fazasi degani nima?

4.8. Xususiy chastota qanday ta'riflanadi?

4.9. Rezonans nima?

4.10. Rezonans qachon yuzaga keladi?

4.11. Rezonans hodisasi qanday amaliy ahamiyatga ega?

4.12. Rezonans hodisasining zararli tomonlari bormi?

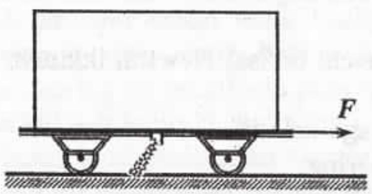
Masalalar

4.1. Yelkanli qayiq oqmaydigan suvda shamol ta'sirida o'z tezligini v_0 gacha oshirgach yelkanini tushirgan. Qayiqning harakat tezligini bosib o'tgan yo'liga bog'lanishini toping. Suvning qayiq harakatiga qarshilik kuchini qayiq tezligiga proporsional deb oling.

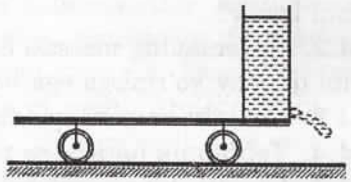
4.2. Vodorod atomidagi elektron va proton o'rtasidagi gravitatsion va elektr ta'sir kuchlarining nisbati F_g/F_e nimaga teng?

4.3. Qum ortilgan temir yo'l platformasiga o'zgarmas **F** kuch ta'sir qiladi. Platformaning tagidagi teshikdan har bir sekundda qumning massasi δm ga teng bo'lgan qismi to'kilib borsa (rasmga q.), uning tezligi va tezlanishi nimaga teng bo'ladi? $t = 0$ momentda platformaning tezligi $v = 0$, massasi esa M ga teng.

4.4. Og'ir aravaning orqa tomoniga zichligi ρ bo'lgan suyuqlik solingan radiusi r bo'lgan silindr shaklidagi idish mahkam o'rnatilgan. Suyuqlikning balandligi H ga teng. Idishning pastki qismida tiqin bilan berkitilgan kichik teshik bor. $t = 0$ momentda tiqin sug'irib olinadi (rasmga q.). $H \gg r$ va $M \gg \pi \rho H$ shartlar o'rinli deb aravaning maksimal tezligini toping. Bu shartlarning ma'nosini tushuntiring. M - arava bilan idishning umumiy massasi. Arava g'ildiraklaridagi podshipniklardagi ishqalanishni, dumalash ishqalanishini va suyuqlikdagi ichki ishqalanishni hisobga olmang.



4.3-masalaga oid chizma.



4.4-masalaga oid chizma.

4.5. Kosmik kema tortishish kuchlaridan holi bo'lgan fazoda m_0 boshlang'ich massa va nolga teng bo'lgan tezlik bilan harakatni boshlagan. Kemaning massasi $m = m_0 \exp(-\lambda t)$ qonuniyat bilan o'zgaradi. Yonish mahsulotining tezligi o'zgarmas bo'lib, **u** ga teng. Massasi 1000 marta kamayganda kema qanday masofani

bosib otgan bo'ladi?

4.6. Yerning tortish kuchi maydonida raketa tik yuqoriga ko'tarilmoqda. Yonish mahsulotining tezligi **u** ga teng. Havoning qarshiligini va Yerdan uzoqlashgan sari g ning o'zgarishini hisobga olmang. Raketaning $m(t)$ massasi va $v(t)$ tezligining vaqtga bog'lanishni toping. Yerga nisbatan tinch holatda bo'lishi uchun u har sekundda qanday miqdorda gazni chiqarishi kerak?

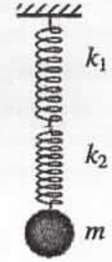
4.7. Kosmik stansiya Oy tomon $v_0 = 2,1$ km/s tezlik bilan harakatlanmoqda. Oy sirtiga yumshoq qo'nishi uchun tormozlovchi dvigatelni $t = 60$ s da ishga tushiradi. Bunda gaz oqimining stansiya harakat yo'nalishidagi tezligi $u = 2$ km/s . Qo'nish chog'ida uning tezligi deyarli nolga teng bo'lgan. Oy yaqinida erkin tushish tezlanishi o'zgarmas bo'lib $g/6$ ga teng. $g = 10\text{m/s}^2$ deb olinsa, stansiyaning massasi necha marta kamaygan?

4.8. Kosmik fazoda ikki bosqichli raketaning erishishi mumkin bo'lgan maksimal tezligi bir bosqichli raketanikidan qancha katta bo'ladi? Ikki bosqichli raketaning bosqichlari massalarining nisbati $M_1/M_2 = \alpha = 0,1$. Hamma hollarda bosqichlardagi yoqilg'i massasining bosqich massasiga nisbati $M_{yoq}/M = k = 0,9$ va gaz oqimining tezligi birday bo'lib, $u = 2$ km/s ga teng.

4.9. Raketa uncha yuqori bo'lmagan balandlikda doimo gorizontal yo'nalishda a tezlanish bilan harakat qilmoqda. Raketa bunday harakatda bo'lishi uchun gaz oqimi gorizontga nisbatan qanday burchak ostida chiqishi kerak?

4.10. Prujinaga osilgan sharning kichik tebranishlar davri $T = 0,5s$. Yuk o'z holiga qo'yilsa, prujina qanchaga cho'zilgan bo'ladi. Prujinaning massasini hisobga olmang.

4.11. Massasi m bo'lgan sharcha ketma-ket ulangan prujinalarga osilgan (rasmga q.). Prujinalarning bikirliklari k_1 va k_2. Sharchaning tebranish davrini aniqlang.



4.11-masalaga oid chizma.

4.12. Ingichka ip, tarozi toshi va soat yordamida xonaning hajmini aniqlash usulini ishlab chiqing.

4.13. Matematik mayatnik turg'un muvozanat holati atrofida tebranmoqda. Mayatnikning potensial, kinetik va to'liq energiyalari og'ish burchagiga bog'liq holda qanday o'zgaradi? Bu bog'lanishlar grafigini chizing. Ishqalanish va havoning qarshiligini inobatga olmang.

4.14. Ideal suyri shakliga ega bo'lgan matematik mayatnik suyuqlikka tushirilganda tebranish davri o'zgaradimi? Suyuqlikning qarshiligi hisobga olinmasin. Suyuqlikning zichligi ρ_s , yukning zichligi ρ .

4.15. Moddiy nuqta to'gri chiziq bo'ylab garmonik tebranma harakat qilmoqda. Tebranish davri $T = 0,2\,\mathrm{s}$ va amplitudasi $a = 12\,\mathrm{sm}$. Amplitudaning yarmiga teng masofani bosib o'tishda *a*) chekka holatdan, *b*)muvozanat holatdan hisoblanganda o'rtacha tezligi nimaga teng?

4.16. Prujina orqali shipga ilingan jism taxta ustida turibdi. Boshlang'ich vaqtda prujina cho'zilmagan holatda. Taxta a tezlanish bilan pastga tushirila boshlandi. Qancha vaqtdan keyin jism taxtadan ajraladi.

4.17. Suyuqlik solingan idish aravachada turibdi. Aravacha gorizontal yo'nalishda doimiy tezlanish bilan harakatga keltirildi. Bunda idishdagi suyuqlik sirti og'a boshlaydi. Suyqlik sirti gorizont bilan qanday burchak hosil qilganda og'ish to'xtaydi?

5-bob

Saqlanish qonunlarining tatbig'i

Energiyaning saqlanish qonuni – tabiatning nafaqat fundamental qonuni, shu bilan birga, masalalar yechishning samarali usuli hamdir. Bu ma'noda, har qanday saqlanish qonunlari samarali (saqlanuvchi kattaliklarni - harakat integrallari deb atash qabul qilingan) va ulardan foydalanish prinsiplari batamom universaldir - harakat tenglamalarini yechmay turib (masalan, moddiy nuqta trayektoriyasini hisoblamasdan), birdaniga sistemaning boshlang'ich va oxirgi holatlarini bog'lash mumkin. Xuddi shu prinsip asosida, impulsning saqlanish qonuni yordamida (34.3) Siolkovskiy formulasi keltirib chiqarilgan edi.

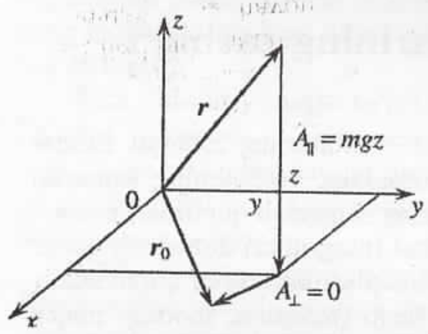
5.1 Sodda misollar

5.1.1 Og'irlik kuchining bajargan ishi

Moddiy nuqtaning og'irlik kuchi ta'siridagi harakatidan boshlaymiz. Harakatni tadqiq qilishda energiyaning saqlanish qonunidan foydalanish uchun dastlab potensial energiya uchun ifodani aniqlash kerak, ya'ni uning jismning fazodagi holatiga bog'lanishini topish zarur. Buning uchun fazoda radius-vektori $\mathbf{r}_0$ bo'lgan ixtiyoriy bir nuqtani tanlab olish va m massali moddiy nuqtani berilgan $\mathbf{r}$ nuqtadan $\mathbf{r}_0$ nuqtaga ko'chirishda og'irlik kuchining bajargan ishini hisoblash kerak.

Yuqorida keltirilgan ishni amalga oshirish tartibiga oydinlik kiritish uchun 5.1-rasmdan foydalanamiz. Koordinatalar sistemasi sifatida xOy tekisligi Yer sirti bilan ustma-ust tushuvchi Dekart koordinatalar sistemasini tanlaymiz. Bu sistemada m massali moddiy nuqtaning fazodagi holati $\mathbf{r}$ radius vektor, ya'ni xyz Dekart koordinatalari bilan aniqlanadi. Potensial energiyani aniqlash uchun

Yer sirtida radius-vektori $\mathbf{r}_0$ bo'lgan ixtiyoriy nuqtani tanlaymiz. (Ko'rilayotgan masalada Yer sirtini juda yuqori aniqlikda tekislik bilan almashtirish mumkin.) Sitrdan tashqaridagi $\mathbf{r}$ nuqtadan tanlangan nuqtaga jismni ko'chirishda bagarilgan ishni hisoblaymiz. Og'irlik kuchining bajargan ishi yo'lga bog'liq emasligi bizga ma'lum. Shu sababli moddiy nuqtani bu ko'chishida og'irlik kuchining bajargan ishini ikki kesmadan iborat deb qarash mumkin: vertikal bo'ylab xOy tekislikka va so'ngra, shu tekislikdagi ixtiyoriy trayektoriya bo'ylab $\mathbf{r}_0$ radius vektorli nuqtagacha.



5.1-rasm.

Yo'lning birinchi qismida bajarilgan ish og'irlik kuchi modulining Yer sirtigacha bo'lgan masofaga, ya'ni kuzatilayotgan moddiy nuqtaning koordinatasi z ga ko'paytmasiga teng. Ikkinchi qismda kuch barcha holatlarda ko'chishga perpendikular bo'lganligi uchun ish nolga teng bo'ladi. Shunday qilib, moddiy nuqtani $\mathbf{r}$ radius-vektorli holatdan $\mathbf{r}_0$ radius-vektorli holatga ko'chirishda og'irlik kuchining bajargan ishi mgz ga, $\mathbf{r}$ nuqtada potensial energiya esa, $U(r) = mgz$ ga teng ekanligini aniqladik.

Yuqoridagiga asosan, moddiy nuqtaning faqat og'irlik kuchi ta'sirida harakati mobaynidagi energiyaning saqlanish qonuni trayektoriyaning ixtiyoriy nuqtasi uchun o'rinli va quyidagi ko'rinishdagi munosabat bilan aniqlanadi:

$$E = \frac{mv^2(z)}{2} + mgz = \text{const}\,. \qquad (5.1)$$

Agar jism qandaydir z_0 balandlikdan, nolga teng bo'lgan boshlang'ich tezlik bilan tusha boshlasa, energiyaning saqlanish qonuni (5.1) yordamida jismning Yerga yaqinlashgan sari tezligining ortib borish qonunini osonlik bilan aniqlash mumkin:

$$mgz_0 = mgz + \frac{mv^2(z)}{2} \Rightarrow v(z) = \sqrt{2g(z_0 - z)}.$$

5.1.2 Elastiklik kuchining bajargan ishi

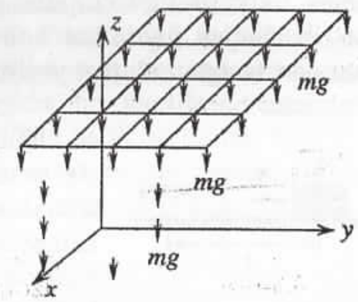
Endi, moddiy nuqta uchun ikkinchi sodda harakatni, ya'ni avvalgi bobda ko'rilgan – prujinaning elastiklik kuchi ta'siridagi yukning tekislik bo'ylab garmonik tebranishlari potensial energiyasi uchun ifodani aniqlaymiz (4.5-, 4.6-rasmlarga q.). Potensial energiyani aniqlashda ixtiyoriy boshlang'ich $\mathbf{r}_0$ radius-vektorli holat sifatida $x = 0$ dagi yukning muvozanat holatini tanlaymiz. U holda, x holatdagi potensial energiya yukni koordinatasi x bo'lgan nuqtadan koordinatasi $x = 0$ bo'lgan nuqtaga ko'chishida $F = -kx$ elastiklik kuchining bajargan ishiga teng, ya'ni

$$A_{21} = \int_2^1 \mathbf{F}d\mathbf{r} = \int_x^0 (-kx)dx = \frac{kx^2}{2}, \Rightarrow U(x) = \frac{kx^2}{2}.$$

Bunga asosan, yukning gorizontal sirt bo'ylab garmonik tebranishidagi to'liq energiyasining saqlanish qonuni quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$E = \frac{mv^2(x)}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const}\,. \qquad (5.2)$$

Harakat tenglamalarini integrallashga urinmasdan bu munosabat yordamida garmonik tebranishlar haqidagi ko'plab masalalarni yechish mumkin. Masalan, yukning $x = 0$ muvozanat vaziyatidagi boshlang'ich tezligi aniq bo'lsin. Bu holatda to'liq energiya kinetik energiyaga teng bo'ladi. Muvozanat holatdan maksimal siljishda yukning tezligi va demak, kinetik energiyasi ham nolga teng bo'ladi. Bu holatda to'liq



5.2-rasm.

energiya potensial energiyaga teng bo'ladi. Energiyaning saqlanish qonuni (5.2) ni yukning bu ikki vaziyati uchun qo'llab, garmonik tebranishlar amplitudasini aniqlash mumkin, ya'ni

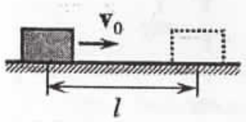
$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2}, \Rightarrow x_0 = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Shuni alohida qayd qilish kerakki, tashqi kuch maydonidagi harakatda energiyaning saqlanish qonuni faqat vaqt bo'yicha o'zgarmas kuch ta'siridagi harakatlar uchun o'rinlidir. Bunday harakatni ba'zan doimiy kuch maydonidagi harakat deb gapiriladi. Kuch maydoni vaqtga bog'liq bo'lsa, (3.57) shart $\mathbf{r}(t)$ trayektoriyani tanlashga nisbatan invariant bo'lmaydi.

"**Maydon**" atamasi ostida shunday fazoni tushinish kerakki, uning har bir nuqtasiga ta'sir qiluvchi **kuch fazosida** vektor mos keltiriladi (5.2-rasmda og'irlik kuchining doimiy kuch maydoni tasvirlangan). Agar kuch maydoni vaqtga bog'liq bo'lsa, moddiy nuqtaning to'liq energiyasi, umuman olganda, saqlanmaydi. Shunday misollardan biri bilan jismga elastiklik kuchidan tashqari, tashqi majburlovchi kuch ta'sir qilishi natijasida jismlar tebranishida yuz beruvchi rezonans hodisasini ko'rib chiqqanimizda tanishgan edik. Bu holda, to'liq energiya majburiy tebranishlar amplitudasi ortishi bilan ortib boradi.

5.1.3 Dissipativ kuchlar

Endi masalalarni yechishda energiyaning saqlanish qonunidan emas, balki uning to'liq dissipatsiyasidan foydalanish mumkinligini ko'rib chiqish foydadan holi bo'lmaydi. Bu usul ham ko'pincha, harakat tenglamalarini yechmay turib masala javobini oson topish imkonini beradi.



5.3-rasm.

Kinetik energiyaning o'zgarishi va ish o'rtasidagi (3.54) munosabat yordamida ishqalanish kuchlari ta'sirida energiyaning kamayishini aniqlash mumkin. Ibratli misol sifatida quyidagi masalani ko'rib chiqamiz. Gorizontal sirtdagi m massali jismga boshlang'ich momentda $\mathbf{v}_0$ ilgarilanma harakat

tezligi berilgan bo'lsin (5.3-rasm). Sirt bilan jism o'rtasidagi ishqalanish hisobiga jismning tezligi kamaya boradi va oxir oqibatda qandaydir masofada u to'xtaydi. Ishqalanish koeffitsienti μ ga teng deb, masofani aniqlaymiz. Javobni, albatta, mos harakat tenglamasini yechish orqali topish mumkin (Newton ikkinchi qonuni). Biroq (3.54) munosabat orqali qo'yilgan masalaning yechimini sodda va qisqa yo'l bilan topish mumkin:

$$\frac{mv_0^2}{2} = F_{ishq}l = \mu mgl, \Rightarrow l = \frac{v_0^2}{2\mu g}.$$

Albatta, bu natija bir muncha taxminiy, chunki biz harakat davomida ishqalanish kuchi o'zgarmas deb hisobladik. Bu usul ba'zi hollarda o'ta noto'g'ri ham bo'lishi mumkin. Ammo, bunga o'xshash masalalarni yechish prinsipini bu misol yetarlicha ko'rinishda namoyish qiladi.

5.2 Muvozanat va turg'unlik

Mexanika – harakat haqidagi fandir, biroq tinchlik holati harakatning xususiy holidir. O'ta tinch holat (yoki doimiy tezlik bilan bo'ladigan harakat) yakkalangan jismlarga xos, lekin bu hol ideallashtirilgan model bo'lib, real sharoitda hech qachon amalga oshmaydi. Yetarli darajadagi aniqlikda inersial deb hisoblanadigan sanoq sistemasida kuzatiladigan, umuman olganda, tinchlik holati har doim quyidagi ikki xususiy hollardan biriga keltiriladi:

1. Jismga ta'sir qiluvchi kuchlar yoki masalaning xarakterli (o'ziga xos) vaqti shunchalik kichikki, tajriba aniqligi chegarasida yoki masalaning nazariy yechilishi aniqligida, biz jism tezligining o'zgarishini (tezlanishini) e'tiborga olmaslikka haqli bo'lamiz. Xususan, biror bir jismning ko'rilayotgan harakat uchun xarakterli fazoviy masshtab Δx, vaqt masshtabi esa Δt, unga ta'sir qilayotgan kuch F, massasi m bo'lsa,

$$\frac{F}{m}(\Delta t)^2 \ll \Delta x$$

shart bajarilganda, jismni tinch (harakatsiz) holatda deb qarash mumkin. Bu yerda $a \sim F/m$ – jismning tezlanishi, $l \sim a(\Delta t)^2$ jismning Δt vaqt ichida bosib o'tgan yo'li. Bu baholash shuni ko'rsatadiki, Δt vaqt davomida jism bosib o'tgan yo'l xarakterli masshtabdan juda kichik bo'lsa, talab qilinayotgan aniqlikda jism tinch turibdi deb hisoblash mumkin ekan.

2. Bo'lishi mumkin bo'lgan ikkinchi hol, kichik xarakterli vaqt bilan unchalik bog'liq bo'lmagan - muvozanat holatdir. Kuch vektor kattalik, Newton ikkinchi qonunini ifodalovchi tenglama esa, vektor munosabatdir. Vektor - bu nafaqat moduli va yo'nalishi bilan aniqlanadigan kattalik, balki ba'zi bir maxsus xossalarga, xususan, superpozitsiya prinsipiga bo'ysunadi. Agar jismga ikki, uch va h. kuchlar ta'sir qilayotgan bo'lsa, bu prinsipning natijasi sifatida, tezlanish ularning vektor yig'indisi orqali aniqlanadi:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{1}{m}\sum_i \mathbf{F}_i.$$

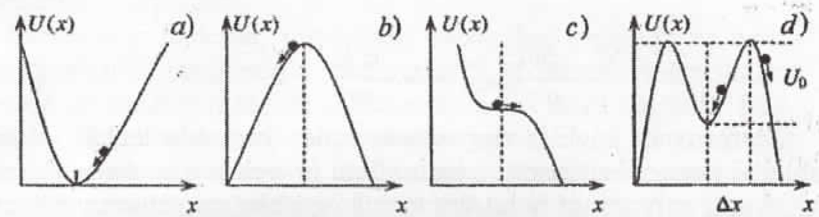
Moddiy nuqta muvozanatda deb hisoblash, unga qo'yilgan kuchlarning vektor yig'indisi nolga teng bo'lishini bildiradi:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0. \qquad (5.3)$$

Agar makroskopik jism muvozanati haqida fikr yuritilsa, birgina (5.3) shartning o'zi yetarli bo'lmaydi. Chekli o'lchamdagi jismlar harakati va muvozanatining alohida xususiyatlarini 7-bobda ko'ramiz. Bu yerda esa, jismning harakatini o'rganishda (5.3) shartning bajarilishi yetarli bo'lgan hollarni ko'rish bilan chegaralanamiz. Makroskopik, hatto, moddiy nuqta deb qarash mumkin bo'lgan jismlar uchun ham (5.3) tenglik hech qachon o'ta aniqlikda bajarilmaydi. Biroq tezlanishni e'tiborga olmaslik imkonini beruvchi kichiklik sharti, endi ta'sir qiluvchi kuchlardan har biriga emas, balki ularning vektor yig'indisiga qo'yiladi.

Jismlarning muvozanat sharti odatda statika bo'limida o'rganiladi. Biz bu yerda uni batafsil o'rganmasdan, mexanikadagi, umuman olganda fizikadagi muhim masalalardan biri bo'lgan, muvozanatning turg'unligi muammosi ustida to'xtalamiz.

(5.3) muvozanat shartining bajarilish aniqligidan tashqari, jism yoki jismlar sistemasini muvozanatdan chiqara oluvchi yana bir



5.4-rasm.

sabab mavjud. U xaotik (tasodifiy) tashqi ta'sirlarda mujassamlashgan bo'lib, ularni (5.3) shart doirasida e'tiborga olib bo'lmaydi. Bunday ta'sirlar, masalan, issiqlik tabiatiga ega bo'lishi mumkin, chunki issiqlik effektlari molekulalarning tartibsiz harakati bilan bog'langan. Shunday qilib, muvozanat mexanik sistemaning yetarli darajadagi har qanday tashqi kichik ta'sirlarga nisbatan turg'unligi bilan belgilanadi. Turg'unlik haqidagi fan murakkab va keng qamrovli, biroq bu yerda biz moddiy nuqtaning bir o'lchamli harakati misolida turg'unlik masalasining ba'zi bir asosiy tushunchalarini kiritamiz (5.4-rasmga q.).

1. Agar, muvozanat holatidan kichik chetlashishda, uni muvozanat holatga qaytaruvchi kuch yuzaga kelsa, moddiy nuqta x_0 muvozanat nuqtasidan uzoqqa keta olmaydi (5.4*a*-rasm).

Muvozanat holatdan chetlashish, nuqtaviy massani biror bir $x \neq x_0$ nuqtaga siljitish yoki unga ma'lum bir boshlang'ich tezlikning berilishi bilan amalga oshirilishi mumkin. Quyidagi shart bajarilganda jism muvozanat holat x_0 nuqta atrofida qoladi:

$$x > 0 \text{ da } \frac{dU}{dx} > 0; \; x < 0 \; da \; \frac{dU}{dx} < 0.$$

Bu shartlar bevosita (3.81), ya'ni

$$F_x = -\frac{dU}{dx}\Big|_{y,z=\mathrm{const}} \equiv -\frac{\partial U}{\partial x}$$

dan kelib chiqadi. Boshqacha aytganda, muvozanatning turg'unligi potensial energiyaning minimumiga mos kelib, bir o'lchamli masalalarda quyidagi shartlarga ekvivalentdir:

$$\frac{dU}{dx}|_{x=x_0} = 0, \ \frac{d^2U}{dx^2} > 0. \tag{5.4}$$

Qaytaruvchi kuchlar muvozanat holat yaqinida kichik tebranishlarni yuzaga keltirishi bizga ma'lum (4-bobga q.). Agar dU/dx funksiyani, muvozanat holatdan kichik og'ishlarga nisbatan chiziqli ko'rinishga keltirish mumkin bo'lsa, moddiy nuqta oddiy garmonik tebranishda bo'ladi (masalan, (4.18)). Ishqalanish yoki boshqa dissipatsiya mexanizmlari (qovushoqlik, akustik yoki elektromagnit to'lqinlarning nurlanishi, kimyoviy reaksiyalar va boshqalar) e'tiborga olinganda tebranishlar so'nuvchi bo'lishi kerak va zarra vaqt o'tishi bilan muvozanat holatiga qaytadi. Bu qaytish juda bo'lmaganda, asimptotik ravishda yuz beradi.

2. Agar moddiy nuqtaning bir o'lchamli harakatida (5.4) shart emas , balki

$$\frac{dU}{dx}|_{x=x_0} = 0, \ \frac{d^2U}{dx^2} < 0. \tag{5.5}$$

shart bajarilsa, $x = x_0$ nuqta zarra uchun yana muvozanat holat bo'ladi. Chunki, potensial energiyadan olingan birinchi tartibli hosila nolga teng. Ammo bu nuqtadan kichik chetlashishlarda muvozanat nuqtaga qaytaruvchi kuch yuzaga kelmaydi. Bunday nuqtalarda zarra noturg'un muvozanatda bo'ladi (5.4*b*-rasm).

3. Muvozanat nuqtasida $U(x)$ funksiya minimumga ega bo'lmasin, deb faraz qilamiz (5.4*b*-, *c*-rasmlar). Bu holda turg'unlik yo'q. $U(x)$ ning maksimumida (5.4*b*-rasm) zarraning ixtiyoriy tomonga siljishi, shu tomonga yo'nalgan tezlanishning paydo bo'lishiga olib keladi va zarra x_0 holatga boshqa qaytmaydi. 5.4*c*- rasmdagi holatda, agar ko'chish yoki boshlang'ich tezlik manfiy bo'lsa (rasmda zarra chapga siljiydi), zarra x_0 holatga qaytishi mumkin, ammo u bir marta qaytadi, so'ngra, 5.4*b*-rasmda ko'rsatilganidek harakat qila boshlaydi. Ba'zi masalalarda $F(x) = 0$, ya'ni $U(x) =$ const bo'lgan hol uchraydi. Bu hol farqsiz muvozanatga to'g'ri keladi. Biroq u 5.4*b*-, *c*-rasmdagi variantlardan faqatgina funksional bog'lanish bilan farqlanishi mumkin, bunda zarraning muvozanat vaziyatga qaytishi yuz bermaydi. Haqiqiy turg'un muvozanat potensial energiyaning faqat minimumi bilan, ya'ni (5.4)

shart bilan aniqlanadi.

Zamonaviy fizikada, jumladan, mexanikada chiziqli va nochiziqli turg'unlik farqlanadi. Muammo 5.4*d*-rasmda tasvirlangan. Muvozanat holatdan kichik og'ishlarda zarra unga qaytadi. Biroq og'ishlar chegaradan tashqariga chiqsa, ya'ni $|x - x_0| > \Delta x$ bo'lsa, yoki unga potensial energiya U_0 dan katta kinetik energiya berilsa, zarra muvozanat vaziyatiga qaytib kelmaydi.U_0 va Δx kattaliklar nochiziqli noturg'unlik chegarasini aniqlaydi. Yetarli darajada katta ta'sirlar natijasida har qanday sistema juda bo'lmaganda, yemirilish darajasida nochiziqli noturg'un bo'lib qolishi mumkinligini tasavvur qilish qiyin emas. Biroq endi, bu holat muvozanat vaziyatidan o'z-o'zidan yuz beradigan tasodifiy og'ishlar bilan bog'langan bo'lishi shart emas.

Bu paragrafdagi barcha misollar bir o'lchamli bo'lmagan hollar, makroskopik jismlar, jumladan murakkab sistemalar uchun ham yetarli darajada tabiiy holda ko'chirilishi mumkin. Bunda sistemaning barcha ξ_i parametrlarini fazoviy koordinatalar bilan bog'lash shart emas. Masalan, tebranish konturida bu kattalik zaryad miqdori bo'ladi. Bunday "o'tishlar" ning to'g'ri tili - potensial energiya formalizmidir, asosiy muammo esa - $U(\xi_1, \xi_2, ...)$ funksiyani topishdan iborat.

Savollar

5.1. Moddiy nuqtaning potensial energiyasi deb nimaga aytiladi?

5.2. Kuchlar superpozitsiya prinsipini qanday tushunasiz?

5.3. Potensial energiya manfiy bo'lishi mumkinmi?

5.4. Prujina tebranishlari nima uchun so'nadi?

5.5. Ishqalanayotgan sirtlar nima uchun qiziydi?

5.6. Saqlanish qonunlari masalalar yechishda qanday rol o'ynaydi?

5.7. Masalalarni yechishda dissipativ kuchlardan foydalanish mumkinmi?

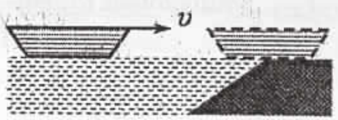
5.8. Muvozanat turg'un bo'lishi uchun potensial energiya qanday shartlarni qanoatlantirishi kerak?

5.9. Muvozanat turg'un bo'lishi uchun potensial energiya ishorasining ahamiyati bormi?

5.10. Quyidagi holatni tasavvur qilamiz: qandaydir bir momentda Yerda yotgan futbol koptogining ichidagi barcha havo molekulalarining tezliklari vertikal yuqoriga yo'nalgan bo'lib qolsin. Bu holda koptok qanday balandlikka uchib ketgan bo'lar edi?

Masalalar

5.1. O'lchamlari e'tiborga olinmasa bo'ladigan jism, R radiusli sferik sirtning choragiga teng bo'lgan silliq sirt bo'ylab, eng yuqori nuqtadan boshlang'ich tezliksiz sirpanib tusha boshladi. Pastki nuqtaga yetgach, jism sirpanish ishqalanish koeffitsienti μ bo'lgan g'adir-budur sirt bo'ylab harakatini davom ettiradi. G'adir-budur sirt bo'ylab, to'xtaguncha jism qanday l masofani bosib o'tadi? Egri chiziqli sirtdan tekis gorizontal sirtga o'tishni tekis va bu nuqtada urilish sodir bo'lmaydi deb qaralsin.



5.4-masalaga oid chizma.

5.2. Har birining massasi m bo'lgan uchta qayiq ketma-ket bir xil v tezlik bilan harakatlanmoqda. O'rtadagi qayiqdan bir vaqtda birinchi va uchinchi qayiqlarga massalari (m_1) bir xil yuklar u tezlik bilan otilgan. Yuklar otilgandan so'ng qayiqlarning tezliklari qanday bo'ladi?

5.3. Qiyaligi $\alpha = 16^o$ bo'lgan yo'ldan "Matiz" avtomobili $v = 50$ km/soat tezlik bilan ko'tarilishi mumkin. Xuddi shunday qoplamaga ega tekis yo'lda shu tezlik bilan harakatlanganda avtomobilning energiya sarflash quvvati $N = 20$ ot k. (1 ot k.=736 W)Avtomobilning massasi 800 kg bo'lsa, uning maksimal quvvati nimaga teng?

5.4. Uzunligi L bo'lgan qayiq suvda suzib kelib inersiyasi bilan qirg'oqqa yarmigacha chiqib ishqalanish sababli to'xtab qoldi (rasmga q.). Qayiqning boshlang'ich tezligi nimaga teng? Ishqalanish koeffitsienti μ ga teng.

5.5. Massasi m bo'lgan jismni uzunligi L va balandligi H

bo'lgan tepalikka sudrab chiqarish uchun qanday minimal ish bajarish lozim bo'ladi? Ishqalanish koeffitsienti μ ga teng.

5.6. Bikirligi k bo'lgan elastik rezina tasmadan kamon o'qini otish uchun moslama tayyorlangan. Moslama yordamida F kuch bilan tortib otilgan o'qning kinetik energiyasini toping. Moslama F kuch bilan tortilganda, har bir rezinaga $F/2$ kuch ta'sir qiladi. Bunda har bir rezinaning cho'zilishi $\Delta L = F/2k$. Energiyaning saqlanish qonuniga ko'ra rezinalarning potensial energiyasi to'liqligicha o'qning kinetik energiyasiga aylanadi:

$$U = 2\frac{k\Delta l^2}{2} = 2\frac{k}{2}\left(\frac{F}{2k}\right)^2 \Rightarrow K = \frac{F^2}{4k}.$$

5.7. Moddiy nuqtaning potensial energiyasi $U = kx^2/2 - \beta x^4/4$ funksiya bilan aniqlanadi. Muvozanat nuqtalarini toping. Bu yerda o'zgarmas kattaliklar $k > 0, \beta > 0$ shartni qanoatlantiradi.

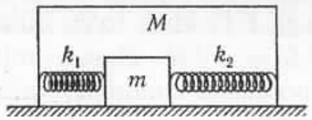
5.8. Matematik mayatnik (l uzunlikdagi yengil "ip"ga osilgan kichik o'lchamdagi yuk) muvozanat vaziyatida turibdi. Mayatnik to'la aylana olishi uchun unga qanday v tezlik berish lozim? Masalani ikki hol uchun yeching. Yuk: a) qattiq sterjenga osilgan; b) ipga osilgan.

Ko'rsatma. Ikkinchi holda yuqori nuqtada, yuk pastga qulab tushmasligi uchun tezlik yetarli darajada katta bo'lishi kerak.

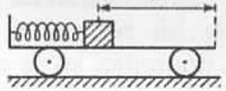
5.9. Stol ustida massasi $M = 1$ kg bo'lgan taxta yotibdi, Taxtaga massasi $m = 2$ kg bo'lgan yuk qo'yilgan. Taxta yuk ostidan sirpanib chiqib ketishligi uchun unga qanday F kuch qo'yish kerak? Yuk va taxta orasida ishqalanish koeffitsienti $\mu_1 = 0,25$, taxta va stol orasida esa $\mu_2 = 0,5$ ga teng.

5.10. m massali jism stolning gorizontal sirtida yotgan M massali qutining tubida bikirligi k_1 va k_2 bo'lgan ikki prujina ta'sirida ishqalanishsiz tebranmoqda (rasmga q.) Stol bilan quti orasidagi ishqalanish koeffitsienti μ . Jism tebranish amplitudasi Δx qanday qiymatida quti stol sirtida harakat qila boshlaydi?

5.11. M massali vagonga bikirligi k bo'lgan prujina ulangan. Prujina m massali yuk bilan siqilgan holatda ushlab turilibdi (chizmaga q.). Prujina cho'zilmagan holatiga nisbatan x_0 gacha siqilgan. Yukdan vagonning ochiq tomonigacha bo'lgan masofa L. Prujinaning siqilmagan holatidagi uzunligi L dan kichik. Qo'yib yuborilgan prujina yukni itarib yuboradi. Yukning vagondan tushib ketish vaqtidagi tezligi qanday bo'ladi? Yuk bilan vagon orasidagi ishqalanish koeffitsienti μ, vagon bilan rels orasidagi ishqalanishni juda kichik deb inobatga olmasa ham bo'ladi.

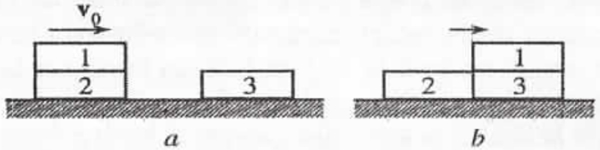


5.10-masalaga oid chizma.



5.11-masalaga oid chizma.

5.12. Birinchi chorqirra ikkinchisining ustida turibdi (a chizmaga q.). Shunday holda ular silliq tekislik ustida v_0 tezlik bilan sirpanib harakatlanmoqda. Harakatdagi chorqirralar xuddi shunday 3-chorqirra bilan noelastik to'qnashadi. Birinchi chorqirra uchinchisining ustiga to'liq o'tganda ishqalanish sababli 1-chorqirra batamom to'xtasa, chorqirraning uzunligi nimaga teng (b chizmaga q.)? 1- va 3-chorqirralar orasidagi ishqalanish koeffitsienti μ. 1- va 2-chorqirralar hamda tekislik va chorqirralar orasidagi ishqalanishni inobatga olmang.



5.12-masalaga oid chizma.

6-bob

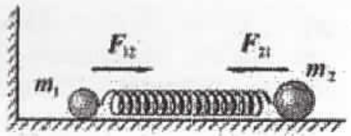
Berk sistema. Ta'sir energiyasi va ichki energiya

6.1 O'zaro ta'sirlashuvchi ikki moddiy nuqta mexanikasi

Shu vaqtgacha "soddadan - murakkabga" qoidasiga amal qilib, jismlar o'lchamlarini hisobga olmagan holda, ya'ni moddiy nuqta yaqinlashishida (model) eng sodda harakatlarni o'rgandik. Bunda moddiy nuqtaga ta'sir qilayotgan kuch ma'lum deb hisoblandi (garmonik tebranishlar, og'irlik kuchi ostidagi harakat, o'zgarmas kuch maydonida energiya va impulsning saqlanish qonunlari).

Endi navbatdagi qadamni qo'yamiz - o'zaro ta'sirlashuvchi bir necha moddiy nuqtalar harakatining xususiyatlarini o'rganamiz. Bu holda ularning har biriga qolganlari tomonidan ta'sir etuvchi kuchni ma'lum deb bo'lmaydi, kuch moddiy nuqtalarning bir-biriga nisbatan joylashishiga bog'liq bo'ladi, shu bilan birga ularning trayektoriyalari oldindan ma'lum bo'lmaydi.

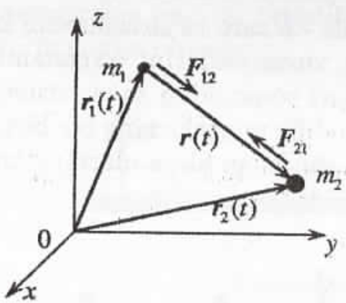
Masalan, murakkab mexanizmning biror bir tugun qismida bir necha detallar bir-biriga ta'sir qilib, qandaydir harakatlar bajaradi. Bunday ta'sirga juda sodda misol 6.1-rasmda tasvirlangan: massalari m_1 va m_2 bo'lgan ikkita moddiy nuqta prujina bilan ulangan va gorizontal tekislikda bir-biriga nisbatan tebranma harakat bajaradi. Bu misol 4-bobda ko'rilgan, devorga prujina bilan ulangan moddiy nuqtaning garmonik tebranma harakati masalasidan jiddiy farq qiladi.



6.1-rasm.

O'zaro ta'sirlashuvchi jismlar harakatini o'rganishni ikki moddiy nuqta masalasidan boshlaymiz. Bu ikki jismga boshqa jismlar tomonidan ta'sir qiluvchi kuchlar yo'q yoki ularning ta'siri inobatga olinmasa bo'ladigan darajada kichik bo'lsin. Boshqacha aytganda, bunday ikki moddiy nuqtalardan tuzilgan sistemani ***berk*** deb hisoblaymiz. Bunday sistemaga yetarlicha misollar keltirish mumkin. Quyosh - planeta, Yer - Oy sistemalari yoki mikrodunyodagi ixtiyoriy ikki elementar zarralardan tarkib topgan sistema biz ko'rmoqchi bo'lgan ikki zarra masalasiga misol bo'la oladi.

Birinchi va ikkinchi jismlarning massalari mos ravishda m_1 va m_2, bo'lsin. Birinchi jismga ikkinchi jism tomonidan ta'sir etuvchi kuchni $\mathbf{F}_{12}$ bilan belgilaymiz. Newton uchinchi qonuniga muvofiq bu kuch, ikkinchi jismga birinchi jism tomonidan ta'sir qiluvchi $\mathbf{F}_{21}$ kuchga son jihatidan teng va qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi (6.2-rasm). Ko'rilayotgan jismlarning tanlangan inersial sanoq sistemasiga nisbatan fazodagi vaziyati t vaqt momentida bu jismlarga koordinata boshidan o'tkazilgan $\mathbf{r}_1(t)$ va $\mathbf{r}_2(t)$ radius vektorlar bilan aniqlanadi.



6.2-rasm.

Newton ikkinchi qonuni yordamida bu ikki jism harakatining xususiyatlarini o'rganishga kirishamiz. Bu qonunni har bir moddiy nuqta uchun yozib, $\mathbf{r}_1(t)$ va $\mathbf{r}_2(t)$ radius vektorlar uchun tenglamalar sistemasi olamiz:

$$\begin{aligned} m_1\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} &= \mathbf{F}_{12}(|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|), \\ m_2\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} &= \mathbf{F}_{21}(|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|). \quad (6.1) \end{aligned}$$

Avval bu ikki jismning nisbiy harakatini ko'rib chiqamiz. Matematik tilda nisbiy harakat ikki jismni bog'lovchi $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)$ radius-vektorning vaqtga bog'lanishi bilan aniqlanadi. $\mathbf{r}(t)$ uchun tenglamani (6.1) tenglamadan juda oson olish mumkin. Buning uchun (6.1) dagi birinchi tenglamaning har ikkala tomonini m_1 ga, ikkinchisini esa m_2 ga bo'lamiz. Hosil bo'lgan tenglamalarning ikkinchisidan birinchisini hadlab ayiramiz. Natijada quyidagi

tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{d^2(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}{dt^2} = \left(\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_1}\right)\mathbf{F}_{21}(|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|),$$

bu yerda $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ tenglik inobatga olindi. Oxirgi tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\mu\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}_{21}(r). \quad (6.2)$$

Yangi kattalik

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}. \quad (6.3)$$

Massalari m_1 va m_2 bo'lgan ikki moddiy nuqtalar uchun ***keltirilgan massa*** deb ataladi. (6.2) tenglama ta'sirlashuvchi ikki moddiy nuqtalar nisbiy harakatining ajoyib xususiyatini aks ettiradi:

Ikki moddiy nuqtalardan tashkil topgan berk sistemaning nisbiy harakati masalasi massasi keltirilgan massaga teng bo'lgan bitta moddiy nuqtaning o'sha kuch ta'siridagi harakati masalasiga keltirildi.

Yuqoridagilar asosida, boshqa planetalarning ta'sirini hisobga olmasak "Quyosh-Yer" sistemasi katta aniqlikda ikki jismdan tashkil topgan berk sistemaga misol bo'la oladi. Yerning Quyoshga nisbatan harakat trayektoriyasini aniqlash uchun (6.1) ikki tenglamalar sistemasini yechish shart emas, ya'ni avval $\mathbf{r}_1(t)$ va $\mathbf{r}_2(t)$ larni topib (Quyosh va Yerning biror bir inersial sanoq sistemasidagi trayektoriyasi), so'ngra $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)$ nisbiy harakat trayektoriyasini topish o'rniga (6.2) tenglamani yechib, birdaniga nisbiy harakatni aniqlash mumkin. Shu ishni o'z vaqtida Newton ajoyib hisoblashlar yordamida amalga oshirib, Keplerning kuzatishlar natijasini umumlashtirib topgan mashhur qonunlarini tasdiqlagan. Bu holda nisbiy harakat tenglamasiga "Quyosh-Yer" sistemasining keltirilgan massasi kiradi. Agar Quyoshning massasi Yerning massasidan taxminan ikki ming marta kattaligini hisobga olsak, amaliy ahamiyatga ega bo'lgan masalalarda katta aniqlik bilan (6.3) ning maxrajida Yerning massasini hisobga olmasa ham bo'ladi. Bu holda keltirilgan massa Yerning massasiga teng bo'lib qoladi. Bu holda masala bamisoli Yerning qo'zg'almas nuqta (Quyosh) atrofidagi harakati masalasiga aylanadi. Yer Quyosh atrofida aylanadi degan ibora shu bilan bog'langan.

Endi boshqa masalani ko'rib chiqamiz. Stol ustida vaznsiz prujina orqali birlashtirilgan ikki jismning harakatini o'rganamiz (6.1-rasm). Bunda jismlarga elastiklik kuchi $\mathbf{F}_{12}$ bilan bir qatorda og'irlik va tayanchning reaksiya kuchlari ta'sir qiladi. Oxirgi ikkita kuch bir-birini muvozanatga keltiradi va harakatga ta'sir qilmaydi. Shu sababli, agar ishqalanish kuchini yo'q desak, jismlarning gorizontal tekislikdagi nisbiy harakati masalasi berk sistemalarning harakat qonunlariga bo'ysunadi, demak, bu masala 4-bobda ko'rilgan bitta moddiy nuqtaning harakati qonunini o'rganishga olib kelindi. Bu yerda "moddiy nuqta" ning massasi keltirilgan massaga teng. Masalan, ikkita bir xil massali ikki jism tebranishini ko'radigan bo'lsak, μ keltirilgan massa (6.3) ga muvofiq $m/2$ ga teng bo'ladi. Bu holda hisoblashlarda ikki jismning tebranish chastotalarining o'rniga bizga ma'lum bo'lgan, (4.18) ifoda bilan aniqlangan, prujina bilan devorga ilingan bitta jismning tebranish chastotasidan foydalansak bo'ladi, ya'ni

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{2k}{m}},$$

Shunday qilib, ko'rilayotgan masalada tebranish chastotasi bitta jismning tebranish chastotasidan $\sqrt{2}$ marta katta ekan.

6.2 Moddiy nuqtalar sistemasining massa markazi

Moddiy nuqtalar yoki makroskopik jism mexanikasini o'rganishda muhim bo'lgan yana bir tushunchani kiritamiz. Agar (6.1) sistemadagi tenglamalarni ayirmasdan qo'shadigan bo'lsak, shunchaki, impulsning saqlanish qonuni hosil bo'ladi:

$$\frac{d}{dt}(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2) = 0.$$

Bu ifodani qandaydir $\mathbf{V}_{im}$ tezlikning o'zgarmaslik qonuni sifatida yozish mumkin:

$$\mathbf{V}_{im} \equiv \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \text{const}. \tag{6.4}$$

(6.4) ifoda orqali aniqlangan tezlik bilan harakatlanuvchi sanoq sistemasiga o'tamiz. Bunda 1- va 2- moddiy nuqtalarning tezliklari quyidagicha almashadi:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1' &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{V}_{im} = m_2\frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}, \\ \mathbf{v}_2' &= \mathbf{v}_2 - \mathbf{V}_{im} = m_1\frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{m_1 + m_2}, \end{aligned} \tag{6.5}$$

ya'ni ular yangi sanoq sistemasida harakatning nisbiy tezligi orqali aniqlanar ekan. $\mathbf{V}_{im}$ tezlikni qandaydir nuqtaning $\mathbf{R}_{im}$ radius-vektori bilan bog'laymiz:

$$\mathbf{V}_{im} \equiv \frac{d\mathbf{R}_{im}}{dt}, \quad \mathbf{R}_{im} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \tag{6.6}$$

Bunday formula bilan aniqlangan kattalik maktab fizika kursidan ma'lum bo'lgan og'irlik markazining ta'rifi bilan mos tushadi. Buni isbotlash uchun koordinata boshini $\mathbf{R}_{im}$ nuqtaga ko'chiramiz. U holda (6.5) ga o'xshash amallarni bajarib quyidagi formulalarni olamiz:

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_{im} = m_2\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2},$$

$$\mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_{im} = m_1\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{m_1 + m_2},$$

Bu ifodalardan $m_1\mathbf{r}_1' = -m_2\mathbf{r}_2'$ ekanligi kelib chiqadi. (og'irlik markazi jism massaning "yelkaga" ko'paytmasi bilan aniqlanadi). Ammo (6.4) va (6.6) ta'riflar aniq va universaldir, shu sababli ularni istalgan sondagi moddiy nuqtalar, demak, makroskopik jism uchun ham umumlashtirish mumkin. Bu nuqtani mexanikada – umuman fizikada ***massa markazi*** yoki ***inersiya markazi*** deb atash qabul qilingan.

Biror bir inersial sanoq sistemasida massalari $m_1, m_2, ..., m_N$ bo'lgan o'zaro ta'sirlashuvchi moddiy nuqtalarning vaziyati har bir vaqt momentida $\mathbf{r}_1(t). \mathbf{r}_2(t), ..., \mathbf{r}_N(t)$ radius-vektorlar orqali berilgan bo'lsin. U holda shu moddiy nuqtalar sistemasining massa markazi deb har birining radius-vektori va massasi orqali aniqlanuvchi quyidagi kattalikka aytiladi:

$$\mathbf{R}_{im}(t) = \frac{m_1\mathbf{r}_1(t) + m_2\mathbf{r}_2(t) + ... + m_N\mathbf{r}_N(t)}{m_1 + m_2 + ...m_N}. \tag{6.7}$$

Shuni aytish lozimki, sistemaning massa markazi moddiy nuqtalarning birortasining fazodagi vaziyati bilan mos tushishi shart emas, tasodifan mos kelib qolishi mumkin. (6.7) tenglikning har ikkala tomonidan vaqt bo'yicha hosila olamiz. Bunda radius-vektorning vaqt bo'yicha hosilasi tezlik ekanligini inobatga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\mathbf{V}_{im}(t) = \frac{\{m_1\mathbf{v}_1(t) + m_2\mathbf{v}_2(t) + ... + m_N\mathbf{v}_N(t)\}}{m_1 + m_2 + ...m_N}, \tag{6.8}$$

bu yerda $\mathbf{V}_{im}$ – massa markazining, $\mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t), ..., \mathbf{v}_N(t)$ esa moddiy nuqtalarning tezliklari. (6.8) ifodada $m_1\mathbf{v}_1(t)$ birinchi, $m_2\mathbf{v}_2(t)$ ikkinchi va hokazolar moddiy nuqtalarning impulslari. Shunday qilib, (6.8) ifodaning o'ng tomonidagi figurali qavsdagi yig'indi moddiy nuqtalar sistemasining to'liq impulsiga teng. Demak, (6.8) tenglikni quyidagi ko'rinishda qayta yozish mumkin:

$$\mathbf{P} = (m_1 + m_2 + ... + m_N)\mathbf{V}_{im} = M\mathbf{V}_{im}, \tag{6.9}$$

Bundan berk sistemani tashkil qiluvchi moddiy nuqtalar sistemasining massa markazi tinch turgan sanoq sistemada uning to'liq impuls $\mathbf{P} = 0$ bo'lishi kelib chiqadi.

