CHDPU
CHIRCHIQ DAVLAT
PEDAGOGIKA UNIVERSITETI
5 YOSH

Хайдаров И.Қ., Қутлимуротов А.Р.,
Дўсмуродова Г.Х., Жураева Н.В.,
Маҳкамов Э.М.

ЭЛЕМЕНТАР МАТЕМАТИКА (АЛГЕБРА)

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ЧИРЧИҚ ДАВЛАТ ПЕДАГОГИКА УНИВЕРСИТЕТИ

Хайдаров И.Қ., Қутлимуротов А.Р., Дўсмуродова Г.Х.,
Жураева Н.В., Маҳкамов Э.М.

ЭЛЕМЕНТАР МАТЕМАТИКА
(АЛГЕБРА)

Ўқув қўлланма

Тошкент – 2022

Хайдаров И.Қ., Қутлимуротов А.Р., Дўсмуродова Г.Х., Жураева Н.В., Маҳкамов Э.М. Элементар математика (алгебра) Ўқув қўлланма –Т.: Университет, 2021 й. 204-б.
УЎК 511.2(075.8)
КБК 22.132я73
А 45

Ушбу ўқув қўлланмада "Элементар математика (алгебра)" курсининг асосий тушунча ва тасдиқлари, масалалари келтирилган бўлиб, математик мазмуни тадбиқлари кўрсатилган. Талабаларга мавзулар бўйича мустақил ечиши учун топшириқлар ва уларни ечиш усуллари ҳам берилган. Ўқув қўлланма олий таълим муассасаларининг математика ва информатика талабалари ҳамда профессор - ўқитувчилари учун мўлжалланган.

Учебник содержит основные понятия, утверждения, задачи курса "Элементарная математика (алгебра)" и прикладное математическое содержание. Также даны задания для самостоятельного решения учащимися по темам и методам их решения. Учебник предназначен для студентов и преподавателей математики и информатики в высших учебных заведениях.

The textbook contains basic concepts, statements, tasks of the course "Elementary Mathematics (Algebra)" and applied mathematical content. Also given tasks for independent solution by students on topics and methods of their solution. The textbook is intended for students and teachers of mathematics and computer science in higher education.

Тақризчилар: ф.-м.ф.д.(DSc), Ботиров Ғ.И.
ф.-м.ф.ф.д.(PhD), Пошахужаева Г.Д.

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2021 йил 25 декабрдаги 538 - сонли қарорига асосан 60110600 – Математика ва информатика таълим йўналишлари бўйича таҳсил олаётган талабалар ва профессор ўқитувчилари учун ўқув қўлланма сифатида нашр қилишга тавсия этилган.

ISBN: 978-9943-6555-1-5

Математика ҳеч кимга машаққатли ишни йўқлаш ҳақида эмас. Аксинча, у фақат завқ учун мавжуддир. У нима қилаётганини, ёки қила оладиганини ёки уни янада яхшилаб олиш умидида қилган ишларини таҳлил қилишни ёқтирадиганлар учун.

И.А. Бродский

СЎЗ БОШИ

Математика курсининг умумий тарбиявий аҳамияти, бошқа мавзулар сингари, авваламбор у берадиган ва инсоннинг ҳаёт ҳодисаларига яқинлашиш уфқлари ва усулларини кенгайтирадиган умумий тушунчалардан иборат. Шу нуқтаи назардан, математика, мантиқийлиги, изчиллиги ва хулосаларнинг аниқлиги билан муҳимдир. Унинг мавҳум, қатъий мулоҳазаси катта ва узоқ ақлий ҳаракатларни талаб қилади, шунчаки тушунишни ва мулоҳазани эмас, балки хотирани талаб қилади.

Юртимиз мустақиллиги таълим тизимидаги катта ўзгаришларга, шу жумладан иқтидорли ўқувчилар, талабаларга бўлган муносабатни ҳам тубдан ўзгартирди. Республикамизнинг ривожланган мамлакатлар даражасида тараққий этиши жамият аъзолари, айниқса, ёшларнинг эркин фикрлай олиш даражаси, мустақил ижодий фаолиятлари натижалари билан белгиланади.

Талабаларнинг математик билимларни ўзлаштириши, фанга бўлган қизиқишини рағбатлантириш, малака ҳосил қилиши ва кўникмага эга бўлиши, маданиятни шакллантиришда мустақил фикрлаш қобилиятини фаоллаштириш масаласи алоҳида аҳамият касб этади.

Ушбу ўқув қўлланма математиканинг муҳим қисмларидан бўлган сонлар назарияси, комбинаторика, тригонометрия, турли тенглама ва тенгсизликлар, ҳамда тенглама ва тенгсизликлар системасини ечишнинг бир неча усулларини ўрганишга, таҳлил қилишга бағишланган. Бундан ташқари, АКТ ёрдамида, масалаларни GeoGebra дастурида график чизма ёрдамида қулай усулда ечиш имкониятларидан фойдаланилган.

Талабаларнинг ақлий фаолиятини мустаҳкамлаб, машғулот жараёнида вақтдан ютишига ёрдам берадиган, тезкор ҳисоблаш имкониятини берувчи усуллар ўрганилган.

Ўқув қўлланма беш бобдан иборат. **Биринчи бобда** натурал ва бутун сонлар тўпламида туб ва мураккаб сонлари, бутун сонлар ҳалқасида бўлиниш муносабати, Евклид алгоритми, қолдиқли бўлиш ҳақида теорема, энг катта умумий бўлувчи (ЭКУБ) ва энг кичик умумий каррали (ЭКУК), рационал сонларни чекли занжир каср кўринишда ифодалаш, систематик сонларнинг йиғиндиси, кўпайтмаси ва бўлинмаси баён қилинган. **Иккинчи бобда** комбинаторикага оид мисоллар, бирлашмалар ва Нюътон биноми, Дирихле принципи ҳақида асосий маълумотлар, Дирихле теоремаси, ностандарт масалалар ҳақида айрим математик софизмлар, парадокслар мисоллар ёрдамида тушунтирилган. **Учинчи бобда**, каср – рационал тенглама ва тенгсизликлар, тенглама ва тенгсизликларни турли усулларда ечиш, иррационал, кўрсаткичли, логарифмик, модул қатнашган тенглама ва тенгсизликлар, модулли тенгсизликларда ностандарт ўзгартиришлар киритиб ечиш усуллари, параметрли ва параметр қатнашган модулли тенглама ва тенгсизликлар ҳамда уларнинг ечиш усуллари баён қилиниб мисоллар ёрдамида мавзулар кенг ёритилган. Ҳар бир мавзу мисоллар билан баён қилинган ва мустақил ишлаш учун машқлар берилган. **Тўртинчи бобда,** кўпҳадлар ва улар устида амаллар, Горнер схемаси, Безу теоремаси, алгебраик тенгламаларнинг комплекс ечимлари, баъзи кўринишдаги учинчи даражали тенгламалар, Кардано формуласи, тўртинчи даражали тенгламаларни Феррари усулида ечиш, симметрик кўпҳадлар ва уларни симметрик функциялари, икки ва ўзгарувчили тенглама ва тенгламалар системасини ечишда симметрик кўпҳадларни қўлланилиши, каср-рационал тенглама ва тенгламалар системаси каби тушунчалар келтирилган. **Бешинчи бобда,** аргументнинг синуси, косенуси, тангенси ва катангенси, тригонометрик функцияларнинг даврийлиги ва графиги, икки бурчак йиғиндиси ва айирмасининг косинуси, синуси ва тангенси, котангенси, келтириш формулалари, иккиланган ва учланган ярим аргументнинг тригонометрик формулалари каби тушунчалар келтирилган.

Ўйлаймизки, ўқув қўлланма ўз ўқувчиларини топади, бошқа мавжуд ўқув адабиётлари қаторида элементар математика (алгебра) курси бўйича уларга билимларини оширишга кўмак беради.

Ушбу ўқув қўлланмадан педагогика олий таълим муассасалари талабалари ва профессор - ўқитувчилари фойдаланишлари мумкин.

Муаллифлар

МУНДАРИЖА

I БОБ. БУТУН СОНЛАР ҲАЛҚАСИДА БЎЛИНИШ МУНОСАБАТИ

1.1-§. Натурал ва бутун сонлар тўпламида туб ва мураккаб сонлар.

Санаш учун $1,2,3,\dots$ натурал сонлар ишлатилади. $N=\{1,2,3,\dots\}$ тўплам эса *натурал сонлар тўплами* дейилади. Агар a ва b натурал сонлар учун шундай q натурал сон топилиб, $a=b\cdot q$ шарт бажарилса, у ҳолда a натурал сон b натурал сонга *бўлинади,* деймиз.

Агар сон фақат иккита бўлувчига эга бўлса, унда бундай сон *туб сон* дейилади. Сон иккитадан ортиқ бўлувчига эга бўлса, бундай сонга *мураккаб сон* дейилади. Биз билган 1 сони туб сон ҳам, мураккаб сон ҳам эмас, чунки 1 сони фақат битта 1 бўлувчига эга. Туб сонлар (ва уларнинг натурал даражалари) ўзаро тубдир. Агар a сони $\sqrt{a}$ гача туб сонларга бўлинмаса, у ҳолда у туб сон бўлади.

Сўнгги 200 йил ичида кўплаб туб сонли жадваллар тузилган ва нашр этилган. Уларнинг энг кенг доираси 1000000 гача бўлган оддий сонларни ўз ичига олади (Д.Ҳ.Леҳмер).

a сондан катта бўлмаган туб сонлар жадвалини тузиш учун Эратосфен ғалвири деб аталувчи усулдан фойдаланилади. Бу усул бўйича сонлар қаторида биринчи топилган p_1 туб сонга каррали бўлган сонларни ўчириш, сўнг иккинчи p_2 туб сонни топиб, унга каррали сонларни ўчириш ва ҳоказо керак бўлади. Бу жараён $\sqrt{a}$ дан катта бўлмаган туб сонгача давом эттирилса, 1 дан a гача сонлар қаторида ўчирилмай қолган сонлар a дан катта бўлмаган туб сонларни ҳосил қилади.

Масалан: $2,3,5,7,11,13,19-$туб сонлар, $4,6,8,9,10,12,14,15-$ мураккаб сонлар.

Таъриф. 1 дан бошқа умумий бўлувчиларга эга бўлмаган иккита натурал сонлар *ўзаро туб* сонлар дейилади.

Теорема. *$a-$бирдан фарқли натурал сон бўлсин. У ҳолда унинг бирдан катта энг кичик натурал бўлувчиси туб сондир.*

Исбот. m сони a сонининг бирдан катта энг кичик бўлувчиси бўлсин. Фараз қилайлик m сони туб бўлмасдан мураккаб сон бўлсин. Унда шундай p $(1 < p < m)$ сони топиладики, m сони p сонига бўлинади (яъни, $m \vdots p$). Бундан эса, $a \vdots p$ бўлиши келиб чиқади. Бундай бўлиши m сонининг энг кичиклигига зид. Зиддият фаразнинг нотўғри эканлигини ҳамда m сони a сонининг 1 дан катта энг кичик туб бўлувчиси эканлигини тасдиқлайди.

Хулоса. Бу теоремадан, агар a мураккаб сон бўлса, a нинг албатта битта $\sqrt{a}$ дан катта бўлмаган туб бўлувчиси бор бўлиши келиб чиқади. Ҳақиқатдан ҳам, a мураккаб сон, p $(1 < p < a)$ эса унинг бирдан катта энг кичик туб бўлувчиси бўлсин. У ҳолда шундай q сон мавжудки, $a = pq \geq p^2$ ёки $p \leq \sqrt{a}$ эканлиги келиб чиқади.

Демак, бирдан катта a натурал сон туб сон бўлиши учун туб сонларнинг бирортасига ҳам бўлинмаслиги етарли. Масалан, 101 туб сон бўлиши ёки бўлмаслигини аниқлаш учун уни $\sqrt{101}$ дан кичик бўлган 2,3,5,7 туб сонларга бўлиб кўрамиз, 101 бу сонларнинг бирортасига ҳам бўлинмайди, шунинг учун 101 туб сон экан.

Агар c=91 бўлса, бу соннинг туб сон бўлиши ёки бўлмаслигини аниқлашда $\sqrt{c} = \sqrt{91} = 9,...$ гача, яъни, ушбу сонни 9 сонигача бўлган туб сонларга, аниқроғи 2, 3, 5, 7 сонларга бўлиб кўрамиз. Биз $91 = 7 \cdot 13$ эканлигини топамиз. Демак, 91 сони туб сон эмас мураккаб сон экан.

1-масала. Агар туб p, q сонлар учун $x^2 - px + q = 0$ квадрат тенглама иккита турли бутун ечимга эга бўлса, p, q лар топилсин.

Ечиш: Тенгламанинг ечимлари $x_1 < x_2$ шартни қаноатлантирсин. Виет теоремасига кўра, $p = x_1 + x_2$, $q = x_1 x_2$. Шартга кўра q – туб сон бўлгани учун охирги тенгликдан $x_1 = 1$ бўлади ва бундан эса $q = x_2$, $p = 1 + x_2$ – иккита кетма – кет туб сон эканлиги келиб чиқади. Бу эса фақат q=2, p=3 бўлгандагина ўринли.

2-масала. 2320 ва 2350 сонлари орасида жойлашган барча туб сонларни топинг.

Ечиш: Ечимни соддалаштириш мақсадида 2321 дан 2349 гача бўлган сонлар қаторидан охирги рақами жуфт, 0 ва 5 рақамлари

билан тугаган сонларни ёзмаслик мумкин, чунки бу сонлар туб эмас. Демак,

$$\begin{matrix} 2321, 2323, 2327, 2329, 2331, 2333, \\ 2337, 2339, 2341, 2343, 2347, 2349. \end{matrix} \qquad (1)$$

Бу сонлар қаторидан 3 га бўлинадиганларни ўчирамиз (бунда 3 га бўлиниш аломатидан фойдаланамиз). Бу сонлар: 2331, 2337, 2343, 2349.

Қолган сонлар: 2321, 2323, 2327, 2329, 2333, 2339, 2341, 2347.

Бу қаторда 5 га каррали сон бўлмаганлиги сабабли 7 га каррали сонларни ўчирамиз. Бу қуйидагича амалга оширилади. Қатордаги биринчи сонни 7 га бўламиз:

$$2321 = 7 \cdot 331 + 4.$$

Қолдиқ 4 сони, ушбу сондан 7 сонигача 3 етишмайди, демак 7 га каррали сон натурал сонлар қаторидаги 2321 дан кейинги учинчи сонлиги келиб чиқади, яъни 2324 ва кейинги барча 7 га каррали сонлар: 2331, 2338, 2345. Ушбу сонларни ҳам (1) қатордан ўчирамиз.

Энди навбатдаги туб сон – 11 га каррали сонни аниқлаймиз, яъни $2321 \vdots 11 = 211$ эканлигини аниқлашимиз мумкин. Бундан кейин келадиган 11 га каррали сонлар 2332, 2343 сонларини ҳам (1) қатордан ўчирамиз.

Навбатдаги 13 га каррали сонларни топамиз: қолган сонлардан биринчи сон 2323 ни 13 га бўламиз:

$$2323 = 13 \cdot 178 + 9.$$

Демак, 13 га каррали сон натурал сонлар қаторида 2323 дан тўртта кейин келган 2327 сонидир. Бу сонни ҳам (1) қатордан ўчирамиз. 13 га бўлинадиган кейинги сон 2340, бу сон ўчирилган. $\sqrt{2350} < 49$ бўлганлиги сабабли бу жараённи то 47 туб сонгача давом эттириш керак. 2329 – 17 га каррали, 2323 – 23 га каррали сонлар.

Натижада қолган 2333, 2339, 2341, 2347 сонлар туб сонлар бўлади.

6-масала. $2^{18} + 3^{18}$ йиғиндини туб кўпайтувчиларга ажратинг.

Ечиш: $2^{18} + 3^{18} = (2^2 + 3^2)(2^4 - 2^2 3^2 + 3^4)(2^{12} - 2^6 \cdot 3^6 + 3^{12}) =$
$= 13 \cdot 61(2^{12} - 2^6 \cdot 3^6 + 3^{12}) = 13 \cdot 61 \cdot 488881 = 13 \cdot 61 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 181.$

7-масала. $\underbrace{111\ldots1}_{100\text{та}}\underbrace{222\ldots2}_{100\text{та}}$ сони иккита кетма – кет натурал соннинг кўпайтмасидан иборат эканини исботланг.

Ечиш:

$$\underbrace{111\ldots1}_{100та}\underbrace{222\ldots2}_{100та}=\underbrace{111\ldots1}_{100та}\cdot10^{100}+2\cdot\underbrace{111\ldots1}_{100та}=\underbrace{111\ldots1}_{100та}(10^{100}+2)$$

$10^{100}+2$ сонининг рақамлари битта 1, битта 2 ва қолгани ноллардан иборат, демак ушбу сон 3 га бўлинади.

$$10^{100}+2=\underbrace{999\ldots9}_{100та}+3=3\cdot\underbrace{333\ldots3}_{100та}$$

шундай қилиб,

$$\underbrace{111\ldots1}_{100та}\underbrace{222\ldots2}_{100та}=\underbrace{111\ldots1}_{100та}\cdot3\cdot\underbrace{333\ldots4}_{100та}=\underbrace{333\ldots3}_{100та}\cdot\underbrace{333\ldots4}_{100та}$$

Шу мисолни ихтиёрий чекли $n\in N$ учун умумлаштириш мумкин.

1.2-§. Бутун сонлар халқасида бўлиниш муносабати ва унинг хоссалари. Евклид алгоритми. Қолдиқли бўлиш ҳақида теорема.

$(Z,+,\cdot)$ - бутун сонлар халқаси бўлиб, $a,b\in Z$ бўлсин.

Маълумки, агар шундай c сони $(c\in Z)$ топилиб, $a=b\cdot c$ бўлса, у ҳолда a сони b сонига бўлинади дейилади. Бўлинишга нисбатан хоссалар:

1) $\forall(a\in Z)a\vdots a$, чунки $a=a\cdot1$

2) $a\vdots b\wedge b\vdots c\Rightarrow a\vdots c$,

3) $a\vdots b\wedge b\vdots c\Rightarrow(a\pm b)\vdots c$

4) $a\vdots b\wedge b\not\vdots c\Rightarrow(a\pm b)\not\vdots c$

5) $a\vdots c$, унда $\forall(b\in Z)(ab)\vdots c$

6) $a\vdots b\Rightarrow(-a)\vdots b\wedge a\vdots(-b)\wedge(-a)\vdots(-b)$

7) $\forall(a\in Z)a\neq0, a\not\vdots 0$

8) $a\neq0\wedge a\vdots b\Rightarrow|a|\geq|b|$

Таъриф. a бутун сонни b га $(b\neq0)$ қолдиқли бўлиш деб, шундай бутун $q,r\in Z$ сонларига айтиладики, қуйидаги тенглик бажарилади:

$$a=bq+r, 0\leq r\lhd|b|.$$

Таърифни инобатга олган ҳолда, қуйидаги муҳим теоремани келтирамиз.

1 - теорема. Ихтиёрий $a,b\in Z, b\neq0$ учун, a ни b га доимо бир қийматли қолдиқли бўлиш мумкин.

Исбот. а) $b\in Z$, $b>0$. b га каррали сонларни ўсиш тартибида жойлаштириб чиқамиз: $\ldots, b(-2), b(-1), b0, b1, b2, \ldots$

$bq\in Z$ бўлсин. Энг катта бутун сон a дан катта бўлмасин. У ҳолда, $b\cdot q\leq a<b(q+1)$ ва $0\leq a-b\cdot q<b$. $r=a-b\cdot q$ орқали белгилаймиз, унда: $a=b\cdot q+r$, $0\leq r<b$.

b) $b\in Z, b<0$ хоссасини кўриб чиқамиз. У ҳолда $-b>0$. а) хоссага мувофиқ, шундай $q,r\in Z$ мавжуд, $a=(-b)\cdot q+r$, $0\leq r<-b$ ёки $a=b\cdot(-q)+r$, $0\leq r<-b$.

Ягоналиги. q, r, q_1, r_1 бутун сонлар бўлсин, бунда $a=b\cdot q+r$ ва $a=b\cdot q_1+r_1$, $0\leq r\lhd|b|$, $0\leq r_1\lhd|b|$.

Бу нисбатлардан:

$$b(q-q_1)=r_1-r\Rightarrow|b||q-q_1|=|r_1-r| \qquad (1.1)$$

га эга бўламиз.

Қолдиқли бўлишнинг таърифидан $0\leq|r_1-r|<|b|$ бўлиши келиб чиқади.

Агар $q\neq q_1$ деб фараз қилинса, (1.1) $\Rightarrow|r_1-r|\geq|b|$ бўлганлиги сабабли қарама-қарши фикрга келдик. Демак, $q=q_1$. У ҳолда, (1.1) дан келиб чиқади, $r=r_1$.

2 га каррали бутун сонлар (яъни, $2k$, кўринишдаги сонлар) *жуфт*, 2 га каррали бўлмаган бутун сонлар (яъни, $2k+1$, кўринишдаги сонлар) эса *тоқ* сонлар деб юритилади.

Бунда қуйидагилар ўринли:

а) иккита тоқ сонларнинг йиғиндиси ва айирмаси жуфт, кўпайтмаси эса тоқ сон бўлади.

б) иккита жуфт сонларнинг йиғиндиси, айирмаси ва кўпайтмаси жуфт сон бўлади.

1-масала. $2+a$ ва $35-b$ сонлар 11 га бўлинса, $a+b$ сон ҳам 11 га бўлинишини исботланг.

Ечиш: *b)* $a+b=(2+a)-(35-b)+33$ бўлгани учун $a+b$ сон 11 га бўлинади.

2-масала. Учта кетма-кет натурал сонлардан биттаси 3 га бўлинишини исботланг.

Ечиш: Натурал сонларни $m, m+1, m+2$ шаклида ифодалаш мумкин. Агар $m=2k-1$ бўлса, у ҳолда кетма-кет сонларнинг бири жуфт, қолган иккиси тоқ сонлар бўлади. У ҳолда жуфт сон учга каррали ёки тоқ сонлардан бири 3 га каррали бўлади. Агар $m=2k$ бўлса, бири тоқ, қолган иккиси жуфт бўлади. У ҳолда тоқ сон учга каррали ёки жуфт сонлардан бири 3 га каррали бўлади.

3-масала. 5 та кетма – кет натурал сонларнинг кўпайтмаси 120 га бўлинишини исботланг.

Ечиш: Берилган сонлардан камида биттаси 5 га, камида биттаси 3 га, камида иккитаси 2 га бўлиниши аниқ.

Бундан ташқари, 2 га бўлинадиган сонлардан камида биттаси 4 га бўлингани учун кўпайтма 5·3·2·4=120 га бўлинади.

4-масала. Тўртта кетма-кет жойлашган бутун сонлар кўпайтмасига бир қўшилганда тўлиқ квадрат ҳосил бўлишини исботланг.

Ечиш: $m-1, m, m+1, m+2$ –тўртта кетма-кет келадиган бутун сонлар бўлсин. У ҳолда

$$(m-1)m(m+1)(m+2)+1=$$

$$=(m-1)(m+2)(m^2+m)+1=(m^2+m-1)^2$$

5-масала. $11^{10}-1$ сонни 100 га бўлинишини исботланг.

Ечиш: Ньютон биномини қўллаймиз:

$(1+10)^{10}=1+C_{10}^1\cdot 10+C_{10}^2\cdot 10^2+C_{10}^3\cdot 10^3+...+10^{10}$.

Бундан

$(1+10)^{10}-1=10\cdot 10+C_{10}^2\cdot 10^2+C_{10}^3\cdot 10^3+...+10^{10}$ ҳар бир қўшилувчи 100 га бўлинади.

1.3- §. Энг катта умумий бўлувчи ва Энг кичик умумий каррали. Евклид алгоритми

Таъриф. Агар $a_i:\delta(i=\overline{1,n})$ бўлса, у ҳолда $\delta\in Z$, $a_1,a_2,\dots a_n$ бутун сонларнинг умумий бўлувчиси дейилади.

Таъриф. Агар $d\in Z$ сони $a_1,a_2,\dots a_n$ бутун сонларнинг умумий бўлувчиси бўлиб, шу сонларнинг ҳар қандай умумий бўлувчисига

бўлинса, у ҳолда d сонига $a_1,a_2,\dots a_n$ сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси (ЭКУБ) деб аталади.

Ушбу $a_1,a_2,\dots a_n$ бутун сонлар ЭКУБининг фақат мусбат қийматини кўриб чиқамиз ва уни $(a_1,a_2,\dots a_n)$ ёки ЭКУБ $(a_1,a_2,\dots a_n)$ деб белгилаймиз.

Лемма. Агар $a=b\cdot q+r$ бўлса, у ҳолда ЭКУБ(a,b) = ЭКУБ(b,r).

Икки бутун соннинг ЭКУБини топиш масаласини ечамиз.

$a,b\in Z, a\nmid b$ бўлсин. a ни b га қолдиқли бўламиз: $a=b\,q_0+r_1,\ 0<r_1<|b|$.

Энди b ни $b=r_1q_1+r_2,\ 0<r_2<r_1$ га бўламиз ва ҳоказо.

Бу кетма-кет бўлиш жараёнини нолли қолдиқ ҳосил қилмагунча давом эттирамиз. Чунки $r_1>r_2>r_3\dots$ a, $b(a\nmid b, b\nmid a)$ натурал сонларининг кетма-кетлиги тугалланмас бўлиши мумкин эмас, зеро $n\in N$, шундай натурал сон борки, у $r_{n-1}\vdots r_n$. Натижада тенглик занжирини ҳосил қиламиз:

$$\left[\begin{array}{ll} a=bq_0+r_1, & 0<r<|b| \\ b=r_1q_1+r_2, & 0<r_2<r_1 \\ r_1=r_2q_2+r_3, & 0<r_3<r_2 \\ r_{n-2}=r_{n-1}q_{n-1}+r_n,\ 0<r_n<r_{n-1} & \\ r_{n-1}=r_nq_n,\ r_{n+1}=0 & \end{array}\right. \tag{1.2}$$

(1.2) тенгликдан $(a,b)=(b,r_1)=(r_1,r_2)=\dots=(r_n,0)=r_n$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, қуйидаги теоремага келамиз.

1 - Теорема. a, b (a ∤b, b ∤a) бутун сонларнинг ЭКУБи a, b бутун сонлар учун Евклид алгоритмида охирги ноли бўлмаган қолдиққа тенг.

Мисол. 816,-187 бутун сонларнинг энг катта умумий бўлувчисини топиш.

Ечиш: 816,-187 бутун сонларга Евклид алгоритмини қўллаймиз:

$$\begin{array}{r|l} -\,816 & -187 \\ 748 & -4 \\ \hline -\,-187 & 68 \\ -204 & -3 \\ \hline -\,68 & 17 \\ 68 & 4 \\ \hline 0 & \end{array}$$

кўриниб турибдики,

$816=-187\cdot(-4)+68, \qquad -187=68\cdot(-3)+17, 68=17\cdot 4$

Нолдан фарқли қолдиқ 17 га тенг. Хусусан, (816,-187)=17.

2 - Теорема. $a_i \in Z\left(i=\overline{1,n}\right)$ бўлсин. Агар,

$(a_1,a_2)=d_1,(a_3,d_1)=d_2,(a_4,d_2)=d_3,\ldots,(a_n,d_{n-2})=d_{n-1}$ бўлса, у ҳолда $(a_1,a_2,...,a_n)=d_{n-1}$ тенглик ўринли бўлади.

Бутун сонлар ЭКУБи қуйидаги хоссаларга эга:

1) катталигига кўра энг катта мусбат умумий бўлувчи $(a_1,a_2,...,a_n)$ шу сонларнинг ЭКУБи ҳисобланади;

2) $a,b\in Z, m\in N$, бўлсин, у ҳолда $(am,bm)=m(a,b)$;

3) агар $a:m$, $b:m$, бўлса, у ҳолда, $\left(\frac{a}{m},\frac{b}{m}\right)=\frac{(a,b)}{m}$

4) агар $d=(a,b)$, бўлса, у ҳолда, $\exists(x,y\in Z), ax+by=d$.

Ўзаро туб бутун сонлар. Энг кичик умумий каррали бутун сонлар

Таъриф. $a_1,a_2,...,a_n$ бутун сонлар ўзаро туб деб аталади, агар $(a_1,a_2,...,a_n)=1$ бўлса.

Ўзаро туб сонларнинг хоссалари

1°. $a,b\in Z$, $(a,b)=1 \Leftrightarrow \exists(x,y\in Z)ax+by=1$.

Исбот. *а)* Шартга кўра, $(a,b)=1$. ЭКУБнинг 4-хоссасига кўра, $\exists(x,y\in Z)ax+by=1$.

б) Шартга кўра, $ax+by=1,(x,y\in Z)$. $(a,b)=d$ бўлсин. $ax+by=1\Rightarrow 1\vdots d, d\in N\wedge 1\vdots d\Rightarrow d=1$. Бундан кўринадики, a ва b ўзаро бутун туб сонлар.

Хулоса. Агар ЭКУБ $(a,b)=1\Rightarrow a\vdots a_1, b\vdots b_1\Rightarrow(a_1,b_1)=1$.

Энг кичик умумий каррали бутун сонлар

Таъриф. a ва b сонларининг мусбат умумий карралилари ичида энг кичиги шу сонларнинг энг кичик умумий карралиси дейилади ва у $[a,b]$ орқали белгиланади.

Агар $k\vdots a_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ бўлса, $k\in Z$ бутун сони $a_1,a_2,...,a_n$ сонларга умумий каррали бутун сон деб аталади.

Агар $m\in Z$ бутун сон $a_1,a_2,...,a_n$ бутун сонлар учун умумий каррали сонларнинг энг кичиги бўлиб, ҳар қандай умумий каррали бутун сон m га бўлинса, у ҳолда m сони $a_1,a_2,...,a_n$ сонларининг енг кичик умумий карралиси(ЭКУК) деб аталади.

Бутун сонларнинг ЭКУКини фақат мусбат қийматини кўриб чиқамиз ва ЭКУК$(a_1,a_2,...,a_n)$ ёки $[a_1,a_2,...,a_n]$ белгилаймиз.

1 - Теорема. $\forall(a,b\in N),[a,b]=\frac{a\cdot b}{(a,b)}$.

1-хулоса. $\forall(a,b\in Z), a\neq 0; b\neq 0$ учун шу сонларнинг ЭКУКи мавжуд.

2-хулоса. a ва b $(a,b\in Z)$ сонларининг энг кичик мусбат умумий каррали сони шу бутун сонларнинг ЭКУКи ҳисобланади.

Бутун сонларнинг ЭКУКи хоссалари

1) $a,b\in Z, m\in N$ бўлса, у ҳолда $[am,bm]=m[a,b]$;

2) агар $a\vdots m\wedge b\vdots m$ бўлса, у ҳолда $\left[\frac{a}{m},\frac{b}{m}\right]=\frac{[a,b]}{m}$;

3) агар $d=(a,b)$ бўлса, у ҳолда $\exists(x,y\in Z), ax+by=d$.

Хоссалар

a) p туб сон бўлса, ихтиёрий натурал m сон учун $(p, m)=1$ бўлади;

$b) d=(m,n),\ m=dm', n=dn'$ бўлса , у ҳолда $(m',n')=1$ бўлади;

$c) d=(m,n),\ m=d'm', n=d'n'$ ва $(m',n')=1$ бўлса, $d=d'$ бўлади;

d) агар $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ ва $n=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_k^{\beta_k}$ бўлса (бу ерда $p_1,p_2,\dots,p_k-$ туб сонлар, $\alpha_i,\beta_i\ge 0$), у ҳолда

$$(m,n)=p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)}p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)}\dots p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}$$

тенглик ўринли;

e) a ва b сонларининг энг катта умумий бўлувчиси шу сонларнинг барча умумий бўлувчиларига бўлинади.

Натурал соннинг бўлувчилар сони ва улар йиғиндиси

Ихтиёрий натурал a сон учун $\tau(a)$ ва $S(a)$ функциялар мос равишда a соннинг натурал бўлувчилари сони ва уларнинг йиғиндисини ифодалайди. Бу функциялар учун қуйидаги формулалар ўринли:

$$\tau(a)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_n+1)=\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i+1)$$

$$S(a)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_n^{\alpha_n+1}-1}{p_n-1}=\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}$$

бу ерда: $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}=\prod_{i=1}^{n}p_i^{\alpha_i}$ - a соннинг каноник ёйилмаси.

Бу функциялар мултипликатив, яъни агар $(a,b)=1$ бўлса, $\tau(ab)=\tau(a)\,\tau(b)$ ва $S(ab)=S(a)S(b)$ тенгликлар ўринли.

Эйлер функцияси.

Таъриф. a натурал сондан катта бўлмаган ва у билан ўзаро туб бўлган сонлар сонига, *Эйлер* функцияси дейилади ҳамда у $\varphi(a)$ орқали белгиланади.

$\varphi(1)=1$ деб қабул қилинган. Эйлер функцияси:

$$\varphi(a)=a\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_n}\right)=$$
$$=\left(p_1^{\alpha_1}-p_1^{\alpha_1-1}\right)\left(p_2^{\alpha_2}-p_2^{\alpha_2-1}\right)\dots\left(p_n^{\alpha_n}-p_n^{\alpha_n-1}\right),$$

формула кўринишида ифодаланади. Бу ерда $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}$ – соннинг каноник ёйилмаси.

Хусусан,

$$\varphi(p^a)=p^a-p^{a-1}, \varphi(p)=p-1.$$

Эйлер функцияси мултипликатив, яъни ўзаро туб $a,b,\dots,k$ сонлар учун

$\varphi(ab\dots k)=\varphi(a)\varphi(b)\dots\varphi(k)$ шарт бажарилади.

1-масала. Иккита кетма-кет жуфт сонларнинг ЭКУБи 2 га, тоқ сонларнинг ЭКУБи эса 1 га тенглигини исботланг.

Ечиш: $(2n, 2n+2)=2(n, n+1)=2$.

$2n+3=(2n+1)\cdot1+2$

$2n+1=2\cdot n+1$

$2=1\cdot2$, бундан $(2n+1, 2n+3)=1$.

2-масала. $p>3$ туб сон 6 га бўлинганда ҳосил бўлган қолдиқ 1 ёки 5 га тенг бўлишини исботланг.

Ечиш: $p>3$ сон 6 га бўлинганда 2 ва 4 қолдиқлар ҳосил бўла олмайди, акс ҳолда p сон жуфт бўлар эди. $p>3$ сон 6 га бўлинганда 3 қолдиқ ҳам ҳосил бўла олмайди, акс ҳолда p сон 3 га бўлинар эди. Демак, $p>3$ туб сон 6 га бўлинганда ҳосил бўлган қолдиқ ёки 1 га ёки 5 га тенг бўлиши мумкин.

Натижа. $p>3$ туб сон $6n\pm1$ кўринишга эга.

3-масала. $3=(51, 21)$ ни $51x+21y$ шаклда ифодаланг.

Ечиш: $51=21\cdot2+9$, $21=9\cdot2+3$. Бундан

$3=21-9\cdot2=21-(51-21\cdot2)2=21\cdot5-51\cdot2$. Шунда, $x=-2$, $y=5$

4-масала. 1428 ва 2765 сонларининг энг катта умумий бўлувчиси ва энг кичик умумий карралисини Евклид алгоритмидан фойдаланиб топинг:

Ечиш:

$1428=2765\cdot0+1428;$

$2765=1428\cdot1+1337;$

$1428=1337\cdot1+91;$

$1337=91\cdot14+63;$

$$91=63\cdot 1+28;$$
$$63=28\cdot 2+7;$$
$$28=7\cdot 4+0;$$

Демак, (1428, 2765)=7.

Бу сонларнинг умумий карралисини топиш учун эса $[a,b]\cdot(a,b)=a\cdot b$ формуладан фойдаланамиз.

$$[1428,2765]=\frac{1428\cdot 2765}{7}=395\cdot 1428=564060.$$

5-масала. Учта кетма-кет натурал сонларнинг ЕКУБ ва ЕКУКини топинг.

Ечиш. $(n, n+1, n+2)=((n, n+1), n+2)=(1,n+2)=1.$

$$[n,n+1,n+2]=\left[[n,n+1],n+2\right]=\left[n(n+1),n+2\right]=$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{(n(n+1),n+2)}=\frac{n(n+1)(n+2)}{(n,n+2)};$$

нинг жуфт-тоқлигига қараб 2 ёки 1 бўлади.

Демак, агар n тоқ бўлса, $[n, n+1, n+2]=n(n+1)(n+2)$ ва агар n жуфт бўлса, $[n,n+1,n+2]=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{2}$.

6-масала. $\begin{cases} x+y=150 \\ (x,y)=30 \end{cases}$ системанинг натурал ечимларини топинг.

Ечиш: $(x, y)=30$ қуйидаги системага тенг кучли.

$$\begin{cases} x=30u \\ y=30v \\ (u,v)=1. \end{cases}$$

Бундан берилган системанинг биринчи тенгламаси $u+v=5$ кўринишга келади ва $u=1,2,3,4$ қийматлар қабул қилади. Демак, $x=30, 60, 90, 120$ га тенг бўлиши мумкин. $y=150-x$ дан $y=120, 90, 60, 30$.

7-масала. $\dfrac{n^4+4n^2+3}{n^4+6n^2+8}$ каср бутун n ларда қисқармас каср эканини исботланг.

Ечиш: $\dfrac{n^4+4n^2+3}{n^4+6n^2+8}=\dfrac{(n^2+1)(n^2+3)}{(n^2+2)(n^2+4)}$ n^2+2 сон n^2+1 ва n^2+3 билан ўзаро туб, n^2+4 сон эса n^2+3 билан ўзаро туб. n^2+1 билан бу касрнинг умумий бўлувчиси $3=(n^2+4)-(n^2+1)$ бўлиши мумкин. Аммо n^2+1 сони 3 га бўлинмайди. Шундай қилиб, касрнинг сурат ва махражи ўзаро туб.

8-масала. 2002 сонинг бўлувчилар сони ва уларнинг йиғиндисини топинг.

Ечиш: $2002=2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$, бундан

$$\tau(2002)=(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)=16$$
$$S(2002)=\frac{2^{1+1}-1}{2-1}\cdot\frac{7^{1+1}-1}{7-1}\cdot\frac{11^{1+1}-1}{11-1}\cdot\frac{13^{1+1}-1}{13-1}=3\cdot 8\cdot 12\cdot 14=4032.$$

9-масала. Барча m, n бутун сонлар учун $[m,n]\cdot(m,n)=|mn|$ тенгликни исботланг.

Ечиш: Юқорида кўрсатилган таъриф ва хоссаларга кўра, $[a,b]=\left[|a|,|b|\right]$ бўлгани учун фақат натурал m,n сонлар учун исботлаймиз.

$m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ ва $n=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_k^{\beta_k}$ бўлсин (бу ерда, $n=1,2,\dots,n$ p_k – туб сонлар, $\alpha_i,\beta_i\ge 0$), у ҳолда

$$(m,n)=p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)}p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)}\dots p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}$$

ва

$$[m,n]=p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)}p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)}\dots p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}$$

тенгликлар ўринли. Бундан

$$(m,n)=p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)}p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)}p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)}p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)}\dots p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}=$$
$$=p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)+\max(\alpha_1,\beta_1)}p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)+\max(\alpha_2,\beta_2)}\dots p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)+\max(\alpha_k,\beta_k)}=$$
$$=p_1^{\alpha_1+\beta_1}p_2^{\alpha_2+\beta_2}\dots p_k^{\alpha_k+\beta_k}=mn$$

келиб чиқади.

1.4-§. Рационал сонларни чекли занжир каср кўринишда ифодалаш.

Икки номаълумли чизиқли тенгламалар. a ва b натурал сонлар учун Евклид алгоритми қуйидагича бўлсин:

$$a = bq_0 + r_1 \ 0 \le r_1 < b;$$
$$b = r_1q_1 + r_2, 0 \le r_2 < r_1;$$
$$r_1 = r_2q_2 + r_3, 0 \le r_3 < r_2;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n, 0 \le r_n < r_{n-1};$$
$$r_{n-1} = r_nq_n + r_{n+1}; r_{n+1} = 0;$$

Ҳар бир тенгликни бўлувчиларга бўлиб чиқамиз:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b}; \tag{1.3}$$

$$\frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1};$$
$$\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2}; \tag{1.4}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}}(n+1).$$

Натижада тенгликлар ҳосил бўлади.

У ҳолда, $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}$; (1.3) тенгликка (1.4) тенгликдаги $\frac{b}{r_1}$ қийматини қўйсак,

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{r_2}{r_1}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}$$

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{r_2}{r_1}}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}}$$

ифодага эга бўламиз. Бу жараённи давом эттирсак,

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3} + \cfrac{}{\ddots \cfrac{1}{q_n}}}}$$

тенглик келиб чиқади.

Бу ифода $\frac{a}{b}$ рационал соннинг *занжир касрга ёйилмаси* дейилади. “Занжир каср ” “узлуксиз каср ” деб ҳам аталади.

Занжир касрлар $[q_0, q_1, \dots q_n]$ кўринишида белгиланади.

1-масала.

$$\frac{120}{31} = 3 + \frac{27}{31} = 3 + \frac{1}{\frac{31}{27}} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{4}{27}} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{27}{4}}} =$$

$$= 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{3}{4}}} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{\frac{4}{3}}}} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}.$$

ёки $\frac{120}{31} = [3,1,6,1,3]$.

$\frac{a}{b} = [q_0, q_1, \dots, q_n]$ занжир каср берилган бўлсин. У ҳолда $[q_0, q_1, \dots, q_k], k \le n$ занжир каср k-муносиб каср дейилади ва $\frac{P_k}{Q_k}$ кўринишда белгиланади. $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{a}{b}$ бўлиши аён.

Муносиб касрлар қуйидаги хоссаларга эга. Агар $k \ge 2$ бўлса,

1. $P_k = P_{k-1} \cdot q_k + P_{k-2}, Q_k = Q_{k-1} \cdot q_k + Q_{k-2}$;
2. $\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} \dots < \frac{a}{b} = \frac{P_n}{Q_n} < \dots < \frac{P_5}{Q_5} < \frac{P_3}{Q_3} < \frac{P_1}{Q_1}$;

3. $\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{Q_k \cdot Q_{k-1}}$;

4. $P_k \cdot Q_{k-1} - Q_k \cdot P_{k-1} = (-1)^{k-1}$.

Бу хоссаларнинг исботи математик индукция методини қўллаш ёрдамида бевосита таърифдан келиб чиқади.

Масалан, 1– хоссанинг исботини кўриб чиқайлик:

$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{q_0}{1}, \frac{P_1}{Q_1} = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1}$; бўлгани учун $P_0 = q_0, Q_0 = 1; P_1 = q_0 \cdot q_1 + 1, Q_1 = q_1$ бўлиши равшан. У ҳолда, k=2 учун

$$\frac{P_2}{Q_2} = q_0 + \frac{1}{\frac{q_1 q_2 + 1}{q_2}} = q_0 + \frac{q_2}{q_1 q_2 + 1} = \frac{q_0 q_1 q_2 + q_0 + q_2}{q_1 q_2 + 1} =$$

$$= \frac{(q_0 q_1 + 1) q_2 + q_0}{q_1 q_2 + 1} = \frac{P_1 \cdot q_2 + P_0}{Q_1 \cdot q_2 + Q_0}$$

Бундан $P_2 = P_1 \cdot q_2 + P_0; Q_2 = Q_1 \cdot q_2 + Q_0$ ҳосил бўлади.

Фараз қилайлик, k натурал сон учун 1-хосса тўғри бўлсин. 1-хоссани $k+1$ учун исбот қиламиз. Яъни, $\frac{P_k}{Q_k} = \frac{P_{k-1} \cdot q_k + P_{k-2}}{Q_{k-1} \cdot q_k + Q_{k-2}}$; бўлсин. $\frac{P_k}{Q_k}$ муносиб касрдан $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ муносиб касрни ҳосил қилиш учун q_k ни $q_k + \frac{1}{q_{k+1}}$ билан алмаштириш кифоя.

Шунинг учун

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = \frac{P_{k-1}(q_k + \frac{1}{q_{k+1}}) + P_{k-2}}{Q_{k-1}(q_k + \frac{1}{q_{k+1}}) + Q_{k-2}} = \frac{P_{k-1} q_k q_{k+1} + P_{k-1} + q_{k+1}}{Q_{k-1} q_k q_{k+1} + Q_{k-1} + Q_{k-2} \cdot q_{k+1}} =$$

$$= \frac{(P_{k-1} q_k + P_{k-2}) q_{k+1} + P_{k-1}}{(Q_{k-1} q_k + Q_{k-2}) q_{k+1} + Q_{k-1}} = \frac{P_k \cdot q_{k+1} + P_{k-1}}{Q_k \cdot q_{k+1} + Q_{k-1}};$$

Демак, $P_{k+1} = P_k q_{k+1} + P_{k-1}; Q_{k+1} = Q_k q_{k+1} + Q_{k-1}$.

Қолган хоссаларни мустақил исбот қилиб кўринг.

4 - хоссадан $(P_k, Q_k) = 1$, яъни, муносиб касрнинг сурат ва махражи ўзаро туб сон бўлиши келиб чиқади. Чунки $P_k Q_{k-1} - Q_k P_{k-1} = (-1)^{k-1}$ сон P_k ва Q_k сонларнинг энг катта умумий бўлувчисига бўлинади.

Демак, $\frac{a}{b}$ каср қисқартирилмаган бўлса, у ҳолда $\frac{a}{b}$ ни занжир касрга ёйиб қисқартириш мумкин.

2-масала. $\frac{1341}{2013}$ касрни занжир касрга ёйилик:

$$1341 = 2013 \cdot 0 + 1341$$
$$2013 = 1341 \cdot 1 + 672$$
$$1341 = 672 \cdot 1 + 669$$
$$672 = 669 \cdot 1 + 3$$
$$669 = 3 \cdot 223$$

У ҳолда

$$\frac{1341}{2013} = [0,1,1,1,3] = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{223}}}} = \frac{447}{671}$$

Агар $(a,b) = 1$ бўлса, яъни $\frac{a}{b}$ каср қисқармас каср бўлса, у ҳолда $Q_k \cdot P_{k-1} - P_k \cdot Q_{k-1} = (-1)^{k-1}$ тенгликдан $Q_n \cdot P_{n-1} - P_n \cdot Q_{n-1} = (-1)^{n-1}$ ёки $b \cdot P_{n-1} - a \cdot Q_{n-1} = (-1)^{n-1}$ ҳосил бўлади. Бундан $a \cdot \left|Q_{n-1} \cdot (-1)^n\right| + b \cdot \left|P_{n-1} \cdot (-1)^{n-1}\right| = 1$ тенгликка эга бўламиз. Уни c га кўпайтирсак, $a \cdot \left|c \cdot Q_{n-1} \cdot (-1)^n\right| + b \cdot \left|c \cdot P_{n-1} \cdot (-1)^{n-1}\right| = c$ тенглик ҳосил бўлади. Демак, $(a,b) = 1$ бўлганда

$$ax + by = c \qquad (1.5)$$

тенгламанинг ечимларидан бири

$$\begin{cases} x_0 = c \cdot Q_{n-1} \cdot (-1)^n \\ y_0 = c \cdot P_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} \end{cases} \qquad (1.6)$$

ҳосил бўлади. (1.6) тенгламанинг умумий ечими

$$\begin{cases} x = x_0 + b\cdot m \\ y = y_0 - a\cdot m \end{cases} \qquad (1.7)$$

формула билан ҳисобланади.

3-масала. $25x-16y=9$ тенгламани бутун сонлар тўпламида ечинг.

$$\frac{25}{16}=1+\frac{9}{16}=1+\frac{1}{\frac{16}{9}}=1+\frac{1}{1+\frac{7}{9}}=$$

$$=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{9}{7}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{7}}}=$$

$$=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{7}{2}}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}}}$$

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}=\frac{11}{7}.$$ Демак, $\frac{P_1}{Q_1}=\frac{11}{7}.$ Топилган

қийматларни (1.7) формулага қўйиб, $\begin{cases} x=9Q_1(-1)^5+16m, \\ -y=9P_1(-1)^4-25m, \quad m\in Z, \end{cases}$

$$\begin{cases} x=9\cdot(-7)+16m=-63+16m, \\ -y=9\cdot 11-25m=99-25m, \quad m\in Z. \end{cases}$$

Умумий ечимни топамиз. Хусусий ечим сифатида $\begin{cases} x=-63 \\ y=-99 \end{cases}$ ни олиш мумкин.

Текшириш: $25\cdot(-63)-16\cdot(-99)=-1575+1584=9$

4-масала. Битта қутичада пашшалар билан чумолилар бор. Уларнинг оёқлари сони 76 та. Пашшанинг 8 тадан оёғи, чумолининг эса 6 тадан оёғи бор бўлса, қутичада нечта пашша ва чумоли бор?

Ечиш: Фараз қилайлик, қутичада x дона пашша ва y дона чумоли бор. Масала шартига кўра, 8x + 6y = 76 ёки 4x+3y=38. Бундан $\frac{4}{3}=1+\frac{1}{3}$.

Демак, $\begin{cases} x=38+3m, \\ y=-38-4m, \quad m\in Z, \end{cases}$

Лекин масала шартига кўра, x > 0, y > 0 . Топилган ечимларнинг мусбатларини олишимиз керак. Яъни, $\begin{cases} 38+3m\ge 0 \\ -38-4m\ge 0 \quad m\in Z, \end{cases}$ Бундан $-\frac{38}{3}\le m\le -\frac{19}{2}$, ундан эса $-12\frac{2}{3}\le m\le -9\frac{1}{2}$ келиб чиқади. Агар, m=-10, бўлса, x=8; y=2; агар m=-11, бўлса, x=5; y=6; агар m=-12 бўлса, x=2; y=10 бўлади. Демак, масала ечими қуйидагилардан иборат:

1) $\begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=2 \\ y=10 \end{cases}$

Иррационал сонларни занжир каср кўринишида ифодалаш. Агар α иррационал сон берилган бўлса, унинг бутун қисмини ажратиб, қуйидагича ёзиб олишимиз мумкин: $\alpha=[\alpha]+\{\alpha\}$. Бу ерда $[\alpha]$–берилган α иррационал соннинг бутун қисми, $\{\alpha\}$–берилган α иррационал соннинг каср қисми бўлиб, $[\alpha]\ge 1,\ 0<\{\alpha\}<1$ муносабатлар ўринли бўлади. Агар $[\alpha]$ бутун сонни $\frac{1}{\alpha_1},(\alpha_1>1)$ кўринишда ёзиб олсак, $\alpha=q_0+\frac{1}{\alpha_1}$ тенглик ҳосил бўлади.

Энди α_1 учун юқоридаги жараённи такрорлаб, α_1 ни $\alpha_1=q_1+\frac{1}{\alpha_2}$ кўринишида ёзиб оламиз ва ҳоказо:

$$\alpha_1=q_1+\frac{1}{\alpha_2},q_1=[\alpha_1],\alpha_2>1;$$

$$\alpha_2=q_2+\frac{1}{\alpha_3},q_2=[\alpha_2],\alpha_3>1.$$

Бу жараённи n марта такрорласак, $\alpha=\left[q_0,q_1,...,q_{n-1},\alpha_n\right]$ занжир каср ҳосил бўлади. Бу жараённи чексиз давом эттирсак, $\alpha=\left[q_0,q_1,...,q_{n-1},q_n,...\right]$ чексиз занжир каср ҳосил бўлади.

Агар α квадрат иррационаллик бўлса, яъни шундай a,b,c лар мавжуд бўлиб, $\alpha=\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$ кўринишда ёзиш мумкин бўлса, у ҳолда α ни чексиз даврий занжир каср сифатида ифода қилиш мумкин.

5-масала. $\sqrt{2}$ ни чексиз даврий занжир касрга ёйинг.

Ечиш:

$$\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2}-1}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=$$

$$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}=...=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+...}}}$$

Демак, $\sqrt{2}=\left[1,(2)\right]$

6-масала. 180 дан катта бўлмаган ва 5, 7, 11 ларга бўлинмайдиган сонлар сонини топинг.

Ечиш. n = 180 ва $p_1 = 5$, $p_2 = 7$, $p_3 = 11$ лар учун

$$B(180;5;7;11)=[180]-\left[\frac{180}{5}\right]-\left[\frac{180}{7}\right]-\left[\frac{180}{11}\right]+$$

$$+\left[\frac{180}{5\cdot 7}\right]+\left[\frac{180}{5\cdot 11}\right]+\left[\frac{180}{7\cdot 11}\right]-\left[\frac{180}{5\cdot 7\cdot 11}\right]=$$

$$=180-36-25-16+5+3+2-0=113.$$

1.5-§. Систематик сонлар ва улар устида амаллар

Рақамни номлаш ва ёзишнинг ҳар қандай усули сонлар системаси деб аталади.

Барча сонлар системаси икки синфга бўлинади: позицион ва нопозицион. Сонларни ёзишда ишлатиладиган белгиларга рақамлар дейилади. Позицион саноқ системасида берилган соннинг қиймати сонни тасвирловчи рақамларнинг эгаллаган ўрнига боғлиқ бўлади. Мисол сифатида, 0, 1, 2, 3,. . . , 9 араб

рақамларидан ташкил топган ўнлик саноқ системани қараш мумкин, улар сондаги тутган ўринларга қараб турли қийматни акс эттиради.

Нопозицион саноқ системаларида белгининг қиймати унинг эгаллаган ўрнига боғлиқ эмас. Мисол сифатида рим рақамлари саноқ системасини келтириш мумкин. Масалан, XX сонида X рақами, қаерда жойлашганига қарамасдан ўнлик саноқ системасидаги 10 қийматини англатади.

Нопозицион рим саноқ системаси 7 та белгидан иборат: I-1, V-5, X-10, L-50, C-100, D-500, M-1000. Бу саноқ системада сонларни ёзишда қуйидаги қоидаларга амал қилиш керак:

1. Агар кичик белги катта белги олдида турса, айирув амали бажарилади.
2. Агар катта белги кичик белги олдида турса, қўшув амали бажарилади.

Масалан: CLV-155, CM-900.

Позицион саноқ системаси

$M=\{0,1,2,...,q-1\}, q\in N, q\geq 2$ бўлсин.

Агар $a\in N$ сони ушбу

$$a=a_sq^s+a_{s-1}q^{s-1}+...+a_1q+a_0 \qquad (1.8)$$

кўринишда ифодаланган бўлса, у ҳолда a сони $q-$асосга кўра саноқ системасида ифодаранган дейилади.

Бунда, $a_i\in M\left(i=\overline{1,s}\right), a_0\neq 0$. $a\in N$ сонининг $q-$асосга кўра саноқ системасида ифодаси қисқача $a=\left(a_0a_{s-1}...a_0\right)_q$ кўринишида ифодаланади.

Масалан: $589_{12}=5\cdot 12^2+8\cdot 12+9=825$

Теорема. Ҳар қандай $a\left(a\in N\right)$ сонини $q-$асосга кўра саноқ системасида (1.8) ифодаси, бир қийматли аниқланади.

Исбот. (1.8) ни математик индукция методи ёрдамида исботлаймиз.

a) $a\in N, a<q$ бўлсин. У ҳолда (1.8) дан $a=a$ келиб чиқади.

b) $a\in N, a\geq q$ бўлсин. Фараз қилайлик, $\forall\left(m\in N\right), 1\leq m<a$ қаноатлантира олсин.

a ни q га қолдиқли бўламиз: $a = bq + a_0 \left(a_0 \in M\right)$, бунда $b < a$, у ҳолда фаразимизга индуктив ёндашиб, b ни қуйидагича тасвирлай оламиз:

$$b = a_s q^{s-1} + a_{s-1} q^{s-2} + ... + a_2 q + a_1, a_i \in M, a_s \neq 0\left(i = \overline{1,s}\right). \quad (1.9)$$

(1.8) га кўра, $a = bq + a_0 \left(a_0 \in M\right)$, тенгликдан:

$$a = a_s q^s + a_{s-1} q^{s-1} + ... + a_1 q + a_0 .$$

Математик индукция принципи ёрдамида (1.8) га эга бўлдик.

Ягоналиги. $\forall\left(a \in N\right)$ сон учун (1.8) нинг ўринли эканлигини математик индукция методи ёрдамида исботлаймиз.

a) $a \in N, a < q$ бўлсин. У ҳолда (1.8) дан $a = a$ келиб чиқади ва ягона.

b) $a \in N, a \geq q$ бўлсин. Фараз қилайлик, $\forall\left(m \in N\right), 1 \leq m < a$ (1.8) қаноатлантиради ва ягона.

$\forall\left(a \in N\right)$ бўлсин. (1.8) дан фарқлироқ q асосга кўра қуйидаги кўринишга келтира олишимиз мумкин:

$$a = b_s q^s + b_{s-1} q^{s-1} + ... + b_1 q + b_0 \quad (1.10)$$

(1.8) ва (1.10) дан:

$$a = (a_s q^{s-1} + a_{s-1} q^{s-2} + ... + a_1) q + a_0 = (b_s q^{s-1} + b_{s-1} q^{s-2} + ... + b_1) q + b_0 .$$

Бу тенгликдан, қолдиқли бўлиш теоремасига кўра:

$$a_0 = b_0, b = a_s q^{s-1} + a_{s-1} q^{s-2} + ... + a_1 = b_s q^{s-1} + b_{s-1} q^{s-2} + ... + b_1$$

$b < a$ дан индукция фаразимизга кўра $b) t = s, a_s = b_s, ..., a_1 = b_1$.

Шундай қилиб, $\forall a \in N$ учун (1.8) тенглик ягонадир.

Систематик сонлар устида амаллар

Ҳар хил сонлар системасида қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш амаллари 10 асосли саноқ системаси қоидасига кўра бажарилади.

Мисоллар:

1. Қўшиш, айириш.

$$\begin{array}{r} _{+}5768_9 \\ 6832_9 \\ \hline 13711_9 \end{array}, \quad \begin{array}{r} _{-}7632_9 \\ 6858_9 \\ \hline 663_9 \end{array}$$

2. Кўпайтириш, бўлиш.

$$\begin{array}{r} _{\times}465_8 \\ 76_8 \\ \hline _{+}3476_8 \\ 4163_8 \\ \hline 45326_8 \end{array} \quad \begin{array}{l} 30 = 3 \cdot 8 + 6 \\ 39 = 4 \cdot 8 + 7 \\ 28 = 3 \cdot 8 + 4 \\ 35 = 4 \cdot 8 + 3 \\ 46 = 5 \cdot 8 + 6 \\ 33 = 4 \cdot 8 + 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} _{-}33162_8 & 457_8 \\ \cline{2-2} 2753_8 & 56_8 \\ \cline{1-1} _{-}3432_8 & \\ 3432_8 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 35 = 4 \cdot 8 + 3 \\ 29 = 3 \cdot 8 + 5 \\ 23 = 2 \cdot 8 + 7 \\ 42 = 5 \cdot 8 + 2 \\ 35 = 4 \cdot 8 + 3 \\ 28 = 3 \cdot 8 + 4 \end{array}$$

Бир саноқ системасидан бошқа саноқ системасига ўтиш

a сони p асосга кўра, саноқ системасида бўлсин. a сонини q асосга кўра саноқ системасида ёзиш талаб қилинсин.

Фараз қилайлик, a сонини q асосга кўра саноқ системасида

$$a = a_k q^k + a_{k-1} q^{k-1} + ... + a_1 q + a_0 .$$

$a_0, a_1, ..., a_k$ сонларни топиш зарур. Бу p асосга кўра саноқ системаси учун a ни q га қолдиқли бўламиз: $a = b_0 q + a_0$.

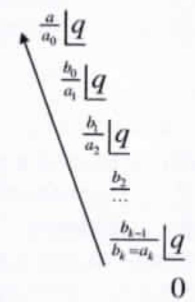
Худди шу саноқ системасида b_0 ни q га қолдиқли бўламиз.

$$b_0 = b_1 q + a_1 .$$

Ва худди шундай давом эттирамиз. Бу жараён кетма-кет бажарилиб, ноль бўлинмага айлангунича давом этади:

$$b_{k-2} = b_{k-1} q + a_{k-1}, b_{k-1} = 0 \cdot q + b_{k-1}, b_{k-1} = a_k .$$

p асосга кўра саноқ системаси учун a ни q га қолдиқли бўлиш қуйидаги схема ёрдамида бажарилади:



Стрелка тартиб йўналишини кўрсатади.

Агар $q < p$, у ҳолда a ни q га бўлгандаги $a_0, a_1, ..., a_k$ қолдиқлар кетма-кетлиги p асосга кўра саноқ системасининг ҳеч бўлмаганда бир рақамидан иборат бўлади. Бу рақамлар q асосга кўра, саноқ системасидаги a сонининг рақамлари бўлади.

Агарда, $p \geq q$ дан катта ёки тенг бўлса, у ҳолда q ва баъзи $a_0, a_1, ..., a_k$ қолдиқлар p асосга кўра саноқ системасининг ҳеч бўлмаганда бир рақамидан иборат бўлади. Бу рақамлар q асосга кўра саноқ системаси ёрдамида ёзилиши зарур.

Масала. 545_6 сонини 12 асосли саноқ системаси кўринишда ёзинг.

12 сонини саноқ системасида 6 асосга кўра ёзиб оламиз: $12 = 2 \cdot 6 + 0 = (20)_6$.

$$\begin{array}{r|l} 545_6 & 20_6 \\ -\underline{40} & 25 \\ 145 & \\ -\underline{140} & \\ 5 = a_0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 25 & 20_6 \\ -\underline{20} & 1 \\ 5 = a_1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1 & 20_6 \\ -\underline{0} & 0 \\ 1 = a_2 & \end{array}$$

Демак, $545_6 = 155_{12}$.

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МАСАЛАЛАР

I-БОБ. БУТУН СОНЛАР ҲАЛҚАСИДА БЎЛИНИШ МУНОСАБАТИ.

1 - §

36. Сонлар орасида жойлашган туб сонларни топинг.

а) 200 ва 220; б) 2540 ва 2570; с) 1200 ва 1250.

37*. $n > 1$ натурал сонлар учун $m^4 + 4$ ва $n^4 + n^2 + 1$ мураккаб сонлар

бўлишини исботланг:

38*. Қандай туб p сон учун $4p^2 + 1$ ва $6p^2 + 1$ туб сонлар бўлади.

39*. Қандай туб p сон учун $p + 10$ ва $p + 14$ туб сонлар бўлади.

