

72

22.15
ЖС 81

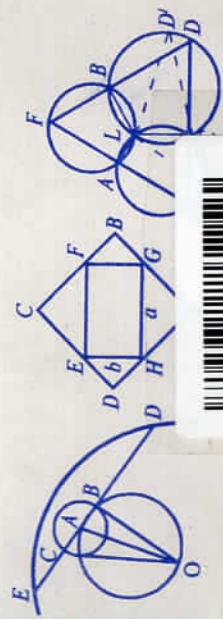


Э.Э.Жумаев

ГЕОМЕТРИЯ МАСАЛАЛАР ТҮҮПЛАМИ

I ҚИСМ

1 я 72
87



Книга должна быть
возвращена не позже
указанного здесь срока

Количество предыдущих выдач	
4.12.20	9.12.20.

Жумаев Эркин Эргашевич

ГЕОМЕТРИЯ МАСАЛАЛАР ТЎПЛАМИ

I қисм

Ўзбекистан Республикаси Олий ва Ўрта махсус таълим
вазирлиги Академик лицей талабалари учун ўқув
қўлланма сифатида нашрга тавсия этган.



Тошкент - 2001

ЎЗБЕКИСТОН RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
TOSHKENT VILOYATI CHIRCHIQ
DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI
AXBOROT RESURS MARKAZI

Аннотация

Мазкур кўлланимда Академик лицейда геометрия фанини ўқитиш жараёнида талабаларни ижодий қобилиятини ривожлантириш, ўзлаштирилиши лозим бўлган билимларнинг қусусларини ва ҳажмини аниқлаш мақсадида масалалар тузилган бўлиб, дарслиқдан олинган билимларни мустақам-
лаштириш назарда тутади.

Такризчилар:

1. Низомий номидаги ТДПУ "математика ва уни ўқитиш методикаси" кафедрасининг доценти, педагогика фанлари доктори М.Тожиёв.
2. Термиз ДУ "Геометрия ва дифференциал тенгламалар" кафедрасининг доценти, ф-м.ф.н.Г.М.Аллаёв.
3. ТПЕСИ Академик лицейининг олий тоифали ўқитувчиси А.Э.Тангиров ва ф-м. ф.н. Ҳ.Исаёв.

Масъул муҳаррир: педагогика фанлари номзоди,
доцент О. Мусурмонов

Nizomiy nomli

T D P U

kutubxonasi

009343/74

© Э.Э.Жумаев, 2001 йил

К и р и ш

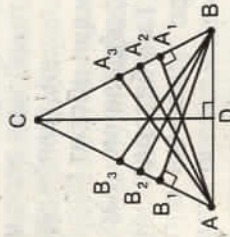
Жаъанитинимизда юз бераётган иқтисодий-ижтимоий ўзгаришлар ҳар бир касб эгасидан "Қадрлар тайёрлаш миллий дастури" ва "Таълим тўғрисида" ги Қонун талаblлари асосида таълим кўришни тақозо этимоқда. Академик лицей талабалари учун маълум масалалар туңлами 10 бўлимдан иборат бўлиб, ҳар бўлимда масалаларни ечиш учун фойдаланиш зарур бўлган назарий bilimлар қолтирилган. Талабалардан уйга берилган вазифаларни бажаришда дарс давомида олган bilimлардан манорат билан фойдаланишни тақозо этади.

Ушбу қўллашда қолтирилган масалани тузишда ва бу масалани инфолатсия техникаси шакли барча элементлари орасигаги билганишни инфодалашга асосланган бўлиб олдимдан мураккабга таърифларига амал қилади. Ушбу ўқув қўллаш масалалар тузишда биринчи тажриба бўлганлиги учун касбатчилардан қили эмас, албатта, Китобхондан ушбу қўллашга туғрилидан фикр ва мулоҳазаларини қуйидаги манзилга юборишларини сўрайман. 733002. Термиз шаҳри Ф. Жуев йўли, ТермизДУ. Дифференциал тенгламалар ва "линейри" дифференциал Ушбу қўллашнинг ёзишда ўзларининг қилишган масалаларини берган Ф.-М.Ф. доктори О. Жамулкамамов, И.Ф. проф. Т.Тулаганов, Ф.-М.ф.н. Т.Сабиров ларга миннатдорчилик билдирман.

Муаллифдан

1. Тенг ёнли учбурчак

1) Таъриф. Агар учбурчакнинг икки томони тенг бўлса, унга тенг ёнли учбурчак деб айтилади.



Агар $AC=BC$ бўлса, $\triangle ABC$ -тенг ёнли, AB -асоси, AC ва BC ён томонлари, D -эса асосининг ўртаси.

2) Хоссалари:

- Тенг ёнли учбурчакнинг асосига ёпишган бурчаклари тенг; $\angle A = \angle B$;
- Тенг ёнли учбурчакда CD медиана, баландлик ва биссектриса вазифасини бажаради;
- Тенг ёнли учбурчакнинг асосига туширилган баландлиги, медианаси ва биссектрисаси устма-уст тушади.

3) Белгилари:

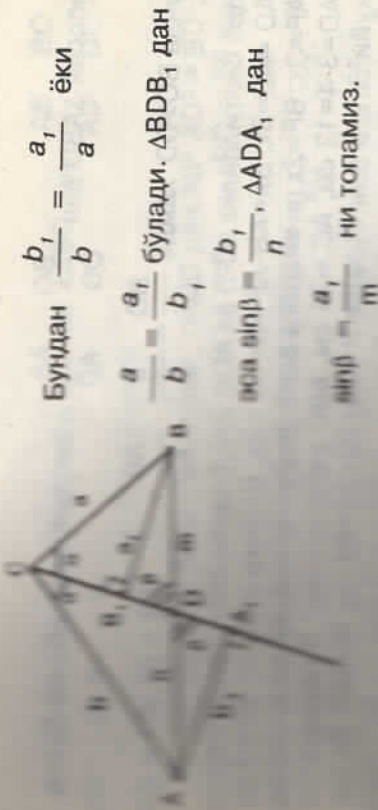
- Агар ABC учбурчакда $\angle A = \angle B$ бўлса, унда $AC=BC$ бўлади;
- Агар $AA_1=BB_1$ бўлса, $AC=BC$ бўлади, бу ерда AA_1, BB_1 - учбурчакнинг баландликлари;
- Агар $AA_2=BB_2$ бўлса, $AC=BC$ бўлади, бу ерда AA_2, BB_2 - учбурчакнинг медианалари;
- Агар $AA_3=BB_3$ бўлса, $AC=BC$ бўлади, бу ерда AA_3, BB_3 - учбурчакнинг биссектрисалари.

4) Учбурчак биссектрисасининг хоссалари:

Учбурчак биссектрисаси қарама-қарши томонини қолган икки томонига пропорционал бўлган кесмага ажратади.

Исбот: ABC учбурчакнинг биссектрисаси CD -бўлсин. A ва B учларидан CD га перпендикуляр AA_1 ва BB_1 ни ўтказамиз. $AC=b$, $BC=a$, $\angle ACD = \angle BCD = \alpha$, $AA_1=b_1$, $BB_1=a_1$, $AD=p$, $BD=m$ деб белгилаб олайлик. $\angle B_1DB = \angle A_1DA = \beta$ бўлгани

учун $\triangle A_1CA_1$, $\triangle B_1CB_1$ дан $\sin \alpha = \frac{b_1}{b}$, $\sin \alpha = \frac{a_1}{a}$, ни топамиз.



Бундан $\frac{b_1}{b} = \frac{a_1}{a}$ ёки

$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$ бўлади. $\triangle BDB_1$ дан

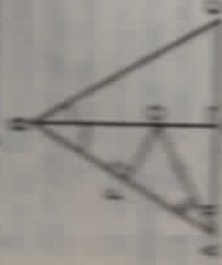
эса $\sin \beta = \frac{b_1}{n}$, $\triangle ADA_1$ дан

$\sin \beta = \frac{a_1}{m}$ ни топамиз.

Бундан $\frac{a_1}{n} = \frac{a_1}{m}$ ва $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ бўлади.

Демак $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ ва $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$

1 маълум. Тенг ёнли учбурчакнинг биссектрисалари кесилиши нуктасидан ён томонига айлмаси 4 см га тенг бўлган кесма ажратуви перпендикуляр ўтказилган. Бу нукта асосига ўтказилган биссектрисанинг 5/3 нисбатда бўлади. Агар асосига ёпишган бурчани 60° дан кичик бўлса, учбурчакнинг периметрини топиш.



Едини. Айтайлик ABC учбурчакда, $AB=BC$ бўлсин, $BD-AC$ асосга ўтказилган баландлик, $AD=DC$ ва $BD-B$ бурчакнинг биссектрисаси B ва A бурчакларининг BD ва AO биссектрисаларини кесмишган нуктаси O бўлсин.

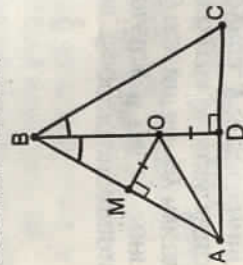
$OF \perp AB$ ни ўтказамиз, $F \in AB$, шартга кўра $OD \perp AC$. OA -биссектриса бўлгани учун $OF=OD$, $\angle A < 60^\circ$, унда $\angle B > 60^\circ$; $\angle OAF < 30^\circ$, $\angle OBF > 30^\circ$, шунинг учун $\angle OAF < \angle OBF$. $AF=OF \cdot \cot \angle OAD$; $BF=OF \cdot \cot \angle OBF$, $\cot \angle OAD > \cot \angle OBF$. Унда $AF > BF$, шартга кўра $AF-BF=4$ см. A бурчакнинг AO биссектрисасининг хоссасига

асосан $\triangle ABD$ дан $\frac{BO}{OD} = \frac{AB}{AD}$. Бундан, агар $AB > AD$ бўлса,

унда $BO > OD$ ҳамда $\frac{BO}{OD} = \frac{5}{3}$, $\frac{AB}{AD} = \frac{5}{3}$ $AB = 5x$, $AD = 3x$

деб белгилайлик. Агар ва AO учбурчакларнинг тенглигидан $AD = AF = 3x$, $BF = AB - AF = 5x - 3x = 2x$, Шартга кўра $AF \cdot BF = 4$ ва $AF = 3x$, $BF = 2x$ ни ҳисобга олиб $3x \cdot 2x = 4$; $x = 4$. $AB = 4 \cdot 5 = 20$ см, $AD = 3 \cdot 4 = 12$ см, $AC = 24$ см. ABC учбурчакнинг P периметри куйидагига тенг бўлади: $P = 20 + 20 + 24 = 64$ см. Жавоб: 64 см.

2-масала. Тенг ёнли учбурчакда ён томони ва асосининг йиғиндиси 78 см га тенг. Ён томони ва асосидан тенг узоқликда жойлашган биссектрисада ётувчи нуқта асосига ўтказилган биссектрисани 5:4 нисбатда бўлади. Учбурчакнинг асосини топинг.

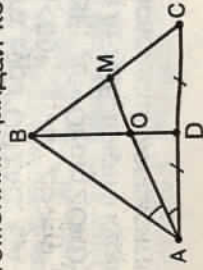


Ечиш. Айтайлик, ABC учбурчакда $AB = BC$, AC эса асоси бўлсин. Шартга кўра $AB + AC = 78$ см, BD биссектриса-сини ўтказамиз. $BD \perp AC$ ва $AD = DC$, $O \in BD$. $OM \perp AB$ ни ўтказамиз.

$OA - BAD$ бурчак биссектрисаси ва $\frac{OB}{OD} = \frac{5}{4}$ ва $OM = OD$ эканлигидан $\frac{OB}{OD} = \frac{5}{4}$ $\frac{AB}{AD} = \frac{5}{4}$

Агар $AB = 5x$, $AD = 4x$, $AC = 8x$ деб белгиласак, $5x + 8x = 78$, $x = 6$, $AC = 8 \cdot 6 = 48$ см ни топамиз. Жавоб: 48 см.

3-масала. Тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги бурчак биссектрисаси асосига ўтказилган медианани 16,5 ва 27,5 смли кесмаларга ажратади. Бу биссектриса ён томонини қандай кесмаларга ажратади?



Биссектриса хоссасига асосан $\triangle ABD$ дан $\frac{AB}{AD} = \frac{BO}{DO}$;
 $\frac{AB}{AD} = \frac{27,5}{16,5} = \frac{5}{3}$ га эга бўламиз.

$AB = 5x$, $AD = 3x$ деб белгилаб, $\triangle ABD$ дан $AB^2 - AD^2 = BD^2$;
 $(5x)^2 - (3x)^2 = 44^2$; $x = 11$. $AB = 5 \cdot 11 = 55$ см, $BC = 55$ см
ни топамиз. Биссектриса хоссасига асосан $\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{CM}$

бузиб $CM = y$ деб $BM = 55 - y$, $\frac{5}{6} = \frac{55 - y}{y}$; $\frac{5}{6} = \frac{55}{y} - 1$;

$\frac{55}{y} = \frac{11}{6}$; $y = 30$; $CM = 30$ см, $BM = 55 - 30 = 25$ см ни топамиз.

Жавоб: 30 см, 25 см.

Машқлар

1. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томони 13 см, асосига қарама-қарши бурчагининг биссектрисаси 12 см бўлса, унинг периметрини топинг.
2. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси 10 см, унга ўтказилган медианаси 12 см га тенг бўлса, унинг периметрини топинг.
3. Тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги бир учидан ўтказилган биссектриса ва баландлик орасидаги бурчак 30° га тенг бўлса, учбурчак бурчакларини топинг.
4. Тенг ёнли учбурчакда асосига ўтказилган баландлик ва асосидаги бурчак биссектрисаси орасидаги бурчак 55° га тенг бўлса, учбурчакнинг бурчакларини топинг.
5. Тенг ёнли учбурчакда куйидагилар маълум бўлса, унинг периметрини топинг:
 - а) ён томони 25 см ва унга ўтказилган баландлиги 24 см;
 - б) асоси 30 см ва ён томонига ўтказилган баландлиги 24 см;
 - в) ён томонига ўтказилган баландлик уни 18 ва 7 смли кесмаларга ажратади;
 - г) асоси 30 см ва унга ўтказилган медианаси 20 см;

- д) ён томони ва асосига ўтказилган баландликлар 20 см ва 24 см;
- е) асосига ёпишган бурчаги 60° кичик бўлиб, биссектриса ён томонини 25 ва 30 см кесмаларга ажратади;
- ж) ён томонини асосига нисбати 5:6 каби. Асосига ёпишган бурчак биссектриса асосига ўтказилган баландликни, айирмаси 4 см бўлган кесмаларга ажратади;
- з) ён томони ва асосининг айирмаси 4 см. Биссектриса асосига ўтказилган медианани 5:3 нисбатдаги кесмаларга ажратади;
- к) асосига туширилган баландликда ён томон учларидан тенг узокликда жойлашган нукта олинган бўлиб, уни 25 ва 7 см кесмаларга ажратади;
- м) медианада олинган нуктадан асосигача 14 см, асосининг учигача бўлган масофа 50 см.
- к) биссектрисада ётган нуктадан ён томонигача бўлган масофа 15 см, учигача бўлган масофа 25 см.
6. Қуйдагиларга кўра тенг ёнли учбурчак ясанг:
- а) асосидаги бурчак ва шу бурчак биссектрисаси;
- б) асосига туширилган баландлик ва ён томонига ўтказилган медианаси;
- в) ён томонига туширилган баландлиги ва асосидаги бурчаги;
7. Қуйдаги элементлар маълум бўлса тенг ёнли учбурчакнинг асосини топинг:
- а) периметри 80 см, асосига ўтказилган баландлиги 20 см;
- б) асосига ўтказилган баландлиги 32 см, асосигача бўлган масофа 12 см.
- в) периметри 128 см, ён томонини асосига бўлган нисбати 5:4 каби;
8. Қуйдагиларга кўра тенг ёнли учбурчакнинг асосини топинг:
- а) асосига ўтказилган медианаси 32 см, асосидаги бурчак биссектрисаси медианани учидан ҳисоблаганидан 20 см масофада кесиб ўтади;
- б) периметри 128 см, асосига туширилган баландлиги 32 см;
9. Учбурчакнинг томонлари 25, 25 ва 30 см бўлса, катти томонига ўтказилган биссектрисани ҳисобланг.

10. Тенг ёнли учбурчакнинг периметри 128 см, асосини асосигача бўлган масофа бўлса, асосига ўтказилган медианани топинг.
11. Тенг ёнли учбурчакда медианалар кесишган нуктага қарата қарай унчага бўлган масофа 12 см бўлса, тенг ён томонига ўтказилган медианасини топинг.
12. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томонини 40 см, асосини 20 см бўлган нуктадан медианада ётган нуктадан асосигача бўлган масофага тенг бўлса, шу нуктадан асосигача бўлган медианани топинг.
13. Тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги бурчак биссектриса асосига ўтказилган баландлигин билан кесишиб, асосини учига бўлган масофага тенг бўлса, бу нуктадан асосигача бўлган медианани топинг.
14. Тенг ёнли учбурчакнинг периметри 128 см, асосини асосигача бўлган масофа бўлса, асосига ўтказилган медианани топинг.

Унга алоқадор

1. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томони 55 см, асосини асосигача бўлган масофа бўлса, асосига ўтказилган медианани топинг.
2. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томони 55 см, асосини асосигача бўлган масофа бўлса, асосига ўтказилган медианани топинг.
3. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси унга туширилган баландлиги 8:3 нисбатда бўлган нуктадан асосигача бўлган масофа бўлса, асосига ўтказилган медианани топинг.
4. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси унга туширилган баландлиги 8:3 нисбатда бўлган нуктадан асосигача бўлган масофа бўлса, асосига ўтказилган медианани топинг.
5. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси унга туширилган баландлиги 8:3 нисбатда бўлган нуктадан асосигача бўлган масофа бўлса, асосига ўтказилган медианани топинг.
6. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси унга туширилган баландлиги 8:3 нисбатда бўлган нуктадан асосигача бўлган масофа бўлса, асосига ўтказилган медианани топинг.
7. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси унга туширилган баландлиги 8:3 нисбатда бўлган нуктадан асосигача бўлган масофа бўлса, асосига ўтказилган медианани топинг.
8. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси унга туширилган баландлиги 8:3 нисбатда бўлган нуктадан асосигача бўлган масофа бўлса, асосига ўтказилган медианани топинг.
9. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси унга туширилган баландлиги 8:3 нисбатда бўлган нуктадан асосигача бўлган масофа бўлса, асосига ўтказилган медианани топинг.

8. Асосига қарама-қарши бурчаги ва ён томонига ўтказилган баландлиги бўйича учбурчак ясанг.