Agar bizni moddiy nuqtalarning bir-biriga nisbatan harakati qiziqtirmasdan, uning bir butun holdagi harakati qiziqtirsa, sistemani uning massa markaziga joylashtirilgan bitta moddiy nuqta bilan almashtirish mumkin. Bu holda moddiy nuqtaning impulsi $\mathbf{P}$, tezligi $\mathbf{V}_{im}$ va massasi esa sistemaning to'liq massasiga teng deb olish kerak. Massa matematik nuqtai nazardan impuls bilan tezlikni bog'lovchi tenglikda proporsionallik koeffitsienti ekanligini nazarda tutsak, (6.9) tenglikdagi qavsda turgan kattalik sistemaning to'liq massasi M bo'ladi:

$$M = m_1 + m_2 + ... + m_N, \tag{6.10}$$

ya'ni moddiy nuqtalar massalarining yig'indisi uning to'liq massasiga teng ekan. Murakkab jismning massasi (6.10) tenglikka binoan, uning qismlarining massalarining yig'indisiga teng bo'ladi deyish odatiy va ravshandek tuyuladi. Haqiqatda esa masala umuman boshqacha bo'lishini relativistik mexanika ko'rsatadi.[1] Yorug'lik tezligidan ancha kichik tezliklarda (6.10) ***massaning saqlanish qonunini*** beradi.

Tashqi kuchlar bo'lmaganda, ya'ni berk sistema uchun, uning barcha qismlari impulslarining yig'indisi vaqtga bog'liq bo'lmaydi, Bu holda (6.9) dan berk sistemaning massa markazi harakatining muhim xossasi kelib chiqadi:

$$\mathbf{V}_{im} = \text{const},$$

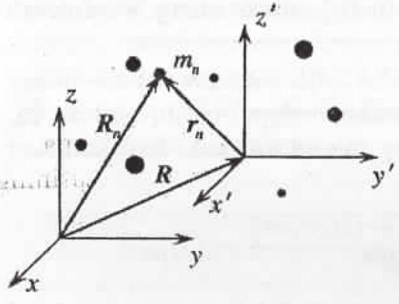
ya'ni ***moddiy nuqtalar berk sistemasining massa markazi tinch turadi yoki to'g'ri chiziqli tekis harakatda bo'ladi***, shu vaqtda sistemadagi moddiy nuqtalarning har biri ixtiyoriy va murakkab harakatda bo'lishi mumkin. Bu tasdiq ba'zan, ***massa markazining harakati to'g'risidagi teorema deb ataladi***. Jismning yoki moddiy nuqtalar sistemasining massa markazi ***inersiya*** markazi deb ham yuritiladi.

Kinetik energiyaning muhim xossasini isbotlaymiz: Moddiy nuqtalar sistemasining kinetik energiyasi ikki qismdan – ***sistemaning bir butun holdagi harakat kinetik energiyasi*** (massasi sistemaning to'liq massasiga teng bo'lgan va inersiya markazida joylashgan bitta moddiy nuqtaning kinetik energiyasi) va ***sistemani tashkil etuvchi moddiy nuqtalarning massa markaziga nisbatan harakat kinetik energiyasidan iborat bo'ladi***:

$$T = \frac{1}{2}MV_{im}^2 + T' = \frac{1}{2}MV_{im}^2 + \sum_{n=1}^{N}\frac{m_n v_n^2}{2}, \tag{6.11}$$

[1]Yorug'lik tezligiga yaqin tezliklar bilan harakatlanuvchi zarralar mexanikasi – relativistik mexanika deyiladi. Bundan farqli o'laroq, biz o'rganayotgan mexanika norelativistik mexanika deyiladi.

bu yerda $M = m_1 + m_2 + ... + m_N$, $\mathbf{V}_{im}$ - massa markazining tezligi, $\mathbf{v}_n$ - n-moddiy nuqtaning inersiya markazi bilan harakatlanayotgan sanoq sistemaga nisbatan harakat tezligi. Bunday sanoq sistemasi odatda massa markazi, inersiya markazi yoki qisqacha "*im*-sistema" deb ataladi. Masala qo'yilgan sanoq sistemasi "*im*-sistema" bilan mos tushmasa laboratoriya sanoq sistemasi yoki qisqacha "*l*-sistema" deyiladi.



6.3-rasm.

(6.11) munosabatni isbotlash uchun avval ikki sanoq sistemalarida kinetik energiyalarni bog'lovchi umumiy munosabatni olish kerak (6.3-rasm). Eski sanoq sistemasidagi $\mathbf{r}_n$ koordinata va $\mathbf{v}_n$ tezlik hamda yangi sanoq sistemasidagi $\mathbf{r}'_n$, $\mathbf{v}'_n$ uchun Galilei almashtirishlarini yozamiz:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}'_n + \mathbf{R}, \quad \mathbf{v}_n = \mathbf{v}'_n + \mathbf{V}.$$

bu yerda $\mathbf{R}$ - eski sanoq sistemasidan yangi sanoq sistemaga o'tish radius-vektori (6.3-rasmga q.), $\mathbf{V}$ yangi sanoq sistemasining eskiga nisbatan tezligi. Bu holda eski sanoq sistemasidagi kinetik energiyani Galilei almashtirishlari orqali quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} m_n v_n^2 \equiv \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} m_n(\mathbf{v}_n\mathbf{v}_n)^2 =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} m_n(\mathbf{v}'_n + \mathbf{V})^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} m_n(v_n'^2 + 2\mathbf{v}'_n\mathbf{V} + \mathbf{V}^2). \qquad (6.12)$$

Bu ifodaning o'ng tomonini uchta had ko'rinishida yozamiz:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} m_n v_n'^2 + \mathbf{V}\sum_{n=1}^{N} m_n \mathbf{v}_n'^2 + \frac{V^2}{2}\sum_{n=1}^{N} m_n \equiv$$

$$T' + \mathbf{V}\mathbf{P}' + \frac{1}{2}MV^2, \qquad (6.13)$$

bu yerda $\mathbf{P}'$ – moddiy nuqtalar sistemasining yangi sanoq sistemasiga nisbatan hisoblangan to'liq impulsi. (6.13) munosabat ***Kenig teoremasi*** deb yuritiladi. Agar yangi sanoq sistemalari *im*-sistema bilan mos tushsa, to'liq impuls nolga teng va $\mathbf{V} = V_{im}$, bunda (6.13) ifoda (6.11) ga o'tadi. Shunday qilib, teorema isbotlandi.

Ushbu paragrafning oxirida massa markazining ta'rifidan kelib chiqadigan ikkita xossa ustida to'xtalib o'tamiz. Birinchidan, (6.7) da zarralarni ixtiyoriy holda guruhlarga ajratish mumkin, masalan:

$$\mathbf{R}_{im} = \frac{m_1\mathbf{r}_1(t) + m_2\mathbf{r}_2(t) + ... + m_N\mathbf{r}_N(t)}{m_1 + m_2 + ...m_N} =$$

$$\frac{(m_1+m_2)\dfrac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} + (m_3+m_4)\dfrac{m_3\mathbf{r}_3 + m_4\mathbf{r}_4}{m_3+m_4} + ...}{(m_1 + m_2 + ... + m_N)}.$$

Bu ifodadan istagan makroskopik jismning massa markazini moddiy nuqtalar sistemasining massa markazini qanday aniqlagan bo'lsak, shunday aniqlash mumkinligi ko'rinib turibdi. Bunda har bir jism o'zining massa markazi bilan ishtirok etadi.

Ikkinchidan, jism uzluksiz muhit deb qaralganda, massa markazini aniqlashda yig'indi integral bilan almashtiriladi:

$$\mathbf{R}_{im} = \left(\int_V \mathbf{r}\rho(\mathbf{r})dV \Big/ \int_V \rho(\mathbf{r})dV\right). \qquad (6.14)$$

Bu yerda $\rho(\mathbf{r})$ – jism moddasining zichligi.

6.3 Potensial energiya. Energiyaning saqlanish qonuni

Oldingi bobda yakka moddiy nuqtaning berilgan o'zgarmas kuch maydonidagi harakati misolida kinetik va potensial energiya tushunchalari bilan tanishib chiqdik. Endi murakkabroq harakat, berk sistemani tashkil qiluvchi o'zaro ta'sirlashuvchi ko'p sonli moddiy nuqtalar sistemasi uchun energiyaning saqlanish qonuni qanday ta'riflanishini ko'rib chiqamiz. Masalani yana nisbatan sodda sistema - o'zaro ta'sirlashuvchi ikki moddiy nuqtalardan tashkil topgan berk sistemani ko'rishdan boshlaymiz.

Zarralarning o'zaro ta'sirlashish potensial energiyasi faqat ular orasidagi $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ masofaning funksiyasi bo'lsin. Ushbu faraz juda muhim. Masalan, zaryadlangan zarralarning o'zaro ta'sir energiyasi umuman olganda, ular orasidagi masofadan tashqari tezliklariga ham bog'liq bo'ladi, ikki elektr dipolning ta'sir energiyasi esa ularning bir-biriga nisbatan fazoviy orientatsiyasiga ham bog'liq bo'ladi. Ko'rilayotgan yaqinlashishda ikki moddiy nuqta uchun harakat tenglamalarini biror bir inersial sanoq sistemasida yozamiz:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} &= \mathbf{F}_{12}(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) + \mathbf{F}_1(\mathbf{r}_1), \\ m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} &= \mathbf{F}_{21}(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) + \mathbf{F}_2(\mathbf{r}_2), \end{aligned} \tag{6.15}$$

bu yerda $\mathbf{r}_1(t)$ va $\mathbf{r}_2(t)$ – koordinata boshidan moddiy nuqtalarga o'tkazilgan radius-vektorlar, $\mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t)$ - ularning tezliklari, m_1 va m_2 - massalari, $\mathbf{F}_{12}$, $\mathbf{F}_{21}$ o'zaro ta'sirlashish kuchlari. Moddiy nuqtalarga $\mathbf{F}_{12}$ va $\mathbf{F}_{21}$ o'zaro ta'sir kuchlaridan tashqari $\mathbf{F}_1$ va $\mathbf{F}_2$ tashqi kuchlar ham ta'sir qilayotgan bo'lsin. Bu holda, ko'rilayotgan sistema berk bo'lmaydi.

(6.15) tenglamalar sistemasining birinchisini ikkinchisini cheksiz kichik ko'chishlarga skalyar tarzda ko'paytiramiz va hosil bo'lgan tenglamalarni hadlab qo'shamiz. Bunda, $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ ni hisobga olib quyidagini hosil qilamiz:

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} d\mathbf{r}_1 + m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} d\mathbf{r}_2 = \mathbf{F}_{12}(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) d\mathbf{r} + \mathbf{F}_1(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_2,$$

bu yerda $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_2 - d\mathbf{r}_1$, va, $d\mathbf{r}_1/dt = \mathbf{v}_1$, $d\mathbf{r}_2/dt = \mathbf{v}_2$ ekanligini inobatga olinsa, quyidagi kelib chiqadi:

$$d\left(\frac{m_1 \mathbf{v}_1^2}{2} + \frac{m_2 \mathbf{v}_2^2}{2}\right) = \mathbf{F}_{12}(r) d\mathbf{r} + \mathbf{F}_1(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_2. \tag{6.16}$$

(6.16) tenglamaning chap tomoni ikki zarraning kinetik energiyalarining orttirmasi, o'ng tomonidagi birinchi had o'zaro ta'sir kuchining, qolgan hadlar esa tashqi kuchlarning kichik ko'chishlarda bajargan ishi.

O'zaro ta'sir potensial energiyasini ta'riflaymiz: ***Bir-biridan r masofada turgan ikki zarraning potensial energiyasi $U_{12}(r)$ deb, ularni bir-biridan cheksiz masofaga uzoqlashtirishda o'zaro ta'sir kuchining bajargan ishiga aytiladi.*** Ya'ni

$$U_{12}(r) = A_{int}(r \to \infty). \tag{6.17}$$

Bu ta'rifdan foydalanib, (6.16) ifodani qayta yozamiz:

$$d(T + U_{12}(r)) = \mathbf{F}_1(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_2. \tag{6.18}$$

Agar tashqi kuchlar bo'lmasa, (6.18) ning o'ng tomoni nolga teng bo'ladi. Bu holda (6.18) dan berk sistema uchun

$$dE = d(T + U_{12}(r)) = 0 \tag{6.19}$$

kelib chiqadi. Bu yerda E orqali ikkita zarradan tashkil topgan sistemaning to'liq energiyasi belgilangan. Bu holda (6.19) dan ikki zarradan iborat bo'lgan berk sistemaning to'liq energiyasi harakat davomida o'zgarmas bo'lishi kelib chiqadi:

$$E = T + U_{12}(r) = \text{const}, \tag{6.20}$$

(6.20) ifodani keltirib chiqarishda ko'rilgan misol bu faqat bir xususiy hol ekanligini ta'kidlash lozim. Bu natijani boshqa berk sistemalar misolida ham olish mumkin. Ammo bu natijaning tatbiq qilish chegarasi ko'rilgan holdan ancha keng. (6.20) ga kirgan o'zgarmasning (invariant, harakat integrali) qiymati turlicha bo'lishi mumkin bo'lib, kinetik va o'zaro ta'sir energiyalarning qandaydir (masalan, boshlang'ich) vaqt momentidagi qiymati bilan aniqlanadi.

Shunday qilib, $U_{12}(r)$ potensial energiyaning aniq qiymatini (yoki r ga bog'lanishini) topish, berilgan $\mathbf{F}_{12}$ o'zaro ta'sirlashish kuchining bajargan A_{int} ishini hisoblashga keltirildi. Keyingi paragrafda misol tariqasida gravitatsiya kuchi uchun potensial energiyani hisoblab topamiz. (6.17) ifodada potesial energiyaning $r \to \infty$ qiymati aniqlik uchun kiritilgan. Yo'lning chekli qismida bajarilgan ishni hisoblashda, potensial energiyaning hisob boshi (o'zgarmas kuch maydonidagi (5-bob) kabi) qandaydir o'zgarmas qiymat aniqligida hisoblanadi. Agar moddiy nuqtalar orasidagi ta'sir potensial xarakteriga ega bo'lsa, bajarilgan ish yo'lga bog'liq bo'lmaydi. Bunda faqat boshlang'ich va oxirgi vaziyatlar muhim. Konservativ kuchlarning bajargan ishi shunday xossaga ega. Bu yerda o'zaro ta'sirda muhim bo'lgan markaziy kuchlarni misol sifatida ko'rsatish mumkin:

$$\mathbf{F}_{12} = F_{12}(r)\frac{\mathbf{r}}{r}. \qquad (6.21)$$

Bunda $\mathbf{r}/r$ yo'nalishni ko'rsatuvchi birlik vektor. (6.21) ko'rinishdagi ta'sirlashish qonuni umuman olganda hech qachon aniq to'g'ri bo'lmaydi, ammo amaliy ahamiyatga ega bo'lgan ko'p hollarda haqiqatga juda yaqin bo'ladi.

$U_{12}(r)$ o'zaro ta'sir potensial energiyasining 5-bobda so'z yuritilgan bitta moddiy nuqtaning kuch maydonidagi $U_{12}(\mathbf{r})$ potensial energiyasidan yana bir farqi bor. Orientatsiya koordinatalari rol o'ynamaganda o'zaro ta'sir potensial energiya faqat ta'sirlashuvchi zarralar orasidagi r masofaga bog'liq. Kuch maydonidagi zarraning potensial energiyasi albatta yo'nalishga bog'liq bo'ladi. Bunday farqni ko'rsatish uchun ikki moddiy nuqtaning ta'sirlashish potensial energiyasini - bundan keyin shunchaki ta'sirlashish energiyasi deb ataymiz.

Endi umumiy hol uchun - N ta ta'sirlashuvchi moddiy nuqtalardan tashkil topgan berk sistema uchun energiyaning saqlanish qonunini ta'riflaymiz. Bu ta'rif (6.20) ta'rifni N ta ta'sirlashuvchi moddiy nuqtalar sistemasi uchun umumlashtirishdan kelib chiqadi, chunonchi: ***harakatdagi N ta moddiy nuqtalardan tashkil topgan berk sistemaning to'liq energiyasi – barcha moddiy nuqtalarning kinetik energiyalari va ularning barchasining juft ta'sir potensial energiyalari yig'indisiga teng bo'lib, harakat davomida saqlanadi***:

$$E = \sum_l \frac{mv_l^2}{2} + \sum_{l>m} U_{lm} = \mathrm{const}, \qquad (6.22)$$

bu yerda l va m bo'yicha yig'indi 1 dan N gacha olinadi, ikkinchi yig'indida $l > m$ shart bir juft zarralar ta'sirining energiyaga hissasi

ikki marta hisobga olinmasligini ta'minlaydi. Bundan tashqari, (6.22) da $U(|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_m|) = U_{lm}$ belgilash kiritish bilan qisqa yozuvga o'tdik. Masalan, uchta moddiy nuqtadan iborat bo'lgan sistema uchun energiyaning saqlanish qonuni (6.22) ga asosan quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$E = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{mv_3^2}{2} + U_{12} + U_{23} + U_{13} = \mathrm{const}.$$

Ikkita moddiy nuqta uchun energiyaning saqlanish qonuni (6.20) ni umumlashtirish natijasi bo'lgan (6.22) ifoda qanchalik tabiiy ko'rinmasin, uning tatbiq qilinish doirasi muhim qo'shimcha shart bilan chegaralangan. Ya'ni (6.20) ifodani yozishda ***superpozitsiya prinsipi*** o'rinli deb hisoblangan. Agar o'zaro ta'sir energiyasi potensial xarakterga ega bo'lsa, bu shart uning ***additivligini*** anglatadi:

$$\mathbf{F}_l = \sum_{l\neq m} \mathbf{F}_{lm} \Rightarrow U = \sum_{l\neq m} U_{lm}. \qquad (6.23)$$

Additivlik shartini buzilishi ko'p uchraydi. Masalan, yadroda o'zaro ta'sir nuklonlarning juft-juft ta'sirlarning yig'indisiga teng emas. Bunda, uch va ko'p zarrali ta'sirlarni inobatga olish zarurati paydo bo'ladi. Ikkinchi misol, gaz fazadan suyuq fazaga o'tish uch zarrali ta'sirsiz amalga oshmaydi. Suyuq fazadan qattiq, ya'ni kristall holatga o'tishda atomlarning kollektiv ta'siri muhim rol o'ynaydi. Klassik mexanika doirasida kosmik yoki mikro masshtablarga o'tilmasa yoki uzluksiz muhitlardagi nochiziqli effektlar inobatga olinmasa, (6.22) ko'rinishdagi energiyaning saqlanish qonunining tatbiq qilish doirasi juda keng. Eslatib o'tamiz, ikki zarra misolida, to'liq energiyaning cheksiz kichik o'zgarishi tashqi kuchlarning cheksiz kichik bajargan ishiga teng ekanligini ko'rsatgan edik. Buni ixtiyoriy sonli moddiy nuqtalar sistemasi uchun umumlashtirish mumkin:

$$dE = \delta A_{tash}.$$

Buni energiyaning chekli o'zgarishi uchun tatbiq qilsak, ***moddiy nuqtalar sistemasining to'liq energiyaning o'zgarishi***

tashqi kuchlar bajargan ishga teng bo'lishini ko'ramiz. Bunda sistemadagi barcha zarralarning potensial energiyasi hamda *im*-sistemadagi kinetik energiyalarni birgalikda ***sistemaning ichki energiyasi*** deb talqin qilish, shu bilan zarralar sistemasini bitta makroskopik jism deb qarash mumkin bo'ladi. Bu holat masalalarni yechishda ko'pincha qulayliklarga olib keladi.

Kinetik energiya to'g'risidagi (6.13) Kenig teoremasidan foydalanib N ta moddiy nuqtalar sistemasining to'liq energiyasini istalgan inersial sanoq sistemasida yozish mumkin:

$$E = T + \sum_{l>k} U_{lk} = \frac{M\mathbf{V}_{im}^2}{2} + \sum_{l=1}^{N} \frac{m_l \mathbf{v}_l^2}{2} + \sum_{l>k} U_{lk} \equiv \frac{M\mathbf{V}_{im}^2}{2} + U,$$

bu yerda U bilan ichki energiya belgilandi:

$$U = \sum_{l=1}^{N} \frac{m_l \mathbf{v}_l^2}{2} + \sum_{l>k} U_{lk}.$$

$\mathbf{v}_l$ zarralarning sistemaning massa markaziga nisbatan tezligi bo'lganligi uchun, ichki energiya sistemaning bir butun holdagi harakat tezligiga bog'liq bo'lmaydi. U faqat sistemaga tegishli ichki xossalar – ichki erkinlik darajasi bilan aniqlanadi. Bu masala bilan fizika kursining keyingi qismlarida tanishamiz.

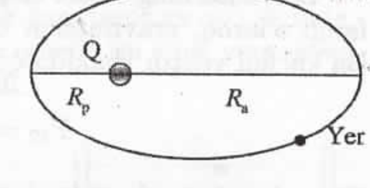
Agar sistema bir butun holda tinch ($\mathbf{V}_{im} = 0$) turgan bo'lsa, $E = U$ bo'ladi va sistemaning hamma energiyasi ichki energiyaga teng bo'ladi.

6.4 Butun olam tortilish qonuni

Astronomik kuzatishlardan, xususan Kopernik davridan ma'lumki, Yer va boshqa planetalar Quyosh atrofida egri chiziqli berk orbitalar bo'ylab aylanadi. Demak, bu jismlar erkin emas, ularga doimo qandaydir kuchlar ta'sir qilib turadi. Ularning orbitalarining ko'rinishi bir xil bo'lishi, boshqa planetalarning ta'siri juda kichik va Quyoshning ta'siri asosiy bo'lishidan darak beradi. Newton uchinchi qonunidan Quyosh qanday kuch bilan Yerni tortsa,

Yer ham Quyoshga shunday kuch bilan ta'sir qilishi kelib chiqadi. Ammo harakat qonunlarini o'rganishda Quyosh bilan bog'langan sanoq sistemasida ishlash qulay, chunki $M_Q \gg M_{Yer}$ bo'lganligi sababli keltirilgan massa (6.3) yaxshi aniqlikda Yerning massasiga teng bo'ladi, massa markazi esa ((6.6) ga q.) deyarli Quyosh markazi bilan mos tushadi.

Yerni Quyosh atrofida aylanishga majbur qiluvchi kuchning masofaga bog'lanishini aniqlashni maqsad qilib olaylik. Buning uchun masalan, Yerning Quyoshdan eng katta masofaga uzoqlashgan nuqtasida (apogeyda) markazga intilma tezlanishni topish mumkin. Newton davrida orbitalar to'g'risidagi ma'lumotlar, ya'ni apogeyda R_a va perigeyda R_p Quyoshdan Yergacha bo'lgan masofa hamda trayektoriyaning turli nuqtalarida Yerning tezligi yetarlicha yaxshi ma'lum bo'lgan. Bu ma'lumotlar Newtonga apogey va perigeyda Yerning tezlanishini aniqlash uchun yetarli bo'lgan. Bu nuqtalarda kuch 6.4-rasmda ko'rsatilgandek bir to'g'ri chiziq bo'ylab, ya'ni ellipsning katta yarim o'qi bo'ylab yo'nalgan. Natijada bu nuqtalarda Yerga ta'sir qiluvchi kuchlarning nisbati masofalar kvadratlarining teskari nisbatiga teng bo'lib chiqadi:



6.4-rasm.

$$\frac{F_a}{F_p} = \frac{R_p^2}{R_a^2}. \tag{6.24}$$

Orbitaning boshqa nuqtalarida ham Quyoshning Yerni tortish kuchi masofaga bog'lanishi shunday bo'lishini tabiiy holda taxmin qilish mumkin. Bunday taxmin Kepler qonunlari bilan juda yaxshi mos tushishi keyingi bobda ko'riladi. Newton bu mulohazalar asosida tortishish kuchining masofaga bunday bog'lanishi nafaqat Quyosh va Yer uchun, balki o'lchamlari ular orasidagi masofaga nisbatan hisobga olmas darajada kichik bo'lgan barcha jismlar bir-biriga shunday qonuniyat bilan tortishadilar degan dohiyona fikrni ilgari suradi: ***ikki moddiy nuqtaning bir-biriga tortishish kuchi, ularning massalarining ko'paytmasiga to'g'ri, orasi-***

dagi masofaning kvadratiga esa teskari proporsional:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad (6.25)$$

Bunda G - proporsionallik koeffitsienti bo'lib, ***butun olam tortishish doimiysi*** yoki gravitatsion doimiy deb ataladi. Uning son qiymati birliklar sistemasiga bog'liq, xususan Xalqaro birliklar sistemasida (SI)

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}.$$

Yuqorida ta'riflangan qonun ***butun olam tortishish qonuni***, o'zaro ta'sir esa ***gravitatsion ta'sir*** deb ataladi.

Zaryadlarning o'zaro elektrostatik ta'siridan (Coulomb qonuni) farqli o'laroq, gravitatsion kuch (6.25) doimo tortishish kuchidir. Bu kuchni vektor shaklda quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\mathbf{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}. \qquad (6.26)$$

bu yerda minus ishora kuch tortish xarakterga ekanligini anglatadi.

Butun olam tortishish qonuni (6.25) va (6.26) ta'sirlashuvchi ikkita moddiy nuqta, ya'ni jismlarning o'lchamlari ular orasidagi masofa nisbatan hisobga olmas darajasida kichik bo'lgan jismlar uchun yozilgan (xususan, bunday holat Quyosh va Yer misolida o'rinli). Bu formulalarga asosan Yerning jismni tortish kuchi uning sirtiga yaqin masofalarda juda yuqori aniqlikda o'zgarmas deyish mumkin. Masalan, massasi m bo'lgan jism Yer sirtidan uning radiusi R_{Yer} dan ancha kichik bo'lgan h ($h \ll R_{Yer}$) balandlikda turgan bo'lsin. Jismga shu balandlikda ta'sir qilayotgan va Yer markaziga yo'nalgan kuch

$$F = G\frac{mM_{Yer}}{(R_{Yer}+h)^2} \simeq m \cdot G\frac{M_{Yer}}{R_{Yer}^2} = mg,$$

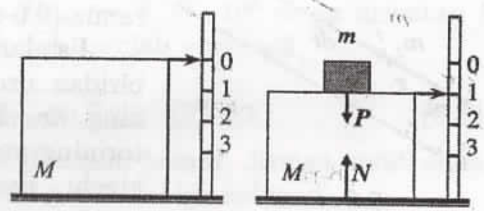
bu yerda M_{Yer} – Yer massasi, $g = GM_{Yer}/R_{Yer}^2$ – **erkin tushish tezlanishi** deyiladi. Bu kattalik h/R_{Yer} aniqlikda o'zgarmasdir. Bundan Yer sirtiga yaqin balandliklarda har qanday jism Yer ta'sirida g tezlanish bilan Yer sirti tomon harakat qilishi kelib chiqadi.

$M_{Yer} = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg, $R_{Yer} = 6,38 \cdot 10^6$ m , ekanligini hisobga olsak, erkin tushish tezlanishi uchun maktab kursidan yaxshi ma'lum bo'lgan qiymat $g = 9,8\mathrm{m/s}^2$ ni topamiz. Bu tajribalarda qiymat juda yuqori aniqlikda tasdiqlangan. Har qanday jismning Yerga tortilish kuchi $F = mg$, ***og'irlik kuchi*** deyiladi.

Endi "jismning og'irligi" tushunchasiga aniqlik kiritish qoldi. Ko'pincha tortish jarayonida jismni tarozi deb ataluvchi moslamaning pallasiga qo'yilganda uning shkalasida qandaydir birliklarda (masalan, kilogrammlarda) jism og'irligining qiymati paydo bo'ladi. Shunday qilib, jism og'irligi - tarozi pallasiga tortilayotgan jismning ta'sir kuchi ekan.

Tarozi sxematik tarzda 6.5-rasmda qattiq jism ko'rinishida tasvirlangan. Tarozi pallasi holatining o'zgarishini unga mahkamlangan strelka ko'rsatadi. Pallaga hech narsa qo'yilmaganda strelka nolni ko'rsatadi (6.5a-rasm). m massali jism taroziga qo'yilganda, u qandaydir P kuch bilan pallaga ta'sir qiladi. Bu kuch yuqoridagi ta'rifga binoan jismning og'irligi bo'ladi.

Boshida tarozi jism bilan birga Yerga nisbatan tinch turgan bo'lsin. "Tarozi + jism" sistemasida ta'sir qilayotgan kuchlarning vertikal tashkil etuvchilari uchun Newton ikkinchi qonuniga asosan quyidagi tenglikni yozish mumkin:



a) b)

6.5-rasm.

$$N - Mg - P = 0; \Rightarrow N - (m+M)g = 0,$$

bu yerda N – tarozi turgan tayanchning reaksiya kuchi. Bundan tarozi tinch turganda jismning og'irligi og'irlik kuchiga teng ekanligi kelib chiqadi, ya'ni $P = mg$.

Endi jism tarozi bilan tik yuqori yoki pastga a tezlanish bilan harakat qilayotgan bo'lsin. Bu hol uchun kuchlar muvozanatini yozamiz:

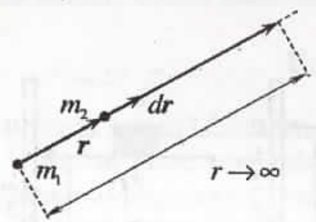
$$N - Mg - P = \pm(m+M)a \Rightarrow N - (m+M)g = \pm(m+M)a,$$

bu yerda "+" ishora yuqoriga, "–" ishora esa pastga harakatga mos keladi. Bu holda jismning og'irligi $P = m(g \pm a)$, ya'ni "tarozi + jism" birga tezlanish bilan yuqoriga harakat qilganda jismning og'irligi ortadi, shunday harakat pastga bo'lganda esa kamayadi. Agar $a = g$ (erkin tushish) bo'lsa, jismning og'irligi nolga teng bo'ladi. Bunday holat - ***vaznsizlik holati*** deb ataladi.

Butun olam tortish qonunini aniqlovchi (6.25), (6.26) ifodalarning funksional bog'lanishi, gravitatsiya kuchi shubhasiz konservativ kuch ekanligidan dalolat beradi. Massalari m_1 va m_2 bo'lgan, bir-biridan r masofada turgan ikki moddiy nuqtaning ta'sirlashish potensial energiyasini hisoblaymiz. (6.17) ifodaga muvofiq (6.26) dan quyidagini olamiz:

$$U_{12}(r) = A_{int}(r \to \infty) = \int_r^\infty \mathbf{F}_{12}(r)d\mathbf{r} = -\int_r^\infty G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}d\mathbf{r}}{r}. \quad (6.27)$$

Hisoblashlar qulay bo'lishi uchun ikkinchi jismni birinchi jismdan ular yotgan to'g'ri chiziq bo'ylab uzoqlashtiramiz (6.6-rasm).



6.6-rasm.

Jismlarni bunday yo'l bilan bir-biridan uzoqlashtirishda ikkinchi jismning dr cheksiz kichik ko'chish vektorining yo'nalishi birinchi jismdan ikkinchi jismga yo'naltirilgan $\mathbf{r}$ vektorning yo'nalishi bilan mos tushadi. Yo'nalishni bunday tanlash natijasida $\mathbf{r}d\mathbf{r} = rdr$ kelib chiqadi. Buni (6.27) ga qo'yib, integralni hisoblaymiz:

$$U_{12}(r) = -Gm_1 m_2 \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = Gm_1 m_2 \frac{1}{r}|_r^\infty = -G\frac{m_1 m_2}{r}. \quad (6.28)$$

Shunday qilib, massalari m_1 va m_2 bo'lgan, bir-biridan r masofada turgan ikki moddiy nuqtaning gravitatsion ta'sirlashish potensial energiyasi quyidagi ifoda bilan aniqlanishini topdik:

$$U_{12}^{gr} = U_{21}^{gr} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}}. \quad (6.29)$$

Jismga qanday boshlang'ich tezlik berilganda, u Yer atrofida berk orbita bo'ylab harakat qiladi, ya'ni Yerning sun'iy yo'ldoshi bo'lib qoladi degan, savolni ko'rib chiqamiz. Shunga o'xshash jismga Yerda qanday tezlik berilganda Yer tortish kuchini yengib uning ta'sir doirasidan chiqib keta oladi. Bunda jism Quyosh atrofida berk orbita bo'ylab harakat qiladi yoki qanday boshlang'ich tezlik berilganda jism Quyosh sistemasini tark eta oladi degan savollarni berish mumkin. Bu tezliklar mos ravishda birinchi, ikkinchi va uchinchi kosmik tezliklar deb ataladi.

Avval birinchi V_1 kosmik tezlikni aniqlaymiz. Yer sirti yaqinida, $h \ll R_{Yer}$ balandliklarda m massali jismga ta'sir etuvchi tortishish kuchi yaxshi aniqlikda mg ga teng. Soddalik uchun sun'iy yo'ldoshning orbitasi aylanadan iborat bo'lsin deb qaraymiz. Bu holda yo'ldoshning harakat tenglamasi (Newton ikkinchi qonuni) quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$m\frac{V_1^2}{R_{Yer} + h} = mg.$$

Bu ifodada Yerning radiusi $R_{Yer} = 6,38 \cdot 10^6$ m ga nisbatan h balandlikni yetarlicha kichik deb tashlab yuborsak,

$$V_1 = \sqrt{gR_{Yer}} \approx 7,93 \cdot 10^3 \text{m/s}. \quad (6.30)$$

Bu ***birinchi kosmik tezlik*** ifodasini beradi. Jismga xuddi shunday tezlik berilganda, u Yerning yo'ldoshiga aylanadi.

Ikkinchi kosmik tezlikni energiyaning saqlanish qonuni (6.20) va gravitatsion potensial energiya ifodasi (6.29) dan foydalanib topish mumkin. Yer va kosmik kemani berk sistema deb qaraymiz, bunda Quyosh va boshqa planetalar ta'sirini kichik deb e'tiborga olmaymiz. Bizga ma'lumki, ikki ta'sirlashuvchi jismlar harakatini o'sha kuch ta'siridagi massasi keltirilgan massa μ ga teng bo'lgan bir jism harakati masalasiga keltirish mumkin. Bizning misolda

$$\mu = \frac{mM_{Yer}}{m + M_{Yer}},$$

bu yerda M_{Yer} – Yer massasi, m – kosmik kema massasi. Modomiki, Yerning massasi kema massasidan juda katta ekan, $\mu = m$

deb olish mumkin. Bu Yerning harakatiga kemaning ta'siri yo'q degani, ya'ni biz ko'rayotgan masalada bamisoli Yer tinch turibdi va uning o'zgarmas gravitatsiya kuch maydonida kema harakatlanadi. Jismni Yerning tortish kuchidan "ozod" qilish, unga cheksizga ketishga imkon berildi deganidir. Boshqacha aytganda, uning potensial energiyasi U_{12}^{gr}. Yer sirtida jismga berilgan minimum kinetik energiya uning cheksiz uzoqlashgandagi kinetik energiyasiga mos bo'lishi kerak. Bunda energiyaning saqlanish qonuniga asosan quyidagi tenglamani olamiz:

$$\frac{mV_2^2}{2} - G\frac{mM_{Yer}}{R_{Yer}} = 0. \tag{6.31}$$

Natijada ikkinchi kosmik tezlik

$$V_2 = \sqrt{\frac{2GmM_{Yer}}{R_{Yer}}} = \sqrt{2gR_{Yer}} \approx 11,2\cdot 10^3 \mathrm{m/s}. \tag{6.32}$$

Buni (6.30) bilan taqqoslab ikkinchi kosmik tezlik birinchi kosmik tezlikdan $\sqrt{2}$ marta katta ekanligini ko'ramiz.

Quyosh sistemasini jism butunlay tark etishi uchun, u nafaqat Yerning tortish kuchini, balki Quyoshning tortish kuchini ham yengib o'tishi kerak. Buning uchun zarur bo'lgan tezlik V_3 raketani qaysi tomonga qarab uchirishga bog'liq, chunki Yerning orbitadagi tezligi $V_{Yer} = 30\cdot 10^3$ m/s, qidirilayotgan tezlik tartibidadir. Raketani Yerning orbitadagi harakat yo'nalishida uchirilganda bu tezlik eng kichik bo'lib, $V_3 \approx 16,7\cdot 10^3$ m/s ga yaqin bo'ladi. Bu tezlik ***uchinchi kosmik tezlik*** deb ataladi.

Butun olam tortishish qonuni (6.25) ni turli masalalarga tatbiq qilishda, biz qay darajada haq ekanligimiz to'g'risidagi savolni ochiq qoldirib keldik. Bunday savolning qo'yilishi tabiiy ravishda to'g'ri, chunki real masalalarda nuqtaviy bo'lmagan jismlar ishtirok etadi. Na (6.30), na (6.31) ifodalarning chap tomonida Yerni nuqtaviy deb bo'lmaydi. Bunday hollarda jismning real o'lchamlari hisobga olinsa, (6.25) butun olam tortishish qonuni qanday ko'rinishga ega bo'ladi? Jismda massa taqsimoti sferik simmetriyaga ega bo'lgan jismlarni, ularga "tashqaridan qaraganda" hech qanday

izohsiz moddiy nuqta deb qarab keldik. Haqiqatan ham shunday ekanligini isbotlash mumkin.

Shunday qilib, Yerning real o'lchamlarini inobatga olib, uning markazidan r masofada turgan jism bilan Yer orasidagi ta'sirlashish kuchining kattaligi va yo'nalishi qanday bo'ladi degan savolga javob topish kerak. Bu masalani yechishni soddalashtirish maqsadida ikkita taxmin qilamiz. Birinchidan, garchi Yer qutblarda bir oz siqilgan bo'lsada, uni aniq sferik deb qaraymiz. Ikkinchidan, modda zichligi Yerning hamma joyida bir xil bo'lmasada uni bir xil deb faraz qilamiz. Jismning og'irligi qutbda va ekvatorda o'lchangan, farqi foizning ulushlarini tashkil qilishi, har ikkala taxmin juda yuqori aniqlikda bajariladi deyish mumkinligini ko'rsatadi. Buning ma'nosi shuki, bizning masala moddiy nuqta bilan bir jinsli shar o'rtasidagi tortishish kuchini aniqlashga keltirildi. Bu masalani yechishda masalaning sferik simmetriyasidan foydalanish mumkin. Bunda uncha murakkab bo'lmagan uch karrali integralni hisoblash bilan bog'liq bo'lgan uzundan uzoq hisoblashlarni amalga oshirib, Yer bilan moddiy nuqta o'rtasidagi gravitatsiya tortishish kuchi moduli va yo'nalishi (6.25) va (6.26) ifodalar bilan to'la mos kelishini ko'rish mumkin. Shunday qilib, ***sharning moddiy nuqtaga ta'siri, shar markaziga joylashtirilgan, massasi uning massasiga teng bo'lgan moddiy nuqtaning ta'siriga ekvivalent ekan.***

6.5 Elastik va noelastik to'qnashishlar

Ko'rilayotgan masalaning fizik mohiyatiga qarab sochilish, to'qnashish, parchalanish deb nom olgan hodisalarni o'rganishni boshlaymiz. Bunday jarayonlar asosan mikro dunyo fizikasi (sochilish - elementar zarralar fizikasida, balki, eng asosiy masaladir) uchun muhim. To'qnashish, fizik kinetikada, ya'ni molekular fizikada, plazma va eritmalar fizikasida va boshqa sohalarda asosiy o'rganiladigan mavzu hisoblanadi. Osmon mexanikasi masalalarida gap planetalar yoki yulduzlar sistemasi, yoki asteroidlar, kometalar, portlash natijasida paydo bo'ladigan bo'laklar haqida borarkan, bu muammo munosib o'ringa ega.

To'qnashish deb qaralishi mumkin bo'lgan ta'sirning asosiy xususiyati, quyidagidan iborat. Bunda ishtirok etadigan zarralar (jismlar) bamisoli "cheksizdan keladi" va "cheksizga ketadi", bunday masalada ta'sirlashish jarayonining fizik mohiyati, ya'ni to'qnashish jarayonida ishtirok etadigan kuchlar muhim emas. Darhol payqash mumkinki, Quyosh bilan Yerning ta'sirlashishi bunday toifaga kirmaydi. Gap cheksiz masofalar to'g'risida bormasada, Bilyard stolida sharlarning so'qishishini umuman olganda, bunday toifaga kiritish mumkin. Bunda yetarlicha va ma'noga ega chegaralarda masala ideallashtirilganda (mato bilan shar o'rtasidagi ishqalanishni, havo bilan ta'sirlashishda impulsning almashishi yoki sharlar orasidagi gravitatsiya kuchini nazarga olmaganda), sharlar faqat zarb vaqtida bir-biri bilan ta'sirlashadi, bungacha va bundan keyin ular ta'sirlashmaydi deb ta'kidlash mumkin.

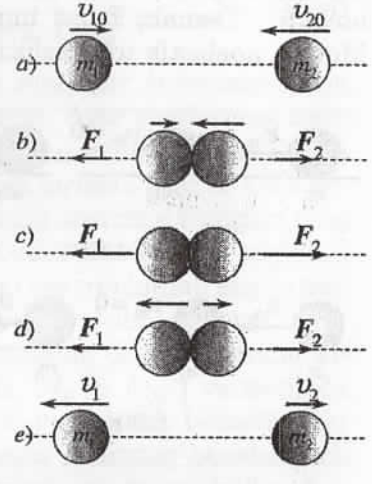
Coulomb qonuni bo'yicha ta'sirlashuvchi zaryadlangan zarralarning to'qnashishi masalasini bilyard sharlar kabi tasavvur qilib bo'lmaydi. Coulomb va gravitatsiya kuchlari masofa ortishi bilan bir xil qonuniyat ($1/r^2$) bilan kamayishiga qaramasdan, amaliy ahamiyatga ega bo'lgan real masofalarda gravitatsiya kuchi kabi Coulomb kuchini yetarlicha kichik deb bo'lmaydi. Shu sababli zaryadlangan zarralarning ta'sirlashishini to'qnashish deb bo'lmaydi, balki sochilish deb atash to'g'riroq bo'ladi.

Mexanika kursi doirasida nisbatan sodda misollarni, jismlarning bir-biri bilan bevosita kontakt orqali amalga oshadigan to'qnashishlarni ko'rish bilan chegaralanamiz. Klassik mexanikada makroskopik jismlarning to'qnashishi aynan shu ma'noda tushuniladi. Bu holda to'qnashishdan keyingi trayektoriyani tenglamalarni yechish orqali aniqlash ancha murakkab bo'ladi, ba'zan amalga oshirib bo'lmaydigan masalaga aylanadi. Ayniqsa mana shunday hollarda energiya va impulsning saqlanish qonunlari foydali bo'ladi. Quyida ko'riladigan to'qnashish masalasi misolida saqlanish qonunlaridan qanday foydalanish kerakligini namoyish qilamiz.

Makroskopik jismlar to'qnashganda deformatsiyalanadi. Bunda jismning kinetik energiyaning bir qismi elastik deformatsiya potensial energiyasiga, bir qismi esa atom va molekulalarning (ichki) energiyasiga aylanadi. Masalalarni yechishda jism kinetik energiyasining qancha qismi ichki energiyaga aylanishiga qarab, quyidagi

ikki holning biridan model sifatida foydalaniladi: mutlaq elastik yoki mutlaq noelastik to'qnashish. Real sharoitda mutlaq elastik yoki mutlaq noelastik to'qnashish bo'lmaydi. Faqat ko'rilayotgan masalada ulardan biri ustunlik qilishi mumkin.

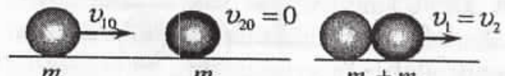
Kinetik energiyaning ichki energiyaga aylangan ulushi hisobga olmasa ham bo'ladigan darajada kichik bo'lsa, to'qnashish ***mutlaq elastik*** deyiladi. Bunda kinetik energiya to'liqligicha elastik deformatsiya energiyasiga aylanadi deb hisoblash mumkin. Keyin jismlar elastik deformatsiya ta'sirida bir-birini itarib yuboradi va o'z shaklini tiklaydi. Natijada deformatsiya potensial energiyasi qayta kinetik energiyaga aylanadi. Bunda jismlarning uchib ketish tezliklari to'qnashishda ishtirok etayotgan ikkita jismning to'liq energiya va to'liq impulsning saqlanish qonuni yordamida aniqlanadi.



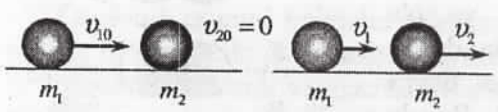
6.7-rasm.

Mutlaq elastik to'qnashishga oid misol 6.7-rasmda keltirilgan. Mutlaq elastik markaziy to'qnashishni quyidagicha tasavvur qilish mumkin. Agar to'qnashishga qadar sharlar bir to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanayotgan bo'lsa, to'qnashish markaziy deyiladi. Massalari m_1 va m_2 bo'lgan ikkita sharlar o'zgarmas ($\mathbf{v}_{10}, \mathbf{v}_{20}$) tezliklar bilan bir-biriga qarab harakatlanayotgan bo'lsin (6.7*a*-rasm). Sharlar bir-biriga yaqinlasha borganda (tekkanda), ularga ta'sir qiluvchi ($\mathbf{F}_1$ va $\mathbf{F}_2$) kuchlar deformatsiya ortishi bilan orta boradi (6.7*b*-rasm). Bu jarayon sharlarning tezliklari modul jihatidan tenglashgunga qadar davom etadi (6.7*c*-rasm). Bu vaqtda deformatsiya maksimumga erishadi, so'ngra deformatsiyaning qaytishi hisobiga sharlar bir-birini itara boshlaydi. Bu jarayon sharlar ajrashgunga qadar davom etadi (6.7*d*-rasm). Bundan keyin sharlar turli tezliklar bilan erkin harakat qilib bir-biridan uzoqlasha boshlaydi (6.7*e*-rasm).

Mutlaq noelastik to‘qnashishda jismlar bir-biriga yopishib qoladi va har ikkalasi bir xil tezlik bilan harakat qiladi yoki to‘xtab qoladi. Bunda kinetik energiya qisman yoki to‘liqligicha ichki energiyasiga aylanadi. Bu holda to‘qnashishga qadar va to‘qnashishdan keyin jismlarning kinetik energiyalari har xil qiymatga ega bo‘ladi. Demak, faqat impulsning saqlanish qonuni bajariladi. Mutlaq noelastik to‘qnashishga oid misol 6.8-rasmda keltirilgan.



6.8-rasm.



6.9-rasm.

Mutlaq elastik to‘qnashishni ko‘rib chiqamiz. Bunda sharlarning markaziy to‘qnashishi bilan chegaralanamiz. Sharlarning dumalashini (masalan, sharlar stol ustida harakatlanganda albatta dumalaydi) va atrof-muhitning ta’sirini hisobga olmaymiz, bundan tashqari tashqi kuchlar bor bo‘lsa, ular bir-birini muvozanatga keltiradi, deb hisoblaymiz. Bunda ikki sharlar sistemasi berk sistemani hosil qiladi deb qarash mumkin (masalan, sharlarning havodagi yoki stol ustida ishqalanishsiz harakati). Albatta, bu real sharoitning ideallashtirilgan modeli bo‘ladi.

Sharlarning massalarini m_1 va m_2 deb belgilaymiz. Ikkinchi shar to‘qnashishga qadar tinch turgan, birinchi shar esa x o‘qning musbat yo‘nalishi bo‘ylab v_{10} tezlik bilan harakatlanayotgan bo‘lsin (6.9-rasm). Sharlarning to‘qnashishdan keyingi tezliklarini mos ravishda v_1 va v_2 bilan belgilaymiz. Hozircha noma’lum bo‘lgan bu tezliklar $\mathbf{v}_1$ va $\mathbf{v}_2$ vektorlarning x o‘qiga proyeksiyalaridir, tenglamalarni yechishda olinadigan natijalar, sharlarning to‘qnashishdan keyingi harakat yo‘nalishini aniqlaydi.