40*. Агар $a > 3$, натурал m ва n сонларни 3 га бўлганда мос равишда 1 ва 2 га тенг қолдиқга эга бўлса, a, $a + m$, $a + n$ сонлар бир вақтда туб бўла олмаслигини кўрсатинг.

41*. n ва $n!$ $(n > 2)$ сонлар орасида ҳеч бўлмаганда битта туб сон борлигини исботланг:

42*. Барча $2p + 1$ кўринишдаги бутун сонлар ичида битта сон тўла куб бўлишини исботланг, бу ерда p – туб сон.

43*. Агар туб сонларни 5 туб сондан бошлаб номерлаб чиқилса, у ҳолда ҳар бир туб сон ўзини учланган номеридан катта бўлишини исботланг:

44*. Агар $p > 5$ туб сон бўлса, унинг квадратини 30 га бўлганда қолдиқ 1 ёки 19 бўлишини кўрсатинг.

45*. p ва q – 3 дан катта туб сонлар бўлса, $p^2 - q^2$ сон 24 га каррали бўлишини кўрсатинг.

46*. Сонлар бир вақтда туб сон бўла олмаслигини исботланг:

а) $p + 5$ ва $p + 10$;

б) $p, p + 2$ ва $p + 5$.

47*. Агар тоқ p сонни икки сон квадратлари айирмаси шаклида ягона равишда ифодалаш мумкин бўлса, у туб, акс ҳолда мураккаб бўлишини исботланг:

48*. 47 масала ечимидан фойдаланиб тоқ сонларни кўпайтувчиларга ажратиш усулини келтириб чиқаринг.

а) 6643; б) 1769; с) 3551; д) 6497 сонларни кўпайтувчиларга ажратинг.

49*. Агар N сон икки сонлар квадратлари йиғиндиси шаклида икки хил ифодаланса, яъни $N=a^2+b^2=c^2+d^2$, у ҳолда N мураккаб сон бўлишини исботланг:

50*. 235^2+972^2 сонни кўпайтувчиларга ажратинг.

51*. $3^{10}+3^5+1$ сонни кўпайтувчиларга ажратинг.

54. Агар 2^n-1 туб сон бўлса, n – туб сон эканлигини кўрсатинг.

1 - §

1. Агар бўлинувчи ва бўлинма берилган бўлса, бўлувчи ва қолдиқни топинг.

а) 25 ва 3; б) – 30 ва – 4.

2*. Исботланг:

а) тоқ натурал соннинг квадратини 8 га бўлганда 1 қолдиқ қолади;

б) кетма-кет икки натурал сон квадратлари йиғиндисини 4 га бўлганда 1 қолдиқ қолади.

3*. 15 сони ҳар қандай натурал даражага кўтарилиб, 7 га бўлинса 1 қолдиқ қолишини исботланг:

6. Ихтиёрий бутун n сон учун исботланг:

а) n^3-n сон 3 га бўлинади; б) n^7-n сон 7 га бўлинади;

с*) n^5-n сон 30 га бўлинади.

7*. Олти хонали сон 5 билан тугайди, агар бу сонни чап томонга биринчи ўринга ўтказсак, у ҳолда берилган сондан 4 марта катта сон ҳосил бўлади. Шу сонни топинг.

8*. $n(n+1)(2n+1)(n\in N)$ сонни 6 га бўлинишини исботланг:

9*. Каср соннинг сурати, икки тоқ соннинг квадратлари айирмаси, махражи эса, шу сонлар квадратлари йиғиндисига тенг. Шу каср сурат ва махражини иккига қисқартириш мумкин, 4 га эса қисқармаслигини кўрсатинг.

10*. Тўла квадрат бўлган тўрт хонали соннинг минглар ва ўнлар хонасидаги рақамлари бир хил, юзлар хонасидаги рақам бирлик рақамдан 1 га катта. Шу сонни топинг.

11*. Кетма-кет жойлашган бешта бутун сонлар квадратларининг йиғиндиси тўла квадрат бўлмаслигини исботланг:

12*. Агар бирор сонни 9 га бўлганда қолдиқ 2, 3, 5, 6, 8 сонлардан бирортаси бўлса, шу сон тўла квадрат бўла олмаслигини кўрсатинг.

14*. 16 сонининг рақамлари ўртасига 15 сони ёзилган, 1156 сони ўртасига яна 15 ёзилган ва ҳоказо. Шу сонлар тўла квадрат бўлишини кўрсатинг.

3 - §

18. Евклид алгоритми ёрдамида сонларнинг ЭКУБ ва ЭКУК и ни топинг.

а) 546 ва 231; б) 1001 ва 6253; с) 2737, 9163 ва 9639;

д) 420, 126 ва 525; е) 529, 1541 ва 1817.

19. Сонларни туб кўпайтувчиларга ажратиб сонларнинг ЭКУБ и ни топинг.

а) 360 ва 504; б) 220 ва 6600; с) 187 ва 533;

д) 420, 126 ва 525; е) 529, 1541 ва 1817.

20*. Агар $a=cq+r, b=cq_1+r_1$; бўлиб, a,b,q,q_1,r,r_1 - бутун номанфий сонлар; с – бутун мусбат сон бўлса,

$(a,b,c)=(c,r,r_1)$ тенгликни исботланг. Бу тенгликдан (a,b,c) ни топиш қоидасини келтириб чиқаринг ва шу қоидани n та сон учун умумлаштиринг.

21. 20-масаладан фойдаланиб, қуйидаги сонларни ЭКУБ и ни топинг.

а) 299, 391 ва 667; б) 588, 2058 ва 2849;

с) 31605, 13524 , 12915 ва 11067.

22. $[a,b]=\dfrac{ab}{(a,b)}$ формуладан фойдаланиб, қуйидаги сонларнинг ЭКУК и ни топинг.

а) 252 ва 468; б) 279 ва 372; с) 178 ва 381;

д) 299 ва 234; е) 493 ва 221.

23*. Агар (a,b)=1 бўлса, қуйидагиларни топинг.

а) $((a,b), [a,b])$; б) $(a+b, ab)$; с) $(a+b, [a,b])$.

24*. Икки сон йиғиндиси 667, ЭКУК и ва ЭКУБ и нисбатлари 120 га тенг бўлса, шу сонларни топинг.

25*. Икки сонни ҳар бирини уларнинг ЭКУБ и га бўлганда ҳосил бўлган бўлинмалар йиғиндиси 18 га тенг. Сонларнинг ЭКУК и 975 га тенг бўлса, шу сонларни топинг.

26*. a = 899, b = 493 берилган. $d=(a,b)$ ни топинг ва шундай x ва y ларни аниқлангки, $d=ax+by$ кўринишда ифодалаш мумкин бўлсин.

27. 26-масалани қуйидаги жуфтликлар учун бажаринг.

а) $a = 1445$, $b = 629$; б) $a = 903$, $b = 731$; с) $a = 1786$, $b = 705$.

69*. 10^6 ва 10^7 сонлар орасида 786 га каррали бўлган нечта натурал сон бор?

70*. 1000 дан кичик натурал сонлардан нечтаси 5 ва 7 га бўлинади?

71*. 100 дан катта бўлмаган натурал сонлардан нечтаси 36 билан ўзаро туб?

72. 1000! нинг каноник ёйилмасида 11 нечанчи даражада келади?

73. 1964! сони нечта нол билан тугайди?

74. 2311 дан ошмайдиган ва 5, 7, 13, 17 ларга бўлинмайдиган бутун мусбат сонлар сони нечта?

75. 12317 дан катта бўлмаган ва 1575 билан ўзаро туб бўлган бутун мусбат сонлар сонини топинг.

76. 1000 дан катта бўлмаган ва 363 билан ўзаро туб бўлган бутун мусбат сонлар сонини топинг.

77. $r^n!$ нинг каноник ёйилмасига p туб сон нечанчи даражада келади?

78. Сонларни каноник ёйилмасини топинг.

а) 10! ; б) 15! ; с) 20! ; д) 25! ; е) 30! .

79. $\frac{20!}{10!10!}$ ни каноник ёйилмасини топинг.

80*. α нинг шундай энг катта қийматини топингки, бунда

$$N = \frac{101 \cdot 102 \cdot \ldots \cdot 1000}{7^{\alpha}} \text{ – бутун сон бўлсин.}$$

90. Берилган сонларни натурал бўлувчилари ва улар йиғиндисини топинг.

а) 375 ; б) 720 ; с) 957 ; д) 988 ; е) 990 ; ф) 1200.

91. Берилган сонларнинг барча бўлувчиларини топинг:

а) 360 ; б) 375.

92*. $S(m) = 2m - 1$ шарти қаноатлантирувчи натурал m сонлар чексиз кўплигини исботланг:

93*. Агар $(m,n) > 1$ бўлса, $\tau(mn)$ ёки $\tau(m)\,\tau(n)$ лардан қайси бири катта, $S(mn)$ ва $S(m)\,S(n)$ ларчи?

94. Агар $m = 1968$ бўлса, $\tau(m)$, $S(m)$, $\delta(m)$ ларни топинг.

115. Кўпайтма қийматини топмасдан кўпайтувчиларнинг Эйлер функциясини қийматини топинг.

а) $\varphi(5 \cdot 7 \cdot 13)$; б) $\varphi(12 \cdot 17)$; с) $\varphi(11 \cdot 14 \cdot 15\cdot)$; д) $\varphi(990 \cdot 1890)$.

4 - §

55. Касрларни узлуксиз касрларга ёйинг.

$a)\, 2{,}71828;\; b)\, \frac{103993}{33102};\; c)\, \frac{99}{170};\; d)\, \frac{355}{113}.$

56. Касрларни узлуксиз касрларга ёйинг.

$a)\, \frac{247}{74};\; b)\, \frac{77}{187};\; c)\, \frac{333}{100};\; d)\, \frac{103993}{3302}.$

57. Узлуксиз касрларга ёйилмасидан фойдаланиб, касрларни қисқартиринг.

$a)\, \frac{3953}{871};\; b)\, \frac{6059}{1241};\; c)\, \frac{6821}{2147};\; d)\, \frac{10027}{32671};\; e)\, \frac{3653}{3107}.$

58. Берилган касрни узлуксиз касрга ёйинг ва уни $\frac{P_4}{Q_4}$ каср билан алмаштиринг. Алмаштириш хатосини топинг ва хатоси кўрсатилган ҳолда тақрибий алмаштиришга мос тенглигини ёзинг.

$a)\, \frac{29}{37};\; b)\, \frac{648}{385};\; c)\, \frac{571}{359}.$

59. Кўрсатилган чекли узлуксиз касрларга мос оддий қисқармайдиган касрларни топинг.

$\frac{a}{b} = (2,3,1,4);\; b)\, \frac{a}{b} = (1,1,2,3,4);\; c)\, \frac{a}{b} = (1,3,2,4,3,1,1,1,5);$

$d)\, \frac{a}{b} = (2,1,1,2,1,6,2,5);\; e)\, \frac{a}{b} = (-2,3,1,5,4,2);\; f)\, \frac{a}{b} = (0,1,3,2,2,2,1,1,7).$

60. Тенгламани ечинг.

$a)\, (x,2,3,4) = \frac{73}{30};\; b)\, (2,1,2,x) = \frac{19}{7}.$

5 - §

149. Сонларни қўшинг.

a) $1001010_2 + 1101001_2$

b) $1543_6 + 42_6$

c) $65004_8 + 70645_8$

d) $7489(12)_{13} + 5762_{13}$

e) $43(10)(11)7_{12} + 3(10)6_{12} + 5(11)38_{12}$

f) $47(10)9_{11} + 84567_{11}$

g) $(12)724(11)(10)_{13} + 478(10)953_{13}$

150. Сонларни айиринг.

a) $10101011_2 - 110111_2$

b) $1131043_5 - 342144_5$

c) $23042_6 - 5354_6$

d) $783041_9 - 27605_9$

e) $46(10)37_{12} - 72(11)48_{12}$

f) $1(11)(10)9(10)_{13} - (12)(11)9(11)_{13}$

151. Сонларни кўпайтиринг.

a) $4203_5 \cdot 42_5$

b) $5034_6 \cdot 545_6$

c) $50624_7 \cdot 56_7$

d) $42(11)3_{12} \cdot 789_{12}$

e) $343224_7 \cdot 1256_7$

f) $258(10)3_{11} \cdot 56_{11}$

152. Сонларни бўлинг.

a) $111100011_2 : 10101_2$

b) $1141043_5 : 23_5$

c) $471222_8 : 27_8$

d) $51(10)3406_{11} : 548_{11}$

II-БОБ КОМБИНАТОРИКА ВА НОСТАНДАРТ МАСАЛАЛАР

2.1-§. Комбинаторикага оид мисоллар. Бирлашмалар ва Ньютон биноми

Бирлашмалар (Комбинаторика)

Таъриф: Ҳар қандай нарсалардан тузилган ва бир-биридан шу нарсаларнинг таркиби ёки ўзи билан фарқ қилувчи группалар (тўпламлар) бирлашмалар (комбинаторика) дейилади.

Бирлашмаларни ташкил этадиган нарсалар унинг элементлари дейилади. Уларни $a, b, c, \ldots$ ҳарфлари билан белгилаш мумкин. Бирлашмалар (комбинаторика) уч хил бўлади: ўринлаштириш, ўрин алмаштириш, группалаш.

Ўринлаштириш

Таъриф: m та элементдан $n(n \le m)$тадан ўринлаштириш деб шундай бирлашмаларга айтиладики, уларнинг ҳар бирида берилган m та элементдан n та элемент бўлиб, улар бир-биридан элементлари ёки элементларининг тартиби билан фарқ қилади.

m та элементдан тузилган n тадан ўринлаштириш сони

$$A_m^n$$

символ билан белгиланади (A французча – “arrahgument” ўринлаштириш сўзининг бош ҳарфи). m та $a, b, c, \ldots$ элемент берилган бўлсин. Биттадан тузилган ўринлаштиришлар сони m га тенг бўлиб, $A_m^1 = m$ кўринишда ёзилади. Иккита элементдан ўринлаштиришлар тузиш учун a нинг ёнига қолган $(m-1)$ та элемент бирлаштирилади ва $A_m^2 = m(m-1)$ тенглик ўринли бўлади ва ҳ.к. $A_m^3 = m(m-1)(m-2)$, умумий ҳолда:

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot[m-(n-1)] \text{ ёки}$$

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)$$

Бу m та элементлардан n тадан ўринлаштиришлар сонини топиш формуласидир. a, b, c элементлардан 2 тадан ўринлаштиришлар сони 6 та, яъни ab, ac, bc, ca, ba, cb бўлиб,

$$A_m^2 = 3 \cdot 2 = 6$$

1-мисол. 1,2,3 рақамлари ёрдамида мумкин бўлган барча икки хонали сонларни ёзайлик: 12, 13, 23, 21, 31, 32. Демак, бу рақамлардан тузиш мумкин бўлган рақамлари турлича икки хонали сонлар 6 та экан. Бунда рақамлари такрорланиб келадиган икки хонали сонлар 11, 22, 33 ларни ҳам қўшиб ҳисобланса, улар 9 та бўлади. $\bar{A}_3^2$ такрорий ўринлаштиришлар сони 9 га тенг бўлиб, умумий ҳолда

$$\bar{A}_m^n = m^n$$

эканлигини кўрсатиш осон.

Такрорий ўринлаштиришдан асосан рақамлар билан иш кўришда фойдаланилади.

2-масала. Абонент телефон қилаётиб, охирги рақамни унутиб қўйди. Зарур номерга тушиш учун кўпи билан неча марта териш керак?

Ечиш: Исталган рақамни териб, тўғри тушиш эҳтимоли $\frac{1}{10}$ га тенг. Ками билан 1 марта, кўпи билан 10 марта териш керак.

3-масала. Синфда 10 та фан ўқитилади ва ҳар куни 5 хил дарс ўтилади. Кунлик дарс жадвали нечта турли усул билан тақсимлаб қўйилиши мумкин?

Ечиш: $A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$.

4-масала: Бутун сонларнинг ҳар бири учта ҳар хил қийматли рақам билан ифода қилинадиган бўлса, қанча бутун сон тузиш мумкин?

Ечиш: $A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

(Изоҳ. Нол қиймати рақам эмаслиги эътиборга олинди**).**

Ўрин алмаштириш

Таъриф: Фақат элементларининг тартиби билангина фарқ қилувчи (яъни $n = m$) ўринлаштиришлар ўрин алмаштириш дейилади.

m та элементдан тузилган ўрин алмаштиришлар сони P_m билан белгиланади (P_m - французча *permutation* – ўрин алмаштириш сўзининг бош ҳарфи).

$$P_m = A_m^n = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = m!$$

Бу формулани ўрин алмаштиришлар сонини топиш формуласи дейилади.

5-масала. 8 кишини неча хил усулда ўтказиш мумкин?

Ечиш: $P_8 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$

6-масала: Ҳар хил қийматли 9 та рақам билан нечта 9 хонали сон ёзиш мумкин?

Ечиш: $P_9 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 362880$

7-масала. 3, 4, 5 рақамлардан шу рақамлар такрорланмайдиган қилиб нечта 3 хонали сон тузиш мумкин?

Ечиш: $P_3 = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 60$**.**

8-масала: 1, 2, 3, 4, 5 рақамларидан бешга каррали нечта беш хонали (рақамлари такрорланмайдиган) сон тузиш мумкин?

Ечиш: $P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ та ўрин алмаштиришларнинг ҳар бирига 5 рақамини ёзиб қўйсак, 5 га каррали сонлар ҳосил бўлади. Бундай сонлар $P_4 = 4! = 24$ та.

Группалаш

Таъриф: Группалашлар деб m та элементдан n тадан тузилган ва бир-биридан энг камида битта элемент билан фарқ қиладиган ўринлаштиришларга айтилади.

Теорема: m та элементдан n тадан тузилган ҳамма группалашлар сони

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{(m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-(n+1))}{n!}$$

Формула билан топилади (С – французча combination-группалаш сўзининг бош ҳарфи).

C_m^n та группалашнинг ҳар бирида мумкин бўлган ўрин алмаштиришларни бажарамиз, улар P_n та.

Агар P_n ўрин алмаштиришлар сонини C_m^n группалашлар сонига кўпайтирсак, A_m^n ўринлаштиришлар сонини ҳосил қиламиз:

$$C_m^n \cdot P_n = A_m^n \text{ бундан: } C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}$$

9-масала. Ҳеч бир учтаси бир тўғри чизиқда ётмайдиган 10 та нуқтадан нечта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?

Ечиш: $C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ та.

10-масала. Бирор вазифага кўрсатилган 10 та номзоддан 3 киши сайланиши керак. Сайловдаги турли номзодлик гуруҳи қанча бўлиши мумкин?

Ечиш: $C_{10}^3=\dfrac{A_{10}^3}{P_3}=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=10\cdot 4\cdot 3=120$ та.

11-масала. 52 талик қартадан иборат дастадан 3 тасини неча хил усулда олиш мумкин?

Ечиш: $C_{52}^3=\dfrac{A_{52}^3}{P_3}=\dfrac{52\cdot 51\cdot 50}{1\cdot 2\cdot 3}=22100$

Группалашнинг хоссалари:

1-хосса. $C_m^n=\dfrac{m!}{n!(m-n)!}$

2-хосса. $C_m^n=C_m^{m-n}$

3-хосса. $C_{m-1}^n+C_{m-1}^{m-1}=C_m^n$

12-масала. $A_x^4-A_{x+1}^3=\dfrac{5}{4}A_x^3$ тенгламани ечинг?

Ечиш:

$x(x-1)(x-2)(x-3)-(x+1)x(x-1)=\dfrac{5}{4}x(x-1)(x-2)$; бундан $x=6$ ечим чиқади.

Паскал учбурчаги

Фараз қилайлик, a ва b - ҳақиқий сонлар. Турли n натурал сонда $(a+b)^n$ ифодани кўриб чиқамиз:

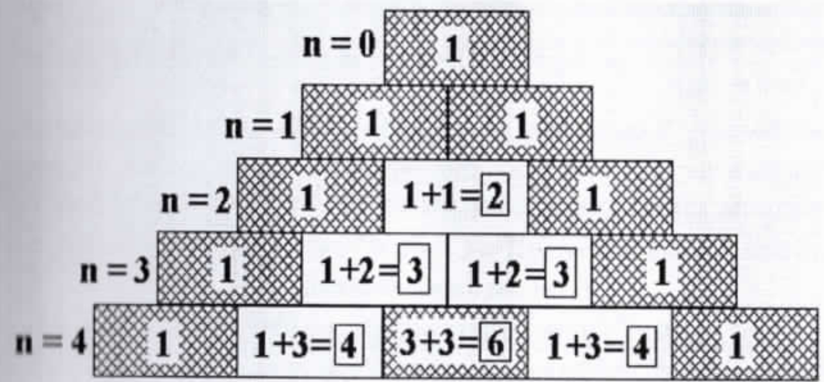
$n=0$ да: $(a+b)^0=1$

$n=1$ да: $(a+b)^1=(1\cdot a+1\cdot b)$

$n=2$ да: $(a+b)^2=(a^2+2\cdot a\cdot b+b^2)$

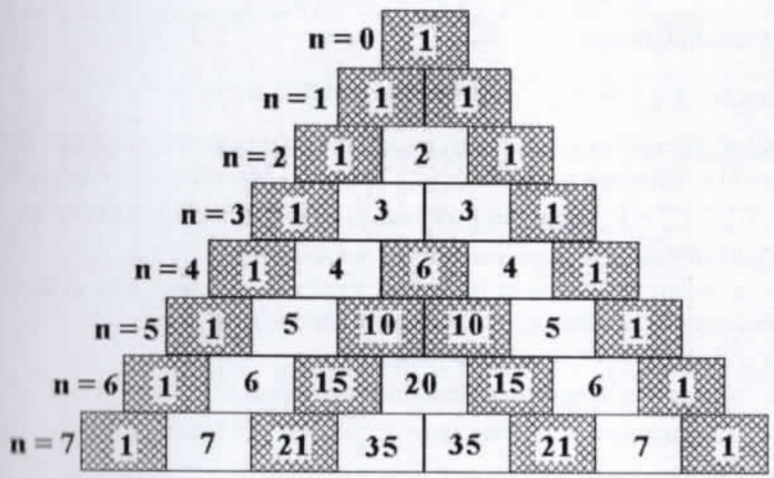
$n=3$ да: $(a+b)^3=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$

Шу қонуният билан давом эттирилганда коэффициентлар учун Паскал учбурчагини ҳосил қиламиз:



У ҳолда ушбу сонларнинг мос эканлигини ҳосил қиламиз. Юқоридаги расмда учбурчак қуйидаги қоида бўйича ташкил этилади. Ҳар бир қаторнинг чекка қисмида 1 рақами жойлашган иккита соннинг йиғиндисига тенг. Ушбу қоида асосида учбурчакнинг янги қаторини кетма кет ёзиш мумкин.

Бундай таъриф 1665 йил француз математиги В. Паскалнинг “Арифметик учбурчак ҳақида трактат” асарида келтирилган, асар олим вафотидан сўнг чоп этилган. Учбурчакнинг шунга ўхшаш вариантлари итальян математиги Н. Тарталья, ўрта осиёлик олим ва шоир Умар Хайём асарларида баён этилган.



Комбинаторика йўналишидаги гуруҳлаш сони $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, формуласи Паскал учбурчакдаги сонлар билан узвий боғлиқ. Ҳақиқатдан ҳам, $n=0$ да $C_0^0=1$ га эга бўламиз. Учбурчакнинг юқоридаги қатори (нолинчи) битта сондан иборат. Навбатдаги қатор – иккита сондан иборат: $C_1^0=C_1^1=1$. Тўртинчи қатор 5 та сондан иборат: $C_4^0=C_4^4=1, C_4^1=C_4^3=4, C_4^2=6$.

Ньютон биноми формуласи.

Ушбу $(a+b)^n$ нинг ёйилмасидан иборат кўпҳад ***Ньютон биноми*** дейилиб, бу ёйилмани топиш учун $n=2, n=3, n=4$ ва ҳ.к. ҳолларни қараб, сўнгра умумлаштириш мумкин. Аммо бу индуктив метод бўлгани учун иккинчи ҳади билан фарқ қилувчи биномлар кўпайтмасини қараймиз:

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$;

$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$;

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+(a+b+c+d)x^3+$

$+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd$;

Бундан умумий ҳолда

$$(a+b)^n=x^n+C_n^1x^{n-1}a+C_n^2x^{n-2}a^2+...+C_n^{n-1}xa^{n-1}+a^n, \qquad (1)$$

ёйилма ҳосил бўлади.

Бунда: $C_m^1=m; C_m^2=\dfrac{m(m-1)}{1\cdot 2}$ ва ҳақазо.

Изоҳ. Исаак Ньютон машҳур инглиз математиги (1642-1727) бўлиб, (1) формула *Ньютон биноми* формуласи дейилади $C_m^0=1; C_m^1;...C_m^m=1$ ларни *биномианал коэффициентлар* дейилади.

Ньютон биноми формуласининг хоссалари:

1. x нинг кўрсаткичи камайиб боради, a нинг кўрсаткичи ошиб боради. Уларнинг кўрсаткичлари йиғиндиси m га тенг.
2. Ёйилма $m+1$ та ҳаддан иборат.
3. Биномиал коэффициентлари йиғиндиси 2^n га тенг.
4. Ёйилманинг исталган ҳади $T_{n+1}=C_m^n a^n x^{m-n}$ дан иборат.
5. Ёйилманинг четларидан тенг узоқликда турган ҳадларнинг коэффициентлари ўзаро тенг.

6. Тоқ ўринларда турган биномиал коэффициентлар йиғиндиси жуфт ўринда турган биномиал коэффициентлар йиғиндисига тенг.

13-масала. Ньютон биноми формуласини исботланг.

$$(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n}C_m^n a^{n-m}b^m, \qquad (2)$$

Бу ерда $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

Ечиш: $n=1$ да (2) тенгликнинг чап қисми $(a+b)^1$ га тенг;

Ушбу тенгликнинг ўнг қисми: $\sum_{m=0}^{1}C_m^1 a^{1-m}b^m=\dfrac{1!}{0!1!}a+\dfrac{1!}{1!0!}b=a+b$

$n=k$ да (2) тенгликнинг ўринли эканлиги берилган

$$(a+b)^k=\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{k-m}b^m,$$

$n=k+1$ да тенгликнинг ўринли эканлигини исботлаймиз.

$$(a+b)^{k+1}=\sum_{m=0}^{k+1}C_{k+1}^m a^{k+1-m}b^m,$$

Ҳақиқатдан:

$$(a+b)^{k+1}=(a+b)(a+b)^k=(a+b)\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{k-m}b^m=$$

$$=\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{k+1-m}b^m+\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{k-m}b^{m+1}=$$

Иккинчи қўшилувчида йиғиндини $m=1$ да бошлаймиз. Иккинчи қўшилувчида m нинг ўрнига m-1 олинади.

$$=\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{k+1-m}b^m+\sum_{m=0}^{k}C_k^{m-1}a^{k-(m-1)}b^{m-1+1}=$$

$$=\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{k+1-m}b^m+\sum_{m=0}^{k+1}C_k^{m-1}a^{k+1-m}b^m=$$

$$=C_k^0a^{k+1}+\sum_{m=0}^{k}\left(C_k^m+C_k^{m-1}\right)a^{k+1-m}b^{k+1}=$$

$$=C_k^0 a^{k+1}+\sum_{m=0}^{k}\left(C_k^m+C_k^{m-1}\right)a^{k+1-m}b^{k+1}=$$

$$\left|\begin{array}{l}
C_k^0+C_{k+1}^0=C_k^k=C_{k+1}^{k+1}=1. \\
C_k^m+C_k^{m-1}=\dfrac{k!}{m!(k-m)!}+\dfrac{k!}{(m-1)!(k-(m-1))!}= \\
=\dfrac{k!}{m(m-1)!(k-(m-1))!}+\dfrac{k!}{(m-1)!(k+1-m)(k-m)!}= \\
=\dfrac{k!}{m!(k+1-m)!}(k+1-m+m)=\dfrac{(k+1)!}{m!((k+1)-m)!}=C_{k+1}^m= \\
=\sum_{m=0}^{k+1}\left(C_{k+1}^m a^{k+1-m}b^m\right)
\end{array}\right|$$

(2) тенглик исботланди.

Биринчи йиғиндида биринчи қўшилувчини алоҳида ёзамиз, иккинчи йиғиндида – охирги қўшилувчини. Иккала йиғинди $m=1$ дан $m=k$, бўйича йиғилади. *a, b* сонларнинг йиғиндиси ушбу белгилар билан мос тушади.

2.2-§. Дирихле принципи ҳақида асосий маълумотлар. Дирихле теоремаси

Немис математиги Дирихле Петер Густав Лежен (13.02.1805 – 05.05.1859) сонлар назариясида бир қатор йирик кашфиётлар қилди, берилган детерминантга бинар квадратик форма синфлари сони учун формула яратди ва туб сонининг чексизлиги ҳақидаги бутун арифметик прогрессияда ўзаро туб сонлар айирмаси теоремасини исботлади. Бу масалани ечишда Дирихле функцияси (қатори) деб аталган аналитик функцияни қўллади. Бирлик алгебраик сонлар майдонида умумий алгебра назариясини яратди. Математик анализ соҳасини биринчи бўлиб аниқ шакллантирди ва у қаторларнинг шартли яқинлашишини, кейинги изланишлар учун асос бўлган узлуксиз ва монотон функцияларни қисман Фурье қаторига ёйиш мумкинлигини аниқ исботлади. Дирихле илмий

ишлари механика ва математик физика масалаларда ўз самарасини берди.

Қаторлар, интеграл формулаларга доир масалалар Дирихле номи билан боғлиқ. Дирихле маърузалари кейинги давр математиклари илмий изланишларида жуда ҳам муҳим ўрин тутган, жумладан Г.Риман, Ф.Эйзенштейн, Л.Кронекер, Ю.Дедекинд ишларида.

Дирихле принципининг турли таърифи

Кўпгина масалаларни ечишда мантиқий фикрлаш методидан фойдаланилади, яъни -“қарама -қаршиликдан”.

Дирихле принципининг баъзи бир татбиқларини қараб чиқамиз.

Бу принцип шуни таъкидлайдики, n элементдан олинган тўпламни умумий элементга эга бўлмаган m та кесишмайдиган қисмларга ажралади, бунда $n>m$ ва ҳар бир қисмда камида битта элемент мавжуд.

Дирихле принципини бошкача таърифи, агар $n+1$ та нарсани n та жойга жойлаштирса, унда албатта ҳеч бўлмаганда битта жойда иккита нарса бўлади.

Ҳазил формада «Дирихле принципи» шундай кўринишга эга: еттита қуённи учта катакка шундай жойлаштириш керакки, ҳар бир катакда иккидан ортиқ қуённи жойлаштириб бўлмайди.

Шуни англашимиз керакки, қуёнлар ўрнида ҳар хил нарсалар бўлиши мумкин, яъни математик оъектлар, рақамлар, кесимлар, жадваллардаги жойлар ва бошқалар. Агар биз қайсидир аниқ масалада Дирихле принципини қўлламоқчи бўлсак, унда биз уни тушиниб олишимиз керак, ундаги қайсилари - «катаклар», қайсилар эса «қуёнлар». Одатда ушбу жараён қийинчилик туғдиради.

Умумлашган Дирихле принципи

Агар $nk+1$ қуён n катакларга жойлаштирилган бўлса, у ҳолда битта катакка жойлаштирилган $k+1$ та қуён топилади. (*n, k*- натурал сонлар)

Қуйидаги масалани кўриб чиқамиз:

1-масала. Магазинга 25 яшик уч хил турдаги олма олиб келишди (ҳар бир яшикда бир хил турдаги олма мавжуд). Улардан ҳеч бўлмаганда 9 та яшикда бир хил турдаги олмалар борлигини исботланг.

Ечими. 25 та яшиклар (қуёнлар) ни 3 та «қутиларга» навига қараб жойлаштирамиз. Яъни 25=3·8+1, бунга умумий Дирихле принципини қўллаймиз $(n=3, k=8)$ учун ва қайсидир бир «қутида»- 9 дан кам бўлмаган сортдаги яшиклар бор.

Турли хил масалаларни ечишда Дирихле принципини

2-масала. Синфда 40 та ўқувчи бор. Шу ўқувчилар орасида 4 ўқувчидан кам бўлмаган ўқувчиларни туғилган кунлари бир кунга тушадиган ой борми?

Ечиш: Қарама қаршисини фикрлаймиз. Агар бунақа ой топилмаганда, унда ҳар бир 12 ойда 3 тадан кам бўлмаган ўқувчилар туғилган кунини нишонлайди. Демак, умумий ўқувчиларни сони 12 ....36 дан кўп бўлмаган. Аммо 40>36. Қарама қаршиликка келдик.

Сонлар назариясида Дирихле принципи

Дирихле принципи бўйича қайта тиклаш: $p+1$бутун сонлар орасида шунақа иккита сон борки, уни p бўлганда бир хилда қолдиқ қолади. p сонига қолдиқли бўлишда шундай ҳар хил қолдиқ учраши мумкин: $0,1,2,..., p-1$.

Улар бу ерда “катак” ролини ўйнайди, ўзи бутун сонлар эса “қуёнлар”, ”қуёнлар” сони кўпроқ бўлгани учун, қолдиқлардан кўра, унда ҳеч бўлмаганда иккита сон битта “катакда “ ўтиради, яъни p сонига бўлганда бир хил қолдиқ қолади. Классик намуналарни кўрамиз.

3-масала. 11 та ҳар хил сон берилган. Шундай иккита сон борки, уларнинг айирмаси 10 га бўлинишини исботланг.

Ечиш: Ҳеч бўлмаганда иккита сон 11 ичида бир хил қолдқ беради унга бўлганда (Дирихле принципи). Булар $A=10a+r$ ва $B=10b+r$. Унда уларнинг айирмаси 10 га бўлинади $A-B=10(a-b)$.

4-масала. Учта сонлар орасида иккита сон йиғиндиси жуфт бўлиши мумкунлигини исботланг.

Ечиш: Ҳамма сонни икки синфга ажратса бўлади: жуфт ва тоқ. Учта сонни икки синфга ажратиш мумкин эмас, чунки ҳеч қайси синфда бирорта ҳам сон тушмайди. Демак, учта ҳар кандай сон орасида иккита бир хил жуфтлик сон бор Уларнинг йиғиндиси жуфт.

Дирихле принципи ва геометрия

5-масала. Томони 1 м бўлган квадратга 51 та нуқта ташланди. Улардан ихтиёрий учтасини томони 20 см бўлган квадрат билан ёпиш мумкинлигини исботлаб беринг.

Ечиш: Квадратимизни томони 20 см бўлган 25 та квадратчаларга ажратиб оламиз.Умумий Дирихле приципи буйича, қайсидир бирига , ҳеч булмаганда, 3 та нуқта 51 тани ичидан тушади.

6-масала. Томони 1 см бўлган тенг ёнли учбурчак ичида 5 та нуқта бор. Уларнинг иккитасининг орасидаги масофа 0,5 см дан камлигини исботланг.

Ечиш: Шундай 4та «қутича» олиш мумкин, тенг томонли учбурчакнинг томонларини ўрталарини туташтирирувчи кесмалар ёрдамида. Шунда томони 0,5см дан бўлган 4 та тенг томонли учбурчак ҳосил қилиш мумкин, улар бизда “қутичалар” бўлади.

7-масала. Юзаси S бўлган квадратга 100 та шакл бор, бу шаклнинг юзаларни йиғиндиси 998 дан кўпроқ. Ҳамма шаклларнинг умумий нуқтаси борлигини исботланг.

Ечиш: $S_1, S_2, S_3, ..., S_{100}$ – берилган шаклларнинг юзалари, n – уларни квадратгача тўлдириб турувчи шаклларнинг юзалари. Масала шартига кўра, $S_1+S_2+S_3+...+S_{100}>99S$. Шунинг учун

$$(S-S_1)+(S-S_2)+(S-S_3)+...+(S-S_{100})=$$

$$=100S-(S_1+S_2+S_3+...+S_{100})<100S-99S=S.$$

Шундай қилиб, қўшимча шаклларни юзи квадратнинг юзидан кичикроқ, демак, улар бутун квадратни ёпиши мумкин эмас. (Дирихле принципи), яъни шундай нуқта топиладики уларнинг биронтасига ҳам қарашли эмас. У ҳолда у ҳар бир дастлабки шаклга қарашли ва изланган шакл ҳисобланади.

Дирихле принципи ва комбинаторик масалалар

8-масала. Шашка бўйича ўтказилаётган турнирнинг (ҳар бир иштирокчи бир – бири билан фақат бир марта кўришиши мумкин) исталган вақтида бир хил сондаги партия ўйнаган камида 2 та ўйинчи топилади.

Ечиш: Агар ҳар бир турнирда $k+1$ та иштирокчи бўлса, унда ўйналган партиялар сони ҳар бир иштирокчида 0 (ҳеч бўлмаганда битта иштирокчи бир марта ҳам ўйнамаган бўлса) дан k гача ўзгаради. Демак, ҳеч қайси бири k партиядан ўйнолмайди (яъни гуруҳлар сони k). Агар ҳеч бўлмаганда биттаси хамма k партиядан ўйнаган бўлса, ҳеч қайси бирида 0 бўлиши мумкин эмас. Агар $k+1$ўйинчини k гуруҳларга жойлаштирса, унда шундай группа топиладики, иккитадан кам бўлмаган ўйинчидан иборат.

9-масала. Натурал сонлар ихтиёрий тартибда ёзилган. Ҳар бир сон учун йиғиндиси тартиб рақамига тенг бўлган сон топилган. Ҳамма сонлар йиғиндиси ҳар хил сонлар билан тугаши мумкинми?

Ечиш: Йўқ. Ҳеч бўлмаганда иккита соннинг йиғинди бир хил сон билан тугашини исботлаймиз.

1-усул. Бошида жойлаштиришда (ҳар бир сон тартиб билан ёзилган) ҳамма йиғинди - жуфт. Агар рақамлар жойлашувини ўзгартирса ёки жуфт йиғинди, ёки иккита тоқ йиғинди пайдо бўлади. Шундай қилиб:ҳар қандай жойлаштирувда сонлар жуфт ва тоқ сонлар йиғинди-жуфт, шунга $Ж+Т=10$.

2-усул. Ҳамма йиғиндилар йиғиндиси жуфт, ҳар бир сон унда икки мартадан қатнашган. Ҳамма йиғиндилар ҳар хил сонлар билан тугасин, унда охирги рақамлар йиғиндиси 0+1+2+......+9=45 – тоқ. Қарама – қарши.

Изоҳ: Шундай қилиб, бир неча масалаларни кўргандан сўнг, шуни билиш мумкинки, Дирихле принципини ҳар хил турдаги масалаларга қўллаш мумкун экан.

2.3-§. Ностандарт масалалар ҳақида. Айрим математик софизмлар, парадокслар.

Дастлаб, қандай масалалар ностандарт деб аталиши ҳақида келишиб олайлик.

Ҳар бир ўқув предмети бўйича ўқув дастури ва унга мос стандарти мавжуд ва ушбу стандартга мос (доир) бўлмаган мисол ва масалалар ностандарт дейилади. Демак, масаланинг ностандарт бўлиш ёки бўлмаслиги дастурга боғлиқ.

Бугунги кунда халқ таълими вазирлиги I–XI синфлар учун математика предмети бўйича ўз дастури ва стандартини, олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги академик лицей ва касб-ҳунар коллежлари учун ўз дастури ва стандартини яратишган. Аммо бу дастурлар ва стандартлар бир-бири билан узвий боғланган эмас.

Энди ностандарт масалаларга ўтамиз. Бунда айрим масалалар бир стандарт бўйича — стандарт, иккинчиси бўйича — ностандарт бўлиб қолиш хавфи бор.

1-масала. Ўлчови 4x4 бўлган квадрат ўлчовлари 1x1 бўлган 16 та квадратчаларга бўлинган ва ҳар бир квадратчага бирор сон ёзилган. Умумий томонга эга бўлган иккита квадратчалар қўшни деб аталади. Агар ҳар бир квадратчадаги сон ўзининг *қўшни* квадратчаларига ёзилган сонлар ўрта арифметигига тенг бўлса, у ҳолда квадратчаларга ёзилган барча 16 та сон бир-бирига тенг эканлигини исботланг.

Масалани ечишни нимадан бошлаш керак? Дастлабки қадам қандай бўлиши керак?

Маслаҳат. Агар масалада қандайдир янги, Сизга номаълум бўлган тушунча киритилган бўлса, биринчи навбатда уни яхшилаб тушуниб олиш керак. Бизда янги тушунча — қўшни катаклар. Қуйидаги чизмани чизиб, квадратчаларни номерлаб чиқамиз:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Шаклдан, биринчи квадратчанинг қўшнилари 2- ва 5-квадратчалар; иккинчи квадратчанинг қўшнилар 1- , 3- ва 6-квадратчалар; олтинчи квадратчанинг қўшнилари 2-, 5-, 7- ва 10- квадратчалар эканлиги кўринади. (Қўшни катакча таърифини яна бир ўқиб чиқинг). Айтайлик 1- катакчага a_1 сони ёзилган бўлсин. Энди яна бир марта масала шартини ўқиб чиқамиз. У ҳолда қуйидаги тенгликлар ўринли бўлиши равшан:

$$a_1=\frac{a_2+a_5}{2},\quad a_2=\frac{a_1+a_3+a_6}{2},\quad a_6=\frac{a_2+a_5+a_7+a_{10}}{2}$$

ва ҳ.к. ва бизда 16 та номаълум иштирокидаги 16 та тенгламалар системаси ҳосил бўлади.

Бу тенгламалар системаси чизиқли тенгламалардан иборат ва юқори синф ўқувчилари 1-2 соат уриниб керакли натижага келишлари мумкин. Аммо, масала шартида 10×10 ўлчовли квадрат олинса, ёки 1000x1000 ўлчовли квадрат олинса, у ҳолда бу усул билан масалани ечишга бир кун ҳам етмайди. Масалада берилган квадрат ўлчови, ўз-ўзидан равшан аҳамиятга эга эмас, яъни масала хусусан барча ўлчовлар учун ўринли. Демак, биз бошқача йўл излашимиз лозим. Дастлаб сонлар ўрта арифметигининг хоссаларини эслайлик.

Икки a ва b сонларининг ўрта арифметиги, a ва b нинг каттасидан катта эмас ва кичигидан кичик эмас, яъни $a\le b$

бўлса, у ҳолда $a \le \frac{a+b}{2} \le b$ *ва бу ерда тенглик бажарилиши учун* $a=b$ *бўлиши шарт.*

Бу хоссани ихтиёрий $a_1, a_2, ..., a_n$ сонлар учун қуйидагича ёзишимиз мумкин.

$$\min(a_1, a_2, ..., a_n) \le \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \le \max(a_1, a_2, ..., a_n)$$

Бу ердаги $\max(a_1, a_2, ..., a_n)$ ёзувда $a_1, a_2, ..., a_n$ -ларнинг энг каттасини тушунамиз (махимум — лотинчада „энг катта" деган маънони англатади) ва $\min(a_1, a_2, ..., a_n)$ ёзувида $a_1, a_2, ..., a_n$ ларнинг энг кичигини тушунамиз (минимум — лотинчада "энг кичик" дегани.)

Масалан $a_1 = 2, a_2 = -3, a_3 = 4, a_4 = 0$ бўлса, у ҳолда $\max(a_1, a_2, ..., a_n) = 4$, $\min(a_1, a_2, ..., a_n) = -3$, га тенг.

Шундай қилиб, агар $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \le \max(a_1, a_2, ..., a_n)$ бўлса, у ҳолда $a_1, a_2, ..., a_n$ бўлиши келиб чиқади.

Мана энди ечиш усули кўрина бошлади. Катакчалардаги $a_1, a_2, ..., a_{16}$ сонлари учун $\max(a_1, a_2, ..., a_{16}) = M$ бўлсин. Табиийки, M сони берилган $a_1, a_2, ..., a_{16}$ ларнинг биттасига тенг, яъни катаклардаги бирор сон M га тенг. У ҳолда юқоридаги мулоҳазадан ушбу катакчанинг қўшни катакчаларидаги сонлар ҳам M га тенг бўлиши шарт. Демак, ушбу катакчага қўшни катакчалардаги сонлар ҳам M га тенг ва ҳоказо. Шундай қилиб, барча $a_1, a_2, ..., a_{16}$ сонлар бир-бирига тенг.

Бу усул, берилган квадратнинг ўлчови қандай бўлишининг аҳамияти йўқлигини кўрсатади.

2-масала. Ўлчови 4х4 бўлган квадрат ўлчовлари 1х1 бўлган 16 та квадратчаларга бўлинган ва ҳар бир квадратчага бирор сон ёзилган. Агар, ҳар бир квадратча учун, унга қўшни бўлган квадратчалардаги сонлар йиғиндиси бирга тенг бўлса, у ҳолда барча квадратчалардаги сонларнинг йиғиндиси қанчага тенг?

Қўшни квадратчалар қандай эканлигини 1- масалада тушуниб олдик. 1- чизмадан кўриниб турибдики, бурчаклардаги 1-, 4-, 13, 16- катакчалар 2 тадан қўшни катакчаларга эга; 2-, 3-, 5-, 8-, 9-, 12-,

14-, 15- катакчалар эса 3 тадан қўшни катакчаларга эга ва ичкаридаги 6-, 7-, 10-, 11- катакчалар эса 4 тадан қўшни катакчаларга эга. Агар *I-* чи катакчага қўшни бўлган катакчалардаги сонларнинг йиғиндисини S_1 деб белгиласак, у ҳолда

$S_1 = a_2 + a_5$, $S_4 = a_3 + a_8$, $S_{13} = a_9 + a_{14}$, $S_{16} = a_{16} + a_{15}$ ва масала шартида берилишига кўра $S_1 + S_4 + S_{13} + S_{16} = 4$

Энди $S_2 + S_3 + S_5 + S_8 + S_9 + S_{12} + S_{14} + S_{15}$ йиғиндини қарасак, биринчидан бу йиғинди масала шартига кўра 8 га тенг, иккинчидан эса бу йиғиндида барча $a_1, a_2, ..., a_{16}$ лар қатнашиб, $a_2, a_3, a_5, a_8, a_9, a_{12}, a_{14}, a_{15}$ сонлари бир мартадан, қолганлари эса 2 мартадан қатнашади.

Демак,

$$(S_1 + S_4 + S_{13} + S_{16}) + (S_2 + S_3 + S_5 + S_8 + S_9 + S_{12} + S_{14} + S_{15}) =$$
$$= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 +$$
$$+ a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16})$$

тенгликни ёзишимиз мумкин. Бу ерда тенгликнинг чап томони 12 га тенг. Демак, барча сонларнинг йиғиндиси 6 га тенг.

Жавоби:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 +$$
$$+ a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} = 6$$

Ушбу икки масалани бирлаштирадиган тушунча - қўшни квадратчалар. Улар физикада ишлатилган масалалардан келиб чиққан бўлиб, қизиқарли татбиқларга эга.

Мустақил ечиш учун қуйидаги масалаларни эътиборингизга ҳавола қиламиз.

1-масала. Агар 1 - масала шартида ўрта арифметик ўрнига ўрта геометрик (барча сонлар мусбат бўлган ҳолда) ёки ўрта гармоник олинса, масаладаги тасдиқ сақланадими?

2-масала. Агар 2- масалада ўлчови 5×5 бўлган квадрат олинса, у ҳолда сонлар йиғиндиси қанчага тенг?

3-масала. Агар 2- масалада ўлчови $n \times n$ бўлган квадрат олинса, у ҳолда барча n^2 та сонлар йиғиндисини топиш мумкинми?

Айрим математик софизмлар.

Софизм деб одатда олдиндан хато қилиб тузилган, юзаки қараганда тўғри бўлиб кўринадиган, лекин янглиш натижага олиб келадиган хулосага айтилади.

Кўп ҳолларда математик софизмлар математик қонун ва қоидаларни нотўғри ёки тўлиқ бўлмаган ҳолда татбиқ қилиш, мантиқнинг маълум нормаларини бузилиш асосида тузилади. Софизмни очиш - бу даъвони исботлашда муҳокамада йўл қўйилган хатони кўрсатишдир. Софизмларни очишни ўрганиш танқидий муҳокамани ривожлантиришга имкон яратади, математик тасдиқнинг ҳар бир натижасини текшириш ва исботлашнинг қанчалик зарурлигини кўрсатади.

Ечимларида биринчи қарашда сезиб бўлмайдиган хатолар бўлган бир неча содда софизм ва масалаларни кўриб чиқамиз.

1-масала. Бир сўм юз тийинга тенг эмас.

Маълумки, тенгликни бузмаган ҳолда, ихтиерий иккита тенгликни ҳадма ҳад кўпайтириш мумкин, яъни , агар $a=b$ ва $c=d$, у ҳолда $ac=bd$. Бу тахминни иккита маълум тенгликка қўллаймиз: 1 сўм = 100 тийин ва 10 сўм = 1000 тийин. Ҳадма - ҳад бу тенгликни кўпайтирсак, қуйидагини оламиз: 10 сўм = 100 000 тийин ва охирги тенгликни 10 бўлиб, 1 сўм = 10 000 тийинни хосил қиламиз. Шундай қилиб, бир сўм 100 тийинга тенг эмас. Хато қаерда?

<u>Софизм таҳлили</u>: Бу софизмда қўйилган хато, номланган катталиклар билан бажарилган амаллар қоидасининг бузилишидан иборат: катталиклар устида бажарилган ҳамма амаллар, уларинг ўлчами устидан хам бажарилиш керак эди.

2-масала. Икки кара икки - беш

Қуйидаги айниятни ёзамиз. $4 \div 4 = 5 \div 5$. Айниятнинг ҳар иккала қисмидан умумий кўпайтувчиларни қавсдан ташқарига чиқарамиз, $4(1 \div 1) = 5(1 \div 1)$ ёки $2 \cdot 2 = 5$ ни ҳосил қиламиз. $1 \div 1 = 1$ бўлганлиги учун қисқартирамиз $4 = 5$ ни ҳосил қиламиз. Хато қаерда?

<u>Софизм таҳлили</u>: Хато чап тарафдан 4 ва ўнг тарафдан 5 ни умумий кўпайтувчи қилиб қавсдан чиқарганимизда. Хақиқатдан $4 \div 4 = 1 \div 1 = 1$, лекин $4 \div 4 \neq 4(1 \div 1)$.

3-масала. Гугурт таёқчаси телеграф столбасидан икки баробар узун

Айтайлик a *дм*- гугурт таёқчасини узунлиги ва b *дм*- столба узунлиги. a ва b орасидаги фарқни c деб белгилаймиз. Қуйидагига эга бўламиз $b-a=c, b=a+c$. Хар иккала тенгликни мос қисмларини купайтириб чиқамиз ва $b^2-ab=ca+c^2$ ни ҳосил қиламиз. Ҳар иккала қисмдан bc ни айирамиз. $b^2-ab-bc=ca+c^2-bc$, ёки $b(b-a-c)=-c(b-a-c)$, бу ердан $b=-c$, лекин $c=b-a$, шунинг учун $b=a-b$, ёки $a=2b$ ни оламиз. Хато қаерда?

<u>Софизм таҳлили</u>: $b(b-a-c)=-c(b-a-c)$ ифодада $b-a-c$ га бўлиш бажарилади, лекин буни қилиш мумкин эмас, чунки $b-a-c=0$. Демак, гугурт таёқчаси телеграфф столбасидан узун бўлиши мумкин эмас.

4-масала. Ярим бўш ва ярим тўла

Ярим бўш ярим тўла билан бир ҳил дегани. Агар яримлари тенг бўлса, демак, бутунлари ҳам тенг дегани. Бундан бўш, тўла билан тенг дегани.

<u>Софизм таҳлили</u>: Равшанки, келтирилган мулохаза нотўғри, чунки унда ноқонуний харакат қулланиляпти: 2 баробарга катталаштириш. Бу ҳолатда унинг қўлланилиши маъносиз.

5-масала. Ўқиш софизми

Инглиз талабалари томонидан тўқилган қўшиқ:

The more you study, the more you know
The more you know, the more you forget
The more you forget, the less you know
The less you know, the less you forget
The less you forget, the more you know
So why study?

<u>Таржима.</u>

Қанча кўп ўқисанг, шунча кўп биласан.
Қанча кўп билсанг, шунча кўп унутасан.
Қанча кўп унутсанг, шунча кам биласан.
Қанча кам билсанг, шунча кам унутасан.
Лекин қанча кўп унутсанг, шунча кўп биласан.
Унда ўқишни нима кераги бор?

6-масала. Ортиқча бир соат қаердан пайдо бўлиб қолди?

Арава 336 км юриши керак эди. Йўлнинг биринчи ярмида у юксиз соатига 8 км тезлик билан, иккинчи ярмида эса юк билан соатига 6 км тезлик билан юрди. Шундай қилиб, араванинг ўртача тезлиги

$\frac{6+8}{2}=14(\text{км/соат})$ га тенг ва у бутун йўлни 336:7=48 соатда босиб ўтиши керак.

Бошқача мулоҳаза юритиб, йўлнинг биринчи қисмига 168:8=21 соат, иккинчи қисмига эса 168:6=28соат , ҳаммасига 21соат+28соат=49соат сарф қилинганини кўрамиз.

Ортиқча бир соат қаердан келиб қолди?

Софизм таҳлили, хато араванинг ўртача тезлигини нотўғри ҳисоблашда. Агар арава йўлнинг биринчи ва иккинчи қисмини айни бир хил вақт ичида юргандагина ўртача тезликни биз қўллаган усул билан топса бўлар эди. Бироқ арава соатига 8 км тезлик билан юргандаги вақт арава соатига 6 км тезлик билан юргандаги вақтга қараганда кам бўлгани учун ўртача тезлик соатига 7 км дан кам бўлади.

$$336 \div (21+28) = 6\frac{42}{49}(\text{км/соат}).$$

Ҳақиқатан, арава соатига 7 км тезлик билан 42 соат юрган. Бу вақтда у $7 \cdot 42 = 294\text{км}$ юрган, қолган $(336-294)\text{км} = 42\text{км}$ ни соатига 4*км* тезлик билан 7 соатда (42:6) босган. Шундай қилиб, арава $(42+7)\text{соат} = 49$ *соат* йўлда бўлган.

7-масала. Бир сўм қани?

Икки саватнинг ҳар бирида 30 тадан анор бўлиб, улар қуйидаги нарх билан сотилади: биринчи саватдаги анорнинг 3 таси бир сўм, иккинчи саватдаги анорнинг иккитаси бир сўм. Сотувчи аёл бу анорларни $\frac{30}{2}+\frac{30}{2}=25$ сўмга сотишини ҳисоблади.

У қуйидагича мулоҳаза юритди: биринчи саватдаги анорларнинг учтаси бир сўм, иккинчи саватдаги анорларнинг иккитаси бир сўм, демак, бешта анорни икки сўмдан сотсам бўлади. Барча анорларни аралаштириб юборди. Сотувчи аёл анорларни сотиб бўлгач, ўйлаганидек 25 сўм эмас, 24 сўм бўлганини пайқади. Ҳақиқатан, 60:5=12 (бештадан), 2 сўм 12 = 24 сўм. Бир сўм қани?

Софизм таҳлили Биринчи саватдан 3 донадан 10 марта анор олиш мумкин, иккинчи саватдан эса 2 донадан 15 марта анор олиш мумкин. Ўнта 3 тадан олинганини (3 таликлар 10 та эди) ўнта иккитадан олинган анорлар билан бирлаштириб ҳар бештасини 2

сўмдан сотиш мумкин бўлган ўнта бешталик ҳосил қилдик (2 сўм • 10 = 20 сўм). Иккинчи саватда қолган 10 та анорнинг ҳар иккитаси ни бир сўмдан, яъни 5 сўмга сотиш керак эди, сотувчи аёл эса бу ўнта анорни (бештасини икки сўмдан) 4 сўмга сотди, натижада 1 сўм зарар кўрди.

8-масала. Туяларни бўлиш.

Қари бир чол ўлимидан сўнг туяларини ўғиллари бўлиб олишларини васият қилди. Бунда катта ўғли барча туяларнинг ярмисини, ўртанча ўғли учдан бирини ва кичик ўғли тўққиздан бирини олиши керак эди. Чол ўлди ва ундан ўғилларига 17 та туя мерос қолди. Ўғиллар туяларни бўлмоқчи бўлишди, бироқ 17 сони на 2 га, на 3 га ва на 9 га бўлинар эди. Уларнинг боши қотиб қолди. Шу пайт уларнинг олдидан туя минган донишманд ўтиб қолади. Ака-укалар ундан ёрдам сўрашди: донишманд ўзининг туясини тўдага қўшиб, 18 та туяни ака-укалар ўртасида бўла бошлади. Катта ўғил $18 \cdot \frac{1}{2} = 9$ туя, ўртанча ўғил $18 \cdot \frac{1}{3} = 6$ туя ва кичик ўғил $18 \cdot \frac{1}{6} = 2$ туя олди. Шундай йўл билан меросни ака-укалар ўртасида бўлиб бергач, „Мен сизларга ўзла- рингизнинг 17 та туянгизни қолдираман”, –деди ва ўз туясига миниб йўлида давом этди. Бундай бўлишни қандай тушунтириш керак?

Софизм таҳлили Агар ака-укаларга қолган меросни 1 билан белгиласак, у ҳолда ўғилларга ажратилган қисмларнинг йиғиндиси бирни бермайди: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$. Демак $1-\frac{17}{18}=\frac{1}{18}$ қисм бўлишда иштирок этмай қолди, бунга ақли етган донишманд ўзининг туясини қўшиб, 18 та туяни бемалол $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}$ нисбатларда бўлди. $\frac{1}{18}$ қисм, яъни битта ортиқча эканлигини билган донишманд ўз туясидан ажраб қолмаслигига ишончи комил эди.

9-масала. “Уч тўртга тенг“.

Ушбу система берилган:

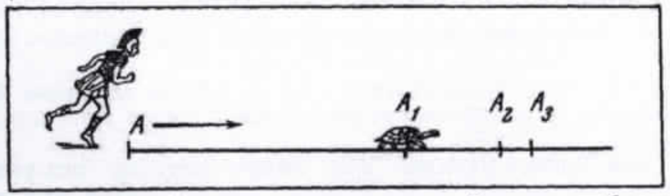
$$\begin{cases} x+2y=3 \\ x=4-2y \end{cases}$$

Бу системани ўрнига қўйиш усули билан ечамиз: $x=4-2y$ ни биринчи тенгламага қўямиз. Натижада $x=4-2y+2y=3$, яъни 4=3 ни ҳосил қиламиз.

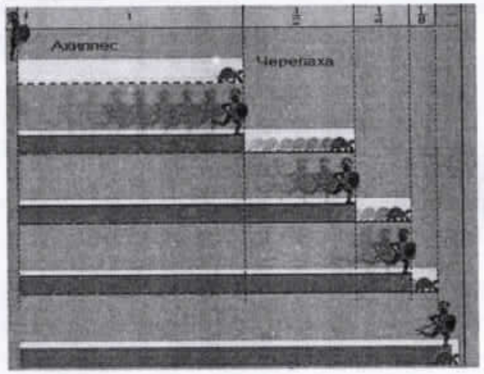
Софизм таҳлили, ҳосил қилинган маъносиз натижа система ечимга эга эмаслигидан далолат беради. Ҳақиқатан, биринчи тенгламада $x+2y$ йиғинди учга тенг, иккинчи тенгламадан эса худди шу $x+2y$ йиғиндини тўртга тенглиги келиб чиқади.

10-масала. Ахиллес ва тошбақа.

Ахиллес (қадимги грек афсоналаридаги қаҳрамон) ва тошбақа туғрига ва бир томонга характлана бошлашди, тошбақа Ахиллесдан 1000 метр олдинда. Тошбақани судралишига нисбатан, Ахиллес 10 баробар тезроқ югуради. Ахиллес ҳеч қачон тошбақани етиб ололмайди.



<u>**Софизм таҳлили**</u>: Ахиллес ҳеч қачон тошбақани етиб ололмайди,



чунки у, тошбақа турган жойгача 1000 метр югуриб ўтгунча, тошбақа яна 100 мерт олдинга судралади. Ахиллес яна 100 мерт ўтгунча, тошбақа яна бироз олдинга судралади. Ва бу чексиз давом этади: ҳар сафар Ахиллес тошбақа турган жойгача боргунча, тошбақа маълум бир масофани босиб ўтган бўлади. Бирон бир вариантда ечимини тушунтириш керак.

Математик парадокслар.

Парадокс (юнонча "жуфтлик" - "қарши", "доха" - "фикр") софизмга яқин. Аммо бу ундан атайлаб олинган қарама-қарши натижа эмаслиги билан фарқ қилади.

Парадокс - бу умумий қабул қилинган фикрга зид бўлган галати баёнот, шунингдек, соғлом фикрга зид бўлган (баъзан фақат бир қарашда) фикрга (Озҳегов луғати).

Кенг маънода, парадокс - бу ҳақиқат аниқ бўлмаган баёнот. Ҳар қандай кутилмаган қарама-қарши баёнотлар парадоксал деб номланади.

Математик парадокс - бу ҳақиқатни ҳам, ёлғонни ҳам исботлаш мумкин бўлган баёнот.

Математик софизмларни баъзан парадокслар деб ҳам аташади. Кўпинча, одатдаги тасаввурларга мос келмайдиган тасодифий ҳодисалар парадокс ҳисобланади. Шу нуқтаи назардан баъзи бир математик софизмларни парадокс деб юритиш мумкин, бироқ одатда математик парадокс дейилганда юзаки қарагандагина маъносиз бўлиб туюлувчи, аслида эса тўғри бўлган тасдиққа айтилади. Бир нечта содда математик парадоксларни қараймиз.

1-масала. Ёлғончининг парадокси

Эпименид Критян "ҳамма критянлар ёлғончи" деб айтган. Эпимениднинг ўзи критян. Бундан келиб чиқадику, уни ўзи 1 ёлғончи. Лекин, агар Эпименид ёлғончи бўлса, у ҳолда унинг ҳамма критянлар ёлғончи деган фикри – ёлғон бўлади. Демак, критянлар ёлғончи эмас. Шу билан бир қаторда Эпименид, шартга кўра, критян, демак, у ёлғончи эмас, ва шунинг учун унинг "ҳамма критянлар ёлғончи" деган фикри-тўғри.