9. Ён томонлари ва унга ўтказилган медианалар ёрдамида учбурчакларнинг тенглигини исботланг.

10. Асосига қарама-қарши бурчаги ва асосининг учларидан ўтказилган биссектрисалар ёрдамида тенг ёнли учбурчакларнинг тенглигини исботланг.

11. Асосига қарама-қарши бурчаги ва ён томонларига ўтказилган баландликлар ёрдамида тенг ёнли учбурчакларнинг тенглигини исботланг.

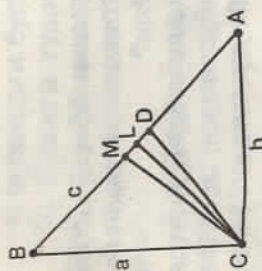
12. Асоси ва ён томонига ўтказилган баландликлари бўйича тенг ёнли учбурчакларнинг тенглигини исботланг.

2. Тўғри бурчакли учбурчак

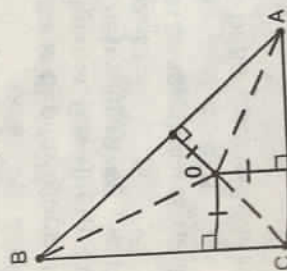
1) Айтайлик $\triangle ABC$ -тўғри бурчакли учбурчак бўлсин. $\angle C = 90^\circ$, AB -гипотенуза, AC ва BC -катетлари, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$; $CD \perp AB$, $CD = h_c$, M - AB ни ўртаси, $CM = m_c$, CL -биссектриса, яъни $CL = \ell_c$, L нукта M ва D нукталар орасида ётади. $\angle MCL = \angle DCL$,

$$CM = MA = MB. \quad CM = \frac{1}{2} \cdot AB$$

$$\angle LCD = \frac{1}{2} |\angle A - \angle B|.$$



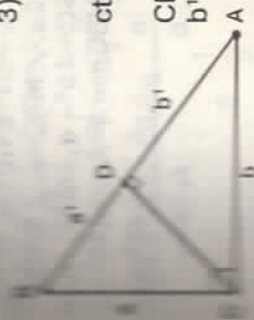
2) O нукта - AB , AC ва BC томонлардан тенг узоклашган нукта, BO , AO , CO - биссектрисалар.



$$3) \sin \alpha = \frac{a}{c}; \cos \alpha = \frac{b}{c}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} \cdot a^2 + b^2 = c^2, \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$CD \perp AB, CD = h_c, AD = b', BD = a'; h^2 = a'b'; a^2 = ca; b^2 = cb'; ch = ab.$$



1-масала. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари 66 ва 88 см. Катта ўткир бурчак биссектрисаси гипотенузага ўтказилган медианани кесмаларга ажратади. Шу кесмаларни ўзининг топинг.

Ечиш. Айтайлик, $\triangle ABC$ учбурчакда $\angle C = 90^\circ$ бўлсин, унда AC ва BC -катетлар, AB - гипотенуза бўлади. $BC = 66$, $AC = 88$ бўлгани учун $BC < AC$, унда $\angle A > \angle B$. $\angle A$ ни биссектрисасини, CM медианани ўтказамиз ва уларни кесишиш нуқтасини K билан белгилаймиз.

Маълумки, $CM = MB = AM$, CK ва MK - кесмаларни узунлигини топишимиз. $\triangle ACB$ дан $AB^2 = AC^2 + BC^2$, $AB = 110$ см,

$$CM = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 110 = 55 \text{ см.}$$

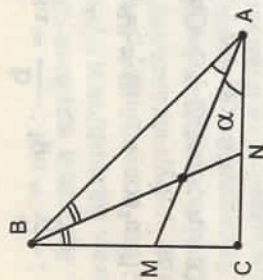
$$\triangle CMA \text{ дан биссектриса хоссасига асосан } \frac{CK}{KM} = \frac{AC}{MA},$$

$$AM = x, CK = 55 - x \text{ деб, } \frac{55 - x}{x} = \frac{66}{55} \Leftrightarrow x = 25. \quad KM = 25 \text{ см}$$

$$CK = 55 - 25 = 30 \text{ см. Жавоб: } 25 \text{ см, } 30 \text{ см.}$$

2-масала. Тўғри бурчакли учбурчакда ўткир бурчак биссектрисалари мос равишда $9\sqrt{5}$ ва $8\sqrt{10}$ см. Учбурчакнинг катетларини топинг.

Ечиш. Айтайлик, $\triangle ABC$ тўғри бурчакли учбурчакда BC . AB -катетлар, AB гипотенуза бўлсин. AM ва BN биссектрисаларини тортим.



$$\begin{aligned} \ell_a &= AM = 9\sqrt{5}, \ell_b = BN = 8\sqrt{10} \text{ см, } BC = a, \\ AC &= b, \angle A = 2\alpha, \angle MAC = \alpha, \angle B = 90^\circ, \\ &- 2\alpha, \angle NBC = 45^\circ - \alpha, \triangle MAC \text{ дан} \\ b &= \ell_a \cos \alpha, \triangle NBC \text{ дан } a = \ell_b \cos(45^\circ - \alpha), \\ \frac{a}{b} &= \frac{\ell_a \cos \alpha}{\ell_b \cos(45^\circ - \alpha)}; \end{aligned}$$

$$\frac{\ell_b}{\ell_a} = \frac{8\sqrt{10}}{9\sqrt{5}} = \frac{8}{9} \sqrt{2}; \quad \frac{a}{b} = \frac{8}{9} \sqrt{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos(45^\circ - \alpha)};$$

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2(45^\circ - \alpha)} = \frac{128}{81}; \quad \left(\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \right)^2 \cdot \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{128}{81};$$

$$\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \left(\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{128}{81};$$

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2} = \frac{2}{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2}; \quad \frac{2}{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2} = \frac{128}{81}; \quad \left[\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 + \operatorname{tg} \alpha)} \right]^2 = \frac{64}{81};$$

$$\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 + \operatorname{tg} \alpha)} = \frac{8}{9}; \quad \text{Энди } \operatorname{tg} \alpha = y \text{ деб белгиласак,}$$

$$\frac{y}{(1 - y^2)(1 + y)} = \frac{4}{9}; \quad 4(1 - y^2 + y - y^3) = 9y; \quad 4y^3 + 4y^2 + 5y - 4 = 0.$$

$$(2y - 1)(2y^2 + 3y + 4) = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \text{ чунки } 2y^2 + 3y + 4 = 0 \text{ хакийи}$$

илдизга эга эмас.

Масалалар

1. Куйидаги элементларга кўра тўғри бурчакли учбурчакнинг периметрининг эҳсосини:

а) гипотенузаси 13 см, катети 12 см;

б) катет ва гипотенуза 3:5 нисбатда ва иккинчи катети

18 см;

в) катетлар айырмаси 5 см, гипотенузаси 25 см;

г) катети 30, унга утказилган медианаси $5\sqrt{13}$ см;

д) гипотенузига утказилган баландлиги 24 см ва уни

18 нисбатда кесмаларга ажратган;

е) катет ва гипотенуза 4:5 нисбатда, ўткир бурчак

синуси ва косинуси катетни айырмаси 2 см бўлган кес-

малга ажратган;

ж) Тўғри бурчакли учбурчакда куйидаги элементлар

айирмаси ва катетлар айырмасини топинг:

а) периметри 36 см, катетлар айырмаси 3 см;

б) ўткир бурчак синуси катетларидан бирини

8 ва 18 нисбатда ажратган;

в) Тўғри бурчак синуси катетларидан бирини

84 см, катетлар айирмаси 84 см;

г) Катетларга утказилган медианалар $\sqrt{52}$ ва $\sqrt{73}$ см.

д) Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари 15 ва 20 см.

1. Катетларга утказилган медианаларнинг топинг.

4. Тўғри бурчакли учбурчакда тўғри бурчак учидан ўтказилган биссектриса ва баландлик орасидаги бурчак 15° га тенг бўлса, учбурчак бурчакларини топинг.

5. Тўғри бурчакли учбурчакда тўғри бурчак учидан баландлик, медиана ва биссектриса ўтказилган. Агар баландлик ва медиана орасидаги бурчак 30° бўлса биссектриса ва баландлик орасидаги бурчакни топинг.

6. Қуйидаги элементларга кўра тўғри бурчакли учбурчак ясанг:

- гипотенузага ўтказилган баландлиги ва ўткир бурчаги бўйича;
- гипотенузага ўтказилган медианаси ва ўткир бурчаги бўйича;
- гипотенуза ва унга ўтказилган баландлик бўйича;
- битта катет ва гипотенузага ўтказилган баландлиги берилган бўлса.

Ҳақиқатлар

1. Тўғри бурчакли учбурчакда катетлар йиғиндиси 35 см, гипотенуза ва унга ўтказилган баландликлар йиғиндиси 37 см бўлса, учбурчакнинг гипотенузасини топинг.

2. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катети 28 см, ҳар бир катетдан 12 см узокликда гипотенузасида нукта олинган бўлса, учбурчакнинг периметрини топинг.

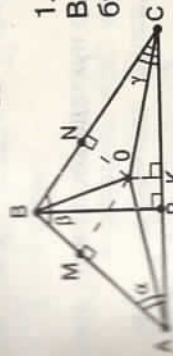
3. Тўғри бурчакли учбурчакларнинг қуйидаги мос элементларига кўра тенглигини исботланг:

- гипотенузага ўтказилган баландлиги ва медианаси;
- тўғри бурчак учидан ўтказилган баландлиги ва биссектриса;
- катет ва унга ўтказилган медианаси;
- катет ва иккинчи катетга ўтказилган медианаси;
- катет ва иккинчи катетга ўтказилган биссектриса;
- ўткир бурчак ва шу бурчак биссектриса бўйича.

4. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузасига ўтказилган медиана уни иккита тенг ёнли учбурчакка ажратишини исботланг.

5. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари 45 ва 60 см. Биссектрисалар ва медианалар кесишиш нуктаси орасидаги масофани топинг.

3. Тўғри томонли учбурчак



1. Айтайлик ABC учбурчакда $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$, $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$ бўлсин. Маълумки $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$.

а) О нукта AB , BC , AC -томонларнинг ўрта перпендикулярларини (медиатрисасини) кесишиш нуктаси бўлсин. Унда $AM=MB$, $BN=NC$, $CK=AC$ бўлади. Катта томон қаршисида катта бурчак ётади.

б) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ (косинуслар теоремаси);

в) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ (синуслар теоремаси);

г) $OM + ON + OK = BP = h_b$;

д) Учбурчак баландликлари ётган тўғри чизиклар бир

нуктада кесишади, яъни $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.



$AA_1=h_a$, $BB_1=h_b$, $CC_1=h_c$ - деб белгилайлик, унда

$$h_a = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2a}, \quad h_b = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2b},$$

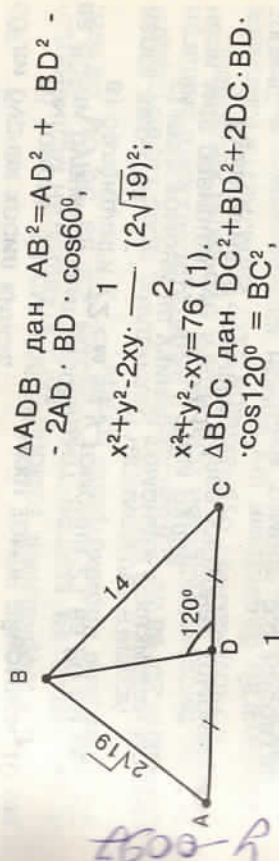
$$h_c = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2c}, \quad \text{бўлади, бу ерда } p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$b = \frac{\sqrt{x}}{2h_a^2 h_c^2 h_b}, \quad a = \frac{\sqrt{x}}{2h_b^2 h_c^2 h_a}, \quad c = \frac{\sqrt{x}}{2h_c^2 h_a^2 h_b}$$

$$e_a^2 = \frac{4p(p-a)bc}{(b+c)^2}, \quad e_b^2 = \frac{4p(p-b)ac}{(a+c)^2}, \quad e_c^2 = \frac{4p(p-c)ab}{(a+b)^2}.$$

1-масала. ABC учбурчакда $AB=2\sqrt{19}$ ва $BC=14$ см. Агар $\angle BDC=120^\circ$ бўлса, учбурчакни томонларини топинг. бу ерда BD медиана.

Ечиш: BD -умумий томон, $AD=DC$, $BC>AB$, $\angle ABC=60^\circ$
 инди $AD=DC=x>0$, $BD=y>0$, деб белгилایмиз.



$$x^2 + y^2 - 2xy(-\frac{1}{2}) = 14^2, \quad x^2 + y^2 + xy = 196 \quad (2).$$

(1), (2) $\Rightarrow xy=60$ ни толамиз. Бундан $2x=20$ га эга бўламиз.
 $AC=2x$, $AC=20$ см. Жавоб: 20 см.

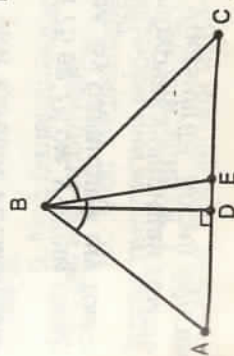
2-масала. ABC уѳбурчакниг В учидан баландлик ва биссектриса ѳтказилган. Агар баландлик томонни 7 ва 32 см кесмаларга ажратиб биссектриса шу томонни 5:8 нисбатда бѳлса, уѳбурчакниг баландлиг

Ечиш. Шартта кўра BD - баландлигини ва периметрини топиш.
AD=7 см, DC = 32 см бўлсин.

$$AB < BC, AC = 39 \text{ см}, \frac{AB}{BC} = \frac{5}{8} \text{ ни ёза оламит.}$$



$5x > 0$, $BC = 8x > 0$ деб олиб $\triangle ABD$
 дан $BD^2 = AB^2 - AD^2$ ва $\triangle BCD$ дан
 $BD^2 = BC^2 - CD^2$ ни топамиз. Бундан
 $AB^2 - AD^2 = BC^2 - CD^2$ ва $BC^2 - AB^2 =$
 $= BD^2$

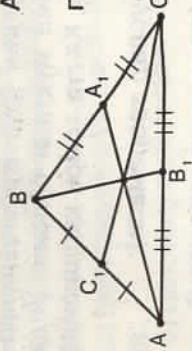


бу ерда $x = (h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c) \cdot (h_a h_b + h_b h_c - h_a h_c) \cdot (h_a h_b + h_a h_c - h_b h_c) \cdot (h_a h_c + h_b h_c - h_a h_b)$.

$$\cdot (n_a n_c + n_b n_c - n_a n_b).$$

$$\frac{AC_1}{CB_1} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

$$AA_1 = m_a, \quad BB_1 = m_b, \quad CC_1 = m_c \text{ деб бел-}$$

$$\text{гилайлик, } \frac{AO}{OA_1} = \frac{OC_1}{OA_1}, \quad 1 - AA_1, \quad \dots$$


$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}, \quad m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, \quad m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$

$$c^2 = \frac{4}{9} \frac{2(m_a^2 + m_b^2) - m_c^2}{2(m_c^2 + m_d^2) - m_a^2} \quad , \quad a^2 = \frac{4}{9} \frac{2(m_b^2 + m_c^2) - m_d^2}{2(m_d^2 + m_a^2) - m_b^2} \quad ,$$

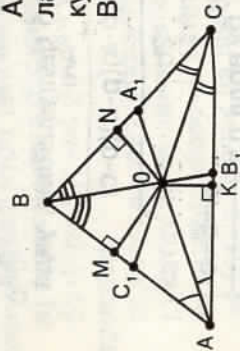
$$\omega^2 = \frac{4}{9} \sqrt{2(m_a^2 + m_c^2) - m_b^2}.$$

е) Учбурчакда биссектрисалар бир

$$\frac{AC_1}{CB} \cdot \frac{BA_1}{AC} \cdot \frac{CB_1}{BA} = 1.$$

$$\frac{C_B}{C_B} \cdot \frac{A_C}{A_C} \cdot \frac{B_A}{B_A} = 1.$$
$$AA_1 = e_a, \quad BB_1 = e_b, \quad CC_1 = e_c, \quad \text{тэгш перпендикулярлайлж: } OM = ON = OK.$$

$$BB_1^2 = AB \cdot BC - AB_1 \cdot B_1C$$



$$e_a = \frac{\frac{\hat{A}}{2}}{2b \cos \frac{\hat{A}}{2}}, e_b = \frac{\frac{\hat{B}}{2}}{2a \cos \frac{\hat{B}}{2}}, e_c = \frac{\frac{\hat{C}}{2}}{2ab \cos \frac{\hat{C}}{2}}.$$

Шундай қилиб $AB=25$ см, $BC=40$ см.

$$P=25+40+39=104 \text{ см. } BD^2=25^2-7^2=32 \cdot 18=16 \cdot 36;$$

$$BD=4 \cdot 6=24 \text{ см ни топамиз. Жавоб: } 24 \text{ см, } 104 \text{ см.}$$

Машклар

1. Куйидаги элементларга кура учбурчакнинг периметрини ҳисобланг:

а) томони 35 см, қолган икки томони 8:3 каби ва 60° ли бурчак ҳосил қилса;

б) томони 14 см, қолган икки томон айырмаси 10 см ва 60° ли бурчак ҳосил қилса;

в) баландлиги 72 см ва у томонни 21 ва 30 см кесмаларга ажратса;

г) икки томони ва учинчи томонига ўтказилган медиана мос равишда 12, 14 ва 7 см бўлса.

2. Куйидагилар маълум бўлса учбурчак томонларини топинг:

а) периметри 30 см, икки томони 5:3 нисбатда ва 120° ли бурчак ташкил этса;

б) икки томон айырмаси 15 см, учинчи томонига туширилган баландлик уни 7 ва 32 см кесмаларга ажратса;

в) учидан туширилган баландлик $12\sqrt{3}$ см ва шу бурчакда 30° ва 45° ли бурчак ҳосил қилса;

3. Учбурчакнинг томонлари 13, 14 ва 15 см. 14 см ли томонига туширилган баландлигини топинг.

4. Учбурчакнинг томонлари 14, 18 ва 28 см. Катта томонига ўтказилган медианасини топинг.

5. Учбурчакнинг икки томони 7 ва 3 см. Катта томони каршисидаги бурчак 120° га тенг бўлса, унинг учинчи томонини топинг.

6. Учбурчакнинг томонлари 15, 20 ва 28 см. Катта томонига ўтказилган биссектриса уни қандай кесмаларга ажратadi?

7. Учбурчакнинг икки томони 75 ва 78 см, учинчи томонига туширилган баландлиги 72 см. Бу баландлик шу томонини қандай кесмаларга ажратadi?