Energiya va impulsning saqlanish qonunlarini yozamiz:

$$\frac{m_1 v_{10}^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}, \qquad (6.33)$$

$$m_1 v_{10} = m_1 v_1 + m_2 v_2. \qquad (6.34)$$

Bu tenglamalar sistemasining yechimini topish juda oson bo‘lib, topilishi lozim bo‘lgan v_1 va v_2 kattaliklar uchun quyidagi ifodalarni olamiz:

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{10}, \quad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{10}. \qquad (6.35)$$

Bu natijadan kelib chiqadigan elastik markaziy to‘qnashishning ba’zi xususiyatlari ustida to‘xtalib o‘tamiz. Agar sharlarning massalari teng bo‘lsa, (6.35) dan $v_1 = 0$, $v_2 = v_{10}$ kelib chiqadi. Bunga asosan to‘qnashish natijasida harakatdagi birinchi shar to‘xtab qoladi, tinch turgan ikkinchi shar esa birinchi sharning tezligiga teng bo‘lgan tezlik bilan harakat qiladi. Xuddi shu sababli vodorod atomi ko‘p bo‘lgan muhit katta tezlikdagi neytronlardan eng yaxshi himoya vositasi bo‘lib hisoblanadi. Neytron vodorod atomi - proton bilan to‘qnashganda, proton neytronning deyarli hamma kinetik energiyasini egallab oladi (chunki, $M_p \simeq M_n$) va natijada neytron deyarli to‘xtaydi. Agar $m_1 < m_2$ bo‘lsa, birinchi shar orqaga qaytadi, ikkinchi shar esa birinchi sharning boshlang‘ich harakat yo‘nalishida harakatlana boshlaydi. $m_1 > m_2$ bo‘lsa, har ikkala shar birinchi sharning boshlang‘ich harakat yo‘nalishida harakat qiladi.

Endi sharning devor bilan elastik to‘qnashishini ko‘ramiz, bunda ikkinchi jism (devorning) massasi cheksiz katta deb hisoblash mumkin. Bu hol uchun (6.35) dan $v_1 = -v_{10}$, $v_2 = 0$ kelib chiqadi, ya’ni shar devor bilan elastik to‘qnashganda u qanday tezlik bilan urilgan bo‘lsa, kattaligi jihatidan shunday, ammo yo‘nalishi teskari bo‘lgan tezlik bilan qaytib ketishini ko‘ramiz. Agar devor harakatda bo‘lsa (tezligi v_{20}), masalani yechish uchun devor bilan birga harakatlanayotgan sanoq sistemasiga o‘tib, masalani yuqoridagidek yechamiz. So‘ngra yana laboratoriya sanoq sistemasiga qaytilsa, urilishdan keyingi tezliklar uchun quyidagi natijalarni olamiz:

$$v_2 = v_{20} = \text{const}; \quad v_1 = -v_{10} + 2v_{20}. \qquad (6.36)$$

Bunda, v_{10}, v_{20} tezliklar bir tomonga yo'nalgan deb olingan (devorning "oldinga-orqaga" harakati (6.36) ifodaning ikkinchisida $2v_{20}$ ning $\pm$ ishora bilan hisobga olinadi). To'qnashish devor bilan bog'langan sanoq sistemasida elastik bo'lsa, u barcha inersial sanoq sistemalarida elastik bo'ladi, jumladan *im*-sanoq sistemasida ham. Bu holda kinetik energiyani aniq hisoblashda v_1, v_2 tezliklarlarga m_1/m_2 tartibidagi tuzatishlarni (6.36) ifodada hisobga olish kerak bo'ladi.

Ikki zarraning elastik to'qnashishini umumiy holda bir o'lchamli model doirasida ko'rib bo'lmaydi. Ikki zarraning elastik to'qnashishini umumiy holda ko'rish uchun barcha fizik kattaliklarning boshlang'ich qiymatlarini "i", to'qnashgandan keyingi qiymatlarini esa "f" indeks bilan belgilaymiz. Ikki zarradan iborat bo'lgan sistemani yana berk deb hisoblaymiz. Bunda ixtiyoriy inersial sanoq sistemasida impulsning saqlanish qonuni albatta uch o'lchamli ko'rinishda yozilishi kerak:

$$\mathbf{p}_{1i} + \mathbf{p}_{2i} = \mathbf{p}_{1f} + \mathbf{p}_{2f} \equiv \mathbf{P}, \qquad (6.37)$$

bu yerda $\mathbf{P}$ - to'qnashishda ishtirok etayotgan ikki zarraning to'liq impulsi bo'lib, harakat davomida saqlanadi. *im*-sistemada, $\mathbf{P} = 0$. Bu holda (6.37) tenglamaning o'lchami bittaga pasayadi. Haqiqatan ham, vektorlar $\mathbf{p}_{1i} = -\mathbf{p}_{2i}$ bir to'g'ri chiziqda, $\mathbf{p}_{1f} = -\mathbf{p}_{2f}$ vektorlar esa boshqa to'g'ri chiziqda yotadi. Bu to'g'ri chiziqlar bir-biri bilan kesishadi, shu sababli ko'rilayotgan masalada ikki zarraning harakati bir tekislikda yotadi.[2] ($\mathbf{p}_{1i} \parallel \mathbf{p}_{1f}$ bo'lgan hol bundan istisno, chunki bu holda masala bir o'lchamli bo'ladi). Shunday qilib, *im*-sistemada sochilish doimo qandaydir bir tekislikda sodir bo'ladi, demak, umumiy holda (6.33) va (6.34) tenglamalardagi v_1, v_2 o'zgaruvchilar o'rniga endi to'rtta o'zgaruvchi bilan ish ko'rish kerak. Sochilish jarayoni amalda ikki o'lchamli bo'lganligi uchun 6.10-rasmda ko'rsatilganidek grafik ko'rinishida tasvirlash mumkin.

im-sistemada $|\mathbf{p}_{1i}| = |\mathbf{p}_{2i}| = p_{Ci}$ tenglik o'rinli bo'lganligi uchun to'qnashuvchi zarralarning kinetik energiyasi (elastik to'qnashishda saqlanadi) quyidagiga teng bo'ladi:

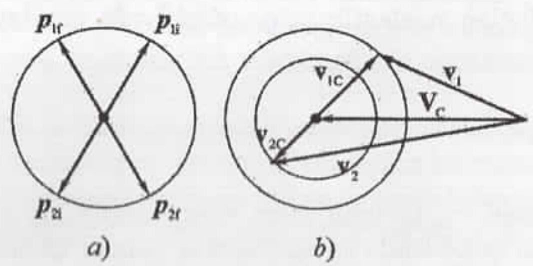
[2]Bir-biri bilan kesishgan ikki to'g'ri chiziq bir tekislikda yotishi geometriya kursidan ma'lum.

$$T = \mathrm{const} = \frac{p_{Ci}^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{p_{Cf}^2}{2\mu},$$

bu yerda μ - keltirilgan massa.

Bundan ko'rinib turibdiki, to'qnashishdan keyin ham $|\mathbf{p}_{1f}| = |\mathbf{p}_{2f}| = p_{Cf}$, $p_{Ci} = p_{Cf} = p_C$ Shunday qilib, *im*-sistemasida $\mathbf{p}_{1i}, \mathbf{p}_{2i}, \mathbf{p}_{1f}, \mathbf{p}_{2f}$ vektorlarning uchlari, 6.10*a*-rasmda ko'rsatilganidek, aylanada yotadi. Diagrammadan ko'rinib turibdiki, sochilish natijasida $\mathbf{p}_{1,2}$ vektorning faqat yo'nalishi o'zgaradi, moduli esa o'zgarmaydi.

Shunga o'xshash diagrammani $\mathbf{v}_{1,2C}$ uchun keltirish mumkin. Bunda tezlik vektorlarning uchlari radiuslari mos ravishda p_C/m_1, p_C/m_2 bo'lgan konsentrik aylanalarda yotadi. *l*-sistemada tezliklar uchun sochilish diagrammasini $\mathbf{v}_{1,2C}$ tezliklarni massa markazi tezligiga qo'shib tasvirlash mumkinligi 6.10*b*-rasmdan ko'rinib turibdi. Bunday diagrammani boshlang'ich va oxirgi tezliklar uchun ham keltirish mumkin.



6.10-rasm.

To'qnashish noelastik bo'lganda kinetik energiyaning qancha qismi ichki energiyaga aylanganligi ma'lum bo'lsa, *im*-sistemada yuqoridagi kabi chizmalarni keltirish mumkin, ammo mos aylanalarning radiuslari to'qnashishdan oldin va keyin turlicha bo'ladi. Energiya yo'qotilishi ma'lum bo'lganda noelastiklikni hisobga olish molekular, atom va yadro fizikasida o'ta muhim masala bo'lib, kimyoviy reaksiyalardan tortib to yadro reaksiyalargacha modellashtirish imkonini beradi.

Savollar

6.1. Keltirilgan massa deb nimaga aytiladi?

6.2. Uchta moddiy nuqtaning ta'sirlashish energiyasi qanday yoziladi?

6.3. Massalari m_1 va m_2 bo'lgan moddiy nuqtalarning gravitatsiya ta'sirlashish energiyasi qanday yoziladi?

6.4. Ikki moddiy nuqtaning ta'sirlashish kuchi ta'sirlashish energiyasi bilan qanday bog'langan?

6.5. Massa markazi deb nimaga aytiladi?

6.6. Birinchi, ikkinchi va uchinchi kosmik tezliklar nimalarga asosan aniqlanadi?

6.7. Mutlaq elastik va noelastik to'qnashishlar nima bilan farqlanadi?

6.8. Mutlaq elastik to'qnashishlarda qanday kattaliklar saqlanadi?

6.9. Mutlaq elastik to'qnashishda *im*-sistemasida impulslar diagrammasini tushintiring.

6.10. Mutlaq noelastik to'qnashishlarda qanday kattaliklar saqlanadi?

Masalalar

6.1. Massasi m_1 bo'lgan zarra tinch turgan m_2 massali zarra bilan elastik to'qnashishda energiyasining qancha qismini (δ) yo'qotishini aniqlang. To'qnashishni markaziy deb hisoblang. m_1/m_2 nisbat qanday bo'lganda δ maksimum bo'ladi? Olingan natijadan foydalanib, yadro reaktorlarda neytronlarni sekinlatish uchun yengil atomlar (deyteriy, uglerod) yadrolaridan foydalanishini tushuntiring.

6.2. Osoyishta suvda qayiq qirg'oqqa ko'ndalang turibdi. Uning quyruq qismidagi odam burun qismiga o'tganda qayiq qirg'oqqa nisbatan qancha masofaga siljiydi? Qayiqning uzunligi L, massasi M, odamning massasi m.

6.3. Ipga osilgan kavsharlangan probirkaning tubida pashsha o'tiribdi. Probirkaning uzunligi l, uning tubidan stolgacha bo'lgan

masofa ham l. Pashshaning massasi probirkaning massasiga teng bo'lsin. Ip yoqib yuborilganda, probirkaning stolga tushish vaqtida pashsha uning yuqori qismiga uchib o'tadi. Probirkaning tushish vaqtini aniqlang.

6.4. Massalari m_1 va m_2 bo'lgan shar shaklidagi ikkita yuk (mayatnik) uzunliklari l_1 va l_2 bo'lgan iplarga shunday osilganki, ular bir-biriga tegib turadi. Birinchi shar kichik β burchakka og'dirilib qo'yib yuboriladi. Bunda sharlar elastik to'qnashishi natijasida qanday burchaklarga og'adi?

6.5. v tezlik bilan harakatlanayotgan jism V tezlik bilan harakatlanayotgan devorni quvib yetadi. To'qnashishni elastik deb, jismning to'qnashishdan keyingi tezligini toping.

6.6. Massasi m bo'lgan shayba muzda sirpanib borib, massasi $3m$ bo'lgan tinch turgan ikkinchi shayba bilan to'qnashadi. Zarbni markaziy va elastik deb hisoblab, shaybalar bir-biridan qanday S masofada to'xtashini aniqlang. To'qnashish boshida birinchi shaybaning tezligi v, shayba bilan muz orasidagi ishqalanish koeffitsienti μ.

6.7. Yuqoriga tik otilgan snaryad ko'tarilishining eng yuqori nuqtasida portlaydi. Portlash natijasida u uch bo'lakka ajraladi. Uchala bo'lakning boshlang'ich tezliklari bir tekislikda yotishini isbotlang.

6.8. Ko'lda har birining massasi m bo'lgan uchta qayiq v tezlik bilan ketma-ket suzmoqda. O'rtadagi qayiqdan bir vaqtda birinchi va uchinchi qayiqlarga m_1 massali yuklar u tezlik bilan tashlangan. Yuklar tashlangandan keyin qayiqlarning tezliklari nimaga teng bo'ladi?

6.9. Matematik mayatnik turg'un muvozanat holatda turibdi. (Matematik mayatnik – uzunligi l bo'lgan yengil ipga osilgan yuk.) Osilgan nuqta atrofida to'liq aylanishi uchun mayatnik yukiga qanday tezlik berish kerak? Masalani ikki holda yechish kerak. *a*) yuk ip bilan osilgan; *b*) bukilmaydigan yengil sterjen bilan osilgan.

6.10. Ideal elastik sharcha og'ilik kuchi maydonida ship bilan pol orasida harakat qilmoqda. Sharchaning kinetik va potensial energiyalarining vaqt bo'yicha o'rtacha qiymatlari orasidagi bog'lanishni toping.

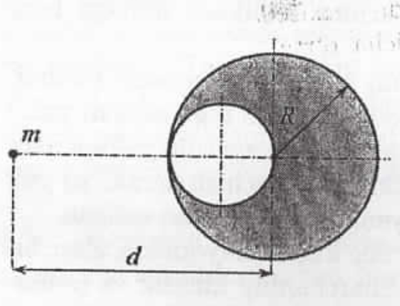
6.11. Massalari m_1 va m_2 bo'lgan ikkita ideal elastik sharchalar bir to'g'ri chiziqda mos ravishda v_1 va v_2 tezliklar bilan bir-biriga qarab harakatlanmoqda. To'qnashish vaqtida ular deformatsiyalanadilar. Bunda kinetik energiyaning bir qismi deformatsiya energiyasiga aylanadi. To'qnashishdan keyin bu energiya qayta kinetik energiyaga aylanadi. Sharchalarning deformatsiya potensial energiyasini toping.

6.12. Harakatlanayotgan zarra tinch turgan xuddi shunday zarra bilan elastik to'qnashadi. *a*) to'qnashish pesh bo'lmagan holda, ular to'g'ri burchak ostida uchib ketishini isbotlang. *b*) to'qnashuv pesh bo'lganda to'qnashgandan keyin ular qanday harakatlanadi? To'qnashuvga qadar birinchi zarraning tesligi $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$.

6.13. Stol tennisi sharchasi suvda $h = 30\,\text{sm}$ chuqurlikda ushlab turilibdi. Sharcha o'z holiga qo'yilganda suvdan sakrab chiqadi va $h_1 = 10\,\text{sm}$ balandlikka ko'tarilgan. Suvning qarshiligi hisobiga sharchaning qancha energiyasi issiqlikka aylanadi. Sharchaning massasi $m = 5\,\text{g}$, radiusi $R = 15\,\text{mm}$.

6.14. R radiusli qo'rg'oshin shar ichida rasmda ko'rsatilgandek g'ovak bor. Qo'rg'oshin shar markazidan d masofada turgan m massali sharchani qanday kuch bilan tortadi. G'ovak bo'lmagan holda sharning massasi M ga teng.

6.15. Ma'lumki, planeta ekvatorida jismning og'irligi qutbdagidan kichik. Qutbda qanday balandlikda jismning og'irligi ekvatordagiga tenglashadi. Planetani R radiusli shar deb hisoblang. Planetaning o'z o'qi atrofidagi aylanish davri T, zichligi ρ.



6.14-masalaga oid chizma.

6.16. Asteroidlardan birining radiusi $R = 5\,\text{km}$, zichligi $\rho_a = 5,5\,\text{g/sm}^3$. Asteroidni sharsimon deb: *a*) erkin tushish tezlanishini toping; *b*) Yerda $h = 5\,\text{sm}$ balandlikka sakrab ko'tarilishi mumkin bo'lgan odam asteroidda qanday balandlikka ko'tarilgan bo'lar edi?

7-bob

Momentlar tenglamasi. Qattiq jism dinamikasi

7.1 Impuls va kuch momentlari

Makroskopik qattiq jismning harakatini (xususan, muvozanat holatini) tavsiflash uchun muhim bo'lgan ikki tushunchani kiritamiz. Bu tushunchalarni moddiy nuqtaning harakat qonuni

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \tag{7.1}$$

asosida kiritish maqsadga muvofiq. Vektor ko'rinishdagi bu tenglama barcha inersial sanoq sistemalarida universal ko'rinishga ega bo'lib, koordinata boshini tanlashga bog'liq emas. Koordinata boshi sifatida qandaydir O nuqtani tanladik deb faraz qilamiz. Bu koordinata sistemasiga nisbatan ko'rilayotgan moddiy nuqtaning radius-vektori $\mathbf{r}$ bo'lsin. (7.1) tenglama ustida ayniy operatsiya bajaramiz, ya'ni tenglamani chap tomonini $\mathbf{r}$ ga vektor ravishda ko'paytiramiz:

$$\left[\mathbf{r}\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right] = [\mathbf{rF}].$$

Bu tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$\left[\mathbf{r}\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right] = \frac{d}{dt}[\mathbf{rp}] - \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}\mathbf{p}\right].$$

bu yerda $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ va $\mathbf{v} \parallel \mathbf{p}$ ekanligini hisobga olsak, (7.1) tenglamaning o'rniga quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{rp}] = [\mathbf{rF}].$$

Belgilashlar kiritamiz:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rF}],\ \mathbf{L} = [\mathbf{rp}]. \qquad (7.2)$$

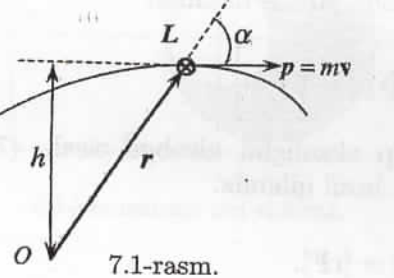
Bu begilashlarda tenglamani qayta yozamiz:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \qquad (7.3)$$

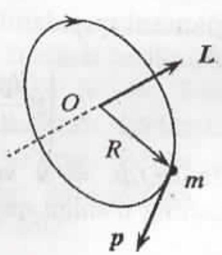
Shunday qilib, (7.1) ko'rinishdagi Newton ikkinchi qonunini ekvivalent ko'rinishga keltirildi. Bu yerda $\mathbf{M}$ – O nuqtaga nisbatan $\mathbf{F}$ kuchning momenti, $\mathbf{L}$ esa, moddiy nuqtaning shu nuqtaga nisbatan impuls momenti deb ataladi (7.1-rasmda $\mathbf{L}$ vektor chizma tekisligiga tik yo'nalgan).

$\mathbf{r}$ va $\mathbf{p}$ vektorlar berilganda, 7.1-rasmga muvofiq $\mathbf{L}$ vektorning modulini $L = rp\sin\alpha = mvh$ ko'rinishda yozish mumkin. Bundan impuls momenti - impulsni yelkaga ko'paytmasiga tengligini ko'ramiz.

Masalan, m massali moddiy nuqta R radiusli aylana bo'ylab harakatlanayotgan bo'lsin (7.2-rasm). Impuls $\mathbf{p}$ va $\mathbf{R}$ o'zaro perpendikular bo'lganligi uchun ($\alpha = \pi/2$) aylana markazi O ga nisbatan bu moddiy nuqtaning impuls momentining moduli $L = Rmv$. Bu holda, $\mathbf{L}$ vektor aylanish tekisligiga perpendikular yo'nalgan bo'lib, moddiy nuqtaning harakat yo'nalishi bilan o'ng vint sistemasini hosil qiladi. Aylanish trayektoriyasining radiusi o'zgarmas bo'lganda impuls momenti faqat tezlik modulining o'zgarishi hisobiga o'zgarishi mumkin. Aylana bo'ylab moddiy nuqtaning harakati tekis bo'lsa, impuls momenti ham kattaligi, ham yo'nalishi bo'yicha o'zgarmaydi.



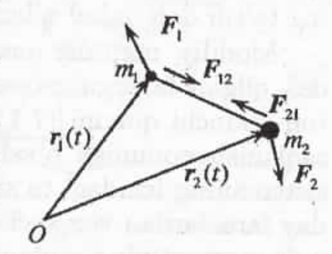
7.1-rasm.



7.2-rasm.

Kiritilgan yangi ta'riflarga (kuch momenti va impuls momenti) hozircha kerakli darajada ma'no berilmadi, biz faqat Newton ikkinchi qonunini yangi ko'rinishda qayta yozdik xolos. Bitta moddiy nuqtadan moddiy nuqtalar sistemasiga, pirovardida, makroskopik jismga o'tganimizda vaziyat o'zgaradi. Bir nechta moddiy nuqtalar bir-biriga nisbatan harakatlanganda, moddiy nuqtalarning har birining impuls momenti o'zgarmas bo'la olmaydi. Ammo bu jismlar berk sistemani tashkil qilgan bo'lsa, ixtiyoriy markazga nisbatan ularning to'liq impuls momenti o'zgarmaydi.

Buni yaqqol tasavvur qilish uchun, bir-biri bilan markaziy kuch ($\mathbf{F}_{12}(r), \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$) orqali bog'langan ikki zarradan iborat sistema misolida bu tasdiqning isbotini keltiramiz. Zarralarga markaziy kuchdan tashqari tashqi kuchlar ham ta'sir qilayotgan bo'lsin (7.3-rasm). Har ikkala moddiy nuqtaning qandaydir O markazga nisbatan olingan momentlar uchun tenglamalarni (7.3) ga asosan yozamiz:



7.3-rasm.

$$\frac{d\mathbf{L}_1}{dt} = [\mathbf{r}_1\mathbf{F}_{12}] + [\mathbf{r}_1\mathbf{F}_1],\ \frac{d\mathbf{L}_2}{dt} = [\mathbf{r}_2\mathbf{F}_{21}] + [\mathbf{r}_2\mathbf{F}_2],$$

bu yerda $\mathbf{F}_{12}$, $\mathbf{F}_{21}$ – jismlarning o'zaro ta'sirlashish kuchlari, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ - birinchi va ikkinchi zarraga boshqa jismlar tomonidan ta'sir qilayotgan natijaviy kuchlar. Bu tenglamalarni hadlab qo'shamiz va $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ ni hisobga olib, quyidagini olamiz:

$$\frac{d(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2)}{dt} = [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \mathbf{F}_{12}] + \mathbf{M}_{1tash} + \mathbf{M}_{2tash}, \qquad (7.4)$$

bu yerda $\mathbf{M}_{1tash} = [\mathbf{r}_1\mathbf{F}_1]$ va $\mathbf{M}_{1tash} = [\mathbf{r}_2\mathbf{F}_2]$ tashqi kuchlarning O markazga nisbatan momentlari.$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \parallel \mathbf{F}_{12}$ bo'lganligi uchun ularning vektor ko'paytmasi nolga teng. Shunday qilib, ikki moddiy nuqta sistemasining $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ to'liq impuls momenti uchun tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_{1tash} + \mathbf{M}_{2tash} \equiv \mathbf{M}_{tash}. \qquad (7.5)$$

Bunda $\mathbf{M}_{tash}$ ni moddiy nuqtalar sistemasiga qo'yilgan tashqi kuchlarning to'liq momenti deb izohlash mumkin. Moddiy nuqtalar sistemasi berk bo'lganda tashqi kuchlar momenti nolga teng bo'ladi va yuqoridagi tasdiq isbotlandi: ***Moddiy nuqtalar sistemasi berk bo'lsa, uning ixtiyoriy markazga nisbatan impuls momenti saqlanadi.*** Buni impuls momentiniing saqlanish qonuning ta'rifi deb qabul qilamiz.

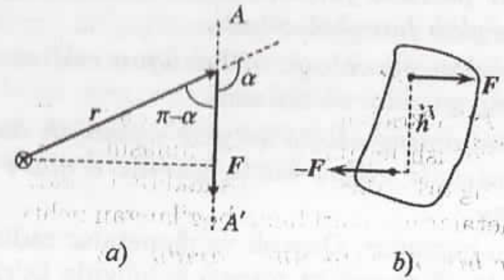
Moddiy nuqtalar orasidagi kuchni markaziy xarakterga ega deb qilgan farazga asosan isbotlangan bu qonun hali ham Newton ikkinchi qonuni (7.1) natijasi bo'lib qolmoqda va impulsning saqlanish qonuniga o'xshaydi. Keyingi qadamni bosamiz: berk sistemaning ichidagi ta'sir kuchlar xarakteri to'g'risidagi har qanday farazlardan voz kechamiz. Shu bilan yuqorida keltirilgan, impuls momentining saqlanish qonuning isboti o'z kuchini yo'qotadi. Ammo impuls momentining saqlanish qonuni eksperimental fakt bo'lib, moddiy nuqtaning oldingi boblarda ko'rilgan harakat qonunlariga qo'shimcha qonun sifatida qabul qilinishi kerak.

Shu joyda mexanika qonunlarini umumiy ko'rinishda o'rganuvchi "Nazariy mexanika" kursida saqlanish qonunlari fazo va vaqtning xossalari natijasi ekanligini ko'rsatilishini aytib o'tish lozim: energiyaning saqlanish qonuni, vaqtning bir jinsliligining natijasidir, ya'ni fizika qonunlari vaqt hisobi boshini o'zgartirishga nisbatan invariantdir. Impulsning saqlanish qonuni fazoning bir jinsligining natjasidir, ya'ni fizika qonunlari fazoviy siljishlarga nisbatan invariant. Shunga o'xshash impuls momentining saqlanish qonuni fazoning izotropligi natijasidir, ya'ni fizika qonunlari fazoviy burilishlarga nisbatan invariant bo'ladi. Yuqorida so'z yuritilgan fazoning xossalari qanchalik darajada bajarilishi real masalalardan kelib chiqadi. Xususan, ikki moddiy nuqta orasidagi o'zaro ta'sir faqat ular orasidagi masofaga bog'liq degan faraz – bu masalada fazoning izotropligiga olib keladi.

Umumiy holda (7.5) tenglama ham (7.1) tenglamadan kelib chiqmaydi, ammo u qo'shimcha harakat tenglamasi bo'ladi. Bu qonunga ko'ra, berk sistemaning to'liq impuls momentining vaqt

o'tishi bilan o'zgarishi faqat tashqi kuchlar momenti ($N_{tash,k}$) bilan aniqlanadi, ya'ni

$$\frac{d}{dt}\sum_i \mathbf{L}_i = \sum_k \mathbf{M}_{tash,k}. \qquad (7.6)$$



7.4-rasm.

Bu tenglamani ***momentlar tenglamasi*** deb atash qabul qilingan. (7.6) tenglamaning chap va o'ng tomonidagi yig'indilar ekvivalent emas: impuls momentlari barcha zarralar (yoki moddiy nuqtalar, yoki cheksiz kichik fizik hajm) bo'yicha yig'iladi, o'ng tomondagi yig'indi esa tashqi kuchlar momentlari bo'yicha olinadi.

Shuni yana bir bor ta'kidlaymizki, momentlar tenglamasidagi kuch momenti $\mathbf{M}_{tash,k} = [\mathbf{r}_k\mathbf{F}_k]$ ixtiyoriy O nuqtaga nisbatan olinganki, bunda yelka sifatida shu nuqtadan kuch qo'yilgan nuqtaga o'tkazilgan $\mathbf{r}_k$ radius-vektor olinadi. Momentlar tenglamasi nuqtai nazaridan, kuch qo'yilgan nuqta emas, balki kuchning qo'yilish chizig'i muhim bo'ladi. Buni 7.4*a*-rasmdan ko'rish mumkin. Haqiqatan ham, kuch qo'yilish chizig'i AA' bo'ylab O nuqtani ko'chirishda $h = r\sin\alpha$ yelka o'zgarmaydi. Xuddi shu sababli, momentlar yig'indisi, yig'indi kuchlar momentiga teng emas. Bunga 7.4*b*-rasmda keltirilgan juft kuchlar yaqqol misol bo'ladi. Bunday kuchlar yig'indisi nolga teng (demak, jismning massa markazi tezlanish olmaydi), ammo to'liq kuch momenti: $M = h \cdot F \neq 0$. Shu joyda O nuqtani tanlash kuch momentining na kattaligiga va na yo'nalishiga ta'sir qilmasligini mashq sifatida tekshirib ko'ring.

7.2 Kepler qonunlari

Newton dunyoga kelishidan ancha oldin daniyalik astronom kuzatuvchi Tixo Bragening uzoq yillar davomida yig'ilib qolgan astronomik kuzatish natijalarini umumlashtirib, Kepler (1571-1630) planetalarning orbitalari aylana shaklida bo'ladi degan fikr noto'g'ri deb, planetalar harakati bilan bog'langan uchta qonunni o'rnatdi:

1. *Har bir planeta fokuslaridan birida Quyosh joylashgan ellips bo'ylab harakat qiladi.*

2. *Quyoshdan planetaga o'tkazilgan radius vektor, teng vaqtlarda teng yuzalarni chizadi.*

3. *Planetalarning ellips bo'ylab aylanish davrlari kvadratlarining nisbati ellips katta yarim o'qlari kublarining nisbatiga teng.*

Albatta bu qonunlar, Quyosh va planetalar radiuslarning ular orasidagi xarakterli masofaga nisbati aniqligida ta'riflangan bo'lishiga qaramasdan, XVII asr boshlari uchun juda ajoyib bo'lgan.

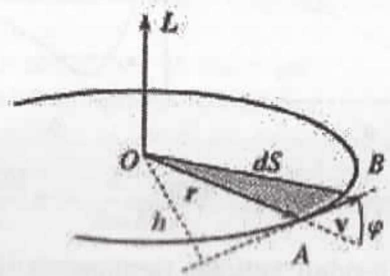
Kepler qonunlari o'z davrida Newton mexanikasi uchun asosiy sinov bo'lgan. Bundan tashqari, ular planetalar harakat dinamikasini o'rganishda prinsipial muhim bo'lganligi sababli, ushbu paragrafda bu qonunlarni keltirib chiqaramiz. Markaziy kuchlar uchun momentlar tenglamasi Newton ikkinchi qonuniga qo'shimcha bo'lmasdan, undan to'g'ridan-to'g'ri kelib chiqishini eslatib o'tamiz. Butun olam tortilish qonuni (6.25) ga asosan tortishish kuchi markaziy bo'lib, $\mathbf{r}_{12}$ Quyosh bilan bog'langan sanoq sistemasida ixtiyoriy planetaning radius-vektoridir. Boshqa planetalar massalari Quyosh massasidan juda kichik bo'lganligi tufayli ko'rilayotgan planeta harakatiga boshqa planetalarning ta'siri ham kichik bo'ladi. Shu sababli bunday ta'sirlarni hisobga olmaymiz. Ammo gigant planetalar, ayniqsa Yupiterning ta'siri Kepler qonunlariga asosiy tuzatishni beradi. Planetalar massalari Quyosh massasidan juda kichik bo'lganligi uchun masalani soddalashtirish, ya'ni (6.2) ifodadagi keltirilgan massani taqriban planeta massasiga ($\mu \approx m$) tenglashtirish mumkin. Shu bilan birga planeta harakati (orbitasi) xarakterli o'lchamlariga nisbatan Quyoshning siljisini inobatga olmasa ham bo'ladi.

"Quyosh-planeta" berk sistemasining impuls momenti massalar nisbati aniqligida quyidagiga teng bo'lad:

$$\mathbf{L} = m[\mathbf{r}\mathbf{v}] = \text{const}, \tag{7.7}$$

bu yerda m, $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ – mos ravishda planetaning massasi, radius-vektori va tezligi. (7.7) tenglikdan hamda moment $\mathbf{L}$ radius-vektor $\mathbf{r}$ va $\mathbf{v}$ tezlikga perpendikular bo'lganligidan planetaning harakati yassi, ya'ni Kepler qonunlarida ko'zda tutilganidek, trayektoriya qandaydir tekislikda yotishi kelib chiqadi.

Endi vektor ko'paytmaning ta'rifiga e'tiborni qaratamiz, $|[\mathbf{r}\mathbf{v}]|dt = rv\sin\varphi dt \equiv dS$ bu yerda dS – yuza elementi ($\mathbf{r}$ va $\mathbf{v}dt$ vektorlar bilan chegaralangan kichik uchburchak yuzasi (7.5-rasm). Momentning saqlanishi qonuni (7.7) dan sektorial tezlikning o'zgarmasligi kelib chiqadi, ya'ni



7.5-rasm.

$$\frac{dS}{dt} = \text{const}, \tag{7.8}$$

bu esa, Kepler ikkinchi qonunining o'zi.

Impuls momentining saqlanish qonuni bilan bir qatorda energiya saqlanish qonunidan ham foydalanamiz:

$$E = \text{const} = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{r}, \tag{7.9}$$

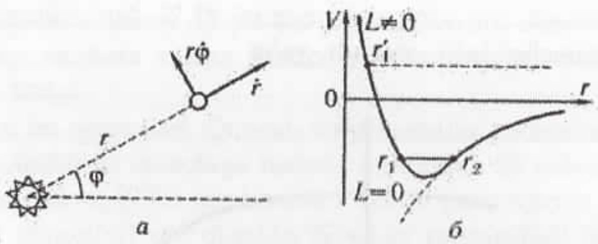
bu yerda M – Quyosh massasi.

Masalani trayektoriya yotgan tekislikda qutb koordinatalarida ko'rish qulay (7.6a-rasm). Tezlikni radial v_r va urinma $v_\tau = r\dot{\varphi}$

tashkil etuvchilarga ajratamiz. Bu holda, $L = mv_\tau r = mr^2\dot{\varphi}$ ni e'tiborga olsak, (7.9) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$E = \frac{mv_r^2}{2} + V(r); \;\; V(r) \equiv -G\frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}. \qquad (7.10)$$

Bu yerda $V(r)$ potensial energiya bo'lib, uning r ga bog'lanish grafigi 7.6b-rasmda keltirilgan. $L = 0$ (uzlukli chiziq) hol planetaning Quyosh bilan pesh urilishiga to'g'ri keladi. Bu esa planetalarning real harakat qonuniga to'g'ri kelmaydi. Demak, real sharoitda $L = 0$ bo'lishi mumkin emas ekan.



7.6-rasm.

$L \neq 0$ da bir-biridan tubdan farqlanuvci, ikki holni ko'rish mumkin. 1. Harakat davomida kinetik energiya potensial energiya modulidan katta ($E \geq 0$) bo'lsa, jism yulduz bilan ta'sirlashib cheksizlikka ketadi. Bu hol yana planetalarning real harakatiga to'g'ri kelmaydi. 2. $E < 0$ bo'lganda, harakat chekli fazoda yuz beradi, ya'ni harakat finit bo'ladi.[1] Bunda, radial tezlik ishorasi harakat davomida albatta o'zgaruvchi bo'lishi kerak, aks holda planeta yulduz bilan to'qnashadi yoki cheksizlikka ketib qoladi. v_r ning ishorasining o'zgarishini

$$E = \frac{mv_r^2}{2} - G\frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

[1]Biror jism yoki moddiy nuqtaning harakati fazoning chekli qismida sodir bo'lsa - finit, aks holda infinit deyiladi.

tenglamadan ko'rish mumkin. $v_r = 0$ shartda bu tenglama ikkita r_1, r_2 ildizga ega, bular burilish nuqtalari deb ataladi (7.6b-rasm). Yana shu rasmdan, $E \geq 0$ da trayektoriya faqat bitta r_1' – burilish nuqtasiga ega ekanligini ko'rish mumkin. Bunda harakat infinit bo'ladi – trayektoriya cheksizga ketadi (gap shundaki, qutb koordinatalarining ta'rifiga binoan r ning faqat musbat qiymatlari ma'noga ega (7.6a-rasm)). $E < 0$ da (7.10) tenglamaning yechimi ellips ekanligini ko'rsatish mumkin:

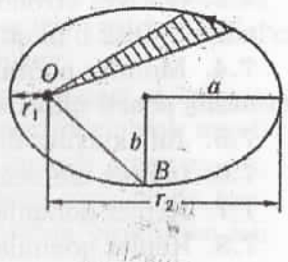
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Masala yechimi to'g'risida to'liq manzaraga ega bo'lish uchun $E > 0$ da cheksizga ketuvchi trayektoriyalar giperbola bo'lishini ta'kidlash lozim. $E = 0$ hol esa finit va infinit harakatlar chegarasi bo'lib, ikkinchi kosmik tezlikga to'g'ri keladi, trayektoriya esa paraboladan iborat bo'ladi. Elliptik trayektoriyani batafsil ko'rib chiqamiz (7.7-rasm).

(7.10) tenglama $v_r = 0$ da r ga nisbatan kvadrat tenglamaga aylanadi:

$$r^2 + \frac{GmM}{E}r - \frac{L^2}{2mE} = 0.$$

Bu tenglama ildizlarining yig'indisi ellipsning katta o'qiga tengligi chizmadan ko'rinib turibdi va ular quyidagi munosabatni qanoatlantiradi:



7.7-rasm.

$$2a = r_1 + r_2 = -\frac{GmM}{E} \Rightarrow E = -\frac{GmM}{2a}. \qquad (7.11)$$

O'zgarmas $\dot{S} = L/2m$ sektorial tezlikni B nuqtaga bog'lash qulay, chunki bu nuqtada tezlik **v** ellipsning kichik o'qiga ortogonal bo'ladi va tezlikni $\dot{S} = b \cdot v/2m$ ko'rinishda yozish mumkin. Ellips fokusining xossasidan $OB = a$ ekanligini e'tiborga olsak, quyidagi munosabatga kelamiz:

$$\frac{mv^2}{2}\Big|_B = E - U = E + \frac{GmM}{a} = \frac{GmM}{2a}.$$

Shunday qilib,$v|_B \propto 1/\sqrt{a}$, demak, $b = 2\dot{S}/\sqrt{a}$. Ma'lumki, ellipsning yuzasi $S = \pi ab$ ga teng, ikkinchi tomondan, uni sektorial tezlik orqali ifodalash mumkin: $S = \dot{S} \cdot T$, bu yerda T aylanish davri. Nihoyat, yuqoridagidan quyidagini aniqlaymiz:

$$a\dot{S}\sqrt{a} \propto \dot{S} \cdot T \Rightarrow T^2 \propto a^3. \quad (7.12)$$

Bu munosabat Kepler uchinchi qonunini ifodalaydi. Shunday qilib, Newton mexanikasi doirasida Kepler uchta qonuni butun olam tortishish qonuni va momentlar tenglamasi natijasi ekanligini ko'rsatdik.

Savollar

7.1. $\mathbf{M} = [\mathbf{rF}]$ F kuchning momenti, $\mathbf{L} = [\mathbf{rp}]$ esa moddiy nuqtaning impuls momenti degan ta'rif to'g'rimi?

7.2. Kuch momentining yo'nalishi qanday aniqlanadi?

7.3. O'z o'qi atrofida aylanayotgan bir jinsli disk impulsga ega bo'ladimi? Disk o'qi qo'zg'almas.

7.4. Moddiy nuqtalar sistemasining impuls momentining o'zgarmaslik sharti nimadan iborat?

7.5. Juft kuchlar deb qanday kuchlarga aytiladi?

7.6. Impuls momenti qanday shart bajarilganda saqlanadi?

7.7. Kepler qonunlarini ta'riflang.

7.8. Kepler qonunlarining ahamiyati nimadan iborat?

Masalalar

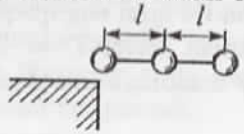
7.1. Gorizontal holatdagi vaznsiz sterjenga massasi m bo'lgan mufta (moddiy nuqta) o'rnatilgan. Mufta uzunligi a bo'lgan ip bilan vertikal OO' o'qqa bog'langan. Bu o'q atrofida sistema ω_0 burchak tezlik bilan inersiyasi bo'yicha aylanmoqda. Qandaydir biror vaqtda ip yoqib yuboriladi va mufta sterjen bo'ylab sirpana boshlaydi. O'qdan x_0 masofada muftaning burchak tezligini toping. Mufta bilan sterjen o'rtasida ishqalanish yo'q deb hisoblang.

7.2. O'z o'qi atrofida erkin (ishqalanishsiz) aylana oladigan gorizontal diskning chetida o'tirgan qo'ng'iz $t = 0$ momentda disk gardishi bo'ylab $S = at^2/2$ tezlanish bilan aylana boshlagan. Diskning burchak tezligi ω va burchak tezlanishi β ni vaqtning funksiyasi sifatida toping. Diskning massasi M, radiusi r, qo'ngizning massasi m.

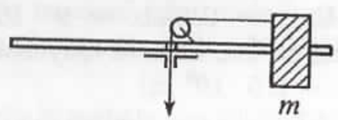
7.3. Gorizontal disk o'z markazidan o'tuvchi vertikal o'q atrofida ishqalanishsiz ω_0 burchak tezlik bilan aylanmoqda. Disk markazida o'tirgan qo'ng'iz (moddiy nuqta) radius bo'ylab diskka nisbatan o'zgarmas u tezlik bilan harakatlana boshladi. Harakat boshlanganidan t vaqt o'tganda disk qanday burchakka burilgan bo'ladi? Hisoblashlar sodda bo'lishi uchun disk va qo'ng'iz massasini teng deb hisoblang.

7.4. Bir-biriga vaznsiz va har birining uzunligi l bo'lgan spitsalar bilan ulangan uchta kichik sharlar sistemasi gorizontal holda o'zgarmas v_0 tezlik bilan pastga tushmoqda. Tushish yo'lida chekkadagi shar og'ir stolning qirrasiga uriladi (rasmga q.). Urilish mutlaq elastik deb, urilish yuz berishi bilan sharlar sistemasining aylanish burchak tezligini aniqlang. Boshlang'ich vaqtda sharlar bir to'g'ri chiziq bo'ylab joylashgan deb hisoblang.

7.5. Gorizontal holatdagi vaznsiz sterjenga massasi m bo'lgan og'ir mufta kiygazilgan. Mufta aylanish markazidagi blok orqali o'tkazilgan cho'zilmaydigan ip bilan ushlab turiladi (rasmga q.). Mufta markaz tomon R_0 dan $R_0/2$ masofagacha tortilganda burchak tezlik, ipning tarangligi va muftani tortishda bajarilgan ish qanday qonuniyat bilan o'zgaradi?



7.4-masalaga oid chizma.



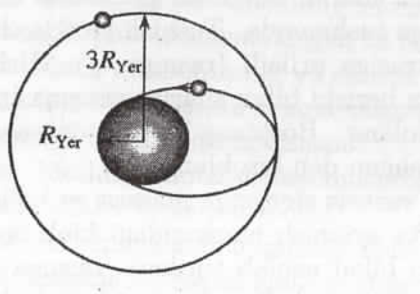
7.5-masalaga oid chizma.

7.6. O'z o'qi atrofida erkin (ishqalanishsiz) aylana oladigan gorizontal diskning markazidan r masofada turgan odam (moddiy nuqta) aylana bo'ylab harakatlanib $\pi/2$ burchakka ko'chadi. Bunda disk qanday burchakka buriladi? Diskning massasi M, radiusi R, odamning massasi esa diskning massasiga teng.

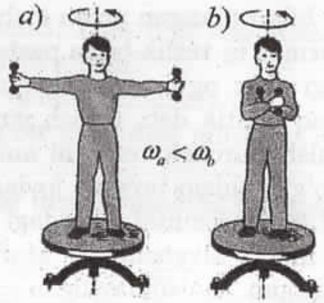
7.7. Gorizontal disk markazidan o'tuvchi vertikal o'q atrofida ishqalanishsiz ω burchak tezlik bilan aylanmoqda. Disk markazida turgan odam (moddiy nuqta) radius bo'ylab harakatlanib, uning chekkasigacha boradi. Sistema energiyasining o'zgarishi nimaga teng? Diskning massasi M, radiusi R, odamning massasi esa m.

7.8. Yer sun'iy yo'ldishining eng kichik aylanish davri qanday bo'lishi mumkin?

7.9. Sun'iy yo'ldosh Yer atrofida $R = 3R_{Yer}$ radiusli doiraviy orbita bo'ylab harakatlanmoqda. Tormozlanish qurilmasining qisqa muddatli ta'siri natijasida uning tezligi shu darajada kamayadiki, natijada yo'ldosh Yer sirtiga urinib o'tadigan elliptik orbita bo'ylab harakatlana boshlaydi. Bundan so'ng qancha vaqtda yo'ldosh Yer sirtiga qo'nadi?



7.10-masalaga oid chizma.



7.12-masalaga oid chizma.

7.10. Quyoshdan Galley kometasigacha bo'lgan eng qisqa masofa $R_{min} = 0,6$a.b. $= 9 \cdot 10^{10}$ m, aylanish davri $T = 76$ yil ma'lum bo'lsa, kometa Quyoshdan qanday masofaga uzoqlashadi? (1a.b. $= 1,5 \cdot 10^8$ m)

7.11. 7.10-masaladagi ma'lumotlardan foydalanib Galley kometasining eng katta va eng kichik tezliklarini baholang.

7.12. Rasmdagi holatni tushuntiring.

8-bob

Mutlaq qattiq jism mexanikasi

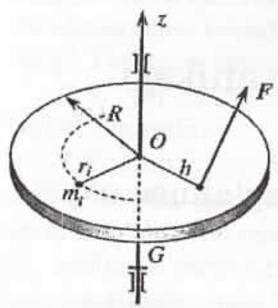
8.1 Mutlaq qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofida aylanishi

Makroskopik jismlarning harakatini o'rganishga o'tishda, avvalambor jismning geometrik shakliga bog'liq bo'lgan harakatlarni o'rganamiz. Bu yo'nalishda birinchi qadam sifatida deformatsiyani inobatga olmaymiz. Chunki, jismning ko'p qismlarining nisbiy harakatini inobatga olish masalani (matematik nuqtai nazaridan) yechib bo'lmas darajagacha chigallashtirib yuboradi. Mexanikada qattiq jismlar orasidagi masofalar o'zgarmaydigan (deformatsiya hisobga olinmaydi) moddiy nuqtalar sistemasi sifatida aniqlanadi. Ya'ni ***mutlaq qattiq jism*** (qisqacha qattiq jism) harakatini o'rganamiz.

Qattiq jismning harakatini o'rganish uchun ikkita sanoq sistemasi kiritiladi. Ulardan biri, "tinch" turgan XYZ inersial koordinatalar sistemasi (masalan, laboratoriya bilan bog'langan sistema). Ikkinchisi, xyz, jismga qattiq bog'langan bo'lib, u bilan birga barcha harakatlarda ishtirok etadi. Harakatdagi sanoq sistemasining koordinata boshini jismning inersiya markazi bilan mos tushirish qulay. Shunday qilib, qattiq jismning harakati oltita erkinlik darajasi bilan aniqlanadi.

Qattiq jismning mumkin bo'lgan harakatlarining ichidan eng soddasini tanlaymiz. Chunonchi, amaliy jihatidan muhim bo'lgan, bir erkinlik darajasi bilan aniqlanuvchi harakatni, ya'ni qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatni ko'ramiz. Bunda qattiq jismning fazodagi holati faqat birgina koordinata, o'q atrofidagi burilish burchagi φ bilan aniqlanadi.

Bunday harakatni aniqlovchi asosiy tenglamani, sodda misol sifatida yupqa diskning qo'zgalmas o'q atrofidagi aylanma harakati uchun keltirib chiqaramiz. Diskning massasi M va radiusi R ga teng bo'lsin. Aylanish o'qi diskga perpendikular bo'lib, uning markazidan o'tsin (8.1-rasm). Diskni yupqa deganda qalingi radiusidan juda kichik bo'lishi nazarda tutiladi va diskning qalinligi bilan bog'liq bo'lgan effektlar inobatga olinmaydi. Bunday aylanishni amalga oshirish uchun disk Oz o'qida podshipniklarga joylashtirilgan qattiq sterjenga mahkamlanadi. Disk vertikal yo'nalishda harakat qilmasligi uchun sterjenga G gardish o'rnatilgan. Sterjenning radiusi va massasi disknikiga nisbatan inobatga olmasa ham bo'ladigan darajada kichik deb hisoblaymiz. Disk markazidan h masofada tashqi $\mathbf{F}$ kuch qo'yilgan bo'lsin. Umuman olganda uning moduli va yo'nalishi vaqt o'tishi bilan o'zgarishi mumkin.



8.1-rasm.

Bizning maqsadimiz disk uchun harakat tenglamasini topish va undan $\varphi(t)$ ni aniqlashdan iborat. Moddiy nuqta uchun $\mathbf{r}(t)$ qanday vazifani bajargan bo'lsa, bu masalada $\varphi(t)$ ham shunday vazifani bajaradi.

Tenglamani keltirib chiqarishda chekli o'lchamga ega bo'lgan jismlar harakatini o'rganishda mexanikada ishlatiladigan usuldan foydalanamiz. Jismni moddiy nuqta deb qarash mumkin bo'lgan va o'zaro hamda boshqa jismlar bilan ta'sirlashuvchi kichik zarralarga xayolan bo'linadi. Natijada masala oldingi boblarda ko'rilgan va barcha mexanika qonunlari o'rinli bo'lgan moddiy nuqtalar sistemasining harakatini o'rganishga keladi. Bu bo'lakchalarni shunchalik kichik qilib olamizki, ularning har birining ichida fizik kattaliklar bir jinsli bo'lsin. Bunday zarralar ko'pincha cheksiz kichik fizik hajm deb ataladi. Bunda faqat atrofdagilar bilan ta'sirlashuv muhimdir.