2-масала. Сартарош парадокси

Ягона эркак-сарторош яшайдиган қандайдир қишлоқда,

буйруқ берилган: "Сарторош, қишлоқдаги фақат ўзи соқол ололмайдиган фуқорога хизмат кўрсатиш мумкин". Сўраляпти, сарторош ўзини ўзи соқолини ололадими? Ололмайди гуёки, сабаби бу бўруққа хилоф. Лекин шу билан бир қаторда, агар у ўзини соқолини олмаса, демак у ўзини ўзи соқолини ололмайдиган фйқоролар руйхатига киради, бундай одамлар сарторош соқолини олиш хуқуқига эга.

3-масала. Уюм парадокси

Иккита дўст шундай гап юритишди.

- Қум уюмини кўряпсанми?- деб сўради биринчиси

- Менку уни кўряпман, - деди иккинчиси – лекин у аслида у ерда йўқ эди.

- Нега? – деб ҳайрон қолди биринчиси.

- Жуда оддий, - деди иккинчиси.

- Кел мулоҳаза қилиб кўрайлик: битта қум донаси, маълумки уюмни ҳосил қилмайди. Агар n та қум донаси уюм ҳосил қилмаса, унга яна битта қум донасини қўшса, аввалгидек улар уюм ҳосил қилмайди. Демак, ҳеч қандай сондаги қум донаси уюм ҳосил қилмайди, яъни қум уюмини.

4-масала. Ёзув парадокси. Бир варақ қоғознинг бир томонига „Орқа томонда ёзилган жумла ҳақиқат" деб, орқа томонига эса „Орқа томонда ёзилган жумла ёлғон" деб ёзилган.

Айтайлик, биринчи ёзув тўғри бўлсин, у ҳолда у бир вақтнинг ўзида ёлғон ҳамдир, чунки тўғри деб орқа томонда ёзилган жумлани олиш керак бўлади.

Энди биринчи ёзув ёлғон бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда қоғознинг орқа томонида ёзилган тасдиққа ишониш керак эмас, демак, биринчи томонда ёзилган ёзув ёлғон эмас, тўғри экан. Яна қарама-қаршиликка дуч келдик.

5-масала. Континуум муаммоси парадокси. Чексиз тўпламларни, жумладан, улар ичида энг кичик қувватга эга бўлган саноқли тўпламни („алеф-нол"), ундан кейин келадиган континуум қувватга эга бўлган тўпламларни текшириш натижасида „саноқли тўплам қуввати билан континуум қуввати орасидаги қувватга эга бўлган тўплам мавжуд эмасми?" деган савол пайдо бўлди. Бу савол континуум муаммоси деган ном олди. Тўпламлар назарияси асосчиси Георг Кантор оралиқ тўплам мавжуд эмас деган фикрни айтган (континуум гипотеза). Яна парадокс: маълум бўлишича континуум гипотезасини на рад этиб бўлади, на исбот қилиб бўлади!

Немис математиги Курт Гёдел Кантор гипотезасини ҳеч қандай усул билан рад этиб бўлмаслигини исботлади, 1963 йилда эса Пол Коэн континуум гипотезага қарама-қарши бўлган фикрни

ҳеч қандай мантиқий мулоҳазалар ёрдамида рад этиб бўлмасликни, яъни саноқли тўпламлардан қувватлироқ, бироқ континуум тўпламидан қувватсиз бўлган оралиқ тўпламлар мавжуд эканлигини рад этиш мумкин эмаслигини исбот қилди.

Тўпламлар назарияси фақат математикага, мантиққа, фалсафага эмас, балки амалиётга олиб борувчи кенг истиқболлар очилиб бормоқда. „Тўпламларнинг элементлари турли хил нарсалар: ҳарфлар, атомлар, сонлар, функциялар, нуқталар, бурчаклар ва ҳоказолар бўлиши мумкин. Бу ердан энг аввал тўпламлар назариясининг жуда ҳам кенглиги ва унинг бўлимларининг кўпгина соҳаларига (математикага, механикага, физикага) татбиқ қилиниши равшандир" (Н. Н. Лузин).

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МАСАЛАЛАР

II-БОБ КОМБИНАТОРИЯ ВА НОСТАНДАРТ МАСАЛАЛАР

1. а) Сеҳирли шаҳарда учта шаҳар бор A, B ва C. A шаҳардан B шаҳарга 6та йўл оборади, B шаҳардан C шаҳарга эса 4та йўл. Неча хил усулда A шаҳардан B шаҳарга бориш мумкин?

б) Сеҳирли шаҳарда яна бир шаҳар D қурилди ва бир нечта янги йўллар-иккита A шаҳардан D шаҳарга ва иккита D шаҳардан C шаҳарга. Энди неча хил усулда A шаҳардан C шаҳарга бориш мумкин?

Йиғинди қоидаси.

Агар a элементни m усуллар ёрдамида танлаш мумкин бўлса, b элементни(a элемент қандай бўлишидан каттий назар) $-n$ усуллар ёрдамида, «a ёки b» танлашда $m+n$ усулларидан фойдаланиш мумкин.

Кўпайтма қоидаси.

Агар a элеметни m усуллар ёрдамида танлаш мумкин бўлса, b элеметни (b элемент қандай бўлишидан қаттий назар) n усуллар ёрдамида,у холда «a ёки b» танловни $m \cdot n$ усулларидан фойдаланиш мумкин.

2. Нечта хар хил етти хонали телефон рақамлари мавжуд (рақам 0 сонидан бошланиши мумкин эмас)

3. Машина рақами 3 та рус алфавитидаги харф (30 та харф) ва 3 та рақамдан иборат. Неча хил машина рақамлари мавжуд?

4. Мактабларнинг бирида хар бир ўқувчи 32 та ўқувчи қизлар билан таниш, хар бир ўқувчи қизлар эса 29 та ўқувчи ўғил болалар билан. Мактабда қизлар кўпми ёки ўғил болалар? Кўп бўлса, қанчага?

5. Қадимги қабилаларнинг бирини тилида 6 та унли ва 8 та ундов харфлари бор эди. Сўзларни тузишда унли ва ундош харфлар алмашиниб келади. Бу тилда 9 та харфдан нечта сўз тузиш мумкин?

6. Мумбо Юмбо қабиласини алифбоси 3 та харфдан иборат эди. Сўз ихтиёрий кетма кетликлардан иборат бўлиб, 4 тадан ошмайдиган харфлардан тузилган. Мумбо Юмбо кабиласи тилида нечта сўз мавжуд ?

7. Бешга бўлинадиган олти хонали сонлар нечта ?

8. Ҳеч бўлмаганда битта жуфт рақамга эга бўлган олти хонали сон нечта?

9. Ҳеч бўлмаганда иккита бир рақамга эга бўлган тўққиз хонали сонлар нечта ?

10. Бир ёки бошқаларидан иборат бўлган қайси етти хонали сон катта

11. Йўловчи буюмларини автоматик сақлаш камерасида қолдирди, келганида эса рақам эсидан чиқди. Уни эсида қолгани шуки, унда 23 ва 37 рақамлари бор эди. Камерани очиш учун эса бешхонали сонни тўғри териш керак. Камерани очиш учун камида нечта рақамларни қўйиш мумкин ?

12. Ўнгдан чапга ҳам , чапдан ўнгга ҳам бир хил ўқиладиган нечта бешхонали сон мавжуд (масалан, 54345, 17071)?

13. Йиғиндиси жуфт бўлган тўққиз хонали сонлар нечта?

14. 7 хил тангани неча хил усул билан чўнтакка солиш мумкин?

15. Агар натурал сонни «келишган» деб ҳисобласак, яъни у фақат тоқ сондан иборат бўлса. Унда нечта 4 хонали «келишган» сонлар мавжуд?

16. *Шахмат доскасининг иккита катакчасида оқ ва қора фишкалар турибди.Битта юриш билан уларнинг биттасини қўшни катакка горизонтал ва вертикал тарзда ўтказиш мумкин. (иккита фишка битта катакчада туриши мумкин эмас). Натижада иккита фишка орқали хар хил жойлаштириш варианларига эришиш мумкинми? Бир марталик тенглаштирганда.

17. Хар бир инсоннинг бошида соч толалари миллиондан кам бўлмаса, москваликлар орасида иккита шундай инсон борки, уларнинг сочлар микдори бир хил эканлигини исботланг.

18. Қопда фақат рангида фарқи бўлган 70 та шар бор: 20 та қизил, 20 та кўк, 20 та сариқ , қолганлари оқ ва қора. Уларнинг 10 тадан кам бўлмаган рангликларини олиш учун, қопдан нечтадан шар чиқариш керак.

19. Чекли тўпламнинг ихтиёрий нуқталари кесмалар билан туташтирилган, шундай иккита нуқта топиладики, бунда кесмани тенг бўлакларга бўлинишини исботланг.

20. 1 дан $2k+1$ гача бўлган рақамлар билан номерланган $2k+1$ та карточка бор. Ҳеч қайси бир кўчирма рақамлар бошқа кўчирма рақамлар йиғиндисига тенг бўлмаган, қандай энг катта рақамли карточкани танлаб олиш мумкин?

21. Иккита бир бирини ура олмайдиган шоҳни шахмат доскасига қандай қилиб жойлаштириш мумкин?
22. 100 та одам айлана стол ёнида ўтирибди, уларнинг ярмидан кўпи эркакларни ташкил килади. Икки эркак қарама қарши ўтирганини исботлаб беринг?
23. Омборхонада 200 та жуфт этик бор: 41, 42, 43 размерларда, улардан 600 тасини 300 тасини чап ва 300 тасини ўнг ташкил қилади. Уларнинг ичида 100 тадан кам бўлмаган яроқли этик борлигини исботланг?
24. Бир нечта футбол командалари битта айланада турнир ўтказишмоқда. Исталган пайт, иккита команда бир хил матч ўйнаш мумкинлигини исботлаб беринг?
25. *51 та ҳар – хил икки хонали сон берилган бўлсин. (бир хонали сонни 0 рақами билан икки хонали сон деб ҳисоблаймиз). Булар ичидан шундай 6 та сонни олингки, улардан 2 таси бир хил тартибдаги хар хил рақам эканлигини исботланг?
26. 1 дан 101 гача бўлган сонлар ихтиёрий тартибда ёзилган бўлсин. Улардан 90 тасини шундай ўчирингки, бир бири билан ўсувчи ёки камаювчи тартибда 11 та сон қолишини исботланг?
27. 1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 билан нечта ҳар хил тўғри каср тузиш мумкин?
28. 2, 3, 5, 7 рақамларидан нечта хар хил тўрт хонали сон тузиш мумкин?
29. 15 та лоторея билетининг 3 тасига ютуқ чиқади. 7 та билет олиниши керак. 7 та билетнинг камида 1 таси ютуқли чиқадиган қилиб, нечта хил усул билан олиш мумкин?
30. Тенгламани ечинг:

$$a)\ \frac{A_x^4 \cdot P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42$$

$$b)\ \frac{A_x^5}{C_{x-2}^{x-5}} = 336$$

$$c)\ A_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 48$$

31. Ҳар хил рангли еттита лентадан нечта усул билан тўрт рангли лента тузиш мумкин?

III- БОБ. АЛГЕБРАИК ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

3.1-§. Тенгламалар. Каср – рационал тенглама ва тенгсизликлар. Тенглама ва тенгсизликларни турли усуллар билан ечиш.

Ҳар қандай $f(x)$ ва $g(x)$ функциялардан тузилган

$$f(x) = g(x) \tag{1}$$

кўринишдаги ифодага бир ўзгаривчили (номаълумли) тенглама деб айтилади.

Бунда x номаълум ҳисобланади. $x = x_0$ ҳақиқий сонда (1) тенгламанинг чап ва ўнг томони аниқланган бўлиб, $f(x_0)$ ва $g(x_0)$ қийматлар ўзаро тенг бўлса, у ҳолда x_0 шу тенгламанинг ечими (илдизи) дейилади.

Тенгламанинг барча илдизлари тўплами унинг *ечимлари тўплами* дейилади. Агар бу тўплам бўш бўлса, тенглама *ечимга эга эмас* деб аталади.

Агар икки тенгламанинг илдизлари тўплами айнан бир хил тўпламдан иборат бўлса, у ҳолда улар ўзаро тенг кучли тенглама дейилади. Масалан, $5x^2+2=7$ ва $3x^2=3$ тенгламалар тенг кучлидир, чунки уларнинг ҳар бири бир хил илдизлар тўпламига эга: $\{-1;1\}$.

Агар икки тенгламадан биринчисининг ҳар қандай илдизи иккинчисининг ҳам илдизи бўлса, у ҳолда иккинчи тенглама биринчисининг *натижаси* дейилади. Агар $f_1(x) = g_1(x)$ тенглама (1) тенгламанинг натижаси бўлса, бу қуйидагича ёзилади:

$$f(x) = g(x) \to f_1(x) = g_1(x) \tag{2}$$

Аксинча, $f_1(x) = g_1(x)$ ва $f(x) = g(x)$ тенгламалар *ўзаро тенг кучли* бўлса, уларнинг ҳар бири иккинчисининг натижаси бўлади. У ҳолда бу бундай ёзилади:

$$f(x) = g(x) \leftrightarrow f_1(x) = g_1(x). \tag{3}$$

Масалан, $x = x^2$ тенгламанинг барча илдизлари $x^2 = x^4$ тенгламанинг ҳам ечими бўлгани учун, иккинчи тенглама аввалгисини натижасидир. $\sqrt{x} = -x$ тенглама ҳам $x = x^2$ тенглама каби натижага эга. $\sqrt{x}=x$ тенгламани $x=x^2$ тенгламага тенг кучли эканлигини текшириш қийин эмас. Ҳақиқатдан ҳам,

$a)\ x=-\sqrt{x}\to x=x^2\to x^2=x^4;\qquad b)\sqrt{x}=x\to x=x^2$.

Берилган (1) тенгламанинг ўнг ва чап томонларидаги функциялари аниқланиш соҳаларининг кесишмаси $D_0=D(f)\cap D(g)$ шу тенгламанинг *аниқланиш соҳаси* деб аталади.

Қўйида талабага исботи осон бўлган бир нечта зарур тастиқлар исботсиз келтирилади.

1) Агар $\varphi(x)$ функция $D_0=D(f)\bigcap D(g)$ да аниқланган бўлса, у ҳолда.

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x).$$

Хусусан, $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)-\varphi(x)=0.$

2) Агар $\varphi(x)$ функция $D_0=D(f)\bigcap D(g)$ да аниқланган бўлса, у ҳолда

$$f(x)=g(x)\Rightarrow f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x).$$

Шу билан бирга ҳар бир $x\in D_0$ учун $\varphi(x)\neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x)$$

Хусусан, $a\in R$ ва $a\neq 0$ бўлганда: $f(x)=g(x)\Leftrightarrow af(x)=ag(x).$

3) Ҳар қандай $f(x),g(x)$ ва $\varphi(x)$ лар учун

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=g(x)\Rightarrow f(x)=g(x)\varphi(x).$$

Хусусан, $\varphi(x)$ ни нолга айлантирмайдиган тўпламда $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=g(x)$ тенглама билан $f(x)=g(x)\varphi(x)$ тенглама айнан бир хил ечимларга эга (яъни ўзаро тенг кучли):

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x)\varphi(x),\\ \varphi(x)\neq 0.\end{cases}$$

4) $f(x)g(x)=0$ тенгламанинг ҳар бир ечими $f(x)=0$ ёки $g(x)=0$ тенгламаларнинг камида биттасининг ечимидир:

$$f(x)g(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\ g(x)=0\end{array}\right.$$

Агар $f(x)$ функцияси $g(x)=0$ тенгламанинг ҳар бир илдизида ва $g(x)$ функцияси эса $f(x)=0$ тенгламанинг ҳар бир илдизида аниқланган (мавжуд) бўлса, у ҳолда

$$f(x)g(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0,g(x)-\text{мавжуд}.\\ g(x)=0,f(x)-\text{мавжуд}.\end{array}\right.$$

5) Ҳар қандай $n\in N$ учун

$$f(x)g(x)\Rightarrow(f(x))^n=(g(x))^n.$$

Агар $f(x)=g(x)$ тенгламанинг ҳар икки томони x номаълумга нисбатан кўпҳад (ёки каср-рационал функция) бўлса, бундай тенглама *алгебраик* (*каср-рационал*) *тенглама* деб аталади.

Ушбу

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0,\qquad a_n\neq 0\qquad (4)$$

тенглама *n-даражали* (*бутун рационал*) *тенглама* дейилади.

$n=2$ ҳолга тўхталмаймиз. $n\geq 3$ бўлганда алгебраик тенгламанинг илдизларини аниқлашнинг баъзи усуллари мисоллар ечиш орқали кўрсатилади.

Ушбу 1-теорема тенгламанинг рационал илдизи мавжудлигининг белгиси ҳисобланади.

1-теорема. Агар коэффициентлари бутун сон бўлган (4) тенглама $\frac{m}{n}((m,n)=1)$ каби рационал илдизга эга бўлса, у ҳолда a_0 сон m га, a_n эса n га қолдиқсиз бўлинади.

2-теорема(Безу теоремаси). Агар (4) тенглама $x=a$ *илдизга эга бўлса, унинг чап томони* $x-a$ *га қолдиқсиз бўлинади.*

Мисол. Тенгламани ечиш:

$$x^4+2x^2-7x-10=0$$

Ечиш: ***1-усул.*** Бу тенгламада $a_n=1$, $a_0=-10$ бўлгани учун a_0 нинг $\pm1,\pm2,\pm5,\pm10$ бўлувчиларини аниқлаймиз. 1-теоремага кўра, тенгламада x нинг ўрнига шу қийматларни қўйиб кўрсак, унинг $x_1=-1,x_2=2$ илдизлари аниқланади. Безу теоремасига асосан, тенгламанинг чап томони $x+1$ ва $x-2$ га, шу жумладан $(x+1)(x-2)=x^2-x-2$ га бўлиниши келиб чиқади: Ҳосил бўлган бўлинмадаги кўпҳад яна нолга тенглантанда унинг ҳақиқий ечими йўқлиги аниқланади. Шунинг учун уни ташлаб юборади:

$$x^4+2x^2-7x-10=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm3}{2}.$$

Жавоб: $x_1=-1, x_2=2.$

2-усул. Баъзида кўпҳадни бир қанча $x^2+p_kx+q_k\ (k=1,2,...)$ уч ҳадлар кўпатмаси тарзида ифодалашга келтириб ечиш фойдали. (Бунда p_k ва q_k лар излаб аниқланадиган коэффициентлар). Берилган (2) тенглама ҳам $n=4$ даражали бўлгани учун

$$x^4+2x^2-7x-10=(x^2+px+q)(x^2+ax+b) \qquad (5)$$

деб, қавсларни очиб чиқиб, бир хил даражали x нинг коэффициентлари ўзаро тенглаштирилса, номаълум p,q,a,b лар аниқланади;

$$x^4+2x^2-7x-10=x^4+(a+p)x^3+(b+q+pa)x^3+(pb+qa)x+qb,$$

яъни, бу ердан изланаётган p,q,a,b лар учун ушбу шартлар ҳосил бўлди;

$$a+p=0, b+q+pa=2, pb+qa=-7, bq=-10.$$

Бу тенгламалар системаси ечилиб, $p=-1, q=-2, a=1, b=5$ топилади.

У ҳолда:

$$x^4+2x^2-7x-10=(x^2-x-2)(x^2+x+5).$$

Бундан ҳар бир кўпайтувчини нолга тенглаб, 1-усулдаги сингари жавоб олинади.

Таъриф. Агар (4) тенгламада $a_n=a_0, a_{n-1}=a_1, a_{n-1}=a_2,...$ шарт бажарилса, у n-даражали *қайтма* тенглама дейилади.

3-теорема. *Ҳар қандай $2k\,(k\in N)$ даражали қайтма тенглама $t=x+\frac{1}{x}$ га нисбатан k даражали алгебраик тенгламага тенг кучли алмашади:*

$$a_{2k}x^{2k}+a_{2k-1}x^{2k-1}+...+a_1+a_0=x^k(a_{2k}t^k+a_{2k-1}t^{k-1}+...) \qquad (6)$$

4-теорема. *Ҳар қандай $2k+1\,(k\in N)$ даражали қайтма тенгламанинг чап томони $x+1$ га қолдиқсиз бўлиниб, бўлинмаган жуфт даражали тенглама ҳосил бўлади.*

Бу теоремаларни талабалар машқ тариқасида мустақил исботлашлари мумкин. Бунда $t=x+\frac{1}{x}$ учун ушбу айниятлар қўлланилади:

$$\begin{aligned}
&1)\ x^2+x^{-2}=t^2-2;\\
&2)\ x^3+x^{-3}=t^3-3t;\\
&3)\ x^4+x^{-4}=t^4-4t^2+2;\\
&4)\ x^5+x^{-5}=t^5-5t^3+5t;\\
&5)\ x^6+x^{-6}=t^6-6t^4+9t-2;
\end{aligned} \qquad (7)$$

2-мисол. Тенгламани ечиш:

$$4x^{11}+4x^{10}-21x^9-21x^8+17x^7+17x^6+$$
$$+17x^5+17x^4-21x^3-21x^2+4x+4=0$$

Ечиш: *1-усул:* Бу тоқ яъни 11-даражали қайтма тенглама, демак, у $x+1$ га бўлинади.

Шу бўлишни бажариб, берилган (6) га тенг кучли ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$(x+1)(4x^{10}-21x^8+17x^6+17x^4-21x^2+4)=0.$$

Иккинчи қавс жуфт даражали қайтма тенглама, демак, $t=x+x^{-1}$ деб юқоридаги (7) айниятга кўра

$$4x^{10}-21x^8+17x^6+17x^4-21x^2+4=t^5(4t^5-4t^3+100t)$$

ни топамиз $t\neq0$ бўлгани учун

$$4t^4-4t^3-100t=0 \Leftrightarrow t_{1,2}=\pm2.5 \Leftrightarrow t_{3,4}=\pm2,;$$

$$x_{1,2}=\pm2 \Leftrightarrow x_{3,4}=\pm0.5 \Leftrightarrow x_{5,6}=\pm1 \Leftrightarrow x_{7,8}=\pm1$$

тенглама илдизларининг каррали эканини хисобга олиб, жавоб ёзамиз.

2-усул: Иккинчи қавс жуфт даражали қайтма тенгламани Горнер схемаси асосида ечиб кўрамиз.

	4	0	-21	0	17	0	17	0	-21	0	4
2	4	8	-5	-10	-3	-6	5	10	-1	-2	0
-2	4	0	-5	0	-3	0	5	0	-1	0	
1	4	4	-1	-1	-4	-4	1	1	0		
-1	4	0	-1	0	-4	0	1	0			
1	4	4	3	3	-1	-1	0				
-1	4	0	3	0	-1	0					

Бундан, $(4x^4+3x^2-1)(x+2)(x-2)(x+1)^2(x-1)^2$ кўпҳадлар кўпайтмасига келтириб оламиз. Ҳар бир кўпҳадни нолга тенглаштириб тенгламани ечимини топамиз.

Энди $4x^4+3x^2-1=0$ тенгламанинг рационал илдизларини топамиз. Бунинг учун тенгламанинг ҳар бир коэффициентини 4 га бўлиб юборамиз. Ва, $x^4+\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{4}=0$ тенгламани ечамиз. Озод ҳаднинг илдизлари: $\pm1,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{4}$ да тенглама ечимини текширамиз.

	1	0	3/4	0	1/4
1/2	1	1/2	1	1/2	0
-1/2	1	0	1	0	

Бундан, $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^4+x^2\right)=0$. Ҳар бир кўпҳадни 0 га тенглаштириб тенгламани ечимларини топдик.

Жавоб: $\left\{-2;-1;-\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;2\right\}$.

3-мисол. Тенгламани ечинг:

$$x^4+10x^3-9x^2+10x+1=0 \qquad (8)$$

Ечиш: Бу 4- даражали тенглама бўлгани учун уни $x^2(x\neq0)$ га бўлиб, (7) даги айниятлардан фойдалансак: бу тенглама 4 та ҳақиқий ечимга эга эмас.

$$x^2+\frac{1}{x^2}+10(x+\frac{1}{x})=9 \Leftrightarrow t^2+10t-11=0 \Leftrightarrow t_{1,2}=-5\pm6$$

$$a)x+\frac{1}{x}=t_1 \Rightarrow x^2-x+1=0$$

$$b)x+\frac{1}{x}=t_2 \Rightarrow x^2+11x+1=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{117}}{2}.$$

Жавоб: $\left\{-5,5\pm\sqrt{29,25}\right\}$.

Баъзида алгебраик тенглама номаълум билан белгилаш усули орқали квадрат тенгламага келтирилиб ечилади.

4-мисол. Тенгламани ечинг:

$$3x^2+3x+1=(x^2+x+1)^2 \qquad (9)$$

Ечиш: $t=x^2+x+1$ деб олинса, бу тенглама бундай ёзилади.

$$(9)\Leftrightarrow(x^2+x+1)^2-3(x^2+x+1)+2=0$$

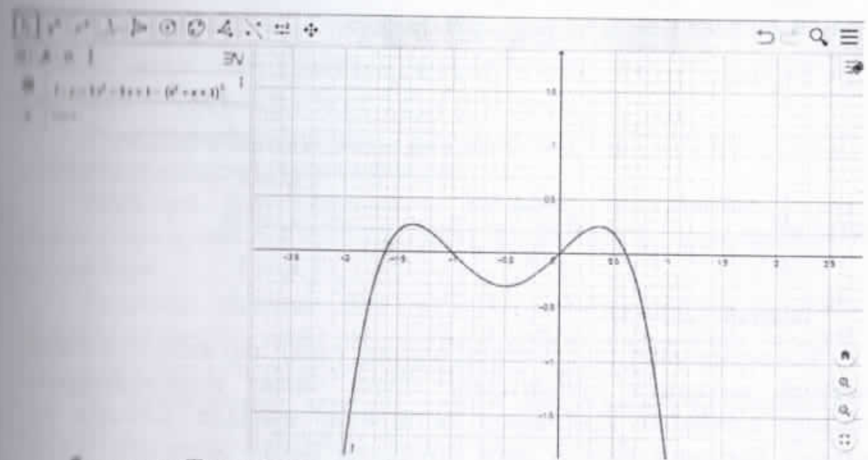
$$\Leftrightarrow t=x^2+x+1 \Leftrightarrow \left[x^2+x+1=t_1=1 \Leftrightarrow\right.$$

$$\Leftrightarrow x^2+x=0 \Leftrightarrow x_1=0, x_2=-1.$$

$$t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow \left[x^2+x+1=t_2=2 \Leftrightarrow\right.$$

$$\Leftrightarrow x^2+x^2-1=0 \Leftrightarrow x_{3,4}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{5}{4}}.$$

Жавоб: $\left\{0;-1;-\frac{1}{2}\pm\sqrt{1,25}\right\}$.



5-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\left(2x^2+x+2\right)^2+8x\left(2x^2+x+2\right)^2+15x^2=0 \qquad (10)$$

Ечиш: $t=2x^2+x+2$ десак, бунда $t^2+16tx+15x^2=0$ каби t га нисбатан квадрат тенглама ҳосил бўлади. $t_1=-3x_1$, $t_2=-5x$

$$\left[\begin{array}{l}2x^2+x+2=-3x\\2x^2+x+2=-5x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x^2+x+1=0\\2x^2+x+1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_{1,2}=-1\\x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

Жавоб: $\left\{-1;\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$

Баъзида алгебраик тенглама бир қанча кўпхадлар кўпайтмасига ажратилиб ечилади. Масалан (10) тенгламанинг чап томни қуйидагича:

$$\left(2x^2+x+2\right)^2+8x\left(2x^2+x+2\right)^2+16x^2-x^2=$$

$$=\left(\left(2x^2+x+2\right)+4x\right)^2-x^2=(2x^2+5x+2+x)(2x^2+5x+2-x),$$

яъни (10) тенглама шу қавсларнинг хар бирини нолга тенгланиб ечилганига тенг кучли бўлади ва авваги жавоблар ҳосил қилинади.

6-мисол. Тенгламани ечинг:

$$x^3-19x+30=0 \qquad (11)$$

Ечиш: $x^3-19x+30=x^3-4x-15x+30=$

$$=x(x^2-4)-15(x-2)=(x-2)(x^2+2x-15)$$

бўлгани учун уларнинг ҳар иккисини нолга тенглаб ечилади.

$$(11)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2=0\\x^2+2x-15=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=2\\x_{2,3}=-1\pm\sqrt{16}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=2\\x_2=-5\\x_3=3\end{array}\right.$$

Жавоб: $\{2;3;-5\}$.

Каср-рационал тенгламалар, одатда, унинг хар икки томонини умумий махражга кўпайтириш усули билан соддалаштириш асосида алгебраик тенгламага келтирилиб ечилади. Баъзида бу амални бажариш ўрнига янги номаълум билан белгилаш усули қулай бўлади.

7-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0 \qquad (12)$$

Ечиш: $y=\dfrac{x^2+x-5}{x}$ дейилса (12) тенглама $y+\dfrac{3}{y}+4=0$ кўринишга келиб, у $y_{1,2}=2\pm1$ ечимларга эга бўлади. Бундан қуйидагича ечимлар аниқланади:

$$(12)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+x-5=3x\\x^2+x-5=x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_{1,2}=1\pm\sqrt{6}\\x_{3,4}=\pm\sqrt{5}\end{array}\right.$$

Жавоб: $\left\{1\pm\sqrt{6};\pm\sqrt{5}\right\}$.

Кўпинча талаба 7-мисолни ечишда белгилаш усулидан фойдаланиш ўрнига уни умумий махражга келтириб $x^4+6x^3-2x^2-30x-25=0$ кўринишда ечишга уринади. Бу усул эса ноқулайдир. Баъзида тенгламани ёрдамчи (янги) номаълум киритиш билан тенгламалар системаси хосил қилиб ечиш қилай бўлади.

Рационал тенгсизликлар. Интерваллар усули.

Маълумки каср-рационал функция деб

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+...+b_mx^m}$$

ифодага айтилади. Бунда $P_n(x)$ ва $Q_m(x)$ кўпхадларнинг илдизи $R(x)$ каср-рационал функциянинг *критик нуқталари* дейилади.

Фақат каср-рационал функциялардан ташкил топган тенгсизлик *рационал тенгсизлик* дейилади.

Рационал тенгсизликларни, кўпинча, интерваллар усули билан ечиш қулай. Бу усул рационал функциянинг ушбу хоссасига асосланади:

Рационал функция ўзининг икки қўшни критик нуқтаси орасида шунингдек унинг энг ўнг (чап) критик нуқтасидан $+\infty$ гача ($-\infty$ гача) бўлган оралиқда ўз ишорасини сақлайди.

Бу функциянинг хоссаси, унинг оралиқдаги узлуксизлигига асосланган бўлиб, исботи бу ерда келтирилмайди.

Интерваллар усулининг моҳияти бундай: Рационал тенгсизликлар аввало ушбу стандарт кўринишлардан бирига келтирилади:

а) $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}>0$; б) $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}<0$; с) $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}\geq0$ д) $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}\leq0$. (13) Сўнг рационал функциянинг барча критик нуқталари аниқланиб, улар сонлар ўқида белгилаб чиқилади. У ҳолда сонлар ўқи чекли сондаги интервалларга ажралиб кетади. Уларнинг ҳар бирида рационал функция ўз ишорасини сақлайди. Шу ишорани топиш учун интервал ичидаги бирор x_0 нуқтада $\dfrac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}$нинг ишорасини билиш кифоя. Сўнг шу ишорага қараб интервалнинг нуқталари тенгсизликнинг ечими эканлигини аниқлаш қолади.

Агар $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}>0\left(\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}<0\right)$ кўринишидаги қатиий тенгсизлик ечилаётган бўлса, унда критик нуқталар бу тенгсизлик ечими тўпламига кирмайди, аксинча, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\geq 0\left(\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\leq 0\right)$ кўринишда бўлса, и ҳолда $Q_m(x)$ кўпҳаднинг илдизи бўлмаган критик нуқталарунинг ҳар бири шу тенгсизлик ечими тўпламига тегишли бўлади.

Изоҳ. Интерваллар усули рационал тенгламани ечишда доимо қўл келмаслиги, балки ундан рационал тенгламани ташкил этивчи $P_n(x)$ ва $Q_m(x)$ кўпҳадларнинг илдизлари маълум бўлгандагина фойдаланиш қулайлигини такидлаш керак. Уларнинг илдизларини топишнинг ўзи ҳам баъзан тенгсизликни ечишга нисбатан катта иш бўлиши мумкин.

2-теорема. Ҳар қандай $P_n(x)$ кўпҳад

$$P_n(x)=a(x-x_1)^{r_1}\dots(x-x_k)^{r_k}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\dots(x^2+p_mx+q_m)^{s_m} \quad (14)$$

шаклда ёйилиб, кўпайтувчиларга ажратилади. Бунда $a\neq 0, x_1, x_2, \dots x_k$ *кўпҳаднинг илдизлари,* $x^2+p_1x+q_1 (i=1,2,\dots,m)$ *лар эса, дискриминанти манфий бўлган учҳадлар,* $r_1, r_2, \dots r_k, s_1, s_2, \dots s_k \in N$.

Бу теореманинг исботи берилмайди. Уни қўллаш эса интерваллар усули билан ечишда зарурдир.

3-мисол. Тенгсизликни ечинг

$$\frac{(x+2)(x^2-2x+1)}{4x+3x^2-x^3}<0 \quad (15)$$

Ечиш: $x^2-2x+1=(x-1)^2, 4x+2x^2-x^3=-x(x-4)(x+1)$ бўлгани учун

$$(15)\Leftrightarrow\frac{(x+2)(x-1)^2}{x(x+1)(x-4)}<0.$$

Унинг $x=-2, x=-1, x=0, x=1, x=4$ критик нуқталари аниқланган интерваллардаги ишорасини назарий қисмда айтилгандек аниқлаймиз. Бунга баъзи критик нуқталар ечимдир.

Жавоб: $]-\infty;-2]\cup[-1;0[\cup\{1\}\cup]4;+\infty[$.

4-мисол. Тенгсизликни ечиш:

$$\frac{2}{3-x}+\frac{1}{x}>2. \quad (16)$$

Ечиш: $(6)\Leftrightarrow\frac{2x+3-x}{(3-x)x}-2\geq 0\Leftrightarrow\frac{(x-1)(x-1.5)}{x(3-x)}<0.$

Бу ерда интерваллар усули билан $[0;1]\cup[1,5;3]$ечимлар тўплами аниқланади.

Баъзи талабалар бу каби тенгсизликларни ечишда тенгсизликнинг икки тарафини ишораси аниқ бўлмаган номаълумли $(3-x)x$ ифодага кўпайтириб

$$2x+3-x\geq 2x(3-x)$$

каби ечишга уринадилар. Бу эса қўпол хато ҳисобланади.

Баъзида тенгсизлик ўзига тенг кўчли бир қанча содда тенгсизликлар системасига келтириб ечилиши мумкин. Масалан,

$$a)\ a\cdot b\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\geq 0.\\ b\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}a\leq 0,\\ b\leq 0;\end{cases}\end{array}\right. \qquad b)\ a\cdot b\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\geq 0.\\ b\leq 0\end{cases}\\ \begin{cases}a\leq 0,\\ b\geq 0;\end{cases}\end{array}\right. \quad (17)$$

$$c)\ \frac{a}{b}\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{cases}a\geq 0,\\ b>0\end{cases}\right.\\ \begin{cases}a\leq 0,\\ b<0;\end{cases}\end{array}\right. \qquad d)\ \frac{a}{b}\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{cases}a\geq 0,\\ b<0\end{cases}\right.\\ \begin{cases}a\leq 0,\\ b>0;\end{cases}\end{array}\right. \quad (18)$$

Бу усулни қўллаш рационал бўлмаган тенгсизликлар учун ҳам анча қўлайдир.

5-мисол. Тенгсизликни ечиш:

$$\frac{x^2-1}{x^2-4}>0 \quad (19)$$

Ечиш:

$$(19) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-1>0, \\ x^2-4>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-1<0, \\ x^2-4<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x|>1, \\ |x|>4 \end{cases} \\ \begin{cases} |x|<1, \\ |x|<4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x|>4, \\ |x|<1. \end{array}\right.$$

Жавоб: $]-\infty;-4[\cup[-1;1]\cup[4;+\infty[$.

6-мисол. Тенгсизликни ечиш:

$$x^6-x^4+x^2-1<0. \qquad (20)$$

Ечиш: Бунда (17) дан фойдаланилади:

$$(20) \Leftrightarrow x^4(x^2-1)+x^2-1<0 \Leftrightarrow (x^4+1)(x^2-1)<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-1<0 \Leftrightarrow |x|<1.$$

Жавоб: $]-1;1[$.

3.2-§. Иррационал тенглама ва тенгсизликлар.

Агар тенглама (тенгсизлик) номаълумлари радикал(илдиз) ишораси остида келса, у иррационал тенглама (тенгсизлик) деб аталади. Масалан,

$$b+\sqrt{x-12}=5;\ ax+\sqrt{4x+5}=\sqrt{x^2-1};\ \sqrt{x+\sqrt{x-a}}<2+x.$$

Одатда, радикаллардан ташкил топган алгебраик ифода иррацианал ифода дейилади.

Иррационал тенглама. Иррационал тенгламаларни ечишда, асосан ундаги иррационал ифодалар хоссаларидан ва улар устида айний шакл алмаштиришлардан фойдаланилади. Бунда:

(а) Иррационал ифодаларнинг ўзгариш ва аниқлаш соҳалари улардан тузилган тенгламанинг илдизлари қандай шартларга бўйсиниши (тенгламани ечмасдан) бўлиш имконини беради.

(б) Айний шакл алмаштириш натижасида берилган иррационал тенглама ўзига тенг кучли тенглама (ёки тенглама ва тенгсизликлар системасига) келтирилади. Масалан: $(n\in N)$

$$1.\ \sqrt[2n]{\varphi(x)}=\sqrt[2n]{\psi(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x)=\psi(x), \\ \psi(x)>0. \end{cases} \qquad (1)$$

$$2.\ \sqrt[2n]{\varphi(x)}=\psi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x)=(\psi(x))^{2n}, \\ \psi(x)>0. \end{cases} \qquad (2)$$

$$3.\ \sqrt{\varphi(x)}-\sqrt{\psi(x)}=a(a>0) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x)=\left(a+\sqrt{\psi(x)}\right)^2 \\ \psi(x)\ge 0 \end{cases}. \qquad (3)$$

$$4.\ \sqrt{\varphi(x)}+\sqrt{\psi(x)}=b(b>0) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x)=(b-\sqrt{\psi(x)})^2 \\ b-\sqrt{\psi(x)}>0 \\ \psi(x)\ge 0 \end{cases}. \qquad (4)$$

Демак, тенгламанинг икки тарафининг ишораси мусбат бўлгандагина уни жуфт кўрсткичли даражага кўтариб, ўзига тенг кучли тенгламага алмаштириш мумкин экан. Баъзи талабалар бу муҳим шартга эътибор бермайдилар.

Иррационал тенгламани ечишнинг асосий усуллари:

- Аниқланиш ёки ўзгариш соҳасини текшириш билан ечими бор ёки йўқлигини аниқлаш (қуйида 1,2-мисоллар);
- юқоридаги (1)–(4) эквивалентликдан фойдаланиш;
- ёрдамчи номаълум киритиш усули (қуйида 7,8 мисолларга қаранг);
- радикалларни яккалаш (бир-биридан ажратиб, тенгликнинг икки томонига ўтказиб, сўнг даражага ошириш; 3, 4, 6, 9-мисоллар);
- тенгламанинг иккала томонини унинг бир томонида турган ифодага қўшма бўлган ифодага кўпайтириш.

1-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{x-4}-\sqrt{x+10}=\sqrt{x-2}. \qquad (5)$$

Ечиш: Маълумки, ҳар қандай x учун

$$x-4<x+10 \Rightarrow \sqrt{x-4}<\sqrt{x+10} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x-4}-\sqrt{x+10}<0 \Rightarrow \sqrt{x-4}-\sqrt{x+10}\ne\sqrt{x-2},$$

чунки $\sqrt{x-2}>0$ дир.

Жавоб: Ечими йўқ.

2-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}=x-5 \qquad (6)$$

Ечиш: Тенгламанинг аниқланиш соҳаси

$$\begin{cases} x-1>0 \\ 4-x>0. \end{cases}$$

Системага асосан $[1;4]$ бўлиб, унинг чап тарафи номанфий функциялар йиғиндисидан ташкил топгани учун $x-5>0$ дир. Бу тенгламанинг ечими йўқлигини билдиради.

Жавоб: Ечими йўқ (ёки $\emptyset$).

3-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{2x+4}+\sqrt{6x-2}=6. \qquad (7)$$

Ечиш: (4) формулага кўра

$$\sqrt{2x+4}=6-\sqrt{6x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4=(6-\sqrt{6x-2})^2 \\ 6-\sqrt{6x-2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x+15=6\sqrt{6x-2}, \\ \sqrt{6x-2}<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+15)^2=36(6x-2), \\ 2x+15>0, \\ 6x-2<36 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+39x+74.25=0, \\ -7.5<x<6\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x_1=\frac{1}{2}\left(39-\sqrt{1224}\right).$$

Жавоб: $\left\{\frac{1}{2}\left(39-\sqrt{1224}\right)\right\}$.

4-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{x^2+10x+4}=2x-2 \qquad (8)$$

Ечиш: (4) га биноан $\begin{cases} x^2+10x+4=(2x-2)^2 \\ 2x-2>0 \end{cases} \begin{cases} x(x-6)=0 \\ x>1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=6$

Жавоб: 6

5-мисол. Тенгламани ечинг.

$$\sqrt{4+x+2\sqrt{6x-12}}+\sqrt{4+x-2\sqrt{6x-12}}=2\sqrt{6} \qquad (9)$$

Юқоридагиларга асосан:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x-12\ge 0 \\ 4+x+2\sqrt{6x-12}\ge 0 \\ 4+x-2\sqrt{6x-12}\ge 0 \\ 8+2x+2\sqrt{(4+x)^2-4(6x-12)}=24 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ 4+x\ge 2\sqrt{6x-12} \\ 8-x=\sqrt{64-16x+x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ (4+x)^2\ge 4(6x-12) \\ |8-x|=8-x \end{cases} \Leftrightarrow 2\le x\le 8$$

Жавоб: $x_1=2; x_2=8$.

6-мисол. Тенгламани ечинг.

$$\sqrt{\frac{x+8}{2}}+\sqrt{x-6}=5 \qquad (10)$$

Ечиш: Ҳар икки томонни квадратга ошириб ечамиз:

$(10)\Rightarrow \frac{x+8}{2}+\sqrt{2(x+8)(x-6)}+x-6=25\Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{2(x+8)(x-6)}=27-\frac{3x}{2}, \left(27-\frac{3x}{2}\ge 0\Rightarrow x\le 18\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow 2(x+8)(x-6)=\left(27-\frac{3x}{2}\right)^2\Rightarrow$

$$x_1=10$$
$$x_2=330$$

Жавоб: $\{10\}$.

1-изох. Ҳар икки томонни квадратга кўтариб ечиш усулида тенгламанинг илдизлари йўқолмайди, балки чет илдиз пайдо бўлиши мумкин. Чет илдизлар текшириш йўли билан аниқланиб, қолганлари ечимлар тўпламини ташкил этади.

2-изох. Бу ерда текширишни бошқача усулда бажариш хам мумкин эди, масалан, $f(x)=\sqrt{\frac{x+8}{2}}$ доимо қатъий ўсувчи, $g(x)=5-\sqrt{x-6}$ доимо камаювчи функциялар бўлиб, уларнинг графиги фақат бир марта кесиша олади. (яъни $x_1=10$ нуқтада кесишади). $x_2=330$ шу фикрга кўра илдиз бўла олмайди.

7-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt[4]{98-2x}+\sqrt[4]{2x-1}=5 \qquad (11)$$

Ечиш: (белгилаш усули билан ечиш).

$\sqrt[4]{98-2x}=y, \sqrt[4]{2x-1}=z$ десак, у ҳолда симметрик алгебраик система ҳосил бўлади:

$$(11)\Leftrightarrow\begin{cases}y+z=5\\ y^4+z^4=97\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=y+z\\ u=5\\ v=yz\\ u^4-4u^2v-2v^2=97\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=y+z\\ u=5\\ v=yz\\ v_{1,2}=25\pm19\end{cases}$$

$$\text{У ҳолда }\begin{cases}y+z=5\\ y^4+x^4=97\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+z=5\\ yz=6\\ y+z=5\\ yz=44\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_1=2\\ z_1=3\\ y_2=3\\ z_2=2\end{cases}$$

лекин $z=\sqrt[4]{2x-1}$ $x_1=41, x_2=8,5$ жавоблар келиб чиқади.

Жавоб: $x_1=41, x_2=8,5$

8-мисол. Тенгламани ечинг:

$$x\sqrt[3]{35-x^3}\,(x+\sqrt[3]{35-x^3})=30 \qquad (12)$$

Ечиш: $\sqrt[3]{35-x^3}=y$ десак, $x^3+y^3=35$ ҳосил бўлади демак,

$$\begin{cases}x^3+y^3=35\\ xy(x+y)=30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^3-3xy(x+y)=35\\ xy(x+y)=30\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^3=125\\ xy(x+y)=30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=5\\ xy=6\end{cases}$$

$$\begin{matrix}x_1=3\\ y_1=2\end{matrix}\ \text{ёки}\ \begin{matrix}x_2=2\\ y_2=3\end{matrix}$$

Жавоб: $\{x_1=2; x_2=3\}$

9-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1} \qquad (13)$$

Ечиш: (Даражага кўтариш усули).

Тенглама $D_0=[-\infty;-1]\cup[1;+\infty]$ аниқланиш соҳасига эга бўлиб, унда ўнг томони сингари, чап томони ҳам (чунки

$x+1>x-1\Leftrightarrow\sqrt[3]{x+1}>\sqrt[3]{x-1}$) мусбат бўлгани учун унинг ҳар икки томонини кубга оширамиз:

$$x+1-x+1-3\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x-1}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1})=\sqrt{x^2-1}.$$

Бу ерда қавс ичидаги айирма ўрнига берилган тенгламадан $\sqrt[6]{x^2-1}$ ифодани қўйсак:

$$2-3\sqrt[3]{x^2-1}\sqrt[6]{x^2-1}=\sqrt{x^2-1}\Leftrightarrow4\sqrt{x^2-1}=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt5}{2}.$$

Жавоб: $x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt5}{2}$.

10-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{3x-1}-\sqrt{9x-2}-\sqrt{15x-1}=0.$$

Ечиш: Радикалларни шундай группаллаймизки, натижада тенгламани ҳар икки томонида фақат номанфий функциялар ҳосил бўлсин :

$$\sqrt{9x-2}+\sqrt{15x-1}=\sqrt{3x-1}. \qquad (14)$$

Радикаллар остида чизиқли функциялар иштирок этгани учун $D=[1/3;+\infty]$ – тенгламанинг аниқланиш соҳаси осон топилади. Шу соҳада квадратга оширамиз.

$$(14)\Leftrightarrow2\sqrt{135x^2-39x+2}=2-21x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4(135x^2-39x+2)=(2-21x)^2.\\ 2-21x>0\end{cases}$$

Лекин, $2-21x>0$ ни қаноатлантиривчи x лар тенгламанинг аниқланиш соҳасига қарамайди. Демак, ечимга эга эмас.

Жавоб: Ечимга эга эмас.

11-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x} \qquad (15)$$

Ечиш: Тенгламанинг ҳар иккала қисмини ($y=5-\sqrt[3]{x}>0$ шартни қаноатлантиривчи x лар тўпламида аниқланган) қўшмасига кўпайтириб, ифодани ихчамласак

$$(\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}})(\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}-\sqrt{5-\sqrt[3]{x}})=$$
$$=\sqrt[3]{x}(\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}-\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}).$$

Натижа : $2\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x}(\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}-\sqrt{5-\sqrt[3]{x}})$ ҳосил бўлади. Бунда $x=0$; (15) нинг ечими бўлгани учун бу тенгламанинг ҳар икки томонини $\sqrt[3]{x}\neq 0$ га бўлсак:

$$(15)\Leftrightarrow\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}-\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=2\Leftrightarrow$$
$$\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}=2+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}\Leftrightarrow 2\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}-2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}4(5-\sqrt[3]{x})=(\sqrt[3]{x}-2)^2\\ \sqrt[3]{x}-2>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{x^2}=16\\ \sqrt[3]{x}>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{x_{1,2}}=\pm4\\ x>8\end{cases}\Leftrightarrow x=64$$

Бу илдиз (15) тенгламанинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлгани учун ечимидир.

Жавоб: 64.

12-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{5+x-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1 \qquad (16)$$

Ечиш: $x+1\geq 0$ бўлгани учун $\sqrt{5+x-4\sqrt{x+1}}=\sqrt{(\sqrt{x+1}-2)^2}$ $\sqrt{x+1-2\sqrt{x+1}+1}=\sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2}$ тенгликка келтириб оламиз. Бундан $\sqrt{a^2}=|a|$ ни ҳисобга олиб (16) тенгламага тенг кучли $\left|\sqrt{x+1}-2\right|+\left|\sqrt{x+1}-1\right|=1$. Ҳосил қиламиз, $y=\sqrt{x+1}>0$ деб белгиласак, бу тенгламани $|y-2|+|y-1|=1$ кўринишга келтирамиз ва итерваллар усули билан $y_1=2$ ва $y_2=1$ ечимларни топамиз:

$$(16)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=2\\ \sqrt{x+1}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=3,\\ x_2=0,\end{array}\right.$$

Жавоб: $x_1=3, x_2=0$

Иррационал тенгсизлик. Иррацианал тенгсизликларни умумий ҳолдан қуйидагича эквивалент алмаштириш билан ечиш мумкин $(n\in N)$:

$$1).\ \sqrt[2n]{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)<(g(x))^{2n}\\ f(x)\geq 0.\\ g(x)>0.\end{cases} \qquad (17)$$

$$2).\ \sqrt[2n]{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)<0\\ f(x)>0\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\geq 0.g(x)\geq 0.\\ f(x)>(g(x))^{2n}\end{cases}\end{array}\right. \qquad (18)$$

$$3).\ \frac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)}>1\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)>0.\\ f(x)>(g(x))^{2n}\end{cases} \qquad (19)$$

$$4).\ \frac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)}<1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)<0\\ f(x)\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\geq 0\\ g(x)>0.\\ f(x)<(g(x))^{2n}\end{cases}\end{array}\right. \qquad (20)$$

$$5).\ g(x)<\sqrt{f(x)}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)<0\\ f(x)\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\geq 0.g(x)\geq 0\\ g^2(x)<f(x).\end{cases}\end{array}\right. \qquad (21)$$

$$6).\ \sqrt{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geq 0, g(x)>0\\ f(x)<g^2(x)\end{cases} \qquad (22)$$

$$7).\ \sqrt{f(x)}<\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geq 0, g(x)>0\\ f(x)<g(x)\end{cases} \qquad (23)$$

Баъзи талабалар тенгсизликдаги иррационалликдан қутилиш учун юқоридагиларни назарда тутмаган ҳолда тўғридан-тўғри даражага ошириш билан уни ечишга ҳаракат қиладилар. Бу эса ҳар доим тўғри эмас.

Баъзида ечилиши содда бўлган тенгламаларнинг аниқланиш сохасини топиш нисбатан қийин бўлади. Бундай холларда тенглама дастлаб ечилиб, сўнгра текшириш йўли билан илдизлари тўлиқ аниқланади. Масалан, $\sqrt{x^3-3x^2+2x+1}=\sqrt{2-x}$ тенгламани ечишда дастлаб,

$$\begin{cases} x^3-3x^2+2x+1\ge 0 \\ 2-x\ge 0 \end{cases}$$

система ечилиб, унинг аниқланиш соҳаси топилади. Нисбатан қийин бўлган бу ишни бажармай, юқорида айтилган йўл билан тенгламани ечиш маъқул:

$$\sqrt{x^3-3x^2+2x+1}=\sqrt{2-x}\Leftrightarrow x^3-3x^2+2x+1=2-x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3=0\Leftrightarrow x_0=1$$

Бу топилган қийматни тенгламага қўйиб текширсак, у ечим эканлиги аниқланади.

Агар $D_0=\varnothing$ бўлса, (1) тенгламанинг ечими бўлмайди. Масалан, $\sqrt{2-x}+2=\sin\sqrt{x-3}$ тенглама учун $D(f)=[-\infty;2]$ $D(g)=[3;+\infty]$ бўлиб $D_0=\varnothing$ эканлигидан ечимга эга эмас.

1-мисол. Тенгламани ечиш: $2\sqrt{3x+5}-2=3x$.

Ечиш: Юқоридаги тасдиқларга асосланиб ечамиз:

$$2\sqrt{3x+5}-2=3x\Leftrightarrow 2\sqrt{3x+5}=3x+2\Rightarrow 3x+2\ge 0;$$

$$x\ge-\frac{2}{3}\Rightarrow 4(3x+5)=(3x+2)^2\Leftrightarrow (3x^2)=16\Leftrightarrow$$

$$x=\frac{4}{3}\ \text{ёки}\ x=-\frac{4}{3}.$$

Шундай қилиб, тенгламанинг ечими $x=\frac{4}{3}$ мумкин.

Жавоб: $\left\{\frac{4}{3}\right\}$.

2-мисол. Тенгламани ечинг: $(a^2-x^2)\sqrt{x^2-b^2}=0$.

Ечиш: $|a|\ge|b|$ бўлса, тенглама $D=]-\infty;-b]\cup[b;+\infty[$ да аниқланган бўлиб, бу тенглама (20) тасдиққа кўра:

$$(a^2-x^2)\sqrt{x^2-b^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a^2-x^2=0, \\ \sqrt{x^2-b^2}=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\pm a, \\ x_{3,4}=\pm b \end{array}\right.$$

каби тўртта ечимга эга. Аксинча, $|a|<|b|$ бўлганда $a^2-x^2=0$ тенгламанинг илдизларида $\sqrt{x^2-b^2}$ функция аниқланмагани учун у фақат $x_{1,2}=\pm b$ ечимга эга холос.

Жавоб: $|a|\ge|b|\Rightarrow\{\pm a;\pm b\}$; $|a|<|b|\Rightarrow\{\pm b\}$.

3-мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$x<\sqrt{2-x} \tag{24}$$

Ечиш: (21) га асосан

$$(24)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0 \\ 2-x\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x>0;2-x>0 \\ x^2<2-x \end{cases} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0 \\ x\le 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x\le 2 \\ (x+2)(x-1)<0 \end{cases} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x<0 \\ \begin{cases} 0<x\le 2 \\ -2<x<1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ечимларни умумлаштирсак

Жавоб: $(-\infty;1)$

4-мисол. Тенгсизликни ечинг.

$$\sqrt{x+18}<2-x \tag{25}$$

Ечиш: (22) га асосан

$$(25)\Leftrightarrow\begin{cases} x+18\ge 0 \\ 2-x>0 \\ x+18<(2-x)^2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -18\le x<2 \\ x^2-5x-14>0 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -18\le x<2 \\ (-\infty,-2)\cup(7,+\infty) \end{cases}$$

Сўнги системани қаноатлантиривчи x лар тўплами $[-18;-2)$ дан иборат.

Жавоб: $[-18;-2)$.

5-мисол. Тенгсизликни ечинг.

$$\sqrt{x-20}+\sqrt{2x+4}>\sqrt{3x-16}; \tag{26}$$

Ечиш: (17) формулага кўра $g(x)=\sqrt{x-20}+\sqrt{2x+4}>0$ эканидан қуйидагича ёзиб оламиз:

$$(26) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-16 < (\sqrt{x-20}+\sqrt{2x+4})^2 \\ 3x-16>0 \\ x-20 \ge 0 \\ 2x+4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 < \sqrt{(x-20)(2x+4)} \\ 3x>16 \\ x>20 \\ x>-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-20)(2x+4)}>0 \\ x>\dfrac{16}{3} \\ x \ge 20 \\ x \ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-20)(2x+4)>0 \\ x>5\dfrac{1}{3} \\ x \ge 20 \\ x \ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow x>20,$$

Жавоб: $(20;+\infty)$

4-мисол. Тенгсизликларни ечинг:

$$\sqrt{x^2-8x+12} > 4-x \qquad (27)$$

Ечиш: (20) га биноан:

$$(27) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-x<0, \\ x^2-8x+12 \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 4-x>0, x^2-8x+12 \ge 0, \\ x^2-8x+12>(4-x)^2, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (A)\begin{cases} x>4, \\ (x-2)(x-6) \ge 0, \end{cases} \\ (B)\begin{cases} x<4, \\ (x-2)(x-6) \ge 0, \\ x^2-8x+12>16-8x+x^2, \end{cases} \end{array}\right.$$

Жавоб: $[6;+\infty)$.

3.3-§. Кўрсаткичли тенглама ва тенгсизликлар.

Кўрсаткичли тенглама, деб номаълуми даража кўрсаткичида қатнашган тенгламаларга айтилади. Уларни ечишда кўрсаткичли функциянинг барча хоссаларидан хамда логарифмлаш ва унинг қоидаларидан фойдаланилади. Кўрсаткичли тенгламаларни ечишда қўлланиладиган асосий эквивалент алмаштиришлар:

1. $a>0$, $a \ne 1$ ва $b>0$ бўлганда

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b. \qquad (1)$$

2. $2.c>0; c \ne 1;$ *бўлганда*, $a>0, a \ne 1, b>0, b \ne 1$ лар учун

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x) \qquad (2)$$

хусусий холда

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x) \qquad (3)$$

3. $a>0, a \ne 1$ бўлганда

$$a^{f(x)} = b (b>0) \Leftrightarrow f(x)=\log_a b \qquad (4)$$

хусусий холда: $b=1$ бўлганда $a^{f(x)}=1 \Leftrightarrow f(x)=0$

4. $a>0$, $a=1$ бўлганда

$$a^{\varphi(x)} = f(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x>0) \\ \varphi(x)=\log_a f(x) \\ f(x) \le 0 \\ \textit{ечими йўк} \end{array}\right. \qquad (5)$$

1-мисол. Тенгламани ечинг: $3^{x^2-5} = 81^x$

Ечиш: $\dfrac{1}{81^x} = \dfrac{1}{3^{4x}} = 3^{-4x}$ бўлгани учун

$(5) \Leftrightarrow 3^{x^2-5} \cdot 3^{-4x} = 1 \Leftrightarrow 3^{x^2-4x-5} = 3^0 \Leftrightarrow x^2-4x-5=0 \Leftrightarrow x = 2 \pm 3.$

Жавоб: $\{-1;5\}$

Ёрдамчи номаълум киритиб ечиладиган тенгламалар.

2-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{5^{2x-2}} + 5 \cdot 0{,}04^{x-1} = 26. \qquad (6)$$

Ечиш: $0.04 = 5^{-2} \Rightarrow 0.04^{x-1} = 5^{2-2x}$ бўлгани учун

$(6) \Leftrightarrow 5^{\frac{2x-2}{2}} + 5 \cdot \dfrac{1}{5^{2x-2}} = 26$ бўлади. $t = 5^{\frac{2x-2}{2}}$ деб белгилаб

оламиз $t^2 - 130t + 625 = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = 65 \pm 60$ ни аниқлаймиз.

$$(6) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x = 125 \\ 5^x = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 1. \end{array}\right.;$$

Жавоб: $\{3;1\}$

3-мисол. Тенгламани ечинг:

$$2^{2x+2\sqrt{x^2-2}} - 6 = 5 \cdot 2^{x-1\sqrt{x^2-2}} \qquad (7)$$

Ечиш: $y = 2^{x+\sqrt{x^2-2}}$ деб номаълум киритсак:

$$(7) \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 2{,}5 - 6 = 0 \\ y = 2^{x+\sqrt{x^2-2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 4, y_2 \neq -3.5 \\ y_1 = 2^{x+\sqrt{x^2-2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 > 0 \\ 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 2^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2 > 0, x - 2 > 0 \\ x^2 - 2 = (2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1{,}5$$

Жавоб: $\{1{,}5\}$.

4-мисол. Тенгламани ечинг:

$$3 \cdot 9^x + 4 \cdot 25^x = 7 \cdot 15^x \tag{8}$$

Ечиш: $9^x = 3^{2x}, 25^x = 5^{2x}, 15^x = 3^x \cdot 5^x$ бўлгани учун $3^x\, va\, 5^x$ га нисбатан берилган тенглама $3 \cdot 3^{2x} - 7 \cdot 3^x \cdot 5^x + 4 \cdot 5^{2x} = 0$ бир жинсли тенгламадир. Бунда унинг хар икки тарафини $5^{2x}(yoki\, 3^{2x})$ га бўлсак $t = (\frac{3}{5})^x$ га нисбатдан ёки $t = \left(\frac{5}{3}\right)^x$ га нисбатан квадрат тенглама ҳосил бўлади ва уни мусбат илдизлари топилади:

$$(8) \Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} - 7 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \left(\frac{3}{5}\right)^x \\ 3t^2 - 7t + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \left(\frac{3}{5}\right)^x \\ t_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{6}. \end{cases}$$

У холда;

$$(8) \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\left(\frac{3}{5}\right)^x = 1, \\ &\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{4}{3}, \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x_1 = 0, \\ &x_2 = \log_{0{,}6}\left(\frac{4}{3}\right). \end{aligned} \right.$$

Жавоб: $\left\{0; \log_{0{,}6}\left(\frac{4}{3}\right)\right\}$

5-мисол. Тенгламани ечинг:

$$7 \cdot 9^{x^2} - 12 \cdot 4^{x^2} + 5 \cdot 6^{x^2} = 0 \tag{9}$$

Ечиш:

$$(9) \Leftrightarrow 7 \cdot 3^{2x^2} + 5 \cdot 2^{x^2} \cdot 3^{x^2} - 12 \cdot 2^{2x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$7 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x^2} + 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2} - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2} = 1 \\ &\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2} \neq -\frac{12}{7} \end{aligned} \right. \Leftrightarrow x = 0$$

Жавоб: $x = 0$;

3.4-§. Логарифмик тенглама ва тенгсизликлар.