8. Периметри 24 см бўлган учбурчак учларидан томонларига параллел тўғри чизиқлар ўтказилган. Ҳосил бўлган учбурчак периметрини топинг.

9. Куйидагиларга кўра учбурчак ясанг:

а) икки томони ва учинчи томонига ўтказилган баландлиги;

б) икки томони ва учинчи томонига ўтказилган медианаси;

в) икки томони ва учинчи бурчак учидан ўтказилган баландлиги;

г) икки бурчаги ва учинчи бурчак учидан ўтказилган биссектрисаси.

Уйга вазифалар

1. Учбурчакнинг томони унга ўтказилган медианадан 4 см ортиқ ва қолган томонлари 28 ва 36 см бўлса, учбурчакнинг периметрини топинг.

2. Асосига туширилган баландлик, асос каршисидаги бурчакни 20° ва 30° бурчакларга ажратadi. Асосига ёпишган бурчак биссектрисалари орасидаги бурчакни ҳисобланг.

3. Учбурчакнинг бурчаклари 5:6:7 каби. Катта томонига туширилган баландлик шу томон каршисидаги бурчакни қандай кесмаларга ажратadi?

4. Учбурчакнинг периметри 45 см, томонлари 4:5:6 нисбатда бўлса, унинг катта томонини топинг.

5. Учбурчакнинг томонлари 30 ва 40 см, учинчи томонига туширилган баландлиги 24 см бўлса, учинчи томонига туширилган медианасини топинг.

6. Учбурчакнинг томонлари 21 ва 24 см, улар орасидаги бурчак эса 120° га тенг бўлса, унинг периметрини ҳисобланг.

7. Икки томони орасидаги бурчак 60° ва улар 5:8 каби бўлиб, учинчи томони 21 см бўлса, унинг периметрини ҳисобланг.

8. Куйидагиларга кўра учбурчак ясанг:

а) укта медианаси буйича;

б) томони ва унга ўтказилган медианаси ва баландлиги буйича.

9. Мос баландликлари тенг бўлган учбурчакларни ўзаро тенглигини исботланг.

10. Мос медианалари тенг бўлган учбурчакларнинг ўзаро тенглигини исботланг.

11. Куйидагиларга мос элементларига кўра учбурчакларнинг тенглигини исботланг:

- а) икита бурчаги ва учинчи бурчак биссектрисаси;
 б) икки томони ва учинчи томонига ўтказилган
 баландлиги;
 в) Икки бурчаги ва учинчи бурчак учидан туширилган
 баландлиги;
 г) Бир учидан чикувчи икки томони ва медианаси;

4. Параллелограмм ва унинг турли кўринишлари

1) Параллелограмм.

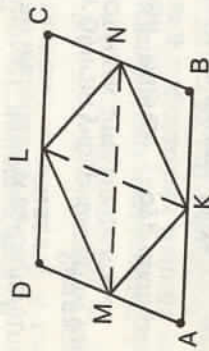
AC ABCD параллелограмм бўлсин. $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, BD ва AC диагоналлари, O - диагоналлари кесилган нукта, MN-BC ва AD га перпендикуляр бўлиб O нукта орқали ўтади. BK ва BP лар AD ва DC ларга перпендикуляр бўлиб параллелограммнинг баландликлари бўлади.

$AD=BC=a$, $AB=CD=b$, $AC=d_1$, $BD=d_2$, $BK=h_a$, $BP=h_b$ деб белгиласак. $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$; $a \cdot h_a = b \cdot h_b$

ABCD параллелограмм $\Leftrightarrow S_{AOB} = S_{DOC}$ ва $S_{BOC} = S_{AOD}$

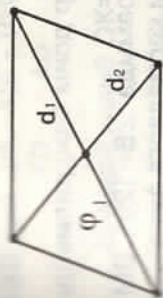
L, N, K, M - лар мос равишда DC, CB, AB, AD ларнинг ўртаси бўлсин.

ABCD-параллелограмм $\Leftrightarrow LK+MN = \frac{1}{2}(AB+BC+CD+AD)$



KMLN - параллелограмм.

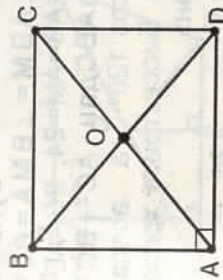
2). Тўртбурчак.



$$S = \frac{d_1 d_2}{2} \sin \varphi$$

$$\alpha + \beta + \varphi + \delta = 360^\circ$$

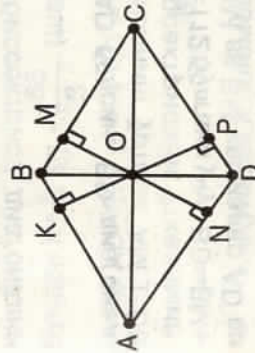
3) Тўғри тўртбурчак.



Томонлари $AB=CD$, $BC=AD$ бўлган ABCD тўғри тўртбурчак бўлсин. $BD=AC$ - диагонали; O - диагоналлари кесилиш нуктаси тўғри тўртбурчакнинг барча учларидан тенг узоқлашган нукта $OA=OB=OC=OD$, $AB=a$, $BC=b$, $AC=d$ деб белгиласак, $d^2=a^2+b^2$ ўринли.

ABCD га O марказли ички айлана чизиш имконияти хар доим бажарилмайди.

4) Ромб.



Томонлари $AB=BC=CD=AD$ бўлган ABCD ромб бўлсин. Ромбнинг диагоналлари AC ва BD бўлиб $AC \perp BD$. AC ва BD диагоналлари кесилиш нуктаси O десак, AB, BC, CD ва AD томонларга туширилган OK, OM, OP ва ON перпендикуляр учун $OK=OM=OP=ON$ тенглик ўринли.

O нукта ромбнинг томонларидан тенг узоқлашган нукта. $AB=a$, $AC=d_1$, $BD=d_2$ десак $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$ $KP=MN=h$ ромбнинг баландлиги учун $2ah=d_1 \cdot d_2$ тенглик ўринли

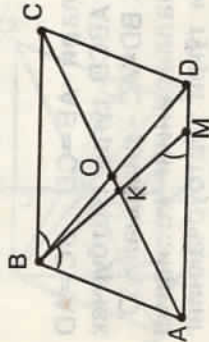
$$\begin{cases} d_1^2 + d_2^2 = 4a^2 \\ d_1 \cdot d_2 = 2ah \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = \sqrt{a(a+h)} + a(a-h) \\ d_2 = \sqrt{a(a+h)} - a(a-h) \end{cases}$$

О марказли ташқи айлана чизиш ҳар доим бажарилмайди.

1-масала. ABCD параллелограммда $\angle B = 120^\circ$, BM - биссектриса AD томонни 24 ва 16 см кесмаларга ажратади. Биссектриса AC диагонални қандай кесмаларга ажратади?

Ечиш. $\angle B = 120^\circ$ бўлганда. AC қатта диагональ бўлади.

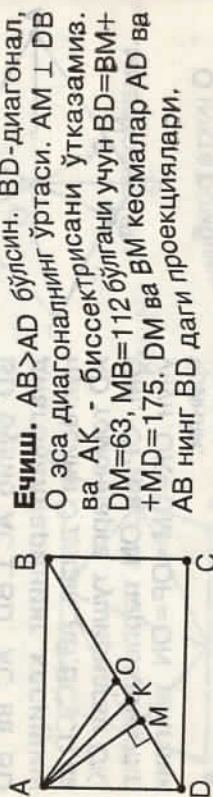
Биссектриса AD ни M нуктада кесиб ўтсин. Унда $AM = 24$ см, $MD = 16$ см, $\angle CBM = \angle ABM = \angle BMA = 60^\circ$, $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = AM = 24$, $BC = AD = 40$ см. $\triangle ABC$ дан $AC^2 + BC^2 = 2AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ$ га асосан $AC = 56$ см. Биссектриса хосса-сига асосан:



$$\frac{AB}{BC} = \frac{AK}{KC}, AK = x \text{ десак, } KC = 56 - x \text{ бўлади. Унда } \frac{24}{40} = \frac{x}{56 - x}$$

бўлиб, бундан $x = 21$ ни топамиз. Шундай қилиб, $AK = 21$ см, $KC = 56 - 21 = 35$ см. Жавоб: 21 см, 35 см.

2-масала. ABCD тўғри тўртбурчак берилган. A учидан диагоналга туширилган перпендикуляр уни 63 ва 112 см кесмаларга ажратса, шу бурчак биссектриса диагонални қандай кесмаларга ажратади?



Ечиш. $AB > AD$ бўлсин. BD-диагональ, O эса диагонални ўртаси. $AM \perp DB$ ва AK - биссектрисани ўтказамиз. $DM = 63$, $MB = 112$ бўлгани учун $BD = BM + MD = 175$. DM ва BM кесмалар AD ва AB нинг BD даги проекциялари.

$$AD^2 = BD \cdot DM; AD^2 = (5.7.3)^2; AD = 105 \text{ см. } AB^2 = BD \cdot BM;$$

$$AB^2 = (5.7.4)^2; AB = 140. DK = x \text{ десак } KB = 175 - x \text{ бўлади, } AK - A$$

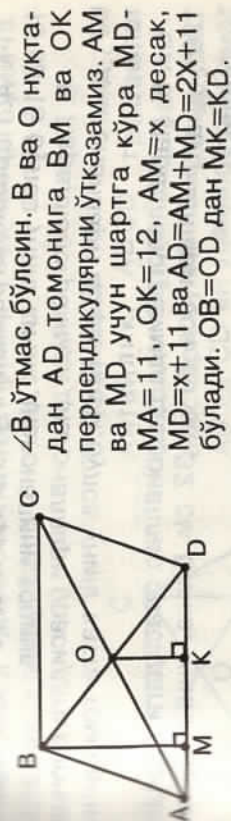
Бундан биссектрисаси бўлгани учун

$$\frac{BK}{KD} \text{ дан } \frac{AB}{AD} = \frac{175 - x}{x} \text{ Бундан } \frac{140}{x} = \frac{175 - x}{x} \quad x = 75.$$

Шундай қилиб $DK = 75$, $BK = 100$. Жавоб 75 см, 100 см.

3-масала. Ромбнинг ўтмас бурчаги учидан туширилган перпендикуляр томонини айирмаси 11 см га тенг кесмаларга ажратади. Диагоналлarning кесишиш нуктасидан томонигача бўлган масофа 12 см бўлса, ромбнинг периметрини топинг.

Ечиш. ABCD - ромб берилган бўлиб, O - диагоналлار кесишиш нуктаси бўлсин.



$$KD = \frac{1}{2} MD = \frac{1}{2}(x + 11); AK = AD - KD = (2x + 11) - \frac{1}{2}(x + 11) = \frac{1}{2}(3x + 11).$$

$$\angle AOD = 90^\circ \text{ эканлигидан } OK^2 = AK \cdot KD; 12^2 = \frac{1}{2}(3x + 11) \cdot \frac{1}{2}(x + 11).$$

Бундан $x = 7$; $x = -\frac{65}{3}$ (шартни қаноатлиирмайди). Шундай қилиб $AD = 25$, $p = 4 \cdot AD = 100$. Жавоб: 100 см.

Машқлар

1. Қуйидаги элементлар маълум бўлса, ромбнинг диагоналлари топинг:

а) диагоналлар кесишган нуктадан ўтказилган перпендикуляр томонини 16 ва 9 см кесмаларга ажратса;

- б) ўтмас бурчак учидан туширилган перпендикуляр томонини 7 ва 18 см кесмаларга ажратса;
 в) томони $12\sqrt{3}$, ўтмас бурчаги 120° бўлса;
 г) томони 25 см, баландлиги 24 см бўлса;
 д) диагоналар айирмаси 10 см, томони 25 см бўлса;
 е) диагоналар орасидаги бурчак биссектрисаси томонини 30 ва 40 см бўлган кесмаларга ажратса;
 ж) диагоналар орасидаги бурчак биссектрисаси томонини 3:4 нисбатда бўлинувчи кесмаларга ажратса ва баландлиги 16,8 см бўлса.
 2. Ромбнинг диагоналлари 30 ва 40 см. Унинг периметрини топинг.
 3. Агар ромбнинг диагоналлари йиғиндиси 70 см, томони 25 см бўлса, унинг баландлигини топинг.
 4. Параллелограммнинг ўткир бурчаги 60° , томонлари 10 ва 16 бўлса унинг кичик диагоналинини топинг.
 5. Параллелограммда диагоналлари орасидаги бурчак 60° , диагоналлари 20 ва 12 см бўлса унинг катта томонини топинг.
 6. Параллелограммда диагоналар орасидаги бурчак 120° , диагоналлари эса 60 ва 32 см бўлса, унинг кичик томонини топинг.
 7. Параллелограммнинг диагоналлари 7 ва 11 см, кичик томони эса 6 см бўлса, иккичи томонини топинг.
 8. Параллелограммнинг катта томонига туширилган баландлиги 24 см бўлиб, уни 7 ва 32 см бўлган кесмаларга ажратди. Параллелограммнинг кичик диагоналинини ва периметрини топинг.
 9. Иккита диагонали ва улар орасидаги бурчаги бўйича параллелограмм ясанг.
 10. Кичик диагонали ва иккита қўшни бурчаклари бўйича параллелограмм ясанг.

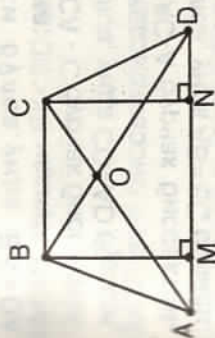
Уйга вазифалар

- Диагоналарининг айирмаси 10 ва томони 25 бўлган ромбнинг баландлигини топинг.
- Ромбнинг баландлиги ва томонининг айирмаси 1 см, диагоналлари 3:4 нисбатда бўлса, унинг периметрини топинг.

- Ромбнинг ўтмас бурчак учидан туширилган баландлиги томонини 7 ва 18 см бўлган кесмаларга ажратди. Ромбнинг диагоналинини топинг.
- Диагонали ва баландлиги бўйича ромб ясанг.
- Диагоналар йиғиндиси ва томони бўйича ромб ясанг.
- Қуйидагиларга кўра параллелограммнинг диагоналаринини топинг:
 - томонлари 7 ва 9 см, диагоналлари йиғиндиси 22 см бўлса;
 - томонлари 7 ва 9 см, диагоналлари 4:7 каби бўлса.
- Параллелограммнинг ўткир бурчаги учидан диагоналга ўтказилган перпендикуляр, уни 18 ва 6 см бўлган кесмаларга ажратди. Агар параллелограмм томонларининг йиғиндиси 48 см бўлса, унинг диагоналарини топинг.
- Икки диагонали ва ўткир бурчаги бўйича параллелограмм ясанг.

5. Трапеция

Айтайлик, ABCD трапеция бўлсин. Бунда BC ва AD-асослари бўлиб $AD > BC$ бўлсин. AB ва CD ён томонлари. AC ва BD диагоналлари, $BM = CN$ лар баландликлари. O-диагоналлари кесишган нуқта.



$$S_{ABCD} \text{ трапеция } \Leftrightarrow S_{AOB} = S_{DOC}$$

Кичик асосига ёпишган бурчак ўтмас, катта асосига ёпишган бурчак ўткир бўлади. Агар $S_{BOC} = a$, $S_{AOD} = b$, бўлса $S_{ABCD} = (b-a)^2$ бўлади.

1. Агар $AB = CD$ ва $\angle A = \angle D$ бўлса, ABCD га тенг ёнли трапеция дейилади. $AD = a$, $BC = b$, $CD = AB = c$, $CP = MN = h$ деб белгиласак,

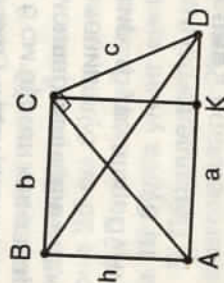
$$QP = \frac{(a+b)}{2}, LE = \frac{(a-b)}{2}$$

ни ёза оламиз, бу ерда QP ва LE лар трапециянинг ўрта чизиқлари.

- а) агар $AC \perp CD$ бўлса. $CK^2 = AK \cdot KD$. $h = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}$;
 б) агар $AC \perp CD$ бўлса, $h = \frac{(a+b)}{2}$;

в) агар AC A -бурчакни биссектрисаси бўлса, унда $AB = CD = BC$;
 г) агар CA C -бурчакни биссектрисаси бўлса, унда $CD = AB = AD$ бўлади.

2. Агар $\angle A = 90^\circ$ (ёки $AB \perp AD$) бўлса, $ABCD$ га тўғри бурчакли трапеция дейилади.



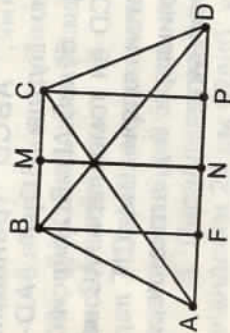
$AB \perp AD$ эканлигидан $AD > AC$ бўлади.

а) агар BD - CB бурчак биссектрисаси бўлса, унда $BC = CD$ бўлади, яъни $b = c$;

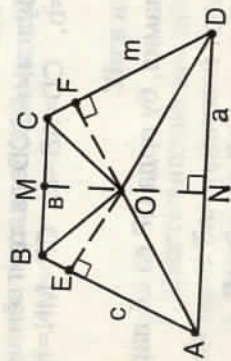
б) агар BD - B бурчак биссектрисаси бўлса, унда $BA = DA$ яъни $h = a$;

в) агар CA - C бурчак биссектрисаси бўлса, унда $CD = AD$ бўлади, яъни $a = c$;

г) агар AC - A бурчак биссектрисаси бўлса, унда $AB = BC$ бўлади, яъни $h = b$.



3. Айтайлик $ABCD$ трапецияда AD ва BC асослари бўлиб $AD > BC$ бўлсин. Агар трапеция томонларидан баробар узоқликда ётувчи O нукта мавжуд бўлса, $AB + CD = AD + BC$ тенглик ўринли бўлади.



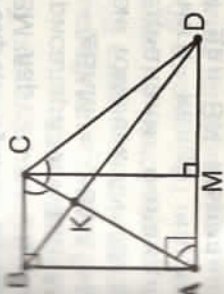
AO, BO, CO, DO лар A, B, C ва D бурчакларнинг биссектрисалари бўлганлиги учун

$$\angle ABO + \angle BAO = \frac{1}{2}(\angle B + \angle A) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ,$$

шунингдек, $\angle COD = 90^\circ$ бўлади. $OF^2 = CF \cdot FD$;
 $OD^2 = CD \cdot CF$; $OD^2 = CD \cdot DF$; $OC^2 + OD^2 = CD^2$

1-масала. Тўғри бурчакли трапециянинг диагоналлари ўтмас бурчакни тенг иккига ва иккинчи диагоналлини 2:5 нисбатда бўлади. Агар баландли 24 см бўлса, трапециянинг периметрини топинг.