Shunday qilib, ko'rilayotgan diskni massalari $m_i(\sum m_i = M)$ bo'lgan moddiy nuqtalarga xayolan ajratamiz. Oldingi boblarda ta'kidlaganimizdek, aylanma harakatni o'rganishda Newton qonunidan emas, balki momentlar tenglamasidan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Moddiy nuqtalar sistemasining to'liq impuls momenti

$\mathbf{L}$ uchun tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{M}_{tash}, \tag{8.1}$$

bu yerda $\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_i$, $\mathbf{L}_i$ – i-bo'lakning O markazga nisbatan olingan impuls momenti (hamma moddiy nuqtalar uchun birday). O markazni sterjen diskni kesib o'tgan nuqtada tanlaymiz. Disk aylanganda i-bo'lak r_i radiusli aylana bo'ylab harakat qiladi (r_i – markazdan i-chi bo'lakka o'tkazilgan radius-vektorning moduli). Alohida olingan zarraning impuls momenti

$$\mathbf{L}_i = [\mathbf{r}_i\mathbf{p}_i] = m_i[\mathbf{r}_i\mathbf{v}_i],$$

bu yerda $\mathbf{p}_i$ – i- bo'lakning impulsi, $\mathbf{v}_i$ – tezligi. Bundan masalaning ikkita muhim xususiyatini ko'rish mumkin. Birinchidan, ikki vektorning vektor ko'paytmasidan hosil bo'lgan vektor har ikkala vektor yotgan tekislikga perpendikular bo'lganligi uchun hamma zarralarning $\mathbf{L}_i$ impuls momentlari Oz o'qi bo'ylab yo'nalgan bo'ladi. Bundan, to'liq $\mathbf{L}$ impuls momentining faqat bitta tashkil etuvchisi borligi kelib chiqadi, ya'ni $L_z = \sum L_{iz}$. Ikkinchidan, diskni tashkil etuvchi moddiy nuqtalar aylana bo'ylab harakatlanganligi uchun $\mathbf{r}_i$ va $\mathbf{v}_i$ bir-biriga doimo perpendikular va ular orasidagi burchakning sinusi birga teng. Bularga asosan har bir moddiy nuqtaning impuls momentining modulini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$L_{iz} = m_i r_i v_i = m_i r_i^2 \omega, \tag{8.2}$$

bu yerda $v_i = r_i\omega$ tenglikni inobatga oldik. $\omega = d\varphi/dt$ – hamma nuqtalar uchun birday bo'lgan aylanma harakatning burchak tezligi. L_{iz} ning ishorasi vektor ko'paytma $[\mathbf{rv}]$ ning yo'nalishi Oz bilan mos tushishi yoki teskari bilishiga bog'liq. Yuqorida ishora musbat qilib olindi.

Momentlar tenglamasiga qaytamiz. Tenglamada impuls momentining noldan farqli tashkil etuvchisi L_z ishtirok etadi. (8.2) tenglamani hisobga olsak, L_z uchun tenglamaning chap tomoni quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}\sum L_{iz} = \left(\sum m_i r_i^2\right)\frac{d\omega}{dt} = I_{Oz}\frac{d\omega}{dt}, \tag{8.3}$$

bu yerda diskni tashkil etuvchi barcha elementar massalar m_i bo'yicha yig'indi olinadi.

$$I_{Oz} = \sum m_i r_i^2 \tag{8.4}$$

esa, ***berilgan o'qqa nisbatan jismning inersiya momenti*** deyiladi. (8.2) va (8.4) dan foydalanib impuls momentining z tashkil etuvchisi uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$L_z = \sum L_{iz} = I_{Oz}\omega. \tag{8.5}$$

Shunday qilib, momentlar tenglamasining chap tomonini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$\frac{dL_z}{dt} = I_{Oz}\frac{d\omega}{dt},$$

$\omega = d\varphi/dt$ ekanligini inobatga olsak,

$$I_{Oz}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum_k M_{kz}^{tash}. \tag{8.6}$$

Mexanikada kuch momenti vektori **M** aniqlangan markazdan o'tuvchi birorta o'qqa uning proyeksiyasini shu o'qqa nisbatan kuch momenti deb atash qabul qilingan va $M_{o'q}$ bilan belgilanadi. Bizning misolda markaz diskning markazi, o'q esa diskning aylanish o'qi bilan mos tushadi. Bu ta'rifni hisobga olsak, tenglama (8.6) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$I_{Oz}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum_k M_{ko'q}. \tag{8.7}$$

Bu yerda shuni ta'kidlash lozimki, (8.7) tenglamada diskning shakli to'g'risidagi ma'lumotni I_{Oz} o'z ichiga olgan, shu sababli, disk doira shaklida bo'lishi shart emas.

Garchi, (8.7) tenglama xususiy hol, yupqa disk uchun chiqarilgan bo'lsada, uni aylanayotgan ixtiyoriy shakldagi mutlaq qattiq jism uchun umumlashtirish mumkin. Buning uchun jismni aylanish o'qi bo'ylab qalinligi cheksiz kichik bo'lgan "disk"larga ajratamiz va

disklar bo'yicha integrallaymiz. Shunday qilib, mutlaq qattiq jismning qo'zg'almas Oz o'q atrofidagi aylanma harakat tenglamasini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$I_{Oz}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum_k M_{ko'q}.$$

Newtonning ikkinchi qonuni kabi bu tenglama ikkinchi tartiblidir. Berilgan boshlang'ich shartlarda (boshlang'ich vaziyat va tezlik) bu tenglamaning yechimi $\varphi(t)$ - aylanish burchagining vaqtga bog'lanishini topish, mexanikaning asosiy masalalaridan birini yechadi. Bizning holda boshlang'ich shartlar: $t = 0$ vaqt momentidagi burchak $\varphi(0) = \varphi_0$, burchak tezlik $\omega(0) = \omega_0$. Moddiy nuqta yoki moddiy nuqtalar sistemasi dinamikasini o'rganishda $\mathbf{r}(t)$ va boshlang'ich shartlar qanday rol o'ynasa, mutlaq qattiq jismning aylanma harakatida $\varphi(t)$ va φ_0, ω_0 shunday rol o'ynaydi. Qayta ta'kidlaymiz, boshlangich shartlarning berilishi matematik nuqtai nazaridan masalaning aniq bir yechimini topishda asosiy omil bo'lib hisoblanadi.

Aylanma harakat masalasining moddiy nuqta masalasidan farqli xususiyati shundaki, endi asosiy tenglamaga massa m o'rniga inersiya momenti I_{Oz}, kuch **F** o'rniga esa aylanish o'qiga nisbatan olingan $M_{ko'q}$ kuch momenti kiradi.

Biror o'qqa nisbatan inersiya momenti jismning shu o'q atrofida aylanishi yoki tinch turishiga bog'liq bo'lmagan holda mavjud. Agar jism tashqi kuch ta'sirida biror o'q atrofida aylanayotgan bo'lsa, inersiya momenti jismning inertligi o'lchovi hisoblanadi. Haqiqatan ham, tashqi kuchlar momenti bir xil bo'lganda qaysi jismning inersiya momenti katta bo'lsa, shu jismning burchak tezlanishi shunchalik kichik bo'ladi. Shunday qilib, aylanma harakatda inersiya momenti ilgarilanma harakatdagi massa kabi inertlik o'lchovi rolini o'ynaydi.

Inersiya momentining ta'rifi bo'lgan (8.4) ifodadan massaning berilishi I_{Oz} inersiya momentining kattaligi to'g'risida hali hech narsa aytib bo'lmasligi ko'rinib turibdi. Inersiya momentini hisoblashda jismning turli qismlarida (aylanish o'qiga nisbatan) massa qanday taqsimlanganligi muhim. Shuning uchun aylanish bilan bog'liq biror masalani yechishda inersiya momentining kattaligi to‘g‘risidagi savol alohida ko‘rilishi kerak.

Inersiya momenti jismning geometrik shakli va undagi massa taqsimoti bilan aniqlanadigan kattalik bo‘lib, ilgarilanma harakatdagi massa kabi, aylanma harakatda inertlik o‘lchovi hisoblanadi. Jismning massasi skalyar kattalik, inersiya momenti bunday xossaga ega emas, balki qaysi o‘qqa nisbatan hisoblanganligi muhim. Jism sferik simmetriya ega bo‘lgan holdagina bu kattalik skalyar bo‘ladi. Boshqa hollarda esa u ***ikkinchi rangli tenzor***dir.

Misol tariqasida yuqorida ko‘rilgan yupqa diskning inersiya momentini hisoblashni ko‘ramiz. Bu masalada inersiya momentini disk tekisligiga perpendikular bo‘lgan va markazidan o‘tuvchi o‘qqa nisbatan aniqlash lozim (8.1-rasm). Diskning massasi tekis taqsimlangan deb hisoblaymiz. Xayolan bo‘lingan har bir elementar hajmlardagi massani jismning zichligi ρ va element hajmi ΔV_i ning ko‘paytmasi ko‘rinishida yozish mumkin

$$m_i = \rho \Delta V_i.$$

Shunday qilib, inersiya momenti (8.4) ifodasini quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$I_{Oz} = \sum \rho \Delta V_i r_i^2 = \rho \sum r_i^2 \Delta V_i,$$

bu yerda bir jinsli disk uchun zichlik o‘zgarmasligini hisobga olib, ρ ni yig‘indidan tashqariga chiqardik. ΔV_i cheksiz kichik miqdorga intilganda yig‘indidan integralga o‘tiladi:

$$I_{Oz} = \int \rho(\mathbf{r}) r^2 dV. \tag{8.8}$$

Umumiylikni saqlab qolish maqsadida $\rho(\mathbf{r})$ zichlikni koordinataga bog‘liq deb, uni integral ostida qoldirdik.

Endi diskning I_{Oz} inersiya momentini hisoblash masalasiga qaytamiz. Disk silindrik simmetriyaga ega bo‘lganligi sababli uni cheksiz kichik halqalarga ajratamiz. Bunday halqaning hajmi

$$dV = b \cdot 2\pi r dr,$$

bu yerda b – diskning qalinligi. Bu ifodani (8.8) ga qo‘yib, quyidagini olamiz:

$$I_{Oz} = 2\pi b \rho \int_0^R r^3 dr = \pi \rho b \frac{R^4}{2}.$$

Oxirgi natijani to‘liq massa orqali ifodalash mumkin. Bunda, $\pi b R^2$ diskning hajmiga teng ekanligini inobatga olinsa:

$$I_{Oz} = \frac{mR^2}{2}. \tag{8.9}$$

Disk bir jinsli bo‘lgani hamda inersiya momenti diskning simmetriya o‘qi bilan mos tushganligi sababli hisoblashlar ancha soddalashdi. Agar inersiya momenti boshqa o‘qqa nisbatan hisoblanganda masala ancha murakkab bo‘ladi. Lekin shunday hollar mavjudki, hisoblash yana sodda ko‘rinishni oladi. Masalan, inersiya momenti diskning chekkasidan o‘tuvchi hamda simmetriya o‘qiga parallel o‘qqa nisbatan hisoblash talab qilinsa, (8.4) ifoda yordamida hisoblash ancha murakkab bo‘ladi. Bunday hollarda quyidagi teoremadan foydalanilsa, hisoblash yanada soddalashadi: “***Jismning massa markazidan o‘tuvchi o‘qqa parallel o‘qqa nisbatan inersiya momenti – jismning to‘liq massasining o‘qlar orasidagi masofaning kvadratiga ko‘paytmasi bilan massa markazidan o‘tuvchi o‘qqa nisbatan hisoblangan*** I_{im} ***inersiya momentining yig‘indisiga teng bo‘ladi***”, ya’ni

$$I = I_{im} + ma^2. \tag{8.10}$$

Massa markazi bizga ma’lum bo‘lgan qoida bilan aniqlanadi:

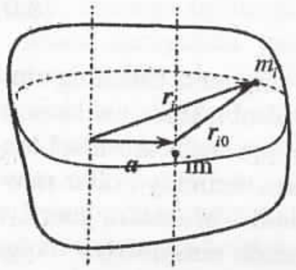
$$\mathrm{R}_{im} = \left(\int_V \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV \Big/ \int_V \rho(\mathbf{r}) dV \right).$$

Teoremani, ya’ni (8.10) tenglikni isbot qilish uchun yangi va eski o‘qlar parallel ko‘chirish vektori $\mathbf{a}$ bilan bog‘langan deb faraz qilamiz (8.2-rasm):

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i0} + \mathbf{a},$$

bu yerda $\mathbf{r}_i$ va $\mathbf{r}_{i0}$ mos ravishda aylanish tekisligidagi i- nuqtaga o‘tkazilgan yangi va eski radius-vektorlar. Bu holda har ikkala o'qqa nisbatan aniqlangan inersiya momentlari quyidagi ko'rinishda bog'langan:

$$I = \sum m_i \mathbf{r}_i^2 = \sum m_i(\mathbf{r}_{i0} + \mathbf{a})^2 = a^2 \sum m_i + 2\mathbf{a} \sum m_i \mathbf{r}_{i0} + \sum m_i \mathbf{r}_{i0}^2 = ma^2 + 2am\mathbf{R}_{im} + I_0.$$



8.2-rasm.

Agar "eski" o'q inersiya markazidan o'tgan bo'lsa, $\mathbf{R}_{im} = 0$ va $I_0 = I_{im}$. Shu bilan teorema isbotlandi. Bu odatda ***Shteyner*** yoki ***Shteyner-Gyugens teoremasi*** deb ataladi. Teoremada jism qandaydir simmetriyaga ega ekanligi to'g'risida hech qanday faraz qilinmadi. Bu teoremaga asosan va (8.9) ifodani e'tiborga olsak, diskning o'qiga parallel va disk chetidan o'tuvchi o'qqa nisbatan inersiya momenti:

$$I_{O'z'} = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3mR^2}{2}.$$

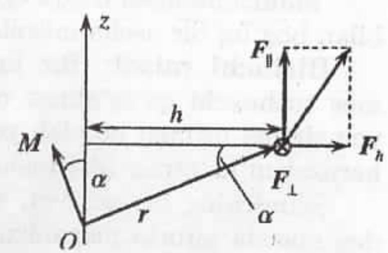
Newton qonunidan farqli ravishda, aylanma harakat tenglamasining o'ng tomonida kuch emas, balki kuch momenti kiradi. Bunda kuch ilgarilanma harakatda qanday vazifani bajarsa, u ham shunday vazifani bajaradi.

Real masalalarda kuch momenti emas, balki kuchning kattaligi va yo'nalishi hamda qo'yilish nuqtasi beriladi. Yuqorida ko'rilgan disk masalasida xuddi shunday (8.1-rasmga q.). Shuning uchun aniq qo'yilgan masalalarda $M_{o'q}$ ni topish uchun $M_{o'q}$ aylanish o'qidagi biror markazga nisbatan olingan M kuch momentining aylanish o'qiga proyeksiyasiga tengligidan foydalanish kerak. Agar aylanish o'qi Oz bo'lsa,

$$M_{o'q} = M_z = [\mathbf{rF}]_z.$$

Yupqa disk masalasida $M_{o'q}$ masala sharti orqali qanday ifodalanishi kerakligini ko'rsatamiz (8.3-rasm). **F** kuchning momenti aniqlangan nuqta aylanish o'qining ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Kuchni

o'zaro perpendikular bo'lgan uchta tashkil etuvchilarga ajratamiz. Ulardan ikkitasi, aylanish o'qi va kuch qo'yilgan nuqtadan o'tuvchi tekislikda aylanish o'qiga parallel $\mathbf{F}_\parallel$ va perpendikular $\mathbf{F}_h$ tashkil etuvchilardir. Uchinchisi esa shu tekislikga perpendikular bo'lgan tashkil etuvchi $\mathbf{F}_\perp$ (chizmada $\otimes$ bilan belgilangan). Agar diskda markazi Oz o'qida bo'lgan h radiusli aylanani ko'z oldimizga keltirsak, $\mathbf{F}_\perp$ shu aylanaga urinma bo'ylab yo'nalgan bo'ladi. O markazga nisbatan olingan **F** kuchning momenti uch qismdan iborat bo'ladi: $\mathbf{M} = \mathbf{M}_\parallel + \mathbf{M}_h + \mathbf{M}_\perp$, bu yerda



8.3-rasm.

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_\parallel = [\mathbf{rF}_\parallel], \ \mathbf{M}_h = [\mathbf{rF}_h], \ \mathbf{M}_\perp = [\mathbf{rF}_\perp].$$

Vektor ko'paytma natijasida hosil bo'lgan vektor shu vektorlar hosil qilgan tekislikga perpendikular bo'ladi. Shuning uchun $\mathbf{M}_\parallel$ va $\mathbf{M}_h$ vektorlar Oz o'qiga perpendikular, demak, ularning shu o'qqa proyeksiyalari nolga teng bo'ladi. $\mathbf{M}_\perp$ momentning moduli $rF_\perp$ ga teng. Agar chizmada $\mathbf{F}_\perp$ vektor ichkariga yo'nalgan bo'lsa, o'ng vint qoidasiga ko'ra Oz o'qi bilan α burchak hosil qiladi va uning kosinusi h/r ga teng. Demak, $\mathbf{M}_\perp$ vektorning Oz o'qiga proyeksiyasi musbat va $M_\perp \cos\alpha = hF_\perp$ ga teng. Agar chizmada $\mathbf{F}_\perp$ vektor tashqariga yo'nalgan bo'lsa, $\mathbf{M}_\perp$ tashqariga yo'nalgan bo'ladi va uning kattaligi $M_\perp \cos(\alpha + \pi) = -hF_\perp$ ga teng bo'ladi. M ning Oz o'qiga boshqa proyeksiyalari ($\mathbf{M}_\parallel$ va $\mathbf{M}_h$) yuqorida ta'kidlaganimizdek nolga teng. Shunday qilib, kuch momentining moduli uchun quyidagi natijani yozish mumkin

$$M = M_z = \pm hF_\perp. \tag{8.11}$$

Yana bir marta shuni ta'kidlash lozimki, "+" ishora tashqi kuch soat milining aylanish yo'nalishiga qarshi, "-" ishora soat milining aylanish yo'nalishi bo'ylab Oz o'qi atrofida jismning aylanma harakatiga to'g'ri keladi.

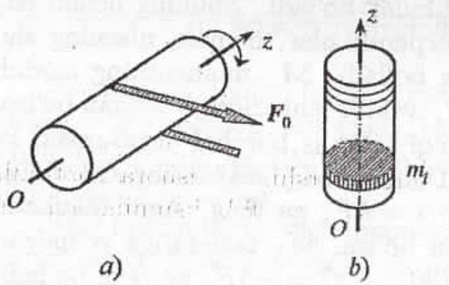
8.2 Momentlar tenglamasidan kelib chiqadigan xulosalar

Mahkamlangan o‘qqa ega jismning harakati yoki muvozanati bilan bog‘liq bir necha misollarni ko‘rib chiqamiz.

Birinchi misol: Bir jinsli silindrning geometrik o‘qi bilan mos tushuvchi qo‘zg‘almas o‘q atrofida silindrning o‘qiga tik va yon sirtiga urinma bo‘ylab yo‘nalgan $\mathbf{F}_0$ kuch ta'siridagi aylanma harakatini ko‘ramiz (8.4-rasm).

Silindrning massasi m, radiusi R, uzunligi l bo‘lsin. Bunday masala birorta mexanizmning aylanishiga misol bo‘ladi. Real sharoitda val bilan aylanish o‘qi orasida ishqalanish mavjud bo‘ladi. Ishqalanishni hisobga olmasa ham bo‘ladigan darajada juda kichik deb, uni hisobga olmaymiz. Bu holda noldan farqli bo‘lgan moment quyidagi teng bo‘ladi:

$$M_{o'q} = F_0 R.$$



8.4-rasm.

Silindrni xayolan massasi m_l bo‘lgan yupqa disklardan tashkil topgan deb hisoblansa, uning inersiya momentini osongina topish mumkin (8.4*b*-rasm). (8.9) dan foydalanib, silindrning inersiya momentini yozish mumkin

$$I_{Oz} = \frac{1}{2} m R^2,$$

bu yerda m – silindrning massasi. Shunday qilib, momentlar tenglamasi quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{2F_0}{mR}. \tag{8.12}$$

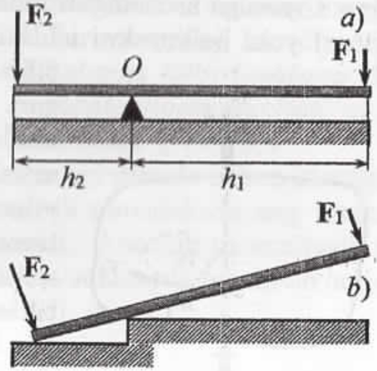
Bu tenglamaning aniq yechimini topish uchun boshlang‘ich shartlar berilishi kerak. Boshlang‘ich shartlar sifatida, $\varphi(0) = 0, \omega(0) = 0$ deb olamiz.

Matematik nuqtai nazaridan (8.12) tenglama bizga ma'lum bo‘lgan og‘irlik kuchi ostida moddiy nuqtaning harakatini aniqlovchi tenglamaning o‘zidir. (8.12) tenglamaning boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi oddiy hisoblashlardan keyin quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin bo‘ladi:

$$\varphi(t) = \frac{F_0}{mR} t^2.$$

Ta'kidlaganimizdek, jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakati ilgarilanma harakatdan qo‘yilgan kuch bilan emas, balki uning aylanish o‘qiga nisbatan olingan momenti bilan aniqlanadi. Haqiqatan ham, ko‘rilgan disk masalasida harakat F_0 kuch bilan emas, balki uning aylanish o‘qiga nisbatan olingan momenti, ya'ni kuchning yelkaga ko‘paytmasi $F_0 \cdot R$ bilan aniqlanishini ko‘rdik. Hatto kuch juda kichik bo‘lganda ham yelkaning hisobiga moment katta bo‘lishi mumkin. Shu sababli ***kichik kuchlar katta harakatni yuzaga keltirishi mumkin.***

Insonning eng qadimiy ish quroli bo‘lgan richagning ishlash prinsipi jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakatining yuqorida ko‘rilgan xossasiga asoslangan. Richagni qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylana oladigan ingichka sterjen shaklida tasvirlash mumkin. Aylanish o‘qi sterjen markazidan o‘tmasligi va unga perpendikular bo‘lishi kerak. 8.5*a*-rasmda gorizontal o‘q atrofida aylana oladigan bunday sterjen tasvirlangan. Aylanish o‘qi bizning misolda rasm tekisligiga tik yo‘nalgan.



8.5-rasm.

Gorizontal turgan sterjenni aylanish o‘qida yotuvchi O nuqta teng bo‘lmagan h_1 va h_2 bo‘laklarga bo‘lsin. Uning uchlariga aylanish o‘qiga perpendikular yo‘nalishda ikkita $\mathbf{F}_1$ va $\mathbf{F}_2$ kuchlar qo‘yilgan bo‘lsin. Qo‘yilgan kuchlarga nisbatan sterjenning og‘irlik kuchining ta'sirini hisobga olmasa ham bo‘ladigan darajada kichik bo'lishi uchun, uning massasini yetarlicha kichik deb hisoblaymiz.

Momentlar tenglamasi (7.5) dan sterjen muvozanat shartini, ya'ni sterjen tinch holatda bo'lish yoki o'zgarmas burchak tezlik bilan aylanish shartini topsa bo'ladi. Ko'rilayotgan hol uchun momentlar tenglamasi

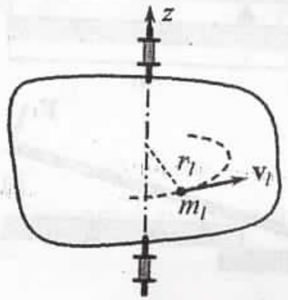
$$I_0 \frac{d\omega}{dt} = F_2 h_2 - F_1 h_1, \qquad (8.13)$$

ko'rinishga o'tadi. Bu yerda I_0 – sterjenning aylanish o'qiga nisbatan inersiya momenti. $\mathbf{F}_1$ va $\mathbf{F}_2$ kuchlarning aylanish o'qiga nisbatan olingan momentlari "vint" qoidasiga binoan tenglamaga turli ishoralar bilan kiradi. Ulardan biri sterjenni soat mili bo'yicha, boshqasi esa, teskari tomonga aylantirishga harakat qiladi. (8.13) tenglamaning o'ng tomonini nolga tenglab muvozanat shartini olamiz:

$$F_2 h_2 = F_1 h_1.$$

Bundan masalan, $\mathbf{F}_1$ kuch qanchalik katta bo'lmasin, uning ta'sirini h_1 yelkani h_2 ga nisbatan katta qilib olish hisobiga kichik $\mathbf{F}_2$ kuch bilan muvozanatga keltirish mumkin ekanligi kelib chiqadi.

Ishlash prinsipi aylanma harakatning yuqorida ko'rib chiqilgan xossasiga asoslangan moslama ***richag*** nomini olgan. Misrang (lom) yoki belkurakni ishlatishda richag prinsipidan foydalanish 8.5*b*-rasmda sxematik tarzda tasvirlangan. "***Richag qoidasi***" qadimdan ma'lum bo'lgan, unga chamasi eramizdan avvalgi uchinchi asrda ilk bor qadimiy yunon olimi va kashfiyotchisi Arximed tomonidan aniq ta'rif berilgan.



8.6-rasm.

Jismning aylanma harakatining kinetik energiyasi ifodasini keltirib chiqaramiz. Bu kattalik aylanma harakatning ba'zi xususiyatlarini energiyaning saqlanish qonuni asosida o'rganishda foydali bo'lishi mumkin. Jism Oz o'qi atrofida aylanayotgan bo'lsin (8.6-rasm). Jismni xayolan m_l elementar massalarga ajratamiz. Ularning har birining chiziqli tezligi $v_l = \omega r_l$, bu yerda – r_l elementar m_l – massadan aylanish Oz o'qigacha bo'lgan masofa. Bularga asosan l-chi elementar massaning kinetik energiyasi quyidagiga teng:

$$T_l = \frac{m_l v_l^2}{2} = \frac{1}{2} m_l \omega^2 r_l^2.$$

Jismning kinetik energiyasi uning qismlarining kinetik energiyalarining yig'indisiga teng bo'ladi (superpozitsiya prinsipi):

$$T = \sum T_l = \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_l r_l^2.$$

Bu munosabatning o'ng tomonidagi yig'indi aylanish o'qiga nisbatan hisoblangan I_{Oz} inersiya momentini beradi. Shunday qilib, jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatining kinetik energiyasi uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$T = \frac{1}{2} I_{Oz}\omega^2 = \frac{L^2}{2I_{Oz}}. \qquad (8.14)$$

(8.7) va (8.14) ifodalarni mos ravishda, Newton ikkinchi qonuni va moddiy nuqtaning kinetik energiyasi ifodasi bilan taqqoslab ular orasida chuqur o'xshashlik borligiga ishonch hosil qilish mumkin, ya'ni quyidagi qiyoslashni keltirish mumkin. Jismning harakati uning chiziqli emas, balki burchak (orientatsiya) koordinatalari o'zgarishiga olib kelsa, φ – ***umumlashgan koordinataga***, L – ***umumlashgan impulsga***, M – ***umumlashgan kuchga*** va I_{Oz} – ***umumlashgan massaga*** mos keladi, deb gapiriladi.

Bunday atama ko'rilgan bitta xususiy masala uchun kiritilgani yo'q, balki mexanika masalasi analitik mexanikada eng umumiy holda mana shunday tilda ta'riflanadi. Analitik mexanikada erishilgan yutuqlar nafaqat fizika, boshqa sohalarda paydo bo'ladigan masalalarni yechishda ham qo'llaniladi.

8.3 Qattiq jismning uch o'lchovli harakati. Giroskoplar

Oldingi paragrafning oxiridagi mulohaza (8.7) va (8.14) tenglamalarni vektor ko'rinishda yozishga undaydi. Buning uchun aylanma harakatni o'rganishda kiritilgan ((2.38) ga q.) ***burchak tezligi vektori*** tushunchasidan foydalanamiz:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]; \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}]. \tag{8.15}$$

Buni hisobga olsak, (8.2) ifoda

$$\mathbf{L}_i = m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega},$$

(8.5) esa mos ravishda

$$\mathbf{L} = I_{Oz}\boldsymbol{\omega}. \tag{8.16}$$

ko'rinishda qayta yozilishi kerak. Bularga asosan (8.7) momentlar tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$I_{Oz}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \sum_i \mathbf{M}_i., \tag{8.17}$$

(8.16) va (8.17) tenglamalarni ixtiyoriy bir o'lchamli bo'lmagan harakatga tegishli deyish qanchalik o'ziga tortmasin, buni juda ehtiyotkorlik bilan qilish kerak. Chunki, bular aylanma harakatning xususiy holi, qo'zg'almas o'q atrofida $\boldsymbol{\omega}$ ning yo'nalishini o'zgarmas saqlovchi aylanma harakat uchun chiqarilgan. Nosimmetrik jismlar uchun bunday sharoitga (8.7) tenglamaning o'ng tomoniga qo'shimcha ravishda o'qning tayanch nuqtalaridagi faqat aylanma harakatning reaksiya kuchi hisobiga yuzaga keluvchi $\mathbf{M}'$ moment kiritilishi orqali erishiladi.

Umumiy holda shakli (aniqrog'i, massa taqsimoti) ixtiyoriy bo'lgan qattiq jismning harakati ko'rilganda, birinchi navbatda (8.16) tenglamani tekshirish kerak bo'ladi. $\boldsymbol{\omega}$ va $\mathbf{L}$ vektorlar umuman olganda parallel bo'lmasligi mumkin. Qattiq jism o'q simmetriyasiga ega bo'lganda, (8.7) momentlar tenglamasi (8.17) tenglamaga o'tadi.

Har bir qattiq jismning massa markazidan o'tuvchi o'zaro perpendikular aylanish o'qlari mavjudki, bu o'qlar atrofida aylanishda hosil bo'ladigan impuls momenti burchak tezlik orqali sodda ifodaladi: $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$, bu yerda I – aylanish o'qiga nisbatan qattiq jismning inersiya momenti. Bu o'qlar qattiq jismning ***asosiy inersiya o'qlari***, qisqacha ***asosiy o'qlari*** deb ataladi. Bu tasdiqni isbotlash bilan shug'ullanmasdan (isbotlash masalasi nazariy mexanika kursida amalga oshiriladi), undan kelib chiqadigan xulosalarni ko'rib chiqamiz.

Jismni asosiy o'qlaridan birortasi atrofida $\boldsymbol{\omega}$ burchak tezlik bilan aylantirdik, deb faraz qilamiz. Yuqoridagi tasdiqqa binoan unda hosil bo'ladigan impuls momenti $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$. Bunda jismga ta'sir qilayotgan kuchlar momentining yig'indisi nolga teng bo'lsa, (8.17) ga asosan, $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} = \text{const}$ bo'ladi, demak, $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$ ekan. Bu quyidagicha ta'riflanadi: ***Jismga ta'sir qilayotgan kuchlar momenti nolga teng bo'lsa, asosiy o'qlarning ixtiyoriysi atrofidagi aylanma harakat burchak tezligi kattaligi va yo'nalishi jihatidan o'zgarmaydi.***

Ayrim hollarda asosiy o'qlarni aniqlash quyidagicha ta'riflangan qoidaga asosan yengillashadi: ***qattiq jismning hamma simmetriya o'qlari asosiy o'q bo'ladi***. Xususan, aylanish natijasida hosil bo'ladigan, jismlarning aylanish o'qi bilan unga perpendikular bo'lgan ixtiyoriy o'q asosiy bo'ladi. Bunda asosiy o'qlar uchta emas, balki son-sanoqsiz ko'p bo'lishi mumkin. Shu sababli, qattiq jismlarning simmetriya o'qlari atrofida aylanishi texnikada ko'p qo'llaniladigan bir qator o'ziga xos xususiyatlarga ega. Simmetriya o'qi atrofida aylanuvchi o'g'ir simmetrik jismlar, fazoda erkin orientatsiyalanadi. Buday jismlar ***giroskoplar*** nomini olgan.

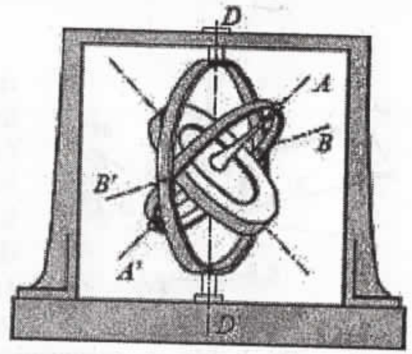
"Giroskop" so'zining aynan tarjimasi aylanishni ko'rsatadigan (aniqlaydigan) asbob ma'nosini bildiradi. Keng ma'noda ***giroskop*** deb, fazoda aylanish o'qining yo'nalishini o'zgartira oluvchi, tez aylanuvchi qattiq jismga aytiladi. Giroskop, ayniqsa, unga tashqi kuchlar ta'sir qilganda, juda ajoyib, birinchi qarashda kutilmagan va tushinib bo'lmaydigan, harakatlarni amalga oshirishi mumkin. Ular ajoyib xossalari bilan doim o'ziga jalb qilib kelgan. Tez aylanadigan pildiroq nafaqat ajoyib o'yinchoq bo'lib, balki mexanik qonunlarni o'rganishda qo'llash mumkin bo'lgan juda qiziq namoyish qurilmasi bo'lib ham xizmat qilishi mumkin. Giroskopning tez aylanishi bilan bog'liq bo'lgan barcha hodisalar ***giroskopik hodisalar*** deb ataladi. Ular juda keng ilmiy-texnik tatbig'ini topgan.

Giroskopik effektlar atomlarda ham namoyon bo'ladi. Bu holat ulardagi ichki orbital harakatlar yoki elektronlar va atom yadrosining xususiy aylanishlari (spinlari bilan) bilan bog'langan. Albatta, bu va boshqa barcha atom hodisalari, kvant mexanikasi doirasida qaralishi lozim. Biroq atom va makroskopik sistemalarning giroskopik xossalari o'rtasida juda ko'p umumiylik mavjud. Shunga ko'ra, giroskoplar nazariyasi atom fizikasini o'rganishda ham foydali bo'lishi mumkin.

Fan va texnikada ***simmetrik giroskoplar*** katta ahamiyatga ega. ***Giroskopning geometrik o'qi*** yoki ***figura o'qi*** deb ataluvchi biror bir o'qqa nisbatan aylanma simmetriyasiga ega bo'lgan giroskop ***simmetrik giroskop*** deyiladi. Simmetrik giroskop nazariyasi nosimmetrik giroskop nazariyasidan ancha soddadir. Quyida biz faqat simmetrik giroskoplarni o'rganish bilan chegaralanamiz. Odatda giroskop o'qining biror nuqtasi qayergadir mustahkam bog'langan bo'ladi. Bu nuqta ***giroskopning tayanch nuqtasi deyiladi***. Umumiy holda giroskopning harakati O tayanch nuqtasi harakati va bu nuqtadan o'tuvchi oniy o'q atrofidagi aylanma harakatlar yig'indisidan iborat bo'ladi. Giroskopga misol tariqasida bolalar o'yinchog'i – pildiroqni ko'rsatish mumkin. Giroskop nazariyasining asosi qilib, tayanch nuqtasining qo'zg'almas holati olingan. Bu hususiy holga, tayanch nuqtasi harakatlanadigan, umumiy holni ham keltirish mumkin.

Giroskop o'qi fazoda erkin burala olishi uchun giroskopni odatda ***kardanli ilgakka*** joylashtiriladi (8.7-rasmga q.). Giroskop maxovigi, imkoni boricha kichik ishqalanish bilan aylanuvchi, ***ichki halqada*** diametral joylashgan podshipniklarda mahkamlangan ($A'A$) bo'ladi. Ichki halqa o'z navbatida, ***tashqi halqada*** diametral joylashgan podshipniklar orqali o'tuvchi $B'B$ o'qqa perpendikular o'q atrofida aylana olishi mumkin. Va nihoyat, tashqi halqa uchinchi, tag[illegible] qo'zg'almas podshibniklari orqali o'tuvchi, $D'D$ o'q atrofida ay[illegible] harakat qila olishi mumkin. $B'B$ o'q $A'A$ o'qga perpendikul[illegible] uch o'qlarning barchasi, kardanli ilgak

deb ataluvchi markazda kesishadi. Giroskop kardanli ilgakda ***uch*** erkinlik darajasiga ega bo'lib, ilgak markazi atrofida istalgan burilishlarni amalga oshirishi mumkin. Barcha masalalarda biz halqalarning kinetik energiyasi va impuls momentlarini, giroskop maxovik kinetik energiyasi va impuls momentiga nisbatan juda kichik deb, e'tiborga olmaymiz. Agar kardanli ilgak markazi yoki tayanch nuqtasi giroskopning massa markazi bilan ustma-ust tushsa, giroskop ***muvozanatlashgan*** deyiladi.



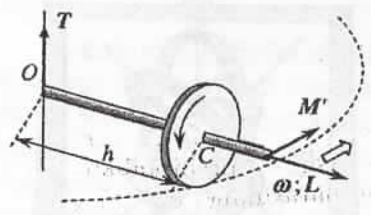
8.7-rasm.

Giroskop o'qining aniq bir sharoitlarda fazoda o'z yo'nalishini saqlay olish qobiliyati ularning navigatsiya qurilmalarida foydalanishning asosida yotadi. Bu xususiyatning o'zi esa, momentning saqlanishi bilan birgalikda, aylanishni xarakterlovchi burchak koordinatasining o'zgarishi boshqa o'zgarishlarga nisbatan tez bo'lishi bilan bog'liq, ya'ni

$$\omega \gg \Omega \tag{8.18}$$

bu yerda Ω – masalan, pildiroq o'qining fazodagi buralish burchak tezligi. Shu nuqtai nazardan giroskopning aylanishi tez bo'lishi kerak. 8.8-rasmda keltirilgan nosimmetrik ravishda osilgan og'ir g'ildirak ko'rinishidagi giroskopni ko'rib chiqaylik (namoyish uchun elektromotor yordamida aylantirilgan velosiped g'ildiragidan foydalanish mumkin).

Burchak tezlik ω va $\mathbf{L}$ impuls momenti aylanish o'qi bo'yicha yo'nalgan. Giroskopga og'irlik kuchi va ipning $\mathbf{T}$ taranglik kuchi ta'sir qiladi. Giroskopning inersiya markaziga nisbatan kuch momentini hisoblash mobaynida faqatgina taranglik kuchinigina hisobga olishimiz lozim bo'ladi, chunki C nuqtaga nisbatan og'irlik kuchining momenti nolga teng. Taranglik kuchi momenti $M' = Th$ ga teng bo'lib, 8.8-rasmda ko'rsatilganidek yo'nalgan. Momentlar tenglamasi (7.6) dan L vektorning orttirmasi $\mathbf{M}'$ moment yo‘nalishida yuz beradi, ya’ni aylanish o‘qi gorizontal tekislikda burilishi kerak. 8.8-rasmda bu ikkilangan strelka bilan ko‘rsatilgan.

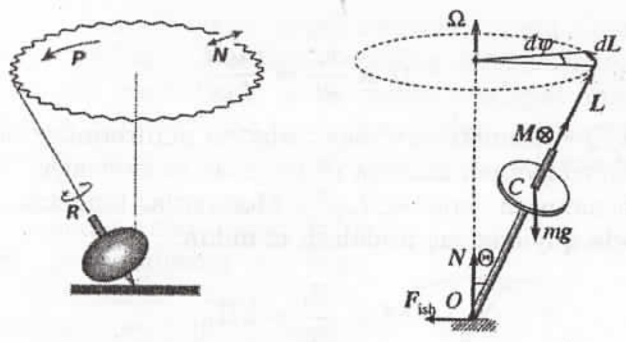


8.8-rasm.

Javob faqat bir qarashda mantiqqa zid tuyuladi. Bizning mulohazalarimizda so‘zsiz (8.18) shartni (unda, Ω ostida ayni L vektorning burilish tezligini tushunish kerak) bajariladi deb hisobladik. Shunday qilib, giroskopning notrivial tutishini namoyish qilish uchun uni yetarli darajada aylantirib yuborish kerak. Bu holda u, nosimmetrik osilgan bo‘lishiga qaramasdan to‘nkarilib ketmaydi. Giroskop to‘ntarilishi uchun **L** vektor vertikal tekislikda burilishi kerak. Biroq bunday burilish uchun tashqi kuch momenti vertikal bo‘yicha yo‘nalgan bo‘lishi kerak. Shunday ekan, kuchning o‘zi gorizontal bo‘lishi hamda o‘qqa normal yo‘nalgan bo‘lishi kerak. Biroq giroskop osilgan ipda bunday kuch yo‘q. Agar giroskop mustahkamlanib, o‘qning gorizontal tekisligida burilishiga imkon beruvchi erkinlik darajasidan mahrum qilinsa, tayanchning reaksiyasi shunday yo‘nalgan bo‘lar ediki, natijada g‘ildirak ag‘darilib ketgan bo‘lar edi.

Biz bu yerda bekorga bevosita velosiped g‘ildiragi haqida eslamadik. Tez harakatlanayotgan velosipedning harakatlanmay turgan velosipedga nisbatan yuqori darajadagi turg‘unligi aylanayotgan g‘ildiraklarning giroskopik effekti bilan bog‘langan.

Pildiroqning muntazam aylanishlari haqidagi masalani ko‘rib chiqaylik (8.9*a*-rasmga q.). Ma’lumki, tez aylanayotgan pildiroqni biroz vertikal holdan chiqarilsa yiqilmaydi, biroq og‘gan holda, (8.18) tengsizlikini qanoatlantiruvchi Ω burchak tezlik bilan qo‘shimcha aylanish (***presessiya***) paydo bo‘ladi. Pildiroq aylanishining sekinlashib borishi bilan, ko‘rsatilgan tengsizlik buzilmagan holda, biroq shart kuchsizlanganda ((8.18) tengsizlikda $\gg$ juda katta belgisi shunchaki katta belgi $>$ bilan almashganda), aylanishlarga murakkab muntazam bo‘lmagan harakatlar ***nutatsiyalar*** qo‘shiladi. Pildiroq dinamikasining bu bosqichini, matematik jihatidan murakkabligidan, bu yerda ko‘rmaymiz, lekin muntazam presessiyani



a) *b*)

8.9-rasm.

tushuntirish unchalik qiyinchilik tug‘dirmaydi.

8.9*b*-rasmga murojaat qilamiz. C – pildiroqning inersiya markazi, O – tayanch nuqtasi bo‘lsin, $|CO| = a$. O nuqtaga tayanchning reaksiyasi **N** dan tashqari, yana $\mathbf{F}_{ishq}$ ishqalanish kuchi ham qo‘yilganligidan, umuman olganda, bizga noma’lum bo‘lgan kuch momentini O nuqtaga nisbatan hisoblab topish oson. U shubhasiz, $mga\sin\Theta$ ga teng va “bizdan rasm tekisligiga” tik yo‘nalgan. (8.18) shartda biz giroskopning **L** impuls momentining faqat burchak tezlik ω bilan bog‘lashga va uning yo‘nalishini o‘q bo‘yicha qat’iy yo‘nalgan deb hisoblashga haqlimiz. Momentlar tenglamasi (8.1) ga ko‘ra impuls momenti kichik dt vaqt ichida

$$d\mathbf{L} = \mathbf{M}dt$$

orttirma oladi, shu bilan birga, **M** vektor kabi, bu kichik orttirma **L** ga perpendikulardir. Shunday qilib, **L** vektorning evolutsiyasi burilishga keltirildi. Uni gorizontal tekislikda

$$d\varphi = \frac{dL}{L\sin\Theta} = \frac{mga\sin\Theta}{L\sin\Theta}dt = \frac{mga}{L}dt.$$

burchak bilan xarakterlash mumkin. Bundan ko‘rinadiki, pildiroqning o‘qi haqiqatda ham presessiyalanishi kerak, shu bilan birga, presessiyasiining burchak tezligi Θ burchakka bog‘liq bo‘lmaydi:

$$\Omega \equiv \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mga}{I_o \omega}, \qquad (8.19)$$

bu yerda I_o – simmetriya o‘qiga nisbatan pildiroqning inersiya momenti. Ko‘rilayotgan misolda (8.18) shartni ekvivalent ko‘rinishda ifodalash mumkin: $mga \ll I_o\omega^2$. Momentlar tenglamasini vektor ko‘rinishda quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\Omega \mathbf{L}],$$

(8.19) natija esa, mos ravishda, quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\Omega = -\frac{ma}{I_0 \omega}\mathbf{g}. \qquad (8.20)$$

Shunday qilib, presessiyaning burchak tezligi og‘irlik kuchiga teskari yo‘nalganligini aniqladik. Shu sababli, aylanayotgan pildiroq yerga qulab tushmaydi.

8.4 Qattiq jismning yassi harakati

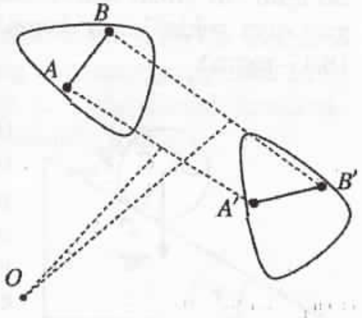
Yassi harakat aniqlanishiga ko‘ra, qattiq jismning faqatgina uch koordinatasining vaqt bo‘yicha o‘zgarishiga javob beradi. Masalan, ikki x, y Dekart va bir orientatsiyani aniqlovchi koordinata φ. Agar harakat sof ilgarilanma bo‘lsa oxirgi orientatsion koordinata, umuman, tushib qolishi ham mumkin. Boshqa tomondan, uch o‘lchamli harakat Dekart koordinata o‘qlarining biri bo‘ylab ilgarilanma harakat bo‘lsa, uni har doim yassi harakatga keltirilishi mumkin.

Yassi harakatda har qanday ko‘chishni, 8.10-rasmdan osongina, biror bir O nuqta (aniqroq qilib aytsak O dan o‘tuvchi va ko‘chish tekisligiga ortogonal o‘q) atrofidagi burilish deb tasavvur qilish mumkin. Bu ma’noda ilgarilanma harakat O burilish nuqtasi bamisoli cheksizga ko‘chirilgan holatga to‘g‘ri keladi.

Bundan kelib chiqadiki, yassi harakatda, kichik siljishlarni qandaydir O o‘q atrofidagi kichik $d\varphi$ burchakka burilish ko‘rinishida tasavvur qilish mumkin. Agar bu burilish kichik dt vaqt ichida yuz beradigan bo‘lsa, kattalik $\omega(t) = d\varphi/dt$ ***burchak tezlikning oniy***

qiymati deyiladi, O nuqta orqali o‘tuvchi o‘q esa ***aylanishning oniy o‘qi*** deyiladi. Masalan, vaqtning biror momentida jismning qandaydir nuqtasining tezligi nolga tengligini aniqlay olsak, oniy aylanish o‘qi xuddi shu nuqtadan o‘tishini aniqlagan bo‘lamiz. Agar bunday nuqtalardan ikkitasini kuzatsak, u holda butun jism uchun $\mathbf{v} \equiv 0$.

8.10-rasmdan shu narsa kelib chiqadiki, yassi siljishni na faqat burilish ko‘rinishida, balki ilgarilanma ko‘chish va burilish kombinatsiyasi ko‘rinishida ham tasvirlash mumkin. Jism ixtiyoriy nuqtaga ko‘chirish natijasida 8.10-rasmda ko‘rsatilgandek holatga o‘tsin. Shu jismga tegishli AB kesma kuzatsak, bu ko‘chish ilgarilanma harakat va burilishdan iborat ekanligini ko‘rish mumkin. Kichik ko‘chishlar tilida bu jismning ixtiyoriy nuqtasini biror bir $d\mathbf{r} = \{dx, dy\}$ vektorga siljitishga, so‘ngra $d\varphi$ burilishga ekvivalent. Ularni mos ravishda, dt ga bo‘lib, $\mathbf{v}(t)$ tezlik va $\omega(t)$ burchak tezlik bilan harakati haqida tasavvur hosil qilamiz. Bu yerda $\mathbf{v}(t)$ aylanishlar qaralayotgan sanoq sistemasining tezligining o‘zidir.



8.10-rasm.

Yana bir marta 8.10-rasmga murojaat qilamiz. Yuqorida qayd qilingan ilgarilanma va aylanma siljishlar kombinatsiysai qanday bo‘lishidan qat’iy nazar AB va $A'B'$ kesmalar orasidagi burchak invariant bo‘lib qoladi. Boshqacha aytganda, oniy o‘qni qanday siljitmaylik, jismni o‘sha burchakka burishga to‘g‘ri keladi. Yana bir bora kichik siljishlarga qaytib, muhim xulosaga kelamiz: ***yassi harakatda $\omega(t)$ burchak tezlik sanoq sistemasiga bog‘liq bo‘lmaydi.***

Masalaning qo‘yilishiga qarab, harakat tenglamasi odatda yoki jismning massa markazi uchun

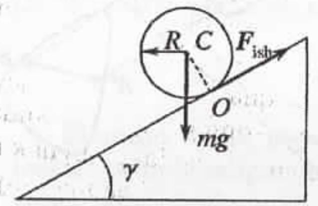
$$m\frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = \sum \mathbf{F}_{tash}, \quad I_C\frac{d\omega}{dt} = \sum M_{Otash}, \qquad (8.21)$$

yoki aylanishning oniy o‘qi uchun yoziladi:

$$I_o\frac{d\omega}{dt}=\sum M_{O tash}. \qquad (8.22)$$

Shu o'qqa nisbatan mos ravishda inersiya momenti va kuch momentlari qayta hisoblanadi.

Yuqoridagilarni namoyish qilish uchun massasi m va radiusi R bo'lgan bir jinsli silindrning gorizont bilan γ burchak tashkil qilgan qiya tekislikdan dumalashi haqidagi masalani ko'rib chiqamiz (8.11-rasm).



8.11-rasm.