1-мисол: Тенгламани ечинг:

$$4 \cdot 9^{x-3} = 3 \cdot \sqrt{2^{2x-3}} \tag{1}$$

Ечиш. Тенгламанинг чап ва ўнг тарафи бир хил ёки 2 асосга ёки 3 асосга келмагани учун улардан бири бўйича, масалан 2 асос бўйича логарифмлаймиз:

$$(1) \Leftrightarrow 2 + (x-3)\log_2 9 = \log_2 3 + \frac{1}{2}(2x-3) \Leftrightarrow$$

$$x(\log_2 9 - 1) = 7\log_2 3 - 3{,}5 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{3{,}5(\log_2 3 - 1)}{\log_2 9 - 1} = 3{,}5$$

Жавоб: $\{3{,}5\}$

2-мисол: Тенгламани ечинг:

$$7^{2x+5} = 8^{2x^2+3x-5} \tag{2}$$

Ечиш. Асослардан бири бўйича, масалан, 7 асос бўйича логарифмласак, у ҳолда

$$(2) \Leftrightarrow 2x + 5 = (2x^2 + 3x - 5)\log_7 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + 5 = (2x+5)(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -2{,}5; x_2 = 1 + \log_8 7.$$

Жавоб: $\{-2{,}5; \log_8 56\}$

3-мисол. Тенгламани ечинг:

$$x^{1-\frac{1}{3}\lg x^3} = \frac{1}{\sqrt[3]{100}} \tag{3}$$

Ечиш: Чап тарафи кўрсаткичида log иштирок этгани учун тенгламанинг хар икки томонини (10) асосга кўра логарифмласак

$$(3) \Leftrightarrow (1-\frac{1}{3}\lg x^2)\lg x = -\lg\sqrt[3]{100} \Leftrightarrow 2\lg^2 x - 3\lg x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

маъқул

$$\lg x_{1,2} = \frac{3\pm 5}{4} \Leftrightarrow x_1 = 100; x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}};$$

Жавоб: $\left\{100; \frac{1}{\sqrt{10}}\right\}$.

4-мисол. Тенгламани ечинг:

$$x^{8x(x^2-1)} = 1 \quad (4)$$

Ечиш: (*1-усул*) $x>0$ десак,

$$(4) \Leftrightarrow x^{8(x^2-1)} = x^0 \Leftrightarrow 8(x^2-x)=0 \Leftrightarrow x \neq 0 \Leftrightarrow x=1;$$

(**2-усул**) $x>0$деб, бирор $a\left(a>0\right)$ асосга кўра логарифмласак:

$(4) \Leftrightarrow 8(x^2-1)\log_2 x - \log_a 1 \Leftrightarrow x(x-1)\log_a x = 0 \Leftrightarrow x=1;$

Жавоб: $\{1\}$

Логарифмик тенглама (тенгсизлик) деб, номаълум логарифм белгиси остида қатнашган тенглама (тенгсизлик)ларга айтилади. Уларни ечишда логарифмик функциянинг барча хоссаларидан, ва шунингдек, потенциаллаш амали қоидаларидан фойдаланилади. $c>0,\rightarrow c\neq 1$ бўлганда $\log_c A = \log_c B$ ифодалаш $A=B$ тенгликка ўтиш амали c асосга кўра потенцирллаш дейилади:

$$\log_c A = \log_c B \Rightarrow A = B \quad (5)$$

Логарифмик тенгламаларни ечишда қўлланиладиган асосий эквивалент алмаштиришлар:

1. $a>0, a\neq 1, b\in R, \textit{бўлганда}, \log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$.

2. $a>0, a\neq 1, b\in R, \textit{бўлганда}, \log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$.

3.

$$a)\log_{\varphi(x)} f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (\varphi(x))^b \\ f(x)>0; \varphi(x)>0; \varphi(x)\neq 1 \end{cases}$$

$$b)\log_a f(x) = \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a^{\varphi(x)} \\ f(x)>0; \end{cases}$$

4. Бирор $f(t)=0$ тенгламанинг илдизлари $t_1, t_2, ... t_n$ дан иборат бўлса

$a>0$, $a\neq 1$ лар учун

$$f(\log_a x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_a x = t_k \\ k = 1,2,...,n. \end{array}\right. \quad (6)$$

Хусусий холда , $f(t) = At^2 + Bt + C = 0 (D = B^2 - 4AC > 0)$ квадрат тенгламанинг $t_1 \,ва\, t_2$ илдизлари учун:

$$A\log_a^2 x + B\log_a x + C = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_a x = t_1 \\ \log_a x = t_2 \end{array}\right. \quad (7)$$

5. $a>0$, $a\neq 1$ бўлганда

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x)>0, g(x)>0 \end{cases} \quad (8)$$

6. $a>0$, $a\neq 1$ бўлганда

$$a) f(x) = a^{\log_a f(x)} \Leftrightarrow f(x) > 0; \quad (9)$$

$$b) g(x) = a^{\log_a f(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x)>0, g(x)>0 \end{cases} \quad (10)$$

7. $a>0$, $a\neq 1$; $n\in N$ бўлганда

$$\log_a |f(x)|^{2n} = 2n\log_a |f(x)| = \begin{cases} 2n\log_a f(x) \\ 2n\log_a(-f(x)) \end{cases}; агар \begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)<0 \end{cases} \quad (11)$$

8. $$\begin{cases} \log_a f(x) + \log_a g(x) \\ \log_a(-f(x)) + \log_a(-f(x)) \end{cases}; агар \begin{cases} f(x)>0, g(x)>0 \\ (-f(x))>0, (-g(x))>0 \end{cases} \quad (12)$$

9. $a>0$, $a\neq 1$ бўлганда

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \log_a f(x) - \log_a g(x) \\ \log_a(-f(x)) - \log_a(-f(x)) \end{cases}; агар \begin{cases} f(x)>0, g(x)>0 \\ (-f(x))<0, (-g(x))<0 \end{cases} \quad (13)$$

Баъзи талабалар юқоридаги формулалардан тўғри фойдалана олмай, турли хатоликларга йўл қўядилар.

$$\lg x^2 = \lg^2(-x) + 4 \quad (14)$$

каби тенгламаларни ечишда унинг аниқланиш соҳасига эътибор бермай, (14) тенгламани $2\lg x = \lg^3(-x) + 4$ га тенг кучли ҳисоблаб ечишга уринадилар. Аслида, (14) тенглама учун $D(f) = [-\infty;0]\bigcup[0;+\infty], D(g) = [-\infty;0]$ ва $D_0 = [-\infty;0]$ бўлиб, унда $\lg x^2 = 2\lg(-x)$ ўринлидир. Натижада (14) тенглама

$$\lg^2(-x) - 2\lg(-x) + 4 = 0$$

га тенг кучли эканлиги маълум бўлади ва у $u = l(-x)$ каби белгилаш билан осон ечилади.

Логарифмик тенгламалар қуйидаги типларга ажратиб ечилади:

1. Потенциаллаш усули;
2. Янги номаълумлар киритиш усули;
3. Бир хил асосга кўра логарифмлаш усули;
4. Сунъий усул билан ечиладиган тенгламалар.

Потенциаллаш билан ечиладиган тенгламалар.

5-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\log_3(x+14)^2 = \log_3 \log_2 512 \qquad (15)$$

Ечиш: $\log_2 512 = 9$ бўлгани учун $x+14 \neq 0$ шарт асосида $(15) \Leftrightarrow \log_3\left(x+14\right)^2 = \log_3 3^2 \Leftrightarrow (x+14)^2 = 3^2 \Leftrightarrow x+14 = \pm 3;$

Жавоб: $\{-11;-17\}$.

Баъзи талабалар шунга ўхшаш мисолларни бундай ечиб хатога йўл қўядилар: $(15) \Leftrightarrow 2\log_3(x+14) = 2 \Leftrightarrow x+14 = 3 \Leftrightarrow x = -19$, яъни бунда $x = -19 да, -5 \neq 3$. Бу эса хато эканлигини исботлайди.

6-мисол. Тенгламани ечинг:

$$-\log_{0.2}(x^2 - 5x + 6) = \log_5(x-2) \qquad (16)$$

Ечиш. $x^2 - 5x + 6 > 0; x - 2 > 0$ шартлар асосида

$$(16) \Leftrightarrow \log_5(x^2 - 5x + 6) = \log_5(x-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = x - 2 \Leftrightarrow x_1 \neq 2, x_2 = 4.$$

Текшириш кўрсатадики, $x_1 \neq 2$ чет илдиз, $x_2 = 4$ ечим.

Жавоб: 4.

Логарифмик тенгламани ечишда чет илдиз пайдо бўлмаслиги ёки илдизлар юқотилмаслиги учун ушбу қоидага риоя қилиб ечиш мумкин:

1) тенгламанинг аниқланиш соҳаси D ни топиш;

2) уни M_1 ва $M_2 = \dfrac{D}{M_1}$ каби шундай икки соҳага ажратиш керакки, M_1 да (ёки M_2 да) берилган тенгламага (7) алмаштиришларни бажарган. Шу соҳада тенглама ўзига тенг кучли тенгламага алмашсин;

3) M_1 ва M_2 соҳаларда уни алоҳида - алоҳида ечиш;

4) M_1 ва M_2 соҳаларда аниқланган ечимлар умумлаштирилиб, берилган тенглама жавоби ёзилади.

Масалан, (15) тенгламага $M_1 = \left]-\infty;-14\right[$ ва $M_2 = \left]-14;+\infty\right[$ соҳада (7) ни қўллаб бундай ечилади:

a) $x \in M_1 \Rightarrow (15) \Leftrightarrow 2\log_3(x+14) = 2 \Leftrightarrow x+14 = 3 \Leftrightarrow x = -9$ бу илдиз M_1 га тегишли бўлгани учун ечим:

b) $x \in M_2 \Rightarrow (15) \Leftrightarrow 2\log_3(-x-14) = 2 \Leftrightarrow -x-14 = 3 \Leftrightarrow x = -17.$

Бу илдиз M_2 га тегишли. Демак, чет илдиз эмас.

Жавоб: (-9;-17).

7-мисол. Тенгламани ечинг

$$\log_3(x+3)(x-1) + \log_{\frac{1}{3}}(x^2-9) = 2\log_9(x+10). \qquad (17)$$

Ечиш: Тенгламанинг аниқланиш соҳаси D қуйидаги система билан аниқланади:

$$D_1 \begin{cases} (x+3)(x-1) > 0, \\ x^2 - 9 > 0; \\ x + 10 > 0. \end{cases} \qquad (18)$$

Энди $x \in D$ деб, (29) тенгламани шу соҳада потенциоллаб ечамиз:

$$(17) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D, \\ \log_3(x+3)(x-1) = \log_3(x^2-9)(x+10) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x+3)(x-1) = (x^2-9)(x+10), \\ x \in D. \end{cases}$$

Аммо $x + 3 \neq 0$, чунки $x = -3$ бўлганда $x \in D$. бўлар эди (яъни D ни аниқловчи (18) даги икки тенгсизликни қаноатлантирмас эди). Демак, охирги тенгламани $x+3$ га бўлсак:

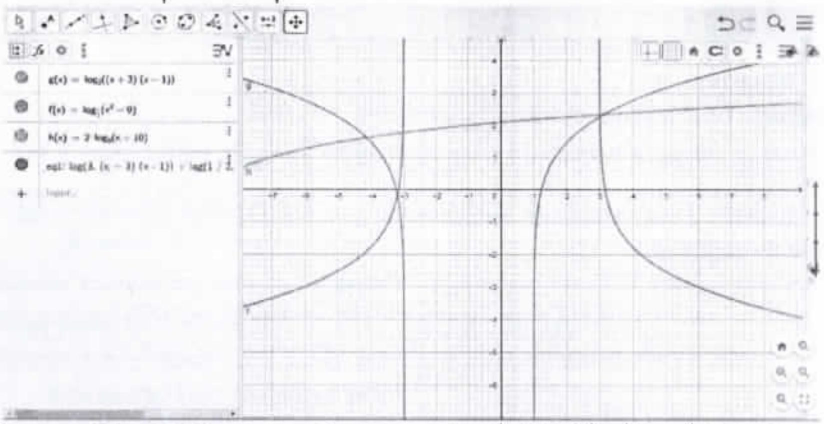
$$(17) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = (x-3)(x+10), \\ x \in D \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + 6x - 29 = 0 \\ x \in D. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 + \sqrt{38}, \\ x_2 = -3 - \sqrt{38}. \end{cases}$$

Текшириш: $1) x_1 + 3 = \sqrt{38}; \to x_1 - 3 = \sqrt{38} - 6;$ бўлгани учун $x_1^2 - 9 = (\sqrt{38})^2 - 6\sqrt{38} = 38 - \sqrt{36 \cdot 38} > 0$ дир x_1 илдиз (30) нинг қолган тенгсизликларни қаноатлантиради. $2) x_2+3=-\sqrt{38}; \to x_2-3=-\sqrt{38}-6;$ учун хам $x_2^2-9=\sqrt{38^2}-\sqrt{36\cdot 38}>0; \to (x_2+3)(x_2-1)=-\sqrt{38}(-4-\sqrt{38})>0$ бажарилган.

Демак, $x_1, x_2 \in D$.

Жавоб: $\left|-3\pm\sqrt{38}\right|$.



Бу ерда D ни (30) дан ечиб топсак, $D=\left|-10;-3\right|\cup\left|3;+\infty\right|$ бўлиб уни излашга вақт кетказмасдан топилган илдизлар ечим ёки ечим эмаслигини D ни аниқловчи (30) шартларга қўйиб бўлдик.

18-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\lg\frac{1}{x+1}+\log_{\sqrt{10}}(5-x)=\frac{1}{\log_2 10}-\log_{0.1}(x+3). \qquad (19)$$

Ечиш: Тенгламанинг аниқланиш соҳаси $x+1>0, 5-x>0, x+3>0$ шартларни бажарувчи x лар бўлиб у $D=\left|-1;5\right|$ оралиқда аниқланган.

$$x\in D \Rightarrow (31) \Leftrightarrow 2\lg(5-x)=\lg(x+3)+\lg(x+1)+\lg 2 \Leftrightarrow$$

$$\lg(5-x)^2=\lg(2x+6)(x+1) \Leftrightarrow$$

$$x^2+18x-19=0 \Leftrightarrow x_1=1; x_2\neq -19;$$

Жавоб: $\{1\}$.

19-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\log_2^2 2x+\log_2 2x=\frac{6}{\log_2 x}. \qquad (20)$$

Ечиш:

$\log_2 2x=1+\log_2 x \Leftrightarrow \log_2^2 2x=1+2\log_2 x+\log_2^2 x; \to$ *бунда* $\to t=\log_2 x$ десак,

$$(20) \Rightarrow t^2+3t+2=\frac{6}{t} \Leftrightarrow t^3+3t^2+2t-6=0 \Leftrightarrow$$

$$(t-1)(t^2+4t+6) \Leftrightarrow t_1=1;$$

Жавоб: $\log_2 x=1; \to x_1=2$.

20-мисол. Тенгламани ечинг:

$$2x^{\lg^2 x+3\lg x-4}=\log_{\sqrt{10}}(\log_{\sqrt{10}}1000+4) \qquad (21)$$

Ечиш: Бу тенгламанинг ўнг томони 2 га тенг. Икки томонини 2 га бўлиб, сўнг 10 асосга кўра логарифмласак:

$$(21) \Leftrightarrow (\lg^2 x+3\lg x-4)\lg x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=\lg x \\ (t^2+3t-4)t=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t=\lg x \\ t_1=0, t_2=1, t_3=-4 \end{cases} \Leftrightarrow x_1=1, x_2=10, x_3=10^{-4}$$

Жавоб: $\{1;10;10^{-4}\}$.

3.5-§. Модул белгиси қатнашган тенглама ва тенгсизлик. Модулли тенгсизликларда ностандарт ўзгартиришлар.

1-мисол. Тенгламани ечинг:

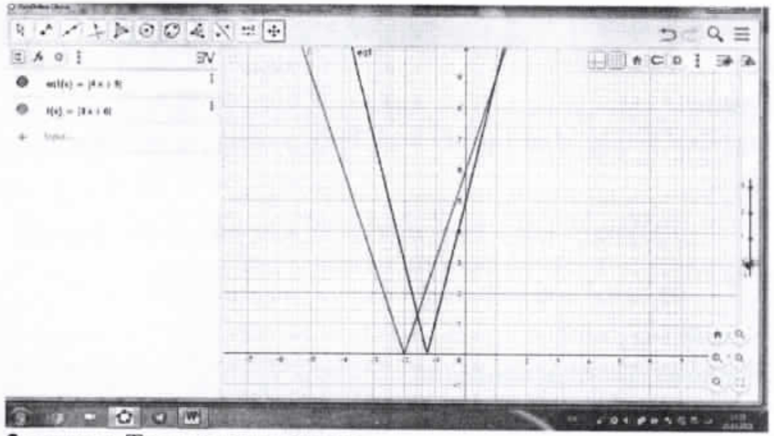
$$|4x+5|-|3x+6|=0. \qquad (1)$$

Ечиш: (1) $\Leftrightarrow |4x+5|=|3x+6|$.

Бу тенгламанинг ҳар икки томони номанфий бўлгани учун квадратларга оширамиз:

$$(4x+5)^2=(3x+6)^2 \Leftrightarrow 7x^2+4x-11=0 \Leftrightarrow x_1=1, x_2=-\frac{11}{7}$$

Жавоб: $\left\{1;-\frac{11}{7}\right\}$.



2-мисол. Тенгламани ечинг:

$$|x+1| = |4x-8| - x + 1. \qquad (2)$$

Ечиш: (1- *усул*). Бу ерда тенглама $f(x_1|x-a|)=0$ шаклда. Шунинг учун

$$f(x_1|x-a|)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} F(x,x-a)=0, \text{агар } x-a>0 \\ F(x,a-x)=0, \text{агар } x-a<0 \end{array}\right. \qquad (3)$$

ни назарда тутиб

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1>0. \\ x+1=|4x-8|-x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1<0. \\ -x-1=|4x-8|-x+1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>-1, \\ 2x=|4x-8| \end{cases} \\ \begin{cases} x<-1, \\ -2=|4x-8| \end{cases} \end{array}\right.$$

бўлади. Лекин $-2 \neq |4x-8|$ бўлгани учун (2) тенглама фақат биринчи системага тенг кучли ҳисобланади:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1, \\ 2x=|4x-8| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>2 \\ 2x=4(x-2) \end{cases} \\ \begin{cases} x<2 \\ 2x=4(2-x) \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>2, \\ x=2x-4 \end{cases} \\ \begin{cases} 1<x<2, \\ x=4-2x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=4. \\ x_2=\dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Жавоб: $\left\{4; \dfrac{4}{3}\right\}$.

Интерваллар методи.

Агар тенглама

$$F(x; |x-a_1|, |x-a_2|, \ldots, |x-a_n|)=0$$

шаклда бўлса $(a_1<a_2<\ldots<a_n)$, унинг аниқланиш соҳасидаги $a_1, a_2, \ldots, a_n$ нуқталар билан аниқланган ўзаро кесишмайдиган ҳар бир оралиқда F=0 тенгламани ечамиз.

Шу усулда юқоридаги (2) тенгламани ечамиз.

(2- *усул*). $|x+1|=0$ ва $|4x-8|=0$ лардан $x_1=-1$ ва $x_2=2$ ларни аниқлаймиз. Сўнг сонлар ўқини шу нуқталар билан $]-\infty;-1] \cup [-1;2] \cup [2;+\infty[$ оралиқларга ажратиб, уларнинг ҳар бирида модул таърифига биноан тенгламани ечамиз:

1) $x \in]2;+\infty[$ бўлганда: $(2) \Leftrightarrow x+1=4x-8-x+1 \Leftrightarrow 2x=8 \Leftrightarrow x=4$;

2) $x \in]-1;2]$ бўлганда: $(2) \Leftrightarrow x+1=8-4x-x+1 \Leftrightarrow 6x=8 \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{3}$;

3) $x \in]-\infty;-1]$ бўлганда:

4) $(2) \Leftrightarrow -x-1=8-4x-x+1 \Leftrightarrow 4x=10 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2} \in]-\infty;-1]$,

Демак, бу соҳада тенглама ечимга эга эмас.

Жавоб: $\left\{4; \dfrac{4}{3}\right\}$.

3-мисол. Тенгламани ечинг:

$$|x^2-1| = x(x-2). \qquad (4)$$

Ечиш: Тенгламани юқоридаги 1 ва 2 усуллар билан ҳам ечиш мумкин. Қуйида

$$|F(x)| = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} F(x)=f(x), \text{агар } \ F(x)>0, \\ F(x)=-f(x), \text{агар } F(x)<0 \end{cases} \qquad (5)$$

ни назарда тутиб ечамиз.

(3- *усул*). а) $x^2-1>0$ бўлсин, яъни $x\in\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right[=D_1$.

Бу соҳада тенглама бундай ечилади:

$$(4)\Leftrightarrow x^2-1=x^2-2x\Leftrightarrow 2x=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\in D_1.$$

яъни бу соҳада тенглама ечимга эга эмас,

б) $x^2-1<0$ бўлсин, яъни $x\in\left]-1;+1\right[=D_2$.у ҳолда

$$(4)\Leftrightarrow 1-x^2=x^2-2x\Leftrightarrow 2x^2-2x-1=0\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2},$$ бу

илдизлардан фақат $x_1=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\in D_2$. иккинчиси эса тегишли эмас.

Жавоб: $\left\{\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Хулоса. Агар тенглама

$$F(x_1|\varphi_1(x)|,...,|\varphi_n(x)|)=0 \qquad (6)$$

каби берилса ($\varphi_1(x)-$*кўпхадлар*$,i=1,2,...,n$), у ҳолда ҳам интерваллар усули қўлланилади. Бунда ҳам барча

$$\varphi_1(x)=0,\varphi_2(x)=0,...,\varphi_n(x)=0 \qquad (7)$$

тенгламаларнинг илдизлари топилиб, сонлар ўқида белгилаб олинади ва тенгламанинг аниқланиш соҳасида улар билан аниқланган ўзаро кесишмайдиган ҳар бир оралиқда юқоридаги 3-усул билан ечилади.

4-мисол. Тенгламани ечиш

$$|x^2-4|-|2x|+4|x+3|=8x-24 \qquad (8)$$

Ечиш: Тенгламанинг (7) га биноан модулли функцияларини нолга тенглаб, ҳар бирининг илдизлари тўпламини топамиз:

$$x^2-4=0, x=0, x+3=0\Rightarrow (2;-2\ 0:-3).$$

Илдизлар сонлар ўқини $\left]-\infty;-3\right[,\left[-3;-2\right[,\left[-2;0\right[,\left[0;2\right[,\left[2;+\infty\right[$ каби бешта оралиққа ажратади. Бу тенглама R да аниқланган. Шунинг учун уни шу оралиқларнинг ҳар бирида ечамиз:

а) $x\in\left]-\infty;-3\right[\Rightarrow(8)\Leftrightarrow x^2-4-2(-x)-4(x+3)=8x-24\Leftrightarrow$

$$x_{1.2}=5\pm\sqrt{17},$$

лекин бу илдизлар қаралаётган оралиққа тегишли эмас.

б) $x\in\left[-3;-1\right[\Rightarrow(8)\Leftrightarrow$

$$x^2-4-2(-x)+4(x+3)=8x-24\Leftrightarrow D<0,$$

бунда ҳосил бўладиган кавадрат тенгламанинг дискриминанти манфий.

в) $x\in\left[-1;0\right[\Rightarrow(8)\Leftrightarrow-(x^2-4)-2(-x)+4(x+3)=8x-24\Leftrightarrow$

$$x_{3,4}=-1\pm\sqrt{41},$$

бу ҳам қаралаётган оралиққа тегишли бўлмаган илдизлардир.

г) $x\in\left]0;1\right]\Rightarrow(8)\Leftrightarrow-(x^2-4)-2x+4(x+3)=8x-24\Leftrightarrow$

$$x_{5,6}=-3\pm7,$$

бу ердан топилган -10 ва 4 илдизлар ҳам шу оралиққа тегишли эмас,

д) $x\in\left]1;+\infty\right]\Rightarrow(8)\Leftrightarrow x^2-4-2x+4(x+3)=8x-24,$

бундан тузилган квадрат тенглама ҳақиқий илдизга эга эмас.

Хулоса шуки, (8) тенглама R да ечимга эга эмас.

Шундай қилиб, бу пунктда модул белгиси қатнашган тенгламалардан энг кўп учрайдиганларини ечиш усули берилди. Логарифмик, кўрсаткичли, иррационал ва бошқа тенгламаларда модул белгиси иштироки эса, кўпинча, улар айний алмаштиришлар натижасида юқорида кўрсатилган усулда ечиладиган тенгламага келади.

Модул белгиси қатнашган тенгсизликлар

Модул белгиси қатнашган тенгсизлик, кўпинча, интерваллар усули билан қулай ечилади. Масалан,

$$x^2-5|x+6|>0 \qquad (9)$$

тенгсизлиги сонлар ўқини $\left]-\infty;-6\right[$ *ва* $\left[-6;+\infty\right[$ икки оралиғида алоҳида-алоҳида ечилади:

а)
$$\begin{cases}x\in\left]-\infty;-6\right[,\\ x^2-5(-x-6)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left]-\infty;-6\right[,\\ x^2+5x+30>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x\in\left]-\infty;-6\right[,\\ x\in R\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;-6\right[.$$

$$\begin{cases} x \in (-6;+\infty), \\ x^2 - 5(x+6) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-6;+\infty), \\ x^2 - 5x - 30 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

б) $$\begin{cases} x \in (-6;+\infty), \\ \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{5-\sqrt{145}}{2}, \\ x > \dfrac{5+\sqrt{145}}{2} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-6; \frac{5-\sqrt{145}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{145}}{2}; +\infty\right)$$

Жавоб: $x \in (-\infty;-6) \cup \left(-6; \dfrac{5-\sqrt{145}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{5+\sqrt{145}}{2}; +\infty\right)$

Агар тенгсизлик

$$F(x, |\varphi_1(x)|, |\varphi_2(x)|, \ldots, |\varphi_n(x)|) < 0 \qquad (10)$$

кўринишда ($\varphi_i(x)$ – *кўпхадлар*, $i = 1.2\ldots,n$) бўлса, барча $\varphi_i(x)$ ларнинг ҳамма илдизлари сонлар ўқида аниқлаган, ўзаро кесишмайдиган ҳар бир оралиқда ечилади, ечимлар умумлаштириб жавоб ёзилади.

5-мисол. Тенгсизликни ечиш:

$$\frac{|4x-1|}{4x^2-2x-2} > \frac{1}{2}. \qquad (11)$$

Ечиш: Бунда $\varphi(x) = 4x - 1 = 0$ бўлиб, $x_0 = \dfrac{1}{4}$ ҳосил қилган $\left]-\infty; \dfrac{1}{4}\right[$ *ва* $\left]\dfrac{1}{4}; +\infty\right[$ интервалларда берилган (11) тенгсизлик ечилади

а) $x \in \left[\dfrac{1}{4}; +\infty\right[$ бўлганда,

$$(11) \Leftrightarrow \frac{4x-1}{4x^2-2x-2} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{4x-1}{2x^2-x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x(x-2.5)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)} < 0.$$

Буни интервал усулида ечиб $x \in \left]-\dfrac{1}{2}; 0\right[\cup \left]1; \dfrac{5}{2}\right[$ топилади, аммо $x \geq \dfrac{1}{4}$ бўлгани учун натижада жавоб $]1; 2.5[$ дан иборатдир;

б) $x \in \left]-\infty; \dfrac{1}{4}\right[$ бўлганда,

$$(11) \Leftrightarrow \frac{1-4x}{4x^2-2x-2} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{2}-x\right)(x+2)}{\left(\frac{1}{2}+x\right)(x-1)} > 0.$$

Бу ерда, $x \in \left]-2; -\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}; 1\right[$ ечим топилади, лекин $x < \dfrac{1}{4}$ бўлгани учун натижада жавоб $\left]-2; -\dfrac{1}{2}\right[$ бўлади.

Жавоб: Берилган тенгсизликнинг ечими: $\left]-2; -\dfrac{1}{2}\right[\cup]1; 2.5[$.

6-мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$|x-2| + |x+2| < 8. \qquad (12)$$

Ечиш: $\varphi_1(x) = x - 2, \varphi_2(x) = x + 2$десак, уларнинг илдизи $x_{1,2} = \pm 2$ лар топилиб, келтирилган қоидага асосан R сонлар ўқи $]-\infty;-2[, [-2;2[, [2;+\infty[$ оралиқларга ажралади. Уларнинг ҳар бирида тенгсизлик ечилади:

а) $x \in [2;+\infty[\Rightarrow (12) \Leftrightarrow -2 + x + x + 2 < 8 \Leftrightarrow 2x < 8 \Leftrightarrow x < 4.$

Бу ердан якуний ечим $x \in [2;4[$.

б) $x \in [-2;2[\Rightarrow (12) \Leftrightarrow -x + 2 + x + 2 < 8 \Leftrightarrow 4 < 8.$

Бу тенгсизлик қаралаётган оралиқнинг ҳар бир қийматида ўринли, демак, бу ердан якуний ечим $[-2;+2[$ дан иборат.

в) $x \in [-\infty;-2[\Rightarrow (12) \Leftrightarrow 2 - x - 2 - x < 8 \Leftrightarrow -2x < 8 \Leftrightarrow x > -4,$

бу ердан якуний ечим $]-4;-2[$ дан иборатдир

Жавоб: $]-4;-2[\cup [-2;2[\cup [2;4[=]-4;4[$.

7-мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\le 1. \qquad (13)$$

Ечиш: (*1- усул*). Бу тенгсизлик $\left|\frac{a}{b}\right|\le 1$ шаклда бўлиб. $|b\ne 0|$ бўлган ҳол учун тенгсизликни $|a|\le|b|(b\ne 0)$ кўринишга келтирсак, берилган (13) га тенг кучли бўлиб қолади:

$$(13)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4\ne 0\\ \left|x^2-5x+4\right|\le\left|x^2-4\right|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|\ne 2,\\ |(x-1)(x-4)|\le|(x-2)(x+2)|.\end{cases}$$

Энди юқоридаги қоидага кўра сонлар ўқи -2; 1; 2; 4 ларда интервалларга ажаратилиб, ҳар бир оралиқда система ечилади ва ушбу жавоб топилади:

$$x\in\left[0;\frac{8}{5}\right]\cup\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$$

(*2-усул*). Баъзида a>0 сон учун $|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a$. эквивалентликдан фойдаланиб ечилса, бу тенгсизлик ушбу қўш тенгсизликка келтирилиб ечилади:

$$\Leftrightarrow (13)\Leftrightarrow -1\le\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\le 1\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\ge -1\\ \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{-5x+8}{x^2-4}\le 0\\ \dfrac{x(x-2.5)}{x^2-4}\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x-\frac{8}{5}}{(x+2)(x-5)}\ge 0\\ \dfrac{x(x-2.5)}{(x+2)(x-2)}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left[-2;\frac{8}{5}\right]\cup[2;+\infty],\\ x\in[-\infty;-2]\cup[0;2]\cup[2.5;+\infty]\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$x\in\left[0;\frac{8}{5}\right]\cup\left[\frac{5}{2};+\infty\right]$$

модул белгиси қатнашган тенгсизликларни ечишда $|x|>a\Leftrightarrow\begin{cases}x>a\\x<-a\end{cases}$ ни назарда тутиш анча қулайликлар туғдиради:

8-мисол. Тенгсизликни ечинг $\left|\frac{x^2-4}{3x}\right|\ge 1$

Ечиш: Тенгсизликни юқоридаги эквивалентликка асосан ечсак:

$$(14)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{3x}\ge 1\\ \dfrac{x^2-4}{3x}\le -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(x-4)(x+1)}{3x}\ge 0\\ \dfrac{(x+4)(x-1)}{3x}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x\in[-1;0)\cup[4;+\infty)\\ x\in(-\infty;-4]\cup(0;1]\end{cases}$$

Жавоб: $(-\infty;-4]\cup[-1;0)\cup(0;1]\cup[4;+\infty)$.

Юқоридаги 7- ва 8- мисолдаги ечиш усули ушбу тенгсизликни ечишда ҳам қўлланилган

9-мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$x^2-5|x|+6<0.$$

Ечиш: Бунда $x^2=|x|^2$ ни ҳисобга олсак,

$$x^2-5|x|+6<0\Leftrightarrow(|x|-2)(|x|-3)<0\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}|x|>3\\ |x|>2\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-3;-2]\cup[2;3].$$

Жавоб: $[-3;-2]\cup[2;3]$.

3.6-§. Параметрли тенглама ва тенгсизликлар ҳамда уларни ечиш усуллари. Параметр қатнашган модулли тенгламалар.

Агар бир номалумли тенглама

$$f(x,a,b,\ ...\ ,c)\ =\ 0\ (a,b,\ ...\ ,c\in R)$$

шаклда берилса, у параметрли тенглама дейилиб, унинг аниқланиш соҳаси, илдизлари сони a, b, ... ,c параметрларга боғлиқ равишда ўзгариб туради. Параметрли рационал тенгламага мисоллар келтирамиз.

1. мисол. Тенгламани ечинг.

$$ax^2-(a-b)x-b=0. \qquad (1)$$

Ечиш: Агар a = 0 бўлса, бу тенглама чизиқлидир:

$(1) \Leftrightarrow bx-b=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b\neq 0 \Rightarrow x=1, \\ b=0 \Rightarrow x=c, \end{array}\right.$ с – ихтиёрий чекли сон, аксинча, $a\neq\ 0$ бўлса, (1) тенглама квадратдир:

$$(1) \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{a-b\pm\sqrt{(a-b)^2+4ab}}{2a}=\frac{a-b\pm|a+b|}{2a}.$$

а) $a+b\geq 0$ *бўлса*, $x_1=1, x_2=-\frac{b}{a}$ илдизлар ечимидир;

б) $a+b<0$ *бўлса*, $x_1=-\frac{b}{a}, x_2=1$ ечим келиб чиқади.

Жавоб:

$a\neq 0 \Rightarrow \left\{1;-\frac{b}{a}\right\}: a=0, b\neq 0 \Rightarrow \{1\}; a=0, b=0 \Rightarrow \{c, c\in R\}.$

2- мисол: Тенгламани ечинг:

$$\frac{2x+a}{2x-a}+\frac{2x+b}{2x-b}=2. \qquad (2)$$

Ечиш: Тенгламанинг аниқланиш соҳаси a ва b га боғлиқ:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-a)^2+(2x-b)^2\neq 0, \\ (2x+a)(2x-b)+(2x+b)(2x-a)=2(2x-a)(2x-b) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\neq\frac{a}{2}, x\neq\frac{b}{2}, \\ (a+b)x=ab \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b\neq 0, \\ \frac{a}{2}\neq x\neq\frac{b}{2}, \\ x=\frac{ab}{a+b}; \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=0, a=b=0, \\ x=c, c\in R, c\neq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=0, a=-b\neq 0, \\ \textit{ечими} \quad \textit{йўқ}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Жавоб:

1) $a\neq\pm b \Rightarrow x=\frac{ab}{a+b}$; 2) $a=b=0 \Rightarrow x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;+\infty\right[$; 3) $a=\pm b \Rightarrow$ тенгламанинг ечими йўқ;

3- мисол: Тенгламани ечими:

$$\frac{4a}{x^2-a^2}+\frac{x-a}{x(x+a)}=\frac{1}{x(x-a)}. \qquad (3)$$

Ечиш: *Тенгламанинг аниқланиш соҳаси шарти билан система тузамиз:*

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0, x\neq\pm, \\ x^2+(2a-1)x+a^2-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0, x\neq\pm a, \\ x_1=1-a, x_2=-a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\neq 0, x\neq\pm a, \\ x=1-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 1, a\neq\frac{1}{2}, \\ x=1-a. \end{cases}$$

Жавоб: 1) $a\neq 1, a\neq\frac{1}{2} \Rightarrow x=1-a$; 2) $a=1, a=\frac{1}{2} \Rightarrow$ ечими йуқ.

Параметрли иррационал тенглама. Бу ерда шу бобнинг 2-§ параграфидаги (1) ÷ (4) формулаларни қўллашга доир мисоллардан наъмуналар келтирамиз.

10- мисол. Тенгламани ечинг.

$$\sqrt{4x^2+ax-10a}=2x+1. \qquad (4)$$

Ечиш: 2-§. (2) даги формулага биноан:

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+ax-10a=(2x+1)^2, \\ 2x+1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-4)x=10a+1, \\ x\geq-\frac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

бу ердан $a=\ 4$бўлганда (4) тенглама ечимга эга эмас, демак, $a\neq\ 4$ деб ечишни давом эттирамиз:

$$\begin{cases} x=\frac{10a+1}{a-4}, \\ x\geq-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{10a+1}{a-4}, \\ \frac{10a+1}{a-4}\geq-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{10a+1}{a-4}, \\ a\in\left(-\infty;\frac{2}{21}\right]\cup(4;-\infty)=D \end{cases}$$

Жавоб: $a\in D \Rightarrow x=\frac{10a+1}{a-4}, a\notin D \Rightarrow$ ечими йўқ.

11- мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{a^2 - x\sqrt{x^2+a^2}} = a - x. \qquad (5)$$

Ечиш. Яна 2-§. (2) даги формулага биноан

$$(5) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - x\sqrt{x^2+a^2} = (a-x)^2; \\ a - x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\sqrt{x^2+a^2} = x(2a-x), & (6) \\ x \le a. & (7) \end{cases}$$

Агар $a=0$ бўлса, у ҳолда (7) дан $-\infty < x \le 0$ бажарилгани келиб чиқиб, (6) дан бу соҳада $\sqrt{x^2} = -x$ тенглик ўринли эканлиги ҳосил бўлади. Демак, $a = 0$бўлганда (5) тенглама $]-\infty;0]$ тўпламли ечимга эга. Энди $a \ne 0$бўлсин. У ҳолда

$$(5) \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(\sqrt{x^2+a^2} + x - 2a\right) = 0, \\ x \le a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ \begin{cases} x^2 + a^2 = (2a-x)^2, \\ 2a - x \ge 0; \end{cases} \end{array}\right. \\ x \le a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = \dfrac{3}{4}a, \\ x \le 2a, \\ x \le a, \end{cases}$$

Агар $a > 0$бўлса, у ҳолда $x_1 = 0$ *ва* $x_2 = \dfrac{3}{4}a$ илдизлар a дан (демак, $2a$ дан ҳам) кичик, шунинг учун улар тенглама ечим; аксинча, $a < 0$ бўлса, улар a дан (демак, $2a$ дан ҳам) катта, шунинг учун улар чет илдизлардир

Жавоб: $a < 0 \Rightarrow$ *ечими йўқ*; $]-\infty;0]; a > 0 \Rightarrow \left\{0; \dfrac{3}{4}a\right\}$

12- мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt[5]{a+x} + \sqrt[5]{a-x} = \sqrt[5]{2a}. \qquad (8)$$

Ечиш. Бу ерда $a + x = y^5, a - x = t^5$ деб тенгламани симметрик алгебраик системага келтириб ечиш маъқул:

$$(8) \Rightarrow \begin{cases} y^5 + t^5 = 2a, \\ y + t = \sqrt[5]{5a} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (y+t)^5 - 5yt(y+t)^3 + 5y^2t^2(y+t)^3 = 2a \\ y + t = \sqrt[5]{2a} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt[5]{(2a)^3}\,yt + \sqrt[5]{2a} \cdot y^2t^2 = 0. \\ y + t = \sqrt{2a}. \end{cases}$$

(9)

Бу ерда $a = 0$ ва $a \ne 0$ ҳоллар ҳосил бўлади:

$$а) a = 0 \Rightarrow (17) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -t, \\ y^5 = x, \\ t^5 = -x \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt[5]{x} = -\sqrt[5]{-x} \Leftrightarrow x \in R;$$

$$б) a \ne 0 \Rightarrow (17) \Leftrightarrow \left[(A) \begin{cases} yt = \sqrt[5]{4a^2}, \\ y + t = \sqrt[5]{2a} \end{cases} yoki (B) \begin{cases} yt = 0, \\ y + t = \sqrt[5]{2a}. \end{cases} \right.$$

Бунда (A) система ҳақиқий ечимга эга эмас. (B) эса ечимга эга; демак:

$$a \ne 0 \Rightarrow (16) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0, \\ y^5 = a + x; \end{cases} \\ \begin{cases} t = 0, \\ t^5 = a - x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -a, \\ x_2 = a. \end{array}\right.$$

Жавоб: $a = 0 \Rightarrow x \in R; a \ne 0 \Rightarrow \{\pm a\}$.

13- мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \sqrt{a+b-2x}. \qquad (10)$$

Ечиш: Тенгламанинг аниқланиш соҳасида $a \ge x, b \ge x$ шартлар бажарилган деб фараз қилсак, икки ҳол: $a \ge b$ ёки $b < a$ бўлиши мумкин.

1- ҳол. $a \ge b$. Бу вақтда тенглама $]-\infty;b]$ да аниқланган булиб $a - x$ айирма бу соҳада нолга интилмайди (мусбат). У ҳолда $u^2 = a - x$ ва $v^2 = b - x$ деб белгиласак, $u > 0$ва $v \ge 0$дир. Натижада

$$(10) \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = a-b \\ u+v = \sqrt{u^2+v^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = a-b \\ uv = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u^2 = a-b \\ v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-x = a-b \\ b-x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = b.$$

2- ҳол. $a<b$. Бу вақтда тенглама $[-\infty;a]$ да аниқланган булиб, $b-x$ айирма бу соҳада нолга айланмайди. (мусбат). Юқоридаги усулни такрорлаб, бу холда хам $x=a$ ечим топилади.

Жавоб: $a \ge b \Rightarrow \{b\}; a<b \Rightarrow \{a\}$.

Модул белгиси қатнашган параметрли тенглама.

14-мисол: Тенгламани ечинг:

$$2x - \frac{9a^2}{2x} + \frac{6a|2x+3a|}{2x} = 0. \qquad (11)$$

Ечиш: $x \neq 0$ бўлсин. У ҳолда шуни ҳисобга олсак,

$$(11) \Leftrightarrow 4x^2 + 6a|2x+3a| = 9a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (A)\begin{cases} 2x+3a \ge 0, \\ 4x^2+12ax+9a^2 = 0; \end{cases} \\ (B)\begin{cases} 2x+3a \le 0, \\ 4x^2-12ax-27a^2 = 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (A)\begin{cases} x \ge -\frac{3}{2}a, \\ (2x+3a)^2 = 0; \end{cases} \\ (B)\begin{cases} x \le -\frac{3}{2}a, \\ \left(x+\frac{3}{2}a\right)(x-4a) = 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (A)\begin{cases} x \ge -\frac{3}{2}a, \\ x_1 = -\frac{3}{2}a \neq 0; \end{cases} \\ (B)\begin{cases} x \le -\frac{3}{2}a, \\ x_1 = -\frac{3}{2}a \neq 0, \\ x_2 = 4a \neq 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Жавоб: $a>0 \Rightarrow \left(-\frac{3}{2}a\right)$; $a=0 \Rightarrow$ *ечими йўқ*;

$a<0 \Rightarrow \left\{-\frac{3}{2}a; 4a\right\}$.

Параметрли логарифмик ва кўрсаткичли тенгламалар.

Ушбу бобнинг, 4-§. ва 5-§. Параграфларида кўрсатилган қоидалар асосида ечиладиган мисоллардан намуналар кўрсатамиз.

17- мисол. Тенгламанинг ечими:

$$x^{\log_a x} = a^2 x. \qquad (12)$$

Ечиш: Тенглама $x>0$, $a>0$, $a \neq 1$ да маънога эга, a асосга кўра логарифмласак,

$$(12) \Rightarrow \log_a^2 x = 2 + \log_a x \Leftrightarrow$$

$$(\log_a x + 1)(\log_a x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\{x_1 = a^2, x_2 = a^{-1}\}.$$

Жавоб: $a>0, a\neq 1 \Rightarrow \left\{a^2; \frac{1}{a}\right\}; a \le 0$ ёки $a=1 \Rightarrow$ ечими йўқ.

18- мисол. Тенгламани ечинг:

$$\frac{\log_x(2a-x)}{\log_x 2} + \frac{\log_a x}{\log_a 2} = \frac{1}{\log_{(a^2-1)} 2}. \qquad (13)$$

Ечиш. Тенглама $x>0, x\neq 1, a>0, a\neq 1, a^2>1$ ва $a^2-1 \neq 1$ да маъмога эга. a лар учун қўйилган шартдан $a>1$ва $a \neq \sqrt{2}$ экани келиб чиқади. $2a-x>0$ шартидан $x<2a$ деган хулоса, яъни $D=\{0<x<2a, x\neq 1\}$ каби аниқланиш соҳаси топилади.

$a>1, a\neq\sqrt{2}, 0<x<2a, x\neq 1$ лар учун

$$(13) \Leftrightarrow \log_2(2a-x) + \log_2 x = \log_2(a^2-1) \Leftrightarrow$$

$$(2a-x)x = a^2-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2 = 1 \Leftrightarrow x_{1,2} = a \pm 1.$$

a га қўйилган шартлар $x_1 = a+1$ нинг ечим эканлигини, $x_2 = a-1$ нинг эса $a=2$дан ташқари ҳолда ечимлигини кўрсатади. Шуларни умумлаштириб жавоб ёзамиз.

Жавоб: $a\in]1;\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2};2]\cup[2;+\infty[\ \Rightarrow$

$\{a\pm1\};a=2\Rightarrow\{3\};a=\sqrt{2}$ ёки $a\le1\Rightarrow$ ечим йўқ.

19- мисол. Тенгламани ечинг:

$$log_{ax}(a-x)=1. \qquad (14)$$

Ечиш: $a-x>0, ax>0, ax\neq 1$ шартларга кўра

$$(14)\Leftrightarrow\begin{cases}x<a, x\neq\dfrac{1}{a},\\ ax>0,\\ a-x=ax\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{a}{a+1},\\ ax=\dfrac{a^2}{a+1}>0,\\ ax=\dfrac{a^2}{a+1}\neq1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{a}{a+1},\\ a>-1, a\neq0,\\ a^2-a-1\neq0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{a}{a+1}, a>-1, a\neq\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}; a\neq0.$$

Параметрли тригонометрик тенгламалар

20- мисол. Тенгламани ечинг:

$$a^2+a-sin^2x+\ 2acosx=\ 1. \qquad (15)$$

Ечиш:

$$(15)\Leftrightarrow\cos^2x-2a\cos x+a^2+a-2=0\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=a+\sqrt{2-a},\\ \cos x=a-\sqrt{2-a}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_n=\pm\arccos\left(a+\sqrt{2-a}\right)+2\pi n, n\in Z;\\ x_k=\pm\arccos\left(a-\sqrt{2-a}\right)+2\pi k, k\in Z\end{array}\right.$$

Бунда x_n илдизлар учун $\left|a+\sqrt{2-a}\right|\le1, x_k$ илдизлар учун $\left|a+\sqrt{2-a}\right|\le1$ бажарилувчи а лар назарда тутилади.

$$a)\left|a+\sqrt{2-a}\right|\le1\Leftrightarrow\begin{cases}a+\sqrt{2-a}\le1,\\ a+\sqrt{2-a}\ge-1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$a\in\left[\frac{-3-\sqrt{13}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]=D_1;$$

$$б)\left|a-\sqrt{2-a}\right|\le1\Leftrightarrow\begin{cases}a-1\le\sqrt{2-a},\\ a+1\ge\sqrt{2-a}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$a\in\left[\frac{-3+\sqrt{13}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]=D_2.$$

Жавоб: $a\in D_1\Rightarrow x_n=\pm\arccos(a+\sqrt{2-a})+2\pi n, n\in Z;$

$a\in D_2\Rightarrow x_k=\pm\arccos(a-\sqrt{2-a})+2\pi k, k\in Z.$

21- мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sin(a+x)-\frac{\cos a}{\sin x}=0. \qquad (16)$$

Ечиш: $sinx\neq\ 0$десак,

$(16)\Leftrightarrow\sin x\sin(a+x)-\cos a=0\Leftrightarrow\cos(2x+a)=-\cos a\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos(2x+a)=\cos(\pi-a)\Leftrightarrow 2x+a=\pm(\pi-a)+2\pi k, k\in Z.$

$$a)2x+a=-\pi+a+2\pi k\Rightarrow x_k=-\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z.$$

Бу тенгламанинг ечими бўла олади, чунки $\sin x_k\neq\ 0$

$б)2x+a=\pi-a+2\pi k\Rightarrow x_n=-a+\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z.$

Агар $\sin x_n$ ни текширсак, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n-a\right)\neq0$ бўлиши учун

$a\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi m(m\in Z)$ бўлиши керак.

Жавоб:

$1)a=\dfrac{\pi}{2}+\pi m(m\in Z)\Rightarrow\left\{-\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z\right\};$

$2)a\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi m(m\in Z)\Rightarrow\left\{-a+\dfrac{\pi}{2}+\pi n, -\dfrac{\pi}{2}+\pi k; n,k\in Z\right\}.$

Параметрли тенгсизлик.

Ҳар бир ноъмалумли тенгсизлик $f(x,a,b,...,c) < 0,(a,b,...,c \in R)$ кўринишда бўлса, у параметрли тенгсизлик дейилади, бунда $a,b,...,c$ лар параметрлар дейилиб, тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси, ечимлар тўплами шу параметрларга боғлиқ равишда ўзгаради.

Параметрли рационал тенгсизликка мисоллар келтирайлик.

22- мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$a(2a-1)x^4(x-4a)(4a^2-x^2)(x^2+8a^2+1) > 0. \qquad (17)$$

Ечиш: (17) тенгсизликда охирги қавс қатъий мусбат бўлгани учун

$$(17) \Leftrightarrow a(2a-1)x^4(x-4a)(x-2a)(x+2a) < 0. \qquad (18)$$

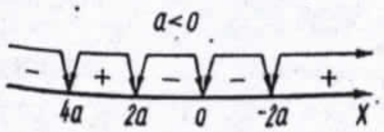
Бу тенгсизликнинг критик нуқталари: $\{0;\,4a;\,2a;\,-2a\}$.

1- ҳол: $a(2a-1)>0 \Leftrightarrow \left(a<0 \quad \text{ёки} \quad a>\dfrac{1}{2}\right)$, у ҳолда

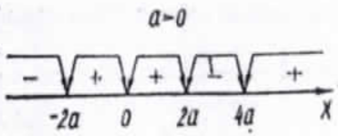
$$(18) \Leftrightarrow x^4(x-4a)(x-2a)(x+2a)<0.$$

а) $a<0$ бўлсин. У ҳолда $4a<2a<0<-2a$ (1-расм). Интерваллар усули билан $x \in]-\infty;4a[\cup]2a;0[\cup]0;-2a[=D_1$ ечим аниқланади;

б) $a>\dfrac{1}{2}$ бўлсин. У ҳолда $-2a<0<2a<4a$ (2-расм). Интерваллар усули билан $x \in]-\infty;-2a[\cup]2a;4a[=D_2$ ечим топилади.



1-расм



2-расм

2- ҳол. $a(2a-1)<0 \Leftrightarrow \left(0<a<\dfrac{1}{2}\right)$. У ҳолда

$$(5) \Leftrightarrow x^4(x-4a)(x-2a)(x+2a)>0.$$

Шунингдек, $-2a<0<2a<4a$ бўлгани учун интервал усули билан ушбу ечим аниқланади:

$$x \in]-2a;0[\cup]4a;+\infty[=D_3.$$

3- ҳол. $a(2a-1)=0 \Leftrightarrow \left(a=0 \, \text{ёки} \quad a=\dfrac{1}{2}\right)$. У ҳолда

$$(17) \Leftrightarrow (18) \Leftrightarrow 0<0.$$

Бу эса мумкин эмас. Демак, бу ҳолда тенгсизлик ечимга эга эмас.

Жавоб: $a<0 \Rightarrow x \in D_1$; $0<a<\dfrac{1}{2} \Rightarrow x \in D_2$; $a<\dfrac{1}{2} \Rightarrow x \in D_3$;

ёки $a=0$ $a=\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ бу ҳолда ечими йўқ.

23- мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$\frac{2}{x+a}-\frac{x}{x^2-a^2}<\frac{1}{a-x}. \qquad (19)$$

Ечиш:

$$(19) \Leftrightarrow \frac{2x-a}{x^2-a^2}<0 \Leftrightarrow (x-a)\left(x-\frac{a}{2}\right)(x+a)<0. \qquad (20)$$

1- ҳол. $a<0$. У ҳолда $a<\dfrac{a}{2}<-a$ бажарилади. Энди (20) га интервал усули қўлласак(2-расм): $x \in]-\infty;a[\cup\left]\dfrac{a}{2};-a\right[=D_1$ ечим келиб чиқади.

2- ҳол. $a>0$, у ҳолда $-a<\dfrac{a}{2}<a$. Энди (20) га интервал усулини қўллаб (2- шакл), $x \in]-\infty;a[\cup\left]\dfrac{a}{2};a\right[=D_2$ ечим топилади.

3- ҳол. $a=0$. У ҳолда $(20) \Leftrightarrow x^3<0$. Бунда $x \in]-\infty;0[$ ечим чиқади.

Жавоб: $a<0 \Rightarrow x \in D_1; a>0 \Rightarrow x \in D_2 a=0 \Rightarrow x \in]-\infty;0[$.

6- мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$\frac{4ax+3}{10x-4a}<3. \qquad (21)$$

Ечиш:

$$(21) \Leftrightarrow \frac{2(a-15)x+3+12a}{10x-4a}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (A):\begin{cases}2(a-15)x+3+12a>0,\\ 10x-4a<0\end{cases} \\ \text{ёки}(B):\begin{cases}2(a-15)x+3+12a<0,\\ 10x-4a>0\end{cases}\end{array}\right.$$

бажарилади. Бунда ҳар бир системани алоҳида ечиб чиқишга тўғри келади.

1) $a-15>0$ бўлсин.

$$(21)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(A)\begin{cases}2(a-15)x>-3-12a,\\10x<4a;\end{cases}\\(B)\begin{cases}2(a-15)x>-3-12a,\\10x>4a;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(A)\left\{\dfrac{3+12a}{2(15-a)}<x<\dfrac{2a}{5}\Leftrightarrow x\in\left]\dfrac{3+12a}{2(15-a)};\dfrac{2a}{5}\right[=D_1\right.\\(B)\left\{\dfrac{2a}{5}<x<\dfrac{3+12a}{2(15-a)}\Rightarrow \text{ечими йўқ}\right.\end{array}\right.$$

2) $a=15$ бўлсин.

$$(21)\Leftrightarrow(A):\begin{cases}3+12\cdot15>0,\\10x-60<0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;6\right[=D_2.$$

3) $a-15<0$ бўлсин.

$$(21)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(A)\begin{cases}2(a-15)x>-3-12a,\\10x-4a<0;\end{cases}\\(B)\begin{cases}2(a-15)x>-3-12a,\\10x-4a>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(A)\begin{cases}x<-\dfrac{3+12a}{2(a-15)},\\x<\dfrac{2a}{5};\end{cases}\\(B)\begin{cases}x>-\dfrac{3+12a}{2(a-15)},\\x>\dfrac{2a}{5}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Энди белгилаш киритайлик: $\dfrac{3+12a}{2(a-15)}$ ва $\dfrac{2a}{5}$ сонларнинг каттасини α, кичигини β деб олсак, у ҳолда $x\in\left]-\infty;\beta\right[\cup\left]\alpha;+\infty\right[=D_3$ изланаётган ечимдир.

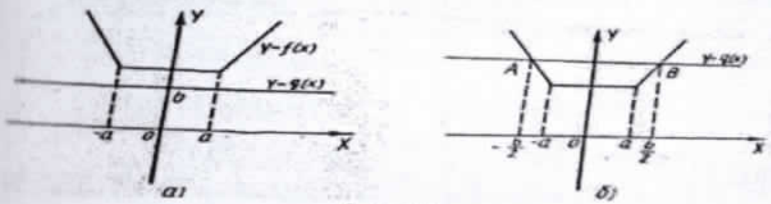
Жавоб: $a>15\Rightarrow x\in D_1 a=15\Rightarrow x\in D_2, a<15\Rightarrow x\in D_3$.

Модул белгиси қатнашган параметрли тенгсизлик.

7- мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$|x-a|+|x+a|<b\ (a<0). \qquad (22)$$

Ечиш: (*График усул.*) $f(x)=|x-a|+|x+a|$ ва $g(x)=b$ функцияларнинг графигини ясайлик.



3- расм

a – шаклдан кўринадики:

$$f(x)=\begin{cases}-2x, agar & x<-a,\\2a, agar & -a\le x\le a,\\2x, agar & x>a\end{cases}$$

Демак, $b\le 2a$ бўлганда $g(x)=b$ функция графиги $f(x)$ функция графигининг горизонтал қисмининг юқорисидан ўтмайди (a-шакл). Бу вақтда тенгсизлик ечимга эга эмас. $b>2a$ бўлганда у функциялар графиги $A\left(-\dfrac{b}{2};b\right)$ ва $B\left(\dfrac{b}{2};b\right)$ нуқтада кесишади (б-шакл). Демак, (22) тенгсизлик $\left]-\dfrac{b}{2};\dfrac{b}{2}\right[$ соҳада ўринли.

Жавоб: *а)* $b\le 2a\Rightarrow$ ечимийўқ; *б)* $b>2a\Rightarrow x\in\left]-\dfrac{b}{2};\dfrac{b}{2}\right[$.

8- мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$|x-6a|-|x-2a|<4a \qquad (23)$$

Ечиш: Учта ҳолни қараймиз: $a=0,\ a>0,\ a<0$.

1- ҳол. $a=0 \Rightarrow (23) \Leftrightarrow 0<0$. Демак, ечими йўқ.

2- ҳол. $a > 0$. Бу вақтда интервал усули қўлланилиши учун $-2a < 6a$ ни ҳисобга олинади. Демак,

$$(23) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-2a, \\ -x+6a+x+2a<4a; \end{cases} \\ \begin{cases} -2a<x<6a, \\ -x+6a-(x+2a)<4a; \end{cases} \\ \begin{cases} 6a \le x, \\ x-6a-(x+2a)<4a \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-2a, \\ 8a<4a; \end{cases} \\ \begin{cases} -2a<x<6a, \\ x>0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 6a, \\ -8x<4a \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \{\text{ечими йўқ}, \\ \{0<x<6a, \\ \{x \ge 6a. \end{array}\right.$$

3- ҳол. $a < 0$ бўлсин. Унда интервал усули қўлланиши учун $6a < -2a$ ни ҳисобга олиш керак. Демак,

$$(23) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<6a, \\ -x+6a+x+2a<4a; \end{cases} \\ \begin{cases} 6a<x<-2a, \\ x-6a+x+2a<4a; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge -2a, \\ x-6a-(x+2a)<4a \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<6a, \\ 8a<4a; \end{cases} \\ \begin{cases} 6a<x<-2a, \\ x<4a; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge -2a, \\ -8a<4a \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \{x<6a; \\ \{6a \le x<4a; \\ \begin{cases} \text{ечими} \\ \text{йўқ}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Жавоб: $a<0 \Rightarrow x \in \left]-\infty; 4a\right[, a>0 \Rightarrow x \in \left]0;+\infty\right[\ a=0 \Rightarrow$ ечими йўқ.

Параметрли иррационал тенгсизлик.

Бу ерда 4- § формулаларни қўллаб ечишга доир мисоллардан намуналар курсатамиз.

14- мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$\sqrt{x+2b} < 2\sqrt{\frac{b^2}{x+2b}} + \sqrt{x+4b} \qquad (24)$$

Ечиш: $x+2b>0; x+4b \ge 0; \sqrt{b^2}=|b|$ булсин деб, тенгсизликнинг аниқланиш соҳасида:

$$(24) \Leftrightarrow x+2b-2|b| < \sqrt{(x+2b)(x+4b)}$$

га эга буламиз. Бу ерда уч ҳол булади:

1- ҳол. $b > 0$. Унда $(24) \Leftrightarrow x < \sqrt{(x+2b)(x+4b)}$ бўлиб формулага биноан

$$(24) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0 \\ (x+2b)(x+4b) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0, (x+2b)(x+4b) \ge 0 \\ x^2 < x^2+6bx+8b^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \{-2b \le x < 0 \\ \begin{cases} x \ge 0 \\ x \ge -\frac{4}{3}b \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \ge -2b.$$

2-ҳол. $b=0$. Унда $(24) \Leftrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{x} \Rightarrow$ ечими йўқ.

3-ҳол. $b<0$. Унда $(24) \Leftrightarrow x+4b < \sqrt{(x+2b)(x+4b)}$.

Тенгсизликнинг аниқланиш соҳасида $x+4b \ge 0$ шарти бор бўлгани учун бу тенгсизликнинг икки томонини $\sqrt{x+4b}>0$ га бўлиб юборсак,

$$(24) \Leftrightarrow \sqrt{x+4b} < \sqrt{x+2b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4b \ge 0, \\ x+2b>0, \\ x+4b<x+2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -4b, \\ x>-2b, \\ 4b<2b \end{cases} \Leftrightarrow x>-4b.$$

Жавоб: $b<0 \Rightarrow \left[-4b;+\infty\right[$; $b=0 \Rightarrow$ ечими йўқ; $b>0 \Rightarrow \left[-2b;+\infty\right[$.

15- мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$\sqrt{p+x} + \sqrt{p-x} > p. \qquad (25)$$

Ечиш: Тенгсизликнинг D аниқланиш соҳаси $p+x \ge 0, p-x \ge 0$, шартларининг бажарилиши билан ҳосил ган тўпламидир. $p<0$ бўлганда $D=\varnothing$ бўлиб, тенгсизлик бу вақтда ечимга эга эмас. $p=0$ бўлса, $D=[-p;p]$ бўлиб, тенгсизликни шу соҳада ечамиз:

$$(25) \Leftrightarrow \left(\sqrt{p+x}+\sqrt{p-x}\right)^2 > p^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{p^2-x^2} > p^2-2p. \qquad (26)$$

Бунда уч ҳол бўлади:

1- ҳол. $p^2-2p<0 \Leftrightarrow 0<p<2$. Бу вақтда (26) тенгсизликнинг чап томони манфий, ўнг томони мусбат. Демак, $D=[-p;p]$ шу тенгсизликнинг ечимидир.

2- ҳол. $p^2-2p=0 \Rightarrow p=2$. Бу вақтда тенгсизлик $2\sqrt{4-x^2}>0$ кўринишни олади. Демак, $y=\left]-2;+2\right[$ каби ечимга эга.