Ечиш. Айтайлик $ABCD$ трапеция берилган, AD ва BC лар асослари бўлиб, $AD > BC$ бўлсин. $\angle A = \angle B = 90^\circ$, $\angle C > 90^\circ$, $\angle D < 90^\circ$. CA - диагональ C бурчакни тенг иккига бўлса.

$$\angle BCA = \angle DCA \text{ ва } \angle ACD = \angle CAD.$$

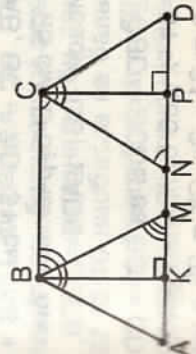
$\angle ACD = \angle CAD$ дан $CD = AD$ келиб чиқади. CA диагональ BD ни K нуктада кесиб ўтсин. $BA < CD$ ва $CD = AD$ эканлигидан

$$BA < AD, \text{ бундан } BK < BD \text{ ва } \frac{BK}{KD} = \frac{2}{5}. \quad BA = 24. \quad \triangle BCD \text{ да } CK -$$

$$ABCD \text{ нинг биссектрисаси бўлгани учун } \frac{BC}{CD} = \frac{BK}{KD} = \frac{2}{5}$$

$BC = 2x$, $CD = 5x$ деб белгилайлик. $CM \perp AD$ ни ўтказамиз. $CM = AB = 24$ см, $MD = 3x$, $\triangle CMD$ дан $CD^2 - DM^2 = CM^2$ ни тадбиқ қилиб $x = 6$ (см) ни топамиз. $p = 24 + 12 \cdot 6 = 96$ см. Жавоб 96 см.

2-масала. Тенг ёнли трапецияда ўтмас бурчак биссектрисалари катта асосини 3 та тенг қисмга ажратади. Агар трапециянинг баландлиги $5\sqrt{3}$ см, асосига ёпишган бурчаклари 120° бўлса, унинг периметрини топинг.

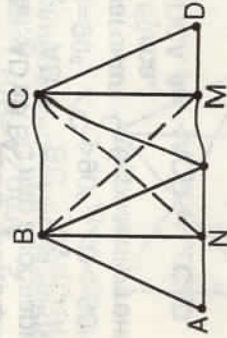


Ечиш. Айтайлик $ABCD$ трапецияда AD ва BC асослари бўлиб $AD > BC$ ва $AB = CD$ бўлсин. $BK = CP = h = 5\sqrt{3}$ см. $\angle B = \angle C = 120^\circ$ BM ва CN лар B ва C бурчакларнинг биссектрисалари бўлгани

учун $AM = MN = ND$, $\angle ABM = \angle MBC$; $\angle ABM = \angle CBM$. Бундан $\angle ABM = \angle AMB$ ва $AB = AM$.

$$\angle BAM = \angle ABM = \angle AMB = 60^\circ. AB = \frac{BK}{\sin 60^\circ} = 5\sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 10 \text{ см}$$

$AD = 3AM = 3 \cdot 10 = 30 \text{ (см)}$. $CN \parallel AB$; $BC = AN = 2AM = 2 \cdot 10 = 20 \text{ (см)}$
периметр $p = 70 \text{ см}$.

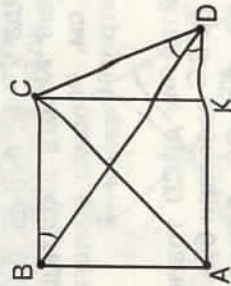


Иккинчи бир ҳол бўлиши мумкин.
 CN ва BM лар $\angle C$ ва $\angle B$ нинг биссектрисалари. $AN = NM = MD$
 $\angle ABM = \angle BAM = \angle BMA = 60^\circ$
 $\triangle ABM$ -тенг томонли. $AN = NM$ дан BN медианани баландлик бўлишлиги келиб чиқади.
 $BN = NM$ дан BN медианани баландлик бўлишлиги келиб чиқади.

$$BN = 5\sqrt{3} \text{ см}; AB = \frac{BN}{\sin 60^\circ} = \frac{5\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 10 \text{ см}. AB = AM = 10 \text{ см};$$

$AN = 5 \text{ см}; AD = 15 \text{ см}, CN \parallel AB$; $AN = BC = 5 \text{ см}$. Шундай қилиб $p = 40 \text{ см}$. Жавоб: 70 см ёки 40 см.

3-масала. Тўғри бурчакли трапециянинг катта диагона-ли ўткир бурчак биссектрисаси бўлади. Трапеция асослари-нинг йиғиндиси 31 см, ён томонлари йиғиндиси 25 см бўлса, унинг асосларини ва баланглигини топинг.



Ечиш. Айтайлик, $AB \perp CD$ нинг асослари BC ва AD учун $BC < AD$ бўлсин. $\angle A = \angle B = 90^\circ$, $\angle C > 90^\circ$, $\angle D < 90^\circ$, AB ва CD ён томонлари ва $CD > AB$, $BC + AD = 31 \text{ см}$, $AB + CD = 25 \text{ см}$, D бурчакнинг бис-сектрисаси $-DB$, $\angle ADB = \angle CDB$,

$\angle CBD = \angle BDA$ бўлгани учун $\angle CBD = \angle CDB$ ва $BC = CD$
 $DC = x$, $CB = x$, $AB = 25 - x$, $AD = 31 - x$ деб белгилаб олиб,
 $KD = AD - AK = AD - BC = 31 - x - x = 31 - 2x$, $CK \leq 25 - x$ ни

масала $ASKO$ дан $CD^2 = CK^2 + KD^2$ дан фойдаланиб $x = 13$ ни анжасаймиз. Шундай қилиб $AB = 12 \text{ см}$, $BC = 13 \text{ см}$, $AD = 18 \text{ см}$ ни толамиз. Жавоб: 13 см, 18 см ва 12 см.

Машқлар

1. Тенг ёнли трапеция учун қуйидагилар маълум бўлса, унинг бурчакларини топинг;

- ўтмас бурчак биссектрисаси ён томонларининг ўртасига параллел;
- диагонали баландлигидан 4 марта катта ва ўткир бурчакни тенг иккига бўлади;
- диагонал ён томонига перпендикуляр бўлиб ўткир бурчакни тенг иккига бўлади;
- диагонал ён томонига перпендикуляр бўлиб ўтмас бурчакдан туширилган баландлиги билан 60° ли бурчак ташкил этади.

2. Қуйидаги элементлар бўйича тенг ёнли трапеция томонини топинг:

- катта асоси ва ўтмас бурчак диагонали бўйича;
- кичик асоси ва ўткир бурчак диагоналига қўра.

3. Тенг ёнли трапециянинг асослари 25 ва 7 см, диагонали эса ён томонига перпендикуляр бўлса, унинг ён томонини топинг.

4. Қуйидаги элементлар берилган бўлса тенг ёнли трапециянинг асосларини топинг:

- ўрта чизиги 15 см ва асослари 3:2 каби;
- ён томони ва асослари 5:2:8 нисбатда ва баландлиги 16 см;

5. Тенг ёнли трапециянинг қуйидаги элементлари берилган бўлса, унинг периметрини топинг:

- диагонал, ён томони ва ўрта чизиги 20:13:16 нисбатда, баландлиги эса 24 см;
- диагонали, ён томони ва асосларининг айирмаси 20:13:10 нисбатда ва баландлиги 24 см;

6. Ўткир бурчак 60° , ўтмас бурчак биссектрисаси кичик асосини тенг иккига, 12 см ли қосмага ажратади;

г) ўтмас бурчаги 120° , ўткир бурчаги биссектрисаси кичик асосини тенг иккига, 12 см ли кесмага ажратади;
 д) диагоналлари ўткир бурчак биссектрисаси бўлиб кесишиш нуктасида 11:15 нисбатда бўлинади ва баландлиги 24 см.

6. Тенг ёнли трапециянинг баландлиги, ён томони ва диагонали мос равишда 12, 15 ва 26 см бўлса, унинг асосларини топинг.

7. Тўғри бурчакли трапециянинг ён томонлари ва диагонали мос равишда 12, 15 ва 20 бўлса, унинг асосларини топинг.

8. Асослари ва катта диагонали мос равишда 7, 16 ва 20 см бўлган тўғри бурчакли трапециянинг ён томонини топинг.

9. Қуйидаги элементларига кўра тўғри бурчакли трапециянинг периметрини топинг:

а) диагонали ўткир бурчагини тенг иккигага бўлади ва ўтмас бурчаги учидан туширилган баландлигини 9 ва 15 см ли кесмаларга ажратади;

б) кичик асоси 30 см ва диагонали ўткир бурчагини тенг иккига бўлади, ўтмас бурчак учидан туширилган баландлигини 5:3 нисбатда бўлади;

в) диагонали ўтмас бурчагини тенг иккигага бўлади ва асослари 6 ва 15 см;

г) диагонали ўткир бурчагини тенг иккига бўлиб, асослари 15 ва 24 см;

д) асосларининг айирмаси 9 см ва кичик диагонали $12\sqrt{2}$ см бўлиб тўғри бурчагини биссектрисаси бўлади.

10. Трапециянинг асослари 28 ва 11 см, ён томонлари 25 ва 26 см бўлса, унинг баландлигини топинг.

11. Трапециянинг асослари 6 ва 16 см. Ён томонларидан бири 10 см ва катта асоси билан 60° ли бурчак ташкил этади. Трапециянинг диагоналини топинг.

Уйга вазифалар

1. Тенг ёнли трапециянинг қуйидаги элементларига кўра унинг баландлигини топинг:

а) асослари 25 ва 39 см, диагонали ўткир бурчагини тенг иккига бўлса;

б) диагонал ўтмас бурчагини тенг иккига бўлади ва ён томонини 3 ва 13 см бўлган кесмаларга ажратса.

2. Тенг ёнли трапециянинг қуйидаги элементларига кўра унинг периметрини ҳисобланг:

а) баландлиги 60 см, диагоналлари ўткир бурчаларининг биссектрисалари бўлиб кесишиш нуктасида 3:8 нисбатда бўлинса;

б) баландлиги 48 см, диагоналлари ўтмас бурчак биссектрисалари бўлиб 3:13 нисбатда бўлинса;

в) диагонали ўткир бурчагини тенг иккига бўлиб ўтмас бурчак учидан туширилган баландлигини 75 ва 21 см ли кесмаларга ажратса.

3. Қуйидаги элементлари бўйича тенг ёнли трапециянинг периметрини топинг:

а) ўткир бурчаги ва ўтмас бурчак биссектрисаси бўлган диагонали бўйича;

б) ўтмас бурчаги ва ўткир бурчак биссектрисаси бўлган диагонали бўйича.

4. Қуйидаги элементлари бўйича тўғри бурчакли трапеция ясанг:

а) ўтмас бурчаги ва тўғри бурчак биссектрисаси бўлган кичик диагонали;

б) ўтмас бурчаги ва тўғри бурчак биссектрисаси бўлган катта диагонали.

5. Тўғри бурчакли трапециянинг кичик диагонали тўғри бурчак биссектрисаси, асосларининг айирмаси 30 см, ён томонларининг айирмаси 18 см бўлса унинг периметрини топинг.

6. Тўғри бурчакли трапециянинг кичик диагонали ўтмас бурчак биссектрисаси, асослари йиғиндиси 21 см, ён томонлари йиғиндиси 25 см бўлса, унинг баландлиги ва асосларини топинг.

7. Катта диагонали тўғри бурчакли трапециянинг ўткир бурчагини тенг иккига бўлиб, иккинчи диагоналини 13:18 каби кесмаларга ажратади. Агар баландлиги 36 см бўлса, унинг асосларини топинг.

8. Тўғри бурчакли трапециянинг асослари 25 ва 32 см, катта диагонали ўткир бурчагини тенг иккига бўлса, унинг периметрини топинг.

9. Тўғри бурчакли трапециянинг ўтмас бурч биссектрисаси катта асосини 5 ва 15 см ли кесмаларга ажратади. Агар кичик асоси 11 см бўлса, унинг периметрини топинг.

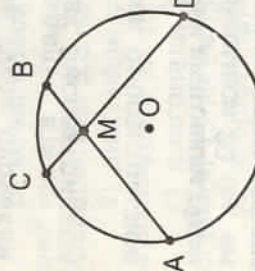
10. Трапециянинг асослари 20 ва 60 см, ён томонлари 13 ва 37 см бўлса, унинг баландлигини топинг.

11. Асослари 3 ва 14 см, диагоналлари 25 ва 26 см бўлган трапециянинг баландлигини топинг.

12. Трапециянинг ён томони 10 см ва узунлиги 22 см бўлган катта асоси билан 60° ли бурчак ташкил этади. Агар асослари йигиндиси 28 см бўлса, унинг иккинчи томонини топинг.

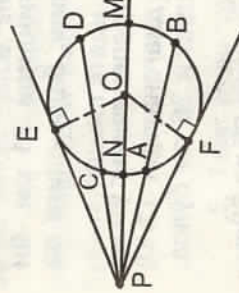
13. Кичик асоси ва ён томони 120° ли бурчак ҳосил қилади ва мос равишда 15 ва 10 см. Агар трапециянинг асослари йигиндиси 46 см бўлса, унинг иккинчи ён томонини топинг.

6. Айлана ва унинг элементлари

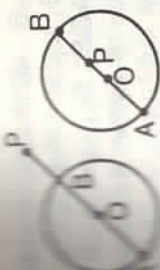


1) О марказли айлана берилган бўлиб, АВ ва CD ватарларининг кесишиш нуктасини М билан белгиласак. $AM \cdot MB = CM \cdot MD$ га эга бўламиз. Агар ватарлар кесишса, кесишиш нуктасидан қатъий назар ватар кесмаларининг кўпайтмаси ўзгармас сон бўлади.

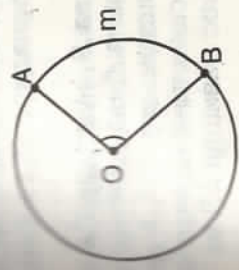
2) Айтайлик О- айлана маркази, Р эса ундан ташқаридаги нукта бўлсин. РМ, РВ, РD - кесувчи, РF ва РЕ уринмалари ўтказамиз. ОF ва ОЕ айлана радиуси, $EP = FP$, $BP \cdot AP = MP \cdot NP = DP \cdot CP$, FP ва AP , BP кесмалар учун $FP^2 = BP \cdot AP$ тенглик ўзгармас сон бўлади, яъни уринманинг квадрати кесувчининг ташқи кесмага кўпайтмасига тенг бўлади.



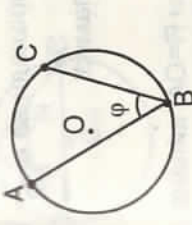
3) Айтайлик, О - айлана маркази, АВ - диаметр бўлсин. Агар Р нукта айлана ташқарисиди бўлса $AP > AB$, агар Р нукта айлана ичиди бўлса $AP < AB$ бўлади.



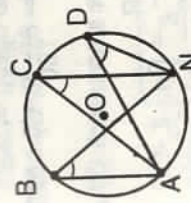
4) О - айлана марказида, А ва В лар айланада ётсин. Унда $\angle AOB$ -марказий бурчак, АВ ёй $\cup AmB$. $\angle AOB = \cup AB$, марказий бурчак ўзи тиралган ёй билан ўлчанади.



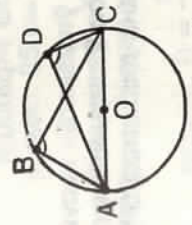
5) а) О - айлана маркази. А, В ва С нукталар айланага тегишли бўлсин. Унда $\angle ABC$ - ички чизилган бурчак



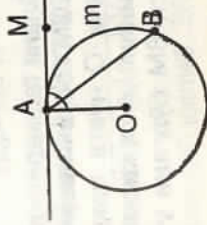
б) айтайлик, А, В, С ва D айланага тегишли бўлсин. Унда $\angle ABN = \angle ACN = \angle ADN$, яъни битта ёйга тиралган барча бурчаклар тенг бўлади

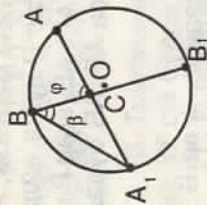


в) айтайлик, А, В, С ва D, О марказли айланада ётсин, АС-диаметрга тиралган ҳар қандай бурчак тўғри бурчак бўлади;

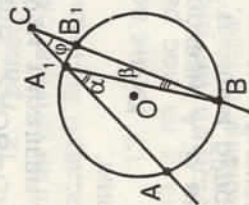


г) айтайлик, А, В нукталар О марказли айланага тегишли ва АМ уринма бўлсин. Унда $\angle MAB = \frac{1}{2} \cdot \cup AmB$;

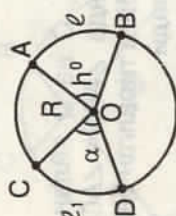




д) агар A, B, A_1, B_1 айланага тегишли бўлиб AA_1 ва BB_1 ватарлар C нуктада кесилса $\varphi = \angle ACB$ бурчак $\triangle CBA_1$ учбурчакнинг ташқи бурчаги бўлади. Унда $\varphi = \alpha + \beta$ бу ерда $\alpha = \angle AA_1B$ $\beta = \angle A_1BB_1$ бўлиб мос равишда AB ва A_1B_1 ёйларга тиралади;

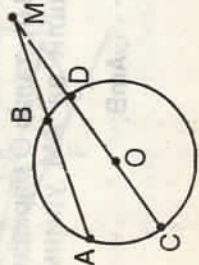


е) айтийлик A_1 ва B_1 нукталар CA ва CB ларнинг айлана билан кесилган нукталари бўлсин. $\alpha = \angle BA_1A$ ва $\beta = \angle A_1BC$ деб олсак $\alpha = \varphi + \beta$ ни ҳисобга олиб α ва β ни мос равишда AB ва A_1B_1 ёйларига тиралади ва $\varphi = \frac{1}{2} (\widehat{AB} - \widehat{A_1B_1})$ деб ёза оламиз;



ж) айлана радиуси $R=OA$, айлана узун-
 $C=2\pi R$. $\ell = \frac{2\pi R}{360} \cdot n^\circ = \frac{\pi R n}{180}$, бу ерда $\ell = AB$
 ёй узунлиги n° ли марказий бурчакка тиралади. $\ell_1 = \frac{2\pi R}{2\pi\alpha} = R\alpha$, $\ell_1 = CD$ ёй узунлиги, α радианли марказий бурчакка тиралади.