Silindr sirpanmasdan dumalayotgan deb qarasak, O nuqtada tezlik nolga teng bo'ladi. Oniy aylanish o'qi esa jismga ishqalanish kuchi qo'yilgan O nuqtadan o'tuvchi tutinish chizig'i bilan mos tushadi. Harakat yo'nalishini e'tiborga olib, Newton ikkinchi qonunini qiya tekislikka proyeksiyasini yozamiz:

$$m\frac{dv_c}{dt}=mr\frac{d\omega}{dt}=mg\sin\gamma-F_{tash}. \qquad (8.23)$$

Momentlar tenglamasini esa oniy o'qqa nisbatan yozamiz:

$$\left(\frac{1}{2}mr^2+mr^2\right)\frac{d\omega}{dt}=mgr\sin\gamma,\ I_O=\frac{1}{2}mr^2+mr^2. \qquad (8.24)$$

Biz bu yerda inersiya momentini oniy aylanish o'qiga nisbatan hisoblashda Shteyner teoremasidan ((8.10) ifodaga q.) foydalandik. Ishqalanish kuchi va tayanch reaksiya kuchi (8.24) tenglamaga o'z hissasini qo'shmaydi, chunki ular O nuqtadan o'tadi, demak, ularning momentlari oniy o'qqa nisbatan nolga teng. (8.24) dan burchak tezlanishini topamiz:

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{2}{3}\frac{g}{r}\sin\gamma,$$

bundan chiziqli tezlanish

$$a_\tau=r\frac{d\omega}{dt}=\frac{2}{3}g\sin\gamma.$$

Bu ifodani (8.23) ga qo'yib, quyidagini olamiz:

$$F_{ish}=\frac{1}{3}mg\sin\gamma \qquad (8.25)$$

Shunday qilib, bu masalada ishqalanish kuchi aniq bir ma'noni qabul qiladi. Biroq ishqalanish kuchining chegaraviy qiymati $\mu N_\perp$ dan oshmasligi kerak (5-bob). Bu yerda μ – ishqalanish koeffitsienti, $N_\perp$ – tayanchning reaksiya kuchi, bizning holda

$$N_\perp=mg\cos\gamma.$$

Shunday qilib, (8.25) faqat

$$\operatorname{tg}\gamma<3\alpha \qquad (8.26)$$

shart bajarilganda ma'noga ega. Fizik ma'no jihatidan (8.26) dumalayotgan silindrning ***sirpanmaslik shartini*** bildiradi. Agar silindr h balandlikdan dumalab tushayotgan bo'lsa, uning oxirgi tezligi

$$v_f=\sqrt{2a_\tau l}=\left(2\cdot\frac{2}{3}g\sin\gamma\cdot\frac{h}{\sin\gamma}\right)^{1/2}=\sqrt{\frac{4}{3}gh} \qquad (8.27)$$

ga teng bo'ladi.

Tezlikning bunday qiymati mexanik energiyaning saqlanish qonunini qanoatlantirishiga ishonch hosil qilamiz. Haqiqatan ham, Kenig teoremasiga ko'ra ((6.13) ifodaga q.),

$$T_f=\frac{mv_C^2}{2}+\frac{I_C\omega_C^2}{2}=\frac{mv^2}{2}+\frac{mr^2}{2}\frac{v^2}{r^2}=mgh.$$

Elementar hisoblashlar ham shu qiymatni beradi.

Shunday savol tug'iladi: avvaldan nolga teng emasligi ma'lum bo'lgan ishqalanish kuchi mavjud bo'lgan holda qanday qilib sof mexanik energiya saqlanishi mumkin? Bu yerda masala shundaki, ishqalanish kuchi, tezlik nolga teng bo'lgan O nuqtaga qo'yilgan va shu sababli u ish bajarmaydi.

Shunday qilib, harakatning yassi xarakteri chekli o'lchamdagi qattiq jism dinamikasi haqidagi masalani shu darajada soddalashtiradiki, u umuman olganda, moddiy nuqta dinamikasi masalasidan unchalik katta farq qilmaydi.

Savollar

8.1. Qanday xossaga ega bo'lgan jism mutlaq qattiq jism deyiladi?

8.2. Mutlaq qattiq jism uchun momentlar tenglamasini ifodalang.

8.3. Mutlaq qattiq jismning harakat tenglamasi qanday yoziladi?

8.4. Moddiy nuqta va qattiq jismning aylanma harakati tenglamalari bir-biridan nimasi bilan farqlanadi?

8.5. Mutlaq qattiq jism uchun inersiya momentini ta'riflang.

8.6. Richag qoidasi qanday yoziladi?

8.7. Giroskop qanday ta'riflanadi?

8.8. Presessiya nima?

8.9. Giroskop uchun harakat tenglamasi qanday yoziladi?

8.10. Giroskopni o'z o'qi atrofida aylanish tezligi kamaytirilsa, uning presessiya burchak tezligi qanday o'zgaradi?

8.11. Qattiq jismning qanday harakati yassi deyiladi?

Masalalar

8.1. Massasi m, uzunligi l bo'lgan ingichka sterjen markazidan o'tuvchi vertikal o'q atrofida $\omega_1 = 10\text{s}^{-1}$ chastota bilan aylanmoqda. Aylanish davomida sterjen gorizontal yo'nalishda asta-sekin suriladi. a) sterjenning bir uchi aylanish o'qiga yetib borganda uning aylanish chastotasi nimaga teng bo'ladi? b) siljish davomida sterjenning aylanish chastotasi masofaga bog'liq holda qanday o'zgaradi?

8.2. Radiusi $R = 1,5\,\text{m}$, massasi $m = 180\,\text{kg}$ bo'lgan disk ko'rinishidagi platforma markazidan o'tuvchi vertikal o'q atrofida inersiyasi bo'yicha $\omega = 0,5\,\text{s}^{-1}$ chastota bilan aylanmoqda. Platforma markazida massasi $m_2 = 60\,\text{kg}$ bo'lgan odam (moddiy nuqta) turibdi. Odam platforma chegarasiga o'tganda uning chiziqli tezligi nimaga teng bo'ladi?

8.3. Uzunligi $a + b$ bo'lgan ingichka sterjen (rasmga q.) vertikal o'q atrofida ω burchak tezlik bilan aylanmoqda. Sterjenning vertikaldan og'ish burchagini aniqlang.

8.4. Gorizont bilan α burchak hosil qilgan qiya tekislik boshiga ω_0 burchak tezlik bilan aylanayotgan r radiusli silindr qo'yilgan. Boshlang'ich ilgarilanma tezligi nolga teng. Silindr yuqoriga qarab chiqa boshlaydi. Silindr qancha vaqt ichida eng yuqori holatiga erishadi?

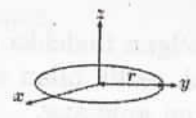
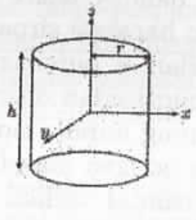
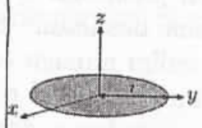
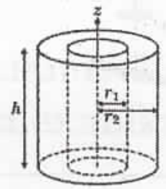
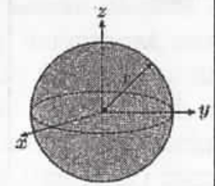
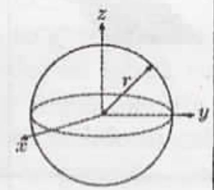
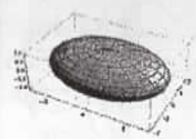
8.5. G'adir-budur taxta ustida uning o'ng uchidan l masofada yaxlit silindr turibdi. Taxtani chap tomonga a_0 tezlanish bilan harakatga keltirildi. Silindr taxta chetiga yaqinlashganda uning markazi taxtaga nisbatan qanday tezlik bilan harakatlanadi? Silindrning taxtaga nisbatan harakati sirpanishsiz bo'ladi.

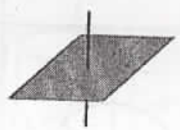
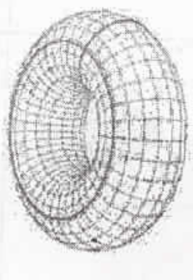
8.6. O'qi vertikal bilan θ burchak hosil qilgan m massali pildiroq, tayanchning O nuqtasidan o'tuvchi vertikal o'q atrofida presessiyalanadi. Pildiroqning impuls momenti L ga, uning massa markazidan O nuqtagacha bo'lgan masofa l ga teng. O nuqtadagi $\mathbf{F}$ reaksiya kuchining gorizontal tashkil etuvchisining moduli va yo'nalishini toping.

8.7. Radiusi r bo'lgan bir jinsli shar R radiusli sferaning yuqori nuqtasidan sirpanishsiz tusha boshladi. Sharning sfera sirtidan ajralgan vaqtdagi burchak tezligi nimaga teng bo'ladi?

8.8. Gorizont bilan α burchak hosil qiluvchi qiya tekislikdan suyuqlik to'ldirilgan bochka qanday a tezlanish bilan sirpanishsiz dumalab tushadi? Bochka devorlari bilan suyuqlik orasidagi ishqalanish juda kichik.

8.5 Ba'zi jismlarning inersiya momentlari

№	Nomi	Chizmasi	Inersiya momenti
1	Massasi m va radiusi r bo'lgan ingichka halqa.		$I_x = \frac{1}{2}mr^2$, $I_y = \frac{1}{2}mr^2$, $I_z = mr^2$.
2	Massasi m va radiusi r bo'lgan yupqa silindrik qoplama.		$I = mr^2$.
3	Massasi m, radiusi r va balandligi h bo'lgan silindr.		$I_x = \frac{1}{12}m(3r^2+h^2)$, $I_y = \frac{1}{12}m(3r^2+h^2)$, $I_z = \frac{1}{2}mr^2$,
4	Massasi m va radiusi r bo'lgan yupqa disk.		$I_x = \frac{1}{4}mr^2$. $I_y = \frac{1}{4}mr^2$. $I_z = \frac{1}{2}mr^2$,
5	Devori qalin truba. Ichki radiusi r_1 tashqi radusi r_2, massasi m va balandligi h.		$I_x = \frac{1}{2}m(r_1^2+r)2^2)$, $I_y = \frac{1}{12}m[3(r_1^2+r_2^2)+h^2]$, $I_z = \frac{1}{12}m[3(r_1^2+r_2^2)+h^2]$.
6	Massasi m va radiusi r bo'lgan shar.		$I_z = \frac{2}{5}mr^2$.
7	Massasi m va radiusi r bo'lgan sfera.		$I_z = \frac{2}{3}mr^2$.
8	Yarim o'qlari a, b va c, massasi m bo'lgan aylanma ellipsoid.		$I_a = \frac{1}{5}m(b^2+c^2)$.

9	Uzunligi L va massasi m bo'lgan sterjen		$I = \frac{1}{12}mL^2.$
10	Balandligi h, kengligi w, chuqurligi d va massasi m bo'lgan parallelopiped.		$I_h = \frac{1}{12}m(w^2 + d^2),$ $I_w = \frac{1}{12}m(d^2 + h^2),$ $I_d = \frac{1}{12}m(d^2 + h^2),$
11	Tomonlari a va b, massasi m bo'lgan yupqa plastinka.		$I_c = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2).$
12	Radiusi a, kesim radiusi b va massasi m bo'lgan torroid truba.		Diametr atrofidagi aylanish uchun $I_d = \frac{1}{8}m(4a^2 + 5b^2).$ Simmetriya o'qiga nisbatan $I_{o'q} = m\left(a^2 + \frac{3}{4}b^2\right)$

9-bob

Deformatsiyalanuvchi qattiq jismlar mexanikasi

9.1 Elastik deformatsiya. Guk qonuni

Bu bobgacha biz asosan alohida olingan moddiy nuqtaning yoki ular to'plamining muvozanat shartlarini yoki dinamikasini o'rgandik. Mutlaq qattiq jism esa bunday to'plamining muhim xususiy holi sifatida qaraldi. Endi tutash muhit masalalarini ko'rishni boshlaymiz. Uzluksiz muhit tushunchasidan odatda ko'riladigan masalani moddiy nuqta (nuqtalar) mexanikasi masalasiga keltirib bo'lmay qolganda yoki masala yechib bo'lmas darajada murakkablashib ketganda foydalaniladi. Farq masalaga emas, balki uni o'rganish metodiga taalluqlidir.

Mutlaq qattiq jism to'g'risida so'z yuritilganda, deformatsiya uning dinamikasiga qandaydir kichik tuzatishlar kiritadi deb, inobatga olinmadi. Bunday fikrni moddiy nuqta uchun ham qo'llash mumkin, ammo ushbu holda deformatsiya qanday oqibatlarga olib kelishini oldindan aytib bo'lmaydi. Deformatsiyani esa prinsipda inkor qilib bo'lmaydi, chunki u fundamental fizik qonunlar bilan uzviy bo'g'langan. Mutlaq qattiq tayoqchani ko'z oldimizga keltiraylik. Tayoqchaning bir uchiga uni bo'ylama harakatga keltiruvchi qandaydir kuch qo'yilgan bo'lsin. Mutlaq qattiq tayoqcha deformatsiyalanmas ekan, qo'yilgan kuch ta'sirida uning ikkala uchi bir vaqtda harakatga keladi. Bundan kuchning ta'siri oniy tarzda (cheksiz tezlik bilan) tayoqchaning bir uchidan ikkinchi uchiga uzatilgan bo'lib chiqadi. Bu holat nisbiylik nazariyasiga batamom zid, sababi, zamonaviy ta'limotlarga ko'ra har qanday tezlik chekli va yorug'likning bo'shliqdagi tezligidan katta bo'lishi mumkin emas. Bu borada boshqa misollar ham keltirish mumkin.

Fikran o'tkazilgan tajriba shuni ko'rsatadiki, hech qanday jismni mutlaq qattiq jism deb qarash mumkin emas ekan. Faqat masalaning qo'yilishida talab qilingan aniqlikda moddiy nuqtalar majmuasini mutlaq qattiq jism deb qarash mumkin. Ammo shunday masalalar borki, ularda deformatsiyani albatta hisobga olish shart bo'ladi. Masalan, kuchlanishlar masalasi shular qatoriga kiradi. Deformatsiya va mexanik kuchlanishlarni to'g'ri va aniq hisobga olish qattiq jism fizikasi bilan bog'lanib ketuvchi mexanikaning alohida sohasining – deformatsiyalanuvchi jismlar mexanikasining mazmunini tashkil qiladi. Deformatsiyalanuvchi jismlar mexanikasi amaliy jihatidan muhim bo'lgan juda ko'p texnik tatbiqlarga ega. Umuman olganda, bu masala ancha murakkab va alohida katta yo'nalishni tashkil qiladi. Ushbu kitob doirasida masalaning faqat nisbatan sodda va fundamental ahamiyatga ega bo'lgan tomonlarini ko'rish bilan chegaralanamiz.

Birinchidan, qaytuvchi - elastik deformatsiyalarni ko'rish bilan chegaralanamiz. Plastiklik deformatsiya va mexanik yemirilish, buzilish masalalarini ko'rmaymiz. Elastik deformatsiya ta'rifiga binoan, kuchlanish olingandan so'ng u yo'qoladi, ya'ni dissipatsiya va jismning ichki tuzilishida o'zgarishlar ro'y bermaydi. Amalda mutlaq elastik deformatsiya yo'q. Jismga ta'sir qiladigan har qanday kuchlanish albatta ozmi ko'pmi jismning ichki tuzilishida qaytmaydigan o'zgarishlarga olib keladi. Ammo ko'p hollarda juda yuqori aniqlikda deformatsiyani elastik deb qarash mumkin.

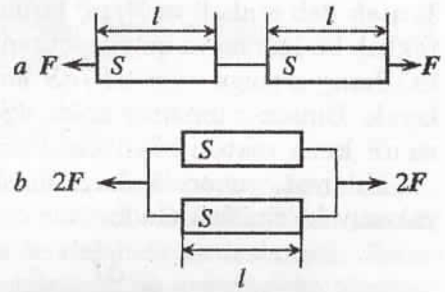
Ikkinchidan, qattiq jismni fizikada qabul qilingandek kristall holat deb qaraymiz. Hayotiy tushunchada (hatto mexanikada ham deformatsiya masalalari ko'rilgunga qadar) keskin sovutilgan suyuqlikni (shisha) ham qattiq jism deb qarash mumkin bo'lgan. Ammo materialshunoslik nuqtai nazaridan ular murakkab xususiyatlarga ega, masalan, tashqi kuch hisobiga ular oqishi mumkin. Bundan tashqari yuqori molekular bog'lanishli moddalar: plastmassa, tabiiy yoki sintetik tolali materiallar o'ziga xos xususiyatlarga ega. Biz faqat kristallarning elastiklik xossalarini o'rganish bilan chegaralanamiz.

Uchinchidan, faqat polikristall jismlarning elastiklik xossalarini ko'rib chiqamiz. Bunga metalldan yasalgan oddiy buyumlar misol bo'ladi. Polikristallar atom yoki molekulalarning tartiblangan holati emas. Unda elementar monokristallchalar tartibsiz joylashgan bo'ladi. Shunga qaramasdan polikristallar monokristallarning bir qator xususiyatlarini saqlab qoladi.

Poli - va monokristallar deformatsiyaga nisbatan o'zini turlicha tutadi. Masalan, aluminiy monokristalining elastiklik chegarasi (kristall tuzilishning buzilishi) taxminan $40 N/sm^2$, polikristallniki (texnik aluminiy) esa $10^4 N/sm^2$ ga teng. Kubsimon tuzilishga ega kristallarning elastiklik xossasi uchta kattalik bilan xarakterlanadi, murakkab kristallar uchun bunday kattaliklarning soni 21 taga yetadi. Polikristallarning elastikligi faqat ikki o'zaro bog'liq bo'lmagan kattalik bilan aniqlanadi.

Elastik deformatsiya bo'ysunuvchi eng sodda qonun Guk qonunidir. Boshida bu qonunning ta'rifi ancha sodda bo'lgan - ***qattiq sterjenni cho'zganda yoki siqqanda uning uzunligining kichik o'zgarishi qo'yilgan kuchga proporsional, ya'ni***

$$\Delta l = F/k. \qquad (9.1)$$



9.1-rasm.

Bunda F kuch qaytmas deformatsiya boshlanishini aniqlovchi F_0 kuchdan ancha kichik bo'lishi kerak. Muhimi shundaki, siqilish uchun ham, cho'zilish uchun ham proporsionallik koeffitsienti $1/k$ birday. Ammo (9.1) ko'rinishda ta'riflangan Guk qonuni universal emas, ya'ni k koeffitsient har bir jism uchun hamda kuchning qo'yilish yo'nalishiga qarab alohida aniqlanishi lozim. Bu ta'rifni umumiyroq shaklga keltirishda 9.1-rasm yordam beradi.

Uzunligi l va ko'ndalang kesimi S, bikrligi k bo'lgan bir xil ikkita sterjen olamiz. Ularni 9.1a-rasmda ko'rsatilganidek birbiriga ketma-ket ulab, F kuch bilan tortamiz. Bunda har bir sterjen F kuch bilan tortiladi va har biri Δl ga, birgalikda esa $2\Delta l$ ga uzayadi. Bundan, $\Delta l \propto l$ ekanligi ravshan va (9.1) ifodani quyidagi ko'rinishda qayta yozish mumkin

$$\Delta l/l = F/k_1.$$

E'tiborni 9.1*b*-rasmga qaratamiz. Sterjenlarni parallel ulab $2F$ kuch bilan tortamiz, bunda har bir sterjen F kuch bilan tortiladi va sterjenlarning har biri yana Δl ga uzayadi. Endi 9.1*b* - rasmga ikkita sterjenni ko'ndalang kesim yuzasi $2S$ va uzunligi l bo'lgan sterjen bilan almashtiramiz. Almashtirilgan sterjen Δl ga cho'ziladi. Bu tajribadan cho'zilish uzunligi kuch bilan emas, balki kuchning sterjen ko'ndalang kesim yuzasiga nisbati bilan aniqlanishi kelib chiqadi:

$$\sigma = \frac{F}{S}. \tag{9.2}$$

Deformatsiyalanuvchi jismlar mexanikasida kattalik σ ***kuchlanish*** deb ataladi va N/m^2 larda o'lchanadi. Jismning shakli murakkab bo'lganda va qo'yilayotgan kuch bir jinsli bo'lmaganda (9.2) ta'rifning o'rniga $\sigma = dF/dS$ ko'rinishdagi ta'rifdan foydalanish kerak. Bunda σ umumiy holda $d\mathbf{S}$ yuza elementining orientatsiyasi va $d\mathbf{F}$ kuch vektori bilan xarakterlanadi.

Nihoyat, yuqoridagilarni hisobga olsak, Guk qonuni quyidagi yakuniy ko'rinishni oladi:

$$\varepsilon \equiv \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}, \text{ yoki } \sigma = \varepsilon E, \tag{9.3}$$

bu yerda ε – nisbiy uzayish (qisqarish) ga teng bo'lib, ***deformatsiya*** deb ataladi, E esa jism moddasiga bog'liq bo'lgan o'zgarmas kattalik bo'lib, ***Yung moduli*** deb ataladi.

Deformatsiya masalasini chuqurroq o'rganish kuchlanishning deformatsiyaga bog'lanishi $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ murakkab ekanligini ko'rsatadi. Deformatsiya $\varepsilon \ll 1$ bo'lganligi uchun kuchlanishni uning darajalari bo'yicha qatorga yoyish mumkin. U holda (9.3) ko'rinishdagi chiziqli qonun

$$\sigma = \varepsilon E + \varepsilon^2 E' + \varepsilon^3 E'' + ...$$

qatorda birinchi had bilan chegaralanganligimizni aks ettiradi. Shu bilan birga, elastik deformatsiyada birinchi had qolgan hadlarga nisbatan ustun ekanligi e'tirof etiladi. Shunday qilib, chiziqli holda bitta o'zgarmas kattalik elastik deformatsiyani tavsiflash uchun yetarli ekan.

Bo'ylama deformatsiya natijasida jismning ko'ndalang o'lchamlari ham o'zgaradi. Polikristallar ustida o'tkazilgan tajribalar ko'ndalang yo'nalishdagi elastik deformatsiya ham chiziqli qonun bilan aniqlanishini va uning ishorasi bo'ylamaga teskari ekanligini ko'rsatadi:

$$\varepsilon_\perp \equiv \frac{\Delta l_\perp}{l_\perp} = -\mu\frac{\Delta l}{l} + ... \approx -\mu\varepsilon. \tag{9.4}$$

Moddaning turini aniqlovchi o'zgarmas kattalik μ ***Puasson koeffitsienti*** deb ataladi. Shuni ta'kidlash lozimki, ko'ndalang deformatsiya bo'ylama kuchlanish hisobiga yuzaga keladi va o'zi qo'shimcha kuchlanish hosil qilmaydi.

Endi deformatsiyada ish masalasini ko'rib chiqamiz. Jismni $d\mathbf{l}$ ga siqishda yoki cho'zishda bajarilgan ish

$$\delta A = \mathbf{F}d\mathbf{l} = Fdl_p.$$

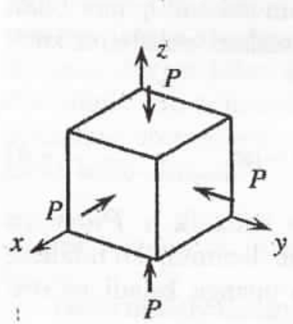
munosabat bilan aniqlanadi. Bundan, ish faqat bo'ylama deformatsiyaga bog'liq ekanligi ko'rinib turibdi. Bajarilgan ish elastik deformatsiya potensial energiyasi ko'rinishida zaxiralanadi. Jismning uzunligi Δl ga o'zgarganda bajarilgan ish quyidagicha hisoblanadi:

$$U = \Delta A = \int_0^{\Delta l} \sigma S_\perp dl = \frac{S_\perp l}{E}\int_0^{\sigma} \sigma d\sigma = \frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E},$$

bu yerda (9.2) ifoda inobatga olindi. Yuk olingandan so'ng bu deformatsiya potensial energiyasi yo'qoladi. Bu energiya deformatsiyalangan jismning hajmi bo'ylab taqsimlanganligi uchun ***deformatsiya energiyasi zichligi*** tushunchasini kiritish mumkin bo'ladi, ya'ni

$$w = \frac{U}{V} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{1}{2}E\varepsilon^2. \tag{9.5}$$

Ma'lum bo'lishicha, polikristallarning elastik deformatsiyasi uchun xarakterli bo'lgan chiziqli holda, ikki doimiy kattalik - E va - m yetarli darajada aniqlikda, moddaning elastik xossalarini tavsiflaydi. Ya'ni tashqi ta'sir natijasi shu ikki o'zgarmas orqali ifodalanishi mumkin. Bunga ishonch hosil qilish uchun ikki klassik misolni ko'rib chiqamiz.



9.2-rasm.

Birinchi misol – qattiq jismni har tomonlama siqish. Jism sirtiga normal bo'yicha ta'sir qiluvchi ***kuchlanish - bosim*** degan tushunchani kiritamiz:

$$P = \frac{dF_{\perp}}{dS}.$$

Ma'lumki, bu kattalik paskallarda o'lchanadi: $1\text{Pa} = 1\text{N/m}^2$. Hisoblashlarni soddalashtirish maqsadida parallelopiped shaklidagi jismni ko'ramiz (9.2-rasm).

Har bir o'q bo'yicha bo'ylama kuchlanish bilan bog'liq bo'lgan bir bo'ylama va ikki ko'ndalang deformatsiya uchun quyidagilarni yozish mumkin

$$x \text{ o'qi bo'yicha, } \varepsilon_x = -\frac{P}{E};\ \varepsilon_{y(x)}, \varepsilon_{z(x)} = \mu\frac{P}{E},$$

$$y \text{ o'qi bo'yicha, } \varepsilon_y = -\frac{P}{E};\ \varepsilon_{z(y)}, \varepsilon_{x(y)} = \mu\frac{P}{E},$$

$$z \text{ o'qi bo'yicha, } \varepsilon_z = -\frac{P}{E};\ \varepsilon_{x(z)}, \varepsilon_{y(z)} = \mu\frac{P}{E},$$

Bundan har bir o'q bo'yicha deformatsiya quyidagiga teng bo'ladi:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x(x)} + \varepsilon_{x(y)} + \varepsilon_{x(z)} = -\frac{P}{E}(1 - 2\mu), \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z. \qquad (9.6)$$

Mos ravishda hajmiy deformatsiya esa,

$$\frac{\delta V}{V} = \delta \ln V = \delta(\ln l_x + \ln l_y + \ln l_z) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -\frac{3P}{E}(1 - 2\mu). \qquad (9.7)$$

Jism har tomonlama siqilganda $\delta V < 0$ bo'lishi kerak, aks holda jism o'z-o'zidan cheklanmagan deformatsiyalanishga nisbatan noturg'un bo'ladi. Bundan μ uchun universal shart olamiz:

$$0 < \mu < \frac{1}{2}. \qquad (9.8)$$

Tajribalar ko'rsatadiki, ba'zi polimerlarda $\mu \to 1/2$, g'ovak jismlarda $\mu \to 0$ va polikristallarda $1/4 < \mu < 1/2$.

9.2 Siljish va buralish deformatsiyasi

Siqish va cho'zishdan farqli ravishda siljish deformatsiyasi urinma kuchlanishlar ta'sirida yuz beradi (9.3a-rasm). Urinma kuchlanish $\tau = dF/dS$ ga teng bo'lsin (F ko'rilayotgan kubning sirtiga parallel bo'lgan kuch). Deformatsiya natijasida kub γ burchakka qiyshayadi. Burchak kichik bo'lganda ta'sir va natija orasidagi bog'lanish chiziqli bo'ladi:

$$\gamma = G\tau, \qquad (9.9)$$

bu yerda G - koeffitsient ***siljish moduli***, (9.9) munosabat esa (9.3) kabi yana ***Guk qonunidir***.

Deformatsiyalangan kub muvozanatda bo'lishi uchun urinma kuchlanish τ bilan bir vaqtda unga teng va qarshi yo'nalgan kuch (9.3a-rasmda shtrixlangan strelka) hamda bu kuchlarning momentlarini muvozanatga keltiruvchi juft kuchlar qo'yilishi kerak (9.3a-rasmda nuqtali strelkalar bilan ko'rsatilgan). Yuqoridagi ikkita kuchlanishning yuzaga kelishini bevosita ta'sir (rasmga q.), pastdagilar esa tayanch reaksiyasi bilan ta'minlanadi. Burchak ABC ning (kubni faraziy AC dioganaldan o'tuvchi tekislik bilan qirqimi) muvozanatini ko'ramiz (9.3b-rasm). Shu burchakka ta'sir qiluvchi kuchlarning muvozanatlik chizmasidan, BA tekislikda τ ga teng kuchlanish yuzaga keladi, ammo u urinma bo'ylab emas, balki normal bo'yicha yo'nalgandir (BA va BC yoqlar bo'ylab yo'nalgani τdS ga, ABC burchakning bissektrisasi bo'ylab yo'nalgani esa $\tau dS\sqrt{2}$ ga teng). Deformatsiyalangan kubning ichida kichik abcd (9.3c-rasm) kubcha olamiz, u η o'qi bo'ylab cho'zilayotgan, ζ bo'ylab esa siqilayotgan bo'lsin. Har bir elastik deformatsiya uchun o'zining energiya zichligini yozish mumkin. Birinchidan, 9.3a-rasmga binoan:

$$dU = \frac{1}{2}Fdl = \frac{1}{2}\tau dxdy \cdot \gamma dz \Rightarrow w = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{\tau^2}{2G}.$$

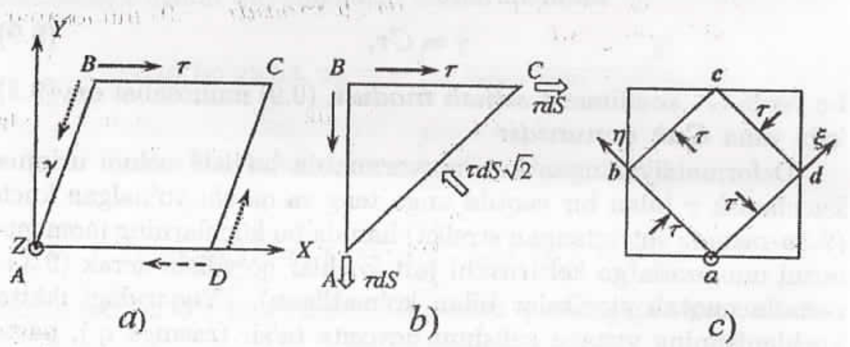
Ikkinchi tomondan (9.3c-rasmga q.),

$$-\varepsilon_\zeta = \varepsilon_\eta = \frac{\tau}{E} + \mu\frac{\tau}{E} \Rightarrow 2\tau\frac{|\varepsilon_\zeta|}{2}d\eta d\zeta \Rightarrow w = \tau|\varepsilon_\zeta|.$$

Yuqoridagi ikki ifodadan G uchun quyidagini olamiz:

$$\frac{\tau^2}{2G} = \tau^2\frac{1+\mu}{E} \Rightarrow G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \qquad (9.10)$$

Shunday qilib, siljish moduli avval kiritilgan ikkita elastiklik o'zgarmaslari orqali aniqlanar ekan.



9.3-rasm.

Endi, burilish deformatsiyasini ko'ramiz (9.4-rasm). Asosga mahkamlangan R radiusli silindrga M buruvchi moment qo'yilgan bo'lsin. Bunda silindrning ozod uchi φ burchakka burilgan bo'lsa, burchak uchun (9.3) o'xshash chiziqli qonun o'rinli bo'ladi:

$$M = f\varphi, \qquad (9.11)$$

bu yerda f – ***burilish moduli*** deb nomlanadi. Silindrda devorining qalinligi δr ($\delta r \ll r$) bo'lgan nayning deformatsiyasini ko'rib, uning uchun burilish deformatsiyasi siljish deformatsiyasiga

ekvivalent ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas. Bunda γ siljish burchagi φ burilish burchagi bilan sodda bog'langan, ya'ni

$$\gamma h = \varphi r,$$

bu yerda h – silindr balandligi. Ko'rilayotgan naychaning to'liq momentga hissasi quyidagicha aniqlanadi:

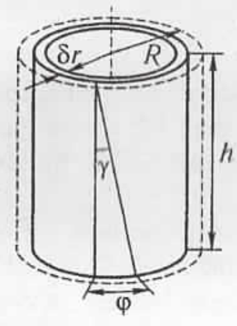
$$\delta M = \tau \cdot 2\pi r\delta r \cdot r,$$

bu yerda $\tau = G\gamma = G\varphi r/h$. Demak, mos ravishda silindr uchun

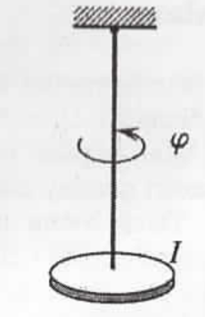
$$M = \int \delta M = \int_0^R \frac{2\pi G}{h}\varphi r^3 dr = \frac{\pi G R^4}{2h}\varphi \equiv f\cdot\varphi. \qquad (9.12)$$

Shunday qilib, bir jinsli silindrning burilish moduli $\pi GR^4/2h$, nay uchun esa $2\pi r^3\delta r \cdot G/h$ ga teng ekan. Tashqi ta'sirga bo'lgan chiziqli javob Yung moduli va Puasson koeffitsientlari orqali ifodalanishi mumkinligiga yana bir marta iqror bo'ldik.

Guk qonunining (9.11) ko'rinishining qiziq tomoni shundaki, u burilish tebranishlari bilan uzviy ravishda bog'langan. Inersiya momenti I, radiusi R bo'lgan simmetrik jismning burilish moduli f, uzunligi l va radiusi r bo'lgan simga osilgan bo'lsin (9.5-rasm). Bu hol uchun (8.3) momentlar tenglamasi quyidagi ko'rinishga keladi:



9.4-rasm.



9.5-rasm.

$$I\ddot\varphi = -M(\varphi) = -f\varphi,$$

bu esa garmonik ossilyator tenglamasidir, uning yechimi bizga yaxshi tanish:

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \psi), \quad \omega = \frac{f}{I} = \frac{\pi G r^5}{m l R^2}.$$

bu yerda ω – tebranish chastotasi, φ_0 – tebranish amplitudasi, ψ – boshlangich faza.

Savollar

9.1. Deformatsiya deb nimaga aytiladi va qanday turlarga bo'linadi?

9.2. Guk qonuni qanday ta'riflanadi?

9.3. Kuchlanish qanday fizik ma'noga ega?

9.4. Izotrop muhitning elastiklik xossalari nechta o'zgarmas bilan aniqlaniladi?

9.5. Shisha uchun siljish modulini kiritish mumkinmi?

9.6. Qanday kattaliklar deformatsiyani to'liq aniqlaydi?

9.7. Deformatsiya energiyasi qanday aniqlaniladi?

9.8. Deformatsiya uchun momentlar tenglamasi qanday yoziladi?

Masalalar

9.1. Tinch turgan lift kabinasini ushlab turuvchi po'lat arqonning diametri $D_1 = 9$ mm ga teng. Shu lift yuqoriga $a = 8g$ tezlanish bilan harakat qilishga mo'ljallangan bo'lsa, po'lat arqonning diametri qanday bo'lishi kerak?

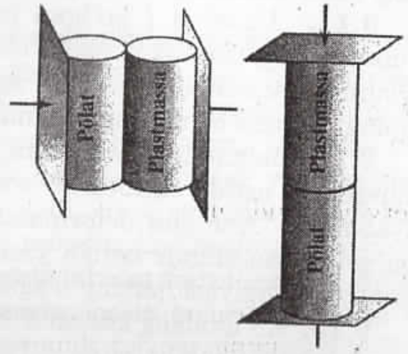
9.2. Temir-beton ustun F kuch bilan siqiladi. Betonning elastiklik moduli (E_1) temirning elastiklik modulining (E_2) 1/10 qismini tashkil etadi, temirning ko'ndalang kesimi yuzasi betonning ko'ndalang kesim yuzasining 1/20 qismini tashkil etadi deb faraz qilib, yuklanishning qanday qismi betonga to'g'ri kelishini aniqlang.

9.3. Bir uchidan osilgan temir sterjen o'z og'irligi ta'sirida qanchaga cho'ziladi? Cho'zilishda hajmi qanday o'zgaradi?

9.4. Massasi m, uzunligi l va ko'ndalang kesimi yuzazi S bo'lgan elastik sterjen bo'ylamasiga a tezlanish bilan harakatlanmoqda (bu tezlanish sterjenning hamma nuqtalari uchun birday). Tezlanuvchan harakat natijasida hosil bo'lgan elastik deformatsiya energiyasini toping.

9.5. Balandligi h, og'irligi P va ko'ndalang kesimi yuzasi S bo'lgan rezina silindr gorizontal tekislikka tik qo'yilgan. Silindrda o'z og'irligi natijasida yuzaga keladigan elastik deformatsiya energiyasini toping. Bu silindrning ustiga yana shunday silindr qo'yilsa elastik deformarsiya energiyasi necha marta o'zgaradi?

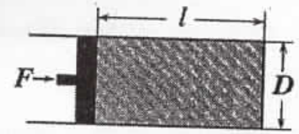
9.6. Yonma-yon qo'yilgan po'lat va plastmassa silindrlar yon tomondan parallel plastinalar bilan siqiladi (chizmaga q.). Bu silindrlarning elastik deformatsiya energiyalarining nisbatini aniqlang. Deformatsiyaga qadar silindrlarning o'lchamlari bir xil. Po'latning Yung moduli $E_{po'l} = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{N/mm^2}$, plastmassaniki esa, $E_{pl} = 10^5\,\mathrm{N/mm^2}$. Shu masalani silindrlar ustma-ust qo'yilgan hol uchun yeching.



9.6-masalaga oid chizma.

9.7. Massasi $m = 3,1$ kg bo'lgan po'lat sterjen cho'zilgan. Nisbiy uzayish $\varepsilon = 10^{-3}$ ga teng. Elastik deformatsiya energiyasini toping. Po'lat uchun Yung moduli $E = 2 \cdot 10^{11}\,\mathrm{N/m^2}$, zichligi $\rho = 7,8 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$.

9.8. Diametri D va uzunligi l bo'lgan bir jinsli silindr shaklidagi rezina bir tomoni yopiq xuddi shunday diametrli po'lat nayga joylashtirilgan (rasmga q.). Nayning ochiq tomonidan rezinaga uning ko'ndalang kesimi bo'yicha tekis taqsimlangan F kuch ta'sir qila boshlaydi. Bunda rezinaning uzunligi qanchaga qisqaradi? Rezinaning elastik xossalarini ma'lum deb hisoblang.



9.8-masalaga oid chizma.

9.9. Uzunligi $L = 0,30\,\mathrm{m}$ va qalinligi $d = 1\,\mathrm{mm}$ bo‘lgan po‘lat chizg‘ichdan chambarak hosil qilingan. Chizg‘ichning qalinligi bo‘yicha kuchlanishning taqsimoti va maksimal kuchlanishni toping. Po‘lat uchun Yung moduli $E = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{N/mm}^2$.

9.10. Prujinaning bir uchi stolga qoqilgan mixga ilingan, ikkinchi uchiga esa m massali yuk ilingn. Stol ustida yuk ishqalanishsiz mix atrofida v chiziqli tezlik bilan aylanma harakat qilmoqda. Agar shu prujinaga massasi m bo‘lgan yuk osilganda uzunligi ikki marta uzayadigan bo‘lsa, aylanish radiusi nimaga teng? Prujinaning erkin holatdagi uzunligi l_0.

9.11. Uzunligi l bo‘lgan prujinaga m massali yuk osilgan. Bunda uning uzunligi $2l$ gacha cho‘zilgan. Yuk vertikal o‘q atrofida aylanma harakat qiladi. Shu aylanma harakat burchak tezligini toping. Bunda cho‘zilgan prujinaning uzunligi L ga teng bo‘lgan.

9.12. Balandligi h, asosining yuzi S va og‘rligi P bo‘lgan rezina silindr stol ustida turibdi. U o‘zining og‘irligi ta’sirida deformatsiyalanadi. Ana shu deformatsiya potensial energiyasini toping. Qaralayotgan silindr ustiga yana shunday silindr qo‘yilsa, deformatsiya energiyasi qanday o‘zgaradi?

9.13. Ko‘ndalang kesimi S bo‘lgan sterjen $\mathbf{F}$ kuch bilan o‘qiga parallel holda tortilmoqda. Tangensial kuchlanish τ maksimum bo‘lgan holda, silindrning ko‘ndalang kesimi qanday burchakka og‘gan bo‘ladi?

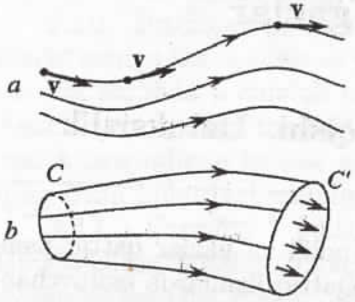
10-bob

Suyuqlik va gazlar

10.1 Ideal suyuqlikning oqishi. Uzluksizlik tenglamasi

Mexanika nuqtai nazaridan, suyuqlik va gazlar qattiq jismlardan farqli ravishda oquvchandir. Qattiq jismlarda egiluvchanlik va dissipatsiya (so‘nish) yonma-yon yuradi, ammo oquvchan muhitlarda bir qator muhim jarayon va hodisalarni ko‘rishda dissipatsiyani inobatga olmasa ham bo‘ladi. Bunday yondashishga ***ideal suyuqlik*** yaqinlashishi deyiladi. Ideal suyuqlik modeli ko‘p hollarda gaz dinamikasini yaxshi tavsiflaydi. Oqayotgan suyuqlik tezligi (yoki turli nuqtalardagi tezliklarning farqi) odatda undagi tovushning tarqalish tezligidan ancha kichik bo‘lganligi uchun bu modelda suyuqlikni siqilmaydigan muhit deb qarash mumkin. Qattiq jism dinamikasini o‘rganishda uni deformatsiyalanmaydigan mutlaq qattiq jism yaqinlashishidan foydalanilganidek, suyuqlik dinamikasini (oqish masalalari) o‘rganishda siqilmaydigan suyuqlik modeli juda yuqori aniqlikda masalalarni yechish imkonini beradi. Bu tushuncha hozir odatiy atamaga aylangan va amaliy ahamiyatga ega ko‘plab texnik masalalarni yechishda qo‘shimcha izohlarsiz foydalaniladi. Bu ma’noda havonining tezligi atmosfera bosimida 300 m/c dan ancha kichik bo‘lganda havoni ham siqilmaydigan muhit deb qarash mumkin.

Suyuqlikning oqishi va chekli o‘lchamli qattiq jismning harakati, garchi bir-biridan jiddiy farqlansada, ular orasida asosiy tushunchalar borasida umumiy “kamerton” mavjud. Xususan, suyuqlikda ham moddiy nuqta tushunchasini kiritish mumkin. Suyuqlikda o‘lchamlarini va shaklini inobatga olmasa ham bo‘ladigan darajada kichik bo‘lgan hajm elementini ajratamiz. Agar bu elementdagi suyuqlik ko‘rilayotgan masaladagi xarakterli masofalarda (yoki xarakterli vaqt) suyuqlikning boshqa qismlari bilan aralashmasa, uni moddiy nuqta deb qarash mumkin. Bu suyuqlik elementi uchun tezlik va tezlanish tushunchalarini aniqlash, shu bilan birga suyuqlikning oqish (xususan, muvozanat holati) tenglamalarini keltirib chiqarish imkonini beradi. Bunday suyuqlik elementining trayektoriyasi ***tok chizig'i*** deb ataladi. (10.1a-rasm). Muayyan masalada berilgan xarakterli vaqt va masshtab chegarasida bir-biriga yaqin yotgan toklar to'plami tok naychasi deb ataladi. Bunda tok naychasi bir bog'lamli kontur (10.1b-rasmda $C \to C'$) bilan o'ralgan deb faraz qilinadi. Suyuqlik elementi va tok chizig'i tushunchalari ma'noga ega bo'lish chegarasi elementar hajmning kichikligi bilan belgilanadi. Tok naychasi tushunchasi ma'noga ega bo'lishi uchun ko'rilayotgan masshtabda tok chiziqlari bir-biridan juda uzoqlashib yoki aralashib ketmasligi, xususan uyurmalar hosil bo'lmasligi kerak.



10.1-rasm.

Bunday yondashishda modda nuqtasining koordinatasiga bog'liq (lokal) xarakteristikalari - zichlik (ρ) va tezlik ($\mathbf{v}$) harakatdagi suyuqlik elementiga emas, balki oqimga tegishli deb olish qabul qilingan. Bu holda zichlik va tezlik modda nuqtasi koordinatasining funksiyasi bo'ladi, ya'ni $\rho(\mathbf{r}), \mathbf{v}(\mathbf{r})$.

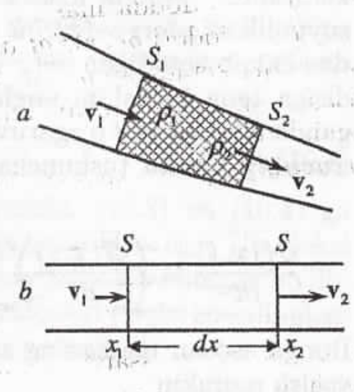
Naychadan oqishda massa oqimining o'zgarmaslik shartini ko'rib chiqamiz. Oqim statsionar bo'lsin. Statsionar oqimda birlik vaqtda naychaning ixtiyoriy ko'ndalang kesimidan oqib o'tadigan suyuqlik yoki gaz massasi barcha kesimlar uchun birday bo'ladi. Bu tasdiq o'rinli bo'lishi uchun oqimda hech qanday reaksiyalar sodir bo'lmasligi lozim.

Oqim nayining biror joyida ko'ndalang kesimi yuzasi $\mathbf{S}_1$ va suyuqlik tezligi $\mathbf{v}_1$ bo'lsin (10.2a-rasm). Kesimlarga shu nuqtada tezlik vektori tik yo'nalgan bo'lishi kerak. U holda bu kesimdan birlik vaqtda oqib o'tuvchi suyuqlik massasi quyidagi ifoda bilan aniqlanadi:

$$Q = \rho_1 \mathbf{S}_1 \mathbf{v}_1. \tag{10.1}$$

Nayning ko'ndalang kesimi yuzasi $\mathbf{S}_2$ bo'lgan boshqa joyida shu vaqt ichida oqib o'tuvchi suyuqlik miqdori yana Q ga teng bo'lishi kerak. Aks holda ikki nuqta orasida suyuqlik miqdorining ko'payishi yoki kamayishi yuz beradi va oqim statsionar bo'lmay qoladi. Bu esa yuqoridagi statsionarlik shartiga ziddir. Demak, $\mathbf{S}_2$ yuza uchun:

$$Q = \rho_2 \mathbf{S}_2 \mathbf{v}_2. \tag{10.2}$$



10.2-rasm.

(10.1) va (10.2) tengliklarda $\rho_{1,2}$, $\mathbf{v}_{1,2}$ va $\mathbf{S}_{1,2}$, – mos ravishda **1**- va **2**- nuqtalardagi suyuqlikning zichligi, tezligi va nayning ko'ndalang kesimi yuzasi.

Shunday qilib, massa oqimining o'zgarmaslik sharti yoki massaning saqlanish qonuni oqimning uzilmaslik tenglamasi ko'rinishini oladi:

$$Q = \rho \mathbf{S} \mathbf{v} = \rho S_{\perp} v = \text{const}\,. \tag{10.3}$$

$S_{\perp}$ – ko'ndalang kesimning normal tashkil etuvchisining yuzasi.

Agar suyuqlik siqilmaydigan bo'lsa (odatdagi tajribalarda suvni juda yuqori aniqlikda siqilmaydigan suyuqlik deb qarash mumkin), uning zichligi ρ barcha nuqtalarda o'zgarmas bo'ladi. Shuning uchun massa oqimining o'zgarmaslik (10.3) qonunidan naychaning ixtiyoriy nuqtasida tezlik shu nuqtadagi ko'ndalang kesim yuzasiga teskari proporsional ekanligi kelib chiqadi:

$$v = \frac{\text{const}}{S_{\perp}}. \tag{10.4}$$

Shunday qilib, nayning shakli tezlikni aniqlar ekan. Nay toraygan joylarda tezlik ortadi va aksincha, kengaygan joylarda kamayadi.

Agar oqim nostatsionar bo‘lsa, (10.3) tenglamaga o‘zgartirish kiritish kerak. Bir o‘lchamli nayni (10.2*b*-rasm) ko‘z oldimizga keltiramiz. Modda massasining saqlanishi biror hajmga kiruvchi suyuqlik miqdori $\rho v(x)Sdt$ unda yig‘ilayotgan $(d\rho/dt)Sdtdx$ va undan chiqib ketadigan $\rho v(x+dx)dtS$ suyuqlik miqdorlarining yig‘indisiga teng bo‘lishini anglatadi. Barcha kattaliklar umuman olganda ikkita x va t o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘lishini nazarda tutib ***xususiy hosila*** tushunchasini kiritamiz:

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \equiv \left(\frac{df(x,t)}{dt}\right)_{x=\text{const}}, \quad \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \equiv \left(\frac{df(x,t)}{dx}\right)_{t=\text{const}}$$

Bunga asosan massaning saqlanish qonunini quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin

$$\rho Sv(x)dt = \dot{\rho}Sdtdx + \rho Sv(x+dx)dt \Rightarrow$$

$$\rho Sv(x)dt = \dot{\rho}Sdtdx + \rho Sv(x)dt + S\frac{\partial(\rho v(x))}{\partial x}dtdx \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v(x))}{\partial x}.$$

Bu qonunning qabul qilingan ko‘rinishi ***uzluksizlik tenglamasi*** deyiladi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0, \; j = \rho v. \tag{10.5}$$

Ushbu tenglama divergensiya operatorini kiritish bilan bir o‘lchamli hol uch o‘lchamli holga umumlashtiriladi. Ixtiyoriy vektor funksiya $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(x,y,z)$ uchun ta’rifga binoan divergensiya quyidagicha aniqlanadi:

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}.$$

Endi umumiy holda uch o‘lchamli oqim uchun (10.5) tenglama quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \; \mathbf{j} = \rho\mathbf{v}. \tag{10.6}$$

Agar suyuqlik siqilmaydigan deb qaralsa, uning zichligining fazo va vaqtga nisbatan o‘zgarishini hisobga olmasa ham bo‘ladi. Bu holda (10.6) quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0. \tag{10.7}$$

(10.6) va (10.7) tenglamalarning ko‘rinishi, (10.3) va (10.4) ga nisbatan ancha murakkab shu bilan birga ustunlikka ega. Ular lokal xarakterga ega, ya’ni hech qanday tok nayiga bog‘lanmagan bo‘lib, va ularning yechimi, umuman olganda fazodagi nuqta koordinatasi (radius-vektori) $\mathbf{r}$ va vaqt t ning funksiyasi bo‘ladi.