3- ҳол. $p^2 - 2p > 0$, яъни $n > 2$. Унда (25) тенгсизликни яна квадратга оширамиз:

$$(25) \Leftrightarrow 4(p^2 - x^2) > p^4 - 4p^3 + 4p^2 \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{4}p^3(4-p). \quad (27)$$

Бу ердан чиқадики, $n \geq 4$ да тенгсизликнинг ечими йўқ. $0 < n < 4$ бўлганда (27) дан ушбу ечим келиб чиқади:

$$(25) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}p\sqrt{p(4-p)} < x < \frac{1}{2}p\sqrt{p(4-p)}.$$

Бу ечим $D = [-p; +p]$ соҳада қисм-тўпламдир, чунки

$$\frac{1}{3}p\sqrt{p(4-p)} \leq p \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{4p-p^2} \leq 1 \Leftrightarrow 4p - p^2 \Leftrightarrow (p-2)^2 \geq 0.$$

Жавоб. $n \leq 0$ да ечими йўқ; $0 < p < 2 \Rightarrow [-p; p]$; $p = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow]-2;2[; 2 < p < 4 \Rightarrow \left]-\frac{1}{2}p\sqrt{p(4-p)}; \frac{1}{2}p\sqrt{p(4-p)}\right[; p \geq 1 \Rightarrow \text{ечим}$$

йўқ.

16- мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$\sqrt{a-x} + \sqrt{2a-x} > \sqrt{3a-2x}. \quad (28)$$

Ечиш: Тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси $a - x \geq 0$, $2a - x \geq 0$, $3a - 2x \geq 0$ шартлари билан аниқланадиган x лар тўпламидан иборат. $a \geq 0$ бўлса, $a < \frac{3}{2}a < 2a$ бажарилиб, (28) тенгсизлик $D_2 =]-\infty; 2a[$ да аниқланган. 1) $a \geq 0$ бўлсин. У ҳолда

$$(28) \Leftrightarrow \left(\sqrt{a-x} + \sqrt{2a-x}\right)^2 > 3a - 2x, \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{(a-x)(2a-x)} > x, \\ x \leq a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ x < a; \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, x \leq a, \\ 4(a-x)(2a-x) > x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \{x < 0; \\ \begin{cases} 0 \leq x \leq a, \\ 3x^2 - 3ax + 2a^2 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \{x < 0; \\ \begin{cases} 0 \leq x \leq a, \\ x \in R. \end{cases} \end{array}\right.$$

Охирги икки системадан якуний жавоб $]-\infty; a]$ эканлиги чиқади, 2) $a < 0$ бўлсин. У ҳолда

$$(28) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{a-x} + \sqrt{2a-x}\right)^2 > 3a - x \\ x \in D_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{(a - x(2a-x)} > x, \\ x \leq 2a \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 2a,$$

яъни $x \in D_2$ бўлганда x доим манфий, шунинг учун охирги $2\sqrt{(a-x)(2a-x)} > x$ тенгсизлик доим бажарилади.

Жавоб: $a \geq 0 \Rightarrow]-\infty; a]; a < 0 \Rightarrow]-\infty; 2a]$.

Параметрли логарифмик ва кўрсаткичли тенгсизликлар.

20- мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$log_{a+x}x \leq log_a x^2, a > 0, a \neq 1. \quad (29)$$

Ечиш: Тенгсизликдан кўринадики, у $x > 0$ да маънога эга, демак, $log_a x^2 = 2log_a x$ эканлигидан

$$(29) \Leftrightarrow \log_a x \cdot \frac{1 - 2\log_a(x+a)}{\log_a(x+a)} \leq 0. \quad (29a)$$

1-ҳол. $a > 1$ бўлсин. $x > 0$ бўлгани учун $a > 1 \Rightarrow x + a > a > 1 \Rightarrow \log_a(x+a) > 1 > 0$ ва $1 - 2log_a(x+a) < 0$.

Демак,

$$(29a) \Leftrightarrow \log_a x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

2- ҳол. $0 < a < 1$ бўлсин, а) $x > 1$ бўлганда $log_a x < 0, log_a(x+a) < 0$ ва $1 - 2log_a(x+a) > 0$ бажарилиб, ($29a$) тенгсизлик ноўрин бўлади; б) $x = 1$ эса ($29a$) тенгсизликнинг ечимидир; в) $0 < x < 1$ бўлганда $log_a x > 0$ бажарилади ва

$$(29a) \Leftrightarrow \frac{1 - 2\log_a(x+a)}{\log_a(x+a)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_a(x+a) < 0, \\ \log_a(x+a) \geq -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 - a, \\ x \leq \sqrt{a} - a. \end{array}\right.$$

Энди $0 < x < 1$ эканлигида $]0; \sqrt{a} - a[\cup]1 - a; a[$ ечим иккинчи ҳол учун аниқланди.

Жавоб: $0 < a < 1 \Rightarrow]0; \sqrt{a} - a[\cup]1 - a; a]$; $a > 1 \Rightarrow [1; +\infty[$.

21- мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$\frac{2a^x-1}{a^x-1} > \frac{1-a^{-x}}{1-2a^{-x}},\ a>0, a\neq 1. \qquad (30)$$

Ечиш: $y=a^x$ деб (30) дан ушбу рационал тенгсизликни ёза оламиз:

$$(30) \Rightarrow \frac{y-0.5}{(y-1)(y-2)}<0.$$

Унинг y га нисбатан $\left]0;\frac{1}{2}\right[\cup\left]1;2\right[$ каби ечими интерваллар усули билан топилади. Энди x га нисбатан ечамиз:

$$a)\ 0<a<1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0<y<\frac{1}{2}, \\ 1<y<2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0<a^x<\frac{1}{2}, \\ 1<a^x<2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\log_a 2<x<\infty, \\ \log_a 2<x<0; \end{array}\right.$$

$$б)\ a>1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0<y<\frac{1}{2}, \\ 1<y<2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0<a^x<\frac{1}{2}, \\ 1<a^x<2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\infty<x<-\log_a 2, \\ 0<x<\log_a 2. \end{array}\right.$$

Жавоб: $0<a<1 \Rightarrow \left]\log_a 2;0\right[\cup\left]-\log_a 2;+\infty\right[$;
$a>1 \Rightarrow \left]-\infty;-\log_a 2\right[\cup\left]0;\log_a 2\right[$.

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МАСАЛАЛАР

III- БОБ. АЛГЕБРАИК ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

1-§.

1. Ушбу тенгламалар тенг кучлими:

2. $x-3=0$ ва $x^2-3x=0$; б) $x-4=0$ ва $x\sqrt{x-4}=0$; в) $x^3-1=0$ ва $x+\frac{1}{x}=x^2+\frac{1}{x}$;

г) $x^2-4=3$ ва $x^2-4+\frac{2}{x^2-7}=3+\frac{1}{x^2-7}$; д) $x^2-1=0$ ва $\sqrt[3]{1-x^2}(x-2)=0$;

ж) $x^2-4=0$ ва $\sqrt{(1-x^2)(x^2-4)}=0$;

2. Тенгламани ечинг:

а) $a^2x=9x+a+3$; б) $(a^2-4)x=3a^2+a-100$; в) $\frac{x}{a-3}-\frac{1}{a}=\frac{6+4x}{a^2-3a}$

3. Қуйидаги тасдиқларни исботланг:

а) $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{g(x)}{\varphi(x)} \Rightarrow f(x)=g(x)$; б) $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{g(x)}{\varphi(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ \varphi(x)-функция \end{cases}$

$D_0=D(f)\bigcap D(g)$ да аниқланган ва $\varphi(x)\neq 0, \forall x\ учун$.

б). Агар $\begin{cases} f(x)g(x)=0 \\ \varphi(x)\phi(x)=0 \end{cases}$ бўлса, ундан қандай хулоса чиқариш мумкин?

с). $\frac{f(x)}{g(x)}\neq 1$ бўлса, қуйидагини исботланг:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\varphi(x)}{\phi(x)} \Rightarrow \frac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}=\frac{\varphi(x)+\phi(x)}{\varphi(x)-\phi(x)}.$$

4. Озод ҳад бўлувчилари ёрдамида (ёки кўпайтувчиларга ажратиш усулида) тенгламаларни ечинг:

а) $x^3-3x-2x=0$; б) $x^2=2x^3-1$; с) $x^7(x+4)+6x+4=0$;

д) $x^5-6x^4+9x^3-6x^2+8x=0$;

е) $(x-1)^3+(2x+1)^3=27x^3+8$;

f) $(x-1)^2(x-2)+x^2-x=2x-2$;

г) $6x^4+40x=13x^3+27x^2+12$;

5. Белгилаш усули билан даражасини пасайтириб ечинг:

а) $x^4-13x^2+36=0$; б) $(x-3)^3=216+19(x-3)^3$;

с) $x^3-13x^4+36=0$;

е) $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)=b^4$;

д) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=0$;

f) $(4x^2-4x-1)^2-12x^2-12x-13=0$

г) $(4x^2-10x-7)^2-(2x-2)(2x-3)=1$

6. Тенгламани белгилаш билан ечинг:

а) $\dfrac{21}{x^2-4x+10}-x^4+4x=6$;

б) $x^4-\dfrac{50}{2x^2-7}=14$;

с) $\dfrac{2x^2-1}{x}+\dfrac{4x}{2x^2-1}=5$;

д) $(x-\sqrt{3})^2=5-\dfrac{4}{x^2-2\sqrt{3}+3}$;

7. Тенгламани бутун рационал тенгламага келтириб ечинг:

$a)\dfrac{2x}{x+2}-\dfrac{x+2}{2-x}=\dfrac{x^2-2}{x^2-4}$; $b)\dfrac{2x+1}{4x+6}-\dfrac{4x}{3-2x}=\dfrac{9(2x+5)}{2(4x-9)}$;

$c)\dfrac{2-x}{x^3+1}+\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}$; $d)\dfrac{12(x+2)}{x^2-9}+\dfrac{7+x}{3-x}=\dfrac{5x}{3+x}$;

$e)1+\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{2+3x}{x(x+2)}-\dfrac{1}{x}$;

$f)\dfrac{x+1}{2x+1}+\dfrac{2x-1}{x-1}=\dfrac{5x+4}{(2x+1)(x-1)}$;

$г)$ $(x+2)^2+\dfrac{24}{x^2+4x}=18$;

8. $x^n-a=0$ $(n>2, n\in N)$ тенгламанинг-

а) a>0 ва n-ток бўлганда битта $x_1=\sqrt[n]{a}$ илдизга;

б) a>0 ва n-жуфт бўлганда иккита $x_{1,2}=\pm\sqrt[n]{a}$ илдизига;

в) a=0 бўлганда битта $x_1=0$ илдизга;

г) a<0 ва n-ток бўлганда битта $x_1=-\sqrt[n]{-a}$ илдизга;

д) a<0 ва n-жуфт бўлса, хеч қандай илдизга эга эмаслигини исботланг.

9. $ax^{2n}+bx^n+c=0$ (n≥2) тенглама a, b, c ва n нинг қандай қийматларида ечимга эга? n=2k (k∈N) ва n=2k+1 (k∈N учун алоҳида-алоҳида жавоб беринг).

10. Қуйидаги тенгламани ечинг:

а) $2x^4-9x^3+9x+2=0$;

б) $2x^4+3x^3-4x^2+3x+2=0$;

в) $30x^4-17x^3-288x^2+17x+30=0$;

г) $x^4+x^3-x^2+x+1=0$;

д) $x^4+1=x^3-x^2+x=0$;

е) $x^3-x^2+x-1=0$;

ж) $x^3+4x^2+4x+1=0$;

11. Ушбу тенгсизликлар R да тенг кучлими:

а) $2x-1<\sqrt{2x}$ ва $(2x-1)^2<2x$;

б) $(4x+1)^2<4x$ ва $4x+1<2x$;

в) $\sqrt{x^3+x-2}>x$ ва $x^3+x-2>x^2$;

г) $x^3+x-2<x^2$ ва $\sqrt{x^3+x-2}<x$

д) $(2x+7)(4x+1)>(2x+7)^2$ ва $4x+1>2x+7$;

е) $x^2+x+\sqrt{3x}<2+3x$ ва $x^2+x<2$;

ж) $\sqrt{4x-7}>x$ ва $4x-7>x^2$;

з) $\sqrt{1-2x^2}>0$ ва $1-\sqrt{2}x>0$;

12. Тенгсизликларни ечинг:

1. а) $2-x>x^2$; б) $x^2-14x>15$; в) $x^2+5>3x$; г) $3x^2-7x+6<0$;

д) $3x^2-7x+4<0$; е) $\dfrac{x-1}{x-1}<0$; ж) $\dfrac{x+1}{4x-4}>0$; з) $\dfrac{x^2-1}{x}<0$

2. а) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x+1}<0$; б) $\dfrac{x^2+4x-5}{x^2+1}<0$ в) $\dfrac{(x+1)(x-2)^2}{x-1}<0$

г) $\dfrac{3}{x-2}<1$; д) $\dfrac{1}{x-1}<2$; ж) $\dfrac{5x-6}{x+1}<1$.

3. а) $\dfrac{x+7}{x-5}+\dfrac{3x+1}{2}>0$; б) $2x^2+\dfrac{1}{x}>0$; в) $\dfrac{x-1}{x+3}<x$; г) $\dfrac{1}{x+2}<\dfrac{3}{x-3}$;

д) $\frac{x^2-1}{2x+5}<3$; е) $\frac{x^2+1}{4x-3}>2$; ж) $\frac{3x-5}{x^2+4x-5}>\frac{1}{2}$; з) $\frac{4}{1+x}+\frac{2}{1-x}<1$.

4. а) $\frac{2x-5}{x^2-6x-7}<\frac{1}{x-3}$; б) $\frac{x+1}{x}<\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}$; в) $\frac{(x^2+3x-4)(x^2-16)}{x(x+1)}<0$;

г) $\frac{2}{x}-\frac{8-4x}{4x+x^2}>\frac{-3}{4+x}$;

д) $(4x^2+12x+9)(3x^2-13x+4)<0$;

е) $\frac{2}{x-2}-\frac{2}{x+1}<\frac{3}{(x-2)^2}$.

5. а) $\frac{2(x-3)}{x(x-6)}<\frac{1}{x-1}$; б) $\frac{2(x-4)}{(x-1)(x-7)}<\frac{1}{x-2}$; в) $\frac{2x}{x^2-9}<\frac{1}{x+2}$;

г) $1-\frac{7}{x}<-\frac{12}{x^2}$; д) $x-17>\frac{60}{x}$; е) $x<\frac{6}{x-5}$;

ж) $1<\frac{3x^2-7x+8}{x^2+1}<2$; з) $\frac{4}{x+2}>3-x$.

2-§.

Тенгламаларни ечинг:

1. а) $\sqrt{x-10}+\sqrt[4]{2-x}=1$; $\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{-x}=\sqrt[6]{x}$; б) $\sqrt{\lg\sin x}=x-\frac{\pi}{2}$.

2. а) $\sqrt{0.5+x}+\sqrt[5]{0.5-x}=1$; $b)x+\sqrt{17-x^2}+x\sqrt{17-x^2}=9$;

$c)2x\sqrt[3]{35-8x^3}(2x+\sqrt[3]{35-8x^3})=30$;

$d)\sqrt[4]{629-2x}+\sqrt[4]{77+2x}$; $e)\sqrt[3]{1+\sqrt{x-1}}=2-\sqrt[3]{1-\sqrt{x-1}}$;

$f)\sqrt[3]{9+x}+\sqrt[3]{7-x}=1$; $g)\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{35}{12}$; $h)\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}$;

3. $a)\sqrt[3]{54+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{54-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{18}$; $b)\sqrt[3]{10-x^2}-\sqrt[3]{3-x}=11$;

$c)\sqrt[4]{41+2x}+\sqrt[4]{41-2x}=2$; $d)\sqrt{4x^2+9}-\sqrt{4x^2-7}=2$;

$e)\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$; $f)\sqrt{5x+4}=\sqrt{15x+16}-2\sqrt{x-3}$;

$g)\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=x$;

$h)\sqrt{(2x-1)(2x-2)}+\sqrt{(2x-3)(2x-4)}=\sqrt{2}$;

4. Қуйидаги тенгламаларда $\sqrt{x^2}=|x|$ эканлигини хисобга олиб ечинг:

$a)2\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(2x+1)^2}=2\sqrt{(x+1)^2}$;

$b)\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2-2x+1}$;

$c)\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}}=1$;

$d)\sqrt{7+x+4\sqrt{x+3}}=2+\sqrt{x+3}$;

$e)\sqrt{x+5+2\sqrt{x+4}}+\sqrt{x+5-2\sqrt{x+4}}=2$;

5. $a)\sqrt{\frac{3-x}{2+x}}+3\sqrt{\frac{2-x}{3-x}}=4$; $b)\frac{8}{\sqrt{10-2x}}-\sqrt{10-2x}=2$;

$c)\sqrt{6x-x^2-5}=2x-6$; $d)\frac{\sqrt{5-x^2}}{x+1}=1$;

$e)\frac{\sqrt{5-x^2}}{x+1}=1$; $f)x^2-4x+6=\sqrt{2x^2-8x+12}$;

$g)\sqrt{9-5x}=\sqrt{3-x}+\frac{6}{\sqrt{3-x}}$;

5. $a)\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\frac{3}{x}$; $b)\frac{4}{1-\sqrt{1-x}}-\frac{1}{1+\sqrt{1+x}}=\frac{\sqrt{3}}{x}$;

$c)1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x$; $d)\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$;

$e)\sqrt{\frac{20+x}{x}}+\sqrt{\frac{20-x}{x}}=\sqrt{6}$; $f)\sqrt{x-\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=3$;

6. $a)(x^2-1)\sqrt{2x-1}=0$; $b)(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$; $c)(9-x^2)\sqrt{2-x}=0$;

$d)(16-x^2)\sqrt{3-x}=0;\ e)\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1;\ f)\sqrt{2x+5}=8-\sqrt{x-1};$

$g)\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7;\ \sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2;\ \sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3;$

6. Тенгсизликни ечинг

$a)\sqrt{\frac{1}{x^2}-3}>\frac{1}{x}-1;\ b)\sqrt{4-x^2}+\frac{|x|}{x}\geq 0;\ c)\sqrt{1-x^2}<\sqrt{3-x^2}-1;$

$d)2-\sqrt{1-x^2}>\sqrt{4-x^2};$

$e)\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1;$

$f)\sqrt{x+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\frac{1}{x^2}}>\frac{2}{x};\ g)\sqrt{4-\sqrt{1-2x}}-\sqrt{2-2x}>0;$

$h)\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}>x-2;\ i)\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}}>\frac{1}{x}-\frac{1}{4};\ j)\left||x|-1\right|>\sqrt{x^2-1}.$

7. $a)\sqrt{\frac{1}{x^2}-3}>\frac{1}{x}-1;\ b)\sqrt{4-x^2}+\frac{|x|}{x}\geq 0;\ c)\sqrt{1-x^2}<\sqrt{3-x^2}-1;$

$d)2-\sqrt{1-x^2}>\sqrt{4-x^2};\ e)\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1;$

$f)\sqrt{x+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\frac{1}{x^2}}>\frac{2}{x};\ g)\sqrt{4-\sqrt{1-2x}}-\sqrt{2-2x}>0;$

$h)\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}>x-2;\ i)\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}}>\frac{1}{x}-\frac{1}{4};\ j)\left||x|-1\right|>\sqrt{x^2-1}.$

3-4-§.

1. Тенгламани ечинг: а) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+3}\cdot(0,2)^4=(0,2)^2\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^{x-3};$

б) $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{9}{4}\right)^x\cdot\frac{27}{8};$

с) $4^{x^2+x6}=1;$

д) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-1}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}x}=\left(\frac{16}{9}\right)^{-1};$ е) $4^{x^3}\cdot 25^{x^2}=0,0001\cdot\left(100^{3-x}\right)^2;$

f) $\frac{2^{x^2+6}}{32^x}=1;$

2. $a)\ 3^{x^2-4}=5^{2x};\ b)\ 9^x\cdot 64^{\frac{x}{7x+2}}=6;\ c)\ 5^{7x-2}=8^{\frac{7x}{7x+1}}\cdot 4;$

$d)\ 5^x\cdot 2^{\frac{2x-1}{2x+1}}=50;\ e)\ 15^{x-1}=3^{4x^2+5x-9};\ f)\ 7^{x^2-x}=2^{x-1};$

3. Логарифмлаш усули билан ечинг:

$a)x^{9\lg x}=1000x^6;\ b)\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}}=10;\ c)x^{\log_2^{x+4}}=32;\ d)x^{\log_x^{(x-2)^2}}=9;$

4. Тенгламани ечинг:

$a)4^x+2^{x+1}=24;\ b)3\cdot 5^{4x-1}=2\cdot 5^{2x-1}+0.2;\ c)5^{2x+1}-20^x-4^{2x+1}=0;$

$d)\frac{4^x+10}{4}=\frac{9}{4^{x-1}};\ e)4^x+6^x=2\cdot 9^x;$

$f)16^x+36^x=2\cdot 81^x;\ g)3\cdot 4^{-\frac{1}{x}}+6^{-\frac{1}{x}}=2\cdot 9^{-\frac{1}{x}};\ h)2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2};$

$i)4^x+6^x=9^x;\ j)9^x-5\cdot 6^x+5\cdot 4^x=0;$

5. $a)2^{x-1}+2^{x-4}+2^{x-2}=6,5+3.25+1,625+\ldots;$

$b)3^{x-5}+3^{x-7}+3^{x-9}=45.5+22.5+11.375+\ldots;$

$c)4^{2x}\cdot 81^x-2\cdot 6^{6x-1}+4^{4x-1}\cdot 9^{4x-1}=0;$

$d)(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1}+(2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1}=\frac{4}{2-\sqrt{3}};$

$e)56\cdot 4^{2x-1}+2\cdot 49^{2x+\frac{1}{7}}=53\cdot 196^x;$

$f)4^x-2\cdot(0.25)^{2x}-(0.25)^x+1=0;$

$g)9\cdot 4^x-4^{3x}=8+27\cdot 4^{-x}-27\cdot 4^{-3x};$

6. $a) 2^{x-1}+2^{x-4}+2^{x-2}=6,5+3,25+1,625+\dots;$

$b) 3^{x-5}+3^{x-7}+3^{x-9}=45,5+22,5+11,375+\dots;$

$c) 4^{2x}\cdot 81^{x}-2\cdot 6^{6x-1}+4^{4x-1}\cdot 9^{4x-1}=0;$

$d) (2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1}+(2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1}=\dfrac{4}{2-\sqrt{3}};$

$e) 56\cdot 4^{2x-1}+2\cdot 49^{2x+\frac{1}{7}}=53\cdot 196^{x};$

$f) 4^{x}-2\cdot(0.25)^{2x}-(0.25)^{x}+1=0;$

$g) 9\cdot 4^{x}-4^{3x}=8+27\cdot 4^{-x}-27\cdot 4^{-3x};$

7. $a) 3^{x}+4^{x}=5^{x};$ $b) 8-x\cdot 2^{x}+2^{3-x}-x=0;$

$c) 5^{x-2}\cdot 2^{\frac{3x}{x+1}}=4;$ $d) 4\cdot 9^{\log_3^{(1-x)}}=5x^2-20;$

8. $a) 4^{3x}\cdot 9^{x}-9^{x+0.5}\cdot 4^{3x-0.5}=-288;$ $b) 4^{\frac{x-2}{2x}}-7\cdot 10^{\frac{1}{x}}+25^{\frac{x-2}{x}};$

$c) 3^{2+4+6+\dots+2x}=(0.(1))^{-6};$

9. Тенгламаларни ечинг:

$A) \lg(3x+4)+\lg(9x+3)=\lg(1-6x);$ $B) \log_3(x^2-1)=\log_{\frac{1}{3}}(x-1);$

$C) \log_3(x^2-3x-5)+\log_{\frac{1}{3}}(7-2x);$

$D) \log_2(x+1)+\log_2(x+3)=-\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1);$

$E) \lg(x-2)+\lg x=\lg 8;$ $F) \lg(x+3)-2\lg(x-2)=\lg 0.4;$

5-§.

Тенгламаларни ечинг:

1. а) $|2x+2|=2(3-2x);$ б) $|6x-2|=11-2x;$ в) $|3x-2|+2=3|x|;$

г) $|2-6x|-|5-4x|=0;$

д) $|9-4x|-|4-6x|=|2x+5|;$ е) $|3x+1|=2|3x-1|+3x$

2. $a) 4x^2=|1-8x^2|;$ б) $\dfrac{x^2-1+|x+1|}{x-2}=2|x|;$ $в) |x^2-9|+|x^2-4|=5;$

3. $г) |x^2-3x+2|=4-x^2+|x|;$ д) $\dfrac{|x^2-3x|+5}{x^2+|x+3|}=1;$ $е) |3-|x+2||=4;$

Тенгсизликни ечинг:

1. $а) 2x^2-5|x|+3<0;$ $б) 2x^2-|x|-1>0;$ $в) 4|x^3-2x|<5;$

$г) |4x^2+2x|-5<0;$ $д) |2x^2-5x|<3;$ $е) |2x^3-2x|<x;$

$ж) x^2-|5x-3|<2+x;$ $з) |x-2|<2x^2-9x+9;$ $и) |x-6|>|x^2-5x+9|$

2. $а) |2x-1|-3)(2|x+1|-5<0;$ $б) |9x^2-6x-8|>6x;$

$в) |8x^2-1|>1-2x;$ г) $\dfrac{(2x^2-5x+3)}{2|x|+7}<0;$ д) $\dfrac{(4x^2+12x-7)}{|x+2|}<0.$

3. $а) \left|\dfrac{2}{3x-4}\right|>1;$ $б) \left|\dfrac{4x-1}{2x-1}\right|>2;$ $в) \left|\dfrac{4x^2-6x+1}{4x^2+2x+1}\right|<3;$

$г) \dfrac{|2x+3|+2x}{x+1}>2;$ $д) \dfrac{|2x-1|}{x+1}>2;$ $е) \dfrac{|3x+2|-3x}{x}<6;$

$ж) \dfrac{1}{|2x-3|}<\dfrac{1}{2};$ $з) \left|\dfrac{3x}{2x^2-2}\right|<1;$ $и) \dfrac{2x-3}{4x^2+6-10x}>2;$ $k) |x|<\dfrac{a}{x}$

4. $а) |x+7|-|1.5x+5|>0;$ $б) |4x+5|-|6x-7|<0;$

$в) x-1+|2x-6|<3;$ $г) |x-3|+|x-1|>2$

$д) |2x-1|+2|x+1|-|2x-3|<4;$ $е) |2x+1|+2|x+1|>9-2|x-2|;$

$ж) |x^2-x-6|>3+x;$ $з) |x^2-6x+8|<5x-x^2;$

$и) |x^2+6x+5|>x^2-8x+16;$

$к) \dfrac{2x^2-|x|-3}{x-1}>4x;$ $л) \dfrac{8x-1}{|2x-1|}>|2x+1|.$

6-§.

1. Тенгламани ечинг:

$а)$ $2a^2x=a(x+2)-1;$ $б)$ $2a(2a+1)x^2-x-2a(2a-1)=0;$

$в)$ $(4a^2-b)x^2-4ax+1=0;$ $г)$ $\dfrac{2ax^2}{x-1}-4a=4a^2+1$

2) а) $\frac{8a}{x^2-4a^2}+\frac{x-2a}{x(x+2a)}=\frac{1}{x(x-2a)}$; б) $\frac{x}{x-2a}+\frac{x}{x+2a}=\frac{7}{4b^2-x^2}$;

в) $\frac{2a}{2ax-1}+\frac{b}{bx-1}=\frac{2a+b}{(2a+b)x-1}$; г) $\frac{1}{p+q-x}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{x}, p\neq 0, q\neq 0,$

д) $\frac{m}{x+1}-\frac{ax-1}{1-x}=\frac{a(x^2+1)}{x^21}$; е) $\frac{m}{x+m}-\frac{n}{n-x}=\frac{m+n}{x+m}-\frac{n-m}{n-x}$;

ж) $\frac{2a-b}{x-a}+\frac{2a+b}{a+x}=\frac{2a}{b}, b\neq 0$; з) $a^2+\frac{b^2(x+2)}{2-x}=\frac{a^2-b^2}{2x-x^2}$;

и) $\frac{a+x}{x+b}+\frac{x-b}{x-a}=2$; к) $\frac{1}{b(c-x)}-\frac{1}{a(c-x)}=\frac{2}{b(b-x)}-\frac{2}{a(b-x)}, a\neq 0, b\neq 0.$

3) а) $\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-ac}{a+c}+\frac{x-bc}{b+c}=a+b+c, a\neq -b, a\neq -c, b\neq -c$;

б) $\frac{x-a}{bc}+\frac{x-b}{ac}+\frac{x-c}{ab}=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right), a\neq 0, b\neq c, c\neq 0$;

в) $\frac{a+b-c}{c}+\frac{a+c-x}{b}+\frac{b+c-x}{a}+\frac{4x}{a+b+c}=1,$

$a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0, a+b+c\neq 0.$

2. Тенгсизликларни ечинг.

1) а) $ax+2>x+2a^2$; б) $a(6x-1)>6x-2$; в) $3(2b-2x)<2bx-1$;

г) $2x-\frac{1}{3}>\frac{(b+2)x}{b-1}$; д) $\frac{x}{x-2}<\frac{2m+1}{(m-3)(x-2)}$; е) $\frac{kx-3}{x-3}<\frac{3k}{2}-1.$

2) а) $4x^2+6ax-a>0$; б) $x^2-8ax<-15a^2$; в) $\frac{x^2}{m}-2x>\frac{x}{m}-m-1.$

3) а) $\frac{2n}{x-2n}+\frac{2n}{x+2n}<0$; б) $\frac{2}{x}+\frac{3}{2a}<\frac{3}{x+6a}$; в) $\frac{x-2a}{x-4a}-\frac{x-4a}{x-2a}-\frac{8}{3}<0$;

г) $\frac{x}{x-3}<\frac{2a}{x+a}+\frac{18a^2}{x^2-a^2}$; д) $\frac{2a}{x-3}+\frac{x}{x+3}<\frac{18}{x^2-9}$;

е) $\frac{1}{x-2a}+\frac{9}{4a}<\frac{1}{x}, a\neq 0$; ж) $\frac{2}{x+2m}-\frac{x}{x^2-4m^2}<\frac{1}{2m-x}$;

з) $\frac{x-n}{x-m}+\frac{x-m}{x-n}+2>0.$

3. Модулли тенгламаларни ечинг:

а) $|2x+m|-|x-m|=\frac{3}{2}m$; б) $b-\frac{2b^2}{|3x+b|}=0$; в) $|x^2-a^2|=(x+3a)^2$;

г) $2|x-4n|+x=2|x-2n|$; д) $|x+6b|-|x-2b|=4b$;

е) $x-1+\frac{2|x+a|}{x-a}=\frac{a+1}{x-1}$;

ж) $2x+\frac{2|x+a|}{x}=\frac{a}{2x}.$

4. Иррационал тенгламаларни ечинг:

а) $\sqrt{x^2+ax-2a}=x+1$;

б) $\sqrt{2x-1}-x+a=0$;

в) $\sqrt{a-x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{a+b}(a+b)\geq 0$;

г) $\sqrt{a-x}=a-\sqrt{-x}$; д) $\sqrt{x+4a}=\sqrt{x}+2\sqrt{b}, (b>0)$;

е) $2x+2ax+\sqrt{x}=0$;

ж) $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}=\sqrt{\sqrt{x^2-a^2}}$;

з) $\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2-x}=a+b$;

и) $\sqrt{1.5x-a}=a-x$;

к) $\sqrt[7]{a-x}+\sqrt[7]{x}=\sqrt[7]{a}$;

л) $\sqrt{\sqrt{x}}+\sqrt{\sqrt{a-x}}=\sqrt{\sqrt{b}}$;

м) $(a-y)^2=\sqrt[3]{a^6-y^6}$;

5. Иррационал тенгсизликларни ечинг:

$а)\sqrt{2a+x} < -\sqrt{x}; б)\sqrt{x+2a} > \sqrt{x}+\sqrt{a}, a \geq 0;$

$в)\sqrt{2x}+\sqrt{2x+a} < a;$

$г)2\sqrt{x^2-ax} < 3a-2x;$

$д)\sqrt{-3x} > 6x+3ax; е)\sqrt{a^2-4x} > 4x;$

$ж)\sqrt{m-2x}+\sqrt{3m-2x} > 2\sqrt{m}, m \geq 0;$

$з)\sqrt{x+p}+\sqrt{x-p} > 2, p \geq 0;$

$и)\sqrt{n^2-4x^2}+2\sqrt{nx-x^2} > n;$

$к)\sqrt{n^2+3x}+\sqrt{m^2+3x} > n+m, m > n > 0;$

$л)\sqrt{10x-p} \geq 5x; м)\sqrt{8x^2+3} < 2x-a;$

$н)\sqrt{x-a}+\sqrt{-x-a} > -a;$

$о)\sqrt{\frac{x+n}{n-x}}+\sqrt{\frac{n-x}{x+n}} \geq 2.$

6. Тенгламаларни ечинг:

а) $3 \cdot 16^{x-1}+27 = a + a \cdot 16^{x-1}$; б) $a^{2\lg x - \lg(6-x)} = 1$;

$в)a^{1+\log_3 x}+a^{1-\log_3 x} = a^2+1;$

$г)\log_a(1-\sqrt{1-x}) = \log_a{}^2(3-\sqrt{1+x});$

$д)\log_{\frac{x^3}{a}} a+\log_{a^2x} = 1;$

$е)2-\log_{a^2}(1+x) = 3\log_a\sqrt{x-1}-\log_{a^2}(x^2-1)^2;$

$ж)\log_a x+\log_9\frac{2-x}{2} = \log_9\log_9 a;$

7. Тенгсизликларни ечинг:

$а)\log_a(x-1)+\log_a x > 2, a > 0, a \neq 1;$

$б)3\log_a^2 x+\log_a x > 0, a > 0, a \neq 1;$

$в)a^{x^2-x} < a^2, a > 0, a \neq 1;$

$г)\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x+a) > -3; д)\log_x(x-a) > 2;$

$е)4\log_a x+1 < 3\log_x a, a > 0, a \neq 1;$

$ж)\frac{1+a^{-x}}{1+2a^{-x}}-\frac{a^x}{a^x-1} < 0; з)\log_{\frac{x}{a}} a > \log_{a^2x} a^2.$

2) $а)x^{\log_a x+1} > a^2x, a > 0, a \neq 1; б)\log_{ax}(x-2a) < -1;$

$в)4+\frac{1}{\log_x a} > \frac{16}{\log_x a-2}, a > 0, a \neq 1;$

$г)\log_a\frac{1+\log_a^2 x}{1-\log_a x} < 0, a > 0, a \neq 1;$ $д)\log_{\sqrt{a}}(a+2x-x^2) < 2;$

$е)6\log_x a < 1+\log_a x, a > 0, a \neq 1;$

$ж)\log_{a^2x} x^3+\log_{\frac{x}{\sqrt{a}}}\sqrt{x} < 2, a > 0, a \neq 1;$

$з)3\log_{a^2} x+2 > \log_x a^2, a \neq 0, a \neq \pm 1;$

$и)x^{\log_a x} < a^2, a > 0, a \neq 1;$ $к)\log_{bx}(x-3b) > -1.$

8. Тенгламаларни ечинг.

1) $а)\sin^2 2x+a\sin 4x = \frac{1}{2};$

$б)(3-a)tg^2x-2 \cdot tgx-(a+3) = 0;$

$в)\sin^4 x+\cos^4 x = a;$

$г)\cos 2x-\cos 4x = a\sin x;$

$д)1+\sin^2 ax = \cos x;$

$е)\sin^6 x+\cos^6 x = a;$

$ж)4\cos^2 x+2\cos x+a-1 = 0;$

$з)\sin(x-a) = \sin x+\sin a;$

$и)a(\sin x+\cos x)^2 = b\cos 2x;$

2) $а)\cos(a+x) = \frac{\cos a}{\cos x};$

$б)\sin 3x = a\sin x;$

$в)\cos 3x = a\cos x;$

$г)tgx+tga+1 = tgatgx;$

д) $\sin(a+x)+\sin x=\cos\frac{a}{2}$;

е) $2\cos(a+x)=\frac{\cos a}{\cos x}$;

ж) $tg^2x-2tgxtga+1=0$;

з) $\frac{a+\sin x}{a\cos x+1}=\frac{a+\cos x}{a\sin x+1}$;

и) $\frac{tgax}{\sin bx}=0$;

к) $\sin 3x+\sin 2x=a\sin x$;

л) $\sin^4 x-2\cos^2 x+a^2=0$;

IV-БОБ. КЎПҲАДЛАР, ТЕНГЛАМА ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР СИСТЕМАСИНИНГ ЕЧИМЛАРИ. КЕЛТИРИЛАДИГАН КЎПҲАДЛАР ВА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАР.

4.1-§. Кўпҳадлар. Кўпҳадлар устида амаллар. Безу теоремаси, Горнер схемаси ёрдамида тенгламаларни ечиш.

Бизга коммутатив бирлик халқа берилган бўлсин.

Таъриф 1. $\forall a_i\in K$, $i\in N_0\equiv\{0\}\cup N$ бўлганда

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n \qquad (1)$$

ёки

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$

ифодага K халқа устида берилган кўпҳад дейилади.

Бу ерда x элемент қандайдир белги (символ) деб қаралади ва одатда номаълум ифода деб ҳам юритилади ва x^i ҳар бир ясовчили $<x>=\{x^i\,|\,i\in N_0\}$ коммутатив моноиддан олинган деб қаралади ва $x^0=1$, $1\cdot x^i=x^i$ деб олинади. (1) ифодадаги $a_i\in K$ ларга кўпҳаднинг коэффициентлари, a_ix^i ларга эса кўпҳаднинг ҳадлари дейилади. Бу ҳадлар ўртасидаги "+" қўшиш амали шартли символ сифатида қаралади. Бундан ташқари $a_ix^i=x^ia_i$ деб ҳисоблаймиз. Агра $a_n\neq 0$ бўлса, a_n га бош коэффициент, a_nx^n эса бош ҳад ва кўпҳаднинг a_0 ҳадига озод ҳад дейилади. Кўпҳаднинг даражаси $\deg f(x)$ шаклида ёзилади ва $a_n\neq 0$ да $\deg f(x)=n$ бўлади.

Барча коэффициентлари нолга тенг кўпҳад нолга тенг бўлган кўпҳад дейилади.

Таърифга асосан камида битта коэффициенти нолдан фарқли кўпҳад нолмас кўпҳад деб аталади. Шунга асосан, биз $0\cdot x^i=0$ деб қабул қиламиз. Бундан фойдаланиб, биз ҳар қандай кўпҳадни бир хил даражали кўпҳад деб ҳисоблашимиз мумкин, яъни агар

$$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx^m$$

кўпҳад бўлиб, $m<n$ бўлса, у ҳолда $g(x)$ кўпҳадга $0\cdot x^{m+1}+...+0\cdot x^n$ ҳадлар қўшиб, бир хил даражали кўпҳад деб ҳисоблашимиз мумкин.

Таъриф 2. Бир хил даражали олдидаги коэффициентлар тенг бўлган кўпҳадлар ўзаро тенг кўпҳадлар дейилади, яъни

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow a_i=b_i,\ i=\overline{1,n}.$$

K ҳалқада берилган ҳамма кўпҳадлар тўпламини $K[x]$ кўринишда белгилаб оламиз. Кўп ҳолларда биз қулайлик учун $f(x)$ ни f билан белгилаб оламиз.

Кўп ҳолларда математикада биз юқорида баён этган кўпҳадларнинг алгебраик тушунчаси ўрнига функционал тушунчаси ишлатилади, яъни агар $x=\alpha \in K$ бўлса,

$$f(x)=a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+...+a_n\alpha^n \in K$$

бўлиб, $f(\alpha)$ га $f(x)$ кўпҳаднинг $x=\alpha$ даги қиймати дейилади.

Шуни таъкидлаймизки, агар $f(x)=g(x)$ бўлса, кўпҳадларни алгебраик маънодаги тенглиги таърифидан $f(\alpha)=g(\alpha)$ тасдиқдан, $f(x)=g(x)$ тенглик ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди. Масалан, $K=Z_2$ ҳалқада (майдонда) $f(x)=x^2$ ва $g(x)=x$ кўпҳадлар тенг эмас, лекин

$$f(\overline{0})=\overline{0}=g(\overline{0}) \text{ ва } f(\overline{1})=\overline{1}=g(\overline{1})$$

функционал маънода булар тенг.

Энди биз $K[x]$ тўпдамда қўшиш амалини қуйидагича аниқлаймиз:

$$\forall f(x), g(x) \in K[x].$$

Кўпҳадларни $f(x)+g(x)$ йиғиндиси деб, уларнинг мос даражалари олдидаги коэффициентларни қўшишдан ҳосил бўлган кўпҳадга айтилади, яъни

$$f(x)+g(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i x^i$$

Бу ерда $c_i=a_i+b_i$ бўлиб, $a_i, b_i \in K$ дан $c_i \in K$ бўлади. Демак,

$$f(x)+g(x)\in K[x].$$

Шундай аниқланган қўшиш амалига нисбатан $(K[x],+)$ абел группаси бўлади. Бу абел группасида o кўпҳад нейтрал элемент ва $f(x)$ кўпҳадга

$$-f(x)=-a_0-a_1x-a_2x^2-...-a_nx^n$$

қарама-қарши кўпҳад бўлади, чунки $a_i \in K$ дан $-a_i \in K$ ҳам бўлади ва демак $-f(x)\in K[x]$.

$K[x]$ тўпламда кўпайтириш амалини қуйидагича киритамиз: $\forall f(x), g(x) \in K[x]$ кўпайтмаси деб коэффициентлари

$$d_j=\sum_{k+l=0}^{n+m} a_k b_l \in K$$

тенглик билан аниқланган

$$\varphi(x)=\sum_{j=0}^{n+m} d_j x^j$$

кўпҳад тушунилиб, бу ерда

$$d_0=a_0b_0,\ d_1=a_0b_1+a_1b_0,\ d_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0+...$$

лардан иборатдир. Шуни таъкидлаймизки, агар биз K ҳалқани бутун ҳалқа деб олсак, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ дан $a_n \cdot b_m = d_{n+m} \neq 0$ бўлади ва $\varphi(x)$ кўпҳад $\deg\varphi(x)=n+m$ даражали кўпҳад бўлади.

Кўпайтириш амали коммутатив, чунки

$$\sum_{k+l=0}^{n+m} a_k b_l = \sum_{l+k=0}^{n+m} b_l a_k$$

бўлганлигидан $f(x)\cdot g(x)=g(x)\cdot f(x)$ бўлади.

Кўпҳадларни кўпайтириш ассоциативдир, яъни

$$f(x)(g(x)\cdot\varphi(x))=(f(x)\cdot g(x))\varphi(x)$$

тенглик ўринлидир. Ҳақиқатан ҳам,

$$\varphi(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+...+c_px^p=\sum_{s=0}^{p} c_s x^s$$

деб олсак, у ҳолда $(f(x)\cdot g(x))\varphi(x)$ кўпҳаднинг x^i $(i=0,1,...,\ n+m+s)$ олдидаги коэффициентни

$$\sum_{j+s=i=0}^{n+m+p}\left(\sum_{k+l=j=0}^{n+m} a_k b_l\right)c_s=\sum_{k+l+s=i=0}^{n+m+p} a_k b_l c_s$$

бўлиб, $f(x)(g(x)\cdot\varphi(x))$ кўпҳаддаги x^i $(i=0,1,...,n+m+p)$ нинг коэффициенти эса

$$\sum_{k+j=i=0}^{n+m+p} a_k\left(\sum_{l+s=j=0}^{p+m} b_l c_s\right)=\sum_{k+l+s=i=0}^{n+m+p} a_k b_l c_s$$

бўлади. Бу икки йиғиндининг тенглиги асосида кўпхадларнинг кўпайтмасини ассоциативлиги келиб чиқади.

$K[x]$ тўпламда шундай аниқланган қўшиш ва кўпайтириш амаллари учун дистрибутивлик

$$f(x)\big(g(x)+\varphi(x)\big)=f(x)g(x)+f(x)\varphi(x)$$

қонун ҳам ўринли бўлади. Бу қонунни ўринлилиги

$$\sum_{k+l=0}^{n+m}(a_k+b_k)c_l=\sum_{k+l=0}^{n+m}a_kc_l+\sum_{k+l=0}^{n+m}b_kc_l$$

тенгликнинг ўринлилигидан келиб чиқади.

Шундай қилиб, $K[x]$ тўплам ўнгдан киритилган қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан коммутатив ҳалқа ташкил этади. Бу ҳалқа бирлик ҳалқа ҳам ташкил этади, чунки $x^0=1$ кўпхад кўпайтириш амалига нисбатан нейтрал (бирлик)вазифасини ўтайди. Бундан ташқари, агар K бутун соҳали ҳалқа бўлса, у ҳолда $K[x]$ ҳам бутун соҳали ҳалқа бўлади, чунки $a_n\neq 0, b_n\neq 0$ дан $f(x)\cdot g(x)$ кўпайтманинг бош коэффициенти $a_nb_m\neq 0$ бўлади. Шунга қарамасдан, $K[x]$ коммутатив бирлик ҳалқамиз майдон ташкил этмайди, чунки $f(x)$ учун

$$f(x)\cdot g(x)=1$$

тенгликни қаноатлантирувчи $g(x)\in K[x]$ кўпхад умуман айтганда мавжуд эмас. Масалан, $f(x)=x$ бўлган $x\cdot g(x)$ кўпхад нолмас $m+1$ даражали кўпхад бўлиб, у 1 га тенг бўлмайди. Шуни таъкидлаймизки, $g(x)=x^{-1}$ шаклдаги ифода таърифга асосан кўпхад бўлмайди. Агар $f(x)=a_0\in K$ озод ҳадли кўпхаддан иборат бўлиб, унга тескари кўпхад мавжуд бўлиши мумкин, агарда a_0 элемент K да тескариланувчи бўлса.

Агар $K=P$ майдон бўлса, (шунга қарамасдан, $P[x]$ майдон бўлмайди) $P[x]$ ҳалқага P майдон устида берилган кўпхадлар ҳалқаси дейилади. Шунга асосан, агар $K=Z$ бўлса, $Z[x]$ бутун кўпхадлар $K=Q$ рационал бўлса, $Q[x]$ рационал, $K=R$ ҳақиқий бўлса, $R[x]$ ҳақиқий ва агар $K=C$ комплекс бўлса, $C[x]$ комплекс коэффициентли кўпхадлар ҳалқаси дейилади. Худди шундай чекли

Z_m ҳалқа ва Z_p майдонларда $Z_m[x]$ ва $Z_p[x]$ ҳалқалар ҳақида ҳам сўз юритишимишз мумкин.

Ҳар қандай кўпхадлар ҳалқасини берилган ҳалқанинг кенгайтмаси ёки ўз ичига олади деб қарашимиз, яъни $K\subset K[x]$ ҳисоблашимиз мумкин, чунки $\forall a_0\in K$ элеемнт $K[x]$ ҳалқада нолинчи даражали кўпхад вазифасини бажаради.

Биз шуни таъкидлаймизки, алгебра ва математиканинг бошқа тармоқларида $x_1,x_1,...,x_n$ символли (номаълумли) кўпхадлар ҳам қурилади ва ўрганилади. Бу кўпхадларнинг умумий кўриниши

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum a_{k_1...k_n}x_1^{k_1}...x_n^{k_n}$$

кўринишда бўлиб, унинг $\deg f(x_1,...,x_n)=k_1+...+k_n$ дан иборат бўлади ва $x_1,x_2,...,x_n$ символлар $x_1,x_2,...,x_n$ ясовчили $<x_1,x_2,...,x_n>$ коммутатив моноиддан олинган. Бундан кўпхадлар тўплами $K[x_1,x_2,...,x_n]$ шаклда белгиланади ва тўплам кўпхадларни қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан ҳалқа ташкил этади. Хусусан, $x_1=\alpha_1,...,x_n=\alpha_n\in K$ ларда $f(\alpha_1,...,\alpha_n)$ кўпхадли функциялар ҳақида сўз юритиш мумкин ва табиийки, $n=1$ да биз бир номаълумли ҳалқани ҳосил қиламиз. Бу кўпхадларнинг хусусий ҳоллари билан биз танишмиз. Масалан, чизиқли тенгламалар системасидаги ҳар бир тенгламанинг чап томони

$$f(x_1,...,x_n)=a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n$$

n номаълумли кўпхаддир.

Мисол. $f(x)=2x^3-5x^2+3x-4$ ва $g(x)=x^2-3x+1$ кўпхадларни кўпайтмасини қараймиз. Қулайлик учун кўпайтмани қуйидагича оламиз:

$$g(x)\cdot f(x)=(x^2-3x+1)(2x^3-5x^2+3x-1)=$$
$$=2x^5-5x^4+3x^3-x^2-6x^4+15x^3-9x^2+3x+$$
$$+2x^3-5x^2+3x-1=2x^5-11x^4+20x^3-10x^2+6x-1.$$

Таъриф 3. Агар $\alpha\in K$ элемент учун $f(x)\in K[x]$ кўпхаднинг қиймати $f(\alpha)=0$ бўлса, α элементга $f(x)$ кўпхаднинг илдизи дейилади.

Бизга $\alpha \in K$ учун $x-\alpha \in K[x]$ бош коэффициенти 1 га тенг бўлган чизиқли кўпҳад берилган бўлсин.

$f(x)$ кўпҳадни $x-\alpha$ иккиҳадга бўлганда бўлинмада $Q(x)$, қолдиқда $R(x)$ қолсин:

$$f(x)=(x-\alpha)Q(x)+R(x) \qquad (2)$$

Агар бу муносабатга $x=\alpha$ қўйилса, $f(\alpha)=0\cdot Q(\alpha)+R(\alpha)=R(\alpha)=r$ ҳосил бўлади. Шу тариқа ушбу теорема исботланади:

Теорема 2. (Безу теоремаси[1]). $f(x)$ кўпҳадни $x-\alpha$ га бўлишдан чиққан қолдиқ шу кўпҳаднинг $x=\alpha$ даги $f(\alpha)$ қийматига тенг бўлади.

Бу теоремадан қуйидаги муҳим натижага эга бўламиз:

Натижа 1. $x=\alpha$ элемент $f(x)$ кўпҳаднинг илдизи бўлиши учун $f(x)$ ни $x-\alpha$ gга бўлиниши зарур ва етарлидир.

Шундай қилиб, $f(x)$ кўпҳаднинг илдизларини излаш унинг чизиқли бўлувчиларини излаш масаласига тенг кучлидир. $f(x)$ кўпҳадни $x-\alpha$ чизиқли кўпҳадга қолдиқли бўлиш алгоритмига қараганда анча содда ва амалда кенг қўлланадиган Горнер усули ҳисобланади.

Бизга

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n \qquad (3)$$

кўпҳад ва у ёрдамида (2) тенглик ҳосил қилинган бўлсин. (2) тенгликда бўлинмани умумий кўринишини

$$Q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\ldots+b_{n-1},\ b_i\in K$$

шаклда олиб, уни (2) га қўямиз.

Ҳосил бўлган тенгликдаги иккала томондаги кўпҳадларни x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларини тенгласак:

$$a_0=b_0,$$
$$a_1=b_1-\alpha b_0,$$
$$a_2=b_2-\alpha b_1,$$

[1] Этйен Безу (1730-1783) – француз математиги.

....

$$a_{n-1}=b_{n-1}-\alpha b_{n-2},$$
$$a_n=r-\alpha b_{n-1}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Булардан

$$b_0=a_0,\ b_k=\alpha b_{k-1}+a_k,\ k=\overline{1,(n-1)}$$

эканлиги келиб чиқади, яъни b_k коэффициент ундан олдин келувчи b_{k-1} коэффициентни α га кўпайтириш ва a_k коэффициентга қўшиш билан ҳосил бўлади ва ниҳоят

$$r=\alpha b_{n-1}+a_n=f(\alpha)$$

тенгликда r қолдиқ ёки $f(x)$ кўпҳаднинг $x=\alpha$ даги қиймати топилади.

Масалан, 1) x^5+x+20 ни $x+2$ га бўлишдан чиқадиган қолдиқ $r=(-2)^5+(-2)+20=-14$; 2) x^5+x+34 ни $x+2$ га бўлишдан чиқадиган қолдиқ $r=(-2)^5+(-2)+34=0$.

Демак, $x=-2$ сони шу кўпҳаднинг илдизи.

Натижалар. $n\in N$ бўлганда:

1) x^n-a^n иккиҳад $x-a$ га бўлинади. Ҳақиқатан, $P(a)=a^n-a^n=0$;

2) x^n+a^n иккиҳад $x-a$ га бўлинмайди. Ҳақиқатан, $P(a)=a^n+a^n=2a^n\neq 0$;

3) $x^{2n}-a^{2n}$ иккиҳад $x+a$ га бўлинади. Ҳақиқатан, $P(-a)=(-a)^{2n}-a^{2n}=0$;

4) $x^{2n+1}-a^{2n+1}$ иккиҳад $x+a$ га бўлинмайди. Ҳақиқатан, $P(-a)=(-a)^{2n+1}-a^{2n+1}\neq 0$

5) $x^{2n+1}-a^{2n+1}$ иккиҳад $x+a$ га бўлинади. Ҳақиқатан, $P(-a)=(-a)^{2n+1}+a^{2n+1}=0$

6) $x^{2n}+a^{2n}$ иккиҳад $x+a$ га бўлинмайди. Ҳақиқатан, $P(-a)=a^{2n}+a^{2n}=2a^{2n}\neq 0$;

Бўлиш бажариладиган ҳолларда бўлинмаларнинг кўринишини аниқлаймиз:

$$x^5-a^5=(x-a)(x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4);$$

$$x^5+a^5=(x+a)(x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4);$$
$$x^6-a^6=(x-a)(x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^4x+a^5);$$
$$x^6+a^6=(x+a)(x^5-ax^4+a^2x^3-a^3x^2+a^4x-a^5).$$

Булардан кўринадики, бўлинма албатта бир жинсли кўпхад бўлиб, x нинг даражалари камайиб, a нинг даражаларида ўсиш тартибида жойлашган ва агар бўлувчи $a+x$ бўлса, коэффициентлар +1 ва -1 алмашиб келади, агар бўлувчи $x-a$ бўлса, бўлинмада ҳосил бўлган кўпҳаднинг коэффициентлари 1 га тенг бўлади. Бу хулосаларни истаган даражали кўпҳадлар учун умумлаштириш мумкин.

1-мисол. x^5-ax+4 ни $x+3$ га бўлишдаги қолдиқ $r=4$ бўлса, a ни топинг.

Ечиш: $(-3)^5-a\cdot(-3)+4=4$, бундан $a=81$.

Бунда $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n$ кўпҳадни $x-a$ иккиҳадга бўлишдаги қолдиқни ҳисоблашнинг Горнер[2] схемаси деб аталувчи усулини кўрсатамиз.

$$f(x)=Q(x)(x-a)+r$$

бўлсин.

Бу усул қуйидаги схема орқали ифодаланади:

	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n
α	$b_0=a_0$	$b_1=a_1+\alpha b_0$	$b_2=a_2+\alpha b_1$	...	$b_{n-1}=a_{n-1}+\alpha b_{n-2}$	$r=a_n+\alpha b_{n-1}$

2-мисол. $f(x)=2x^5-3x^4+4x^2-5x+7$ кўпҳадни $x-3$ га бўлишдаги $q(x)$ бўлинмани ва $f(3)=r$ қолдиғини Горнер схемаси ёрдамида топамиз:

	2	-3	0	4	-5	7
3	2	3	9	31	88	271

Шундай қилиб, бўлинма

$$q(x)=2x^4+3x^3+9x^2+31x+88,$$

қолдиқ эса

$$r=f(3)=271$$

[2] Хорнер Уилям (1786-1837) – инглиз математиги.

бўлади.

Горнер усули нафақат кўпҳадни илдизларини тезлаштиради, балки унинг қийматини ҳисоблашни осонлаштириш имконини беради.

3-мисол. x^3+4x^2-3x+5 кўпҳадни Горнер схемасидан фойдаланиб, $x-1$ га бўлишни бажарамиз.

	1	4	-3	5
1	1	5	2	7

Демак, $x^3+4x^2-3x+5=(x-1)(x^2+5x+2)+7$.

Безу теоремасидан $f(x)$ кўпҳадни $ax+b$ кўринишдаги иккиҳадга бўлишда ҳосил бўладиган p қолдиқ $f(-b/a)$ га тенг бўлиши келиб чиқади.

4-мисол. $P_3(x)=x^3-3x^2+5x+7$ ни $2x+1$ га бўлишдан ҳосил бўлган қолдиқни топинг.

Ечиш: Қолдиқ

$r=P_3(-1/2)=(-1/2)^3-3\cdot(-1/2)^2+5\cdot(-1/2)+7=29/8$ га тенг.

2-теорема. Агар α сони $f(x)$ кўпҳаднинг илдизи бўлса, $f(x)$ кўпҳад $x-a$ иккиҳадга қолдиқсиз бўлинади.

Исбот: Безу теоремасига кўра, $f(x)$ ни $x-a$ га бўлишдан чиқадиган қолдиқ $f(\alpha)$ га тенг, шарт бўйича эса $f(\alpha)=0$. Исбот бажарилди.

Бу теорема $f(x)=0$ тенгламани ечиш масаласини $f(x)$ кўпҳадни чизиқли кўпайтувчиларга ажратиш масаласига келтириш имконини беради.

1-натижа. Агар $f(x)$ кўпҳад ҳар хил $\alpha_1, ..., \alpha_n$ илдизларга эга бўлса, у $(x-\alpha_1)...(x-a_n)$ кўпайтмага қолдиқсиз бўлинади.

2-натижа. n-даражали кўпҳад n тадан ортиқ ҳар хил илдизга эга бўла олмайди.

Исбот: Агар n- даражали $f(x)$ кўпҳад $n+1$ та ҳар хил $\alpha_1, ..., \alpha_{k+1}$ илдизларга эга бўлганда, у $n+1$-даражали $(x-\alpha_1)...(x-\alpha_{k+1})$

кўпайтмага қолдиқсиз бўлинарди. Лекин бундай бўлиши мумкин эмас.

Юқорида қаралган теоремалардан фойдаланиб, Виет[3] томонидан берилган ҳамда $f(x)=0$ бутун алгебраик тенгламанинг a_i ҳақиқий коэффициентлари ва α_i илдизлари орасидаги муносабатни ифодаловчи формулаларни келтирамиз:

$$a_2x^2+a_1x+a_0=b(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)=bx^2-b(\alpha_1+\alpha_2)x+b\alpha_1\alpha_2.$$

Агар x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентлари тенглаштирилса, $b=a_2$ бўлади. Натижада ушбу формулалар топилади:

$$\alpha_1+\alpha_2=-a_1/a_2, \alpha_1\alpha_2=a_0/a_2;$$

Шу тартибда $f_3(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ учун:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-a_2/a_3,$$

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=a_1/a_3, \alpha_1\alpha_2\alpha_3=-a_0/a_3$$

формулалар топилади.

Ҳосил қилинган тенгликларнинг бажарилиши $\alpha_1,...,\alpha_n$ сонларининг $f_n(x)=a_nx^n+...+a_0$ кўпҳад илдизлари бўлиши учун зарур ва етарлидир.

Агар $f(x)$ кўпҳад $(x-\alpha)^k$ га қолдиқсиз бўлинса, лекин $(x-\alpha)^{k+1}$ га қолдиқсиз бўлинмаса, α сони $f(x)$ учун *к каррали илдиз* бўлади.

4.2-§. Алгебраик тенгламаларнинг комплекс илдизлари.

Алгебранинг асосий теоремаси (Гаусс теоремаси):

n-даражали (бу ерда $n\geq1$) ҳар қандай кўпҳад ақалли битта комплекс илдизга эга.[4]

Теорема. Агар $z=\alpha+\beta i$ комплекс сони ҳақиқий коэффициентли $P(z)$ кўпҳаднинг илдизи бўлса, $z=\alpha-\beta i$ комплекс сони ҳам $P(z)$ кўпҳаднинг илдизи бўлади.

[3] Франсуа Виет - француз олими (1540-1603).
[4] А.У Абдуҳамидов, Ҳ.А.Насимов,У.М.Носиров, Ж.Ҳ.Ҳусанов: ―Алгебра ва анализ асослари‖ I қисм, Академик лицейлар учун дарслик, Т.:‖Ўқитувчи‖ Нашриёт матбаа ижодий уйи -2008.195-207-бетлар.

Исбот: z комплекс сони $P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_{n-1}z+a_n$ кўпҳаднинг илдизи бўлсин. У ҳолда $a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_{n-1}z+a_n=0$ ёки $a_0\left(\overline{z^n}\right)+a_1\left(\overline{z^{n-1}}\right)+...+a_{n-1}\overline{z}+a_n=\overline{0}$ тенглик ўринли бўлади. Комплекс сонга қўшма сонни топиш амалининг хоссаларидан фойдалансак,

$$a_0\left(\overline{z}\right)^n+a_1\left(\overline{z}\right)^{n-1}+...+a_{n-1}\overline{z}+a_n=0$$

тенгликка эга бўламиз. Демак, z сони ҳам $P(z)$ кўпҳаднинг илдизи. Теорема исбот бўлди.

Натижа. n-даражали $P_n(x)$ кўпҳад $x-\alpha$ кўринишидаги иккиҳадлар ва x^2+px+q кўринишидаги манфий дискриминантли квадрат учҳадлар даражаларининг кўпайтмасидан иборат:

$$P_n(x)=a_0(x-a)^k\ldots(x^2+px+q)^m, \text{ бу ерда}$$

$$k=\{0, 1, 2,\ldots\}, m=\{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Учинчи даражали тенгламаларни Кардано формуласи ёрдамида ечиш

Комплекс сонлар майдони устидаги ушбу

$$ax^3+bx^2+cx+d=0, \ (a\neq0) \quad (1)$$

кўринишдаги тенглама *учинчи даражали бир номаълумли тенглама* дейилади.[5]

(1) тенгламанинг ҳар иккала томонини a га бўлиб, ушбу тенгламага эга бўламиз:

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0 \quad (2)$$

(1) да $x=y-\dfrac{b}{3a}$ алмаштиришни киритиб

$$\left(y-\frac{b}{3a}\right)^3+\frac{b}{a}\left(y-\frac{b}{3a}\right)^2+\frac{c}{a}\left(y-\frac{b}{3a}\right)+\frac{d}{a}=0 \quad (3)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (3) тенгламани соддалаштиргандан кейин

[5] Назаров Р.Н, Тошпўлатов Б.Т.Дўсимбетов А.Д: ―Алгебра ва сонлар назарияси‖ 2-қисм, Тошкент ―Ўқитувчи‖ -1995. 229-235-бетлар.

$$y^3+py+q=0 \qquad (4)$$

кўринишдаги тенгламага эга бўламиз. (4) тенгламадаги y ўзгарувчи ўрнига иккита u ва v ўзгарувчиларни $y=u+v$ тенглик ёрдамида киритамиз. Натижада

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0 \text{ ёки } u^3+v^3+q+(3uv+p)+(u+v)=0 \qquad (5)$$

тенгламага эга бўламиз. (5) да u ва v ларни шундай танлаймизки, натижада

$$3uv+p=0 \qquad (6)$$

шарт бажарилсин. Бундай талаб қўйишимиз ўринли, чунки

$$\begin{cases} u+v=y \\ uv=-\dfrac{p}{3} \end{cases}$$

тенгламалар системаси y берилганда ягона ечимга эга. (5) дан

$$u^3+v^3=-q. \qquad (7)$$

(5) дан $u^3v^3=-p^3/27$ бўлгани учун u ва v лар Виет теоремасига асосан бирор $z^2+qz-p^3/27=0$ кўринишдаги квадрат тенгламанинг илдизлари бўлади. Бу тенгламани ечиб

$$z_1=u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},\ z_2=v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} \qquad (8)$$

ни ҳосил қиламиз. (8) дан

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},\ v=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

лар топилиб, u ва v нинг ҳар бирига 3та қиймат, y ўзгарувчи учун эса тўққизта қиймат топилади. Улардан (6) шартни қаноатлантирувчиларини оламиз. У ҳолда (4) тенгламанинг барча ечимлари топилади.