1-масала. Айлана ташқарисидан ўтказилган кесувчининг ички ва ташқи кесмалари айирмаси 2 см, айланагача бўлган масофа 4 см га тенг. Агар айлана диаметри 32 см бўлса кесувчини узунлигини топинг.

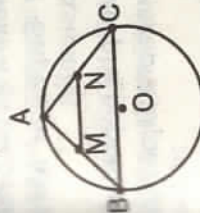


Ечиш. Айтийлик айлана ташқарисидagi M нуктадан AM ва CM кесувчини ўтказайлик. CM кесувчи O нукта орқали ўтади. AM кесувчининг ички кесмаси AB , ташқи кесмаси BM бўлгани учун

$BM=2$ см, CD - диаметр, DM эса - M нуктадан айланага бўлган масофа.

$CD=32$ см, $DM=4$ см, $CM=36$ см. $BM=x$ десак $AB=x+2$, $AM=2x+2$ ($x>0$) бўлади. Кесувчининг хоссасига асосан $AM \cdot BM = CM \cdot DM$, яъни $(2x+2) \cdot x = 36 \cdot 4$; $x_1 = 8$; $x_2 = -9$ бу масала шартини қаноатлантирмайди. Шундай қилиб $AM=2 \cdot 8 + 2 = 18$ см. Жавоб: 18 см.

2-масала. Айланага тегишли нуктадан 36 ва 40 см ли ватар ўтказилган. Агар ватарларни тенг иккига бўлувчи нукталар орасидаги масофа 34 см бўлса айлананинг диаметрини топинг.



Ечиш. Айтийлик O марказли айлананинг A нуктасидан $AB=36$ см ва $AC=40$ см ватар ўтказилган бўлсин. M ва N лар мос равишда ватарларнинг ўртаси бўлсин. Шартга кўра $MN=34$ см; MN - ABC учбурчакнинг ўрта чизиги бўлгани учун $BC=2MN=2 \cdot 34=68$.

$\angle BAC = \alpha$ деб белгилайлик. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \alpha$
 $68^2 = 36^2 + 40^2 - 2 \cdot 36 \cdot 40 \cdot \cos \alpha$

Бундан $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$. $\frac{BC}{\sin \alpha} = 2R$, $2R = \frac{68}{0,8} = 85$ см.

Жавоб: 85 см.

3-масала. Худди шу масалани $AB=52$, $BC=60$ см, $MN=8$ см бўлган ҳол учун ечайлик.

$BC=16$. $R = \frac{abc}{4S}$ дан фойдаланамиз, бу ерда R -ташқи

чизилган айлана радиуси; a, b, c - учбурчак томонлари,

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$, $p = 64$, $S = 8 \cdot 12 \cdot 4$.

Шундай қилиб, $2R=65$. Жавоб: 65 см.

Машклар

1. Айланага тегишли нуктадан иккита ватар ўтказилган. Улардан бири 100° ли, иккинчиси 80° ли ёйга тиралади. Шу ватарлар орасидаги бурчакни топинг.
2. Ватар 80° ли ёйга тиралади. Шу ватар билан ватар учи орқали ўтувчи уринма орасидаги ўткир бурчакни топинг.
3. Ватар учларидан ўтказилган радиуслар орасидаги бурчак 40° га тенг. Шу ватар билан ватар учидан ўтказилган уринма орасидаги бурчакни топинг.
4. Иккинчи ватарни кесувчи ватар узунлиги 24 см бўлиб уни 10 ва 8 см кесмаларга ажратади. Биринчи ватар кесмаларини узунликларини топинг.
5. Узунлиги 30 см бўлган ватар диаметрга перпендикуляр бўлиб уни айирмаси 40 см бўлган кесмаларга ажратади. Айлана радиусини топинг.
6. Айлана нуктасидан диаметрга перпендикуляр ўтказилган бўлиб уни 16 ва 9 см ли кесмаларга ажратса, перпендикуляр узунлигини топинг.
7. Айлана нуктасидан диаметрга перпендикуляр ўтказилган бўлиб уни $4:9$ нисбатда бўлади. Агар перпендикулярнинг узунлиги 12 см бўлса, айлана радиусини ҳисобланг.
8. Агар куйидагилар маълум бўлса, айлана радиусини ҳисобланг:
 - а) айлана нуктасидан диаметр учларигача бўлган масофа 16 ва 12 см бўлса;
 - б) айлана нуктасидан диаметр учларигача бўлган масофалар нисбати $0,75$ га, шу нуктадан диаметргача бўлган масофа 12 см бўлса;
 - в) марказдан бир томонда иккита 48 ва 30 см ли ватарлар ўтказилган ва улар орасидаги масофа 13 см бўлса;
 - г) айлана ташқарисидаги нуктадан кесувчи ўтказилган бўлиб ички ва ташқи кесмалар 8 ва 15 см. Шу нуктадан айлана марказигача бўлган масофа 13 см бўлса;

- д) айлана ташқарисидаги нуктадан 32 см ли уринма ўтказилган ва шу нуктадан айланагача бўлган масофа 24 см бўлса;
- е) айлана нуктасидан узунлиги 12,2 бўлган иккита ватар ўтказилган. Ватарнинг бири 90° ли ёйга тиралган бўлса.

9. Айланада ётган нуктадан диаметр учларигача бўлган масофалар айирмаси 10 см, айлана радиуси 25 см бўлса, шу нуктадан диаметргача бўлган масофани топинг.

10. Айланада ётган нуктадан узунлиги 16 ва 12 см бўлган перпендикуляр ватарлар ўтказилган. Ватарларнинг учлари орасидаги масофани топинг.

11. Айланадан ташқарида олинган нуктадан узунлиги 12 см бўлган уринма ўтказилган. Агар айлана радиуси 5 см бўлса, олинган нуктадан айланагача бўлган масофани топинг.

12. Ватар иккинчи ватарни кесиб, уни узунлиги 6 ва 16 см бўлган кесмаларга ажратади ва ўзи $3:2$ нисбатда бўлинади. Биринчи ватарни узунлигини топинг.

13. Айланадан ташқарида олинган нуктадан уринма ва кесувчи чизик ўтказилган. Кесувчи кесмалар 18 ва 50 см. Уринмани узунлигини топинг.

14. Айлана ташқарисидан олинган нуктадан ўтказилган кесувчининг ташқи қисми 8 см, ички қисми 4 см га тенг. Айлана диаметрини топинг.

15. Айланада ётган нуктадан ватарлар учларигача масофалар 15 ва 20 см, улар орасидаги бурчак эса 90° га тенг. Шу нуктадан ватаргача бўлган масофани топинг.

Ўйга вазифалар

1. Айлананинг нукталари уни $3:4:5:6$ нисбатдаги қисмларга ажратади. Учлари шу нукталарда бўлган қавариқ тўртбурчакнинг бурчакларини топинг.

2. Айланада ётган нуктадан узунлиги 5 ва 8 см бўлган ватарлар ўтказилган. Бу ватарлар учлари орасидаги кесма 120° ли ёйга тиралади. Агар кесма ва нукта айлана марказининг турли томонида ётса шу кесманинг узунлигини топинг.

3. Айлана ватари 60° ёйга тиралади. Агар айлана диаметри 24 см бўлса, ватарни топинг.

4. Айлана ётган нуктадан узунлиги 10 ва $5\sqrt{3}$ см бўлган ватарлар ўтказилган. Ватарлар учларини бирлаштурувчи кесма, 60° ли ёйга тиралади. Агар кесма ва нукта айлана марказидан бир томонда ётса, айлана диаметрини ҳисобланг.

5. Узунлиги 24 см бўлган ватар диаметрга перпендикуляр ва уни айирмаси 7 см га тенг бўлган кесмаларга ажратади. Айлана радиусини ҳисобланг.

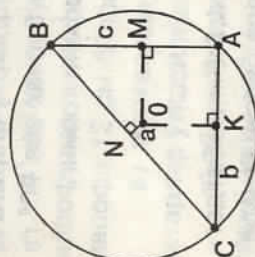
6. Айланада ётган нуктадан диаметрига ўтказилган перпендикуляр уни 9:16 нисбатли кесмаларга ажратади. Айлана диаметри 50 см. Перпендикулярларнинг узунлигини ҳисобланг.

7. Айланада ётган нуктадан айирмаси 8 см бўлган иккита перпендикуляр ватарлар ўтказилган. Агар айлана радиуси 20 см бўлса, шу ватарларни топинг.

8. Айланадан ташқаридаги нуктадан ички ва ташқи қисмлари 3:2 каби нисбатда бўлган кесувчи ўтказилган. Агар шу нуктадан айланагача бўлган масофа 10 см, айлана радиуси 7 см бўлса, шу кесувчининг узунлигини ҳисобланг.

7. Айлана ва кўпбурчаклар

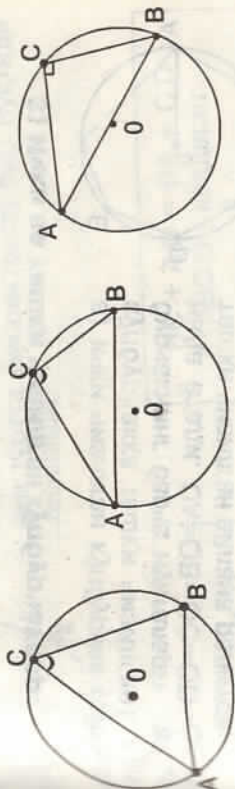
1) **Учбурчакка ташқи чизилган айлана, ABC** - учбурчак; а, в, с - унинг томонлари узунликлари; АВ, АС, ВС томонларига ўтказилган ОМ, ОН, ОК медианалари кесишган нуктаси (ўрта перпендикулярлар) ёки ташқи чизилган айлана маркази.



$$OA=OB=OC=R \text{ - айлана радиуси. } R = \frac{a}{2 \sin A}, R = \frac{abc}{4S},$$

бу ерда S-ABC учбурчакнинг юзи.

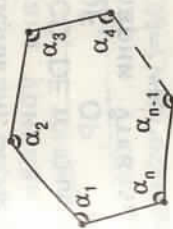
а) ўқир бурчакли учбурчак б) ўтмас бурчакли учбурчак в) тўғри бурчакли учбурчак



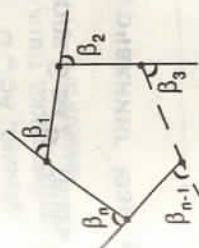
$$\angle C < 90^\circ$$

$$\angle C > 90^\circ$$

$$\angle C = 90^\circ$$



n - бурчак ички бурчакларининг йиғиндиси $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 180^\circ (n-2)$ га тенг

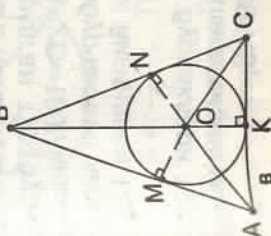


n - бурчак ташқи бурчакларининг йиғиндиси $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = 360^\circ$ га тенг



n - бурчак диагоналарининг сони

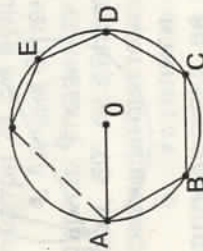
$$N = \frac{n(n-3)}{2} \text{ га тенг}$$



2) **Учбурчакка ички чизилган айлана.** О-А, В ва С бурчакларнинг АО, ВО ва СD биссектрисаларини кесишган нуктаси. АВ, ВС ва АС томонларига ОМ, ОН ва ОК перпендикулярларни ўтказамиз. ОМ=ОН=ОК=r

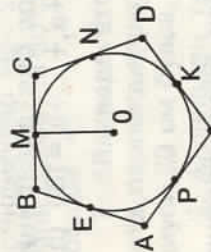
ички чизилган айлана радиуси $r = \frac{2S}{a+b+c}$, S -ABC учбурчакнинг юзи.

3) Ички ва ташқи чизилган кўпбурчаклар.



а) ички чизилган кўпбурчак (айлана, кўпбурчакка ташқи чизилган). Кўпбурчакнинг барча нүкталари айланада ётади. $OA=OB=OC=OD=OE=R$ ташқи чизилган айлана радиуси;

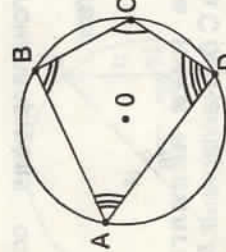
б) ташқи чизилган кўпбурчак (айлана, кўпбурчакка ички чизилган). Барча томонлари айланага уринади. О нуктадан АВ, ВС, CD, DE томонларга ON, ОК, OF, ОР, OM перпендикулярларни ўтказамиз $ON=OK=OF=OP=OM=r$ ички чизилган радиуси,



$$r = \frac{2S}{P}, \text{ бу ерда } S \text{ ва } P \text{ ташқи}$$

чизилган кўпбурчакнинг юзи ва периметри.

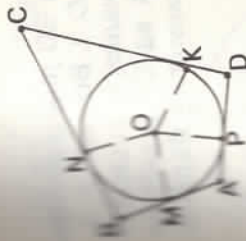
4) Ички ва ташқи чизилган тўртбурчаклар.



а) **тўртбурчакка ташқи чизилган айлана** (тўртбурчак айланага ички чизилган) A, B, C ва D айланада ётсин. ABCD - ички чизилган тўртбурчак. $\angle A + \angle C = 180^\circ$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$. Айланага ички чизилган кўпбурчакнинг қарама-қарши бурчаклари йиғиндиси 180° га тенг.

Агар тўртбурчакда қарама-қарши бурчаклари 180° га тенг бўлса, унда тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкин ёки $AO \cdot OC = BO \cdot OD$, $DC \cdot AB + AD \cdot BC = DB \cdot AC$;

б) **тўртбурчакка ички чизилган айлана**. Айланага ташқи чизилган кўпбурчакнинг қарама-қарши томонлари йиғиндиси тенг унда тўртбурчакка ички айлана чизиш мумкин ёки тўртта биссектриса бир нуктада кесишади?



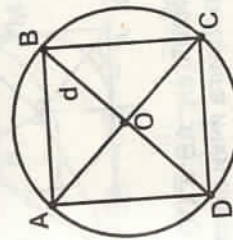
Айлана, ABCD тўртбурчакка ички чизилган

$BC + AD = BA + CD$
ABCD - квадрат
тўртта биссектриса битта нуктада кесишади.

Айлана, ABCD тўртбурчакка ташқи чизилган

$\angle BAD + \angle BCD = \angle CBA + \angle CDA$
 $AM \cdot MC = BM \cdot MD$,
M - диагоналар кесишган нукта

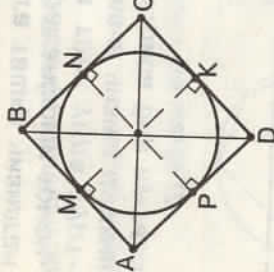
в) **тўғри тўртбурчак ва айлана**. ABCD тўғри тўртбурчак, $AC=BD=d$ унинг диагонали. О-ташқи чизилган айлана маркази. О-AC ва BD диагоналарининг ўртаси $AO=OC=OB=OD=R$ ташқи чизилган айлана маркази.



$$R = \frac{d}{2}. \text{ Тўғри тўртбурчакка ҳар доим ташқи айлана}$$

чизиш мумкин. Тўғри тўртбурчакка ҳар доим ички айлана чизиш мумкин эмас.

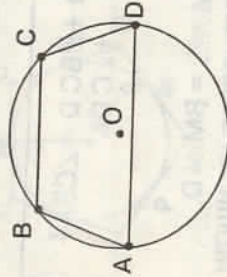
г) ромб ва айлана



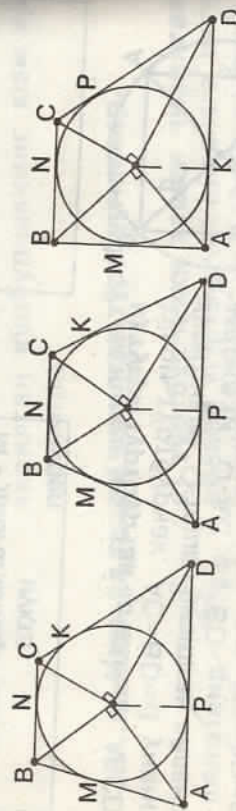
ABCD ромб, AC ва BD диагоналлари перпендикуляр. $AC \perp BD$, $AC = d_1$, $BD = d_2$. O диагоналлари кесишган нукта. OM, ON, OK ва OP ромбнинг томонларига туширилган баландликлар.

$MK = PN = h$ ромбнинг баландлиги. $OM = ON = OP = OK = r$ - ички чизилган айлана радиуси. $r = \frac{h}{2}$. $\triangle AOD$ дан

$OP^2 = AP \cdot PD$. Ромбда ҳар доим ички айлана чизиш мумкин. Ромбга ҳар доим ташқи айлана чизиш мумкин эмас;



д) трапеция ва айлана. ABCD - ички чизилган трапеция. BC ва AD - унинг асослари. O ташқи чизилган айлана маркази. Агар $AB=BC$ бўлса трапецияга ташқи айлана чизиш мумкин.



ABCD трапеция айланага ташқи чизилган. $AB \neq CD$. Агар $AD + BC = AB + CD$ бўлса трапецияга ички айлана чизиш мумкин. O - ички чизилган айлана маркази. A, B, C ва D бурчакларнинг биссектрисалари AO, BO, CO ва DO, OM, ON, OK, OP - трапеция томонларига, перпендикулярлар. $OM = ON = OK = OP = r$ - ички чизилган айлана радиуси. $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$. $NP = h$ - трапециянинг баландлиги.

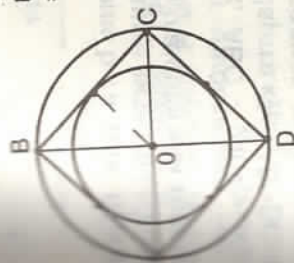
$$r = \frac{h}{2}; \quad OM = \frac{AO \cdot OB}{AB}; \quad OK = \frac{CO \cdot DO}{CD};$$

е) квадрат ва айлана. ABCD-квадрат, $AB=a$, O-квадратнинг диагоналлари кесишиш нуктаси; $AO = OB = OC = OD = R$ - ташқи чизилган айлана радиуси:

$$R = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad OM, ON, OP \text{ ва } OK - \text{квадрат-}$$

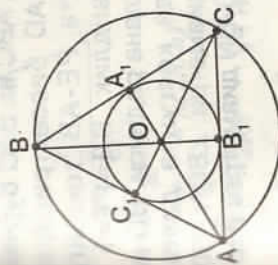
нинг томонларига ўтказилган перпендикулярлар. $OM=ON=OP=OK=r$ - ички чизилган айлана радиуси:

$$r = \frac{a}{2}$$



ABCD квадратга ҳар доим умумий марказли ички ва ташқи айланалар чизиш мумкин.