10.2 Arximed kuchi

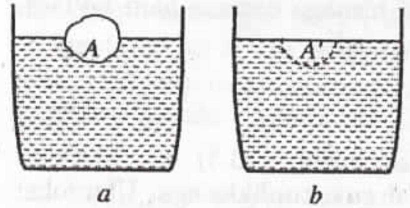
Qattiq jism - kristallardan farqli ravishda, suyuqlik ichki mikroskopik tartibli tuzilishga ega emas, ya’ni ularni tashkil etuvchi “g‘ishtchalar” yo‘q. Shu sababli tashqi kuchlanishga nisbatan suyuqlik sirtining orientatsiya masalasi paydo bo‘lmaydi, bunda barcha yo‘nalishlar teng huquqli bo‘ladi. Bundan tashqari suyuqlikda urinma kuchlanish nisbatan kam ahamiyatga ega. Qattiq jismda urinma kuchlanish siljish deformatsiyasi uchun javobgar bo‘lib statikada namoyon bo‘lsa, suyuqlikda u dinamikada faqat dissipatsiyani - ***yopishqoqlikni*** hisobga olganda namoyon bo‘ladi.

Tajribalarning ko‘rsatishicha, ***gidrostatika*** (suyuq jismlar muvozanati to‘g‘risidagi fan) va konservativ (dissipatsiyasiz) ***gidrodinamikada*** faqat bitta kuchlanish - bosim muhimdir. Bu kuchlanish izotroplik xossasiga ega. Tajriba natijalaridan kelib chiqqan bu tasdiq ***Paskal qonuni***ning mazmunini tashkil qiladi: ***suyuqlik va gaz bosimi barcha tomonga birday uzatiladi***. Boshqacha aytganda, bosim skalyar funksiya:

$$P = P(\mathbf{r}). \tag{10.8}$$

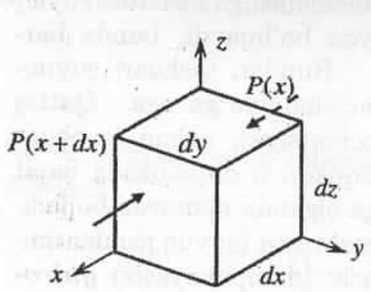
Bosimning izotropligidan kelib chiqadigan muhim natija, Arximed qonuni bo‘lib, quyidagicha ta’riflanadi: ***Suyuqlikka boti-***

rilgan jism o'zi siqib chiqargan suyuqlik og'irligiga teng bo'lgan kuch bilan yuqoriga itariladi. Bu qonun gazlarda ham bajariladi.



10.3-rasm.

Suyqlik solingan idishda suzayotgan A jismni (10.3a-rasm) va alohida shunday sathgacha suyuqlik quyilgan ikkinchi idishni (10.3b-rasm) ko'raylik. Bu idishda A jismning suyuqlikka botgan qismiga ekvivalent bo'lgan A' bo'shliq bor deb faraz qilamiz. Endi bu bo'shliqni suyuqlik bilan to'ldiramiz. A' "bo'shliq"ni to'ldiruvchi suyuqlik idishdagi suyuqlik bilan muvozanatda bo'ladi, shu sababli "bo'shliq"ga ta'sir etuvchi kuch uning xususiy og'irligini ko'tarib turadi. Bosimning skalyarligi (10.8) va urinma kuchlanishlarning yo'qligi uchun idishdagi suyuqlik bu "bo'shliq"dagi suyuqlikka qanday kuch bilan ta'sir qilsa, A jismga ham shunday kuch bilan ta'sir qiladi. Natijada jism suyuqlik bilan statik muvozanatda turadi.



10.4-rasm.

Yuqoridagi mulohazalar, garchi Arximed qonunining foydasiga dalil bo'lishiga qaramasdan, ular isbot bo'la olmaydi. Bu mulohazalarga qo'shimcha ravishda, dinamika masalalarini yechishda yaraydigan Arximed kuchining zamonaviy talqinini beramiz. Buni Paskal qonuniga tayangan holda amalga oshiramiz.

Suyuqlikda koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan va tomonlari dx, dy, dz bo'lgan parallelopipedni xayolan ajratamiz. Bunda suyuqlik yoki gaz bosimi faqat x koordinataga bog'liq bo'lsin, ya'ni $P = P(x)$ (10.4-rasm). Bu holda parallelopipedga x o'qi yo'nalishida $P(x)dydz$ qarama-qarshi yo'nalishda esa $P(x + dx)dydz$ kuch ta'sir qiladi. Natijaviy kuch ularning ayirmasiga teng. Shu vaqtda dx cheksiz kichik bo'lganligini inobatga olsak, kuchni dx bo'yicha chiziqli ko'rinishda

quyidagicha yozish mumkin ;

$$F_x = P(x)dydz - P(x+dx)dydz =$$

$$-\frac{dP}{dx}dxdydz = -\frac{dP}{dx}dV.$$

Kuch uchun hajmiy zichlik tushunchasini kiritish qulay:

$$f_x \equiv \frac{dF_x}{dV} = -\frac{dP}{dx}. \qquad (10.9)$$

Bosim har uchchala koordinataga bog'liq bo'lganda, (10.9) tenglamadagi oddiy hosila o'rniga gradient operatsiyasidan foydalanish kerak:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathrm{grad}P(\mathbf{r}), \qquad (10.10)$$

bu yerda

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathrm{grad}P(x,y,z) = \mathbf{i}\frac{dP}{dx} + \mathbf{j}\frac{dP}{dy} + \mathbf{k}\frac{dP}{dz}.$$

(10.9) va (10.10) ifodalar mos ravishda Arximed kuchining umumiy ta'rifining bir va uch o'lchovli ko'rinishidir.

Bu natijani og'irlik kuchi ostida bo'lgan siqilmaydigan suyuqlik masalasiga tatbiq qilamiz. $\rho(x) =$ const bo'lganda og'irlik kuchining hajmiy zichligi ρg ga teng. x o'qi suyuqlik ichiga, ya'ni pastga yo'nalgan bo'lsin. Ixtiyoriy kichik dV hajm elementining muvozanatda bo'lish shartini yozamiz (kuchlarning teng ta'sir etuvchisi nolga teng):

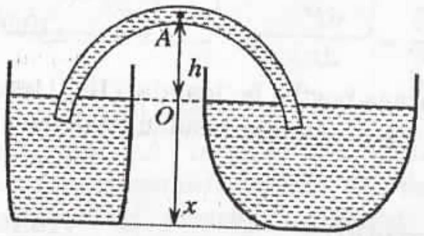
$$\rho g dV - \frac{dP}{dx}dV = 0.$$

Bu ifodaning har ikkala tomonini dV ga bo'lamiz va x bo'yicha integrallab, quyidagi sodda natijani olamiz:

$$P = P_0 + \rho g x, \qquad (10.11)$$

bu yerda P_0 – suyuqlik sirtidagi bosim. (10.11) ifodadan yuqorida eslatib o'tilgan masalalarning yechimini olish mumkin. Misol tariqasida, sifon bilan tutashtirilgan ikkita ochiq idishni ko'ramiz (10.5-rasm). A nuqtada suyuqlik bosimi d/h ($d/h \ll 1$, d – naycha diametri, h – idishdagi suyuqlik sathidan A nuqtagacha bo'lgan masofa) aniqligida quyidagiga teng bo'ladi:

$$P_0 + \rho g x_A = P_0 - \rho g h.$$



10.5-rasm.

Bu natija A nuqtaning koordinatasi x_A qayerdan hisoblanishidan qat'iy nazar yuqoridagi aniqlikda to'g'ri bo'ladi. Xususan, bu yerda koordinata suyuqlikning erkin sirtidan hisoblangan. Shu bilan 10.5-rasmda ko'rsatilganidek tutashtirilgan idishlarda muvozanatdagi suyuqliklar bir sathda bo'lishi tasdiqlanadi. Bu shartning buzilishi nay bo'ylab suyuqlik oqimining yuzaga kelishiga olib keladi, ya'ni suyuqlik sathi yuqori bo'lgan idishdan sathi past bo'lgan ikkinchi idishga oqib o'ta boshlaydi. Bu jarayon muvozanat yuzaga kelgunga qadar davom etadi. Bosim katta bo'lgan joydan bosim kichik bo'lgan joyga suyuqlik oqadi. Sifon mana shu prinsipga asoslangan.

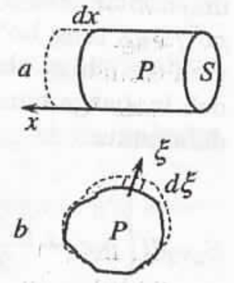
10.3 Bernulli tenglamasi

Bosimning ishi bilan bog'liq bo'lgan effektlarni ko'ramiz. Eng avval asosi S bo'lgan silindrni egallagan muvozanat holatdagi suyuqlik yoki gazni ko'ramiz (10.6a-rasm). Silindr hajmida bosim P ga teng va o'zgarmas bo'lsin. Silindrning asoslaridan biri kichik dx masofaga siljisin, bunda silindrning ichidagi oquvchi modda miqdori saqlansin, ya'ni harakatdagi asosdan suyuqlik (gaz) oqmaydi deb hisoblaymiz. Silindr ichidagi moddaning chegaradagi bosim kuchu PS ga teng va uning silindr hajmining kengayishida bajargan ishi quyudagi ifoda bilan aniqlanadi:

$$\delta A = PSdx = PdV, \qquad (10.12)$$

bu yerda dV – suyuqlik yoki gaz hajmining o'zgarishi. Kengayish jarayonida hajm bilan bir qatorda bosim ham kichik kattalikka ($P \to P + dP$) o'zgarsa, bu o'zgarish (10.12) ishga ikkinchi tartibli ($\sim dPdV$) kichik tuzatish beradi.

Endi suyuqlik yoki gaz turgan ixtiyoriy shakldagi idishning hajmi xiyol o'zgarsin. 10.6b-rasmda boshlang'ich va oxirgi holatlar uzluksiz va uzlukli chiziqlar bilan ko'rsatilgan. Paskal qonuniga ko'ra, bosim kuchi chegara sirtga har doim normal yo'nalishda ta'sir qiladi. Shu sababli chegaraga tegishli kichik ixtiyoriy yuzada yasovchisi normalga parallel bo'lgan silindr yasash mumkin (10.6b-rasm). Har bir silindr uchun (10.12) ifodani hosil qilingandagi mulohaza o'rinli bo'ladi. Shuning uchun har bir silindrning hissasi qo'shib chiqilsa, ish uchun yuqoridagi natija olinadi, ya'ni

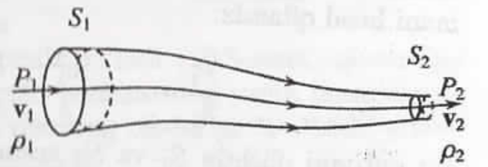


10.6-rasm.

$$\delta A = PdV,$$

bu yerda dV – suyuqlik hajmining to'liq o'zgarishi.

Suyuqlik yoki gazning dissipatsiyasiz statsionar oqimini ko'ramiz. Oqimda qandaydir tok naychasini ajratamiz (10.7-rasm). Bu tok naychasida S_1 va S_2 oqimga normal bo'lgan ikkita ixtiyoriy kesim tanlaymiz. ρ_1, v_1 va ρ_2, v_2 mos ravishda shu kesimlarga tegishli zichlik va tezlik bo'lsin. S_1 kesimdan dt vaqtda $S_1 v_1 dt$ hajmga teng bo'lgan modda oqib o'tadi. Bunda, oqib o'tgan gaz (suyuqlik) $P_1 S_1 v_1 dt$ ish bajaradi. Shuncha vaqt ichida S_2 kesimdan $S_2 v_2 dt$ hajmga teng bo'lgan modda oqib chiqadi va uning ustida $P_2 S_2 v_2 dt$ teng bo'lgan ish bajariladi. Oqim statsionar bo'lganligi uchun oqib kirayotgan ($\rho_1 S_1 v_1 dt$) va chiqayotgan ($\rho_2 S_2 v_2 dt$) modda massasi teng bo'ladi. Oquvchan muhit ***energiyasi hajmiy zichligi*** degan kattalikni kiritamiz:



10.7-rasm.

$$\frac{dE}{dV} = \rho\varepsilon + \frac{\rho v^2}{2}, \qquad (10.13)$$

bu yerda ε – birlik massaga to'g'ri kelgan ichki energiya va tashqi maydonlar energiyalarining yig'indisiga teng. Bu kattalik zichligi $\rho v^2/2$ ga teng bo'lgan kinetik energiyadan tashqari barcha energiyani o'z ichiga oladi. Modomiki, dissipativ effektlarni ahamiyatsiz deb inobatga olmagan ekanmiz, energiya saqlanish qonunidan foydalanamiz:

$$S_2 v_2 dt\left(\rho_2\varepsilon_2 + \frac{\rho_2 v_2^2}{2}\right) - S_1 v_2 dt\left(\rho_2\varepsilon_2 + \frac{\rho_2 v_2^2}{2}\right) = P_1 S_1 v_1 dt - P_2 S_2 v_2 dt. \qquad (10.14)$$

Bu tenglamani naycha kesimidan dt vaqtda oqib o'tadigan dm massaga hadlab bo'lamiz. Naychaning ixtiyoriy kesimida dm birday bo'lganligi uchun tenglamaning chap tomonidagi birinchi va o'ng tomonidagi ikkinchi hadni $dm = \rho_2 S_2 v_2 dt$, shu vaqtda bu tenglamaning chap tomonidagi ikkinchi va o'ng tomonidagi birinchi hadni $dm = \rho_1 S_1 v_1 dt$ ga bo'lish qulay. Natijada quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{P_1}{\rho_1} + \varepsilon_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho_2} + \varepsilon_2 + \frac{v_2^2}{2}.$$

Bu natijani olishda S_1 va S_2 kesimlar ixtiyoriy bo'lganligi uchun uni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$\frac{P}{\rho} + \varepsilon + \frac{v^2}{2} = \text{const}. \qquad (10.15)$$

Bu tenglama siqilmaydigan suyuqliklar uchun quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$P + \rho\varepsilon + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const}. \qquad (10.16)$$

(10.15) va (10.16) tenglamalar ***Bernulli tenglamasidir***.

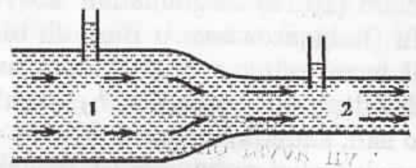
(10.16) tenglamada P – ***statik bosim*** deyiladi. U tinch turgan suyuqliklardagi kabi suyuqlikning siqilishi natijasida yuzaga

keladi. Statik bosim - suyuqlikning quvur devorlariga beradigan bosimidir. $\rho v^2/2$ – ***dinamik bosim*** deyiladi. Bu bosim suyuqlikning oqishi bilan bog'langan. Dinamik bosimni borligini bilish uchun suyuqlikni to'siq bilan to'xtatish kerak. Bunda u statik bosim ko'rinishida namoyon bo'ladi. $\rho\varepsilon$ - gidrostatik bosim deyiladi.

Shu o'rinda bu bosimlar to'g'risida quyidagi fikrlarni bildirish mumkin:

1. Statik bosim suyuqlik ichida birlik hajmdagi suyuqlikni ko'chirishda bajarilgan ish ma'nosiga ega;
2. Dinamik bosim harakatdagi suyuqlikning birlik hajmiga to'gri keluvchi kinetik energiya ma'nosiga ega;
3. Gidroststik bosim suyuqlikning birlik hajmiga to'g'ri keluvchi potensial energiya ma'nosiga ega.

Bu ma'noda (10.16) munosabat statik va dinamik bosimlar yig'indisining invariantligi deb izohlanadi. Siqilmaydigan suyuqlik oqimida tezlik qayerda kichik bo'lsa, o'sha yerda P bosim katta bo'ladi (10.8-rasm, quvurning 1-qismi) va aksincha tezlik qayerda katta bo'lsa, shu yerda P bosim kichik bo'ladi (10.8-rasm, quvurning 2-qismi). Purkagichning ishlashi, kemalarning yaqin masofalarda parallel kurslar bilan o'tishida ularning bir-biriga "tortilish" effekti va boshqalar shu bilan tushuntiriladi.



10.8-rasm.

Bernulli tenglamasining muhim xususiy holi sifatida og'irlik kuchi ta'siridagi oqim masalasini ko'rib chiqamiz. Bunda birlik massaga to'g'ri keluvchi ichki energiya o'zgarmaydi deb hisoblaymiz (ideal gaz uchun bu holat temperaturaning o'zgarmasligi bilan bog'liq). Bu hol uchun (10.13) tenglamani yozamiz:

$$\frac{dE}{dV} = \rho g h + \frac{v_2}{2}.$$

bu yerda h – oldindan aniqlangan sathdan hisoblangan balandlik. Endi ko'rilayotgan hol uchun Bernulli tenglamasini yozish mumkin:

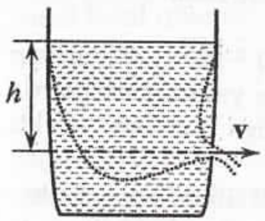
$$\frac{P}{\rho} + gh + \frac{v^2}{2} = \text{const}\,. \qquad (10.17)$$

Agar suyuqlik siqilmaydigan bo'lsa (10.17) tenglamadan quyidagi ko'rinishda foydalanish mumkin:

$$P + \rho gh + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const}\,. \qquad (10.18)$$

Tenglamaning bu ko'rinishi ko'pincha Bernulli nomi bilan bog'laniladi. Shuni ta'kidlash lozimki, (10.15) tenglama (10.18) ga nisbatan umumiyroqdir.

Idishdagi kichik teshikdan suyuqlikning oqib chiqish tezligi uchun (10.18) tenglamadan ***Torrichelli formulasini*** olish mumkin (haqiqatda esa, u Bernulli tenglamasi yozilishidan qariyb yuz yil avval olingan). 10.9-rasmdan masalaning qo'yilishi ravshan. Idishdagi suv balandligi h_1, teshik esa h_2 balandlikda joylashgan bo'lsin, shunday bo'lgach $h_1 - h_2 = h$. Suyuqlik balandligining o'zgarish tezligi suvning oqish tezligidan juda kichik bo'lish sharti bajarilishi uchun teshik yetarlicha kichik bo'lishi kerak ($\dot{h} \ll v$). (10.4) uzluksizlik tenglamasidan bu shart bajarilishi uchun teshikning kesimi idishning kesimidan ancha kichik bo'lishini ko'rish mumkin. Shunday qilib, zarur aniqlikda, birinchidan, oqimning statsionarligi shu bilan Bernulli tenglamasini tatbiq qilish mumkinligini ta'minlanadi. Ikkinchidan,suv sathining sekin pasayishi uyurmaviy oqimlar yuzaga kelmasligini ta'minlaydi. Bu o'z navbatida ko'rilayotgan oqimni birgina tok naychasi deb hisoblash imkonini beradi (10.9-rasmda uzlukli chiziq bilan belgilangan). Bu masalaning juda muhim tomoni, chunki (10.15) - (10.18) tenglamalar bir naycha doirasida invariantdir. Shuni ta'kidlash lozimki, bu tenglamalarni har doim ham bir butun oqimga tatbiq qilib bo'lmaydi.



10.9-rasm.

(10.17) tenglamani h_1 va h_2 sathlarga tatbiq qilamiz:

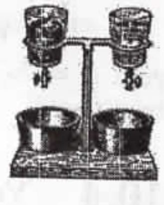
$$\frac{P_1}{\rho_1} + gh_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho_2} + gh_2 + \frac{v_2^2}{2}. \qquad (10.19)$$

Suyqlik siqilmaydigan bo'lganligi uchun $\rho(h_1) = \rho(h_2)$, $P_1 \approx P_2 = P_{atm}$. h_1 sathda tezlik nolga teng. Bularga asosan (10.19) tenglamadan h_2 sathdagi tezlik uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$v = \sqrt{2gh}. \qquad (10.20)$$

Shunday qilib, siqilmaydigan suyuqlikning idishdagi kichik teshikdan oqib chiqish tezligi h balandlikdan erkin tushuvchi jismning tezligi bilan bir xil ekan. Bu Torrichelli formulasidir.

Torrichelli formulasidan kichik teshikdan suyuqlikning oqib chiqish tezligi suyuqlik zichligiga umuman bog'liq emasligi ko'rinib turibdi. Suyuqlik - suv, simob yoki spirt bo'ladimi farqi yo'q, ularning hammasi bir xil tezlik bilan oqib chiqadi. Buni 10.10-rasmda ko'rsatilgan tajribada kuzatish mumkin. O'ng va chap tomondagi idishlarga bir xil sathgacha turli suyuqliklar quyiladi va idish tagidagi jo'mrak bir vaqtda ochiladi. Bunda idishlardagi suyuqliklar bir xil vaqtda oqib chiqishini ko'rish mumkin. Muhimi suyuqlik siqilmaydigan va idishning usti ochiq bo'lishi kerak. Masalan, Oyda erkin tushish tezlanishi Yerdagiga nisbatan 6 marta kichik. Demak, Oyda samovardan stakanni to'ldirish uchun Yerdagiga nisbatan taxminan 2,5 marta ko'p vaqt kerak bo'ladi. Torrichelli formulasidan yana bir muhim xulosa kelib chiqadi. Buni quyidagi masala orqali ko'rib chiqamiz.

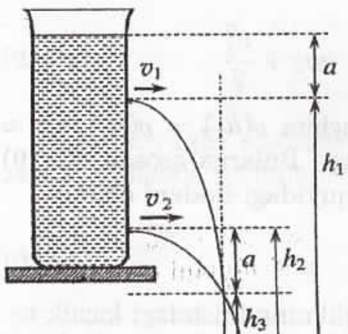


10.10-rasm.

Masala. *Idishning turli balandliklaridagi teshiklardan gorizontal yo'nalishda oqib chiqayotgan suyuqlik oqimlarining kesishish nuqtasi balandligini aniqlang.*

Yechish. Torrichelli formulasiga asosan teshiklardan chiqayotgan oqimlarning tezliklari (10.11-rasm):

$$v_1 = \sqrt{2ga}, \quad v_2 = \sqrt{2g(a + h_1 - h_2)}. \qquad (*)$$



10.11-rasm.

Suyuqlik oqimlarining kesishish nuqtasigacha bo'lgan masofani bosib o'tish vaqtlari mos ravishda

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(h_1 - h_3)}{g}},$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2(h_2 - h_3)}{g}}. \quad (**)$$

Kesishish nuqtasida har bir oqimning idishdan uzoqlashish masofasi bir xil. Suyuqlik zarralarining harakat tezligining gorizontal tashkil etuvchilar o'zgarmaydi (havoning qarshiligi inobatga olinmadi), shu sababli $v_1t_1 = v_2t_2$. Bu fikrlarga asosan va (*), (**) ifodalardan

$$\sqrt{2a(h_1 - h_2)} = \sqrt{2(a + h_1 - h_3)(h_2 - h_3)},$$

yoki $a = h_2 - h_1$ kelib chiqadi. Bu formula tajriba natijalarini tasdiqlaydi.

10.4 Yopishqoqlik. Puazeyl oqimi

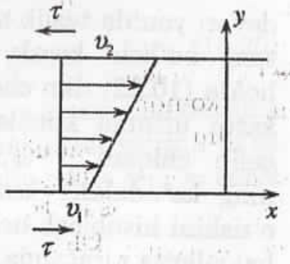
Biz shu vaqtgacha suyuqlik va gazlarda urinma kuchlanishlar inobatga olinmadi, faqat Paskal qonuni doirasida izotrop bosimni ko'rish bilan chegaralandik. Paskal qonuni gidrostatika masalalarini o'rganishda yaxshi natijalar beradi, ammo fazoviy bir jinsli bo'lmagan oqimlarda dissipativ effektlar - ***yopishqoqlik*** ahamiyat kasb eta boshlaydi, buning natijasida urinma kuchlanishlar paydo bo'ladi.

Suyuqlik oqimining biror qismida x o'qi bo'ylab harakatlanayotgan bir-biriga cheksiz yaqin ikkita qatlam bir-biri bilan gorizontal S sirtda uringan bo'lsin (10.12-rasm). Tajriba shuni ko'rsatadiki, urinish yuzasi qancha katta bo'lsa va ko'rilayotgan joyda oqim

tezligi v sirtga perpendikular yo'nalishda (10.12-rasm, y o'q) qanchalik tez o'zgarsa, qatlamlar o'rtasida paydo bo'ladigan F ishqalanish kuchi ham shuncha katta bo'lar ekan. Tezlikning y o'q yo'nalishidagi o'zgarish jadalligi undan y bo'yicha olingan dv/dy hosila bilan xarakterlanadi. Nihoyat, tajribalardan olingan natijani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$F = \eta S\frac{dv}{dy}. \qquad (10.21)$$

Bu yerda $\mathbf{F}$ – suyuqlikning yuqorida yotgan qatlamining pastdagi qatlamga ta'sir kuchi, η - proporsionallik koeffitsienti bo'lib, suyuqlikning ***yopishqoqlik koeffitsienti*** deb ataladi (qisqacha suyuqlikning yopishqoqligi). Uning o'lchovi (10.21) tenglamadan kelib chiqadi: $[\eta] = [m]/[lt]$, o'lchov birligini 1 Pa·s deb qabul qilingan. $\mathbf{F}$ kuchning yo'nalishi yuqoridagi qatlam pastdagiga nisbatan tezroq yoki sekinroq harakat qilishiga bog'liq (10.12-rasm, o'ng yoki chap). (10.21) ifodadan urinma kuchlanishlar uchun quyidagi ifoda kelib chiqadi:

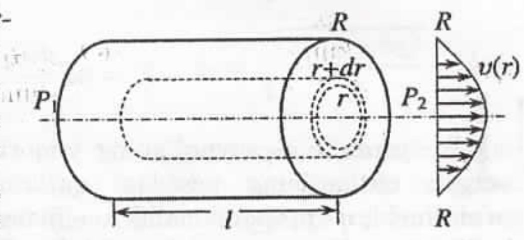


10.12-rasm.

$$\tau = \eta\frac{dv}{dy}. \qquad (10.22)$$

Yopishqoqlik koeffitsienti η turli suyuqliklar uchun turlicha qiymatlarga ega bo'lib, aniq bir suyuqlik uchun tashqi sharoitlarga, birinchi navbatda temperaturaga, bog'liq. Ishqalanish kuchlari o'z tabiatiga ko'ra qattiq jismlar orasidagi ishqalanish kuchi kabi molekulalar orasidagi ta'sir kuchlar bo'lib, elektromagnit tabiatga ega. Siqilmaydigan suyuqliklar uchun sarflanish masalasini ko'rib chiqamiz. Quvurning kesimidan vaqt birligida oqib o'tadigan suyuqlik miqdoriga ***sarflanish*** deyiladi. Bu masala katta amaliy ahamiyatga ega. Masalan, neft quvurlarining ishini tashkil qilishda va oddiy suv quvurlari uchun ham bu masalani yechish so'zsiz talab qilinadi.

Bosimlar farqi berilganda ko‘ndalang kesimi o‘zgarmas bo‘lgan gorizontal to‘g‘ri silindr shaklidagi quvurdan suyuqlikning sarflanishini hisoblashga kirishamiz. Quvurning uzunligi l, radiusi R, uchlaridagi bosimlar farqi P_1 va P_2 ($P_1 > P_2$), suyuqlik zichligi ρ va yopishqoqligi η berilgan bo‘lsin (10.13-rasm).



10.13-rasm.

Ishqalanish kuchining mavjud bo‘lishi quvur markazidan turli masofalarda suyuqlik turli tezliklar bilan oqishiga olib keladi. Xususan, quvur devori yonida tezlik nolga teng bo‘lishi kerak, aks holda (10.22) dan cheksiz katta urinma kuchlanish kelib chiqadi. Quvurning ko‘ndalang kesimida vaqt birligida qancha suyuqlik oqib o‘tishini hisoblash uchun ko‘ndalang kesim yuzasini cheksiz kichik halqalarga ajratamiz. Halqaning ichki radiusi r, tashqi radiusi esa, $r+dr$ teng bo‘lsin. Har bir halqa uchun suyuqlik tezligini o‘zgarmas deb qaraymiz. Cheksiz kichik halqalar bo‘yicha sarflanishini yig‘ib suyuqlikning to‘liq sarflanishini topamiz.

Yuzasi $2\pi r dr$ bo‘lgan cheksiz kichik halqadan vaqt birligida $v(r)$ tezlik bilan oqib o‘tadigan suyuqlik massasi quyidagi ifoda bilan aniqlanadi:

$$\frac{dm}{dt} = 2\pi r dr \rho v(r) \qquad (10.23)$$

Suyuqlikning Q to‘la sarflanishini topish uchun (10.23) ifodani r bo‘yicha 0 dan R gacha integrallaymiz:

$$Q \equiv \frac{dm}{dt} = 2\pi\rho \int_0^R r v(r) dr, \qquad (10.24)$$

bu yerda $2\pi\rho$ o‘zgarmas kattalikni integraldan tashqariga chiqardik. (10.24) ifodadagi integralni hisoblash uchun suyuqlik tezligini radiusga bog‘lanishini, ya’ni $v(r)$ funksiyaning aniq ko‘rinishini bilish

kerak. Bu funksiyani topish uchun bizga ma’lum bo‘lgan mexanika qonunlaridan foydalanamiz.

Biror vaqt momentida radiusi r va uzunligi l bo‘lgan silindr shakliga ega bo‘lgan suyuqlik hajmini ko‘ramiz (10.13-rasm). Bu hajmni to‘ldirib turgan suyuqlikni cheksiz kichik suyuqlik zarralarining to‘plami deb qarash mumkin. Bu suyuqlik zarralar o‘zaro ta’sirlashuvchi moddiy nuqtalar sistemasini tashkil qiladi. Statsionar oqimda bu moddiy nuqtalarning tezliklari vaqtga bog‘liq bo‘lmaydi. Shunday ekan, bu sistamaning massa markazi o‘zgarmas tezlik bilan harakat qiladi. Moddiy nuqtalar sistemasi massa markazining harakat tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$M\frac{d\mathbf{V}_{im}}{dt} = \sum \mathbf{F}_{tash}, \qquad (10.25)$$

bu yerda M – sistamaning to‘liq massasi, $\mathbf{V}_{im}$ – massa markazining tezligi, $\sum \mathbf{F}_{tash}$ – ko‘rilayotgan sistemaga tanlangan vaqtda ta’sir qilayotgan tashqi kuchlarning yig‘indisi. Ushbu holda $\mathbf{V}_{im} = \mathrm{const}$ bo‘lganligi uchun (10.25) ga asosan

$$\sum \mathbf{F}_{tash} = 0.$$

Tashqi kuchlar ikki qismdan iborat: ko‘rilayotgan silindr asoslariga ta’sir qiluvchi bosim kuchi F_{bos} va suyuqlik tomonidan silindrning yon sirtiga ta’sir qiluvchi ishqalanish kuchi ((10.21) ga q.):

$$F_{bos} = \pi r^2 (P_1 - P_2), \quad F_{ishq} = 2\pi r l \eta \frac{dv}{dr}.$$

Yuqorida ko‘rsatilgandek, bu kuchlarning yig‘indisi nolga teng bo‘lishi kerak, ya’ni

$$2\pi r l \eta \frac{dv}{dr} + \pi r^2 (P_1 - P_2) = 0.$$

Bu munosabatni quyidagi ko‘rinishda ham yozish mumkin

$$dv = -\frac{(P_1 - P_2)}{2\eta l} r dr.$$

Bu tenglikning har ikkala tomonini integrallaymiz:

$$v = -\frac{(P_1 - P_2)}{4\eta l} r^2 + \text{const}.$$

Integrallash doimiysi

$$r = R$$

da v tezlik nolga teng bo'lishidan topiladi. Nihoyat, tezlik uchun quyidagi ifodani topamiz:

$$v = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta l}(R^2 - r^2). \tag{10.26}$$

Demak, suyuqlik tezligi quvur markazida maksimal bo'lib, markazdan uzoqlashgan sari parabolik qonun bilan kamaya boradi va bevosita quvur devorida nolga teng bo'ladi. (10.13-rasm, o'ng tomon).

Suyuqlik sarflanishi uchun (10.26) ifodani (10.24) ga qo'yib topamiz:

$$Q = \pi\rho \frac{(P_1 - P_2)}{2\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr,$$

yoki

$$Q = \pi\rho \frac{(P_1 - P_2)}{8\eta l} R^4. \tag{10.27}$$

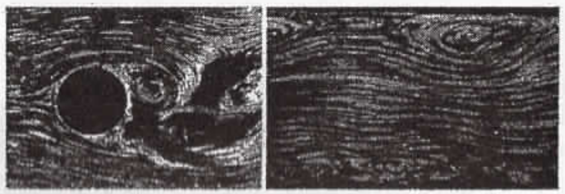
Suyuqlik sarflanishini aniqlovchi bu ifoda ***Puazeyl formulasi*** deyiladi. (10.27) formulaning o'ziga xos xususiyati – suyuqlikning sarflanishi quvurning radiusiga kuchli bog'lanishdaligidir, ya'ni sarflanish radiusning to'rtinchi darajasiga proporsional. Puazeyl bu formulani keltirib chiqarmagan, u faqat muammoni kapillarlarda suyuqlikning harakatini tekshirish orqali o'rgangan. Suyuqlikning yopishqoqligini aniqlash metodlarining biri Puazeyl formulasiga asoslangan.

10.5 Turbulentlik

Puazeyl formulasini faqat suyuqlarlikning laminar oqimi uchun tatbiq qilish mumkin. Suyuqlik zarralari turg'un trayektoriyalar

(naychalar) bo'ylab harakatlansa, oqim ***laminar*** deyiladi. Yetarlicha katta tezliklarda laminar oqim noturg'un, xaotik bo'lib qoladi va ***turbulent*** deb ataluvchi oqimga o'tadi. Bu holda gidrodinamikaning asosiy tenglamalari o'z kuchini saqlaydi, ammo ushbu bobda olingan natijalarning aksariyatini qayta ko'rib chiqish kerak bo'ladi.

Turbulent oqimning tabiati tashqi sharoitga bog'liq holda juda turlicha bo'lishi mumkin. Kundalik tajribalardan ***siqilmaydigan suyuqlikning gidrodinamik turbulentligi*** bilan biz yaxshi tanishmiz - jo'mrakdan oqayotgan suv bunday oqimga misol bo'la oladi. Suyuqlikda bunday holat oqimdagi tezliklarning farqi hisobiga yuzaga keladi. Bunda tezliklarning farqi tovush tezligidan ancha kichik bo'lishi yetarli. Ko'plab uyurmalar hosil bo'lishi turbulent oqimga xosdir. 10.14*a*-rasmda siqilmaydigan suyuqlik sharni aylanib o'tishida, 10.14*b*-rasmda esa, to'g'ri quvurda uyurmalarning hosil bo'lishi sxematik tarzda tasvirlangan.



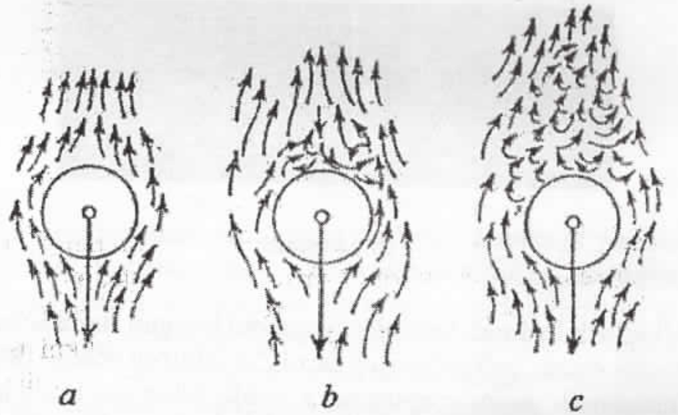
a) *b)*

10.14-rasm.

Ta'kidlash lozimki, turbulentlikga oid bo'lgan barcha baholashlarda tezlik emas, balki ularning farqi Δv ishtirok etadi. Haqiqatan ham, qandaydir oqim o'zgarmas **v** tezlik bilan sodir bo'layotgan bo'lsa, boshqa sanoq sistemasiga o'tish bilan tezlikni istagancha katta yoki kichik qilib olish mumkin, shu sababli oqimning haqiqiy xarateristikasi bu ularning farqidadir.

Turbulent holatlar fizikasini o'rganish ushbu kitob doirasiga kirmasada, o'quvchida turbulentlik to'g'risida taassurot qolishi uchun ba'zi fikrlarni ***o'xshashlik va o'lchov birliklari metodlaridan*** foydalanib bayon qilamiz. O'lchov birliklari olingan natijalarning to'g'riligini tekshirishning muhim usullaridan biri bo'lishi bilan bir qatorda, xususan, mexanikada yangi fizik natijalarni olish imkoniyatini beradi. Bu usulning imkoniyatlari cheklangan va bashorat qilish kuchi mutlaq emas. Bunga quyidagi masala yaqqol misol bo'ladi.

10.15-rasmda tasvirlangan turbulent oqimga o'tishning fizik mohiyatini tahlil qilib ko'ramiz. Oqim laminar qolar ekan unda fazoviy masshtab (10.14*a*-rasmda sharning radiusi yoki 10.14*b*-rasmda quvurning diametri) saqlanadi. Turbulentlikga o'tish masshtabning maydalashishiga, demak, tezlikdan fazoviy o'zgaruvchilar bo'yicha hosilalarining o'sishiga olib keladi. (10.21), (10.22) formulalardan ko'rish mumkinki, bunday o'sishiga yopishqoqlik effektlari qarshilik ko'rsatadi. Demak, ***yopishqoqlik qancha katta bo'lsa, turbulentlikga o'tish shuncha qiyin*** kechadi. Shu bilan birga ***tezliklar farqi qanchalik katta bo'lsa, laminar oqimdan turbulentlikka o'tish shunchalik oson*** kechadi degan tasdiq ham o'rinlidir. Buning teskarisi - fazoviy bir jinsli oqim turbulent oqimga o'tmaydi, chunki bu holat tinch holatga ekvivalent.



10.15-rasm.: Tezlik ortgan sari oqim laminardan turbulentlikka o'tadi.

$$[\eta] = \frac{[m]}{[l][t]}.$$

Bu yerda ishtirok etayotgan birliklardan o'lchovsiz kombinatsiya (kattalik) tuzamiz:

$$\Re e = \frac{m}{lt\eta}.$$

Oqimni xarakterlovchi kattaliklar zichlik, masshtab va tezlik orqali massa, uzunlik va vaqtni yozamiz:

$$m = \rho a^2, \quad l = a, \quad t = a/v.$$

Bularni e'tiborga olib, $\Re e$ kattalik uchun quyidagi o'lchov birliksiz ifodani hosil qilamiz:

$$\Re e = \frac{\rho v l}{\eta}. \tag{10.28}$$

Bu kattalikni ***Reynolds soni*** deb atash qabul qilingan. Reynolds sonini quyidagi ko'rinishda qayta yozish mumkin

$$\Re e = \frac{\rho v^2 l^3}{\eta v l^2} = \frac{(\rho l^3) v^2}{2} \frac{2}{\eta v l^2}.$$

Bundan ko'ramizki, Reynolds soni harakatdagi suyuqlikning $T \sim \rho v^2 l^3/2$ kinetik energiyasining yopishqoqlik kuchlariga qarshi xarakterli l masofada $A \simeq \eta v l^2/2$ bajarilgan ishga (bajarilgan ish hisobiga yo'qotilgan kinetik energiyaga) nisbatiga teng ekan. Suyuqlik η dan tashqari yana ρ zichlik, oqim esa, fazoviy masshtab va v tezlik bilan xarakterlanadi. Yuqoridagi mulohazalar $\Re e$ soni qancha katta bo'lsa, turbulent holatga o'tish shunchalik qulay bo'ladi degan xulosaga olib keladi. Buning teskarisi, ya'ni Reynolds soni kichik bo'lganda suyuqlik oqimi chamasi laminar bo'ladi.

Tajriba natijalari bu mulohazalar bilan to'la mos tushadi. Ma'lum bo'lishicha, Haqiqatan ham, ***Reynolds sonining kritik qiymati*** mavjud bo'lib, bundan katta qiymatlarda laminar oqimdan turbulentlikka o'tish ro'y beradi. Tajribalarning ko'rsatishicha, $\Re e_{cr}$ universal bo'lmasdan sistemaning geometriyasiga bog'liq ekan. Masalan, quvurdagi oqim uchun, $\Re e_{cr} \sim 2 \cdot 10^3$ (10.14*b*-rasm), shu vaqtda aylanayotgan quvurda gaz turbulentlikka $\Re e_{cr} \sim 50$ da o'tadi. Mana shunga o'xshsash momentlar o'lchov birliklarga asoslangan metodning kuchsiz tomonidir.

Ammo bu metodning kuchli tomoni ham bor. ρ, v, a, η kattaliklar juda katta oraliqda o'zgarishi mumkin; quvur kapillar, balki diametri bir necha o'n metr bo'lgan aerodinamik quvur bo'lishi mumkin, bunga qaramasdan javob universal bo'lib, u ham bo'lsa faqat bitta o'lchov birliksiz kattalik - Reynolds soniga tayanadi. Bunday bog'lanishlar fizikada ***o'xshashlik qonunlari*** deb ataladi. Bular asosida bir eksperimental sharoitdan boshqasiga o'tish ***skeyling*** (masshtab o'zgaradi) deb ataladi. Shunday qilib, biror fizik hodisa uchun o'xshashlik qonuni ma'lum bo'lsa, tajribalarni oson va qulay yoki xavfsiz bo'lishi uchun kichik masshtablarda o'tkazish mumkin. Keyin skeyling o'tkazib kerakli masshtab uchun javobni olamiz. Shuning uchun o'lchov birliklar va o'xshashlik metodlari zamonaviy fizikada o'z o'rniga ega.

Savollar

10.1. Tok - suyuqlik oqimi naychasiga ta'rif bering.

10.2. Suyuqlik va gazlar uchun zichlik va tezlik tushunchalari qanday ma'noga ega?

10.3. Qanday suyuqlik siqilmaydigan deyiladi?

10.4. Siqilmaydigan suyuqlik oqimining tezligi quvur ko'ndalang kesimi bilan qanday bog'langan?

10.5. Uzluksizlik tenglamasi qanday ma'noga ega?

10.6. Gidrodinamikada qanday kuchlanish muhim?

10.7. Suyuqlik va gazlarning qanday xossasidan Paskal qonuni kelib chiqadi?

10.8. Sifon qanday prinsipga asosan ishlaydi?

10.9. Yopishqoqlik va urinma kuchlanish qanday bog'langan?

10.10. Yopishqoqlik koeffitsienti nima?

10.11. Yopishqoq suyuqlik uchun Bernulli tenglamasidan foydalanish mumkinmi?

10.12. Suyuqlikda qanday bosimlar bor?

10.13. Suyuqlik oqimida energiya zichligi tuchunchasi nima uchun kiritiladi?

10.14. Bernulli tenglamasi qanday suyuqliklar uchun yozilgan?

10.15. Qanday oqim Puazeyl oqimi deb ataladi?

10.16. Puazeyl formulasi nimani aniqlaydi?

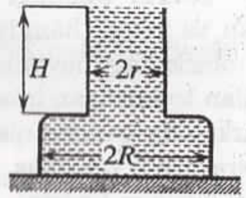
10.17. Qanday oqim laminar deb ataladi?

10.18. Qanday oqim turbulent deb ataladi?

10.19. O'lchov birliklar va o'xshashlik metodlari nimalarga asoslangan?

Masalalar

10.1. Ikkita silindrdan va bitta yassi tekislikdan tashkil topgan tubi yo'q idish zich holda stol ustida turibdi. Idishning o'lchamlari rasmda ko'rsatilgan. Idishning og'irligi G ga teng. Idishga suyuqlik quyiladi. Suyuqlikning sathi idishning yuqori chegasiga yetganda idish ko'tarilgan. Suyuqlikning zichligini toping.



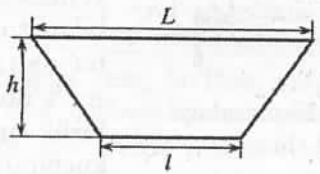
10.1-masalaga oid chizma.

10.2. Pallali tarozida tortishda havoda og'irlikni yo'qotishga tuzatish kiritmaslik uchun qadoq toshlarini qanday moddadan tayyorlash kerak.

10.3. G'ovak metall shar suyuqlik sirtida suzib yuribdi. Shar suyuqlik ichida suzishi uchun uning ichiga qanday yuk qo'yish kerak? G'ovak sharning tashqi va ichki diametrlari mos ravishda d_1 va d_2, shar yasalgan moddaning zichligi ρ_1, suyuqlikniki ρ_2.

10.4. Suyuqlik sirtida suzayotgan bir jinsli to'g'ri parallelepipedning muvozanat shartini toping. Parallelepipedning gorizontal qirrasining tomonlari a va b $(a > b)$, balandligi c. Jismning zichligi ρ_1, suyuqlikniki ρ_2 $(\rho_1 < \rho_2)$.

10.5. Daryodagi to'g'onga suv tomonidan ta'sir qiluvchi natijaviy bosim kuchuni toping. To'g'on o'lchamlari: $h = 5\,\mathrm{m}$, $L = 15\,\mathrm{m}$, $l = 10\,\mathrm{m}$ va suv zichligi $\rho = 1000\mathrm{kg/m^3}$.



10.5-masalaga oid chizma.

10.6. Qanday h balandlikda atmosfera bosimi ikki marta kamayadi? Yer sirtida bosim $101{,}3\,\mathrm{kPa}$, erkin tushish tezlanishi $9,8\,\mathrm{m/s^2}$ va havoning zichligi $1,293\,\mathrm{kg/m^3}$.

10.7. Zich yopilmagan jo'mrakdan suv oqmoqda. Chizg'ich yordamida jo'mrakdan oqayotgan suv tezligini qanday aniqlash mumkin?

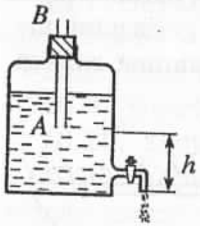
10.8. Sekin to'lqinlanib turgan okean ustida doimiy shamol esmoqda. Nima uchun shamol kuchayganda to'lqin amplitudasi ortadi?

10.9. Nima uchun kuchli shamolda katta ko'zli rom oynalari tashqariga qarab bo'rtadi?

10.10. Ikki kema yaqin masofada parallel kurs bilan suzayotganda nima uchun bir-biriga yaqinlashadi?

10.11. Uzunligi $L = 1\,\text{m}$ bo'lgan probirka havo bilan to'ldirilgan va yengil hamda oson harakatlanadigan tiqin bilan yopilgan. Probirkadagi havoning bosimi $P_0 = 10^5\,\text{Pa}$. Shu probirka suyuqlik bilan to'ldirilgan idishga 40 m chuqurlikka tushirilgan. Bunda probirkaning qancha qismi $\delta = x/L$ havo bilan band bo'ladi? Temperatura o'zgarmas, to'yingan bug' bosimi juda kichik, suyuqlik zichligi $\rho = 1\,\text{g/sm}^3$, $g = 10\,\text{m/s}^2$.

10.12. Vertikal turgan silindr shaklidagi idishga uning tubidan H balandlikkacha ideal suyuqlik quyilgan. Idish asosining yuzasi S. Idishning tubida yuzasi s bo'lgan teshik bor. Boshlang'ich holatda teshik yopiq. Teshik ochilganda undan suyuqlik chiqa boshlaydi. Qancha vaqtda idishdagi suyuqlikning sathi idish asosiga nisbatan h balandlikkacha pasayadi? Idishdagi suyuqlik qancha vaqt ichida batamom oqib chiqadi?



10.13-masalaga oid chizma.

10.13. Suyuqlik idishdan doimiy tezlik bilan oqib chiqishi uchun rasmda ko'rsatilgan qurilmadan foydalaniladi. Shu hol uchun oqim tezligini aniqlang.

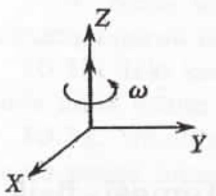
10.14. Radiusi $r_1 = 10$ sm bo'lgan nay yopishqoqligi $\eta = 10^{-3}\text{Pa}\cdot\text{s}$ bo'lgan suyuqlik bilan to'ldirilgan. Shu nayning geometrik o'qi bo'ylab radiusi $r_2 = 0,1$ sm bo'lgan sim $v_0 = 10$ sm/s doimiy tezlik bilan tortilmoqda. Simning birlik uzunligiga to'g'ri keluvchi ishqalanish kuchuni aniqlang. Nayning radiusi bo'yicha tezlik qanday taqsimotga ega?