Агар $u, u\varepsilon, u\varepsilon^2$ *(бунда* ε сони 1 дан чиқарилган учинчи даражали илдизлардан бири, яъни $\varepsilon^2=1$*)* лар z_1 нинг учинчи даражали илдизларининг қийматлари бўлса унга мос z_2 нинг учинчи даражали илдизлари қийматлари $v, v\varepsilon^2, v\varepsilon$ дан иборат бўлади. Натижада (4) тенглама ушбу

$$y_1=u+v,\ y_2=u\varepsilon+v\varepsilon^2,\ y_3=u\varepsilon^2+v\varepsilon \qquad (9)$$

илдизларга эга бўлиб, унда $\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ бўлганлигидан

$$y_1=u+v,$$
$$y_2=-\frac{1}{2}(u+v)+i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v),$$
$$y_3=-\frac{1}{2}(u+v)-i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v) \qquad (10)$$

ечим ҳосил бўлади. (10) ва $x=y-\frac{b}{3a}$ ни эътиборга олиб (1) тенгламанинг

$$x_1=y_1-\frac{b}{3a},\ x_2=y_2-\frac{b}{3a},\ x_3=y_3-\frac{b}{3a}$$

илдизлари топилади.

Ҳақиқий коэффициентли учинчи даражали тенгламаларни текшириш. Энди ҳақиқий коэффициентли учинчи даражали тенглама илдизларини текширайлик. Қуйидаги теорема учинчи даражали тенгламанинг ҳақиқий ва мавҳум илдизлари сонини аниқлайди.

Теорема. Агар

$$x^3+px+q=0 \qquad (11)$$

тенглама ҳақиқий коэффициентли тенглама бўлиб, $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ бўлса, у ҳолда қуйидаги мулоҳазалар ўринли бўлади:

*а)*агар $\Delta>0$ бўлса, (11) тенглама битта ҳақиқий ва иккита ўзаро қўшма мавҳум илдизларга эга;

б) $\Delta=0$ бўлса, (11) нинг барча илдизлари ҳақиқий ва камида биттаси каррали;

*с)*агар $\Delta<0$ бўлса (11) тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва турлича бўлади.

Исботи. *а)* $\Delta>0$ бўлса, у ҳолда z_1 ва z_2 илдизлар ҳақиқий ва ҳар хил бўлади.

Демак, илдизлардан камида биттаси, масалан z_1 нолдан фарқли бўлади. $u=\sqrt[3]{z_1}$ сони z_1 нинг арифметик илдизи бўлсин. Шунинг учун u ҳақиқий сон бўлади. $uv=\frac{-p}{3}$ тенгликка асосан v ҳам ҳақиқий сон бўлади. $z_1 \neq z_2$ бўлганлиги сабабли $u^3 \neq v^3$ бўлади, бунда $u \neq v$ муносабатнинг ўринли эканлиги равшан. (10) га асосан,

$$x_1 = u + v,$$
$$x_2 = -\frac{1}{2}(u+v) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v),$$
$$x_3 = -\frac{1}{2}(u+v) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v) \qquad (12)$$

бўлиб, u ва v лар ҳақиқий ҳамда турли сонлар бўлганлиги учун (12) да x_1 ҳақиқий, x_2 ва x_3 лар ўзаро қўчма мавхум сонлар бўлади.

b) $\Delta = 0$ бўлсин. Агар $\Delta = 0$ ва $q \neq 0$ бўлса, у ҳолда $z_1 = z_2 = \frac{-q}{2} \neq 0$ бўлади.

$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ *сон* $\frac{-q}{2}$ нинг арифметик илдизи бўлсин. $uv = \frac{-p}{3}$ ҳақиқий сон бўлгани учун $v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ ҳақиқий сон бўлади, яъни $u = v \neq 0$ бўлади. (12) формулага асосан $x_1 = 2u \neq 0$, $x_2 = x_3 = -u$ бўлади. Шундай қилиб, $q \neq 0$ бўлганда (11) тенглама учта ҳақиқий илдизга эга ва улардан биттаси каррали бўлади.

Агар $\Delta = 0$ ва $q = 0$ бўлса, у ҳолда $p = 0$ бўлади. Бу ҳолда (11) тенглама $x^3 = 0$ кўринишда бўлиб, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ бўлади.

c) $\Delta < 0$ бўлсин. У ҳолда $z_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}$, $z_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}$ бўлади. Демак, z_1, z_2 сонлари ўзаро қўшма мавҳум сонлар экан. Шунинг учун ҳам

$$|z_1| = |z_2| \neq 0 \qquad (13)$$

ва

$$z_1 \neq z_2 \qquad (14)$$

муносабат ўринли. (6) ва (8) га кўра

$$u^3 = z_1,\ v^3 = z_2,\ uv = \frac{-p}{3} \qquad (15)$$

бўлгани учун (13) ва (15) дан $|u|^3 = |v|^3 \neq 0$, бўлиб, бундан

$$|u| = |v| \neq 0 \qquad (16)$$

келиб чиқади. (14) га асосан $u \neq v$ муносабат ҳам ўринлидир. (6) га кўра $uv = \frac{-p}{3}$ бўлиб, бундан $|u| = |v| = \frac{-p}{3}$ келиб чиқади. Шартга асосан $p < 0$. (16) га кўра

$$\frac{-p}{3|u|^2} = 1 \qquad (17)$$

тенглик бажарилади. (15) ва (17) ларга асосан

$$v = -\frac{p}{3|u|} = -\frac{-p}{3u\bar{u}} \cdot \bar{u} = -\frac{p}{3|u|^2}\bar{u} = \bar{u} \text{ яъни}$$

$$v = \bar{u} \qquad (18)$$

тенглик ўринлидир. (12) формуладаги v ни $\bar{u}$ билан алмаштирсак ва $u \neq v$ ни эътиборга олсак, x_1, x_2, x_3 илдизлар ҳақиқий ва ҳар хил эканлиги маълум бўлади. Ҳақиқатан ҳам, (12) формуладан $x_2 \neq x_3$ келиб чиқади. Фараз қилайлик, $x_1 = x_2$ бўлсин. У ҳолда (9) га асосан $u + v = u\varepsilon + v\varepsilon^2$ бўлиб бундан $u(1-\varepsilon) = v(\varepsilon^2 - 1)$ ёки $u = v\varepsilon^2$ келиб чиқади. Бундан $z_1 = z_2$ ва $\Delta = 0$ тенгликлар келиб чиқади. Бу эса $\Delta < 0$ шартга қарама-қаршидир. Худди шунингдек $x_1 \neq x_3$ эканлигини кўрсатиш мумкин.

Тўртинчи даражали тенгламаларни Феррари усулида ечиш

Тўртинчи даражали тенгламани ечишнинг Феррари усули билан танишиб чиқамиз. Бу усул бўйича тўртинчи даражали тенгламани ечиш бирор ёрдамчи учинчи даражали тенгламани ечишга келтирилади.

Комплекс коэффициентли 4-даражади тенглама ушбу

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (1)$$

кўринишда берилган бўлсин. (1) ни $x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d$ кўринишда ёзиб олиб, унинг иккала томонига $\frac{a^2x^2}{4}$ ҳадни қўшамиз ва ушбу кўринишдаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^3 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d \qquad (2)$$

(2) тенгламанинг иккала томонига $\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)y+\frac{y^2}{4}$ ҳадни қўшиб ушбу

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right)x^2+\left(\frac{ay}{2}-c\right)x+\left(\frac{y^2}{4}-d\right) \tag{3}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (3) нинг чап томонида тўла квадрат ҳосил бўлади. Ўнг томонидаги учхад эса y параметрга боғлиқ. Ундаги y параметрни шундай танлаб оламизки, натижада (3) нинг ўнг томони тўла кватрат бўлсин. Маълумки $Ax^2+Bx+C=0$ учхад тўла квадрат бўлиши учун $B^2+4AC=0$ бўлиши етарли.
Ҳақиқатан ҳам, бу шарт бажарилса, $B^2=4AC$ бўлади ва

$$Ax^2+Bx+C=Ax^2+2\sqrt{AC}+C=\left(\sqrt{A}x+\sqrt{C}\right)^2$$

Яъни $Ax^2+Bx+C=\left(\sqrt{A}x+\sqrt{C}\right)^2$ тенгламага эга бўламиз. Демак, y ни шундай танлаб оламизки, натижада

$$\left(\frac{ay}{2}-c\right)^2-4\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right)\left(\frac{y^2}{4}-d\right)=0$$

(4) шарт бажарилсин, яъни y га нисбатан учинчи даражали тенглама ҳосил бўлади.
(2) шарт бажарилса, у ҳолда (3) нинг ўнг томони тўлиқ квадратга айланади. (4) тенгламани ечиб унинг битта илдизи y_0 ни топамиз ва уни (3) тенгламадаги y ўрнига олиб бориб қўямиз. У ҳолда

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y_0}{2}\right)^2=(\alpha x+\beta)^2 \tag{5}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (5) тенгламани ечганда қуйидаги квадрат тенгламалар системаси ҳосил бўлади:

$$x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y_0}{2}=\alpha x+\beta,$$

$$x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y_0}{2}=-\alpha x-\beta \tag{6}$$

Бу ерда,

$$\alpha=\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+y_0},\ \beta=\frac{\frac{ay_0}{2}-c}{2\alpha}$$

Бу системани ечиб берилган (1) тенгламанинг барча ечимларини топамиз.

1-мисол. $x^3-9x^2+21x-5=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш: Бу ерда $x=y+3$ деган алмаштириш киритамиз. У ҳолда $y^3-6y+4=0$ тенглама ҳосил бўлади. Демак, бизда $p=-6, q=4$ ва $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ дан $\Delta=-4$ ни ҳосил қиламиз. $\Delta<0$ бўлганлиги учун берилган тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил бўлиши керак. (8) дан

$$u=\sqrt[3]{-2+\sqrt{-4}}=\sqrt[3]{-2+2i}.$$

Энди $-2+2i$ нинг модули ва аргументини топамиз:

$$r=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2};\ \varphi=\operatorname{arc}tg\frac{2}{-2}=\operatorname{arc}tg(-1)=\frac{3\pi}{4}.$$

Бундан комплекс сонларни тригонометрик кўринишга келтириш ва илдиз чиқариш қоидаларига асосан қуйидагиларга эга бўламиз:

$$-2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right);$$

$$u_k=\sqrt[3]{-2+2i}=\left(2\sqrt{2}\right)^{1/3}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}2k\pi}{3}\right)=$$

$$\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right];\quad k=0,1,2.$$

Бу ерда $k=0$ деб олсак

$$u_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+i \tag{18}$$

га кўра $v=\bar{u}$.

Демак, $v_0=1-i$ ва $y_0=u_0+v_0=u_0+\bar{u}=2$. (10) дан

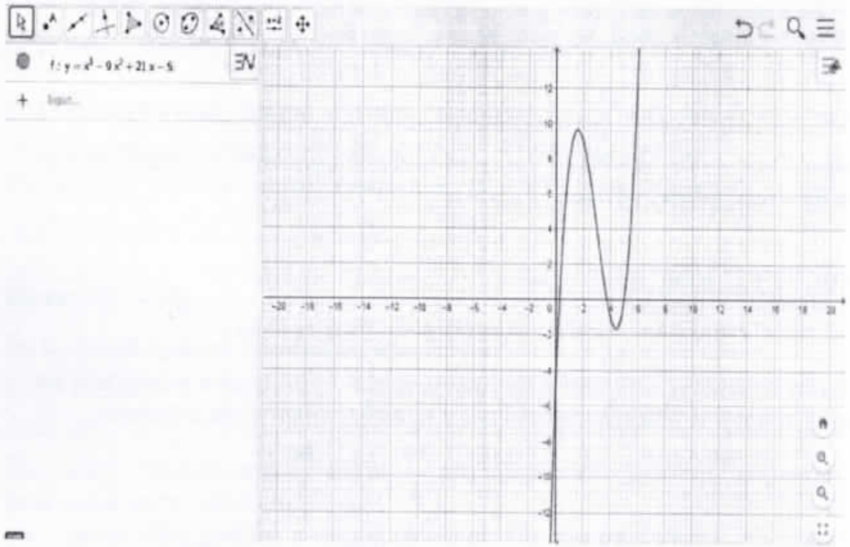
$$y_1=-\frac{1}{2}\left(u_0+\bar{u}_0\right)+i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(u_0-\bar{u}_0\right)=-1-\sqrt{3};$$

$$y_1=-\frac{1}{2}\left(u_0+\bar{u}_0\right)-i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(u_0-\bar{u}_0\right)=-1+\sqrt{3}$$

Бу қийматларни $x=y+3$ алмаштиришга олиб бориб қўйиб

$$x_0=5,\ x_1=2-\sqrt{3},\ x_2=2+\sqrt{3}$$

берилган тенгламанинг ечимларини ҳосил қиламиз.



2-мисол. $x^4+2x^3+2x^2+x-7=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш: Бизнинг мисолимизда $a=2, b=2, c=1, d=-7$. Шунинг учун, (4)

$$y^3-2y^2+30y-29=0;\ A=0, B=0, C=\frac{29}{4}$$

кўришда бўлади. Шундай қилиб, берилган тенглама

$$x^2+x+\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{29}}{2}$$

тенгламага тенг кучли. Буни ечиб берилган тенгламанинг ечимларини ҳосил қиламиз.

1) $x^2+x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{29}}{2}$, $x^2+x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}=0$

$$D=(-1)^2-4\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)>0$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{(-1)^2-4\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}}{2}$$

3- мисол. $x^4-x^3-3x^2+5x-10=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш: Бу ерда $a=-1, b=-3, c=5, d=-10$ ва

$$\left(\frac{-y}{2}-5\right)^2-4\left(\frac{1}{4}+3+y\right)\left(\frac{y^2}{4}+10\right)=0$$

$$\left(\frac{-y}{2}+5\right)^2-(13+4y)\left(\frac{y^2}{4}+10\right)=0$$

$$\frac{y^2}{4}+5y+25-\frac{13y^2}{4}-130-y^3-40y=0$$

$$y^3-3y^2-35y-105=0$$

$$y^2(y+3)-35y(y+3)=0$$

Демак, $y_0=-3$ ва $A=\frac{1}{4}, B=\frac{-13}{2}, C=\frac{49}{4}; \alpha=\frac{1}{2}, \beta=\frac{7}{2}$. Шунинг учун, берилган тенглама ушбу тенгламага тенг кучли $x^2-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}=\pm\left(\frac{x}{2}-\frac{7}{2}\right)$.

Бу тенгламани ечиб, берилган тенгламанинг ечимларини ҳосил қиламиз.

$$1)\ x^2-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}=\frac{x}{2}-\frac{7}{2}$$

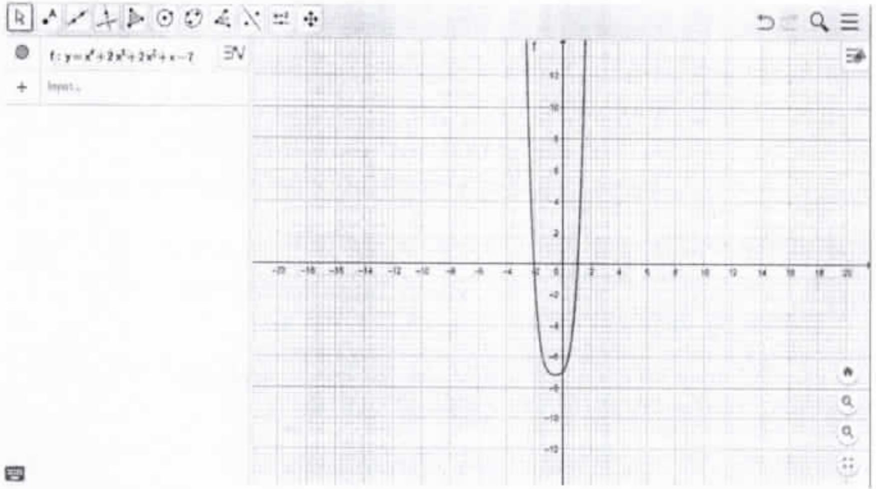
$$x^2-x+2=0 \leftrightarrow D=1^2-4\cdot2=-7<0,\ x\in\varnothing$$

$$2)\ x^2-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}=-\frac{x}{2}+\frac{7}{2}$$

$$x^2-5=0$$

$$x^2=5$$

Жавоб: $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$



4.3-§. Симметрик кўпҳадлар ва уларнинг симметрик функциялари. Икки ва уч ўзгарилувчи тенглама ва тенгламалар системасини ечишда симметрик кўпҳадларнинг қўлланилиши. Икки номаълумли тенглама графиги.

4.1-Таъриф: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ларни бир бири билан ҳар қандай алмаштирилганда ҳам ўзгармайдиган $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ кўпҳад шу ўзгарувчиларнинг симметрик кўпҳади ёки симметрик функцияси дейилади.

$A_i x_1^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} x_n^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} \ldots x_n^{\alpha_n}$ n ўзгарувчили симметрик кўпҳадларнинг алгебраик йиғиндиси ва кўпайтмаси яна n ўзгарувчили симметрик функцияларни ифодалайди.

Ҳақиқатдан ўзгарувчиларнинг исталган ўрин алмаштиришида ҳар қандай симметрик функция ўзгармаса равшанки уларнинг алгебраик йиғиндиси ва кўпайтмаси ҳам ўзгармайди.

4.2-Таъриф: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ўзгарувчилардан тузилган

$$
\begin{aligned}
g_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\
g_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \\
g_3 &= x_1x_2x_1 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n \qquad (1) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
g_n &= x_1x_2x_3 \ldots x_n
\end{aligned}
$$

симметрик функциялар оддий симметрик функциялар дейилади.

4.1-Теорема. P майдон устидаги $g_1 g_2, \ldots, g_n$ асосий симметрик функцияларнинг

$$A_1 g^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2}, \ldots, g_n^{\alpha_n} + A_2 g^{\beta_1} g_2^{\beta_2}, \ldots, g_n^{\beta_n} + A_k g^{\omega_1} g_2^{\omega_2}, \ldots, g_n^{\omega_n} \qquad (2)$$

кўпҳади фақат $A_1 = A_2 = \ldots = A_k = 0$ шартдагина нолга тенг бўла олади.

4.2-Теорема. (Симметрик кўпҳадлар назариясининг асосий теоремаси) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ўзгарувчиларнинг P майдон устидаги ҳар бир $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ симметрик кўпҳадини $g_1, g_2, \ldots, g_n$ асосий симметрик функцияларнинг шу P майдон устидаги кўпҳади шаклида бирдан бир усул билан тасвирлаш мумкин.

Икки ўзгарувчили симметрик кўпҳадлар ва уларнинг элементар алгебра масалаларига тадбиғи.

Биз юқорида n ўзгарувчили симметрик кўпҳадлар билан танишдик, энди бундан буён икки ўзгарувчига боғлиқ бўлган симметрик кўпҳадлар билан шуғуланамиз.

$x+y$ ва xy кўпҳадлар энг содда симметрик кўпҳадлар ҳисобланади, буларни элементар симметрик кўпҳадлар деб атаймиз, булар учун махсус белгилашлардан фойдаланамиз.

$$\sigma_1 = x + y\ , \sigma_2 = xy$$

σ_1 ва σ_2 дан ташқари бизга даражали йиғиндилар деб аталувчи яъни $x^2 + y^2, x^3 + y^3, \ldots, x^n + y^n$ кўринишдаги кўпҳадлар ҳам учраб туради. $x^n + y^n$ кўпҳадни S_n орқали белгилаш қабул қилинган. Худди шунингдек,

$$
\begin{aligned}
S_1 &= x + y \\
S_2 &= x^2 + y^2 \\
S_3 &= x^3 + y^3 \\
&\ldots\ldots \\
S_n &= x^n + y^n
\end{aligned}
$$

Энди икки ўзгарувчили симметрик кўпҳадлар ҳақидаги асосий теоремага тўхталиб ўтамиз.

Симметрик кўпҳад ҳосил қилиш учун энг содда йўл бор. σ_1 ва σ_2 лардан тузилган ихтиёрий симметрик бўлмаган кўпҳадни олайлик ва σ_1 ва σ_2 ларнинг ўрнига уларни "x" ва "y" орқали ифодаловчи қийматларини қўямиз. Бундан кўринадики, бу билан биз "x" ва "y" лардан тузилган симметрик кўпҳадни ҳосил қилган бўламиз. (чунки $\sigma_1 = x + y$ *ва* $\sigma_2 = xy$ ларнинг қиймати "x" ва "y" ларнинг ўринларини алмаштирсакда ўзгармайди).

Масалан. $\sigma_1^3 - \sigma_1\sigma_2$ кўпҳаддан қуйидаги симметрик кўпҳадни ҳосил қиламиз:

$$(x+y)^3 - (x+y)xy = x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3$$

Демак, σ_1 ва σ_2 лардан тузилган ихтиёрий кўпҳадни олсак ва σ_1 ва σ_2 ларнинг ўрнига уларнинг $\sigma = x + y$ ва $\sigma_2 = x\,y$ қийматларини қўйсак, у ҳолда
"x" ва "y" орқали ифодаланувчи симметрик кўпҳадга эга бўламиз. Шундай савол туғилади. Симметрик кўпҳадларни тузишда шу усул умумий бўла оладими, яъни шу усул орқали исталган симметрик кўпҳадни ҳосил қилиш мумкинми? Биз бир неча мисолларни қараб чиқамиз. Бу эса бизга юқоридаги тахминни ойдинлаштиради .

Масалан $S_1, S_2, S_3, ..., S_n$ даражали йиғиндилар σ_1 ва σ_2 орқали осонгина ифодаланади.

$$S_1 = x + y = \sigma_1;$$

$$S_2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2;$$

$$S_3 = x^3 + y^3 = (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right) =$$

$$= (x+y)\left[(x+y)^2 - 3xy\right] = \sigma_1\left(\sigma_1^2 - 3\sigma_2\right);$$

$$S_4 = x^4 + y^4 = \left(x^2 + y^2\right)^2 - 2\,x^2y^2 = (\sigma^2{}_1 - 2\sigma_2)^2 - 2\sigma^2{}_2$$

Мисол сифатида қуйидаги симметрик кўпҳадни оламиз: $x^3y + x\,y^3$

$$x^3y + xy^3 = xy(x^2 + y^2) = \sigma_2(\sigma_1{}^2 - 2\sigma_2) \text{ га эгамиз.}$$

Кейинги мисолларнинг таҳлили ҳам шундай натижани беради: Биз қандай симметрик кўпҳад олмайлик, кўпми ёки озми мураккаб ҳисоблашлардан сўнг уни элементар симметрик кўпҳад σ_1 ва σ_2 лар орқали ифодалашга муяссар бўламиз. Шундай қилиб, юқоридаги мисоллар бизни қуйидаги теорема тўғри деган фаразга олиб келади.

4.3-Теорема. "x" ва "y" лардан тузилган ихтиёрий симметрик кўпҳадни $\sigma = x + y$ ва $\sigma_2 = x\,y$ лардан тузилган кўпҳад кўринишда ифодаланиш мумкин.

Исбот: Маълумки олинган мингта мисол ҳам теорема исботини ўрнини боса олмайди, чунки ҳар доим ҳам минг биринчи мисол σ_1 ва σ_2 орқали ифодаланмайдиган бўлиб чиқиб қолиши мумкин деган ҳаф туради. Юқорида келтирилган теоремани исбот қилишга ўтамиз ва уни икки усул билан амалга оширамиз. Даражали йиғиндиларни σ_1 ва σ_2 лар орқали ифодалаш теоремани аввал биз симметрик кўпҳад учун эмас фақатгина даражали йиғиндилар учун исбот қиламиз. Бошқача қилиб айтганда биз ҳар бир даражали йиғинди $S_n = x^n + y^n$ ни σ_1 ва σ_2 лардан тузилган кўпҳад кўринишда тасвирлаш мумкинлиги кўрсатамиз. Шу мақсадда $S_{k-1} = x^{k-1} + y^{k-1}$ тенгликни ҳар иккала томонини $\sigma_1 = x + y$ га кўпайтирамиз ва қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$\sigma_1 S_{k-1} = \left(x^{k-1} + y^{k-1}\right)\left(x+y\right) = x^k + xy^{k-1} + x^{k-1}y + y^k =$$

$$= x^k + y^k + xy\left(x^{k-2} + y^{k-2}\right) = S_k + \sigma_2 S_{k-2}$$

худди шу йўл билан

$$S_k = \sigma_1 S_{k-1} - \sigma_2 S_{k-2} \qquad (3)$$

га эга бўламиз. Бу формуладан бизнинг тасдиғимизнинг тўғрилиги келиб чиқади. Биз сал илгарироқ даражали йиғинди S_1 *ва* S_2 лар σ_1 ва σ_2 лардан тузилган кўпҳад кўринишида тасвирлашни текширган эдик. Бизга даражали йиғинди $S_1, S_2, ..., S_{k-1}, S_{k-1}$ ларни σ_1 ва σ_2 лардан тузилган кўпҳад кўринишда ифодалаш маълум бўлса, у ҳолда бу ифодаларни (3) формулага қўйиб даражали йиғинди S_k ни σ_1 ва σ_2 лар орқали ифодасини ҳосил қиламиз.

Биз даражали йиғиндилар S_1 *ва* S_2 ни билиб (3) формула орқали S_3, кейин S_4, S_5 ва ҳоказоларнинг σ_1 ва σ_2 орқали ифодаланишини кетма-кет топишимиз мумкин.

Равшанки, эртами кечми ихтиёрий даражали йиғинди S_n ларни σ_1ва σ_2 лар орқали ифодалай оламиз.

Шу билан бизнинг тасдиғимиз исбот қилинди.

Кўрилган исботнинг асосини ташкил қилувчи (3) формула S_n ни қандайдир σ_1 ва σ_2 лар орқали ифодаланишини тасдиқлабгина қолмай балки σ_1 ва σ_2 орқали ифодаланган S_n даражали йиғиндиларни кетма-кет ҳисоблашда ҳам ёрдам беради. Шундай қилиб, бир формула ёрдамида биз кетма-кет қуйидагиларни топамиз.

$S_3=\sigma_1S_2-\sigma_2S_1=\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)-\sigma_1\sigma_2=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2$;

$S_4=\sigma_1S_3-\sigma_2S_2=\sigma_1(\sigma_1^3-3\sigma_2\sigma_1)-\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)=$

$=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2$;

$S_5=\sigma_1S_4-\sigma_2S_3=\sigma_1(\sigma_1^4-4\sigma_2\sigma_1^2+2\sigma_X^2)-\sigma_2(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2)=$;

$=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2$

Қуйидаги жадвалда йиғинди $S_1, S_2,..., S_{10}$ ларни σ_1 ва σ_2 орқали ифодаланиши келтирилган. Бу келтирилган ифодалар бизга мисоллар ечгунча керак бўлади.

$S_1=\sigma_1$

$S_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$;

$S_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2$;

$S_4=\sigma_1^4-4\sigma_2^2\sigma_1+2\sigma_2^2$;

$S_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2$;

$S_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+9\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3$;

$S_7=\sigma_1^7-7\sigma_1^5\sigma_2+14\sigma_1^3\sigma_2^7-7\sigma_1\sigma_2^3$;

$S_8=\sigma_1^8-8\sigma_1^6\sigma_2+20\sigma_1^4\sigma_2^2-16\sigma_1^2\sigma_2^3+2\sigma_2^4$;

$S_9=\sigma_1^9-9\sigma_1^7\sigma_2+27\sigma_1^5\sigma_2^2-30\sigma_1^3\sigma_2^3+\sigma_1\sigma_2^4$;

$S_{10}=\sigma_1^9-10\sigma_1^8\sigma_2+35\sigma_1^6\sigma_2^2-50\sigma_1^4\sigma_2^3+25\sigma_1^2\sigma_2^4-2\sigma_2^5$;

Энди юқоридаги келтирилган теоремани исботини якунлаш қийин эмас "x" ва "y" лардан тузилган симметрик кўпҳад икки кўринишдаги қўшилувчиларни ўз ичига олади. Биринчидан "x" ва "y" нинг даражалари бир хил бўлган бирҳадлар учраши мумкин, яъни bx^ky^l ax^ky^k кўринишдаги бирҳадлар. Маълумки, бундай бирҳадлар

$ax^ky^k=a(xy)^k=a\sigma_2{}^k$ кўринишдаги бевосита σ_2 орқали ифодаланади. Иккинчидан "x" ва "y" га нисбатан турли даражаларда бўлган бирҳадлар учраши мумкин яъни bx^ky^l бирҳад, бу ерда $b\sigma_1{}^k\sigma_2{}^l$ $k\neq l$ кўринишдаги бирҳадлар. Маълумки симметрик кўпҳад bx^ky^l бирҳад билан бир қаторда bx^ly^k бирҳадни ҳам ўз ичига олади. bx^ly^k бирҳадни bx^ky^l бирҳаддаги "x" ва "y" ларнинг ўринларини алмаштиришдан ҳосил қилинади. Бошқача қилиб айтганда симметрик кўпҳадга $b\left(x^ky^l+x^ly^k\right)$ кўринишдаги иккиҳад киради. Аниқлик учун $k<l$ деб фараз қилиб бу кўпҳадни қуйидагича ёзиш мумкин.

$$b\left(x^ky^1+x^1y^k\right)=bx^ky^k\left(y^{1-k}+x^{1-k}\right)=b\sigma_2^kS_{1-k}$$

Бу исботга кўра даражали йиғинди S_{1-k}, σ_1 ва σ_2 дан иборат кўпҳад кўринишда тасвирланади, у ҳолда қаралаётган икки ҳад σ_1 ва σ_2 лар орқали ифодаланади. Демак, ҳар бир симметрик кўпҳад ҳар бири σ_1 ва σ_2 лар орқали ифодаланувчи ax^ky^k кўринишдаги бирҳад ва $b\left(x^ky^l+x^ly^k\right)$ кўринишдаги иккиҳадлар йиғиндиси сифатида тасвирланади. Бундан келиб чиқадики: исталган бирҳадни σ_1 ва σ_2 лардан иборат кўпҳад кўринишда ифодаланар экан.

Демак, теорема тўлиқлигича исбот қилинди.

Масалан.

$$f(x,y)=x^5-3x^3y^2-x^3y^3+2xy^4-7x^2y^2+y^5+$$
$$+3x^2y^3-5xy^3-5x^3y+2x^4y.$$

Ҳосил бўлган бу ифодани исботда кўрсатилгандек бирҳад ва кўпҳадларни ажратиб,

$$f(x,y)=-x^3y^3-7x^2y^2+\left(x^5+y^5\right)+3\left(x^3y^2+x^2y^3\right)+$$
$$+2\left(xy^4+x^4y\right)-5\left(x^3y+xy^3\right).$$

га эга бўламиз ёки бошқача қилиб

$$f(x,y)=-(xy)^3-7(xy)^2+\left(x^5+y^5\right)+3(xy)^2(x+y)+$$
$$+2xy\left(x^3+y^3\right)-5xy\left(x^2+y^2\right)=$$
$$=-\sigma^3{}_2-7\sigma^2{}_2+S_5+3\sigma^2{}_2\sigma_1+2\sigma_2S_3-5\sigma_2S_2$$

Даражали йиғинди $S_2\, S_3\, ва\ S_5$ ларни σ_1 ва σ_2 лар орқали ифодалаб натижада қуйидагига эга бўламиз.

$$f(x,y) = -\sigma_2^3 - 7\sigma_2^3 + 5\left(\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2\right) +$$
$$+2\sigma_2\left(\sigma_1^2 - 3\sigma_1\sigma_2\right) - 5\sigma_2\left(\sigma_1^2 - 2\sigma_2\right) =$$
$$= -\sigma_2^3 - 7\sigma_2^2 + \sigma_1^5 - 5\sigma_1^5\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 3\sigma_2^2\sigma_1 +$$
$$+2\sigma_2\sigma_1^3 - 6\sigma_1\sigma_2^2 - 5\sigma_1^2\sigma_2 + 10\sigma_2^2 =$$
$$= \sigma_1^5 - 3\sigma_2^3\sigma_1 - 5\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_1\sigma_2^2 - \sigma_2^3 + 3\sigma_2^2$$

(қийматлар жадвалидан олинади)

Энди теореманинг яқинлигини қараб чиқамиз. Биз кўрдикки агар “x” ва “y” лардан тузилган симметрик кўпҳад берилган бўлса, уни σ_1 ва σ_2 лар орқали ифодалаш қийин эмас. Юқорида келтирилган асосий теореманинг исботи, ихтиёрий $f(x,y)$ симметрик кўпҳадни σ_1 ва σ_2 элементар симметрик кўпҳадлар орқали ифодалаш мумкинлигини ўз ичига олади. $f(x,y)$ кўпҳадни σ_1 ва σ_2 лар орқали ифодасини топишнинг бошқача йўли йўқмикан деган савол туғилади. Юқоридагилардан кўринадики, бу мумкин эмас экан. $f(x,y)$ симметрик кўпҳадни σ_1 ва σ_2 лар орқали ифодалаш учун қандай йўл топмайлик, биз ҳар доим бир хил натижага эришамиз.

Энди биз қуйида икки ўзгарувчили симметрик кўпҳадларнинг элементар алгебра масалаларига тадбиқини қараймиз.

Тенгламалар системасини ечиш.

Чап қисми номаълум x, y га симметрик боғлиқ бўлган тенгламалар тез- тез учраб туради. Бундай ҳолларда номаълум $\sigma_1 = x + y$ ва $\sigma_2 = xy$ га ўтиш биз учун қулайдир. Бу теоремалар x ва y дан тузилган ихтиёрий симметрик кўпҳадни $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$ лардан тузилган кўпҳад кўринишда тасвирлаш мумкин. Бундай номаълумларни алмаштиришдан мақсад, бундай алмаштириш натижасида тенгламаларнинг даражалари пасаяди. Бошқача қилиб айтганда, янги номаълумлар σ_1 ва σ_2 га боғлиқ бўлган системанинг ечилиши дастлабки системанинг ечилишидан осон. σ_1 ва σ_2 катталикларнинг қийматлари топилгандан кейин дастлабки номаълум x, y ларнинг қийматларини топиш керак.

Буни биз мактаб алгебра курсидан маълум бўлган қуйидаги теорема ёрдами билан амалга оширишимиз мумкин. Биз уни аниқроқ формада эслаб ўтамиз.

3.4-Теорема. Агар σ_1 ва σ_2 лар иккита ихтиёрий сонлар бўлса, у ҳолда квадрат тенглама

$$z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 = 0 \qquad (4)$$

ва тенгламалар системаси

$$\begin{cases} x + y = \sigma_1 \\ xy = \sigma_2 \end{cases} \qquad (5)$$

лар бир- бирига ўзаро қуйидаги кўринишда боғлиқ: агар z_1 ва z_2 лар квадрат тенглама (1) нинг илдизлари бўлса, у ҳолда (5) система иккита ечимга эга

$$\begin{cases} x_1 = z_1 \\ y_1 = z_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = z_2 \\ y_2 = z_1 \end{cases}$$

ва бошқа ечимга эга эмас. Тескариси ҳам ўринли, яъни агар $x = a$, $y = b$ лар (5) системанинг ечими бўлса, у ҳолда a ва b сонлари (4) квадрат тенгламани илдизлари бўлса, у ҳолда Виет формуласига асосан,

$$z_1 + z_2 = \sigma_1$$
$$z_1 z_2 = \sigma_2$$

яъни

$$\begin{cases} x_1 = z_1 \\ x_2 = z_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = z_2 \\ x_2 = z_1 \end{cases}$$

Сонлари (5) системанинг ечими ҳисобланади. (5) системанинг бошқа ечими йўқлиги биз ҳозир исбот қиладиган теореманинг охирги тасдиғидан келиб чиқади. Шундай қилиб, $x = a$, $y = b$ системанинг ечими бўлсин, яъни

$$a + b = \sigma_1$$
$$ab = \sigma_2,$$

бунда биз

$$z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 = z^2 - (a+b)z + ab = (z-a)(z-b)$$

га эга бўламиз. Бу эса (4) квадрат тенгламанинг илдизлари эканлигини билдиради. Теорема исботланди.

Энди мисоллар келтирамиз.

1-Мисол. Тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases} x^3+y^3=35 \\ x+y=5 \end{cases}$$

Ечиш: Янги номаълумлар киритамиз.

$$\sigma = x+y; \ \sigma_2 = x\,y$$

Келтирилган жадвал ёрдамида қуйидагиларни тузамиз.

$$\begin{cases} x^3+y^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2 \\ x+y=\sigma_1 \end{cases}$$

ва янги номаълумлар учун қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

$$\begin{cases} \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=35 \\ \sigma_1=5 \end{cases}$$

Бу тенгламалар системасини ечиб, σ_2=6 ни топиб оламиз. Шундай қилиб, $\sigma_1=5,\ \sigma_2=6,$ яъни бошланғич номаълум xy лар учун қуйидаги тенгламалар системасини келтириб чиқарамиз.

$$\begin{cases} x+y=35 \\ xy=6 \end{cases}$$

Бу тенгламалар системаси жуда осон ечилади ва биз дастлабки системанинг қуйидаги ечимларини оламиз.

$$\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=3 \\ y_2=2 \end{cases}$$

2-Мисол. Тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases} x^5+y^5=33 \\ x+y=3 \end{cases}$$

Бу тенгламани ҳам 1-мисолга ўхшаш ечамиз. $\sigma_1=x+y$, $\sigma_2=x\,y$ деб олинган ҳолда кўрсатилган системасини қуйидаги кўринишдаги системага келтирамиз.

$$\begin{cases} \sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2=33 \\ \sigma_1=3 \end{cases}$$

Бу ердан σ_2 учун квадрат тенглама ҳосил қиламиз.

$$15\sigma_2^2-135\sigma_2+210=0$$

ёки

$$\sigma_2^2-9\sigma_2+14=0$$

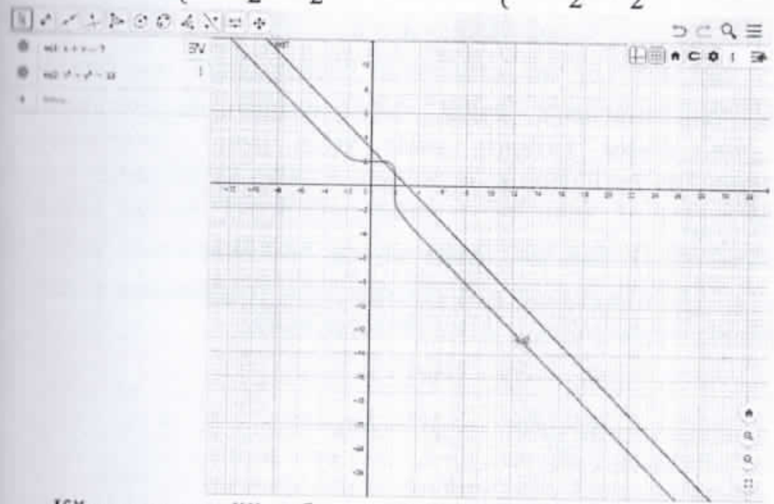
Бу тенгламадан σ_2 учун иккита қиймат топамиз. $\sigma_2=2$ ва $\sigma_2=7$. Худди шундай иккита тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=3 \\ xy=7 \end{cases}$$

Бу системаларни ечган ҳолда, дастлабки системанинг 4та ечимини оламиз:

$$\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=1 \\ y_2=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{19}}{2}i, \\ y_3=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{19}}{2}i \end{cases} \qquad \begin{cases} y_4=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{19}}{2}i \\ x_4=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{19}}{2}i \end{cases}.$$



Кўрсатилган йўл билан тенгламалар системасини ечишда кўпинча Безу теоремасини ишлатиш фойда беради. Безу теоремаси қуйидагичадир.

$$f(x)=a_ox^n+\ a_1x^{n-1}+...+a_n$$

кўпҳадни $x=\alpha$ га бўлганда қоладиган қолдиқ шу кўпҳаднинг $x=\alpha$ даги қийматига тенг, яъни $f(\alpha)=a_o\alpha^n+\ a_1\alpha^{n-1}+...+\alpha_n$ сонига тенг. Безу теоремаси ёрдамида қуйидаги системани ечамиз.

3-Мисол. Тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases} x^3+y^3=8 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

Ечиш: Худди олдинги мисоллардагидек, янги номалумларни киритамиз. $\sigma_1 = x+y$ ва $\sigma_2 = xy$. Шунда бизнинг системамиз қуйидаги кўринишдаги системага келади.

$$\begin{cases} \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=8 \\ \sigma_1^2-2\sigma_2=4 \end{cases}$$

Иккинчи тенгламадан σ_2 ни қийматини топган ҳолда ва уни бирини тенгламага қўйиб, биз номаълум σ_1 га нисбатан қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз

$$-\frac{1}{2}\sigma_1^3+6\sigma_1-8=0$$

ёки тенгламани -2 сонига кўпайтирсак, у ҳолда

$$\sigma_1^3-12\sigma_1+16=0$$

ни ҳосил қиламиз. σ_1 ни қийматини топиш учун эса биз 3-даражали тенгламаларни ечиш формуласини ишлатишимиз мумкин эди. Аммо ҳозирги ҳолат учун Безу теоремасини қўлланилиши биз учун осон ва қулайдир. Атайин кўриб чиқадиган кубик тенгламага σ_1 учун бутун қийматлар бериб чиққан ҳолда, $(\sigma_1=0,\pm1,\pm2,\pm3,...)$ биз тез орада шунга эга бўламизки $\sigma_1=2$ қиймат унинг илдизи эканлигини кўрамиз. Безу теоремасига асосан тенгламанинг чап қисми $\sigma_1=2$ га бўлинади, яъни

$$\begin{array}{l|l} \sigma_1^3-12\sigma_1+16 & \sigma_1-2 \\ \hline \underline{\sigma_1^3-2\sigma_1^2} & \sigma_1^2-2\sigma_1-8 \\ \quad 2\sigma_1^2-12\sigma_1 & \\ \quad \underline{2\sigma_1^2-4\sigma_1} & \\ \qquad -8\sigma_1+16 & \\ \qquad \underline{-8\sigma_1+16} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Безу теоремасида тасдиқланганидек бўлиниш қолдиқсиз бўлинади ва қуйидагини

$$\sigma_1^3-12\sigma_1+16=(\sigma_1-2)(\sigma_1^2+2\sigma_1-8)$$

ҳосил қилдик.

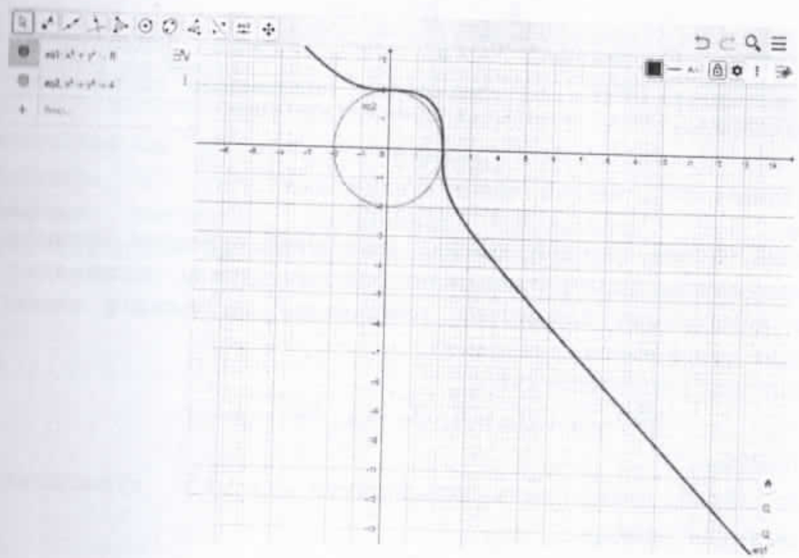
Натижада кубик тенглама иккита тенгламага ажралади: чизиқли $\sigma_1-2=0$ тенгламага, бу эса бизга илгаридан маълум бўлган $\sigma_1=2$ илдизини беради ва яна иккита илдиз берадиган квадрат тенгламанинг ечимлари

$\sigma_1^2+2\sigma_1-8=0$; $\sigma_1=-1\pm3$ яъни $\sigma_1=2$ ва $\sigma_1=-4$ $\sigma_1^2-2\sigma_1=4$ тенгламадан σ_2 учун мос келадиган қийматларни топамиз. $\sigma_2=0$ ёки $\sigma_2=6$. Шундай қилиб бошланғич номаълум x, y лар учун иккита тенгламалар системасини ҳосил қилдик.

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=0 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} x+y=-4 \\ xy=6 \end{cases}$$

Буларни ечиб бошланғич системанинг тўртта ечимини келтириб чиқарамиз.

$$\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=0 \end{cases} -2y=v \begin{cases} x_1=0 \\ y_2=2 \end{cases} \begin{cases} x_3=-2+i\sqrt{2} \\ y_3=-2-i\sqrt{2} \end{cases} \begin{cases} x_4=-2-i\sqrt{2} \\ y_4=-2+i\sqrt{2} \end{cases}$$



Ёрдамчи номаълумлар киритиш.

Айрим пайтларда шундай бўладики симметрик бўлмаган тенгламалардан ташкил топган икки номаълумли икки тенгламалалар системаси, янги номаълумларни киритиш билан симметрик тенгламага айлантирилади.

4-Мисол. Агар

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 5 \\ xy^2 - x^2 y = 1 \end{cases}$$

системада номаълум "y" ни янги номаълум $z = -y$ билан алмаштирилса биз қуйидаги

$$\begin{cases} x^3 + z^3 = 5 \\ xz^2 + x^2 z = 1 \end{cases}$$

чап қисми x, z га симметрик боғлиқ бўлган системага келамиз. Айрим пайтларда бундай алмаштириш мураккаб кўринишда бўлади.

5-Мисол.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 81x^4 + 16y^4 = 68 \end{cases}$$

Ечиш: Системада $3x = u$, "z" $-2y = v$ алмаштириш бажарилгандан сўнг, биз симметрик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ u^4 + v^4 = 68 \end{cases}$$

Шундай қилиб, шундай ҳоллар ҳам бўлиб турадики ёрдамчи номаълумларни киритилиши билан бир номаълумли тенгламадан, икки номаълумли симметрик тенгламалар системасига келиш мумкин. Бунга мисол келтирамиз.

Иррационал тенгламани ечинг.

$$\sqrt[4]{97 - x} + \sqrt[4]{x} = 5,\ \sqrt[4]{x} = y,\ \sqrt[4]{97 - x} = z$$

деб олайлик.

Бунда кўриб чиқиладиган тенгламамиз $y + z = 5$ кўринишни олади, ундан ташқари

$$y^4 + z^4 = x + (97 - x) = 97$$

тенгламага эга бўламиз. Шундай қилиб, биз қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} y + z = 5 \\ y^4 + z^4 = 97 \end{cases}$$

Бунда $\sigma_1 = y + z$, $\sigma_2 = yz$ номаълумларни киритиш қуйидаги системага олиб келади:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 97 \end{cases}$$

Бу системадан эса σ_2 учун қуйидаги, квадрат тенгламага келамиз:

$$\sigma_2^2 - 50\sigma_2 + 264 = 0$$

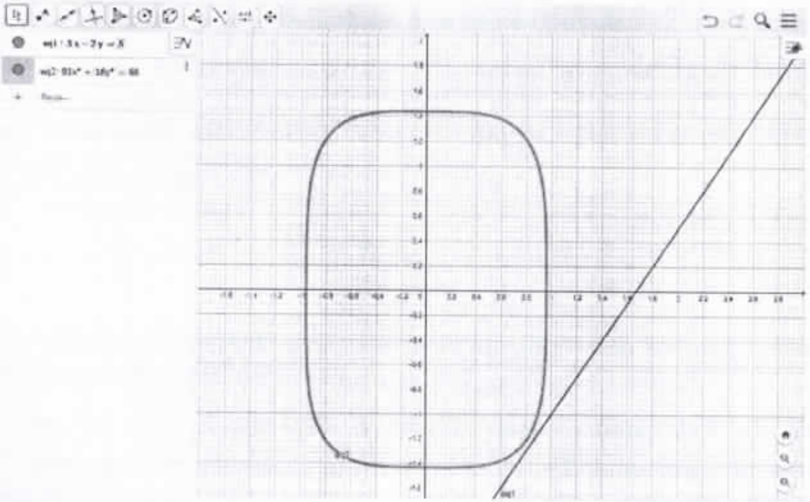
бу квадрат тенгламани ечган ҳолда $\sigma_2 = 6$ ёки $\sigma_2 = 44$ га эга бўламиз, шундай қилиб бу масала иккита тенгламалар системасини ечишга олиб келади:

$$\begin{cases} y + z = 5 \\ yz = 6 \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} y + z = 5 \\ yz = 44 \end{cases}$$

Биринчи системадан эса

$$\begin{cases} y_1 = 2 \\ z_1 = 3 \end{cases} \begin{cases} y_2 = 3 \\ z_2 = 2 \end{cases}$$

ечимларга эга бўламиз. $y = \sqrt[4]{x}$ бўлгани учун, бошланғич номаълум "x" учун иккита ечимга эга бўламиз $x_1 = 16$ ва $x_2 = 81$. Иккинчи системадан эса "y" ва "z" учун ечим ҳосил қиламиз. Бу эса ўз навбатида "x" учун ҳам иккита ечим беради. (бу ечимлар комплекс сонлардир, иррационал тенгламалар учун эса номаълумларнинг ҳақиқий қийматлари олинади).



4.4-§. Каср – рационал тенглама ва тенгсизликлар системаси. Тенглама ва тенгсизликлар системасини турли усулларда ечиш.

Ҳар қандай икки ўзгарувчили $f(x,y)$ ва $g(x,y)$ функция учун тузилган қўйидаги

$$f(x,y) = g(x,y) \qquad (1)$$

кўринишидаги ифода *икки номаълумли* тенглама дейилади

Агар $x = x_0, y = y_0$ сонлар учун $f(x,y)$ va $g(x,y)$ функциялар аниқланган бўлиб, $f(x,y)$ ва $g(x_0,y_0)$ қийматлар ўзаро тенг бўлса, у ҳолда тартибланган (x_0: y_0) жуфтлик шу *тенгламанинг ечими* (илдизи) деб айтилади.

Координатали (1) тенгламани қаноатлантирадиган координаталар текислигидаги барча $M(x;y)$ нуқталар тўплами, шу тенгаламанинг *графиги* деб айтилади. Масалан, $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R(R > 0)$ тенгламани қаноатлантирувчи барча $(x_0;y_0)$ нуқталар тўплами координаталар текислигида маркази $O(a;b)$ да бўлган R радиусли айланадир; $ax^2 + bx + c = y(a \neq 0)$ тенгламани графиги эса бирор параболадир.

Агар (1) тенгламанинг ҳар бир ечими бирор $f_1(x,y) = g_1(x,y)$ тенгламанинг ҳам ечими бўлса, у ҳолда бу тенгламанинг (1) *натижаси* деб аталади ва бундай ёзилади:

$$f(x,y) = g(x,y) \Rightarrow f_1(x,y) = g_1(x,y). \qquad (2)$$

Бунда (1) тенгламанинг графиги $f_1(x,y) = g_1(x,y)$ тенглама графигининг бир қисми бўлади (хусусан, улар устма-уст тушиши ҳам мумкин). Агар бу графиклар устма-уст тушса, бу тенгаламалар ўзаро *тенг кучли* дейилади ва қисқача бундай ёзилади:

$$f(x,y) = g(x,y) \Leftrightarrow f_1(x,y) = g_1(x,y) \qquad (3)$$

Қўйидаги тенгликларни исботлаш осон:

1) $f(x,y) = g(x,y) \Leftrightarrow f(x,y) - g(x,y) = 0;$

2) $f(x,y) = g(x,y) \Leftrightarrow a \cdot f(x,y) = a \cdot g(x,y), a \neq 0, a \in R;$

3) $\dfrac{f(x,y)}{\varphi(x,y)} = g(x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y) = g(x,y)\cdot\varphi(x,y), \\ \varphi(x,y) \neq 0; \end{cases}$

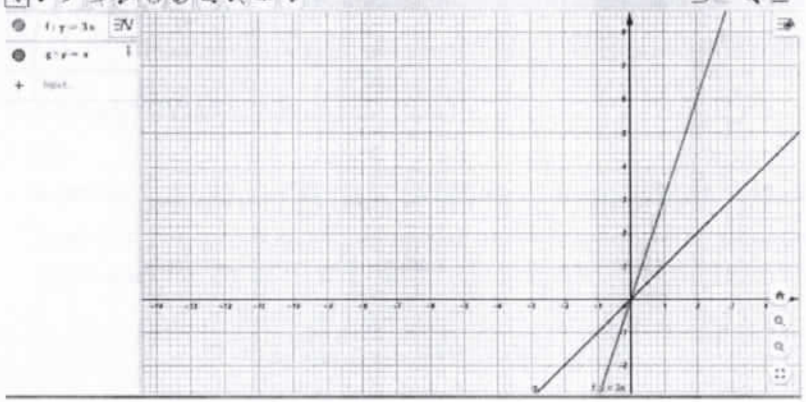
4) $f(x,y)g(x,y) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0. \end{array}\right.$

Хусусан, f ва g функциялар бир хил аниқланиш соҳасига эга бўлса, бу тасдиқ тескарисига ҳам ўринлидир.

1- мисол. $y^2 - 2xy - 3x^2 = 0$ нинг графигини чизинг.

Ечиш: Бу тенгламани юқоридаги тасдиқларга асосан унга тенг кучли тенгламалар системасига олиб келамиз;

$$y^2 - 2xy - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 = 4x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y - x = 2x; \\ y - x = -2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3x; \\ y = -x. \end{array}\right.$$



Демак, ушбу шаклдаги графикка тегишли барча нуқталарнинг координаталари тенгламанинг ечими бўлади.

Бир, икки номаълумли тенглама сингари n та номаълумли ($n \geq 3$) тенглама ҳам, бундан кейин мисолларни кўриб ўтиши мумкин.

$f(x_1, x_2, ..., x_n) = g(x_1, x_2, ..., x_n)$ кўринишдаги n номаълумли тенгламанинг ҳар икки томони $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ каби тартибланган сонлар бирикмасида маънога эга бўлиб,

$$f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) = g(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \qquad (4)$$

Сонли тенглик ўринли бўлса, $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ шу *тенгламанинг ечими* дейилади.

Бундай тенгламаларнинг чекли сондаги тўплами *тенгламалар системаси* дейилади. Одатда, системадаги тенгламалар сони билан бир хил бўлади. акс ҳолда, система *аниқмас* дейилади ва улар қўшимча шартлар асосида ечилади.

n та номаълумли m та тенгламалар системаси

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) &= g_1(x_1, x_2, ..., x_n), \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) &= g_2(x_1, x_2, ..., x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x_1, x_2, ..., x_n) &= g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned} \qquad (5)$$

кўринишда бўлиб, бунда $m = n, m < n, m > n$ ҳоллар бўлиши мумкин. *Системанинг ечими* деб, ундаги барча тенгламаларни қаноатлантирувчи сонларнинг тартибланган бирикмаси $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ га айтилади.

Қуйидагидек шакл алмаштиришлар билан (5) тенгламалар системаси ўзига тенг кучли системага қўяди: (1) Системадаги бирор тенглама ўзига тенг кучли тенгламага алмаштирлиб, қолганлари ўзгаришсиз қолдирилса; (2) $f = g$ ва $\varphi = \psi$ системанинг икки тенгламаси бўлиб, $f = g$ тенглама билан алмаштирилиб қолганлари ўзгаришсиз қолдирилса; (3) системада бирор тенглама $x_k = g(x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n)$ шаклда бўлиб, қолганларида x_k ўрнига $g(x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n)$ қўйиб чиқилса; (4) системанинг бирор тенгламаси $f \cdot g = 0$ шаклда бўлса, бу система шундай икки системага ажраладики, уларнинг бирида $f \cdot g = 0$ тенглама $f = 0$ билан, иккинчисида эса $g = 0$ билан алмаштирди.

Агар f ва g лар бир хил тўпламда аниқланган функция бўлса, у ҳолда ҳосил қилиган ҳар бир системанинг ҳам ечими бўлади. Бу вақтда берилган система ҳосил қилинган системалар бирлашмасига *тенг кучли* деб аталади.

Натижа. Агар $f \circ \psi = g$ ва $\psi = a(a \in P)$ берилган (5) системанинг бирор икки тенгламаси бўлса, у ҳолда $f \circ \psi = g$ тенгламага $f \circ a = g$ аламштирилиб, қолганлари ўзгаришсиз қолдирилса, система ўзига тенг кучли системага ўтади. (Бу ерда "$\circ$" белги асосий арифметик амаллардан бирини билдиради).

Алгебраик система. Агар (5) системадаги тенгламада ҳар бир f_1 ва g_1 функциялар ($u = 1, 2, 3, \ldots, n$) ҳар бир $x_k (k = 1, 2, 3, \ldots, n)$ ўзгарувчига нисбатан кўпҳад бўлса, система *алгебраик система* деб аталади.

Бу пунктда фақат алгебраик тенгламалар системаси берилиб, қолган кўринишлари кейинги пунктларга қолади.

2- мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x^2 + y^2 = 25 - 2xy. \end{cases} \qquad (6)$$

Ечиш: Системанинг иккчи тенгламасига юқоридаги (2), (4) ва натижа тасдиқлари қўлланса, бундай ёзилади:

$$(6) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ (x+y)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 35, \\ (x+y-5)(x+y+5) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x + y = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = -7, \\ x + y = -5 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+y)^2 = 7 + 3xy, \\ x + y = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+y)^2 = -7 + 3xy, \\ x + y = -5 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3xy = 18, \\ x + y = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} 3xy = 32, \\ x + y = -5 \end{cases} \end{array} \right.$$

Охирги системанинг биринчисидан (3, 2) ва (2, 3) ечим топилади, иккинчиси эса ечимга эга эмас.

Жавоб: $\{(3,2);(2;3\}$.

3- мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{10}{3}xy, \\ x + y = \dfrac{4}{3}xy. \end{cases} \qquad (7)$$

Ечиш: Бу системанинг биринчи тенгламасининг $f(x, y) = xy \neq 0$ деб унга бўлиб юборсак, $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{10}{3}$ ҳосил бўлади. Бу ердан $t = \dfrac{x}{y}$ каби белгилаш билан t га нисбатан квадрат тенглама юзага келиб, $t_1 = 3$ ва $t_2 = \dfrac{1}{3}$ ёрдамчи илдизлар топилади. Шундай қилиб, $f(x, y) \neq 0$ шартни бажарувчи соҳада (7) система қуйидагидек икки системага ажратиб ечилади ва жавоб топилади:

$$(7) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x}{y} = 3. \\ x + y = \dfrac{4}{3}xy \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{y}{x} = 3, \\ x + y = \dfrac{4}{3}xy \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3y, \\ 4y = 4y^2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 3x, \\ 4x = 4x^2 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y_2 = 3, \\ x_2 = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ҳудди шунингдек, $\varphi(x, y) = 0$ бажарилса, берилган системадан $x_0 = 0, y_0 = 0$ ҳам ечими эканлигини кўриш қийин эмас.

Жавоб: $\{(0;0),(3;1),(1;3)\}$.

Баъзи абутурентлар шу системани кўрсатилган усулда ечиб, $\varphi(x, y) = 0$ бўлган ҳолни назардан четда қолдириб, системанинг бир ечимини йўқотиб қўядилар.

(7) системанинг биринчи тенгламаси $P(x, y) = Q(x, y)$ шаклдаги икки кўпҳаднинг тенглаштирилишидан тузилган бўлиб, унда $P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 P(x, y), Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 Q(x, y)$ хосса бажарилгани учун $\lambda = \dfrac{1}{y}$ деб олиниб, бу тенгламалар $P\left(\dfrac{x}{y}, 1\right) = Q\left(\dfrac{x}{y}, 1\right)$

кўринишга келтиришда фойдаланилди ва $t=\frac{x}{y}$ деб олинса кавадрат тенглама ҳосил бўлди. Умуман олганда,

$$\begin{cases} P(x,y)=0, \\ Q(x,y)=0 \end{cases} \tag{8}$$

каби кўринишдаги алгебраик системанинг камида биттаси $P(\lambda x,\lambda y) = \lambda^n P(x, y)$ $(n>2)$ шаклда бўлса, *n- даражали бир жинсли алгебраик тенглама* дейилади. Бундай тенгламанинг ҳар икки томони x^n га бўлиб юборилса, доимо $t=\frac{x}{y}$ га нисбатан *n*-даражали кўпҳад: $P\left(\frac{x}{y},1\right)=P_n(t)=0$ ҳосил бўлади. Бу кўпҳад ҳаммаси бўлиб k та $m_1, m_2, ..., m_k$ ҳақиқий илдизга эга бўлса, (8) система k та ушбу системалар бирлашмасига тенг кучли бўлади:

$$\begin{cases} P(x,y)=0, \\ Q(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=t_1x, \\ Q(x,y)=0; \end{cases} \\ \begin{cases} y=t_2x, \\ Q(x,y)=0; \end{cases} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \begin{cases} y=t_kx, \\ Q(x,y)=0. \end{cases} \end{array}\right. \tag{9}$$

Бундай система баъзида (7) система сингари (0,0) ечимга эга бўлиши мумкин. Бу эса фақат текшириб аниқланади.
Баъзида тенгламалар алгебраик қўшиш усули билан бир жинсли ҳолга келтирилади.