ж) тенг томонли учбурчак ва айлана. ABC-тенг томонли учбурчак. $AB = BC = AC = a$. O-AA₁, BB₁, CC₁ биссектрисалар ёки медианалар ёки баландликлар кесишган нукта. $OA=OB=OC=R$ - ташқи чизилган айлана радиуси: $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

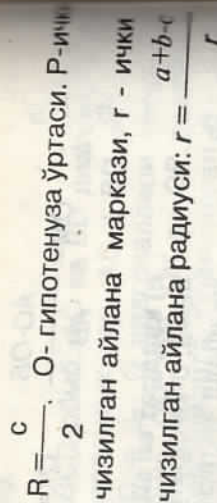


$OA_1=OB_1=OC_1=r$ ички чизилган айлана радиуси:

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}; \quad R=2r.$$

з) тўғри бурчакли учбурчак ва айлана.

ABC-тўғри бурчакли учбурчак. $AB=c$ - гипотенуза, $AC=b$, $BC=a$ - катетлари. O-ташқи чизилган айлана маркази,

пендикуляр. $BD=h$. $DC=\frac{a}{2}$;

$$AN = 2R - h; BP = h - r. \Delta ABD \text{ дан } h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2. \Delta BCN$$

дан $BC^2 = BD \cdot DN$, $BC^2 = BN \cdot BD$ ёки $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = h(2R-h)$ ва

$b^2 = 2Rh$. AP - ABD учбурчакда A бурчак биссектрисаси

бўлгани учун $\frac{AB}{AD} = \frac{BP}{PD}$ ёки

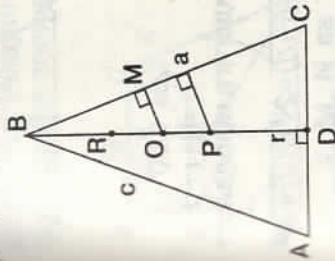
$$\frac{AB}{AD} = \frac{BP}{PD}$$

$$h; \frac{a}{2} = \frac{h-r}{r}; \quad \frac{2b}{a} = \frac{h}{r} - 1; \quad r = \frac{a}{2b+a} h$$

$$h = \frac{1}{2} \sqrt{4b^2 - a^2}; \quad R = \frac{b^2}{2h} = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}};$$

$$r = \frac{a}{2b+a} \cdot \frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}};$$

2-масала. Тенг ёнли учбурчакка ташқи чизилган айлана радиуси R ички чизилган айлана радиуси r бўлса, R нинг томонларини топинг.



Ечиш. Айтайлик, ABC учбурчакда $AB=BC$, AC - асоси бўлсин. $AV=a$, $AC=b$, BD - асосига туширилган баландлик, $BD=h$ ташқи чизилган айлана маркази O , ички чизилган айлана марказини P - билан белгилайлик. $OA=OB=OC=R$, $PD=PK=r$

$$\frac{a^2}{-} = h(2R-h)$$

$$b^2 = 2Rh$$

$$\frac{h-r}{r} = \frac{b}{a}$$

2
тенглама системасини тузамиз.

$$\left[\frac{h-r}{r} \right]^2 = \left[\frac{a}{\frac{b}{2}} \right]^2 \Leftrightarrow$$

$$= \frac{(h-r)^2}{r^2} = \frac{2R}{2R-h}; \text{ тогда}$$

алмаштиришларни бажариб $h^2-2(R+r)h + r^2+4Rr = 0$ ни
 ҳосил қиламиз.

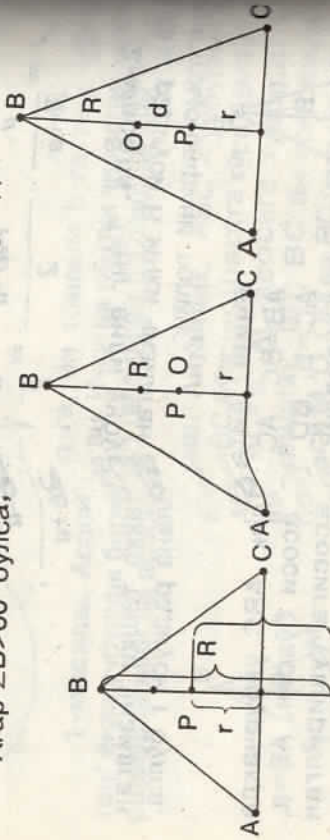
$h = R + r \pm \sqrt{(R+r)^2 - r^2} = R + r \pm \sqrt{R(R-2r)}$ $\sqrt{R(R-2r)} = d$ деген белгиласак $h = R + r \pm d$ бу ерда $d = O$ ва P марказлар орасидан масофа, яъни $OP = d$.

унда $h = R + r + d$.

Агар $\angle B < 60^\circ$ бўлса, унда $h = R + r$ ($d = 0$ ёки $R = 2r$).

Агар $\angle B = 60^\circ$ бўлса, унда $h = R + r - d$ бўлади.

Агар $\angle B > 60^\circ$ бўлса,



$\angle B > 60^\circ$
 $h = R + r - d$

$\angle B = 60^\circ$
 $h = R + r$

$\angle B < 60^\circ$
 $h = R + r + d$

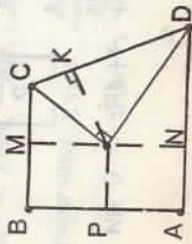
а ва b томонларни R ва r орқали қуйидагига ифодалаш

мумкин:
1) $\frac{a}{2} = \sqrt{(h+2R-h)(R-(r+d))} = 2\sqrt{R^2-(r+d)^2}$

2) $b = \sqrt{2Rh} = \sqrt{2R(R+r+d)}$ бу ерда $d = \sqrt{R(R-2r)}$.

3-масала. Тўғри бурчакли трапецияга ички чизилган айлана марказидан катта ён томони учларигача бўлган масофалар 15 ва 20 см бўлса, трапециянинг периметрини топинг.

Ечиш. Айтайлик ABCD трапецияда AD ва BC асослари бўлиб $AD > BC$ бўлсин. $\angle A = \angle B = 90^\circ$; ён томонлари CD ва AB, $CD > AB$. Трапецияга O марказли айлана ички чизилган ва $OC = 15$ см, $OD = 20$ см, CO ва DOлар ўз навбатида C ва D бурчакларнинг биссектрисалари.



$\angle C + \angle D = 180^\circ$ $\angle OCD + \angle CDO = 90^\circ$;

$\angle COD = 90^\circ$ COD учбурчак тўғри бурчакли AD, BC, CD ва AB томонларига мос равишда ON, OM, OK ва OP перпендикулярларни ўтказамиз.

Ички чизилган айлананинг трапецияга уриниш нукталари M, N, K ва P, $ON = OM = OK = OP$ эса унинг радиуси. $\triangle OCD$ да $CD^2 = OD^2 + OC^2$.

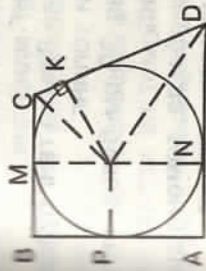
$$CD = \sqrt{(15^2 + 20^2)^{1/2}} = 25 \text{ см. } OK = \frac{OC \cdot OD}{CD} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12.$$

$$MN = 2OM = 24 \text{ см.}$$

$$AB = MN = 24 \text{ см. } AB + CD = AD + BC. \text{ Бундан } p = 2(AB + CD) = 2 \cdot 49 = 98 \text{ см.}$$

4-масала. Тўғри бурчакли трапецияга ички чизилган айлананинг уриниш нуктаси катта ён томонини 9 ва 16 см бўлган кесмаларга ажратади. Айлана марказидан шу кесмалар учларигача бўлган масофани ва трапециянинг асосларини топинг.

Ечиш. Айтайлик, ABCD трапецияда BC ва AD асослари бўлиб $AD > BC$ бўлсин. $\angle A = \angle B = 90^\circ$; AB ва CD ён томонлари ва $CD > AB$. Трапецияга O марказли айлана ички чизилган. CD, BC AD ва AB томонларига мос OK, OM, ON ва OP перпендикулярларни ўтказамиз.



K, M, N ва P айланани шу томонлар билан уриниш нукталари. $CK = 9$ см. $DK = 16$ см, $OK = OM = ON = OP$ айлана радиуси C ва D бурчакларнинг биссектрисалари CO ва DO. $\angle C + \angle D = 180^\circ$ $\angle DCO + \angle CDO = 90^\circ$, $\angle COD = 90^\circ$, $\triangle COD$ - тўғри бурчакли учбурчак.

$CD = CK + KD = 25$ см. $\triangle COD$ дан $OC^2 = CD \cdot CK$; $OC = 15$ см. $OD^2 = CD \cdot KD$; $OD = 20$ см; $OK^2 = CK \cdot KD$; $OK = 12$ см, $CK = MC = 9$ см. $ND = KD = 16$ см, $BM = AN = OP = ON = OM = OK = 12$ см. $BC = BM + MC = 21$ см. $AD = AN + ND = 28$ см. Жавоб: 28 см, 21 см, 12 см

Машқлар

1. Тенг томонли учбурчакка ташқи чизилган айлана радиуси $6\sqrt{3}$ см бўлса, унинг периметрини топинг.
2. Периметри $24\sqrt{3}$ см бўлган тенг томонли учбурчакка ички чизилган айлана радиусини топинг.

3. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томони 40 см, асоси эса 48 см, шу учбурчакка ташқи чизилган айлана радиусини топинг.

4. Тенг ёнли учбурчакнинг асосига туширилган баландлиги 16 см, шу учбурчакка ички чизилган айлана радиуси 6 см бўлса, унинг периметрини юпинг.

5. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари 3:4 нисбатда, периметри эса 72 см бўлса, унга ташқи чизилган айлана радиусини топинг.

6. Тўғри бурчакли учбурчакнинг периметри 48 см, гипотенузаси эса 20 смга тенг бўлса, унга чизилган ички айлана радиусини топинг.

7. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетларидан бири 12 см, унга ички чизилган айлана радиуси 4 см га тенг бўлса, ташқи чизилган айлана радиусини топинг.

8. Учбурчакнинг томонлари 15, 26 ва 37 см бўлса, унга ички чизилган айлана радиусини топинг.

9. Учбурчакнинг томонлари 30, 26 ва 8 см га тенг бўлса, унга ташқи чизилган айлана радиусини топинг.

10. Ромбнинг диагоналлари 40 ва 30 см бўлса, унга ички чизилган айлана радиусини топинг.

11. Ромбнинг диагоналлари 3:4 нисбатда, томони эса 25 см бўлса, ички чизилган айлана радиусини топинг.

12. Тўғри тўртбурчакка ташқи чизилган айлана радиуси 10 см бўлиб, периметри 56 см бўлса, унинг томонларини топинг.

13. Тенг ёнли трапециянинг баландлиги ва диагонали мос равишда 24 ва 40 см. Агар диагонали ён томонига перпендикуляр бўлса трапецияга ташқи чизилган айлана радиусини топинг.

14. Тенг ёнли трапецияга ички чизилган айлана радиуси 12 см, ён томони эса 25 см бўлса, унинг асосларини топинг.

15. Тўғри бурчакли трапецияга ички чизилган айлана радиуси 12 см, асослари айирмаси эса 7 см га тенг бўлса, унинг асосларини топинг.

Уйга вазифалар

1. Тенг томонли учбурчакнинг баландлиги 12 см бўлса, унга ташқи ва ички чизилган айлана радиусларини топинг.

2. Тенг ёнли учбурчакка ички чизилган айлананинг уриниш нуқтаси ён томонини асосининг учидан ҳисоблаганда 24 ва 16 см ли кесмаларга ажратса шу айлана радиусини топинг.

3. Тўғри бурчакли учбурчакка ички чизилган айлананинг уриниш нуқтаси гипотенузани 12 ва 8 см бўлган кесмаларга ажратса шу айлананинг диаметрини ҳисобланг.

4. Учбурчакнинг ён томонлари 78 ва 120 см, асосига утказилган баландлиги эса 72 см бўлса, унга ташқи чизилган айлана радиусини ҳисобланг.

5. Ромбга ички чизилган айлананинг уриниш нуқтаси унинг томонини 16 ва 9 см бўлган кесмаларга ажратса шу айлананинг диаметрини ҳисобланг.

6. Тўғри тўртбурчак томонларининг айирмаси 7 см, тўғри бурчак биссектриса эса диагоналини 3:4 нисбатда бўлади. Ташқи чизилган айлана радиусини топинг.

7. Тенг ёнли трапециянинг периметри 100 см, кичик асоси 18 см бўлса, ички чизилган айлана радиусини ҳисобланг.

8. Трапецияга айлана ички чизилган бўлиб уриниш нуқталари ён томонларини 9 ва 16 см ҳамда 4:9 нисбатда бўлади. Трапециянинг асосларини топинг.

9. Тўғри бурчакли трапециянинг катта асоси учлари ички чизилган айлана марказидан 15 ва 20 см масофада бўлса, унинг периметрини топинг.

8. Фигураларнинг ўхшашлиги

1. Учбурчакларнинг ўхшаш бўлишлик белгилари:

1) Агар бир учбурчакнинг иккита бурчаги иккинчи учбурчакнинг иккита бурчагига мос равишда тенг бўлса, бундай учбурчаклар ўхшаш бўлади;

2) Агар бир учбурчакнинг икки томони иккинчи учбурчакнинг икки томонига мос равишда пропорционал бўлса ва бир томонига ёпишган бурчаклари тенг бўлган учбурчаклар ўхшаш бўлади;

3) Агар бир учбурчакнинг уч томони иккинчи учбурчакнинг уч томонига мос равишда пропорционал бўлса, бундай учбурчаклар ўхшаш бўлади.

2. Тенг ёнли учбурчакларнинг ўхшашлиши:

1) агар иккита тенг ёнли учбурчакларда асосига қарама-карши бурчаклар тенг бўлса, унда бундай учбурчаклар ўхшаш бўлади;

2) агар иккита тенг ёнли учбурчакларда асосига ёпишган учбурчаклари тенг бўлса, унда учбурчаклар ўхшаш бўлади.

3. Тўғри бурчакли учбурчакларнинг ўхшашлиги:

1) агар иккита тўғри бурчакли учбурчакларда биттадан тенг уткир бурчаклари бўлса, унда бу учбурчаклар ўхшаш бўлади;

2) агар иккита тўғри бурчакли учбурчакларда бирининг катетлари иккинчисининг катетларига мос равишда пропорционал бўлса, унда бундай учбурчаклар ўхшаш бўлади.

3) Агар иккита тўғри бурчакли учбурчаклар учун бирининг гипотенузаси ва битта катети иккинчисининг гипотенузаси ва битта катетига пропорционал бўлса, унда бундай учбурчаклар ўхшаш бўлади.

Тўғри бурчакли учбурчакнинг катети гипотенуза ва шу катетининг гипотенузадаги проекциясининг ўрта пропорционали бўлади.

Тўғри бурчакли учбурчакнинг баландлиги катетларининг гипотенузадаги проекцияларининг ўрта пропорционали бўлади.

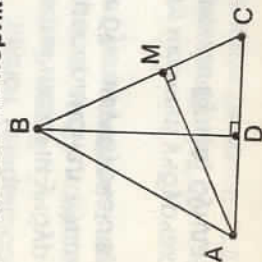
4. Параллел тўғри чизикларнинг хоссаси.

Бурчакнинг томонларини кесувчи параллел чизиклар унинг томонларида пропорционал кесмалар ажратади.

1-масала. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томони ва периметри мос равишда 25 ва 80 см. Ён томонига туширилган баландлиги 48 см га тенг, унга ўхшаш бўлган учбурчакнинг периметрини ҳисобланг.

Ечиш. Айталик, ABC учбурчакда $AB=BC$, AC -асоси бўлсин. $AB=25$. $2AB+AC=80$ см. $AC=80-2\cdot 25=30$ (см). BD - асосига туширилган баландлиги.

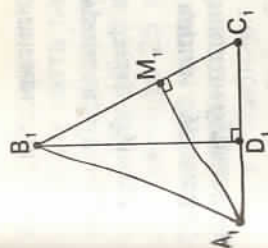
$AD=\frac{1}{2}\cdot AC$, $AD=15$ (см). $\triangle ABD$ дан $BD^2=AB^2-AD^2$ яъни $BD=20$ (см).



$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$. Унда $A_1B_1=BC$, $A_1C_1=AC$, $A_1M_1=AM$. $AM \perp BC$ ни ўтказамиз.

$$AM \cdot BC = BD \cdot AC, AM = \frac{20 \cdot 30}{25} = 24 \text{ (см)}.$$

$$\frac{AM}{A_1M_1} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$$

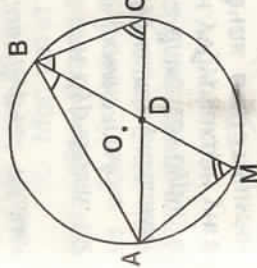


$$\frac{P}{P_1} = \frac{AM}{A_1M_1} = \frac{1}{2}; P_1 = 2P = 2 \cdot 80 = 160. \text{ Жавоб: } 160 \text{ см}.$$

2-масала. ABC учбурчакда BD биссектриса ўтказилган. $BD^2=AB \cdot BC - AD \cdot DC$ тенгликни ўринли эканлигини исботланг.

Исбот. Айталик ABC учбурчакда BD биссектриса AC томонни AD ва DC кесмаларга ажратсин. $BD^2=AB \cdot BC - AD \cdot DC$ эканлигини исботлаймиз.

ABC учбурчакка ташқи айлана чизамиз. BD ни айлана билан M нуктада кесиш-гунча давом эттирамиз. Кесишувчи ватарнинг кесмалари тўғрисида хоссага асосан $BD \cdot DM = AD \cdot DC$ га эга бўламиз; $DM = BM \cdot BD$. $BD(BM-BD) = AD \cdot DC$. Бундан $BD^2 = BD \cdot BM - AD \cdot DC$. $\angle ABM = \angle CBD$, $\angle BCA = \angle AMB$. ABM ва BDC учбурчакларнинг ўхшашлигидан



$$\frac{BM}{BC} = \frac{AB}{BD}$$

Бундан $BD \cdot BM = AB \cdot BC$. Шундай қилиб $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$.

Машқлар

1. Бир учбурчакнинг томонлари 5:4:6 нисбатда, иккинчисининг 25, 20 ва 30 см бўлса улар ўхшашми?
2. Бир учбурчакнинг икки томони 15 ва 24 см бўлиб 45°ни ташқил этади. иккинчи учбурчакнинг икки томони мос

равинишда 5:8 нисбатда бўлиб тўғри бурчакнинг ярмини ташкил этади. Бу учбурчаклар ўхшашми?