A Ilova

A.1 Vektorlar. Koordinatalar sistemasi - fizik qonunlarning invariantligi

Vektor tushunchasi va vektorlar ustidagi asosiy algebraik amallarni maktab kursidan ma'lum deb hisoblaymiz. Vektor - koordinatalar sistemasini tanlashga bog'liq bo'lmagan fizik kattalik bo'lib, qiymati va yo'nalishi bilan aniqlaniladi. Vektor kattalik faqat qiymati bilangina (koordinatalar sistemasiga bog'lanmagan) aniqlaniladigan skalyar kattalikdan farqlanadi. Skalyar kattaliklarga misol qilib massa, energiya, temperatura, elektr zaryadi, zarra bosib o'tgan yo'l va boshqalarni misol sifatida sanab o'tish mumkin. Vektorlarga misol qilib tezlik, tezlanish, kuch, elektr va magnit maydon kuchlanganliklarini keltirish mumkin. Vektor uchun yuqorida keltirilgan ta'rifga yana shuni ham ko'rsatish kerakki, har qanday yo'nalishga ega bo'lgan kattalik ham vektor bo'lavermaydi, balki, geometrik qo'shiluvchi, ya'ni parallelogram qoidasi bo'yicha qo'shiladigan kattaliklar vektor kattalik bo'lib hisoblanadi.

Yuqorda ko'rganimizdek, jismning qandaydir bir o'q atrofidagi burilish burchagini, bir qarashda, vektor kattalik deb hisoblash mumkindek ko'rinadi: u burilish burchagiga teng bo'lgan miqdoriy qiymatga va aylanish o'qi bilan mos tushuvchi va parma qoidasi bo'yicha aniqlanuvchi yo'nalishga ega. Biroq ikkita bunday burilishlar vektorlarning qo'shish qoidasi bilan qo'shilmaydi. Cheksiz kichik burchaklarga burilish bundan mustasno. Chunki, jismning cheksiz kichik buririlish burchagining shu burilish uchun ketgan cheksiz kichik vaqtga nisbati burchak tezlikni beradi. Burchak tezlik vektor kattalikdir (11.1-rasm). Masalan, jism biror o'q atrofida ω_1 va boshqa o'q atrofida esa ω_2 burchak tezliklar bilan aylanayotgan bo'lsin. Jismning bunday harakati burchak tezliklarning vektor yig'indisi $\omega = \omega_1 + \omega_2$ ga teng bo'lgan burchak tezlik bilan uchinchi o'q atrofida aylanishiga ekvivalentdir.

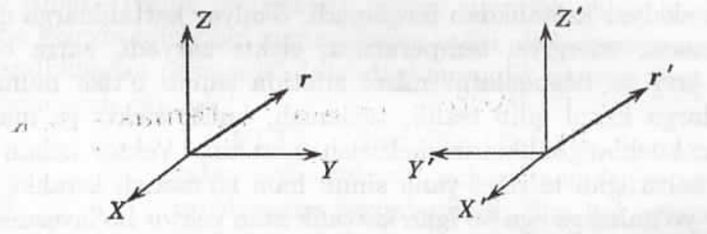


11.1-rasm. Burchak tezlik yo'nalishini aniqlashga doir chizma.

Vektorlar bilan ishlaganda, ikki turdagi vektorlarni farqlash lozim bo'ladi: ulardan biri **qutb** vektori – radius-vektor, tezlik, tezlanish, kuch, elektr maydon kuchlanaganligi, ikkinchisi aksial (psevdo) – burchak tezlik, magnit maydon kuchlanganligi, impuls momenti.

Koordinatalar sistemasining inversiyasida (o'qlarning ishorasi o'zgarganda) o'ng sistema chapga o'tadi va qutb vektor o'z ishorasini o'zgartiradi (2.2-rasmga q.).

$$\mathbf{r} \to -\mathbf{r} \quad \text{radius-vektor}, \quad \mathbf{v} \to -\mathbf{v} \quad \text{tezlik},$$
$$\mathbf{a} \to -\mathbf{a} \quad \text{tezlanish}, \quad \mathbf{F} \to -\mathbf{F} \quad \text{kuch}. \tag{A.1}$$



11.2-rasm. O'qlardan birining ($Y \to -Y$) inversiyasi natijasida qutb vektorning shu komponentasining ishorasi o'zgaradi.

Bunday operatsiyaga nisbatan aksial vektor ishorasini o'zgartirmaydi, chunki ularning almashtirish qonunlari manfiy ishora bilan farqlanadi (11.3-rasm). Aksial vektorlaga burchak tezlik va magnit maydon kuchlanganligi misol bo'ladi:

$$\boldsymbol{\omega} \to \boldsymbol{\omega} \quad \text{burchak tezlik}, \quad \mathbf{M} \to \mathbf{M} \quad \text{moment},$$
$$\mathbf{H} \to \mathbf{H} \quad \text{magnit maydon kuchlanganligi}. \tag{A.2}$$

Fizikada barcha fizik qonunlar invariant shaklda, ya'ni koordinatalar sistemasiga bog'liq bo'lmasligi ifodalanishi kerak. Bu

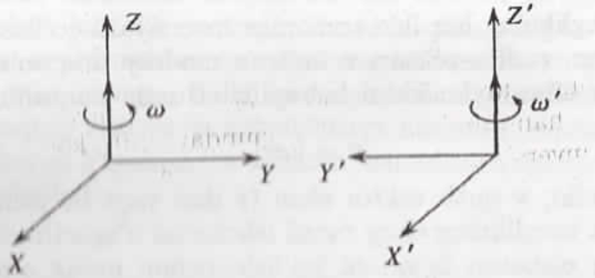
xususan shuni anglatadiki, masalan, aksial va qutb vektorlarni tenglashtirish mumkin emas, chunki chap va o'ng koordinatalar sistemasida ular har xil qoida bilan almashadi. Masalan, biror qonun o'ng sistemada

$$\textbf{aksial} = \textbf{qutb} \tag{A.3}$$

ko'rinishga ega bo'lsa, chap sistemada esa quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\textbf{aksial} = -\textbf{qutb} \tag{A.4}$$

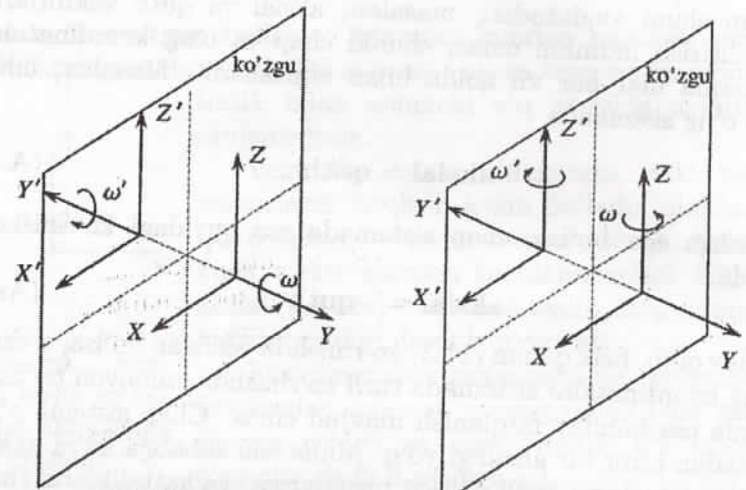
Shunday qilib, fizik qonun (11.3) ko'rinishda yozilgan bo'lsa, u chap va o'ng koordinatalar sistemada turli ko'rinishda namoyon bo'ladi, tabiatda esa bunday farqlanish mavjud emas. Chap sistema o'ng sistemadan biror bir afzalligi yo'q. Mana shu sababga ko'ra aksial va qutb vektorlarni, turli o'lchov birliklariga ega kattaliklarni (masalan, sekund va gramm) qo'shib yoki ayirib bo'lmaganidek, ularni ham qo'shib yoki ayirib bo'lmaydi.



11.3-rasm. O'qlardan birining $Y \to -Y$ inversiyasi natijasida aksial vektorning ishorasi o'zgarmaydi.

Xulosa: ***O'ng koordinata sistemasidan chapga o'tilganda biror vektor tenglik o'zgarishi yoki o'zgarmasligini tekshirish lozim.*** Modomiki, inversiyada o'ng koordinatalar sistemasi chapga o'tar ekan, vektorlar almashish qonuni quyidagi sodda ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{aligned} \textbf{qutb} &= -\textbf{qutb} \\ \textbf{aksial} &= \textbf{aksial} \end{aligned} \tag{A.5}$$



11.4-rasm. Ko'zgudan qaytishda aylanish yo'nalishi teskari tomonga o'zgaradi.

demak, tenglikning har ikki tomoniga inversiyani qo'llash lozim.

Masalan, radius-vektori **r** bo'lgan moddiy nuqtaning $\boldsymbol{\omega}$ burchak tezlik bilan aylanishini ko'raylik. Bunda nuqtaning chiziqli tezligi

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]. \tag{A.6}$$

Modomiki, **v** qutb vektor ekan (**r** dan vaqt bo'yicha hosila), inversiyada tenglikning chap tarafi ishorasini o'zgartiradi. Tenglik inversiyaga nisbatan invariant bo'lishi uchun uning o'ng tomoni $[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$ ham inversiyada ishorasini o'zgartirishi lozim bo'ladi. Inversiyada burchak tezlik ishorasini o'zgartirmaydi (aksial vektor), **r** radius-vektor esa o'zgartiradi (qutb vektor). Shunga ko'ra

$$[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}] \to [(\boldsymbol{\omega}), (-\mathbf{r})] = -[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}], \tag{A.7}$$

ya'ni tenglikning o'ng tomoni ham inversiyada ishorasini o'zgartirdi, demak, u ham qutb vektordir. Shunday qilib, koordinatalar sistemasining inversiyasidan so'ng tenglik o'zgarmay qoldi,

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}] \quad -\mathbf{v} = -[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}] \to \quad \mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}], \tag{A.8}$$

natijada, ikki qutb vektorlarning tengligiga ega bo'linadi.

Bundan quyidagi xulosaga kelish mumkin: ikki qutb vektorlarning vektor ko'paytmasi aksial vektor:

$$[\mathbf{qutb}_1, \mathbf{qutb}_2] = \mathbf{aksial}, \tag{A.9}$$

inversiyada chap taraf ishorasini o'zgartirmaganligidan

$$[-\mathbf{qutb}_1, -\mathbf{qutb}_2] = [\mathbf{qutb}_1, \mathbf{qutb}_2]. \tag{A.10}$$

Qutb va aksial vektorlarni o'zaro skalyar ko'paytmasi qanday kattalikni beradi? Bu kattalik, ravshanki, koordinatalar sistemasining harqanday fazoviy burilishlariga nisbatan invariant, ya'ni u skalyar kattalikdir. Biroq u oddiy skalyar emas, chunki u koordinatalar sistemasining inversiyasida ishorasini o'zgartiradi. Bunday kattalik psevdoskalyar deyiladi:

$$(\mathbf{qutb}, \mathbf{aksial}) = \text{psevdoskalyar}. \tag{A.11}$$

Masalan, elementar magnit zaryadi mavjud bo'lganda edi u psevdoskalyar kattalik bo'lardi. Shunday qilib, skalyar kattaliklar ikki turda: koordinatalar sistemasining har qanday o'zgarishlariga (nafaqat aylanishlarga, balki inversiyaga ham) nisbatan invariant bo'lgan haqiqiy skalyar va aylanishlarga nisbatan invariant va o'ng sistema chapga o'tganda (va teskarisi) ishorasini o'zgartiruvchi psevdoskalyar bo'ladi.

A.2 Fizik kattaliklarning o'lchov birliklari va ular sistemasini tanlash

Fizik kattaliklar o'lchamlari haqida batafsil to'xtalamiz. Fizika tabiatning fundamental qonunlari bilan ish ko'rganligi sababli, u kimyo, biologiya va texnikada ham ishlatiladigan o'lchov birliklarini yuzaga keltiradi.

Fizika qonunlari fizik kattaliklar orasida, o'lchash imkoniyatini beruvchi, munosabatlarni o'rnatadi. Qandaydir bir fizik kattalikni o'lchash (masalan, vaqtni), bu kattalik uchun qabul qilingan, o'sha turdagi kattalikning (ushbu holda, aniq bir vaqt oralig'i bilan) birligi bilan taqqoslashni bildiradi. Umuman, har bir fizik kattalik uchun, boshqalarga bog'liq bo'lmagan holda, o'ziga oid o'lchov birligini tanlash mumkin. Masalan, tezlanish o'lchov birligi sifatida erkin tushish g tezlanishini tanlash va unga maxsus nomni berish ham mumkin edi. Biroq asosiy kattaliklar deb qabul qilingan, bir necha kattaliklar uchungina birliklarni tanlash bilan chegaralanish mumkin ekan. Bunda, boshqa barcha kattaliklarning o'lchov birliklari o'z-o'zidan bu asosiy birliklar orqali, tanlangan kattaliklarni bog'lovchi fizikaviy qonunlar yordamida aniqlanadi.

Mana shunday tarzda hozirgi kunda Xalqaro o'lchov birliklari sistemasi (SI - ingliz atamasi ***System International*** ning bosh harflari asosida) shakllantirilgan. Mexanikada SI birliklar sistemasida asosiy o'lchov birliklari sifatida, bizni o'rab olgan olamning xossalarini ifodalovchi, uch fundamental kattalikning o'lchov birliklari olingan: fazo, vaqt va massa. SI sistemasida bunday birliklar quyidagilar: uzunlik birligi – metr (qisqartirilgan belgisi – m), vaqt birligi – sekund (s), va massa birligi – (kg). Bu uch birliklardan tashqari, SI birliklar sistemasida asosiy birlik sifatida tok kuchi uchun – amper (A), temperatura birligi – Kelvin (K), yorug'lik kuchi birligi – candela (kd) va modda miqdori – mol. Bu birliklar haqida mos bo'limlarda to'xtalib o'tiladi.

Tanlangan birliklar mos ravishda, yuqorida so'z yuritilganidek, asosiy kattaliklarning etalonlari bilan bog'langan. Masalan, bir metr kripton atomlari tarqatadigan aniq elektromagnit to'lqinlarning (kripton - 86 ning zarg'aldoq chizig'i) 1650763,73 ta to'lqin uzunligiga va taxminan Yer ekvatori uzunligining qismiga teng. Sekund, seziy atomi chiqaradigan elektromagnit to'lqinlarning aniq bir turining 9192631770 davri yig'indisiga teng bo'lib, u, taxminan, o'rtacha quyosh sutkasining 1/86400 qismiga teng. Nihoyat, kilogramm Fransiyadagi Xalqaro o'lchov va og'irliklar byurosida saqlanadigan platina-iridiy sterjenining massasiga teng bo'lgan etalon massa bilan mos tushadi. Bu massa 1000 sm^2 miqdordagi toza suv massasiga yaqin. Amalda yana karrali birliklardan ham foydalaniladi: kilometr ($1\,km = 10^3\,m$), santimetr ($1\,cm = 10^{-2}\,m$), millimetr ($1\,mm = 10^{-3}\,m$), mikrometr yoki mikron ($1\,mkm = 1\,\mu = 10^{-6}\,m$), 60 sekundga teng bo'lgan minut $^{-3}$ kilogrammga teng bo'lgan bir gramm va h.

Tadqiqot amaliyotida, ba'zi hollarda, biror aniq masala uchun

qulay bo'lgan, ammo birliklar sistemasiga kirmaganlardan foydalaniladi, masalan: 1 angstrem (A^o) $= 10^{-10}\,m$, 1 parsek (pk) $\simeq 3,1\cdot 10^{16}\,m$, 1 elektronvolt (eV) $\simeq 1,6\cdot 10^{-19}$ J va h. Hosilaviy birliklarni nomlash uchun kattaliklarning tartibiga ko'ra qo'shimchalar ishlatilinadi: santi-$= 10^{-2}$, milli-$= 10^{-3}$, mikro-$= 10^{-6}$, nano-$= 10^{-9}$, piko-$= 10^{-12}$, femto-$= 10^{-15}$; kilo-$= 10^3$, mega-$= 10^6$, giga-$= 10^9$, tera-$= 10^{12}$ va h. Bular mos ravishda: c, m, mk, n, p, f; k, M, G, T harflar bilan belgilanadi.

Yuqorida ta'kidlaganimizdek, barcha fizik kattaliklarning o'lchov birliklari asosiy birliklarning hosilasidir. Masalan, SI birliklar sistemasida tezlik birligi sifatida vaqt birligi (sekund) ichida birlik uzunlik (metr)ga teng masofani o'tgan tekis harakat qilayotgan jism tezligi qabul qilingan. Bu birlik m/s deb belgilanadi. Tezlanish birligi sifatida, tekis o'zgaruvchan harakat tezlanishi qabul qilingan bo'lib, bunda jism tezligi vaqt birligi (sekund) ichida bir birlikka (1 m/s) ga o'zgaradi. SI birliklar sistemasida bu birlik m/s^2 bilan belgilanadi. SI birliklar sistemasida kuch birligi sifatida Newton (N) qabul qilingan. 1 N shunday kuchki, bunda 1 kg massali jism uning ta'sirida $1\,m/s^2$ tezlanish oladi.

O'lchov birligiga atoqli ismlar berilgan hollarda, uni qisqartirilgan ko'rinishida katta harf bilan yozishga kelishilgan va nafaqat bunday hollarda, balki birikmali qisqartirishlarda ham. Misollar: 1 Newton=1 N, 1 millivolt= 1 mV, 1 megajoul- 1 MJ va h. Fan va texnikada SI birliklar sistemasidan tashqari yana boshqa o'lchov birliklar sistemalaridan ham foydalaniladi. Ilmiy amaliyotda, odatda ko'pinch SGS deb ataluvchi birliklar sistemasidan foydalaniladi. Bu sistemada asosiy o'lchov birliklar - santimetr, gramm va sekunddan iborat. SGS sistemada kuchning birligi dina (din) deb ataladi. Bir dina shunday kuchga tengki, bu kuch ta'sirida massasi 1 g bo'lgan jism $1\,sm/s^2$ tezlanish oladi. Newton va dina o'rtasida quyidagicha munosabat mavjud:

$$1\,N = 1\,kg \cdot 1\,m/s^2 = 10^3\,g \cdot 10^2\,sm/s^2 = 10^5 din.$$

Asosiy birliklarning o'zgarishi hosilaviy birliklarning ham o'zgarishiga olib kelishini ko'rish unchalik qiyin emas. Hosilaviy va asosiy o'lchov birliklari o'rtasidagi bu bog'lanishni tavsiflash uchun fizikada fizik kattalikning o'lchamligi degan tushuncha kiritilgan.

Bu tushuncha asosiy birliklarining o'zgarishi bilan berilgan kattalik o'lchov birligi qiymatining qanday o'zgarishini ko'rsatadi. Ixtiyoriy kattalikning o'lchamligini belgilash uchun uning kvadrat qavsga olingan harflardagi ifodasidan foydalaniladi. Masalan, [v] belgi tezlik o'lchamini bildiradi. Asosiy kattaliklarning o'lchami maxsus ko'rinishga ega: uzunlik o'lchov birligi – L, vaqtniki – T, massaniki – M. Shunday qilib, uzunlikni l harfi bilan, vaqtni t harfi bilan va massani m harfi bilan belgilab, quyidagini yozish mumkin:

$$[l] = L;\ [m] = M;\ [t] = T.$$

Masalan, tezlik o'lchami qanday? Tezlik moduli $v = \Delta S/\Delta t$ munosabat bilan aniqlanadi (yetarli darajada kichik Δt uchun). Biror bir kattalikning fizik ta'rifi va qonuni unga kiruvchi kattaliklar o'lchov birliklarining tanlanishiga bog'liq bo'lmaganligidan, bu qonunni ifodalovchi tenglikning har ikki tomonining o'lchamlari bir xilda bo'lishi kerak. ΔS ning o'lchami L, Δt ning o'lchami T. Shunga ko'ra tezlik o'lchami quyidagiga teng

$$[v] = LT^{-1}.$$

Oxirgi yozuv shuni ko'rsatadiki, uzunlik birligi n_1 marta ortganda tezlik o'lchov birligi n_1 marta ortadi, bu birliklarda ifodalanayotgan tezlikning son qiymati esa n_1 marta kamayadi. Vaqt birligi n_2 marta ortganda tezlik o'lchov birligi n_2 marta kamayadi, tezlikni ifodalovchi sonning qiymati esa n_2 marta ortadi. Masalan, $v = 10\,m/s$ ga teng bo'lsin, biz esa uni (km/soat) birligida ifodalamoqchi bo'laylik. Bu holda, $n_1 = 1000, n_2 = 3600$. Natijada, yangi o'lchov birliklarda tezlikning qiymati quyidagiga teng bo'ladi:

$$v = 10 \cdot \frac{3600\,\text{km}}{1000\,\text{soat}} = 36\,\frac{\text{km}}{\text{soat}}.$$

Tezlik kabi tezlanish o'lchamini ham aniqlash mumkin

$$a = [\Delta v]/[\Delta t] = LT^{-1}/T = LT^{-2}.$$

Kuchning o'lchami - (Newton ikkinchi qonuniga q.):

$$[F] = [m][a] = MLT^{-2}.$$

Xuddi shunga o'xshash, barcha kattaliklarning o'lchamliklari aniqlaniladi. Har bir aniq holda, yangi birlikni kiritishda mos kattalik birinchi marotaba paydo bo'lgan fizik qonun qurol bo'lib xizmat qiladi. E'tiborni an'anaviy bayon qilishda Newton ikkinchi qonunini ifodalovchi $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ifoda tug'diradigan metodologik muammoga qaratamiz.

Shuni ta'kidlash joizki, hisoblashlarning qanchayin to'g'riligini tekshirishda fizikaviy ifodalarning o'lchamini nazorat qilish qudratli qurol bo'lib xizmat qiladi. Yanada muhimi, hozirgi zamon fizikasida (eng avval mexanikada) yangi ma'lumotlarni olishda ba'zi nazariy metodlar shu g'oyaga asoslangan (aniqrog'i, ular ***o'xshashlik*** qonunlari yoki ***skleyning***ga asoslanadi.[1] Shu sababdan, fizik formulalarda, odatda algebra nuqtai nazaridan, qisqartirishlarni maksimal darajada sodda ko'rinishga keltirish qabul qilinmagan, buning o'rniga, ko'paytiriluvchilarni yaqqolroq o'lchamlarda shakllantirishga yoki o'lchamsiz nisbatda keltirish afzalroq hisoblanadi.

Klassik mexanika asoschilari

	Arastu (Ἀριστοτέλης mil. av. 384-322) – qadimgi yunon faylasufi, U fizika, metafizika, mantiq, ritorika, siyosat hamda etikaga oid asarlar yaratgan. Uning jismlar tekis harakat qilishi uchun ularga doimo kuch ta'sir qilib turishi kerak degan g'oyasi klassik (Newton) mexanikasiga qadar hukm surgan.
	Arxímed (Ἀρχιμήδης mil. av. 287–212) – qadimgi yunon olimi. U matematika, fizika va muxandislik sohalarida ishlagan. Geometriyada kashfiyot qilgan. Mexanika va gidrostatikaga asos solgan.

[1] Biror fizik qonunni yoki jarayonni o'rganishda masofa va vaqt masshtablari bir xil marta oz'garishi qonun yoki sistemaning xossalarining o'zgarmasligi - skleyning yoki masshtab invariantligi deb ataladi.

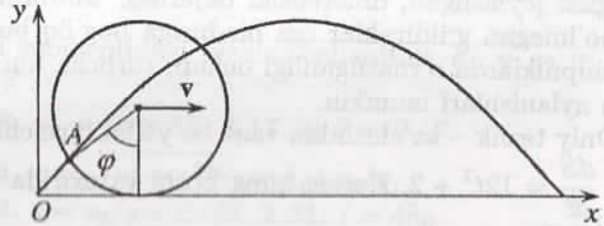
	Galileo Galilei (1564 – 1642 – italiyalik qomusiy olim. O'z davrining ilmiga katta ta'sir koo'rsatgan italyan faylasufi, fizik va astronom. Galiley asosan o'zining planetalar va yulduzlar sohasidagi izlanishlari, dunyoning geliomarkazli tizimini va mexanika bo'yicha tajribalari bilan mashhur.
	Isaac Newton (1643–1727). Ingliz fizigi, matematigi, mexanigi va astronomi. "Natur filosofiyaning matematik negizlari" (1687), fundamental asarida klassik mexanikaning asosi bo'lgan butin olam tortilish va mexanikaning uchta qonunini bayon qilgan. Fizik optikaga asos solgan.
	Joseph Louis Lagrange (1736–1813). Kelib chiqishi italiyalik fransuz matematigi, astronomi va mexanigi. "Analitik mexanika" klassik traktatida mumkin bo'lgan ko'chishlar fundamental prinsipini o'rnatgan shu bilan mexanikani matematik shakllanishiga yakun yasagan.
	Henry Cavendish (1731 –1810) - britaniyalik fizik, ximik. Ajoyib tajribasi yordamida Yerning zichligini juda yuqori aniqlikda o'lchagan. Yer sirti yaqini dagi zichligi Kavendish aniqlagan zichlikdan bir necha marotaba kichik bo'lgan. Shu bilan Yer qarida katta zichlikdagi yadro borligini isbotlagan.
	Pierre-Simon de Laplace (1749-1827). Fransuz matematigi, mexanigi, fizik va astronomi. Osmon mexanikasi, differensial tenglamar sohasidagi fundamental ishlari bilan mashhur. toza va amaliy matematika, ayniqsa astronomiya sohasida xizmatlari ulkan.
	William Rowan Hamilton (1805-1865). Irlandiyalik matematik, mexanik-nazariyotchi, XIX asrning buyuk matematik. Matematika va analitik mexanika (Hamilton mexanikasi) sohasidagi fundamental kashfiyotlari bilan mashhur. Variatsion - eng qisqa ta'sir prinsipining muallifi.

Masalalarning javob va yechimlari

2.1. $v(t) = \pm \int_{t_0}^{t_1} |\mathrm{a}(t)| dt \equiv \pm I.$

$$t_x = \begin{cases} t_1 & \text{agar } v(t) = v_0 + I, \quad (\text{v va } \mathbf{a} \text{ yo'nalishlari mos tushadi}), \\ t_1 & \text{agar } v(t) = v_0 - I, \quad I > 2|v_0|, \\ t_0 & \text{agar } v(t) = v_0 + I, \quad I > 2|v_0|. \end{cases}$$

2.3. $a_B = \sqrt{a^2 + v^2/R^2}$ **2.4.** $\alpha = 3\pi/8$.
2.5 $\varphi = \pi/8$. **2.6.** $\alpha = \pi/6$.
2.7. Soya g'arbdan sharqqa tomon tezlik bilan harakat qiladi.
2.8. Yo'q. $a_r = \omega^2 R$ va obruch markaziga tomon yo'nalgan.



2.9-masalaga oid chizma.

2.9. $x = R(\varphi - \sin\varphi) = R(\omega t - \sin\omega t)$ bu yerda ω - g'ildirakning aylanish burchak tezligi. Harakatlanayotgan g'ildirak gardishidagi nuqtalar traektoriyasi oddiy sikloidadan iborat bo'lib, uning tenglamasi parametrik shaklda berilgan (rasmga q.).

2.10. Gardishidagi ixtiyoriy nuqtaning y koordinatasini quyidagicha yozish mumkin:

$$y = R\,(1 - \cos{(vt/R)})\,, \Longrightarrow v_y = v\sin{(vt/R)}\,.$$

y, v_y va h kattaliklar quyidagi munosabat bilan bog'langan: $h =$

$y + v_y^2/2g$. y. $\dot{y}$ larni oxirgi ifodaga qo'yib, $dh/d\varphi = 0$ shartdan

$$h_{max} = R + \frac{v^2}{2g} + \frac{gR^2}{2v^2},$$

ga ega bo'linadi. Bundan so'ng g'ildirak pokrishkasidan loy hammasidan yuqori otiladigan nuqtasining burchagi uchun quyidagi hosil bo'ladi:

$$(\cos\varphi)_{h_{max}} = -\frac{Rg'}{v^2}$$

2.11. $\rho = \dfrac{(v_0\cos\alpha + \omega R)^2}{\omega^2 R + g}$. **2.12.** $\rho = \dfrac{(v_0^2 + \omega^2 R^1)^{2/3}}{\omega^3 R^2}$

2.13. Avtomobil burilayotganida uning ichki va tashqi g'ildiraklari (yo'l egri qismining markaziga nisbatan) turlicha aylanalar chizadi, ya'ni turlicha yo'l bosadi, va g'ildiraklarni burchak tezliklari, agar g'ildiraklar sirpanmayotgan bo'lsa, turlicha bo'lishi kerak. Bu shartni, orqa yetakchi g'ildiraklar uchun, avtomobilning orqa ko'prigida joylashgan, differensial bajaradi. Motordan uzatmaga ega bo'lmagan g'ildiraklar esa bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda, podshipniklarda o'rnatilganligi uchun, turlicha burchak tezliklar bilan aylanishlari mumkin.

2.14. Oniy tezlik – ko'chishdan vaqt bo'yicha birinchi tartibli hosila: $v = \dfrac{dS}{dt} = 12t^2 + 2$. Harakatning boshi va oxirida tezliklar quyidagiga teng:

$$v_1 = 12t_1^2 + 2 = 14\,\mathrm{m/s}, \quad v_2 = 12t_2^2 + 2 = 50\,\mathrm{m/s}.$$

Tezlanish – tezlikdan vaqt bo'yicha birinchi tartibli hosila:

$$a = \frac{dv}{dt} = 24t.$$

Ko'rilayotgan intervalning boshi va oxirida tezlanish quyidagiga teng:

$$a_1 = 24t_1 = 24\,\mathrm{m/s^2}, \quad a_2 = 24t_2 = 48\,\mathrm{m/s^2}.$$

Nuqtaning o'rtacha tezligi $\langle v\rangle$ berilgan vaqt intervali Δt da bosib o'tgan yo'l $\Delta S(t)$ ning shu intervalga nisbati bilan aniqlaniladi:

2.15. Har ikkala jism tezlanishlari bir xil bo'ladigan vaqt momentini topamiz. Buning uchun birinchi va ikkinchi jismlar uchun, bu jismlar harakat tenglamalarini vaqt bo'yicha differensiallab, tezlanishlar ifodalarini topamiz:

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = \frac{d^2x_1}{dt^2} = 4.5t + 4,5, \quad a_2 = \frac{dv_2}{dt} = \frac{d^2x_2}{dt^2} = 1,5t + 6.$$

Shartga ko'ra, qandaydir bir t vaqt momentida, $a_1 = a_2$. a uchun topilgan ifodalarni o'zaro tenglashtiramiz va tenglamani t ga nisbatan yechamiz:

$$4,5t + 4.5 = 1,5t + 6 \to t = o,5\mathrm{s}.$$

t ni bilgan holda shu vaqt momentidagi tezliklarni topamiz:

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = 2,25t^2 + 4,5t + 1,0 \simeq 3,81\,\mathrm{m/s},$$
$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = 0,75t^2 + 4,5t + 1,0 \simeq 3,81\,\mathrm{m/s}.$$

Bu vaqt momentidagi jismlar tezlanishi: $a_1 = a_2 = 1,5t + 6 = 6,75\,\mathrm{m/s^2}$.

2.16. $v_0 = s\sqrt{g/2h}$. **2.17.** $\mathrm{tg}\,\theta = H/S$.

2.18. $v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}\,\cos\theta = v_0/v$.

2.19. $t = v_0/g + \Delta t/2$. **2.21.** $l = 4h_0$.

2.22. $v_0^2 = gs^2/2(h_0 + s\,\mathrm{tg}\,\theta)\cos^2\theta, t = s/v_{0x}, h = h_0 + 2v_{0y}^2/g$.

2.23. $R = \left[v_{0x}^2 + (gt)^2\right]^{3/2}/gv_{0x}$. **2.24.** $N = 80$.

2.25. $a = -0.5\,\mathrm{m/s^2}$, $S = 300\,\mathrm{m}$. **2.26.** 20 m/s.

2.27. $v = 3\,\mathrm{m/s}$, $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$. **2.28.** $v_{min} = \sqrt{2}v$.

3.1. Jismning ko'tarilish vaqti $\tau = mv_0/2(mg + F)$. Ko'tarilishning eng yuqori nuqtasi $h = mv_0^2/2(mg + F)$. Jismning Yerga tushish vaqti $\Delta t = \sqrt{2m(H + h)/(mg - F)}$. Bosib o'tgan yo'l:

Agar $t \le \tau$ bo'lsa, $S = v_0 t - \dfrac{mg + F}{2m}t^2$.

Agar $\tau < t < \tau + \Delta t$ bo'lsa, $S = h + \dfrac{mg - F}{2m}(t - \tau)^2$.

Agar $t > \tau > +\Delta t$ bo'lsa $S = 2h + H$.

3.2. Tekislik yetarlicha uzun bo'lganligi uchun harakat davomida jism uni tark etmaydi. Harakat tafsilotlari ustida qisqacha to'xtalamiz. Harakat boshida jism sekinlashadi va qandaydir vaqtdan so'ng to'xtaydi. Jismning bundan keyingi holati tekislikning qiyaligiga bog'liq bo'ladi. Agar qiyalik burchagi α yetarlicha kichik bo'lsa, u tinch holatda qoladi. Agar α qandaydir α_{max} dan katta bo'lsa, jism qiya tekislik bo'ylab pastga sirpanib tusha boshlaydi. Demak, ko'rilayotgan masala ikki variantda yechilishi kerak. Shu variantlarni alohida ko'rib chiqish kerak.

1 - variant: Kuzatish vaqti $t \le \tau$ bo'lsin. Jism sekinlashuvchi harakat qiladi (tezlanish tezlikka teskari yo'nalgan). Qiya tekislik bo'ylab yuqoriga ko'tarilayotgan jism uchun dinamika tenglamasini yechib tezlanishni topamiz:

$$a_1 = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha), \quad v = v_0 - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)t.$$

Tezlik nolga teng bo'lish shartidan ko'tarilish vaqtini aniqlaymiz:

$$\tau = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}.$$

Harakat tenglamasidan $t \le \tau$ vaqtda jism bosib o'tadigan masofa quyidagiga teng bo'lishini topish qiyin emas:

$$S_{tI} = v_0 t - \frac{g}{2}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)t^2$$

2 - variant: Kuzatish vaqti $t > \tau$ bo'lsin. Bunda jism avval yuqoriga ko'tariladi, vaqtda u to'xtaydi va nihoyat pastga sirpanib tusha boshlaydi. Harakatning oxirgi bosqichida tezlanish

$$a_2 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Bu yerda $\mu = \operatorname{tg}\beta$ deb belgilash kiritilsa, a_2 ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin bo'ladi:

$$a_2 = g\sin(\alpha - \beta)/\sqrt{1+\mu^2}.$$

Shunday qilib, jism pastga sirpanib tushishi uchun $\sin(\alpha-\beta) > 0$ shart bajarilishi kerak, ya'ni $\alpha > \alpha_{min} = \operatorname{arctg}\mu$.

Agar $\alpha < \alpha_{\min}$ bo'lsa jism ko'tarilib to'xtaganidan so'ng tinch holatda qoladi. Bunda jismning bosib o'tgan yo'lini aniqlash uchun S_1 ifodadasida $t = \tau$ deb olish yetarli, ya'ni

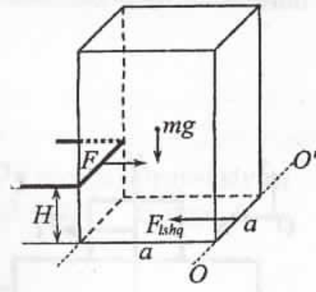
$$S_1 = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}.$$

Agar $\alpha < \alpha_{min}$, bo'lsa bosib o'tilgan yo'l quyidagiga teng bo'ladi:

$$S = S_1 + \frac{a_2(t-\tau)_2}{2} = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} + \frac{g}{2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)(t-\tau)^2.$$

3.3. Avtomobilning harakatga kelishiga sababchi kuch - yo'l qoplamasi va aylanuvchi g'ildirak orasida paydo bo'ladigan F_i ishqalanish kuchidir. Bu kuch g'ildirakning yo'lga tegish nuqtasiga qo'yilgan va Newton uchinchi qonuniga ko'ra, avtomobilning harakat yo'nalishi tomon yo'nalgan.

3.4. Massasi m, ya'ni bosim kuchi $P = mg$ bo'lgan odam turgan muz sinib ketadi deb faraz qilaylik. Odam muz ustida yugurganda, uning muzga ta'siri bosim kuchining kattaligi bilan emas, balki bu kuch impulsi bilan belgilanadi. Bu kattalik bosim kuchi P ni uning muzga ta'sir qilish vaqti Δt ga ko'paytmasiga teng. Newton ikkinchi qonuniga ko'ra $P\Delta t = m\Delta v$. Ta'sir qilinayotgan jismning (bizning holda odamning oyog'i ostidagi muzning massasi) harakatini o'zgarishini aniqlovchi haqiqiy kattalik tabiiy ravishda kuch impulsi hisoblanadi. Modomiki, odam oyog'ining muz bilan ta'sirlashish vaqti Δt juda kichik bo'lganligi uchun muz sezilarli darajada impuls olib ulgurmaydi va odam muz ichiga tushib ketmasdan uning ustida yugura oladi.



3.5-masalaga oid chizma.

3.5. Chorqirra qirralarining uzunliklarini o'lchab, uni polga shunday qo'yamizki, uning uzun qirrasi polga tik holda bo'lsin. Lineykani uncha katta bo'lmagan balandlikda polga parallel holda ushlab chorqirrani sura boshlaymiz.

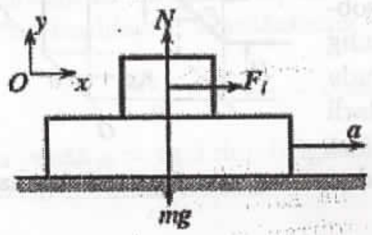
Newton ikkinchi qonuniga ko'ra, chorqirrani harakatga keltiruvchi kuch $F = F_{ish} = \mu mg$, m chorqirra massasi.

Chorqirra ag'darilib tushgunga qadar lineyka ta'sir qilayotgan balandlik H ni asta-sekin oshirib boramiz (rasmga q.). Shu yo'l bilan chorqirra sirpanmasdan ag'darilib tushadigan H_{max} topiladi. Chorqirraning ag'darilishi, ya'ni OO' o'q atrofida aylanish kuch momentlarining yig'indisi noldan katta bo'lganda yuz beradi,ya'ni $\Sigma M_j \geq 0$ yoki $FH - mga/2 \geq 0$. Bu yerga $F = \mu mg$ va tajribadan olingan $H = H_{max}$ ning qiymatlarini qo'yib, ishqalanish koeffitsientini topamiz: $\mu = a/(2H_{\max})$, bu yerda a – parallelopiped asos tomonining uzunligi.

3.6. Taxtaga chorqirrani qo'yamiz va taxtaning bir uchidan asta-sekin ko'taramiz. Taxta ma'lum bir burchakka ko'tarilganda chorqirra pastga sirpanib tusha boshlaydi. Shu holatda transporter yordamida taxta bilan gorizont orasidagi burchak α_0 ni o'lchaymiz. Ishqalanish koeffitsienti $F_i \leq \mu N$ shartdan topiladi, N tayanchning reaksiya kuchi. Bu shartdan $\mu = \mathrm{tg}\,\alpha_0$ ekanligini aniqlaymiz.

3.7. Ipning bir uchini qadoqtoshga boylanadi, ikkinchi uchi bilan vagon shiftga osiladi va ipning uzunligi l hamda ipning vertikaldan og'ish masofasi o'lchanadi. Bu ishlar amalga oshirilgandan keyin poezdning tezlanishi qadoqtosh uchun yozilgan dinamikaning asosiy tenglamasini yechishda olinadigan quyidagi formuladan topiladi:

$$a = \frac{g\Delta x}{\sqrt{l^2 - \Delta x^2}}$$



3.8-masalaga oid chizma.

3.8. Chorqirraning taxta bilan birga harakatlanishini ta'minlovchi yagona kuch - ishqalanish kuchi $\mathbf{F}_i$ dir. Sirt bilan bog'langan sanoq sistemada chorqirraning muvozanatda bo'lish shartini yozamiz:

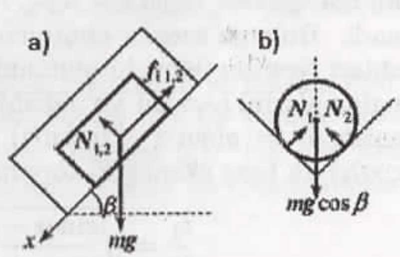
$$\mathbf{N} + \mathbf{F}_i + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}.$$

Bu tenglamani o'qlarga proyeksiyalaymiz:

$$Ox: \quad F_i = ma; \quad Oy: \quad N - mg = 0.$$

$F_i = \mu N$ (tezlanishning maksimal bo'lish sharti). Bundan $a_{max} = \mu g$.

3.9. Silindrga og'irlik kuchi $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$, ikki yoqlama burchak qirralarining normal reaksiya kuchlari $\mathbf{N}_1$ va $\mathbf{N}_2$ hamda silindrning nov yoqlari bilan ishqalanish kuchlari $\mathbf{f}_{i1}$ va $\mathbf{f}_{i2}$ (rasmga q.) ta'sir qiladi. Silindr o'q simmetriyasiga ega bo'lganligi va ikki yoqlama burchakning qirralari vertikalga nisbatan simmetrik joylashganligi uchun



3.9-masalaga oid chizma. a) yon tomondan ko'rinish, b) old tomondan ko'rinish

$$|\mathbf{N}_1| = |\mathbf{N}_2| = N, \quad |\mathbf{f}_{i1}| = |\mathbf{f}_{i1}| - f_i$$

Coulomb-Amonton qonuniga ko'ra $f_i = \mu N$. Bu holda silindr uchun dinamikaning asosiy qonuni quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{f}_{i1} + \mathbf{f}_{i2}$$

Silindr kesim tekisligida tinch turganligi uchun bu tenglamani nov yoqlariga perpendikular o'qqa proyeksiyalab quyidagi tenglikni olamiz (old tomondan ko'rinish, rasm b):

$$2N \sin\frac{\alpha}{2} = mg\cos\beta.$$

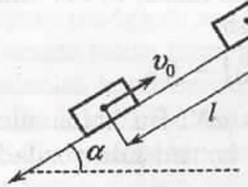
Dinamika tenglamasini nov qirrasiga (Ox o'qiga) proyeksiyasi quyidagi ko'rinishda yoziladi $ma_x = mg\sin\beta - 2\mu N$. Bunga N ni qo'yib, tezlanishni topamiz:

$$a_x = g\left(\sin\beta - \frac{\mu\cos\beta}{\sin(\alpha/2)}\right) \approx 3,71\mathrm{m/s}^2.$$

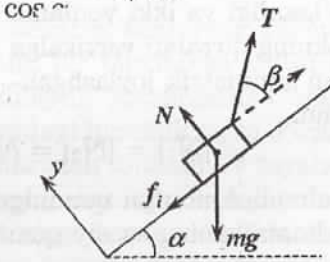
3.10. Chorqirraning ko'tarilish tezlanishini a_1, tushish tezlanishini esa a_2 bilan belgilaymiz. Ko'tarilishda chorqirra tezligi $v(t) = v_0 - a_1 t$ qonun bilan o'zgarganligi sababli, ko'tarilish vaqti $v(t_1) = 0$ shartdan topiladi, ya'ni $t_1 = v_0/a_1$. Bu vaqt ichida u

$l = v_0 t_1 - a_1 t_1^2/2$ masofani bosib o'tadi. Tushishda chorqirra boshlang'ich tezliksiz harakatlana boshlaydi, shu sababli boshlang'ich nuqtaga qaytish vaqti $l = a_2 t_2^2/2$ tenglikdan $t_1/t_2 = \sqrt{a_2/a_1}$ aniqlanadi. Bularga asosan chorqirraning ko'tarilish va tushish tezlanishlari Newton ikkinchi qonunidan topiladi. Dinamikaning asosiy tenglamalarini harakat yo'nalishiga proyeksiyalab, ko'tarilishda tezlanish $a_1 = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ ga va tushishda $a_2 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ ga teng ekanligini topamiz. Natijada

$$\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}} \cong 0,61.$$



3.10-masalaga oid chizma.



3.11-masalaga oid chizma.

3.11. Koordinatalar sistemasini rasmda ko'rsatilgandek tanlaymiz. Bu sistemada dinamikaning asosiy tenglamasi

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{N} + \mathbf{f}_i$$

ko'rinishda yoziladi. Tenglamani koordinata o'qlariga proyeksiyalaymiz (harakat tekis, $\mathbf{a} = 0$):

$$\begin{aligned} Ox \quad & 0 = T\cos\beta - f_i - mg\sin\alpha, \\ Oy \quad & 0 = N + T\sin\beta - mg\cos\alpha. \;\; f_i = \mu N \end{aligned}$$

Bulardan taranglik kuchini topamiz:

$$T = \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\beta + \mu\sin\beta} mg.$$

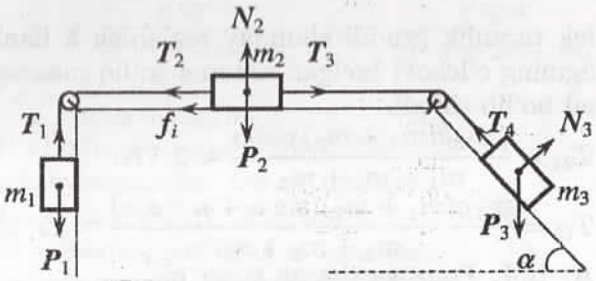
$\mu = \operatorname{ctg}\gamma$ deb belgilaymiz. Yuqoridagi ifodaning surat va maxrajini $\sqrt{1+\mu^2}$ ga ko'paytirib quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$T = \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\sqrt{1+\mu^2}\sin(\gamma+\beta)\sin\beta} mg.$$

Taranglik eng kichik qiymatga $\sin(\gamma+\beta)$ ning eng katta qiymatida erishadi, ya'ni $\beta_0 = \pi/2 - \gamma$ yoki

$$\sin\beta_0 = \frac{\gamma}{\sqrt{1+\mu^2}} \;\to\; \beta_0 \cong 39^\circ; \;\; T_{max} = \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\sqrt{1+\mu^2}} mg \cong 9,3\text{N}.$$

3.12. Newton uchinchi qonunidan foydalanib va masala shartida berilganlarni hisobga olib, sistemadagi har bir jismga ta'sir qiluvchi kuchlarni ko'rsatish mumkin (rasmga q.). Har bir jism uchun dinamikaning asosiy tenglamasini vektor ko'rinishda tuzamiz:



3.12-masalaga oid chizma

$$\begin{aligned} &\mathbf{T}_1 + \mathbf{P}_1 = m\mathbf{a}_1, \\ &\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3 + \mathbf{N}_2 + \mathbf{f}_i = m_2\mathbf{a}_2, \\ &\mathbf{T}_4 + \mathbf{N}_2 + \mathbf{P} = m_3\mathbf{a}_3 \end{aligned}$$

m_2 yukka ta'sir qilayotgan ishqalanish $\mathbf{f}_i$ kuchining yo'nalishini to'g'ri ko'rsatish uchun uni ishqalanish yo'q bo'lganda o'ngga va chapga suradigan kuchlarni taqqoslaymiz:

$$F_{o'ng} = m_3 g\sin\alpha \approx 26\text{N} > F_{chap} = m_1 g \approx 10\text{N}$$

Bundan ko'rinib turibdiki, sistema o'ngga harakat qilar ekan, demak, teskari tomonga yo'nalgan. Dinamika tenglamalari sistemasini Coulomb-Amonton qonuni $\mathbf{f}_i = \mu\mathbf{N}$ va Newton uchinchi qnonunidan kelib chiqadigan iplarning tarangliklari orasidagi munosabatlar bilan to'ldirish kerak:

$$|\mathbf{T}_1| = |\mathbf{T}_2| = T, \;\; |\mathbf{T}_3| = |\mathbf{T}_4| = T_0.$$

Bloklar kuchlarning yo‘nalishlarini o‘zgartiradi. Iplar cho‘zilmasligini, ya'ni $|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_2| = |\mathbf{a}_3| = a$ ekanligini e'tiborga olib, tenglamalarni harakat yo‘nalishi va unga perpendikular yo‘nalishlarga proyeksiyalaymiz:

$$T = m_1 g = m_1 a; \qquad N_2 = m_2 g;$$
$$T_0 - T - f_i = m_2 a; \quad m_3 g \sin\alpha - T_0 = m_3 a'$$

Bu sistemani T_0 ga nisbatan yechib quyidagini topamiz:

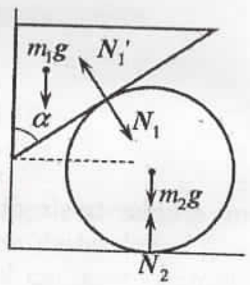
$$T_0 = \frac{m_3 g[m_1(1+\sin\alpha) + m_2(\mu + \sin\alpha)]}{m_1 + m_2 + m_3} \approx 19,8\text{N}.$$

Kutilganidek taranlik (xuddi shunday tezlanish a ham) sistemaning inertligining o‘lchovi bo‘lgan sistema to‘liq massasiga teskari proporsional bo‘lib chiqdi.