4- мисол. Тенгламани ечинг:

$$\begin{cases} x^2+xy-y^2=21, \\ y^2-2xy+15=0. \end{cases} \tag{10}$$

Ечиш: Биринчи тенглама 5 га, иккинчиси 7 га кўпайтириб, бир-бирига қўшсак, $5x^2-19xy+12y^2=0$ ҳосил бўлади. Бундай $x=3y$ ва $x=\frac{4}{5}y$ экани топилиб,

$$(10) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3y, \\ y^2-2xy+15=0; \end{cases} \\ \begin{cases} 5x=4y, \\ y^2-2xy+15=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_{1,2}=\pm3\sqrt{3}, \\ y_{1,2}=\pm\sqrt{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} x_{3,4}=\pm4, \\ y_{3,4}=\pm5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Жавоб: $\left\{(4;5),(-4;-5),(3\sqrt{3};\sqrt{3}),(-3\sqrt{3};-\sqrt{3})\right\}$.

Симметрик алгебраик система.

Агар $P(x,y)=P(y,x)$ *ва* $Q(x,y)=Q(y,x)$ бажарилса, (8) система *симметрик система* деб аталади, $x+y$ ва xy лар энг *содда симметрик* ифодалар бўлиб, симметрик алгебраик системалар эквивалент алмаштиришлар натижасида шу содда симметрик ифодаларга келтирилади ва $u=x+v, v=xy$ каби белгилашлар билан қулай ечилади. Системада учрайдиган баъзи симметрик ифодаларни u ва v орқали ёзайлик:

$$\begin{aligned} &x^2+y^2=u^2-2v; \\ &x^3+y^3=u^3-3uv; \\ &x^4+y^4=u^4-4u^2v+2v^2; \\ &x^5+y^5=u^5-5u^3v+5uv^2, \\ &x^6+y^6=u^6-6u^4v+9u^2u^2-2v^3. \end{aligned} \tag{11}$$

Умуман олганда, ушбу формула ўринли (исботланг):

$$\frac{x^k+y^k}{k}=\frac{u^k}{k}-\frac{(k-2)}{1(k-2)}u^{k-2}v+\frac{(k-3)}{2(k-4)}u^{k-4}v^2-\frac{(k-4)}{3(k-6)}u^{k-6}v^3+\dots$$

Бошқача қилиб айтганда, янги номаълумлар σ_1 ва σ_2 га боғлиқ бўлган системанинг ечилиши дастлабки системанинг ечилишидан осон. σ_1 ва σ_2 катталикларнинг қийматлари топилгандан кейин дастлабки номаълум x, y ларнинг қийматларини топиш керак.

Буни биз мактаб алгебра курсидан маълум бўлган қуйидаги теорема ёрдами билан амалга оширишимиз мумкин. Биз уни аниқроқ формада эслаб ўтамиз.

Теорема 4.3 Агар σ_1 ва σ_2 лар иккита ихтиёрий сонлар бўлса, у ҳолда квадрат тенглама

$$z^2-\sigma_1 z+\sigma_2=0 \qquad (12)$$

ва тенгламалар системаси

$$\begin{cases} x+y=\sigma_1 \\ xy=\sigma_2 \end{cases} \qquad (13)$$

лар бир- бирига ўзаро қуйидаги кўринишда боғлиқ: агар z_1 ва z_2 лар квадрат тенглама (12) нинг илдизлари бўлса, у ҳолда (13) система иккита ечимга эга

$$\begin{cases} x_1=z_1 \\ y_1=z_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=z_2 \\ y_2=z_1 \end{cases}$$

ва бошқа ечимга эга эмас. Тескариси ҳам ўринли, яъни агар $x=a$, $y=b$ лар (13) системанинг ечими бўлса, у ҳолда a ва b сонлари (12) квадрат тенгламани илдизлари бўлса, у ҳолда Виет формуласига асосан,

$$z_1+z_2=\sigma_1$$
$$z_1z_2=\sigma_2$$

яъни

$$\begin{cases} x_1=z_1 \\ x_2=z_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1=z_2 \\ x_2=z_1 \end{cases}$$

Сонлари (13) системанинг ечими ҳисобланади. (13) системанинг бошқа ечими йўқлиги биз ҳозир исбот қиладиган теореманинг охирги тасдиғидан келиб чиқади. Шундай қилиб, $x=a$, $y=b$ системанинг ечими бўлсин, яъни

$$\begin{matrix} a+b=\sigma_1 \\ ab=\sigma_2 \end{matrix},$$

бунда биз

$$z^2-\sigma_1 z+\sigma_2=z^2-(a+b)z+ab=(z-a)(z-b)$$

га эга бўламиз. Бу эса (12) квадрат тенгламанинг илдизлари эканлигини билдиради. Теорема исботланди.

5- мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x^3+y^3=35, \\ x+y=5. \end{cases}$$

Ечиш: $x^3+y^3=\ (x+y)^2-\ 3xy(x+y)$ эканидан

$$\begin{cases} u^3-3uv=35, \\ u=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=6 \\ u=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=6, \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=2, \\ y_1=3; \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=3 \\ y_2=2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Жавоб: $\{(2;3),(3;2)\}$.

6- мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x^3+y^3=8, \\ x^2+y^2=4. \end{cases} \qquad (14)$$

Ечиш: $x^2+y^2=\ (x+y)^2-\ 2xy$ бўлгани учун:

$$\begin{cases} u^2-3uv=8, \\ u^2-2v=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{1}{2}(u^2-4), \\ u^3-12u+16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v=u^2-4, \\ (u-2)(u^2+2u-8)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2v=u^2-4. \\ (u-2)^2(u+4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} u_1=2, \\ v_1=0 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} u_2=4, \\ v_2=6. \end{cases}\right.$$

Бу системаларнинг фақат биринчиси ечимга эгадир: (2;0) ва (0;2).

Жавоб. $\{(2;0),(0;2)\}$.

Системани ёрдамчи номаълум киритиш усули билан ечиш.

Баъзида тенгламалар системаси эквивалент алмаштириш натижасида симметрик алгебраик система келтирилади. Масалан, қуйидаги система $z=-y$ деб ёрдамчи номаълум киритиб симметрик системага келтирилиб ечилади: ($u\ =\ x+z, v=\ xz$):

7- мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 5, \\ xy^2 - x^2y = 1. \end{cases} \qquad (15)$$

Ечиш:

$$(15) \Rightarrow \begin{cases} x^3 + z^3 = 5, \\ xz^2 + x^2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+z)(x^2 - xz + z^2) = 5, \\ xz(x+z) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(u^2 - 3v) = 5, \\ uv = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2, \\ v = 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 2, \\ xz = 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = 1 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ z_{1,2} = \mp\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = 1 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ y_{1,2} = -1 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Жавоб: $\left\{\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$

Қуйидаги системада $\dfrac{x}{a} = z, \dfrac{y}{b} = t$ ёрдамчи номаълумлар киритилса, симметрик алгебраик система ҳосил бўлади:

7- мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1, \\ \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = 4. \end{cases} \qquad (16)$$

Ечиш:

$$(16) \Leftrightarrow \begin{cases} z + t = 1, \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{t} = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z + t = 1, \\ z + t = 4zt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1, \\ u = 4v \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 1, \\ v = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{1}{2}, \\ t = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{2}, \\ y = \dfrac{b}{2}. \end{cases}$$

Жавоб: $\left\{\left(\dfrac{a}{2}; \dfrac{b}{2}\right)\right\}.$

8- мисол: тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Янги номаълумлар киритамиз.

$$\sigma = x + y\ ; \sigma_2 = x\ y$$

Келтирилган жадвал ёрдамида қуйидагиларни тузамиз.

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 \\ x + y = \sigma_1 \end{cases}$$

ва янги номаълумлар учун қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

$$\begin{cases} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 35 \\ \sigma_1 = 5 \end{cases}$$

Бу тенгламалар системасини ечиб, σ_2=6 ни топиб оламиз. Шундай қилиб $\sigma_1 = 5,\ \sigma_2 = 6,$ яъни бошланғич номаълум xy лар учун қуйидаги тенгламалар системасини келтириб чиқарамиз.

$$\begin{cases} x + y = 35 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Бу тенгламалар системаси жуда осон ечилади ва биз дастлабки системанинг қуйидаги ечимларини оламиз.

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 2 \end{cases}$$

9-мисол. Тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = 33 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Бу тенгламани ҳам 1-мисолга ўхшаш ечамиз. $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = x\ y$ деб олинган ҳолда кўрсатилган системасини қуйидаги кўринишдаги системага келтирамиз.

$$\begin{cases} \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 = 33 \\ \sigma_1 = 3 \end{cases}$$

Бу ердан σ_2 учун квадрат тенглама ҳосил қиламиз.

$$15\sigma_2^2-135\sigma_2+210=0$$

ёки
$$\sigma_2^2-9\sigma_2+14=0$$

Бу тенгламадан σ_2 учун иккита қиймат топамиз. $\sigma_2=2$ ва $\sigma_2=7$ Худди шундай иккита тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

$$\begin{cases}x+y=3\\ xy=2\end{cases}\qquad \begin{cases}x+y=3\\ xy=7\end{cases}$$

Бу системаларни ечган ҳолда, дастлабки системанинг 4та ечимини топамиз:

$$\begin{cases}x_1=2\\ y_1=1\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=1\\ y_2=2\end{cases}\qquad \begin{cases}x_3=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{19}}{2}i,\\ y_3=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{19}}{2}i\end{cases}$$

$$\begin{cases}y_4=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{19}}{2}i\\ x_4=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{19}}{2}i\end{cases},$$

Чизиқли тенгламалар системаси.

Ушбу

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}\qquad (17)$$

система икки номаълум икки чизиқли тенгламалар системасидир. Унинг ҳар бир тенгламаси ечимлари координаталар текислигида бирор тўғри чизиқ графигини аниқлайди. Улар ўзаро бир нуқтада кесишиш, устма-уст тушиш ёки кесишмаслиги мумкин. Агар тўғри чизиқлар бир нуқтада кесиши, бу кесишиш нуқтасининг координаталари (17) системанинг ечими ҳисобланиб, у бундай топилади:

$$x_0=\frac{c_1b_1-c_2b_2}{a_1b_2-a_2b_1},\; y_0=\frac{c_2a_1-c_1a_2}{a_1b_2-a_2b_1}.\qquad (18)$$

Система ягона ечимга эга бўлса, у *аниқ система*, чексиз кўп ечимга эга бўлса, *ноаниқ система* дейилади. Бу иккинчи ҳолда, (17) системанинг бир тенгламаси иккинчисининг натижаси бўлиб, чексиз ечимнинг ҳар бири (масалан, $b_2\neq 0$ бўлганда)

$$\begin{cases}x=c, c\in R,\\ y=-\dfrac{a_2}{b_2}c+\dfrac{c_2}{b_2}\end{cases}\qquad (19)$$

каби ифодаланиб топилади. Умуман, ечимга эга чизиқли тенгламалар системаси *биргаликдаги система*, акс ҳолда *биргаликда бўлмаган система* деб айтилади. Система ягона ечимга эга бўлганда $a_1b_2\neq a_2b_1$ бўлишининг, чексиз кўп ечимга эга бўлганда $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ бўлишининг, биргаликда бўлмаганда $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$ бўлишнинг исботи талабага машқ сифатида қолади. (Бу шартлар ҳам зарур, ҳам етарлидир.)

10- мисол. a ва b нинг қандай қийматида ушбу системага ягона (чексиз) ечимга эга:

$$\begin{cases}x+ay=b,\\ ax+y=2a\end{cases}\qquad (20)$$

Ечиш: (18) га кўра $1-a^2\neq 0$деб, бу системанинг ягона ечими

$$x_0=\frac{b-2a^2}{1-a^2},\; y_0=\frac{2a-ab}{1-a^2}$$

каби аниқланади, $a=\pm 1$ бўлганда (20) система қўйидаги кўринишда бўлар эди:

$$\begin{cases}x+y=b,\\ x+y=2\end{cases}\text{ёки}\begin{cases}x-y=b,\\ -x+y=-2.\end{cases}$$

Бу системалар $b=2$ *бўлганда (19) га асосан, мос равишда* (c; $2-c$) ёки $(c;c-2), c\in R$ каби чексиз кўп ечимга эга.

Жавоб: 1)$|a|\neq 1\Rightarrow$ система ягона ечимга эга; 2)$|a|=1$, $b=2$ да система чексиз кўп ечимга эга.

Баъзи алгебраик тенгламаларни ёрдамчи номаълум киритиш билан системага келтириб ечинг.

11- мисол. Тенгламани ечинг:

$$\left(\frac{x+a}{2}\right)^6+\left(\frac{x-a}{2}\right)^6=a^6.$$

Ечиш: $y=\frac{1}{2}(x+a), z=-\frac{1}{2}(x-a)$ деб, бу тенгламанинг ушбу

$$\begin{cases} y+z=a, \\ y^6+z^6=a^6 \end{cases}$$

симметрик системаси ҳосил қилинади. Бунда $y+z=u$, $yz=v$ белгилаш киритсак:

$y^6+z^6=u^6-6u^4v+9u^2v^2-2v^3$ эканидан v га нисбатан ушбу тенглама ҳосил бўлади:

$$a^6=a^6-6a^4v-9a^2v^2-2v^3 \Rightarrow v_1=0, v_{2,3}=a^2(2,25\pm\sqrt{2,0625}).$$

$a)v_1=0 \Rightarrow yz=0 \Rightarrow x^2-a^2=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\pm a;$

$б)v_{2,3}=yz$ *учун ушбу*

$$\begin{cases} y+z=a, \\ yz=a^2\dfrac{9+\sqrt{33}}{4} \end{cases} \quad ва \quad \begin{cases} y+z=a, \\ yz=a^2\dfrac{9-\sqrt{33}}{4} \end{cases}$$

системалар ечимга эга эмаслигини текшириш ўқувчига қолади.

Жавоб: $\{\pm a\}$.

4.5-§. Кўрсаткичли ва логарифмик тенглама ва тенгсизликлар системаси.

Тенгламалар системаси: а) ўрнига қўйиш усули; б) алгебраик системага келтириб ечиш усули; в) белгилаш усули ҳамда; г) системада қатнашмаётган функция хоссаларига биноан бирор сунъий усул танлаш билан ечилади. Ечишда ундаги тенгламаларнинг аниқланиш соҳасига эътибор бериш лозим.

12- мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} \log_{2y}(x-2)-\log_2 4y^2=1, \\ \log_4(x-2)-\log_4 2y=1. \end{cases} \qquad (21)$$

Ечиш: Системанинг иккинчи тенгламасидан $\log_4\frac{x-2}{2y}=1$ бўлиб, ундан $x-2=8y$ келиб чиқади. Бундан $x-2>0, y>0$ *ва* $2y\neq1$ эканини назарда тутсак.

$$\log_{2y}8y-\log_2 4y^2=1 \Leftrightarrow 1+\log_{2y}4-2\log_2 2y=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 2y=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 2y=1, \\ \log_2 2y=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1=1, \\ y_2=\dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$$

Бу ерда $x_1-2=8y_1 \Rightarrow x_1=10; x_2-2=8y_2 \Rightarrow x_2=4$. Аниқланган илдизлар системаси қаноатлантиришини текшириш осон.

Жавоб: $\left\{(0;1);\left(4;\frac{1}{4}\right)\right\}$.

13- мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x^{x-y}=y^{x+y}, \\ \sqrt{x}y=1. \end{cases} \qquad (22)$$

Ечиш: Иккинчи тенгламадан $y=x^{-0,5}(x>0)$ ни ҳам қўйсак.

$$(22) \Rightarrow x^{x-x^{-0,5}}=x^{-0,5x-0,5x^{-0,5}}$$

бўлади. Унинг икки томонини ўнг томонидаги ифодага бўлсак,

$$x^{1,5x-0,5x^{-0,5}}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ 1,5x-0,5x^{-0,5}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1, \\ x_2=9^{-1,3}. \end{array}\right.$$

Бу ердан $y_1=1, y_2=\sqrt[3]{3}$ ҳам аниқланади.

Жавоб: $\left\{(1;1);\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}};\sqrt{3}\right)\right\}$.

14- мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases}\log_2 2x-\log_4(4-2x)=\log_4 y,\\ \log_3 2x-\log_3(2x+y)=\log_3 y.\end{cases} \tag{23}$$

Ечиш: Бу система $x>0, y>0; 4-2x>0; 2x+y>0$ шартларда аниқланган бўлиб, системанинг барча илдизлари шу тенгсизликларни қаноатлантририши керак. Ушбу

$$\begin{cases}4x^2=y(4-2x),\\ (2x+y)y=2x\end{cases} \tag{24}$$

Система (24) ни потенциоллаш билан ҳосил қилинган. Бу системанинг ўзи юқоридаги шартлар билан ечилмаса, унда чет илдизлар пайдо бўлиши мумкин, чунки потенсирлаганда доима системанинг (тенгламаникига ўхшаб) аниқланиш соҳаси кенгаяди. Масалан, $(0;0)$ (4)ечими, лекин унда берилган (24) система аниқланмаган. Шарт бўйича $x>0,\ y>0$ бўлгани учун

$$(24)\Leftrightarrow\begin{cases}2x(2x+y)=4y,\\ y(2x+y)=2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=y^3,\\ y(2x+y)=2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y,\\ 3y^2=2y\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y,\\ y=\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=\dfrac{2}{3},\\ y_0=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

Жавоб: $\left\{\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)\right\}$.

15- мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases}\log_3(x^2y)=6\log_3 x\log_3 y,\\ 2\log_3\dfrac{x^2}{y}=\log_y x.\end{cases} \tag{25}$$

Ечиш: Системани $x>0,\ y>0,\ y\neq 1$ шартлар асосида

$$(25)\Leftrightarrow\begin{cases}2\log_3 x+\log_3 y=6\log_3 x\log_3 y,\\ 2(2\log_3 x-\log_3 y)=\dfrac{\log_3 x}{\log_3 y}\end{cases} \tag{26}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда $z=\log_3 x$, $m=\log_3 y$ каби белгилаш киритсак.

$$(26)\Leftrightarrow\begin{cases}2z+t=6zt,\\ 2(2z-t)=\dfrac{z}{t}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(4z^2-t^2)=6z^2,\\ 2(2z-t)=\dfrac{z}{t}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z^2=t^2,\\ 2(2z-t)=\dfrac{z}{t}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}z=t,\\ 4z-2t=\dfrac{z}{t}\end{cases}\\ \begin{cases}z=-t,\\ 4z-2t=\dfrac{z}{t}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}z=t,\\ 2t=1\end{cases}\\ \begin{cases}z=-t,\\ 2t=-1.\end{cases}\end{array}\right.$$

ҳосил бўлади. Демак, $\log_2 x_1=1$, $\log_3 y_1=\frac{1}{2}$ дан $x_1=3$, $y_1=\sqrt{3}$ ва $\log_3 x_2=\frac{1}{2}$, $\log_3 y_2=-\frac{1}{2}$ дан $x_2=\sqrt{3}$, $y_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$ лар аниқланади.

Жавоб: $\left\{\left(3;\sqrt{3}\right);\left(\sqrt{3};\frac{1}{3}\right)\right\}$.

16- мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases}\lg\sqrt{(x+y)^2}=1,\\ \lg^2\dfrac{y}{x}=4.\end{cases} \tag{27}$$

Ечиш: Бу система $x+y\neq 0,\ \frac{y}{x}>0$ шартда қуйидагига эквивалент. Уни ёзамиз:

$$(27) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x+y|=10, \\ \lg\dfrac{x}{y}=2, \end{cases} \\ \begin{cases} |x+y|=10, \\ \lg\dfrac{y}{x}=-2, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x+y|=10, \\ y=100x \end{cases} \\ \begin{cases} |x+y|=10, \\ y=0,01x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (A)\begin{cases} 101|x|=10, \\ y=100x \end{cases} \\ (B)\begin{cases} 1,01|x|=10, \\ y=0,01x. \end{cases} \end{array}\right.$$

(A) системанинг ечимлари $\left(\frac{10}{101};-\frac{1000}{101}\right),\left(-\frac{10}{101};-\frac{1000}{101}\right)$, (B) ники эса $\left(\frac{1000}{101};\frac{10}{101}\right),\left(-\frac{1000}{101};-\frac{10}{101}\right)$ дир.

Жавоб:

$$\left\{\left(\frac{10}{101};\frac{1000}{101}\right),\left(-\frac{10}{101};-\frac{1000}{101}\right),\left(-\frac{1000}{101};-\frac{10}{101}\right),\left(\frac{1000}{101};\frac{10}{101}\right)\right\}.$$

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МАСАЛАЛАР

IV-БОБ КЎПҲАДЛАР, ТЕНГЛАМА ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР СИСТЕМАСИНИНГ ЕЧИМЛАРИ. КЕЛТИРИЛАДИГАН КЎПҲАДЛАР ВА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАР.

4-§.

1. Системани ечинг:

$а)\begin{cases} x+y=5, \\ x^2-xy+y^2=7; \end{cases}$ $б)\begin{cases} x+y=7, \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12}; \end{cases}$

$в)\begin{cases} x+y=2, \\ x^2+y^2=2; \end{cases}$ $г)\begin{cases} x+y=5, \\ x^3+y^3=65; \end{cases}$

$д)\begin{cases} x+y+x^2+y^2=23, \\ 4(x+y)=3xy; \end{cases}$ $е)\begin{cases} x^2+y^2=32-x-y, \\ 12x+12y=7xy; \end{cases}$

$ж)\begin{cases} xy=15, \\ x+y+x^2+y^2 \end{cases}$ $з)\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x^2+y^2+xy=13; \end{cases}$

$и)\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=13; \end{cases}$ $к)\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=18, \\ x+y=12; \end{cases}$

$л)\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ x^2y+y^2x=-2; \end{cases}$ $м)\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ x^3y^3=-8; \end{cases}$ $н)\begin{cases} (x^2+y^2)xy=78, \\ x^4+y^4=97; \end{cases}$

$о)\begin{cases} 15xy+5(x+y)=-175, \\ 5(x+y)+2xy=-19; \end{cases}$ $п)\begin{cases} x^2+y^2-xy=13, \\ x+y-\sqrt{xy}=3. \end{cases}$

2. **Системани ечинг:**

$$а)\begin{cases} x+y=a, \\ x^3+y^3=b(x^2+y^2); \end{cases} \quad б)\begin{cases} x^2y+y^2x=30, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}; \end{cases}$$

$$в)\begin{cases} x^4-x^2y^2+y^4=1153, \\ x^2-xy+y^2=33; \end{cases} \quad г)\begin{cases} 7(x^5+y^5)=31(x^3+y^3), \\ x^2+xy+y^2=3; \end{cases}$$

$$д)\begin{cases} xy(x+y)=30, \\ x^3+y^3=35; \end{cases} \quad е)\begin{cases} (x^3+y^3)(x^2+y^2)=2b^5, \\ x+y=b; \end{cases}$$

$$ж)\begin{cases} x+y=a, \\ x^4+y^4=14x^2y^2; \end{cases} \quad з)\begin{cases} x^3+y^3=(x+y)^2 \\ x^2+y^2=x+y+a; \end{cases} \quad и)\begin{cases} x+y=4, \\ x^4+y^4=82. \end{cases}$$

3. **Системани ёрдамида ўзгарувчи киритиб ёзинг:**

$$а)\begin{cases} x-y=2, \\ x^3-y^3=8; \end{cases} \quad б)\begin{cases} x^2+y=5, \\ x^6+y^3=65; \end{cases}$$

$$в)\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=\dfrac{5}{6}\sqrt{xy}, \\ x+y=13; \end{cases} \quad г)\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{61}{\sqrt{xy}}+1, \\ \sqrt[4]{x^3y}+\sqrt[4]{xy^3}=78; \end{cases}$$

$$д)\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=2\sqrt{xy}, \\ x+y=20; \end{cases} \quad е)\begin{cases} x+\sqrt{xy}+y=a, \\ x^3+2xy\sqrt{xy}+y^3=a^3; \end{cases}$$

$$ж)\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=7, \\ x^2+y^2+xy=133; \end{cases} \quad з)\begin{cases} x+y=72, \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6; \end{cases}$$

$$и)\begin{cases} x+xy+y=12, \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y}=0; \end{cases} \quad к)\begin{cases} x-y=1, \\ x^3-y^3=7; \end{cases}$$

$$л)\begin{cases} x^5-y^5=3093, \\ x-y=3; \end{cases} \quad м)\begin{cases} \sqrt[4]{y^3-1}+\sqrt{x}=3, \\ x^2+y^2=82. \end{cases}$$

4. *а* нинг қандай қийматларида система чексиз кўп ечимга эга:

$$а)\begin{cases} 3x+ay=3, \\ ax+3y=3; \end{cases} б)\begin{cases} (a-2)x+27y=\dfrac{9}{2}, \\ 2x+(a+1)y=-1; \end{cases} в)\begin{cases} ax+a^2y=2, \\ a^2x+ay=2. \end{cases}$$

5. *а* нинг қандай қийматларида система ечимга эга:

$$а)\begin{cases} (a+1)x-y=a+1, \\ x+(a-1)y=2; \end{cases} \quad б)\begin{cases} ax+y=a, \\ x+ay=a^2; \end{cases} \quad в)\begin{cases} x+ay=1, \\ ax+y=a^2. \end{cases}$$

5-§.

1. Системаларни ечинг:

$$а)\begin{cases} 16^{x+y}=128, \\ 5^{6x-4y-3}=1. \end{cases} \quad б)\begin{cases} 2^{(x-2)^2-1}=1, \\ 3^{x+y}=27. \end{cases} \quad в)\begin{cases} 3\cdot 4^x+2\cdot 9^y=2{,}75, \\ 4^x-9^y=-0{,}75. \end{cases}$$

$$г)\begin{cases} \log_{\sqrt{3}}(2x-2y)=2, \\ 9^x\cdot 4^y=972. \end{cases} \quad д)\begin{cases} x^2y=20, \\ x^{\lg y^2}=2. \end{cases} \quad е)\begin{cases} 4^{\log_9(x-4y)}=1, \\ 4^{x-2y}-7\cdot 2^{x-2y}=8. \end{cases}$$

$$2.\ а)\begin{cases} \lg\sqrt{(x+y)^2}=1, \\ \lg y-\lg|x|=\lg 2. \end{cases} \quad б)\begin{cases} \log_5 x^2+4^{\log_4 y}=7, \\ x^{2y}=625^3. \end{cases} \quad в)\begin{cases} 3^{\log}x^2=y^{\log_5 y}, \\ 2^{\log}y^3=x^{\log_7 x}. \end{cases}$$

$$г)\begin{cases} 10\log_2 3x=\log_2 y^6-\log_{\sqrt{2}}4; \\ 3\log_2 y=24-\log_{\sqrt{2}}x^3-\log_{\sqrt{2}}27. \end{cases} \quad д)\begin{cases} \lg(x^2+y^2)-1=\lg 13, \\ \lg(x+y)-\lg(x-y)=3\lg 2. \end{cases}$$

$$е)\begin{cases} \log_2(x-y)=5-\log_2(x+y), \\ \dfrac{\lg x-\lg 4}{\lg x-\lg 3}=-1. \end{cases} \quad ж)\begin{cases} \log_2 x+\log_1 y=-2\log_{\frac{1}{2}}4, \\ \log_1 x+\log_2 y=5\lg 10. \end{cases}$$

$$з)\begin{cases} \log_x(xy)=\log_y x^2, \\ y^{2\log_y x}=4y+3. \end{cases}$$

3. а) $\begin{cases}\log_y x+\log_x y=2{,}5,\\ xy=27.\end{cases}$ б) $\begin{cases}4^{x+y}=27+9^{x-y},\\ 8^{x+y}-21\cdot 2^{x+y}=27^{x-y}+7\cdot 3^{x-y+1}.\end{cases}$

в) $\begin{cases}\lg^2 x=\lg^2 y+\lg^2 xy,\\ \lg^2(x+y)=\lg x\lg y.\end{cases}$ г) $\begin{cases}x^y=y^x,\\ x^x=y^{9y}.\end{cases}$ д) $\begin{cases}3\cdot x^{2y-1}=4,\\ x^{y+1}=6.\end{cases}$

е) $\begin{cases}\lg x\lg(x+y)=\lg y\lg(x-y),\\ \lg y\lg(x+y)=\lg x\lg(x-y).\end{cases}$ ж) $\begin{cases}x^{\log_3 y}=27y,\\ y^{\log_3 x}=81x.\end{cases}$ з) $\begin{cases}5^{\lg x}=3^{\lg y},\\ (3x)^{\lg 3}=(5y)^{\lg 5}.\end{cases}$

4. а) $\begin{cases}(ax)^{\lg a}=(by)^{\lg b},\\ b^{\lg x}=a^{\lg y}.\end{cases}$ б) $\begin{cases}a^x b^y=m,\\ x+y=n, a>0, b>0,\end{cases}$ в) $\begin{cases}x^y=y^x,\\ x^m=y^n.\end{cases}$

г) $\begin{cases}x^y=y^x\\ a^x=b^y, a>0, b>0, a\neq b, a\neq 1, b\neq 1.\end{cases}$

д) $\begin{cases}64^{2x}+6^{2y}=12,\\ 64^{x+y}=4\sqrt{2}.\end{cases}$ е) $\begin{cases}(mx)^{\lg m}=(ny)^{\lg n},\\ n^{\lg x}=m^{\lg y}.\end{cases}$

ж) $\begin{cases}\log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2,\\ \log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2,\\ \log_8 z+\log_{16} x+\log_{16} y=2.\end{cases}$ з) $\begin{cases}x^m=y^n,\\ \log_p \dfrac{x}{y}=\dfrac{\log_p x}{\log_p y}.\end{cases}$

и) $\begin{cases}3^x-2^{y^2}=77,\\ 3^{\frac{x}{2}}-2^{\frac{y^2}{2}}=7.\end{cases}$

к) $\begin{cases}\left(\left(\sqrt[9]{6}\right)^{2x}\right)^{3y}=6^8,\\ \left(8888^{x-y-1}\right)^{x^2+6y^2-60}=1.\end{cases}$

6. Системага келтириб ечинг:

а) $(ax^2+bx+c)^5-\left(ax^2+bx+d\right)^5=e;$

б) $\left(x^2+1\right)^7-\left(x^2-1\right)=2^7;$

в) $\left(x+a+b\right)^5=x^5+a^5+b^5;$ г) $x^4+(1-x^4)=1;$

д) $\left(x+3\right)^4+\left(x+5\right)^4=4;$

е) $\left(2x+a+b\right)^3=\left(x+a\right)^3+\left(x+b\right)^3;$

ж) $x^4+\left(x-1\right)=97;$

з) $\left(x-4{,}5\right)+\left(x-5{,}5\right)^4=9;$

и) $\left(x-a\right)^3-\left(x-b\right)^3=b^3-a^3;$

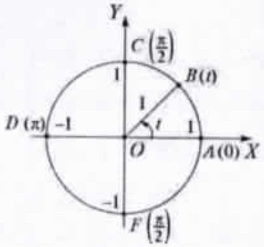
к) $(x+3)^3-(x+1)^3=56.$

V- БОБ. ТРИГОНОМЕТРИК ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

5.1-§. Сонли аргументнинг синуси, косинуси, тангенси ва котангенси

Текисликда XOY Декарт координаталар системаси киритилган ва t ҳақиқий сон берилган бўлсин. t ҳақиқий сонга координатали айлананинг координатаси t га тенг бўлган $B(t)$ нуқтасини мос қўямиз(1-расм). $B(t)$ нуқтанинг абциссаси t *сонннинг косинуси*, ординатаси эса t *соннинг синуси* дейилади ва мос равишда $\cos t$, $\sin t$ орқали белгиланади. $B(t)$ нуқта ординатасининг шу нуқта абциссасига нисбати (агар бу нисбат мавжуд бўлса) t *соннинг тангенси* дейилади ва $tg\ t$ орқали белгиланади. $B(t)$ нуқта абциссасининг шу нуқта ординатасига нисбати (агар бу нисбат мавжуд бўлса) t *соннинг тангенси* дейилади ва $tg\ t$ орқали белгиланади.

$B(t)$ нуқта абциссасининг шу нуқта ординатасига нисбати (агар бу нисбат мавжуд бўлса) t *соннинг котангенси* дейилади ва $ctg\ t$ орқали белгиланади.



1-расм.

Соннинг синуси, косинуси, тангенси ва котангенси тушунчаларининг аниқланишидан кўринадики,

$$tg\,t=\frac{\sin t}{\cos t}(\cos t\neq 0), \qquad (1)$$

$$ctg\,t=\frac{\cos t}{\sin t}(\sin t\neq 0), \qquad (2)$$

муносабатлар ўринли ва координатали айлананинг $B(t)$ нуқтаси XOY координаталар системасидаги $B(\cos t;\ \sin t)$ нуқта билан устма-уст тушади. $B(\cos t;\ \sin t)$ нуқта бирлик айланада ётгани сабабли, унинг координаталари шу бирлик айлана тенгламаси $x^2+y^2=1$ ни қаноатлантиради:

$$\cos^2 t+\sin^2 t=1. \qquad (3)$$

Соннинг синуси ва косинуси тушунчаларининг аниқланишидан кўринадики, ихтиёрий t ҳақиқий сон учун $B(\cos t;\ \sin t)$ нуқта бирлик айланада ётади. Шу сабабли, (3) тенглик t нинг ҳар қандай ҳақиқий қийматида ўринли.

1-мисол. $0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$ сонларининг синуси, косинуси, тангенси ва котангенсини топинг.

Ечиш: $0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$ сонларига координатали айлананинг $A(0),C\left(\frac{\pi}{2}\right),D\ (\pi),F\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ нуқталари мос келади (19-расм). Бу нуқталар XOY координаталар системасида мос равишда қуйидаги координаталарга эга: $A(1;\ 0),C(0;\ 1),D\ (-1;\ 0),F\ (0;\ -1)$.

Соннинг синуси, косинуси, тангенси ва котангенси тушунчаларининг аниқланишига кўра, қуйидаги тенгликларга эга бўламиз:

$$\cos 0=1;\quad \cos\frac{\pi}{2}=0;\quad \cos\pi=-1;\quad \cos\frac{3\pi}{2}=0;$$

$$\sin 0=1;\quad \sin\frac{\pi}{2}=1;\quad \sin\pi=0;\quad \sin\frac{3\pi}{2}=-1;$$

$$tg\ 0=0;\ tg\quad tg\ 0=0;\ tg\frac{\pi}{2}-\text{мавжуд эмас};$$

$$tg\pi=0;\ tg\frac{3\pi}{2}-\text{мавжуд эмас};\ ctg\ 0-\text{мавжуд эмас};$$

$$ctg\frac{\pi}{2}=0;\quad ctg\pi-\text{мавжуд эмас}\quad ctg\frac{3\pi}{2}=0.$$

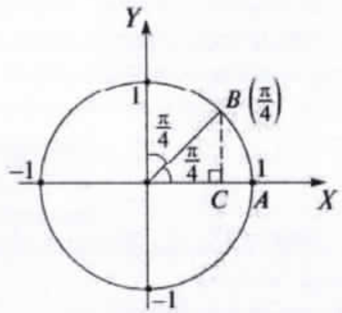
2-мисол. $\sin\frac{\pi}{4},\ \cos\frac{\pi}{4},\ tg\frac{\pi}{4},\ ctg\frac{\pi}{4}$ ларни ҳисобланг.

Ечиш: Координатали айланада $B\left(\frac{\pi}{4}\right)$нуқтани ясаймиз (2-расм) ва бу нуқтанинг XOY координаталар текислигидаги координаталарини аниқлаймиз. *OBC тенг* ёнли тўғри бурчакли учбурчакда $OB^2=OC^2+BC^2=2BC^2$бўлгани учун $2BC^2=1$ ёки $BC=\frac{\sqrt{2}}{2}$ га эга бўламиз. $B\left(\frac{\pi}{4}\right)$ нуқтанинг абциссаси ҳам, ординатаси ҳам, ординатаси ҳам мусбатдир. Демак, $B\left(\frac{\pi}{4}\right)$ нуқта

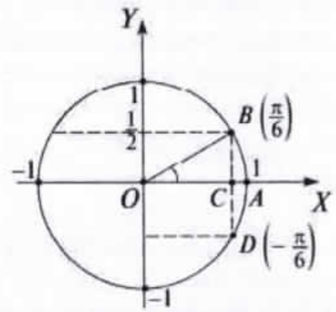
$B\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ нуқта билан устма-уст тушади. $sin\alpha$, $cos\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$ ларнинг аниқланишига кўра,

$$sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ tg\frac{\pi}{4}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1,\ ctg\frac{\pi}{4}=1.$$

тенгликларга эга бўламиз.



2-расм



3-расм

3-Мисол. $\frac{\pi}{6}$ *ва* $-\frac{\pi}{6}$ нинг синуси, косинуси, тангенси ва котангенсини топинг.

Ечиш: $B\ (\frac{\pi}{6})$ нуқтани ясаймиз (3-расм) ва бу нуқтанинг декарт координаталарини топамиз. $B\ (\frac{\pi}{6})$ нуқтанинг декарт координаталари мусбат сонлардир. *OBC тўғри* бурчакли учбурчакда $BC=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$ бўлгани учун Пифагор теоремасига кўра $OC=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ бўлади. Демак, $B\ (\frac{\pi}{6})$ нуқта $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ нуқта билан устма-уст тушади. Сон аргументнинг синуси, косинуси, тангенси ва котангенсининг аниқланишига кўра

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\qquad \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}},\qquad \mathrm{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}.$$

$D(-\frac{\pi}{6})$ ва $B(\frac{\pi}{6})$ нуқталар *OX* ўққа нисбатан симметрик бўлган учун $D(-\frac{\pi}{6})$ нуқта $D\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$ нуқта билан устма-уст тушади. Шу сабабли,

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2},\qquad \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$tg\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}},\qquad ctg\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}.$$

$y = sin\ t$, $y = cos\ t$, $y = tg\ t$ *ва* $y = ctg\ t$ формулалар билан аниқланган функциялар *асосий тригонометрик функциялар* дейилади.

Уларнинг айрим асосий ҳоссаларини келтирамиз.

1°. *$y = sin\ t$ функция чегараланган функция ва барча $t\in R$ лар учун $|\sin t|\le 1$ муносабат ўринли.*

Исбот. Бирор $t\in R$ учун $sin\ t > 1$ бўлсин. У ҳолда $|\sin^2 t|=|\sin t|^2>1$ бўлгани учун $sin^2 t+cos^2 t=|\sin t|^2+|\cos|^2\ge|\sin t|^2+0=|\sin t|^2>1$, яъни $sin^2 t+\cos^2 t>1$ тенгсизликка эга бўламиз. Бу эса (3) га зиддир. Демак, барча $t\in R$ сонлар учун $|\sin t|\le 1$ муносабат ўринли ва $sin\ t$ функция чегараланган функциядир.

2°. *$y = \cos t$ функция чегараланган ва барча $t\in R$ лар учун $|\cos t|\le 1$ муносабат ўринли.*

Исбот. $\forall t \in R$ да $0 \le sin^2 t \le 1$ бўлгани учун $cos^2 t = 1 - sin^2 t \le 1$ бўлади. Охирги тенгсизликдан, $\forall t \in R$ да $|\cos t| \le 1$ экани кўринади. Демак, $cos\,t$ функция чегараланган функция ва $\forall t \in R$ да $|\cos t| \le 1$

1°, 2°- хоссалардан, $y = sinx$ ва $y = cosx$ функциялардан ҳар бирининг қийматлар соҳаси $[-1;\,1]$ кесмадан иборат эканлиги келиб чиқади. Тригонометрик функцияларнинг айрим бурчакларидаги қийматлари жадвалини келтирамиз:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	-1
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Мавжуд эмас	0	Мавжуд эмас	0
$ctg\alpha$	Мавжуд эмас	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	Мажуд эмас	0	Мажуд эмас

5.2-§. Тригонометрик функцияларнинг даврийлиги, хоссалари ва графиги.

Тригонометрик функцияларнинг даврийлиги

Тригонометрик функцияларнинг даврийлиги ҳақидаги теоремаларни келтирамиз.

1 - Теорема. *$cos\,t$ ва $sin\,t$ функцияларнинг ҳар бири даврий функция ва уларнинг асосий даври 2π га тенг.*

Исбот. Ихтиёрий $t \in R$ сон учун $K(t), L(t+2\pi), M(t-2\pi)$ нуқталар координатали айланада устма-уст тушади. Шу сабабли уларнинг Декарт координаталари бир хил:

$$x = \cos t = \cos(t-2\pi) = \cos(t+2\pi),$$

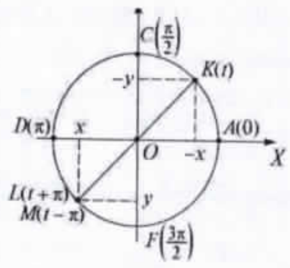
$$y = \sin t = \sin(t-2\pi) = \sin(t+2\pi).$$

Демак, 2π сони $cos\,t$ ва $sin\,t$ функцияларнинг ҳар бирининг бирор давридир. 2π сони улардан ҳар бири учун асосий давр бўлишлигини кўрсатамиз.

$0 < t_1 < 2\pi$ сони $cos\,t$ нинг даври деб фараз қилайлик. У ҳолда, масалан, $t=0$ да $cos0 = cos(0+t_1) = l$, яъни $cos\,t_1 = l$ бўлиши керак. Координатали айланада абциссаси 1 га тенг бўлган фақат битта (1; 0) нуқта мавжуд ва унга $t = 2\pi k, k \in Z$ сонлари мос келади. t_1 сон эса бу сонлар орасида мавжуд эмас. Демак, фаразимиз нотўғри, косинус функциянинг асосий даври 2π сонидан иборат. Шу каби, масалан, $t = \frac{\pi}{2}$ да $\sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}+T_1\right) =$ тенгликни қаноатлантирадиган ва 2π дан кичик бўлган t_1 мусбат сон йўқ. Демак, $t = 2\pi$ сони синус функциянинг асосий даври.

2–Теорема. *$tg\,t$ даврий функция ва унинг асосий даври π га тенг.*

Исбот. $t \ne \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ бўлсин. $K(t), L(t+\pi), M(t-\pi)$ нуқталарни қараймиз. $L(t+\pi), M(t-\pi)$ нуқталар айни бир хил Декарт координаталарига эга, яъни улар устма-уст тушади. Шу нуқталарнинг умумий абциссаси x, умумий ординатаси эса y бўлсин (4-расм). У ҳолда, $tg(t+\pi) = tg(t-\pi)$ бўлади. $K(t)$ ва $L(t+\pi)$ нуқталар диаметрал қарама-қарши нуқталар бўлгани учун $K(t)$ нуқтанинг абциссаси $-x$ га, ординатаси эса $-y$ га тенгдир. Шу сабабли,



4-расм

$$tg(t+\pi) = tg(t-\pi) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = tgt.$$

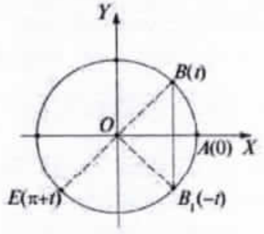
Демак, $tg\,t$ функция даврий функция ва $t = \pi$ сони унинг бирор давридир. Бу сон tgt нинг асосий даври эканини кўрсатамиз.

T сон $tg\,t$ нинг асосий даври, яъни барча $t \ne \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ сонлари учун $tg\,(t+T) = tg\,t$ тенглик ўринли бўлсин. Охирги тенглик $t = 0$ да ҳам бажарилади: $tg\,T=$ (Бундан $T = \pi k, k \in Z$ эканини кўрамиз. Шундай қилиб, $tg\,t$ нинг асосий даври $\pi k, k \in Z$ сонлари орасидаги энг кичик мусбат сон, яъни π сонидир. Демак, $T = \pi$.

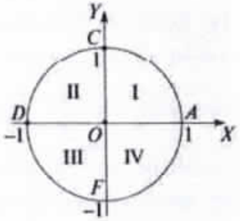
3– Теорема. *$ctg\,t$ даврий функция ва унинг асосий даври π га тенг* (мустақил исботланг).

Синус ва косинус функцияларнинг хоссалари

Синус ва косинус функцияларнинг хоссалари билан танишишни давом эттирамиз.



5- расм



6- расм

1) $sin\,t$ функция аргументнинг $t = \pi k, k \in Z$ қийматларидагина, $cos\,t$ функция эса аргументнинг $t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ қийматларидагина нолга айланади. Ҳақиқатан, координатали айланада фақат икки $A(0) = A(1;\ 0)$ ва $D(\pi) = D(-1;\ 0)$ нуқтанинг ординатаси нолга тенг, яъни $y = sin\,t = 0$ (4-расм). Бу нуқталарга $2\pi k, k \in Z$ ва $\pi + 2\pi k, k \in Z$ сонлар тўплами мос келади. Бу иккала тўпламни битта $\{\pi k, k \in Z\}$ тўпламга бирлаштириб ёзамиз. Шу каби координатали айланада фақат икки $C\left(\frac{\pi}{2}\right) = C(0;1)$ ва $\Phi\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \Phi(0;-1)$ нуқта абциссаси нолга тенг (4-расм), яъни $x = cos\,t = 0$. Бу нуқталарга $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, k \in Z$ сонлар тўпламлари ёки $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi, k \in Z\right\}$ тўплам мос;

2) $cos\,t$ – жуфт функция, $sin\,t$ – тоқ функция. Ҳақиқатан, $B(t)$ ва $B_1(-t)$ нуқталар абциссалар ўқига нисбатан симметрик жойлашганлигидан (5-расм) уларнинг абциссалари тенг,

ординаталари эса фақат ишоралари билан фарқ қилади. Демак, $cos(-t) = cos\,t$, яъни $cos\,t$ жуфт функция, $sin(-t) = -\sin(t)$, яъни $sin\,t$ тоқ функция;

3) Агар $B(t)$ нуқта координатали айлана бўйлаб π қадар силжитилса, $cos\,t$ ва $sin\,t$ функциялар ўз ишораларини ўзгартиради:

$$cos(t + \pi) = -cos\,t; \quad (1)$$

$$sin(t + \pi) = -\sin t. \quad (2)$$

Ҳақиқатан, $B(t)$ ва $E(\pi + t)$ нуқталар координаталар бошига нисбатан симметрик жойлашганлигидан (5-расм) уларнинг координаталари қарама-қарши ишорали бўлади;

4) $A(1;\ 0), C(0;\ 1), D\ (-1;\ 0), F\ (0;\ -1)$ нуқталар координатали айланани тўрт чоракка ажратади (6-расм). Агар $A(0)$ нуқта A дан C гача силжитилса, A нуқта абсиссаси 1 дан 0 гача камаяди, ординатаси эса 0 дан 1 гача ўсади. Демак, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ оралиқда (I чоракда) $sin\,t$ функция номанфий ва 0 дан 1 гача ўсади, $cos\,t$ ҳам номанфий, лекин 1 дан 0 гача камаяди. Қолган чоракларда ҳам шу каби маълумотларни тўплаб, қуйидаги жадвални тузамиз:

Функция	$0 < t < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < t < \pi$	$\pi < t < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$
sint	мусбат, 0 дан 1 гача ўсади	мусбат, 1 дан 0 гача камаяди	манфий, 0 дан –1 гача камаяди	манфий, –1 дан 0 гача ўсади
cost	мусбат, 1 дан 0 гача камаяди	манфий, 0 дан –1 гача камаяди	манфий, –1 дан 0 гача ўсади	мусбат, 0 дан 1 гача ўсади

Тангенс ва котангенс функцияларнинг хоссалари.

1) Тан*генс ва котангенс даврий функциялардир ва уларнинг асосий даври* $t = \pi$ (2, 3- теоремалар);

2) $tg\,t$ ва $ctg\,t$ – тоқ функциялар. Ҳақиқатан, $cos\alpha \ne 0$ да $tg(-t) = \frac{\sin(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\sin(t)}{\cos t} = -tgt$ га $sin\,t \ne 0$ да $ctg(-t) = -ctg\,t$ га эга бўламиз. тангенс ва котангенсларнинг даври π га тенг ва улар тоқ функциялар бўлгани учун

$tg(\pi - t) = tg\left(\pi + (-t)\right) = tg(-t) = -tg\ t,\ \ ctg(\pi + (-t)) = -ctgt$, яъни

$$tg\left(\pi - t\right) = -tg\ t, \quad (1)$$

$$ctg\left(\pi - t\right) = -ctg\ t. \quad (2)$$

тенгликлар ўринли бўлади;

3) $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ *оралиқда* $tg\,t$ *функция 0 дан* $+\infty$ *гача ўсади,* $ctgt$ *эса* $-\infty$ *дан 0 гача камаяди.*

Ҳақиқатан, $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ да $sin\ t$ ва $cos\,t$ мусбат, синус ўсувчи, косинус камаювчи, демак, $tg\,t$ ўсувчи, хусусан, $t=0$ да $tg0=\frac{\sin 0}{\cos 0}=\frac{0}{1}=0$ бўлади, t бурчак $\frac{\pi}{2}$ га яқинлашганда $sin\ t$ қиймати 1 гача ўсади, $cos\,t$ эса 0 гача камаяди, натижада $\frac{\sin t}{\cos t}=tgt$ функция $+\infty$ гача ўсади, аксинча $\frac{\cos t}{\sin t}=ctgt$ функция 0 гача камаяди.

Олинган хулосалар ҳамда тангенс ва котангенснинг тоқ функциялигидан фойдаланиб, $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ оралиқда уларнинг манфий эканлигини, $tg\,t$ функциянинг $-\infty$ дан 0 гача ўсишини ҳамда $ctg\,t$ нинг $-\infty$ дан 0 гача камайишини аниқлаймиз. Учинчи ва тўртинчи чораклардаги ҳолатларини аниқлашда уларнинг хоссалари $t=\pi$ давр билан такрорланишидан фойдаланамиз. Хусусан, $\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$ оралиқдаги ҳолат $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ оралиқдагига, $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ оралиқдаги ҳолат $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ оралиқдагига ўхшаш.

4) t *нинг* $tg\ t, ctg\ t$ *функциялар аниқланган қийматларида қуйидаги айниятлар ўринли:*

$$tg\,t\cdot ctg\ t = 1,\ t\neq\frac{k\pi}{2}, k\in Z, \quad (3)$$

$$1+tg^2t=\frac{1}{\cos^2 t},\ t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z, \quad (4)$$

$$1+ctg^2t=\frac{1}{\sin^2 t},\ t\neq k\pi, k\in Z. \quad (5)$$

(3) айният $tgt=\frac{\sin t}{\cos t}$ ва $ctgt=\frac{\cos t}{\sin t}$ тенгликларни кўпайтириш орқали, (4) ва (5) айниятлар эса $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ тенгликнинг ҳар икклала қисмини аввал cos^2t га, сўнг $\sin^2 t$ га бўлиш орқали ҳосил бўлади.

Мисол. Агар $tgt=-\frac{2}{3}$ ва $t\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ бўлса, $sint, cost, ctgt$ нинг қийматини топамиз.

Ечиш. II чоракда $sin\,t>0, cos\,t<0$ у ҳолда $ctg\ t<0$. (3) айният бўйича $ctg\ \ t=-\frac{3}{2}$ айният бўйича:

$$\cos^2 t=\frac{1}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{9}{13},\ \ \cos t=-\frac{3}{\sqrt{13}}=-\frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

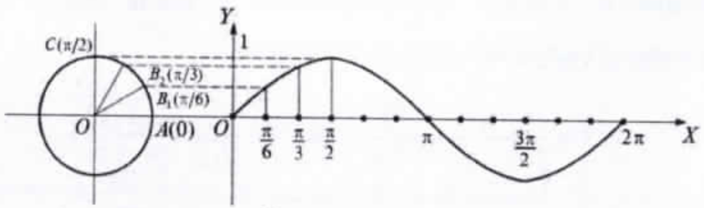
Шу каби (5) бўйича $sint=\frac{2\sqrt{13}}{13}$ ни топамиз.

Тригонометрик функцияларнинг графиклари

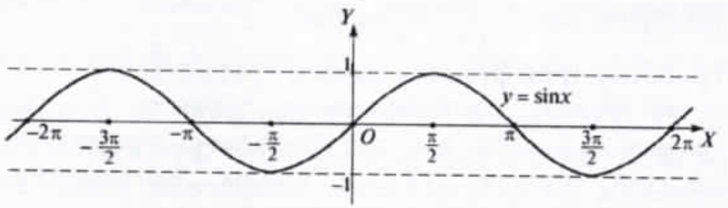
Синус ва косинус функцияларнинг графиги. $y = sinx$ функция графиги *синусоида*, $y = cosx$ функциянинг графиги эса *косинусоида* деб аталади. Уларни ясашда тригонометрик функцияларнинг хоссаларидан фойдаланамиз.

$\sin x-$ даврий функция ва унинг асосий даври $t=2\pi$ бўлгани учун, OX ўқида узунлиги 2π га тенг бўлган бирор оралиқни, масалан, $[-\pi;\pi]$ оралиқни ажратамиз (30-расм) ва унда графикнинг мос қисмини ясаймиз. Агар синуснинг тоқ функция экани эътиборга олинса, $[-\pi;\pi]$ оралиқнинг ярми $[0;\ \pi]$ билан чегараланиш, $sinx = sin\left(\pi - x\right)$ экани, яъни x ва $\pi - x$ нуқталар $\frac{\pi}{2}$ га нисбатан симметрик жойлашганликлари ҳам назарда тутилса,

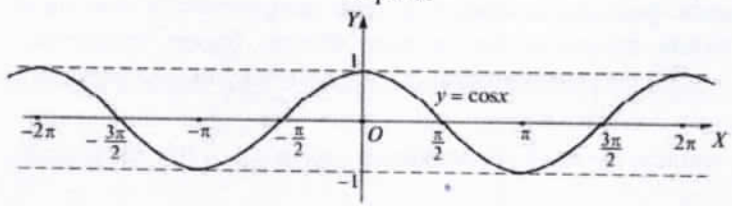
$\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ оралиқ билан чегараланиш у етарли. Шу оралиқда ясалган қисми $x=\frac{\pi}{2}$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик акслантирилса, графикнинг $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ даги қисми ҳосил қилинади, натижада графикнинг [0; π] даги қисми чизилган бўлади. Бу қисм (0; 0) координаталар бошига нисбатан симметрик акслантирилса, [–π; π] оралиқдаги қисми ҳосил бўлади. Энди уни 2π давр билан сон ўқи бўйича давом эттириш қолди. Графикни [0; $\frac{\pi}{2}$] оралиқда геометрик ясаш учун координатали айлананинг I чорагини (*AC* ёйни, 7-расм)



7- расм



8-расм



9-расм

B_1, B_2, ... нуқталар билан тенг бўлакларга ажратамиз. *OX* ўқининг шу оралиғи ҳам шунча тенг бўлакка ажратилади. Агар айланадаги бўлиниш нуқталаридан *OX* ўқига параллел ва *OX* ўқидаги бўлиниш

нуқталардан *OY* ўқига параллел тўғри чизиқлар ўтказсак, уларнинг кесишиш нуқталари изланаётган синусоидада ётган бўлади. Нуқталар устидан узлуксиз чизиқ чизамиз. У синусоиданинг эскизи бўлади.

$y=\cos x$ косинусоидани ҳам юқорида кўрсатилган тартибда ясаш мумкин. Функциянинг асосий даври $t=2\pi$. Демак, графикни узунлиги 2π га тенг бирор оралиқда, масалан, [–π; π] оралиқда ясаш, сўнг уни сон ўқи бўйича 2π давр билан икки томонга давом эттириш керак. cos *x* жуфт функция бўлганидан бу оралиқнинг [0; π] қисмини, $\cos(\pi-t)=-\cos x$ муносабатга кўра эса янада кичик $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ оралиқни танлаймиз. Унда ясалган график *Ox* ўқидаги $x=\frac{\pi}{2}$ нуқтага нисбатан симметрик алмаштирилса, графикнинг $x=\pi$ гача қисми ҳосил бўлади. Бу қисм ординаталар ўқига нисбатан симметрик алмаштирилса, графикнинг [–π; π] даги қисми ҳосил қилинади. Графикнинг [0; $\frac{\pi}{2}$] даги қисми у юқорида синусоидани ясашда кўрсатилгандек ҳосил қилинади. Лекин бунда графикдаги нуқта ординатаси координатали айланада унга мос нуқта абциссасига тенг бўлиши керак. Косинусоидани ясашнинг бошқа йўли синусоидани $\frac{\pi}{2}$ қадар чапга параллел кўчиришда иборат. 8, 9-расмларда мос равишда синусоида ва косинусоида тасвирланган.

Синусоидал тебранишлар. Тебранма ҳаракат тригонометрик функциялар орқали ифодаланади. Математик маятникнинг ҳаракат тенгламаси, ўзгарувчан электр токи кучи ёки кучланишининг ўзгариш қонуниятлари бунга мисол бўла олади. Энг содда тебранма ҳаракат *синусоидал* (ёки *гармоник*) тебранишлардир.

Бирор нуқта радиуси *A* га тенг айлана бўйича ω рад/с бурчак тезлик билан ҳаракат қилаётган бўлсин. Нуқта *t* *c* да ωt радианга тенг ёй чизади. Агар айлананинг маркази координаталар бошида жойлаштирилган ва $t=0$ вақт моментида нуқта бирор $B_0(\alpha)$ нуқтада турган бўлса, *t* вақтдан сўнг у $B(\omega t+\alpha)$ га келади. В нуқта координаталари:

$$x = A\cos(\omega t+\alpha) \qquad (1)$$

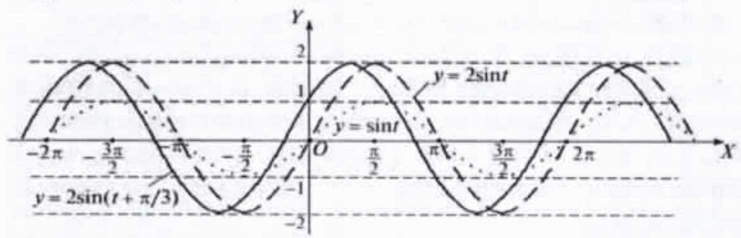
ва

$$y = A\sin(\omega t + \alpha) \qquad (2)$$

Бунга қараганда В нуқтанинг t га боғлиқ равишда ҳаракати давомида унинг x ва у координаталари OX ва ОY ўқлари бўйича кўпи билан $|A|$ қадар олдинга-кейинга силжийди, тебранади ва ўтилган масофа (1) ва (2) муносабатлардаги синус ва косинус қийматига боғлиқ бўлади. Бу ҳаракат синусоидал тебранишдир. (1) ва (2) тенгликдаги $\acute{A}$ сон тебранишнинг кулочини ифодалайди ва тебраниш *амплитудаси* дейилади, ω эса 2π вақт бирлиги ичидаги тўлиқ тебранишлар сони бўлиб, *бурчак частотаси* дейилади. α сон нуқтанинг айланадаги бошланғич ўрни, яъни *бошланғич* фаза. (1) ва (2) функцияларнинг асосий даври $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$(исбот қилинг!). (1) ёки (2) гармоник тебранишлар графигини синусоидан фойдаланиб ясаш мақсадида (2) функция ифодасини $y = A\sin\omega\left(t + \dfrac{\alpha}{\omega}\right)$ кўринишда ёзамиз. Бунга қараганда графикни ясаш учун sin t синусоидани OX ўқи бўйича $\acute{A}$ коэффициент билан чўзиш, ОY ўқи бўйича ω коэффициент билан қисиш ва координаталар бошини $L\left(-\dfrac{\alpha}{\omega};0\right)$ нуқтага акслантирувчи параллел кўчиришни бажариш керак.

Мисол. $y = 2\sin\left(t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ функция графигини ясаймиз.

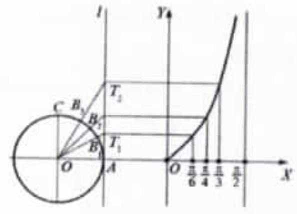
Ечиш. $y = \sin t$ синусоидани ОY ўқи йуналишида 2 марта чўзишни ва ОХ ўқи бўйича $\dfrac{\pi}{3}$ қадар чапга параллел кўчиришни бажарамиз (10-расм)



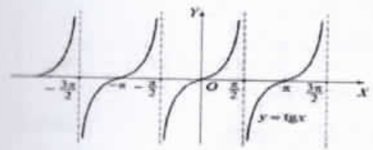
(10-расм)

Тангенс ва котангенс функцияларнинг графиги. tgx тоқ функция, даври $t = \pi$ бўлганидан унинг графигини $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ оралиқда ясаш, сўнг уни координаталар бошигаа нисбатан сим-метрик акслантириш ва абциссалар ўқи бўйича $\pi k,\ k \in Z$ лар қадар суриш керак бўлади.

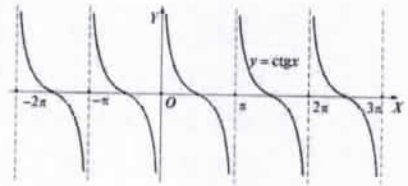
Маркази $O_1(-1;0)$ нуқтада бўлган бирлик айлананинг $\cup AC = \dfrac{\pi}{2}$ ёйи тенг узоқликда олинган $B_1, B_2, \ldots$ нуқталар билан бир неча тенг бўлакка бўлинган бўлсин (12-расм). Бу нуқталар ва O_1 нуқтадан ўтказилган $O_1\ B_1, O_1B_2, \ldots$ тўғри чизиқлар Al тангенслар чизиғи билан $T_1, T_2, \ldots$



11-расм



12-расм



13-расм

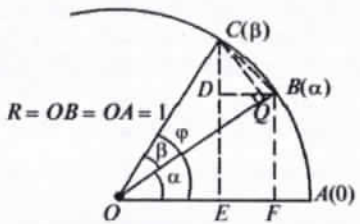
нуқталарда кесишсин. Чизмага қараганда $AT_1 = tg\dfrac{\pi}{6},\ AT_2 = tg\dfrac{\pi}{3}$ ва ҳоказо. $t_1, t_2, \ldots$ нуқталардан OX ўқига параллел ва $x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}, \ldots$ нуқталардан ОY ўқига параллел ўтказилган тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқталари белгиланади. Улар устидан ўтадиган эгри чизиқ tg x функциянинг графиги (*тангенсоида̀*) бўлади.