3. Тўғри бурчакли учбурчакнинг бурчакларидан бири 54° , иккинчи тўғри бурчакли учбурчак ўткир бурчаклар айирмаси 18° бўлса, улар ўхшашми?

4. Тенг ёнли учбурчакнинг асосига қарши бурчаги 30° , иккинчи тенг ёнли учбурчакнинг асосига ёпишган бурчаклари 75° бўлса, улар ўхшашми?

5. Бир тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари 15 ва 20 см, иккинчи тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси ва унга ўтказилган баландлиги мос равишда 75 ва 36 см бўлса, улар ўхшашми?

6. Бир тўғри бурчакли учбурчакнинг катети ва гипотенузаси мос равишда 12 ва 15 см, иккинчи тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузасига ўтказилган баландлиги ва катети мос равишда 12 ва 25 см бўлса, улар ўхшашми?

7. Бир тенг ёнли учбурчакнинг ён томони ва асоси 15 ва 18 см га тенг, иккинчи тенг ёнли учбурчакнинг асоси ва унга ўтказилган медианаси 54 ва 36 см бўлса, улар ўхшашми?

8. Ромбнинг диагонали унинг томонига тенг. Иккинчи ромбнинг томони диагонали билан 30° ли бурчак ташкил этади. Бу ромблар ўхшаш бўладими?

9. Бир тўғри тўртбурчакнинг диагонали бурчагини 1:2 нисбатда бўлади, иккинчи тўғри тўртбурчакнинг томони ва диагонали 12 ва 24 см бўлса, бу тўғри тўртбурчаклар ўхшашми?

10. Тенг ёнли учбурчакнинг асосига ёпишган бурчаги 72° . Шу бурчак биссектрисаси берилган учбурчакдан унга ўхшаш бўлган ўткир бурчакли учбурчак ажратишини исботланг.

11. Тўғри бурчакли учбурчакда гипотенузага ўтказилган баландлик уни иккита ўхшаш учбурчакка ажратишини исботланг?

12. Ўхшаш учбурчакларда барча мос чизиқли элементларини нисбатини тенг эканлигини исботланг?

Уйга вазифалар

1. Учбурчакнинг томонлари 6, 7 ва 8 см. Шу учбурчакка ўхшаш периметри 84 см бўлган учбурчакнинг томонларини топинг.

2. Учбурчакнинг томонлари 8, 13 ва 15 см. Шу учбурчакка ўхшаш энг катта ва энг кичик томонлари айирмаси 21 см бўлган учбурчакнинг томонларини топинг.

3. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси ва катети мос равишда 25 ва 15 см. Унга ўхшаш гипотенузасига ўтказилган медианаси 25 см бўлган учбурчакнинг катетларини топинг.

4. Ромбнинг диагоналлари 6 ва 8 см. Унга ўхшаш баландлиги 48 см бўлган ромбнинг периметрини ҳисобланг.

5. Тўғри тўртбурчакнинг томони ва диагонали 8 ва 10 см. Кичик томонига бўлган ўхшаш тўғри тўртбурчакнинг периметрини ҳисобланг.

6. Учбурчакнинг томонлари 5 ва 8 см, улар орасидаги бурчак 60° . Унга ўхшаш периметри 60 см бўлган учбурчакнинг томонларини топинг.

7. Мос диагоналлари нисбати тенг бўлган икки ромбнинг ўхшашлигини исботланг.

8. Мос баландлик ва томонларнинг нисбати тенг бўлган ромбнинг ўхшашлигини исботланг.

9. Иккита тўғри бурчакли учбурчакда мос катетлари нисбати тенг бўлса, уларни ўхшашлигини исботланг.

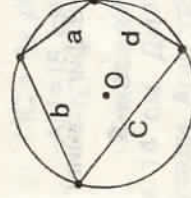
10. Мос катет ва гипотенузасининг нисбатлари тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг ўхшашлигини исботланг.

11. Иккита тўғри бурчакли трапецияда ўтмас бурчаклари тенг, диагонали эса шу бурчакнинг биссектрисаси бўлса, уларнинг ўхшашлигини исботланг.

9. Фигуранинг юзи

$$1. S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}, \text{ бу ерда}$$

$$p = \frac{a+b+c+d}{2} \text{ — ярим периметри.}$$



2. Тўғри тўртбурчакнинг юзи.

$$S = a \cdot b, \text{ бу ерда } a \text{ ва } b \text{ — тўғри тўртбурчакнинг томонлари.}$$

$$S = \frac{1}{2} d^2 \sin \alpha, \text{ бу ерда } d \text{ — тўғри тўртбурчакнинг диагонали.}$$

3. Параллелограммнинг юзи.

$S=ah$, бунда a -унинг томони, h -шу томонига ўтказилган баландлиги. $S=ab \cdot \sin \alpha$, бунда a , b -параллелограммнинг томонлари, α -улар орасидаги бурчак.

4. Учбурчакнинг юзи.

$S = \frac{1}{2} a \cdot h$, бунда a - унинг томони, h -томонига ўтказилган баландлиги.

$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \alpha$, бунда a , b - учбурчакнинг томонлари α - эса шу томонлари орасидаги бурчак.

$S = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2}$, бунда a , b ва c - учбурчакнинг томонлари, $p = \frac{a+b+c}{2}$ - ярим периметри.

5. Трапециянинг юзи.

$S = \frac{(a+b)}{2} \cdot h$ бунда a , b - трапециянинг асослари, h - унинг баландлиги.

6. Ўхшаш фигуралар юзаларининг нисбати мос чизикли элементлари нисбатининг квадрати каби бўлади.

$\frac{S_1}{S_2} = k^2$, бунда S_1 , S_2 - иккита ўхшаш фигуранинг юзалари, k -эса ўхшашлик коэффициенти.

7. Доиранинг юзи.

$S_{\text{доира}} = \pi R^2$, бунда R - доира радиуси.

8. Кўшимча формулалар.

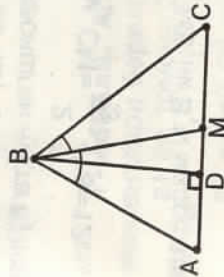
а) ромбнинг юзи: $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$ бунда d_1 , d_2 ромбнинг диагоналлари;

б) тенг томонли учбурчакнинг юзи: $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$, бунда a - учбурчакнинг томони;
в) квадратнинг юзи: $S=a^2$, бунда a - квадратнинг томони.
г) доиравий секторнинг юзи:

$$S = \frac{nR^2}{360} \cdot \pi, \text{ бунда } n - n^\circ \text{ ли марказий бурчак.}$$

$$S = \frac{nR^2}{2n} = \frac{R^2 \alpha}{2} \text{ бунда } \alpha, \alpha - \text{радианли марказий бурчак.}$$

1-масала. Учбурчакнинг ён томонлари 25 ва 40 см га тенг, асосига ўтказилган баландлиги 24 см. Асосига ўтказилган биссектриса ажратган учбурчакларнинг юзларини топинг.

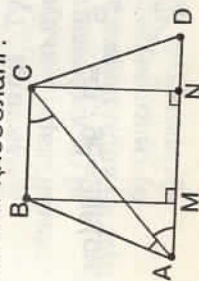


Ечиш: ABC-учбурчакда $AB=25$ см, $BC=40$ см, $BD \perp AC$ бўлиб $BD=24$ см ва $AB < BC$, $AD < DC$ бўлсин.
 $\triangle ABD$ дан $AD^2 = AB^2 - BD^2$, $AD = 7$ см.
 $\triangle BDC$ дан $CD^2 = BC^2 - BD^2$, $CD = 32$ см
 $\Rightarrow AC = 39$ см. BM - биссектрисани ўтказамиз

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC} = \frac{25}{40} \Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{5}{8}; \quad AM = 5x,$$

$MC = 8x$ деб белгилаб, $5x + 8x = 39$, $x = 3$ ни топамиз.
 $AM = 15$ см, $MC = 24$ см. $S_{\triangle ABM} = 180$ см². $S_{\triangle BMC} = 288$ см².

2-масала. Тенг ёнли трапециянинг асослари айирмаси 14 см. Диагонали эса ўткир бурчак биссектрисаси бўлади. Агар трапециянинг периметри 114 см бўлса, унинг юзини ҳисобланг.



Ечиш: ABCD - трапецияда AD ва BC асослари бўлиб $AD > BC$ бўлсин. $AD - BC = 14$ см. $AB=CD$, $\angle A$ ўткир $AB+BC+CD+AD=114$ см. AC-биссектриса $\angle BAC = \angle CAD$ ва $\angle BCA = \angle CAD$. Бундан $\angle BAC = \angle BCA$ ва $AB=BC$, $BM \perp AD$,

$CN \perp AD$ ни ўтказамиз. $BC=MN$; $AM=ND$. Энди $AB=BC=CD=x$ десак $AD=114-3x$.

$$\text{Унда } AM=ND=\frac{1}{2}(AD-MN)=\frac{1}{2}(AD-BC)=\frac{1}{2} \cdot 14=7 \text{ см.}$$

$$AM=\frac{1}{2}(114-3x-x)=57-2x; 57-2x=7; x=25; AB=25 \text{ см } \triangle ABM$$

дан $BM^2=AM^2-AM^2$; $BM=24$ см. $AD=39$ см ёки $AD=114-3 \cdot 25=39$ см.

$$S=\frac{BC+AD}{2} \cdot BM=768 \text{ см}^2 \quad \text{Жавоб: } 768 \text{ см}^2.$$

3-масала. Учбурчакнинг медианалари мос равишда 24, 30 ва 18 см бўлса, унинг юзини ҳисобланг.

Ечиш: Айтайлик, ABC учбурчакда AA_1 , BB_1 , CC_1 - медиана бўлсин, яъни $AA_1=24$ см, $BB_1=30$ см, $CC_1=18$ см. M - медианалар қесилган нукта бўлса

$$AM=\frac{2}{3} \cdot 24=16 \text{ см, } CM=\frac{2}{3} \cdot 18=12 \text{ см,}$$

$$MB=\frac{1}{3} \cdot 30=10 \text{ см. } MB, \text{ ни } B_1N \text{ масофада}$$

давом эттирамиз, бунда $MB_1=B_1N=10$ см, $MN=20$ см. $AB_1=BC$ ва $MB_1=B_1N$ шунинг учун $AMCN$ -параллелограмм, бунда AC ва MN -параллелограммнинг диагоналлари, AM ва MC унинг томонлари.

$2(AM^2+MC^2)=AC^2+MN^2$ $AC^2=400$ см. $AC=20$ см. Герон формуласидан фойдаланиб AMC - учбурчакнинг юзини топамиз.

$$S_{\triangle ABC}=96 \text{ см}^2, BD \perp AC, MK \perp AC \text{ ни ясаб, } \frac{BD}{MK} = \frac{BB_1}{MB_1} = \frac{3}{1}$$

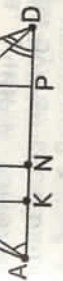
ни топамиз.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} AC \cdot MK \quad \text{Жавоб: } 288 \text{ см}^2.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} AC \cdot MK = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 28.8 = 288 \text{ см}^2$$

4-масала. Ён томонлари ва баландлиги мос равишда 25, 30 ва 24 см бўлган трапеция бурилган. Ўткир бурчак биссектрисалар иккинчи асосида ётувчи нуктада қесишади. Трапециянинг юзини ҳисобланг.

Ечиш. $ABCD$ - трапецияда AD ва BC - асослари бўлиб $BC < AD$ бўлсин. $AB=25$ см, $CD=30$ см. $MN \perp AD$, $BK \perp AD$, $CP \perp AD$ ни ўтказамиз. $BK=CP=24$ см. AM ва DM биссектрисаларни ясаймиз. $\angle BAM=\angle MAD$; $\angle CMA=\angle MAD$. Бундан, $\angle BAM=\angle CMA$ ва $AB=CM=25$ см. Шунга ўхшаш $CD=MC=30$. $\triangle ABK$ дан $AK^2=AB^2-BK^2$; яъни $AK=7$ см. $\triangle CPD$ дан $PD^2=CD^2-CP^2$; яъни $PD=18$ см.



Бундан $S=\frac{AD+BC}{2} \cdot BK=1620 \text{ см}^2$.

Машқлар.

1-масала. Агар тенг ёнли учбурчакнинг қуйидаги элементлари берилган бўлса, унинг юзини топинг:

- ён томони 25 см, асосига ўтказилган баландлиги 20 см;
- асоси 30 см, ён томонига ўтказилган баландлиги 24 см;
- ён томонига ўтказилган баландлиги уни асосига қарши учидан ҳисобланганда 7 ва 18 бўлган кесмаларга ажратса;
- периметри 80 см, ён томони 25 см;
- периметри 80 см, асоси 30 см;
- ён томони ва асоси 5:6 нисбатда, асосига ўтказилган баландлиги 24 см;
- асоси ва унга ўтказилган баландлиги 3:2 нисбатда. ён томони эса 24 см.

2-масала. Тўғри бурчакли учбурчакнинг қуйидаги элементлари маълум бўлса, унинг юзини ҳисобланг:

- гипотенузага ўтказилган баландлиги уни 16 ва 9 см бўлган кесмаларга ажратади;
- гипотенузаси 25 см, катетлари 3:4 нисбатда;
- гипотенуза ва катет 5:4 нисбатда, иккинчи катети 15 см;

- г) гипотенузаси 10 см, катетлари айирмаси 2 см;
 д) тўғри бурчак биссектрисаси гипотенузани 15 ва 20 см бўлган кесмаларга ажратади.

3-масала. Учбурчакнинг қуйидаги элементларига кўра юзасини ҳисобланг:

- а) томонлари 13, 14 ва 15 см га тенг;
 б) икки томони 25 ва 40 см га, учинчи томонига ўтказилган баландлиги 24 см га тенг;
 в) икки томони 5:8 нисбатда, учинчи томонига ўтказилган баландлиги уни 7 ва 32 см бўлган кесмаларга ажратади.

4-масала. Параллелограммнинг юзини топинг, агар:
 а) томонлари 12 ва 8 см, улар орасидаги бурчаги 30° ;
 б) диагоналлари 15 ва 20 см, улар орасидаги бурчак 30° ;
 в) баландликлари 12 ва 15 см, томонлари орасидаги бурчак 30° ;

г) томонлари 12 ва 15 см, баландликлари орасидаги бурчак 30°

5-масала. Ромбнинг юзини ҳисобланг, агар:

- а) диагоналлари 3:4 каби, томони 25 см;
 б) диагоналлари айирмаси 10 см, томони 25 см.
 в) диагоналлари кесилган нуқтадан томонига ўтказилган перпендикуляр уни 9 ва 16 см бўлган кесмаларга ажратади;
 г) ўтмас бурчак учидан ўтказилган баландлик томонини 7 ва 18 бўлган кесмаларга ажратади;
 д) диагоналлари йиғиндиси 34 см, томони эса 13 см;
 е) баландлиги 24 см, диагоналлари 3:4 нисбатда;
 ж) томони 25 см, диагоналлари айирмаси 10 см.

6-масала. Тўғри тўртбурчакнинг юзини ҳисобланг, агар:

- а) учидан диагоналига ўтказилган перпендикуляр уни 9 ва 16 см бўлган кесмаларга ажратса;
 б) бурчак биссектрисаси диагоналини 20 ва 15 см бўлган кесмаларга ажратса;
 в) биссектриса томонини 12 ва 8 см бўлган кесмаларга ажратса;
 г) биссектриса томонини 1:3 нисбатда бўлиб, диагонали 20 см бўлса;
 д) томонлари айирмаси 7 см, диагонали эса 13 см;
 е) томонлари 3:4 нисбатда, диагонали эса 15 см;

- ж) периметри 70 см, учидан диагоналча бўлган масофа 8 см.

7-масала. Тенг ёнли трапециянинг қуйидаги элементларига кўра унинг юзини топинг:

- а) асослари 50 ва 14 см, диагонали 40 см;
 б) асослари 39 ва 15 см, диагоналлари ён томонига перпендикуляр.

8-масала. Тўғри бурчакли трапециянинг юзини ҳисобланг, агар:

- а) ён томонлари 4:5 каби, асосларининг айирмаси 18 см, кичик диагонали 26 см бўлса;
 б) асослари 15 ва 33 см, диагонали эса ўткир бурчагининг биссектрисаси бўлса.

Уйга вазифалар

1. Агар тенг ёнли учбурчакнинг қуйидаги элементлари берилган бўлса, унинг юзини топинг:

- а) ён томонига ўтказилган баландлиги уни айирмаси 11 см бўлган кесмаларга ажратади. Ён томонини асосига нисбати 5:6 каби;

- б) ён томонига ўтказилган баландлиги 24 см, ён томонини асосига нисбати 5:6 каби;

- в) асосига ва ён томонига ўтказилган баландликлар айирмаси 4 см, ён томонини асосига нисбати 5:6 каби;

- г) асосига ва ён томонига ўтказилган баландликлар айирмаси 4 см бўлиб ён томонини асосига нисбати 5:6 каби.

2. Ромбнинг ўтмас бурчаги учидан ўтказилган баландлик томонини 7 ва 18 см бўлган кесмаларга ажратади. Шу баландлик ажратган қисмларининг юзасини топинг.

3. Ромбнинг диагоналлари 3:4 нисбатда бўлиб периметри 100 см бўлса, унинг юзини топинг.

4. Тўғри бурчакли трапециянинг кичик диагонали тўғри бурчагининг биссектрисаси бўлади. Асосларининг айирмаси 30 см. Агар ён томонлар айирмаси 18 см бўлса трапециянинг юзини ҳисобланг.

5. Трапециянинг асослари 60 ва 20 см, ён томонлари эса 13 ва 37 см. Трапециянинг юзини ҳисобланг.

6. Трапециянинг асослари 8 ва 42 см, диагоналлари эса 30 ва 40 см бўлса, унинг юзини ҳисобланг.

7. Тенг учбурчакларда мос баландликларини тенглигини исботланг.

8. Икки учбурчак учун мос баландликлар тенг бўлса, уларнинг тенглигини исботланг.

9. Тенг учбурчакларда мос медианаларни тенглигини исботланг.

10. Икки учбурчак учун мос медианалар тенг бўлса, уларни тенглигини исботланг.

11. Тенг учбурчакларда мос биссектрисаларни тенг эканлигини исботланг.

12. ABC учбурчакда AA_1, BB_1, CC_1 кесмалар O нуктада

кесишиб $\frac{AO}{OA_1} = \frac{BO}{OB_1} = \frac{CO}{OC_1} = \lambda$ тенглик ўринли бўлса, AA_1, BB_1, CC_1 кесмаларни медиана эканлигини исботланг.