3.13. $T_{23} = \dfrac{\mu m_3 g(m_1 + m_2)\cos\alpha}{m_1 + m_2 + m_3} \approx 3,7\text{N}.$

3.14. $T_{12} = \dfrac{m_1 g(m_1 + m_2)(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2 + n_3} \approx 13,5\text{N}$

3.15. a) hol. Pona va sharga ta'sir qiluvchi kuchlar rasmda ko‘rsatilgan. Pona va shar uchun dinamikaning asosiy tenglamasi mos ravishda quyidagi ko‘rinishda yoziladi:



3.15-masalaga oid chizma.

$$m_2\mathbf{a}_2 = m_2\mathbf{g} + \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_1.$$
$$m_1\mathbf{a}_1 = m_1\mathbf{g} + \mathbf{N}_1'.$$

Newton uchinchi qonuniga ko‘ra: $\mathbf{N}_1' = -\mathbf{N}_1$, $(|\mathbf{N}_1'| = |\mathbf{N}_1| = N)$. Harakat vertikal va gorizontal tekisliklar bilan chegaralanganligi sababli, sharning harakat tenglamasini gorizontal, ponaning harakat tenglamasini esa vertikal yo‘nalishga proyeksiyalaymiz:

$$m_2 a_2 = N\cos\alpha;$$
$$m_1 a_1 = m_1 g - N\sin\alpha.$$

Ponaning h balandlikka tushishi sharning gorizontal yo‘nalishda l masofaga ko‘chishiga olib keladi. Bunda $h = l\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, $h = at^2/2$

va $l = a_2 t^2/2$ bog‘lanishlardan foydalanib, harakat tenglamalarini yechamiz va tezlanishlar uchun quyidagi natijalarni olamiz:

$$a_1 = \frac{g}{1 + m_2\,\mathrm{tg}^2\alpha/m_1}, \quad a_2 = \frac{g\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 + m_2\,\mathrm{tg}^2\alpha/m_1}.$$

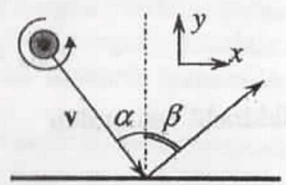
b) hol

$$a_1 = \frac{g\,\mathrm{tg}^2\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha + m_2/m_1}, \quad a_2 = \frac{g\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha + m_2/m_1}.$$

3.16. $a_1 = \dfrac{g\,\mathrm{tg}^2\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha + 2m_2/m_1}$, $a_2 = \dfrac{g\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha + 2m_2/m_1}.$

3.17 $a = \dfrac{g\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha + m_2/m_1}.$

3.18 a) sharcha soat miliga teskari yo‘nalishda aylanmoqda. Ox va Oy koordinata o‘qlari rasmda ko‘rsatilgandek tanlangan. Sharchaning sirt bilan to‘qnashishi vaqti τ ga teng bo‘lsin. Bu vaqt davomida unga sirt tomonidan ikkita kuch ta'sir qiladi. Birinchisi, sirtning reaksiya kuchi N (sirtga tik yo‘nalgan), ikkinchisi, sharcha aylanayotganligi sababli paydo bo‘ladigan sirt bo‘ylab yo‘nalgan ishqalanish kuchi f_i.



16-rasm.: 3.18-masalaga chizma.

Sharcha soat milining aylanishiga teskari yo‘nalishda aylanayotganligi uchun hamda $\omega R \gg v$ shartga asosan bu kuchning yo‘nalishi Ox o‘qining musbat yo‘nalishi bilan mos tushadi. Newton ikkinchi qonuniga ko‘ra, bu kuchlarning har birining ta'siri impulsning mos komponentlarini o‘zgartiradi:

$$\Delta p_y = p_y^o - p_y^b = N\tau,$$
$$\Delta p_x = p_x^o - p + x^b = f_1\tau = -\mu N\tau.$$

Bu yerda p_y^o va p_y^b - sharchaning oxirgi (to‘qnashishdan keyingi) va boshlang‘ich (to‘qnashishga qadar) impulslarining Oy o‘qidagi tashkil etuvchilari; va p_x^o va p_x^b esa mos impulslarning Ox o‘qidagi tashkil etuvchilari. Ikkinchi tenglamaning o‘ng tomonidagi manfiy ishora ishqalanish kuchining yo'nalishi p_x ning yo'nalishiga qarama-qarshiligi bilan bog'liq.

Sharchaning tekislik bilan to'qnashishi elastik bo'lganligi uchun impulsning Oy o'qiga proyeksiyasining kattaligi o'zgarmaydi, ya'ni $p_y^o = p_y^b = mv\cos\alpha$, ammo yo'nalishi qarama-qarshi tomonga o'zgaradi. Shuning uchun sharcha impulsining o'qidagi tashkil etuvchisining o'zgarishi

$$\Delta p_y = 2mv\cos\alpha = N\tau.$$

Sharcha impulsining Ox o'qidagi tashkil etuvchilari

$$P_x^o = p_y^o \operatorname{tg}\beta, \quad p_x^b = mv\sin\alpha.$$

Bir tomondan $p_y^o = mv\cos\alpha$ inobatga olib, Δp_x uchun quyidagi ifodani topamiz:

$$\Delta p_x = mv\cos\alpha \operatorname{tg}\beta - mv\sin\alpha.$$

Ikkinchi tomondan

$$\Delta P_x = -\mu N\tau.$$

Bu ikki ifodani birlashtirib quyidagni olamiz:

$$\Delta p_x = mv\cos\alpha \operatorname{tg}\beta - mv\sin\alpha = -\mu N\tau.$$

Δp_x va Δp_y uchun olingan ifodalarning o'ng va chap tomolarning nisbatini olib qaytish burchagini aniqlash mumkin bo'lgan ifodani topamiz:

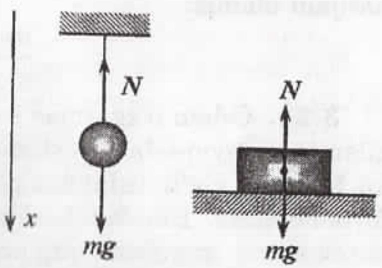
$$\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha = -2\mu.$$

b) sharcha soat milining yo'nalishida aylanganda

$$\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha = 2\mu.$$

Bu holda sharchaning soat mili yo'nalishida aylanishini hisobiga vujudga keladigan ishqalanish kuchi $f_i = \mu N$ Ox o'qi bo'ylab yo'nalgan.

3.19. Yo'ldosh va uning ichidagi barcha jismlar planetamizning og'irlik maydonida vaznsiz holatda bo'ladi. Yo'ldosh va undagi jismlarga ta'sir qiluvchi yagona kuch – Yerning tortish kuchi. Orbitaning Yer sirtidan uzoqligi $H \ll R_{Yer}$ shart o'rinli deb hisoblaymiz. Bu holda jismning og'irlik kuchi mg) ga teng bo'ladi:



3.19-masalaga oid chizma.

$$a = G\frac{M_{Yer}}{(H + R_{Yer})^2} = g,$$

bu yerda G – gravitatsiya doimiysi, M_{Yer} – Yerning massasi.

Yo'ldosh ichidagi va unga nisbatan tinch turgan (vertikal yo'nalishda osilgan yoki silliq gorizontal tayanchda yotgan) jismlarga Newton ikkinchi qonuniga ko'ra, osma yoki tayanch tomonidan ta'sir qiluvchi kuch nolga teng bo'ladi.

Bu jismlar uchun Yer bilan bog'liq bo'lgan sanoq sistemada Newton ikkinchi qonuni tenglamasining Ox o'qiga proyeksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$mg - N = ma, \; a = g :\Longrightarrow \; N = 0.$$

Tayanchning reaksiya kuchining nolga teng bo'lishi, vaznsiz holatni anglatadi, ya'ni yo'ldosh ichidagi jismlar vaznsiz holatda bo'ladi.

3.20. Buning uchun bolalar bir-birini itarib yuborishi, so'ngra har biri to'liq to'xtagunga qadar bosib o'tgan S_1 va S_2 yo'lni ruletka yordamida o'lchashi kerak. Impulsning saqlanish qonuniga ko'ra, bolalarning massalari ularning boshlang'ich tezliklariga teskari proporsional bo'ladi, ya'ni $m_1/m_2 = v_2/v_1$.

Boshlang'ich tezlik o'z navbatida bosib o'tilgan yo'l bilan quyidagi munosabat orqali bog'langan $S = v^2/2a$.

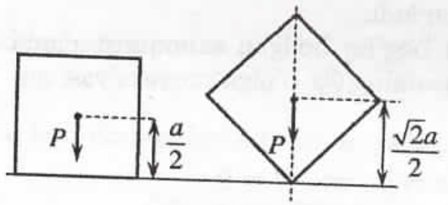
Har bir bolaning harakatiga qarshilik ko'rsatuvchi sirpanish ishqalanish kuchi ta'sir qiladi. Newton ikkinchi qonuniga ko'ra, $ma = \mu mg$. Bundan har bir bolaning tezlanishi son jihatdan teng ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib, yuqoridagilardan quyidagi natijani olamiz:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}}.$$

3.21. Odam o'zgarmas v tezlik bilan harakat qiladi deb faraz qilamiz. "Qayiq-odam" sistemasiga qo'yilgan (og'irlik va Arximed) kuchlarning yig'indisi nolga teng. Impulsning saqlanish qonunidan foydalanamiz. Harakat boshlangunga qadar va harakat davomida sistemaning impulsini qirg'oq bilan bog'langan sanoq sistemaga nisbatan ko'ramiz va quyidagi tenglamani tuzamiz: $0 = m(v - v_0) - Mv_q$. Bu tenglamadan qayiqning qirg'oqqa nisbatan tezligi $v_q = mv/(m+M)$ ekanligini topamiz, demak, odamning, mos ravishda qayiqning harakat qilgan vaqti

$$t = \frac{L}{v} \implies l = v_q t = \frac{mL}{m+M}.$$

Oxirgi ifodadan sistemaning og'irlik markazi qo'zg'almas qolishi ko'rinib turibdi. Bu natija odamning istagancha kichik ko'chishlari uchun o'rinli bo'lganligi uchun, u odamning qayiqqa nisbatan nafaqat to'g'ri chiziqli tekis harakati uchun, balki istalgan ko'rinishdagi harakat uchun ham o'rinli bo'ladi.



3.22-masalaga oid chizma.

3.22. Qutini sudrab a masofaga ko'chirilgandagi ish $A_1 = \mu Pa$. Qutini ag'darib ko'chirishda, uning og'irlik markazining vaziyati Yerga nisbatan o'zgaradi. Qutini bir marta ag'darib a masofaga ko'chirishda bajarilgan minimal ish A_2 kubning ikki vaziyatidagi potensial energiyalar farqiga teng bo'ladi (rasmga q.). Kub qirrasida turgandagi potensial energiyasi

$$U_q = \frac{\sqrt{2}a}{2}P,$$

kub tomonida yotgandagi potensial energiyasi esa

$$U_t = \frac{a}{2}P.$$

Ag'darishda bajarilgan ish

$$A_2 = U_q - U_t = \frac{\sqrt{2}-1}{2}Pa.$$

Shunday qilib,

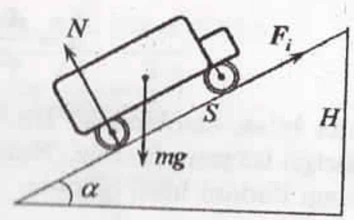
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{2\mu}{\sqrt{2}-1}.$$

3.23. $K = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{H}{t} + \frac{gt}{2}\right)^2 = 612,5\text{J}.$

3.24. Tepalikdan tushishda og'irlik kuchi maydonida jismning potensial energiyasining kamayishi $U = mgH$, uning kinetik energiyasiga aylanadi. Bu energiya gorizontal sirtda ishqalanish kuchiga qarshi bajarilgan ishga sarf bo'ladi: $A = F_t S = \mu mgS$. Bundan $S = H/\mu$.

3.25. Abtomobil qiya tekislik bo'ylab ko'tarilganda uning potensial energiyasi ortadi, kinetik energiyasi kamayadi. Agar avtomobil H balandlikka ko'tarilib to'xtadi deb faraz qilsak, uning potensial energiyasining ortishi

$$U_2 - U_1 = \Delta U = \mu mgH.$$



3.25-masalaga oid chizma.

Bu balandlikda avtomobilning kinetik energiyasi nolga teng bo'lib qoladi, ya'ni uning o'zgarishi

$$K_2 - K_1 = \Delta K = 0 - \frac{mv^2}{2} = -\frac{mv^2}{2}.$$

Ishqalanish kuchiga qarshi bajarilgan ish

$$A = \mu NS = \mu mg\cos\alpha\frac{H}{\sin\alpha}.$$

Yuqoridagilarni hisobga olib energiyaning saqlanish qonunini umumlashgan ko'rinishda yozamiz va undan H_{max} ni topamiz:

$$\Delta U + \Delta K = A \implies H \leq \mp\frac{v^2}{2g(1-\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha)} = H_{max}.$$

3.26. Doiraviy orbita bo'ylab aylanganda Yer tortish kuchining bajargan ishi nolga teng, chunki kuch orbitaning ixtiyoriy nuqtasida yo'ldoshning ko'chish yo'nalishiga perpendikulardir. Harakat elliptik orbita bo'ylab sodir bo'lganda bajarilgan ish noldan farqli bo'ladi, chunki orbitaning turli nuqtalarida ko'chish va kuch orasidagi burchak turlichadir.

3.27. Yo'ldosh elliptik orbita bo'lab harakati davomida planetadan uzoqlashganda kinetik energiyasi kamayadi, potensial energiyasi esa ortadi. Yo'ldosh planetaga yaqinlashganda kinetik va potensial energiyaning o'zgarishi uzoqlashgandagiga nisbatan ishorasini o'zgartiradi. Bunda to'liq energiya o'zgarmasdan qoladi.

4.1. $v = v_0 - \alpha x/m$, bu yerda m – qayiq massasi, α – suvning qarshilik koeffitsienti.

4.2. $F_g/F_e \sim 10^{-40}$.

4.3. Platformaning tezlanishi Newton ikkinchi qonuniga ko'ra

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{M - \delta m t}$$

ifoda bilan aniqlanadi. Bu tenglamani integrallab, boshlang'ich shartga bo'ysundiramiz. Natijada platformaning tezligi uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$v = \frac{F}{\delta m}\ln\frac{M}{M - \delta m t}.$$

Natijalarni tekshiramiz: 1) $F = 0$ bo'lsa, tezlanish va boshlang'ich shartga binoan tezlik nolga teng bo'lishi kerak. Olingan natijalarda kuch nolga teng bo'lsa, tezlanish va tezlik nolga tengligini ko'ramiz. 2) $\delta m = 0$ bo'lsa, platformaning massasi o'zgarmaydi. Olingan natijalarda tezlanish va tezlik uchun mos ravishda quyidagi natijalarni olamiz: $a = F/M$, $v = Ft/M$.

4.4. $v = \frac{2}{3}\sqrt{2g\frac{\pi\rho r^2 H^{3/2}}{M}}$. **4.5.** $l = \frac{9}{2}(\ln 10)^2\frac{u}{\lambda} \approx 24\frac{u}{\lambda}$

4.6. Raketaning harakat tenglamasini vertikal o'qqa proyeksiyasini

$$m\frac{dv}{dt} - u\frac{dm}{dt} - mg$$

quyidagi shaklda yozib olamiz:

$$m\frac{d}{dt}(v + gt) = -u\frac{dm}{dt}\text{yoki} d\left(\frac{v + gt}{u}\right) = -\frac{dm}{m}.$$

Bu tenglamani integrallab, topilishi lozim bog'lanishni aniqlaymiz:

$$\frac{m_0}{m} = \exp\left(\frac{v + gt}{u}\right), \ \text{div} = u\ln\frac{m_0}{m} - gt.$$

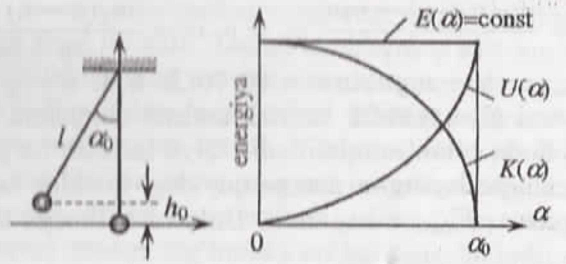
Raketa har sekundda chiqaradigan gazning miqdori $\mu(t) = -dm/dt$ teng bo'lib, $dv/dt = 0$ shartdan topiladi:

$$\mu = \frac{dm}{dt} = \frac{m_0 g}{u}\exp\left(-\frac{g}{u}t\right).$$

4.7. $\frac{m_0}{m} = \exp\left(\frac{v + gt/6}{u}\right) = e^{1,1} \approx 3$ (3.4b masalaga q.).

4.8. $\Delta v = u\ln\left(\frac{1+\alpha}{1+\alpha-k}\right) = 3,4$km/s. **4.9.** $\text{ctg}\,\alpha = a/g$.

4.10. $\Delta x = \frac{gT^2}{4\pi^2}$. **4.11.** $T = 2\pi\sqrt{m\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)}$.



4.13-masalaga oid chizma

4.13. Potensial energiyani mayatnikning eng quyi holatidan hisoblaymiz. Bu holatda potensial energiya nolga teng bo'ladi. Mayatnik boshlang'ich vaqtda α_0 burchakka og'dirilgan bo'lsin. Bu holatda mayatnikning tezligi nolga teng bo'lganligi uchun kinetik energiya nolga teng bo'ladi, potensial energiya esa

$$U(\alpha_0) = mgh_0 = mgl(1 - \cos\alpha_0).$$

Endi potensial energiyani ixtiyoriy α burchak uchun yozmiz:

$$U(\alpha) = mgh = mgl(1 - \cos\alpha).$$

Ishqalanish va havoning qarshilik kuchlari inobatga olinmaganligi uchun to'liq energiya saqlanadi. Shu sababli quyidagi munosabatni yozish mumkin

$$E(\alpha) = mgl(1 - \cos\alpha_0) = mgl(1 - \cos\alpha) + K(\alpha) = \text{const}.$$

Bu munosabatdan mayatnikning kinetik energiyasi uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$K(\alpha) = mgl(\cos\alpha - \cos\alpha_0).$$

To'liq, potensial va kinetik energiyalarning og'ish burchagi α ga bog'lanish grafiklari chizmada keltirilgan.

4.14. O'zgaradi. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left(\frac{\rho - \rho_s}{\rho}\right)}$. **4.15.** a) $v_{o'r} = 3a/T$; b)$v_{o'r} = 6a/T$.? **4.16.** $\delta t\sqrt{2m(g-a)/(ka)}$. **4.17.** $\alpha = \mathrm{arctg}(a/g)$.

5.1. $l = R/\mu$.

5.2. $v_1 = \dfrac{m_1(v+u)+mv}{m+m_1}$, $v_2 = v$, $v_3 = \dfrac{m_1(v-u)+mv}{m+m_1}$

5.3. $N_{max} = N + mgv\sin\alpha \approx 60,7$ot.k. **5.4.** $v = \sqrt{\mu gL}/2$.

5.5. Jismni qiya tekislik bo'yich sudrab chiqishda bajarilgan ish $A = FS$ ifoda bilan aniqlaniladi. Qiya tekislik bo'yicha tepalikka sudrab chiqarilayotgan jismga quyidagi kuchlar ta'sir qiladi: $F_{ishq} = \mu mg\cos\alpha$, $F_{tash} = mg\sin\alpha$. Bularni e'tiborga olib

$$F = \mu mg\cos\alpha + mg\sin\alpha = mg(1 + \mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha)\sin\alpha.$$

bu yerda $\mathrm{ctg}\,\alpha = L/H$. Ish uchun natijaviy ifodaga ega bo'lamiz:

$$A - FS = mg(H + \mu L.$$

Bu yerda ko'chish $S = \sqrt{H^2 + L^2}$ ekanligi hisobga olindi.

5.7. $x = 0$ nuqta noturg'un muvozanat holat, $x = \pm\sqrt{k/\beta}$ nuqtalar turg'un muvozanat holat.

5.8. $a) v^2 \geq 4gl$, $b) v^2 \geq 5gl$.

5.9. Taxta va yukga ta'sir qiluvchi yig'indi kuchlar mos ravishda

$$F_1 = F - [\mu_1(M+m)g + \mu_2 mg] \quad \text{va} \quad F_2 = \mu_2 mg$$

ga teng. Taxta yuk ostidan chiqib ketishi uchun uning tezlanishi yuk tezlanishidan katta bo'lishi kerak, ya'ni $F_1/M \geq F_2/m$. Bundan

$$F \geq (\mu_1 + \mu_2)(M+m)g \simeq 22,5\text{N}$$

shartni hosil qilamiz.

5.10. $\Delta_{min} = \dfrac{\mu(M+m)}{k_1 + k_2}$.

5.11. $v = \sqrt{\dfrac{2M}{m(M+m)}\left(\dfrac{kx_0^2}{2} - \mu mgL\right)}$. **5.12.** $l = \dfrac{v_0^2}{3\mu g}$.

6.1. $\delta = m_1 m_2/(m_1 + m_2)^2$. Bundan $m_1 = m_2$ bo'lganda harakatdagi zarracha hamma energiyasini yo'qotadi ($\delta = 1$). **6.2.** $x = mL/(m+M)$. **6.3.** $t = \sqrt{l/g}$.

6.4. $\beta_1 = \beta(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)$, $\beta_2 = 2\beta m_1 l_1/l_2(m_1 + m_2)$.

6.5. $u = 2V - v$. **6.6.** $S = v^2/4\mu g$.

6.7. Snaryad ko'tarilishining eng yuqori nuqtasida uning tezligi nolga teng bo'ladi. Tashqi kuchlar (og'irlik kuchlari) ta'sirida snaryad bo'laklarining umumiy impulsining o'zgarishi e'tiborga olmasa bo'ladigan darajada kichik bo'ladi. Chunki portlashning juda qisqa vaqtda yuz beradi. Shunga ko'ra, portlash oldidan va portlash yuz bergan keyin snaryad bo'laklarining umumiy impulsi doimiy qolib, nolga teng bo'ladi. Shu bilan birga uch ($m_1\mathbf{v}_1$, $m_2\mathbf{v}_2$, $m_3\mathbf{v}_3$) vektor yig'indida no'lga teng bo'ladi, qachonki ular bir tekislikda joylashgan bo'lsalar. Bundan kelib chiqadiki, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ vektorlar ham bir tekislikda yotadi.

6.8 $v_1 = \dfrac{m_1(v+u)+mv}{m+m_1}$; $v_2 = v$; $v_3 = \dfrac{m_1(v-u)+mv}{m+m_1}$.

6.9. $a)$ $v \geq \sqrt{5gl}$; $b)$ $v \geq \sqrt{4gl}$. **6.10.** $2\overline{K} = \overline{U}$.

6.11. $U = \dfrac{1}{2}\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2$. **6.12.** $a)$ energiya va impuls saqlanish qonunlaridan foydalanib isbotlash mumkin; $b)$ $\mathbf{v}_1 = 0$. $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$.

6.13. $Q = F_A h - mg(h + h_1)$. Bu natijani olishda qanday taxmin qilingan?

6.14. $F = GMm\left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{2(2d-R)}\right)$.

6.15. $h = R\left(\sqrt{\frac{G\rho T^2}{G\rho T^2 - 3\pi}} - 1\right)$.

6.16. a) $g_a = \frac{4}{3}\pi G R\rho$; b) $h_a = \frac{g}{g_a}$.

7.1. Tashqi kuchlar bo'lmaganligi sababli sistemaning impuls momenti saqlanadi, ya'ni $\mathbf{L} = [\mathbf{rp}] = \text{const}$. $\mathbf{r} \perp \mathbf{p}$ bo'lganligi uchun impuls momentining moduli ixtiyoriy masofa uchun quyidagicha aniqlanadi:

$$L = rp, \quad r = x, \quad p = mv, \quad v = \omega x, \quad L - mx^2\omega.$$

Ip uzilmasdan avval $L = ma^2\omega$, ip uzilgandan so'ng $L = mx_0^2\omega_x$. Bularni tenglashtirib x masofadagi burchak tezlikni topamiz:

$$\omega_x = \frac{a^2}{x_0^2}\omega_0.$$

7.2. Qo'ng'izning diskka nisbatan burchak tezligi $\omega_1 = v/r = at/r$. Sistemaning impuls momenti saqlanadi:

$$0 = mr^2(\omega_1 - \omega) - \frac{Mr^2}{2}\omega.$$

Bundan

$$\omega = \frac{2mat}{r(M+2m)}, \quad \beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{2ma}{r(M+2m)}.$$

7.3. Impuls momenti saqlanadi:

$$\frac{mr^2}{2}\omega_0 = \left(\frac{mr^2}{2} + mu^2t^2\right)\omega_t,$$

bu yerda m – disk va qo'ng'iz massasi, r – disk radiusi ut va ω_t – mos ravishda harakat boshlangandan t vaqtda qo'ng'iz bosib o'tgan

masofa va diskning burchak tezligi. Yuqoridagi tenglamadan ω_t ni aniqlaymiz:

$$\omega_t = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{r^2\omega_0}{r^2 + 2u^2t^2}.$$

Bu tenglamani $t = 0$, $\varphi = 0$ boshlang'ich shartda integrallab, so'ralayotgan burchakni topamiz:

$$\int d\varphi = \int \frac{r^2\omega_0}{r^2 + 2u^2t^2}dt, \Longrightarrow \varphi = \frac{r\omega_0}{\sqrt{2}u}\,\text{arctg}\,\frac{\sqrt{2}ut}{r}.$$

7.4. $\omega = 6v_0/5l$. **7.5.** $\omega = \text{const}/r^2$, $F = \text{const}/r^3$, $A = 3m\omega_0^2 R_0^2/2$.

7.6. $\varphi = \pi r^2/(R^2 + 2r^2)$. **7.7.** $\Delta E = mMR^2\omega^2/2(M+2m)$.

7.8. Kepler uchinchi qonuniga asosan

$$\frac{T_1^2}{T_{min}^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} \Longrightarrow T_{min} = T_{Oy}\sqrt{\frac{R_{min}^3}{R_{Oy}^3}}.$$

Bu yerda T_1 va R_1 – oldindan bizga ma'lum bo'lgan yo'ldoshning aylanish davri va orbita radiusi. Bu kattaliklar sifatida, masalan, Yerning tabiiy yo'ldoshi Oyning aylanish davri $T_{Oy} = 27,3$ sutka $= 2,36 \cdot 10^5$ s, orbitasining radiusi $R_{Oy} = 3,84 \cdot 10^8$ m olish mumkin. Minimal radius Yerning radiusiga teng $R_{min} = 6,38 \cdot 10^6$ m. $T_{min} \approx 5,06 \cdot 10^3$ s $= 84$ min $= 1$ soat 24 min. Birinchi kosmonavt Yu.Gagarinning parvozi 1 soat 48 min davom etgan, ya'ni "Vostok" kemasi Yer atrofida bir martadan sal ko'proq uchgan.

7.9. $t \approx 119$ min ≈ 2 soat. **7.10.** $R_{max} = 5,3 \cdot 10^{12}$ m.

7.11. $v_{max} \approx 55 \cdot 10^3$ m/s, $v_{min} \approx 0,93 \cdot 10^3$ m/s.

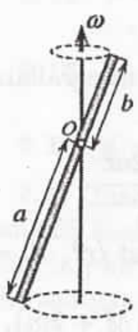
8.1. Tashqi kuchlar yo'q bo'lganligi uchun impuls momenti saqlanadi:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \qquad (*)$$

bu yerda $I_1 = ml^2/12$ sterjen markazidan, $I_2 = ml^2/12 + ml^2/A = ml^2/3$ esa sterjen uchidan o'tuvchi o'qqa nisbatan aniqlangan inersiya momentlari va ω_2 so'ralayotgan chastota. I_2 Shteyner teoremasiga asosan hisoblanadi. Bu kattaliklarni (*) ifoaga qo'yib, ω_2 ni topamiz:

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \frac{1}{4}\omega_1 = 2,5\,\text{s}^{-1}.$$

8.2. $v = \omega \dfrac{m_1}{m_1 + 2m_2} = 0,45\,\mathrm{m/s}$.



8.3-masalaga oid chizma.

8.3. Vertikal o'q atrofida aylanadigan sanoq sistemasida sterjenning muvozanat shartini $M_M = M_O$ ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda M_M markazdan qochma kuch momenti, M_O mahkamlanish nuqtasiga nisbatan og'irlik kuchi momenti.

Mahkamlanish nuqtasidan x masofada sterjenning dx elementiga ta'sir qiluvchi markazdan qochma kuch

$$dF_M = m\frac{dx}{a+b}\omega_2 x \sin\alpha.$$

Bu kuchga mos keluvchi moment:

$$dM_M = dF_M x \cos\alpha.$$

Bu ifodani integrallab, markazdan qochma kuchning to'liq momentini topamiz:

$$M_M = \frac{m\omega_2 \sin\alpha\cos\alpha}{a+b}\int\limits_{-}^{} b^a x^2 dx = \frac{1}{3}\frac{m\omega^2(a^2+b^2)}{a+b}\sin\alpha\cos\alpha.$$

Og'irlik kuchi momenti:

$$M_O = mg\frac{a-b}{a+b}\sin\alpha.$$

Muvozanat shartidan foydalanib, og'ish burchagi uchun quyidagi ifodani topamiz:

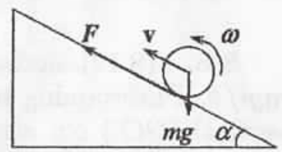
$$\cos\alpha = \frac{2}{3}\frac{g(a^2-b^2)}{\omega^2(a^2+b^2)}$$

E'tibor bering, og'ish burchagi sterjenning massasiga bog'liq emas.

8.4. Qiya tekislik bilan silindrning urinish joyida ishqalanish kuchi **F** ga teng bo'lsin (rasmga q.). Bu kuch silindrni qiya tekislik bo'ylab yuqoriga ko'tarilishiga majbur qiladi. Toza dumalash yuzaga kelmagunga qadar **F** sirpanish ishqalanish kuchi bo'ladi. Harakat toza dumalashga o'tganda **F** tinch holatdagi (tutinish)

ishqalanish kuchiga aylanadi. Ammo, silindrning harakati qanday bo'lishidan qa'tiy nazar u massa markazining harakat tenglamasi $mdv/dt = F - mg\sin\alpha$ hamda geometrik o'qqa nisbatan yozilgan momentlar tenglamasi $Id\omega/dt = -Fr$ ga bo'ysunadi. Bu tenglamalardan **F** ni yo'qotib, quyidagini olamiz:

$$mr\frac{dv}{dt} = -I\frac{d\omega}{dt} - mgr\sin\alpha.$$



8.4-masalaga oid chizma.

Boshlang'ich shart ($t = o$ da $\omega = \omega_0$) ni hisobga olib, bu tenglamani integrallab quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$mrv = I(\omega_0 - \omega) - mgrt\sin\alpha.$$

Harakat qanday bo'lishidan qa'tiy nazar bu munosabat harakat davomida o'rinli bo'ladi. Ko'tarilishning eng yuori nuqtasida tezlik $v = 0$ bo'ladi, ya'ni silindr harakatdan to'xtaydi. Shunga ko'ra, silindrning o'z o'qi atrofida aylanish burchak tezligi ham nolga teng bo'ladi. Integrallash natijasida olingan tenglamada $v = 0$, $\omega = 0$ deb, aniqlanishi lozim bo'lgan vaqtni topamiz:

$$t = \frac{I\omega_0}{mgr\sin\alpha} = \frac{r\omega_0}{2g\sin\alpha}.$$

Bu yerda silindrning $I = mr^2/2$ inersiya momenti inobatga olindi.

Qizig'i shundaki, aylanayotgan silindrning yuqoriga ko'tarilish vaqti qiya tekislik bilan silindr orasidagi ishqalanish koeffitsientiga bog'liq emas ekan. Ishqalanish koeffitsienti o'zgaruvchi bo'lganda ham natija o'zgarmaydi. Ammo, bu masala ma'noga ega bo'lishi, yani silindr yuqoriga qarab harakatlanishi uchun ishqalanish yetarlicha katta bo'lishi kerak.

Qaytib tushish vaqti ishqalanish kattaligiga bog'liq, chunki tushishda silindr doimo dumalaydi. Ko'tarilishda esa, u oldin sirpanadi keyin dumalashga o'tadi. Shu sababli vaqtlar turlicha bo'ladi

8.5. Taxta bilan bog'liq koordinatalar sistemasida silindrning ilgarilanma va aylanma harakat tenglamalari

$$ma = ma_0 - F_i, \quad Ia = r^2 F_i$$

shaklda yoziladi, bunda ma_0 inersiya kuchi, F_i silindrga taxta tomonidan ta'sir qiluvchi ishqalanish kuchi, I - silindrning inertsiya momenti va r uning radiusi. Bu tenglamalar sistemasining yechimi $a = 2a_0/3$ ni beradi. $v = \sqrt{2Ia}$ ni hisobga olib masala shartida so'ralgan tezlik uchun quyidagi natijaga ega bo'lamiz:

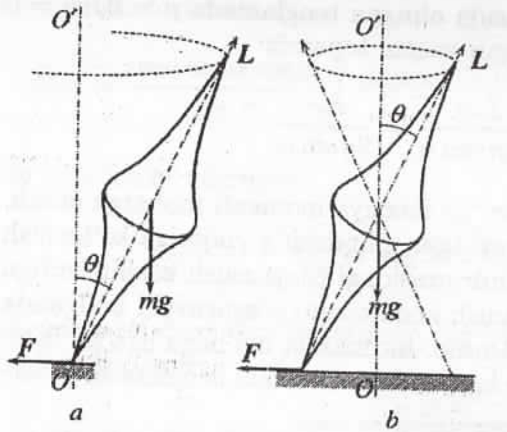
$$v = 2\sqrt{Ia_0/3}.$$

8.6. (8.19) ifodaga asosan pretsessiya burchak tezligi $\Omega = mgl/I$. Pildiroqning massalar markazi tayanch nuqtadan o'tuvchi vertikal (OO') o'q atrofida aylana bo'ylab harakatlanadi, shu sababli **F** vektor (a) rasmda ko'rsatilgandek yo'nalgan (bu vektor pildiroq o'qi bilan birga buriladi). Massalar markazi harakat tenglamasiga ko'ra:

$$m\Omega^2 l \sin\theta = F.$$

Yuqoridagi ifodalardan foydalanib tayanch reaksiya kuchining gorizontal tashkil etuvchisining moduli uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$F = \left(\Gamma\frac{m^3 g^2 l^3}{L^2}\right)\sin\theta.$$



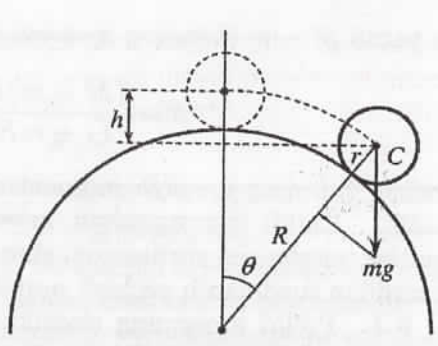
8.6-masalaga oid chizma.

Shuni ta'kidlash lozimki, agar pildiroqning tayanch nuqtasi absolyut silliq tekislikda joylashgan bo'lsa, u holda pildiroq xuddi o'sha burchak tezlik bilan presessiyalanar edi, faqat pressesiya massalar markazidan o'tuvchi vertikal (OO') o'q atrofida bo'lar edi (b rasm).

8.7. Sfera sirtidan shar ajralgandan so'ng uning burchak tezligi o'zgarmaydi. Shu sababli masalada so'ralayotgan burchak tezlikni topish sharning ajralish momentidagi tezlikni topishga aylanadi.

Shar markazining harakat tenglamasini sferadan ajralish vaqti uchun yozamiz:

$$\frac{mv^2}{R+r} = mg\cos\theta,$$



8.7-masalaga oid chizma.

bu yerda v – ajralish momentidagi shar markazining tezligi, θ – shu vaqtdagi burchak (rasmga q.). Energiyaning saqlanish qonunidan tezlikni topish mumkin:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

bu yerda I – sharning markazidan o'tuvchi o'qqa nisbatan inersiya momenti. Bundan tashqari

$$v = \omega r, \quad h = (R+r)(1-\cos\theta).$$

Yuqorida yozilgan to'rtta tenglamadan masalada so'ralayotgan burchak tezlikni aniqlaymiz:

$$\omega = \sqrt{\frac{10(R+r)}{17r^2}g}.$$

8.8. Suyuqlik bilan bochka devorlari orasida ishqalanish bo'lmaganida bochkaning aylanma harakati suyuqlikka uzatilmaydi. Suyuqlik xuddi yaxlit jismdek sistemaning massalar markazi tezligiga teng bo'lgan v tezlik bilan ilgarilanma harakatlanadi. Sistemaning A oniy o'qqa nisbatan impuls momenti $L = I_A\omega + mRv$ ga teng, bunda R bochkaning tashqi radiusi, I_A uning A oniy o'qqa nisbatan inersiya momenti, m suyuqlikning massasi. Sirpanish bo'lmaganda $v = \omega R$, binobarin, $L = (I_A/R + mR)v$.

Bochkaning massalar markazi oniy o'qqa parallel harakatlanadi, shuning uchun

$$\frac{dL}{dt} = \left(\frac{I_A}{R} + mR\right) = Rg(M+m)\sin\alpha,$$

bu yerda M – bochkaning massasi. Bundan

$$a = \frac{(M+m)R^2}{I_A + mR^2} g \sin\alpha.$$

Bochka tubining inersiya momentini juda kichik deb, hisobga olmadik. Xuddi shu masalani massalar markaziga nisbatan momentlar tenglamasi yordamida, shuningdek, energiyaning saqlanish qonunidan foydalanib yechish mumkin.

9.1. Po'lat arqonning elastiklik chegarasini aniqlovchi kuchlanish $\sigma = F/S$ bo'lsin. Bu tenglikni har ikkala hol uchun yozamiz:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2},$$

bu yerda $F_1 = mg$, $S_1 = \pi D_1^2/$, $F_2 = mg + ma = 8mg$, $S_2 = \pi D_2^2/4$. Bu tenglamalardan $3D_1 = 3 \cdot 9 = 27$mm ekanligi kelib chiqadi. Demak, $8g$ tezlanish bilan ko'tarilayotgan liftni ushlab turish uchun po'lat arqonning diametri 27 mm dan katta bo'lishi kerak.

9.2. Yuklanishning 2/3 qismi betonga va 1/3 qismi temirga to'g'ri keladi.

9.3. $\Delta l = \dfrac{\rho g l_0^2}{2E}$, $\Delta V = \dfrac{1-2\mu}{2S_0E} V_0^2 \rho g$, bu yerda ρ – sterjen yasalgan moddaning zichligi, l_0 va S_0 – mos ravishda sterjenning boshlang'ich uzunligi va ko'ndalang kesim yuzasi, E – Yung moduli, μ – Puasson koeffitsienti.

9.4. $U = ma^2 l/6ES$.

9.5. $U_1 = \dfrac{P^2h}{6ES}$, Ikkinchi holda deformatsiya energiyasi 7 marta ortadi.

9.6. Plastinalar yonma-yon qo'yilganda deformatsiya ko'ndalang bo'ladi. Shu sababli deformatsiya energiyalarining nisbati Yung modullarining nisbatiga teng bo'ladi, ya'ni

$$\frac{U_{po'l}}{U_{pl}} = \frac{E_{po'l}}{E_{pl}} = 2 \cdot 10^3.$$

Plastinalar ustma-ust qo'yilganda deformatsiya bo'ylama bo'ladi. Shu sababli deformatsiya energiyalarining nisbati Yung modullarining nisbatiga teskari bo'ladi, ya'ni

$$\frac{U_{pl}}{U_{po'l}} = \frac{E_{po'l}}{E_{pl}} = 5 \cdot 10^{-4}.$$

9.7. $U = \dfrac{mE\varepsilon^2}{2\rho}$. **9.8.** $\Delta I = \dfrac{4F(1-\mu-2\mu^2)}{\pi D^2 E(1-\mu)}$.

9.9. Deformatsiya chiziqli bo'lganligi uchun kuchlanish chizg'ich qalinligining o'rtasidan hisoblangan masofa x ga proporsional bo'ladi (chizmaga q.), ya'ni $T = 2\pi x E/L$. Kuchlanishning maksimumi chambarakning ichki hamda tashqi sirtiga to'g'ri keladi.

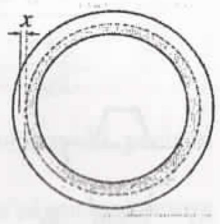
$$T_{max} = \frac{2\pi}{L}\frac{d}{2}E = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{11}}{2 \cdot 0,3} = 2,1 \cdot 10^9\,\text{N/m}^2.$$

9.10. $R = \dfrac{l_0}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{4v^2}{gl_0}}\right)$.

9.11. $\omega^2 = \dfrac{L-l}{Ll} g$.

9.12. *a*) $U = P^2h/(6ES)$; *b*) deformatsiya energiyasi 7 marta oshadi.

9.13. $\alpha = \pi/4$; $\tau = f/2S$.



9.9-masalaga oid chizma.

10.1. Idishni ko'taruvchi kuch – halqasimon sirtga ta'sir qiluvchi suyuqlikning bosim kuchidir. Bosim kuchining idishning boshqa sirtlariga ta'siri o'zaro kompensatsiyalangan. Suyuqlikning bosim kuchi idishning og'irligiga teng bo'lganda ko'tarilish boshlanadi. Kuchlarning tenglik shartini yozamiz:

$$G = SP = \pi(R^2 - r^2)\rho g H,$$

bu yerda S – halqaning yuzi, P – halqasimon sirtga suyuqlik bosimi. Bundan

$$\rho = \frac{G}{\pi(R^2 - r^2)gH}.$$

10.2. Qadoq toshlari tortilayotgan jism moddasidan tayyorlash lozim.

10.3. $P = \frac{\pi}{6}(d_1^3(\rho_2 - \rho_1) + d_2^3\rho_1)g$, g – erkin tushish tezlanishi.

10.4. $b^2 > 6\rho(1-\rho)c^2, \rho = \rho_1/\rho_2$.

10.5. $P = \frac{1}{6}h^2(L+2l)\rho g = 14.3 \cdot 10^5$N

10.6. Atmosferaning temperaturasi hamma balandliklarda bir xil deb faraz qilamiz. Balandlik o'zgarishi bilan bosimning o'zgarishi

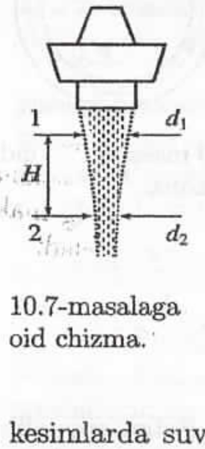
$$dp = -\rho g dh.$$

Temperatura o'zgarmas bo'lganda (izotermik jarayon)

$$\frac{p}{\rho g} = \frac{p_0}{\rho_0 g_0}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Yuqoridagi ifodalardan

$$h = \frac{p_0}{\rho_0 g_0}\ln\frac{p_0}{p}, \quad \frac{p_0}{p} = 2, \quad h = 5,54\text{km}.$$



10.7-masalaga oid chizma.

10.7. Suvni ideal suyuqlik, oqimni uzluksiz va statsionar deb hisoblaymiz. Bundan tashqari oqimning shakli egri chiziqning aylanishi natijasida hosil bo'lgan deb olamiz (rasmga q.). Jo'mrakdan tushayotgan suvning bir-biridan H masofadagi ikki joyida oqim diametrlarini chizg'ich bilan o'lchash kerak. O'lchash natijasida d_1, d_2 va H larni topamiz. Shu ikki kesim uchun Bernulli tenglamasini yozamiz:

$$\frac{v_1^2}{2} + gH = \frac{v_2^2}{2},$$

bu yerda v_1 va v_2 mos ravishda birinchi va ikkinchi kesimlarda suvning oqish tezligi. Uzluksiz oqimda suyuqlikning sarflanishi o'zgarmas bo'ladi, ya'ni turli kesimlardan birlik vaqtda bir xil miqdorda suyuqlik oqib o'tadi. Bu shartni 1 - va 2 - kesimlar uchun yozamiz:

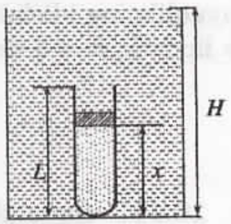
$$S_1 v_1 = S_2 v_2,$$

bu yerda S_1 va S_2 mos ravishda birinchi va ikkinchi kesimlar yuzasi.

Olingan tenglamalarni v_1 ga nisbatan yechib, quyidagi natijani olamiz:

$$v_1 = S_2\sqrt{\frac{2gH}{S_1^2 - S_2^2}} = d_2\sqrt{\frac{2gH}{d_1^2 - d_2^2}}.$$

10.11. Probirkadagi gaz izotermik siqiladi. Shuning uchun gaz bosimi quyidagi tenglamani qanoatlantiradi:



10.11-masalaga oid chizma.

$$P_g x = P_0 L, \quad \text{yoki} \quad P_g = P_0/\delta. \qquad (*)$$

Bu bosim tiqin ustudagi suyuqlik ustuni bosimi bilan muvozanatlangan:

$$P_s = P_0 + \rho g(H - x) = P_0 + \rho g L(H/L - \delta. \quad (**)$$

(*) va (**) ifodalar bilan aniqlangan bosimlarni tenglashtiramiz va hosil bo'lgan kvadrat tenglamani δ ga nisbatan yechamiz:

$$\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{P_0}{\rho g L} + \frac{H}{L}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{P_0}{\rho g L} + \frac{H}{L}\right)^2 - \frac{4P_0}{\rho g L}}.$$

Ikkita yechimlardan $delta < 1$ shartni qanoatlantiruvchi yechim masalaning javobi bo'ladi, ya'ni $\delta = 0,2$.

10.12. Suyuqlikning harakati nostatsionar, ya'ni suyuqlikning yuqori sathi harakatda. Statsionar oqimlar uchun olingan Bernulli tenglamasidan foydalanib bo'lmaydi. Ammo, o'zgarish juda kichik bo'lganda, tenglamadan foydalanish mumkin. O'zgarish juda kichiklik sharti $x \ll S$ munosabat bilan ta'minlanadi. t vaqt momentida idish tubiga nisbatan suyuqlik sathi balandligini h, shu sirtda suyuqlik (sirtdagi zarralar) tezligini $v_1 = -dh/dt$ bilan belgilaymiz. Bosim suyuqlik sirtida va suyuqlik chiqib ketayotgan sirtda bir xil va atmosfera bosimiga teng ekanligini, suyuqlik siqilmasligini, ya'ni $v_1 S = v_2 s$ ni inobatga olamiz. Shu bilan birga suyuqlikni bir butun tok naychasi deb qaraymiz. Natijada Bernulli tenglamasidan $v_2^2 - v_1^2 = 2gh$ ni olamiz. $s \ll S$ shartni hisobga olib,

$$-\frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{s}{S}\sqrt{2g}dt.$$

Bu tenglamani integtallab, masalada so'ralayotgan vaqtni topamiz:

$$t = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right).$$

Suyuqlikning idishdan batamom oqib chiqish vaqtini topish uchun bu ifodada $h = 0$ deb olish kerak, ya'ni:

$$T = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

10.13. Suyuqlik sathi naychaning pastki uchidan yuqorida bo'lganda oqim tezligi $v = \sqrt{2gh}$ ga teng bo'lib turadi. Suyuqlik sathi naychaning pastki uchidan pastga tushishi bilan oqim tezligi kamaya boshlaydi. Tezlik $v = \sqrt{2gh}$ ifoda bilan aniqlanadi. Endi h o'zgaradi, aniqrog'i kamaya boshlaydi.

10.14. $f = \dfrac{2\pi\eta v_0}{\ln(r_1/r_2)} \approx 2,7 \cdot 10^{-3}\mathrm{N/m}^2$, $v(r) = v_0\dfrac{\ln(r_2/r)}{\ln(r_1/r_2)}$.

Adabiyot

1. Brian Dolan, Lecture notes for Mechanics, http: //www. thphys. nuim. ie/Notes/ Mechanics/lectures.pdf
2. Eric Poisson,Advanced mechanics https://www. physics. uoguelph. ca/poisson/ research/mech.pdf
3. Douglas C. Giancoli, Physics Principles with Applications. New York 2014. https://www.amazon.com
4. Strelkov S.P. Mexanika. Uchebnoe posobie - Moskva: Nauka, 2011. -361 s.
5. Sivuxin D.P.Umumiy fizika kursi. 1-qism.Toshkent: O'qituvchi, 1981. -520 b.

Mundarija

A.A.Abdumalikov, H.M.Sattorov

MEXANIKA

(O'quv qo'llanma)

4 Toshkent – "Barkamol fayz media" – 2017

Muharrir: D.Vahidova
Tex.muharrir F.Tishaboyev
Musavvir: D.Azizov
Musahhih: N.Hasanova
Kompyuterda
5 sahifalovchi: U.Voxidov

E-mail: Barkamolfayz@mail.ru
Nashr.list. AI № 284, 12.02.16. Bosishga ruxsat etildi: 18.12.2017.
Bichimi 60x1/16. "Times New Roman" garniturasi.
6 Ofset bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog'i 17.75. Nashriyot bosma tabog'i 18.
Tira ji 500. Buyurtma № 23.

"Fan va texnologiyalar markazining bosmaxonasi"da chop etildi.
100066, Toshkent sh., Olmazor ko'ch., 171-uy.

ISBN 978-9943-5143-2-4
9 789943 514324