13. ABC учбурчак AA_1, BB_1, CC_1 баландликлар O-нуктада

кесишиб $\frac{AO}{OA_1} = \frac{BO}{OB_1} = \frac{CO}{OC_1} = \lambda$ тенглик ўринли бўлса, учбурчакнинг бурчакларини топинг.

14. AB ва CD кесмалар M нуктада кесишиб $AM \cdot MB = CM \cdot MD$ бўлса, A, B, C, D нукталарни бир айланада ётишини исботланг.

15. ABC учбурчакда m_c - медиана, ABC учбурчакда m_c - медиана бўлиб $AC = A_1C_1, BC = B_1C_1$ ва $L_c = L_{c_1}$ бўлса $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ эканлигини исботланг.

16. ABC учбурчакда L_c - биссектриса $A_1B_1C_1$ учбурчакда L_{c_1} - биссектриса бўлиб $AC = A_1C_1, BC = B_1C_1$ ва $L_c = L_{c_1}$ бўлса, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ эканлигини исботланг.

17. ABC учбурчакда AA_1, BB_1, CC_1 - медианалар O нуктада

кесишиб $\frac{AO}{OA_1} = \frac{BO}{OB_1} = \frac{CO}{OC_1} = 2$ эканлигини исботланг.

18. ABC учбурчакда AA_1, BB_1, CC_1 - биссектрисалар

кесишган нукта O бўлса $\frac{CO}{OC_1} = \frac{a+b}{c}, \frac{AO}{OA_1} = \frac{b+c}{a}, \frac{BO}{OB_1} = \frac{a+c}{b}$ эканлигини исботланг, бу ер a, b, c - лар учбурчакнинг томонлари.

19. ABC учбурчакда AA_1, BB_1, CC_1 - баландликлар кесишган нуктасини O десак

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{\cos \hat{B}}{\cos \hat{A}}, \frac{BO}{OB_1} = \frac{\cos \hat{A}}{\cos \hat{B}}, \frac{AO}{OA_1} = \frac{\cos \hat{A} \cos \hat{B}}{\cos \hat{C}}$$

эканлигини исботланг.

20. ABCD тўртбурчакда $M \in AB, N \in BC, K \in CD$ бўлиб, $AM = MB, BN = NC, CK = KD, AL = LD$ бўлса, куйдагиларни исботланг:

а) MNKL-тўртбурчак параллелограмм.

$$AC = BD$$

б) MNKL-ромб $\Leftrightarrow$

$$KL \perp LN$$

$$AC \perp BD$$

в) MNKL-тўғри тўртбурчак $\Leftrightarrow$

$$KM = LN$$

$$AC = BD \text{ ва } AC \perp BD$$

г) MNKL-квадрат $\Leftrightarrow$

$$KM = LN \text{ ва } KM \perp LN$$

$$д) S_{MNKL} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

$$е) AC^2 + BD^2 = 2(MK^2 + NT^2)$$

10. Координаталар, векторлар, геометрик алмаштиришлар.

1. Учлари $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ нукталарда бўлган $\triangle ABC$ стерженнинг огирлик маркази $M_0(x_0, y_0)$ нукта $x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \text{ деб топилади.}$$

2. $A(x_1, y_1)$ ва $A_2(x_2, y_2)$ нукталар орасидаги d -масофа $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ га тенг.

3. Радиуси R га, маркази $A(a, b)$ нуктада бўлган айлана тенгламаси $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ бўлади.

4. Тўғри чизикнинг умумий тенгламаси: $ax + by + c = 0$, бу ерда a ва b лар бир вақтда нолга тенг бўлмайдиган сонлар, c эса ихтиёрий сон.

5. Тўғри чизикнинг бурчак коэффициентли тенгламаси: $y = kx + \ell$,

бунда $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \alpha$; $\ell = -\frac{c}{b}$, $k = -\frac{a}{b}$ бўлиб тўғри чизик-

нинг бурчак коэффициенти дейилади.

6. Турли $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ нукталардан ўтувчи тўғри чизик тенгламаси:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \text{ бўлади.}$$

7. $A(x_1, y_1)$ нуктадан ўтувчи $a(a_1, a_2)$ йўналтирувчи векторига эга бўлган тўғри чизик тенгламаси

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} \text{ бўлади.}$$

8. $ax + by + c = 0$ тўғри чизик учун $\vec{a}(-b, a)$ вектори йўналтирувчи вектор (коллениар) бўлади. $\vec{b}(a, b)$ эса $\vec{a}(-b, a)$ векторига перпендикуляр бўлади.

9. Координата ўқларини йўналиши ўзгармаган ҳолда $A(x, y)$ ни $A'(x', y')$ нуктага қўчиришни $x' = x + a$, $y' = y + b$ билан бажариш мумкин.

10. λ ва μ ҳақиқий сони ва коллениар бўлмаган a , b - векторлари учун $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ тенгликни ёзиш мумкин.

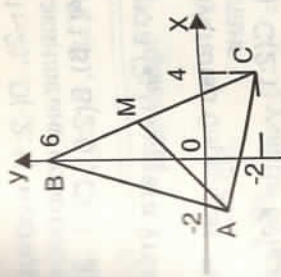
11. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси $a \cdot b = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$ бу ерда $\alpha = (\vec{a}, \vec{b})$

а) агар $a(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ ва $b(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ бўлса $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ ўринли бўлади. Бундан қуйидаги хулоса келиб чиқади:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

б) агар $\vec{a}(a_1, a_2)$ ва $\vec{b}(b_1, b_2)$ векторлар учун $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \lambda$

бўлса $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ лар коллениар бўлади.



1-масала. Учбурчакнинг учлари $A(-2; -1)$, $B(0; 6)$, $C(4; -2)$ бўлса AM медианасини узунлигини топинг. $M(x_0, y_0)$ нукта BC нинг ўртаси бўлгани учун $x_0 = 2$, $y_0 = 2$ бўлади. Шундай қилиб $d = |AM| = \sqrt{(-2-2)^2 + (-1-2)^2} = 5$ бўлади.

2-масала. Учбурчакнинг учлари $A(4; -4)$, $B(-6; 0)$, $C(0; 6)$ бўлса, унинг томонларини ва AM медианасини тенгламасини тузинг.

Ечиш. $M_0(x_0, y_0)$ нукта BC нинг ўртаси бўлганлиги учун $x_0 = -3$, $y_0 = 3$ бўлади.

Шундай қилиб $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ формула-

дан

$$AB: \frac{x - 4}{-10} = \frac{y + 4}{4} \Leftrightarrow 2x + 5y + 12 = 0$$

$$BC: \frac{x + 6}{6} = \frac{y}{6} \Leftrightarrow x - y + 6 = 0; AC: \frac{x - 4}{-4} = \frac{y + 4}{10}$$

$$\Leftrightarrow 5x + 2y - 12 = 0 \text{ } AM: \frac{x - 4}{-7} = \frac{y + 4}{7} \Leftrightarrow x + y = 0 \text{ ни толамиз.}$$

Машқлар

1. Абсциссалар ўқида $(2, 3)$ ва $(1, -2)$ нукталардан тенг узоқликда ётган нуктани топинг.
2. $(2; -1)$ ва $(-1; 3)$ нукталардан ўтувчи тўғри чизик тенгламасини тузинг.
3. $2x - y = 0$ ва $x + y = 3$ тўғри чизикларнинг кесишиш нуктасини координаталарини топинг.
4. $x^2 + y^2 = 1$ айланани $x + y = 3$ тўғри чизик билан кесишган нукталарини топинг.
5. $(-1; 2)$ марказли $(2; -2)$ нуктадан ўтувчи айлана тенгламасини тузинг.

Жавоблар

1. Тенг ёнли учбурчак

Машқлар.	Уйга вазифа
1. 36 см, 2. 36 см, 3. $80^\circ; 80^\circ; 20^\circ$ 4. $70^\circ; 70^\circ; 40^\circ$ 5 а) 80 см, б) 80 см, в) 80 см, г) 80 см, д) 80 см, е) 176 см, ж) 64 см, з) 64 см, к) 128 см, м) 256 см, н) 128 см, 7. а) 30 см, б) 48 см, в) 48 см. 8. а) 20 см, б) 48 см, 9. 20 см, 10. 32 см, 11. 15 см,	1. 30 см, 25 см, 2. 10 (2/3) см, 3. 54 см, 4. 12 см.

2. Тўғри бурчакли учбурчак

Машқлар.	Уйга вазифа
1. а) 30 см, б) 48 см, в) 60 см, г) 60 см, д) 120 см, е) 72 см, 2. а) 15 см, б) 30 см, в) 35 см. 3. 12 см. 4. $30^\circ; 60^\circ; 90^\circ$, 5. 15°.	1. 25 см, 2. 84 см, 3. 5 см.

6. Учлари $A(-1;-2)$, $B(2;-5)$, $C(1;-2)$, $D(-2;1)$ нуктада бўлган тўртбурчакни параллелограмм эканлигини исботланг.

7. Параллелограммнинг учлари $A(1;3)$, $B(2;0)$, $C(-1;-3)$, $D(x_0; y_0)$ бўлса x_0 , y_0 ни топинг.

8. Параллел кўчиришда $(-1;1)$ нукта $(2;3)$ нуктага ўтса, $(1;-2)$ нукта қайси нуктага ўтади?

9. $A(0;1)$, $B(1;0)$, $C(1;2)$, $D(2;1)$ нукталар берилган. AB ва CD векторларни тенглигини исботланг.

10. Учбурчакнинг $A(-2;1)$, $B(-2;4)$, $C(2;1)$ учлари бўлса, унинг бурчак косинусларини топинг.

11. $\vec{a}(3;4)$ ва $\vec{b}(x;6)$ векторлар x нинг қандай қийматларида перпендикуляр бўлади?

12. $a(1;-1)$ ва $b(-2;y)$ векторлар. Унинг қандай қийматларида коллинеар бўлади:

13. Агар $\vec{a}(2;-1)$ ва $\vec{b}(-1;2)$ бўлса, $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{m}=3\vec{a}-2\vec{b}$ векторларни топинг.

Уйга вазифалар

1. Учлари $A(-2;4)$, $B(2;1)$, $C(-2;-2)$ нукталарда бўлган учбурчакнинг периметрини топинг.

2. Учлари $A(2;1)$, $B(-2;4)$, $C(-2;-2)$ нукталарда бўлган учбурчакнинг тўғри бурчакли эканлигини исботланг.

3. Агар учбурчак томонларининг ўртаси $A_1(-1;3)$, $B_1(0;-1)$, $C_1(1;2)$ бўлса, унинг учларини координаталарини топинг.

4. Тўртбурчакнинг учлари $A(-1;1)$, $B(3;3)$, $C(3;-3)$, $D(1;-3)$ бўлса унинг ромб эканлигини исботланг.

5. $x^2+y^2+2x+4y-4=0$ айланани радиуси ва марказини топинг.

6. Учбурчакнинг томонлари: $x-2y+3=0$, $4x+y-15=0$, $3x+5y+20=0$ медианалари кесишган нуктасини топинг.

7. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=8$, $\varphi=120^\circ=(\vec{a}, \vec{b})$ бўлса $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ ни скаляр кўпайтмасини топинг.

8. $\vec{a}(0;2)$ ва $\vec{b}(3;6)$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг.

9. Векторлардан фойдаланиб ромбни диагоналлари перпендикуляр эканлигини исботланг.

3. Турли томонли учбурчак

Машқлар.	Ўйга вазифа.
1. а) 90 см, б) 36 см, в) 204 см, г) 48 см, 2. а) 6 см, 10 см, 14 см, б) 25 см, 39 см, 40 см, в) 24 см, $12\sqrt{6}$, $12(1+\sqrt{3})$ см. 3. 12 см. 4. 8 см. 5. 5 см. 6. 12 см, 16 см. 7. 30 см, 21 см. 8. 48 см.	1. 96 см. 2. 65° 3. 30° , 40° 4. 18 см. 5. 25 см. 6. 84 см. 7. 60 см.

4. Параллелограмм ва унинг турли кўринишлари.

Машқлар.	Ўйга вазифа.
1. а) 30 см, 40 см. б) 30 см, 40 см, в) $12\sqrt{3}$, 36 см г) 30 см, 40 см. д) 30 см, 40 см, е) 84 см, 112 см, ж) 21 см, 28 см. 2. 100 см, 7. 7 см. 3. 24 см. 8. 40 см, 128 см. 4. 42 см. 5. 14 см. 6. 26 см,	1. 24 см. 2. 100 см. 3. 30 см, 40 см, 6. а) 14 см, 8 см. б) 14 см, 8 см. 7. 24 см, 42 см.

5. Трапеция

Машқлар.	Ўйга вазифа.
1. а) 60° , 120° б) 60° , 120° . в) 60° , 120° г) 60° , 120° 3. 15 см. 4. а) 12 см, 18 см. б) 8 см, 32 см. в) 22 см, 42 см. 5. а) 116 см. б) 88 см. в) 30 см. г) 42 см, д) 156 см. 6. 3 см, 17 см. 7. 7 см, 16 см. 8. 12 см, 15 см. 9. а) 132 см. б) 132 см. в) 48 см. г) 66 см. д) 60 см. 10. 24 см 11. 14 см, 14 см.	1. а) 24 см. б) 24 см. 2. а) 560 см. б) 168 см. в) 456 см. 5. 112 см. 6. 12 см, 8 см, 13 см. 7. 39 см, 54 см. 8. 106 см. 9. 58 см. 10. 12 см. 11. 24 см. 12. 7 см. 13. 14 см.

6. Айлана ва унинг элементлари

Машқлар.	Ўйга вазифа.
1. 90° 2. 40° 3. 20° 4. 4 см, 20 см. 5. 25 см 6. 12 см. 7. 24 см, 8. а) 10 см, б) 12,5 см, в) 25 см, г) 7 см, д) $9\frac{1}{3}$ см, е) 12 см, 9. 24 см. 10. 20 см, 12. 20 см, 13. 30 см, 14. 32 см, 15. 12 см.	2. 7 см. 3. 12 см. 4. 70 см. 5. 12,5 см. 6. 24 см. 7. 24 см, 32 см. 8. 20 см.

7. Кўпбурчак ва айлана

Машқлар.	Уйга вазифа.
1. 54 см. 2. 4 см. 3. 25 см. 4. 64 см 5. 15 см. 6. 4 см. 7. 10 см. 8. 4 см. 9. 4 см. 10. 12 см. 11. 12 см. 12. 12 см, 16 см. 13. 25 см. 14. 18 см, 32 см. 15. 21 см, 28 см.	1. 8 см, 4 см. 2. 12 см. 3. 8 см. 4. 64 см 5. 24 см. 6. 17,5 см. 7. 12 см. 8. 34 см, 17 см. 9. 98 см.

8. Фигураларнинг ўхшашлиги

Машқлар.	Уйга вазифа.
1. 24 см, 28 см, 32 2. 24 см, 39 см, 45 21см. 3. 40 см, 30 см. 4. 200 см. 5. 112 см. 6. 15 см, 24 см.	

9. Фигураларнинг юзи

Машқлар.	Уйга вазифа.
1. а) 300 см ² б) 300 см ² 2. 300 см ² г) 300 см ² . 3. 300 см ² е) 432 см ² . 4. 300 см ² . 5. а) 150 см ² , б) 150 см ² . 6. а) 150 см ² , г) 24 см ² . 7. а) 204 см ² . 8. а) 84 см ² , б) 468 см ² . 9. а) 468 см ² . 10. а) 48 см ² , б) 75 см ² . 11. а) 360 см ² , г) 90 см ² . 12. а) 600 см ² , б) 600 см ² . 13. а) 600 см ² , г) 600 см ² . 14. 120 см ² , е) 600 см ² . 15. 600 см ² . 16. а) 300 см ² , б) 388 см ² . 17. а) 160 см ² , г) 192 см ² . 18. а) 60 см ² , е) 108 см ² . 19. а) 300 см ² . 20. а) 768 см ² , б) 486 см ² . 21. а) 456 см ² , б) 228 см ²	1. а), б), в), г) - 300 см ² . 2. 84 см ² , 516 см ² . 3. 600 см ² . 4. 496 см ² . 5. 480 см ² . 6. 600 см ² .

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати:

1. Готман Э.Г., Скопец З.А. Задача одна - решения разные. К.: Рад.шк., 1988. 171 с.
2. Нестеренко Ю.В., Олехник С.Н., Потапов М.К. Задачи вступительных экзаменов по математике. М.: Наука, 1986. 512 с.
3. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. Ч. 1. М.: Наука, 1986. 272 с.
4. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии (планиметрия). М.: Наука, 1986. 224 с.
5. Погорелов А.В. Геометрия /учебник для 7-11 классов средней школы, 2-е издание. - М.: Просвещение, 1991. - 383 с.
6. Академик лицейлар учун чуқурлаштирилган ўқув дастури /Геометрия. Т., 1999. -11 б.
7. Фуломов С., Назиров Э., Халилов Н. Ўқув адабиётини яратиб ва уни баҳолаш мезонлари. Тошкент 1998. ЎАЖБНТ маркази. 42 бет.
8. Жумаев Э.Э. Развитие творческого мышления учащихся в процессе составления задач. Депон. ГРНТБ Украины, 20 с.
9. Жумаев Э.Э., Михайловский В.И. Геометрия. Киев, 1997, 58 с.
10. Жумаев Э.Э. Развитие творческого мышления учащихся в процессе решения геометрических задач. Автореф. Киев, 1997, 19 с.
11. Аллаев Г.М., Жумаев Э.Э. Геометрия (методические указания к решению геометрических задач). Термез, 2000, 58 с.

Мундарижа

1. Кириш.....	3
2. Тенг ёнли учбурчак.....	4-10
3. Тугри бурчакли учбурчак.....	10-15
4. Турли томонли учбурчак.....	15-20
5. Параллелограмм ва унинг турли кўринишлари.....	20-28
6. Трапеция.....	28-30
7. Айлана ва унинг элементлари.....	32-38
8. Айлана ва кўлбурчаклар.....	38-49
9. Фигураларнинг ўхшашлиги.....	49-52
10. Фигуранинг юзи.....	53-61
11. Координаталар, векторлар, геометрик алмаштиришлар.....	61-64
12. Жавоблар.....	65-69
13. Фойдаланилган адабиётлар рўйхати.....	70

Э.Э.Жумаев

Геометрия масалалар тўплами I қисм

Ўзбекистан Республикаси Олий ва Ўрта махсус
таълим вазирлиги Академик лицей талабалари учун
ўқув қўлланма сифатида нашрга тавсия этган.

Босишга рухсат этилди 28.09.2000 й.
Буюртма №53. Адади 1000. Босма табоғи 4,5.
ФТДК ДИТАФ босмахонасида чоп этилди.
Тошкент, Олмазор 171-уй.

009343/44

DM