График $x = \dfrac{\pi}{2}$ тўғри чизиққа томон яқинлашганида юқорига чексиз кўтарилади. Энди координаталар бошига нисбатан марказий симметрия, сўнг абциссалар ўқи бўйича $\pi\kappa,\ k\in Z$ даврлар билан параллел кўчиришларни бажариш графикнинг каттароқ оралиқдаги давомини беради (12-расм). $ctgx$ функциянинг графиги (котангенсоида) ҳам шу каби ясалади (13-расм).

5.3-§. Икки бурчак йиғиндиси ва айирмасининг косинуси, синуси ва тангенси, котангенси. Келтириш формулалари. Иккиланган ва учланган ярим аргументнинг тригонометрик формулалари. Тригонометрик функциялар йиғиндисини кўпайтмага ва кўпайтмасини йиғиндига айлантириш

Икки бурчак йиғиндиси ва айирмасининг косинуси ва синуси

Чизмада



14-расм

$$\angle BA=\alpha,\ \angle COA=\beta,\ \varphi=\beta-\alpha,$$

$$BD\perp CE,\ CQ\perp OB,\ DE=BF,$$

$$DB=EF=OF-OE=cos\alpha-cos\beta,$$

$$QB=OB-OQ=1-cos\varphi,\ CQ=sin\varphi,$$

$$CD=CE-BF=sin\beta-sin\alpha,\ CDB \text{ ва } CQB$$

тўғри бурчакли учбурчаклар умумий CB гипотенузага эга. Пифагор теоремаси бўйича:

$$BC^2=CQ^2+QB^2=CD^2+DB^2$$

ёки

$$sin^2\varphi+(1-cos\varphi)^2=(sin\beta-sin\alpha)^2+(cos\alpha-cos\beta)^2,$$

$$sin^2\varphi+1-2cos\varphi+cos^2\varphi=$$

$$=sin^2\beta-2sin\beta sin\alpha+sin^2\alpha+cos^2\beta-2cos\alpha cos\beta+cos^2\beta,$$

$$(sin^2\varphi+cos^2\varphi)+1-2cos\varphi=(sin^2\alpha+cos^2\beta)+(cos^2\beta+sin^2\alpha)$$
$$-2(sin\alpha sin\beta-cos\alpha cos\beta),\ 2-2cos\varphi=2-2(sin\alpha sin\beta-$$
$$-cos\alpha cos\beta)$$

ёки

$$cos(\alpha-\beta)=cos\alpha cos\beta+sin\alpha sin\beta. \qquad (1)$$

(1) муносабат бўйича ва функцияларнинг хоссаларидан фойдаланиб, яна бошқа формулаларни топиш мумкин:

$$cos(\alpha+\beta)=cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

$$cos(\alpha+\beta)=cos\alpha cos\beta-sin\alpha sin\beta. \qquad (2)$$

Хусусан:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=0\cdot\cos\alpha+1\cdot\sin\alpha=\sin\alpha,$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=0\cdot\cos\alpha-1\cdot\sin\alpha=-\sin\alpha;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha; \qquad (3)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha; \qquad (4)$$

б) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\cos\alpha,$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha.$$

Демак,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha; \qquad (5)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha. \qquad (6)$$

$\alpha\pm\beta$ бурчак синуси учун формулалар юқорида топилган формулалардан фойдаланиб чиқарилади:

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

ёки

$$sin(\alpha+\beta)=sin\alpha cos\beta+cos\alpha sin\beta. \qquad (7)$$

Агар (7) формуладаги β ўрнига α -β қўйилса, натижада:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \qquad (8)$$

Мисол. cos150° ва sin150° ни топамиз.

Ечиш. (4) ва (6) формулалар бўйича:

$$\cos150° = \cos(90° + 60°) = -\sin60° = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin150° = \sin(90° + 60°) = \cos60° = \frac{1}{2};$$

Икки бурчак йиғиндиси ва айирмасининг тангенси ва котангенси

1-банддаги формулалардан фойдаланамиз. Бунинг учун $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$, яъни $\alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2}+\pi k, k \in Z$ ва $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$ бўлиши, яъни α ва β лар $\frac{\pi}{2}+\pi k, k \in Z$ га тенг бўлмаслиги керак. Шу шартлардан қуйидагиларга эга бўламиз:

Бундан:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}.$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}. \qquad (1)$$

Худди шундай,

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}. \qquad (2)$$

Қуйидаги формулалар ҳам шу каби ҳосил қилинади:

$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta}, \qquad (3)$$

$$ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha ctg\beta+1}{ctg\alpha-ctg\beta}. \qquad (4)$$

Мисол. $ctg\frac{7\pi}{12}$ ни ҳисоблаймиз.

Ечиш:

$$ctg\frac{7\pi}{12}=ctg\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{ctg\frac{\pi}{3}\cdot ctg\frac{\pi}{4}-1}{ctg\frac{\pi}{3}+ctg\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot1-1}{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}+3}=\frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}=\frac{(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})}.$$

Келтириш формулалари.

Олдинги мавзуларимизда π-α, $\pi+\alpha$, $\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\frac{\pi}{2}+\alpha$ бурчаклар синуси, косинуси, тангенси, котангенси учун формулалар чиқарилган эди. Улардан ҳамда икки бурчак йиғиндиси ва айирмаси формулаларидан фойдаланиб, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$ бурчаклар учун формулаларни чиқара оламиз. Бу формулалар бир бурчак функциясини бошқа бурчак функциялари орқали ифодалашга, хусусан, ўтмас бурчак функцияларини ўткир бурчак функцияларига келтиришга имкон беради. Масалан,

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+(\pi+\alpha)\right)=-\sin(\pi+\alpha)=\sin\alpha. \qquad (1)$$

Шу каби,

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha; \qquad (2)$$

$$tg\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}=\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-ctg\alpha; \qquad (3)$$

$$ctg\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-tg\alpha. \qquad (4)$$

Келтириш формулалари кўп, уларни эсда сақлаш мақсадида ушбу *мнемоник қоида*дан ҳам фойдаланамиз (юнонча *мнемоникон*

– кўп қоидалар мажмуасини ёдда сақлашни у енгиллаштирувчи усул):

1) *агар аргумент* $2\pi \pm \alpha$ *кўринишда бўлса, тригонометрик функциянинг номи ўзгармайди;*

2) *агар аргумент* $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ *кўринишда бўлса, функциянинг номи ўзгаради (синус косинусга ва аксинча, тангенс котангенсга ва аксинча);*

3) *берилган тригонометрик функция аргументи қайси чоракда ётган0 бўлса, функциянинг ўша чоракдаги ишораси изланаётган функция олдига қўйилади.*

Келтириш формулаларини қуйидаги жадвал кўринишида умумлаштирамиз:

	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$sin\ \alpha$	$cos\ \alpha$	$cos\ \alpha$	$sin\ \alpha$	$-sin\ \alpha$	$-cos\alpha$	$-cos\alpha$	$-sin\ \alpha$	$sin\ \alpha$
$cos\ \alpha$	$sin\ \alpha$	$-sin\ \alpha$	$-cos\alpha$	$-cos\alpha$	$-sin\ \alpha$	$sin\ \alpha$	$cos\ \alpha$	$cos\ \alpha$
$tg\ \alpha$	$ctg\ \alpha$	$-ctg\ \alpha$	$-tg\ \alpha$	$tg\ \alpha$	$ctg\ \alpha$	$-ctg\ \alpha$	$-tg\ \alpha$	$tg\ \alpha$
$ctg\ \alpha$	$tg\ \alpha$	$-tg\ \alpha$	$-ctg\ \alpha$	$ctg\ \alpha$	$tg\ \alpha$	$-tg\ \alpha$	$-ctg\ \alpha$	$ctg\ \alpha$

Мисол. а) $cos(15\pi + \alpha)$; б) $tg(\pi+\alpha)$ ифодаларни ўткир бурчак тригонометрик функция кўринишига келтирамиз, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Ечиш: а) $cos(7\cdot 2\pi + \pi + \alpha) = cos(\pi + \alpha)$. Бунда $\pi+\alpha$ бурчак, демак, $15\pi+\alpha$ бурчак ҳам, учинчи чоракка қарашли. Бу чоракда косинуснинг ишораси манфий, ҳосил бўладиган функциянинг номи косинуслигича қолади. Демак, $cos(15\pi + \alpha) = -cos\alpha$; б) учинчи чоракда тангенс мусбат. Натижада $tg(\pi + \alpha) = tg\ \alpha$ ҳосил бўлади.

Иккиланган ва учланган аргументнинг тригонометрик функциялари.

Агар $\alpha+\beta$ бурчак тригонометрик функциялари формулаларида $\alpha=\beta$дейилса, 2α бурчак тригонометрик функциялари формулалари ҳосил қилинади. Улар 2α аргумент

функциясини α аргумент функцияси орқали ифодалашга имкон беради:

$$sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha; \quad (1)$$

$$cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha; \quad (2)$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} \quad (3)$$

$$ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}. \quad (4)$$

Аксинча, α аргумент функциясини 2α функцияси орқали ҳам бериш мумкин. Чунончи, $1 = sin^2\alpha + cos^2\alpha$ айният ва (2) формула бўйича $1 + cos2\alpha = 2cos^2\alpha$ *ва* $1 - cos2\alpha = 2sin^2\alpha$ ёки

$$cos2\alpha = 2cos^2\alpha - 1 \quad (5)$$

ва

$$cos2\alpha = 1 - 2sin^2\alpha \quad (6)$$

ҳосил қилинади. (5) ва (6) формулаларни қуйидаги кўринишда ҳам ёзиш мумкин:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \quad (7)$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}. \quad (8)$$

Агар $cos\alpha \neq 0$бўлса, (1) тенгликнинг ўнг қисмини $sin^2\alpha + cos^2\alpha$ га, яъни 1 га, сўнг сурат ва махражни $cos^2\alpha$ га бўлсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sin 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \frac{2\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$$

бундан:

$$\sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}. \quad (9)$$

Шу каби:

$$\cos\alpha \neq 0, \partial a \cos 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}. \quad (10)$$

Шунингдек, $ctg2\alpha = \frac{1}{tg2\alpha}$ ва (3) формула бўйича:

$$ctg2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{2tg\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi k}{2}, k \in Z. \qquad (11)$$

Учланган аргумент 3α нинг тригонометрик функцияларини юқорида топилган формулалардан фойдаланиб топиш мумкин. Масалан,

$$\begin{aligned} sin3\alpha &= sin(2\alpha+\alpha) = sin2\alpha cos\alpha + cos2\alpha sin\alpha = \\ &= 2sin\alpha cos^2\alpha + (1 - 2\sin^2\alpha)sin\alpha = \\ &= sin\alpha(2(cos^2\alpha - sin^2\alpha) + 1) = \\ &= sin\alpha(2(1 - 2sin^2\alpha) + 1) = sin\alpha(3 - 4sin^2\alpha). \end{aligned} \qquad (12)$$

Ярим аргументнинг тригонометрик функциялари.

Бу формулалар олдинги бандда берилган (4)–(11) формулалардаги α ўрнига $\frac{\alpha}{2}$ ни қўйиш орқали ҳосил қилинади. Жумладан,(7),(8) формулалар бўйича

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}, \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

ёки

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}; \qquad (1)$$

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}. \qquad (2)$$

Агар (2) тенглик (1) га ҳадма-ҳад бўлинса:

$$\left|tg\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

(3) тенглик ҳосил бўлади. $ctg\ \alpha = \frac{1}{tg\alpha}$ бўлгани учун

$$\left|ctg\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

(4) тенглик ҳам ўринлидир.

(1)–(4) формулалар тригонометрик функциялар қийматларининг модулини топишга имкон беради. Уларнинг ишоралари эса $\frac{\alpha}{2}$ аргументнинг қайси чоракка тегишли эканига боғлиқ.

Мисол. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$ экани маълум. $\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}, tg\frac{\alpha}{2}$ ни топамиз.

Ечиш: Шартдан фойдаланиб $\frac{\pi}{4} \le \frac{\alpha}{2} \le \frac{\pi}{2}$ бўлишини аниқлаймиз. Бу оралиқда барча тригонометрик функциялар мусбат. Юқорида топилган формулалардан фойдаланамиз. Олдин cos α ни топайлик:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{5}{9}} = -\frac{2}{3}.$$

У ҳолда:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{5}{6}},$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{5}.$$

Ярим аргументнинг тангенси учун яна бир формула ҳосил қилиш мақсадида $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ тенгликнинг ўнг қисмидаги каср сурат ва махражини $2\sin\frac{\alpha}{2}$ га кўпайтирамиз:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cdot\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (5)$$

Агар сурат ва махраж $2cos\frac{\alpha}{2}$ га кўпайтирилса,

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}. \qquad (6)$$

(5) ва (6) формулалар бўйича:

$$ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (7)$$

Тригонометрик функцияларни ярим аргумент тангенси орқали ифодалаш.

Ушбу $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$ функцияларни $tg\frac{\alpha}{2}$ орқали ифодалашда $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$, $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$ ҳамда $\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1$ формулалардан фойдаланамиз. $\sin\alpha=\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ тенгликка эгамиз. Бу тенгликдаги касрнинг сурат ва махражини $\cos^2\frac{\alpha}{2}\neq 0$ га бўлиш натижасида

$$\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} \qquad (1)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Худди шу каби, $\cos\alpha=\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ тенглик ёрдамида қуйидаги тенглик ҳосил қилинади:

$$\cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (2)$$

$tg\,\alpha$ ва $ctg\alpha$ ни $tg\frac{\alpha}{2}$ орқали ифодалаш учун (1) ни (2) га ва аксинча, (2) ни (1) га ҳадма-ҳад бўлиш у етарли. Натижада қуйидаги тенгликларга эга бўламиз:

$$tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad (3)$$

$$ctg\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}. \qquad (4)$$

Мисол. Агар $tg\frac{\alpha}{2}=-\frac{2}{3}$ бўлса, $\frac{2+3\cos\alpha}{4-5\sin\alpha}$ ни ҳисобланг.

Ечиш: (1) ва (2) формулаларга кўра,

$$\sin\alpha=\frac{2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=-\frac{12}{13},$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\frac{4}{9}}{1+\frac{4}{9}}=\frac{5}{13}.$$

Бундан $\dfrac{2+3\cos\alpha}{4-5\sin\alpha}=\dfrac{2+\frac{15}{13}}{4+\frac{60}{13}}=\dfrac{41}{112}.$

Тригонометрик функциялар йиғиндисини кўпайтмага ва кўпайтмасини йиғиндига айлантириш

Икки бурчак йиғиндиси ва айирмаси синуси муносабатларини ҳадма-ҳад қўшайлик:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\underline{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$$
$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

бундан:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)). \qquad (1)$$

Шу каби икки бурчак косинуси йиғиндиси ва айирмаси муносабатларини ҳадма-ҳад қўшсак ва айирсак, қуйидаги формулалар ҳосил бўлади:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)), \qquad (2)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)). \qquad (3)$$

тригонометрик функциялар кўпаймасини йиғинди ёки айирма кўринишига келтириш мақсадида $\alpha + \beta = u$, $\alpha - \beta = v$ деб оламиз. Булардан $\alpha = \frac{u+v}{2}$, $\beta = \frac{u-v}{2}$ ларни топиб, (1) формулага қўйсак, натижада:

$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}. \qquad (4)$$

(4) фомулада v ни $-v$ га алмаштирилса,

$$\sin u - \sin v = 2\sin\frac{u-v}{2}\cos\frac{u+v}{2} \qquad (5)$$

(2) ва (3) формулалар бўйича қуйидаги тенгликлар ҳосил бўлади:

$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}, \qquad (6)$$

$$\cos u - \cos v = -2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}. \qquad (7)$$

1-мисол. $cos45° + cos15°$ ни ҳисоблаймиз.

Ечиш: (6) формула бўйича:

$$\cos 45° + \cos 15° = 2\cos\frac{45°+15°}{2}\cos\frac{45°-15°}{2} =$$

$$= 2\cos 60°\cos 30° = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тангенс ва котангенсга таъллуқли формулаларни чиқарайлик:

$$tgu + tgv = \frac{\sin u}{\cos u} + \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\sin u\cos v + \cos u\sin v}{\cos u\cos v} = \frac{\sin(u+v)}{\cos u\sin v},$$

бундан

$$tgu + tgv = \frac{\sin(u+v)}{\cos u\cos v},\ u,v \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \qquad (8)$$

Қуйидаги формулалар ҳам шу тартибда келтириб чиқарилади:

$$tgu - tgv = \frac{\sin(u-v)}{\cos u\cos v},\ u,v \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \qquad (9)$$

$$ctgu + ctgv = \frac{\sin(u+v)}{\sin u\sin v},\ u,v \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \qquad (10)$$

$$ctgu - ctgv = \frac{\sin(u-v)}{\sin u\sin v},\ u,v \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \qquad (11)$$

2–мисол. Агар $u + v + w = \pi$ бўлса, $ctgu + ctgv - tgw = ctguctgvtgw$ бўлишини исбот қиламиз.

Ечиш: $ctgu + ctgv - tgw = ctgu + ctgv - tg(\pi - u + v) =$

$$= ctgu + ctgv + tg(u + v) =$$

$$= \frac{\sin(u+v)}{\sin u\sin v} + \frac{\sin(u+v)}{\cos(u+v)} = \frac{\sin(u+v)(\cos(u+v)+\sin u\sin v)}{\sin u\sin v\cos(u+v)} =$$

$$= \frac{\sin(u+v)\cos u\cos v}{\sin u\sin v\cos(u+v)} =$$

$$= ctguctgvtg(u+v) = ctguctgvtg(u-v) = -ctguctgvtgw$$

5.4-§. Тригонометрик тенгламалама ва тенгсизликлар

Номаълум сон фақат тригонометрик функцияларнинг аргументи сифатида қатнашган тенглама (тенгсизлик) *тригонометрик тенглама (тригонометрик тенгсизлик)* дейилади.

$sin\alpha = m$, $cos\alpha = m$, $tg\alpha = m$, $ctg\alpha = m$ кўринишдаги тенгламалар *энг содда тригонометрик тенгламалардир*. Бу тенгламаларда тенглик белгиси тенгсизлик белгиси билан алмаштирилса, *энг содда тригонометрик тенгсизликлар* ҳосил бўлади.

Одатда тригонометрик тенгламаларни (тенгсизликларни) ечиш битта ёки бир нечта энг содда тригонометрик тенгламаларни (тенгсизликларни) ечишга келтирилади.

1. $\sin\alpha = m$ **кўринишдаги энг содда тенглама. Арксинус.** $sin\alpha = m$ тенгламани ечиш бирлик айланадаги шундай $B(\alpha)$ нуқтани топишдан иборатки, унинг $y = sin\alpha$ ординатаси m га тенг бўлиши керак. Бунинг учун горизонтал диаметрга параллел бўлган $y = m$ тўғри чизиқ билан бирлик айлананинг кесишиш нуқталарини топиш керак. Уч ҳол бўлиши мумкин:

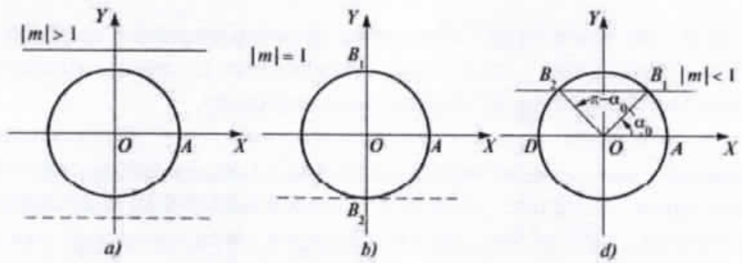
а) агар $|m| > 1$ бўлса, $y=m$ тўғри чизиқ айланани кесмай, ундан юқори ёки қуйидан ўтади (15-*а* расм). Демак, бу ҳолда тенглама ечимга эга эмас;

b) агар $|m| = 1$ бўлса, тўғри чизиқ айланага ёки юқоридаги $B_1\left(\frac{\pi}{2}\right)$ нуқтада ёки қуйидаги $B_2\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ нуқтада уриниб ўтади (15-b расм).

Бу ҳолда тенглама ягона илдизга эга: $\alpha=\frac{\pi}{2}$ ёки $\alpha=-\frac{\pi}{2}$. Агар функциянинг $t = 2\pi$ асосий даври ҳам эътиборга олинса, ечимни $\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z\left(\alpha=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z\right)$ кўринишда ёзиш мумкин;

d) $|m| < 1$ бўлса, $y=m$ тўғри чизиқ айланани $B_1(\alpha_0)$ ва $B_2(\pi-\alpha)$ нуқталарда кесади (15-*д* расм). Демак, тенгламанинг ечими шу нуқталарнинг координаталари бўлган барча сонлар тўпламларининг бирлашмаси бўлади:

$$\{\alpha_0 + 2k\pi, k\in Z\}\cup\{\pi - \alpha_0 + 2k\pi, k\in Z\}.$$



15-расм

Ечиш: I. $x=\alpha_0 + 2k\pi, k\in Z; x=\pi-\alpha_0 + 2k\pi, k\in Z$ кўринишда ҳам ёзиш мумкин. Ечимнинг геометрик таҳлилида $y = m$ тўғри чизиқ билан синусоиданинг кесишиш нуқтаси ҳақида ҳам гапирилиши мумкин.

1- мисол . $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ тенгламани ечамиз.

Ечиш: $y=\frac{1}{2}$ $(y< 1)$ тўғри чизиқ координатали айланани $B_1\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ва $B_2\left(\frac{2\pi}{6}\right)$ нуқталарда кесади (15-*д* расм). B_1 нуқта барча $\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$ сонлар тўпламига, B_2 нуқта эса барча $\frac{2\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$ кўринишдаги сонлар тўпламига мос. Барча ечимлар тўпламини $\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in Z; \frac{2\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$ ёки $\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in Z\right\}\cup\left\{\frac{2\pi}{6}+2k\pi, k\in Z\right\}$ кўринишда ёзиш мумкин.

2 - мисол. *а)* $sin\alpha = 1$; *б)* $sin\alpha = -1$; *д)* $sin\alpha = 0$ тенгламаларни ечамиз.

Ечиш: а) Координатали айланада фақат битта $B_1\left(\frac{\pi}{2}\right)$ нуқтанинг ординатаси 1 га тенг (15- *b* расм).

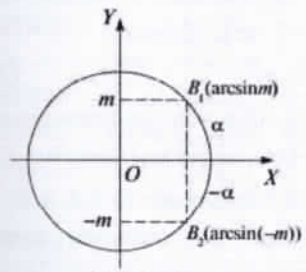
Жавоб: $\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z;$

б) $B_2\left(-\frac{\pi}{2}\right)=B_2(0;-1)$ нуқта бўйича $\alpha=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z;;$

д) ординатаси 0 бўлган нуқта иккита: $A(0)$ ва $D(\pi)$ (15- *д* расм). A нуқтага $2k\pi, k\in Z$; D нуқтага эса $\pi + 2k\pi, k\in Z$ сонлар мос келади. Бу иккала жавобларни умумлаштириб $\alpha=\pi k, k\in Z$ кўринишда ёзиш мумкин.

Жавоб: $\alpha=\pi k,\ k\in Z$

$|m|\le 1$ да $y=m$ тўғри чизиқ ва ўнг ярим бирлик айлана ягона умумий нуқтага эга бўлади. Шу сабабли $\sin\alpha=m(|m|<1)$ тенглама $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ оралиққа тегишли бўлган ягона x_0 ечимга эга. $\sin\alpha=m$ тенгламани



16-расм

қаноатлантирувчи $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

сони m соннинг *арксинуси* дейилади ва $\arcsin m$ орқали белгиланади.

Таърифга кўра

$$\sin(\arcsin m) = m \qquad (1)$$

ва

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin m \le \frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

бўлади. Аксинча, $\sin\alpha = m$ ва $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ бўлса, $\alpha = \arcsin m$ бўлади.

3 – мисол. *а)* $\arcsin\frac{1}{2}$ ифодаларни ҳисоблаймиз.

Ечиш: а) $\sin x = \frac{1}{2}$ бўйича $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{2\pi}{6}$. Арксинуснинг таърифи бўйича $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ бўлиши керак. Бу шартга $x_1 = \frac{\pi}{6}$ тўғри келади. Демак, $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

б) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2} \le -\frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{2}$. бўлгани учун $arcsin -\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$ бўлади.

д) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\pi}{2} \le -\frac{\pi}{3} \le \frac{\pi}{2}$. Демак, $arcsin\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = -\frac{\pi}{3}$.

16-расмдан $y = m$ ва $\alpha = \arcsin m$ сонлари орасидаги боғланиш аён бўлади. Чизмада $\alpha = \arcsin m$ ва $-\alpha = \arcsin(-m)$. Демак,

$$\arcsin(-m) = -\arcsin m \qquad (3)$$

Шундай қилиб, $|m| \le 1$ бўлган ҳолдаи $\sin\alpha = m$ тенгламанинг α ечими $\{\arcsin m + 2\pi k, k \in Z\} \cup \{\pi - \arcsin m + 2\pi k, k \in Z\}$ тўпламлар бирлашмаси кўринишида ёки $\alpha = \arcsin m + 2\pi k, k \in Z$; $\alpha = \pi - \arcsin m + 2\pi k, k \in Z$ кўринишда ёки бу кейинги икки формулани бирлаштириб,

$$\alpha = (-1)^{\kappa} arcsin\ m + \kappa\pi,\ k \in Z \qquad (4)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

4 - мисол. а) $\sin\alpha = \frac{1}{7}$; б) $\sin\alpha = -\frac{1}{9}$ тенгламаларни ечамиз.

Ечиш: а) $\sin\alpha = \frac{1}{7}$ тенглама ечимини (4) формула бўйича $\alpha = (-1)^{\kappa} arcsin\ \frac{1}{7} + k\pi,\ k \in Z$ кўринишда ёзамиз;

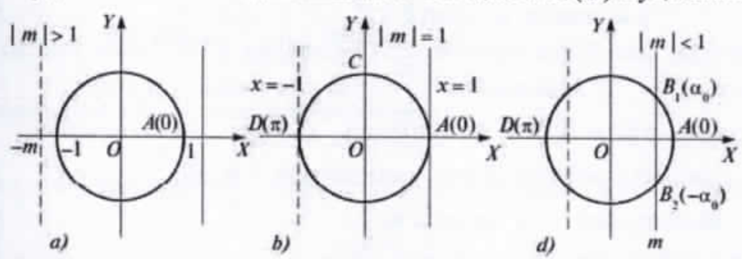
Ечиш: б) (3) муносабатга кўра $\arcsin\left(-\frac{1}{9}\right) = \arcsin\frac{1}{9}$.

$\{-arcsin\frac{1}{9} + 2\kappa\pi, k \in Z\} \cup \{\pi + arcsin\frac{1}{9} + 2\kappa\pi, k \in Z\}$ ёки

$\alpha = (-1)^{\kappa+1}\arcsin\frac{1}{9} + 2\kappa\pi, k \in Z$ эканлиги келиб чиқади.

$\cos\alpha = m$ кўринишдаги энг содда тенглама. Арккосинус.

Координатали айланада олинган $x \in R$ қайси $B(\alpha)$ нуқтанинг



17-расм

абциссаси $x = \cos\alpha$ га тенг. Шунга кўра берилган m бўйича $cos\ \alpha = m$ тенгламани ечиш нуқтанинг $x = m$ абциссаси бўйича унга мос $\alpha = \alpha_0$ ёй катталигини топишдан иборат. Уч ҳолни қараймиз:

1– ҳ о л. $|m| > 1$ да $x = m$ вертикал тўғри чизиқ айланани кесмайди. (17-*а* расм). Бу ҳолда тенглама ечимга эга эмас. Масалан, $cos\alpha = 2{,}8$ тенглама ечимга эга эмас, чунки $m = 2{,}8 > 1$.

2 – ҳ о л. Агар $|m| = 1$ бўлса, тўғри чизиқ айланани фақат бир нуқтада, яъни ёки $A(1; 0)$ нуқтада, ёки $D(-1; 0)$ нуқтада кесади (17-b расм). A нуқтанинг айлана бўйича координатаси $\alpha = 2\pi\kappa, k \in Z$.

Шунга кўра, $\cos\alpha = 1$ нинг ечими $\alpha = 2\pi\kappa, k\in Z$ сонлар тўплами бўлади. $D(-1;\,0) = D(\pi + 2\pi\kappa)$ экани эътиборга олинса, $\cos\alpha = -1$ нинг ечими $\alpha = \pi + 2\pi\kappa$ сонлар тўплами бўлади.

3 – ҳ о л. $|m|< 1$ бўлса, $x= m$ тўғри чизиқ айланани икки нуқтада кесади (17-∂ расм). Улардан бири $B_1(\alpha_0)$ нуқта $0\le\alpha_0\le\pi$ юқори ярим айланада жойлашади. α_0 сон m соннинг арккосинуси дейилади ва $\alpha_0 = \arccos m$ орқали белгиланади. Таърифга кўра, $\cos\alpha = \cos(\arccos m) = m$ ва $0\le \arccos m\le\pi$ бўлади.

Шу сингари $B_2(-\alpha_0)$ нуқта учун: $\cos(-\alpha_0) = \cos\alpha_0 = m$. Бундан, $-\alpha_0 = \arccos m$ ёки $\alpha_0 = -\arccos m$. Демак, $|m|< 1$, $k\in Z$ да $\cos\alpha = m$ тенгламанинг ечими $\{\arccos m+ 2\pi\kappa, k\in Z\}\cup\{-\arccos m+ 2\pi\kappa, k\in Z\}$ сонлар тўпламлари бирлашмаси бўлади. Уни

$$\{\pm\arccos m + 2\pi\kappa, k\in Z\} \qquad (1)$$

ёки

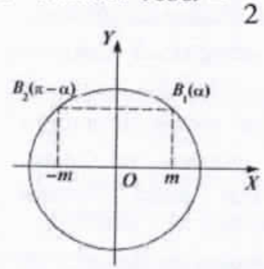
$$\pm\arccos m + 2\pi\kappa, k\in Z \qquad (2)$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин. 1.42-расмдан, OY ўқига нисбатан симметрик жойлашган $B_1(\arccos m) = B_1(\alpha)$ ва $B_2(\arccos(-m)) = B_2(\pi - \alpha)$ нуқталар бўйича $\alpha = \arccos m$ ва $\pi - \alpha = \arccos(-m)$ бўлишини аниқлаймиз. Ундан:

$$\arccos(-m) = \pi - \arccos m \qquad (3)$$

ҳосил қилинади, бунда $0\le\alpha\le\pi$.

1 – мисол. $\cos\alpha = \frac{\sqrt3}{2}$ тенгламани ечамиз.



18-расм

Ечиш: $\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt3}{2}$ бўлади.

Демак, $x = \frac{\sqrt3}{2}$ тўғри чизиқ координатали айланани $B_1\left(\arccos\frac{\sqrt3}{2}\right) = B_1\left(\frac{\pi}{6}\right)$ нуқтада ва абциссалар ўқига нисбатан B_1 га симметрик

жойлашган $B_2\left(-\arccos\frac{\sqrt3}{2}\right) = B_2\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

нуқтада кесади. B_1 га симметрик

жойлашган $B_2\left(-\arccos\frac{\sqrt3}{2}\right) = B_2\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ нуқтада кесади. Ечим B_1 нуқта бўйича $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k\in Z$, сонлар тўплами ва B_2 нуқта бўйича $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k\in Z$, сонлар тўплами бирлашмаси бўлади: $\cos\alpha = \frac{\sqrt3}{2}$,

$\left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k\in Z\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k\in Z\right\}$ ёки $\alpha = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k\in Z$

2 – мисол. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ ни ҳисобланг.

Ечиш: (3) формулага кўра, қуйидагини топамиз:

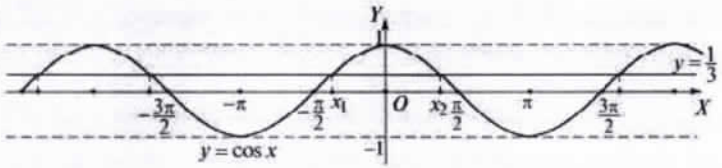
$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

3 – мисол. $\cos x = -\frac{3}{7}$ тенгламани ечинг.

Ечиш: $x = \pm\arccos\left(-\frac{3}{7}\right) + 2\pi k, k\in Z$ га эгамиз. (3) га кўра $x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{3}{7}\right) + 2\pi k, k\in Z$ бўлади.

4 – мисол. $\cos x = \frac{1}{3}$ тенгламани $y = \cos x$ функция графиги ёрдамида ечинг.

Ечиш: Айни бир XOY координаталар системасида $y = \cos x$ ва $y = \frac{1}{3}$ функциялар графикларини ясаймиз (19-расм). Бу графиклар чексиз кўп нуқталарда кесишади. $y = \cos x$ функция даври 2π бўлган даврий функция бўлгани учун берилган



19-расм

тенгламанинг $[-\pi;\ \pi]$ кесмадаги барча ечимларини топиш ва қолган ечимларни шу ечимлар орқали аниқлаш мумкин.

$[-\pi;\ \pi]$ оралиқда $y=cosx$ функция графиги $y=\frac{1}{3}$ функция графиги билан иккита кесишиш нуқтасига эга. Кесишиш нуқталарининг $x_1=-\arccos\frac{1}{3}, x_2=\arccos\frac{1}{3}$ абциссалари берилган тенгламанинг $[-\pi;\ \pi]$ даги барча ечимларидир. Шу сабабли барча ечимлар қуйидагича аниқланади: $x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi k, k\in Z.$

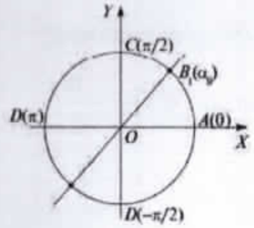
5 – мисол. $arccos(cos53°)$ни топинг.

Ечиш: $arccos(cosm)=m,\ (0\le m\le\pi)$ айниятдан фойдаланамиз. $53°=\frac{53\pi}{180}$ ва $0<\frac{53\pi}{180}<\pi$ бўлгани учун бу айниятга кўра

$$\arccos(\cos 53°)=\arccos\left(\cos\frac{53\pi}{180}\right)=\frac{53\pi}{180}$$

$tg\alpha=m$ ва $ctg\alpha=m$ кўринишдаги энг содда тенгламалар. Арктангенс ва арккотангенс

Координатали айлананинг ҳар бир $B(\alpha)$ нуқтаси Декарт координаталар системасидаги бирор $B(x,\ y)$ нуқта билан устма-уст тушишини ва $x=cos\alpha,\ y=sin\alpha$ эканини биламиз. Шунга кўра, номаълум α қатнашаётган $tg\alpha=m$ ёки $\frac{sin\alpha}{\cos\alpha}=m$ тенгламанинг барча ечимларини координатали айланабилан $\frac{y}{x}=m$ яъни $y=mx$ тўғри чизиқнинг кесишиш нуқталари ёрдамида аниқлаш мумкин. m нинг ҳар қандай қийматида $y=mx$ тўғри чизиқ айланани O (0; 0) нуқтага нисбатан симметрик бўлган B_1 ва B_2 нуқталарда кесади (20-расм).



20-расм

Улардан бири $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ўнг ярим айланада ётади. Бу нуқта $B_1(\alpha_0)$ бўлсин. Иккинчи нуқта $B_2(\alpha_0+\ \pi)$ бўлади. Демак, $tg\alpha\ =\ m$тенгламанинг барча ечимлари тўплами $\alpha=\alpha_0+\ 2\pi\kappa, k\in Z$ сонлар тўпламлари бирлашмасидан иборат. Барча ечимлар

$$\alpha\ =\ \alpha_0+\ 2\pi\kappa, k\in Z \tag{1}$$

формула билан аниқланади. m соннинг *арктангенси* деб $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ оралиқда ётадиган шундай α сонга айтиладики, унинг учун $tg\alpha\ =\ m$ бўлади. m соннинг арктангенси $\alpha=arctg\ m$ орқали белгиланади. Таърифга асосан, ҳар қандай m сон учун қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

$$tg(arctgm)=m,\ -\frac{\pi}{2}<arctgm<\frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Аксинча, $tg\alpha\ =\ m,\ -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ бўлса, $\alpha\ =arctg\ m$ бўлади.

Юқоридаги шартлардан ва тангенс тоқ функциялигидан $tg(-\alpha)\ =\ -tg\alpha\ =\ -m$бўлгани учун қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$arctg\ (-m)\ =\ -arctg\ m \tag{3}$$

Арккотангенс тушунчаси ҳам шу каби киритилади.

m соннинг *арккотангенси* деб (0; π) оралиқда ётадиган шундай α сонга айтиладики, унинг учун $ctg\alpha\ =\ m$ бўлади. m соннинг арккотангенси $\alpha\ =arcctg\ m$ орқали белгиланади. Унинг учун қуйидаги тенглик ўринли:

$$arcctg(-m)\ =\ \pi\ -arcctg\ m. \tag{4}$$

1 – мисол. а) $tgx=-\sqrt{3}$; б) $ctgx=-\sqrt{3}$ тенгламаларни ечамиз.

Ечиш: а) $tg\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$, демак, $x=-\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z.$

б) $ctg\frac{5\pi}{6}=-\sqrt{3}$, демак, $x=\frac{5\pi}{6}+\pi k, k\in Z.$

2 – мисол. *а)* $arctg\left(-\sqrt{3}\right)$; *b)* $arcctg\left(-\sqrt{3}\right)$ сонларни топамиз.

Ечиш: а) (3) формула бўйича *а)* $arctg\left(-\sqrt{3}\right)=-\,arctg\left(\sqrt{3}\right)=-\dfrac{\pi}{3}$;

б) (4) формула бўйича *б)* $arcctg\left(-\sqrt{3}\right)=\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{3}$;

3-мисол. Тенгламаларни ечинг:

$$tg\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=2ctgx-1; \qquad (1)$$

Ечиш: $tg\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=\dfrac{1+tgx}{1-tgx}$; $ctgx=\dfrac{1}{tgx}$ десак,

$$(1)\Rightarrow\frac{1+tgx}{1-tgx}=\frac{2}{tgx}-1\Leftrightarrow\begin{cases}y=tgx,\\ \dfrac{1+y}{1-y}=\dfrac{2-y}{y}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow tgx=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x_n=arctg\frac{1}{2}+n\pi,n\in Z.$$

Жавоб: $x=arctg\dfrac{1}{2}+n\pi,n\in Z.$

4-мисол. Тенгламаларни ечинг:

$$2tg^3x-2tg^2x+3tgx-3=0. \qquad (2)$$

Ечиш: $a=tgx$ деб белгиласак,

$$(2)\Rightarrow 2a^3-2a^2+3a-3=0\Leftrightarrow 2a^2(a-1)+3(a-1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(a-1)\left(2a^2+3\right)=0\Leftrightarrow a_1=1.$$

Демак, $tgx=a_1\Leftrightarrow tgx=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}(4k+1),k\in Z.$

Жавоб: $\left\{\dfrac{\pi}{4}(4k-1),k\in Z\right\}.$

5-мисол. Тенгламаларни ечинг:

$$2\sin^2x+tg^2x=2. \qquad (3)$$

Ечиш: Агар $tg^2x=\dfrac{\sin^2x}{1-\sin^2x}$ ва $a=\sin^2x$ десак, $0\le a<1$ эканлигини назарда тутиб, (3) дан

$$(3)\Rightarrow 2a+\frac{a}{1-a}=2\Leftrightarrow 2a^2-5a+2=0\Leftrightarrow a_{1,2}=\frac{5\pm3}{4}.$$

Шундай қилиб, $a_1\ne2,a_2=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\sin^2x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\sin x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x_k=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k;\ k\in Z;$$

$$\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x_n=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n;\ n\in Z;$$

Жавоб: $\left\{\dfrac{\pi}{4}(2n+1),n\in Z\right\}.$

Тенгламаларни ечишнинг асосий усуллари.

Тригонометрик тенглама номаълум аргументнинг тригонометрик функцияларига нисбатан

$$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_{n-1}z+a_n=0 \qquad (6)$$

кўринишдаги алгебраик тенгламага келтирилиши мумкин, бунда z орқали $sin\lambda x, cos\lambda x, tg\lambda x, ctg\lambda x$ функциялардан бири ифодаланган. Алгебраик тенглама каби (1) тригонометрик тенгламаларни ечишда янги номаълум киритиш, кўпайтувчиларга ажратиш ва ҳоказо усуллар қўлланилади. Жараён энг содда тригонометрик тенгламалардан бирини ечишгача беради. Тригонометрик тенгламаларни ечишда асосан қуйидаги ҳоллаR учрайди:

1) $R(F(x))=0$ тенгламада R тригонометрик функция белгиси остида x га боғлиқ бўлган $F(x)$ ифода турибди. $F(x)=z$ алмаштириш орқали тенглама энг содда $R(z)=0$ тригонометрик тенгламаларда бирига келтирилиши мумкин. Унинг $z=z_n$ илдизлари бирма-бир $F(x)=z$ га қўйилади ва x нинг қийматлàри топилади.

6 – мисол. $\sin\left(10x+\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. Мисолимизда $f(x)=10x+\dfrac{\pi}{8}$. Тенгламага $10x+\dfrac{\pi}{8}=z$ алмаштириш киритсак, $\sin z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ тенглама ҳосил бўлади. Унинг ечими: $z=(-1)^{\kappa}+\kappa\pi, k\in Z$. Бу $10x+\frac{\pi}{8}=z$ га қўйилади ва жавоб топилади:

$$x=\frac{1}{10}\left(-\frac{\pi}{8}+(-1)^{\kappa}+k\pi\right), k\in Z.$$

7 – мисол. $tg\left(x^2+6x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. $z=x^2+6x+\frac{\pi}{6}$ алмаштириш киритамиз. Тенглама $tg\,z=\frac{\sqrt{3}}{3}$ кўринишга келади. Ундан $z=\frac{\pi}{6}+\kappa\pi, k\in Z$ ни топамиз. У ҳолда $x^2+6x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in Z$ ёки $x^2+6x-k\pi=0, k\in Z$.

Квадрат тенгламанинг илдизлари $x=-3\pm\sqrt{9+k\pi}, k\in Z$ бунда $9+k\pi\geq 0$ ёки $k=-\frac{9}{\pi}=-2{,}86...$, яъни $k=-2; -1; 0; 1;...$

Жавоб: $x=-3\pm\sqrt{9+k\pi}, k\in Z$, $\kappa\geq -2$.

2) $sinx=sin\alpha$, $cosx=cos\alpha$ ва $tgx=tg\alpha$ тенгламалар. Бу тенгламалар мос равишда $x=(-1)^{\kappa}\alpha+\kappa\pi, k\in Z, x=\pm\alpha+2n\pi, n\in Z, x=\alpha+t\pi, t\in Z$ формулалар ёрдамида ечилиши мумкин.

8 – мисол. $cos(5x-45°)=cos(2x+60°)$ тенгламани ечинг.

Ечиш: $5x-45°=\pm(2x+60°)+360°k, k\in Z$ тенгламаларни ечамиз.

$5x-45°=(2x+60°)+360°k, k\in Z$

тенгликдан

$x=35°+120°k, k\in Z$

ечимлар гуруҳини,

$5x-45°=-(2x+60°)+360°k, k\in Z$

тенгликдан эса

$x=\frac{1}{7}(-15°+360°k), k\in Z$

ечимлар гуруҳини топамиз.

Жавоб: $x=35°+120°k, k\in Z$, $x=\frac{1}{7}(-15°+360°k), k\in Z$

9 – мисол. $sinx^2=sin(6x-5)$ тенгламани ечамиз.

Ечиш: $x^2=(-1)^{\kappa}(6x-5)+k\pi, k\in Z$ тенглама ҳосил бўлади.

Агар k жуфт бўлса, яъни $k=2n, n\in Z$ да $x^2=6x-5+2n\pi, n\in Z$ квадрат тенглама келиб чиқади. Унинг ечими

$$x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-(5-2-n\pi)},\ n\in Z, n\geq-\left[\frac{2}{\pi}\right].$$

Агар k тоқ бўлса, яъни $k=2m+1, m\in Z$ да $x^2=-6x+5+(2m+1)\pi, m\in Z$ кўринишда бўлади ва бундан

$$x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-(5-2-n\pi)}, m\in Z,\ m\geq\left[-\frac{14+\pi}{2\pi}\right].$$

3) $F(R(x))=0$ тенгламада R тригонометрик функция бошқа f функция белгиси остида туради. $R(x)=z$ алмаштириш масалани $F(z)=0$ тенгламани ечишга келтиради. Бу тенгламанинг z_1, z_2, ... илдизлари бўйича $r(x)=z_1, r(x)=z_2$, ... тенгламалар мажмуасини ҳосил қиламиз. Уни ечиш билан масала ҳал қилинади.

10 – мисол. $sin^2x+3sinx+1{,}25=0$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. $sinx=z$ алмаштириш натижасида $z^2+3z+1{,}25=0$ квадрат тенглама ҳосил бўлади. Унинг илдизлари $z_1=-5$, $z_2=-1$, $sinx=-5$ тенглама ечимга эга эмас. $sinx=-1$ тенглама $x=-90°+360°k, k\in Z$ ечимларга эга.

4) Баъзан берилган тенгламани *кўпайтувчиларга ажратиш* усулидан тригонометрик функцияlaR йиғиндисини кўпайтма кўринишига келтиришда фойдаланилади.

11 – мисол. $2cosx-2sin2x-2\sqrt{2}sinx+\sqrt{2}=0$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. $sin\,2x=2sinxcosx$ алмаштириш тенгламани $2cosx-4\sin x\cos x-2\sqrt{2}sinx+\sqrt{2}=0$ кўринишга келтиради. Унинг чап қисмини кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$2cosx(1-2sinx)+\sqrt{2}(1-2sinx)=0,$$

$$(1-2sinx)(2cosx+\sqrt{2})=0,$$

бундан:

$$\begin{cases}1-2\sin x=0,\\ 2\cos x+\sqrt{2}=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin x=0,5,\\ \cos x=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$$

Жавоб: $\{(-1)^k 30^\circ+\pi k, k\in Z\}\cup\{\pm 135^\circ+2\pi k, k\in Z\}$.

12 – мисол . $\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin x}=\cos x$ тенгламани ечинг.

Ечиш: Бу тенглама $\begin{cases}\cos x\ge 0,\\ 1+\dfrac{1}{2}sinx=cos^2x\end{cases}$ ёки $\begin{cases}\cos x\ge 0,\\ \sin x\left(\sin x+\dfrac{1}{2}\right)=0\end{cases}$

тенгламалар системасига тенг кучлидир.

$\begin{cases}\cos x\ge 0,\\ \sin x\left(\sin x+\dfrac{1}{2}\right)=0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x\ge 0,\\ \sin x=0;\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x\ge 0,\\ \sin x=-\dfrac{1}{2};\end{cases}\end{array}\right.$ бўлгани учун берилган

тенгламанинг барча ечимлари $x=2k\pi, k\in Z$ *ва* $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$

формулалар билан аниқланади.

Жавоб: $\{2k\pi, k\in Z\}\cup\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in Z\}$.

Хусусий усуллар. 1) Агар тенглама таркибида ҳар хил тригонометрик функциялар қатнашса, уларни бир исмли функцияга келтириш, сўнгра алмаштиришларни бажариш керак.

13 – мисол. $3sin^2x+4sinx+2cos^2x-7=0$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. $cos^2x=1-sin^2x$ алмаштириш берилган тенгламани $3sin^2x+4sinx+2-2sin^2x-7=0$ ёки $sin^2x+4\,sinx-5=0$ кўринишга келтиради. Охирги тенгламадан $sinx=z$ алмаштириш бажарсак, $z^2+4z-5=0$ квадрат танглама ҳосил бўлади. Бу квадрат тенглама $z_1=-5, z_2=1$ илдизларга эга. $z=sinx$ эканлигини эътиборга олсак, $sinx=-5$ ва $sinx=1$ тенгламалар ҳосил бўлади. Уларнинг биринчиси ечимга эга эмас, иккинчиси эса $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$ ечимларга эга.

2) Чап қисми $sinx$ ва $cosx$ га нисбатан рационал функция бўлган $R(sinx, cosx)=0$ тенглама. Олдинги бандларда кўрсатиб ўтилганидек, u ва v га нисбатан *рационал функция* деб, қийматлари u ва v ларни қўшиш, кўпайтириш ва бўлиш орқали ҳосил бўладиган функцияга айтилади. $R(sinx, cosx)=0$ тенгламада:

а) агар $sinx$ (ёки $cosx$) фақат жуфт даража билан қатнашаётган бўлса, $cosx=y$ (мос равишда $sinx=y$) алмаштириш бажарилади;

б) агар бир вақтда $sinx$ ифода $-sinx$ га, $cosx$ эса $-cosx$ га алмаштирилганда $R(sinx, cosx)$ функция ўзгармаса, яъни $R(sinx, cosx)=P(-sinx,-cosx)$ бўлса, $tgy=z$ алмаштириш бажарилади.

14 – мисол. $cos^4x+3sin\,x-sin^4x-2=0$ тенгламани ечамиз.

Ечиш: $cosx$ функция фақат жуфт даража билан қатнашмоқда. $cos^4x=(1-sin^2x)^2=1-2sin^2x+sin^4x$ бўлганидан тенглама фақат синусга боғлиқ: $2sin^2x-3sin\,x+1=0$; энди бу тенглама $sinx=y$ алмаштириш билан $2y^2-3y+1=0$кўринишга келади. Бунинг илдизлари: $y_1=\frac{1}{2}, y_2=1$. Шу тариқа масала $sinx=\frac{1}{2}$ *ва* $sinx=1$ энг содда тригонометрик тенгламаларни ечишга келади. Бу тенгламалар берилган тенгламанинг барча ечимларини беради:

Жавоб: $x=(-1)^\kappa\frac{\pi}{6}+\pi\kappa,\ k\in Z\ \ x;=\frac{\pi}{6}+2\pi\kappa,\ k\in Z.$

15 – мисол. $sin^2x+2sin2x+5cos^2x-4=0$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. Тенгламани $sin^2x+4\sin x\cos+5cos^2x-4=0$ кўринишда ёзиб олайлик. Бу тенгламани x нинг $cosx$ ни нолга айлантирадиган ҳеч қандай қиймати қаноатлатирмайди, чунки $cosx=0$ бўлганда $sin^2x=1$ бўлиб, тенгламадан $-3=0$ нотўғри тенглик ҳосил бўлади. Бундан ташқари, $sinx$ ва $cosx$ олдидаги ишоралар бир вақтда ўзгартирилганда, тенгликнинг чап қисми ўзгармайди. Демак, $tgx=y$ алмаштиришни бажариш мумкин.

Тенгламанинг иккала қисмини cos^2x га бўламиз:

$$tg^2x+4tgx+5-\frac{4}{\cos^2 x}=0.$$

$\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2x$ бўлгани учун

$3tg^2x-4tgx-1=0$ тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламада $tgx=t$ алмаштириш бажарсак, $3m^2-4m-1=0$ тенгламага эга бўламиз. Бу квадрат тенглама $\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}$ илдизларга эга. Топилган илдизлар ёрдамида берилган тенгламанинг барча илдизларини аниқлаймиз:

$$x=arctg\frac{2-\sqrt{7}}{3}\pi\kappa, k\in Z;\quad x=arctg\frac{2+\sqrt{7}}{3}+\pi\kappa,\ k\in Z.$$

3) $R(sinx;cosx)=0$ тенгламанинг чап қисми синус ва косинусга нисбатан бир жинсли функция, яъни, агар $sinx$ ва $cosx$ бир вақтда бирор λ га кўпайтирилса, тенгламанинг чап қисми λ^n га кўпайтирилган бўлади: $P(\lambda sinx;\lambda cosx)=\lambda^n R(sinx;cosx)$, бунда n – функциянинг бир жинслилик даражаси, ўзгармас миқдор. Бу ҳолда тенгликнинг иккала қисми $cos^n x$ га бўлинади ва $tgx=y$ алмаштириш бажарилади. Агар тенгликнинг барча ҳадлари $cos^m x$ га бўлинадиган бўлса, у ҳолда $cos^m x$ қавсдан ташқари чиқарилса, берилган тенглама икки тенгламага ажралади.

16 – мисол. $9cos^6x-4sin^3xcos^3x=0$ тенгламани ечамиз.

Ечиш: Тенгламанинг барча ҳадлари cos^3x га бўлинади. cos^3x ни қавсдан ташқарига чиқарамиз:

$$cos^3x(9cos^3x-4sin^3x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos^3 x=0,\\ 9\cos^3 x-4\sin^3 x=0.\end{array}\right.$$

$cosx=0$ тенглама изланаётган ечимнинг бир туркумини беради: $x=\frac{\pi}{2}+\ \pi\kappa, k\in Z$. Иккинчи тенглама $cosx$ ва $sinx$ га 2 нисбатан бир жинсли. Унинг иккала қисмини cos^3x га бўламиз ($cosx\neq0$, яъни $x\neq\ \pm\frac{\pi}{2}+\ \pi\kappa, k\in Z$ хол қараляпти). Натижада: $9-4tg^3x=0$ тенгламага эга бўламиз. Бу тенглама ечимнинг яна бир туркумини беради: $x=arctg\sqrt[3]{\frac{9}{4}}+\ \pi\kappa, k\in Z.$

Баъзан оддий алмаштиришлар тенгламани унга тенг кучли бир жинсли тенгламага келтириши мумкин. Масалан, $cos^2x-6sin\,xcosx=4$ нинг ўнг қисмини sin^2x+cos^2x га (яъни 1 га) кўпайтириш тенгламани $cos^2x-6sinxcosx=4(cos^2x+sin^2x)$ ёки $3cos^2x+6sinxcosx+4sin^2x=0$ бир жинсли тенгламага айлантиради. 3- мисолда ҳам шундай йўл тутиш мумкин эди.

4) Агар тригонометрик тенгламада x дан бошқа яна $2x$, $3x$ ва ҳоказо аргументнинг кўп каррали тригонометрик функциялари ҳам қатнашаётган бўлса, улар иккиланган, учланган аргумент тригонометрик функциялари ёрдамида фақат бир аргументга боғлиқ тригонометрик функция орқали ифодаланиши мумкин.

17 – мисол. $sin3xsin\,x-\ sin^2 2x+\ sinx-0,25=0$ тенгламани ечамиз.

Ечиш: $sin2x=2\sin x\cos x, sin3x=3sinx-4sin^3x, cos^2x=1-sin^2x$ формулалардан фойдаланиб, тенгламани ушбу кўринишга келтирамиз:

$3sin^2x-4sin^4x-4sin^2x\cdot(1-sin^2x)+\ sinx-0,25=0$ ёки ихчамлаштиришлардан сўнг: $sin^2x-sinx+0,25=0.$

Жавоб: $x=(-1)^k\cdot30^\circ+180^\circ k, k\in Z.$

18 – мисол. $cos3m\ sin6m\ \text{-}cos4msin5m=0$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. Каррали аргумент тригонометрик функциялари формулаларидан фойдалансак, ифода анча мураккаВкўринишга келади. Бу ўринда кўпайтмани йиғиндига айлантириш формулаларидан келиб чиқадиган қуйидаги тенгликлардан фойдаланиш қулай:

$cos3msin6m=sin9m+sin3m,\qquad cos4msin5m=sin9m+sinm.$

Бу ифодалар берилган тенгламага татбиқ этилса ва шакл алмаштиришлар бажарилса, $sin3m-\ sinm=0$ ёки $2sinmcos2m=0$ тенглама ҳосил бўлади. Унинг ечимлари $t=\pi\kappa;\ t=\frac{\pi}{4}\ +\frac{\pi k}{2}k\in Z$ сонлардан иборат. Бу сонлар берилган тенгламанинг барча ечимларидир.

5) $asinx+bcosx=c$ кўринишдаги тенгламаларни ечишнинг энг қулай усули ёрдамчи бурчак киритиш усулидир.

Агар $c=0$ бўлса, ечиш усули бизга таниш бўлган бир жинсли тенглама ҳосил бўлади.

$c \neq 0, a^2+b^2 \neq 0$ бўлсин. Тенгламанинг иккала томонини ҳам $\sqrt{a^2+b^2}$ га бўламиз:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$ бўлгани учун $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$ ва $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$ тенгликлар ўринли бўладиган φ сон мавжуддир.

Бу ерда,

$cos\varphi\ sinx+\ sin\varphi cosx=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ёки $sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ тенглама ҳосил бўлади. Ҳосил бўлган бу тенглама $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\leq 1$ бўлгандагина ечимга эга: $x=\ -\varphi+(-1)^n\, arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+n\pi, n\in Z.$

19 – мисол. $\sqrt{3}\,cosx+\ sinx=2$ тенгламани ечамиз.

Ечиш: Тенгламанинг иккала томонини $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2$ га бўлсак, $\frac{\sqrt{3}}{2}cosx+\ \frac{1}{2}sinx=1$ ҳосил бўлади.

$\frac{\sqrt{3}}{2}=sin\frac{\pi}{3},\quad \frac{1}{2}=cos\frac{\pi}{2}$ бўлганлиги учун

$$\sin\frac{\pi}{3}\cos x+\cos\frac{\pi}{3}\sin x=1\Rightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in Z.$$

20 – мисол. $2sin\ x+3cosx=4$ тенгламани ечамиз.

Ечиш: $\frac{4}{\sqrt{2^2+3^2}}>1$ бўлгани учун тенглама ечимга эга эмас.

6) Баъзи тригонометрик тенгламалар чап ёки ўнг томонини баҳолаш йўли билан осон ечилади.

21 – мисол. $cos2x+cos3x+cos4x=3$ тенгламани ечамиз.

Ечиш: Тенгламанинг чап томонидаги йиғинди $cos2x=1, cos3x=1, cos4x=1$ тенгликлар бир вақтда бажарилгандагина 3 га тенг бўлади. Бу тенгликлар бир вақтда бажарила олмайди. Демак, тенглама ечимга эга эмас.

22 – мисол. $1-cos^2 3x+\ sin^2 2x=0$ тенгламани ечамиз.

Ечиш: Тенгламани қуйидагича ёзиб оламиз: $sin^2 2x+sin^2 3x=0$. Бундан, $sin^2 2x=\ sin^2 3x=0$ система ҳосил бўлади. $sin2x=0$ тенглама $x=\ \pi k, x=\frac{\pi}{2}+\ \pi k$ илдизларга эга. $x=\frac{\pi}{2}+\ \pi n, n\in Z$ сонлари $sin^2 3x=0$ тенгламани қаноатлантирмайди. $x=\ \pi k$ илдиз эса $sin^2 3x=0$ тенгламани қаноатлантиради. Демак, берилган тенглама $x=\ \pi k, k\in Z$ илдизларга эга.

7) $p\ (sinx\pm cosx,\ sinxcosx)=0$ кўринишдаги тенгламалар (бу ерда p билан $sinx-cosx$ га нисбатан рационал функция белгиланган). Бу каби тенгламалар $sinx-cosx=\ t$ алмаштириш йўли билан ечилади.

23 – мисол. $sinx+cosx=1-2sinxcosx$ тенгламани ечамиз.

Ечиш: $sinx+cosx=t$ алмаштириш киритсак, $sin^2x+2sinxcosx+cos^2x=t^2$ ёки $2sinxcosx=t^2-1$ бўлади ва тенглама $t=1-(t^2-1)$ кўринишга келади. Бу тенгламанинг $m_1=1; m_2=\ -2$ илдизлари ёрдамида $sinx+cosx=1$; $cosx+sinx=\ -2$ тенгламаларни ҳосил қиламиз.

$sinx+cosx=1$ тенглама $x=\ \left(-1\right)^{\kappa}\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z$ илдизларга эга.

$cosx+\ sinx=\ -2$ тенглама эса ечимга эга эмас.

Жавоб: Демак, берилган тенглама $x=\ \left(-1\right)^{\kappa}\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z$ илдизларга эга.

Универсал алмаштириш. 3-§ нинг 4-бандидаги (9) ва (10) формулалардан фойдаланиб, $x\neq(2\kappa+1)\pi, k\in Z$ қийматлар учун қуйидаги муносабатларни ҳосил қиламиз:

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}; \qquad (1)$$

$$\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}. \qquad (2)$$

Агар $R(sinx;cosx)=0$ тенгламада (1) ва (2) алмаштиришлар бажарилиб, $tg\frac{x}{2}=z$ ўрнига қўйиш татбиқ этилса, чап томони z га нисбатан рационал функция бўлган тенглама ҳосил бўлади:

$$R=\left(\frac{2z}{1+z^2};\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)=0. \qquad (3)$$

тенглама илдизларини (агар бу илдизлар мавжуд бўлса) бирма-бир $tg\frac{x}{2}=z$ га қўйиб, x нинг изланаётган қийматлари топилади. $tg\alpha$ ифода $\alpha=\frac{x}{2}+k\pi, k\in Z$ қийматларда аниқланмаганлиги сабабли x нинг $x=(2\kappa+1)\pi, k\in Z$ қийматлари алоҳида текширилади.

21-**мисол.** $3sin\ t-cos\ t=3$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. (1) ва (2) формулалардан фойдаланиб, $sin\ t$ ва $cos\ t$ ни $tg\frac{t}{2}$ орқали ифодалаймиз, сўнг $tg\frac{t}{2}=z$ алмаштиришни киритамиз. Натижада, $\frac{6z}{1+z^2}=\frac{2z^2+4}{1+z^2}$ рационал тенглама ҳосил бўлади. Унинг илдизлари $z_1=1, z_2=2.$ Уларни кетма-кет $tg\frac{t}{2}=z$ га қўямиз. $tg\frac{t}{2}=1$ тенгламадан $t=\frac{t}{2}+2\pi\kappa, k\in Z$ ни, $tg\frac{t}{2}=2$ тенгламадан эса $t=2arctg2+2\pi k, k\in Z$ ни ҳосил қиламиз.

25-мисол. Тенгламани ечинг: $81^{\sin^2 x}+81^{\cos^2 x}=30$

Ечиш: $81^{\sin^2 x}=y\Rightarrow 81^{\cos^2 x}=81^{1-\sin^2 x}=\frac{81}{y}.$

У ҳолда $(10)\Rightarrow y^2-30y+81=0\Leftrightarrow y_1=3,\ y_2=27.$ Энди $n\in Z, k\in Z$ лар учун

$$а)81^{\sin^2 x}=3\Leftrightarrow 4\sin^2 x=1\Leftrightarrow \sin x=\pm\frac{1}{2}\Leftrightarrow x_n=\pm\frac{\pi}{6}+n\pi,$$

$$б)81^{\sin^2 x}=27\Leftrightarrow 4\sin^2 x=3\Leftrightarrow \sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow x_k=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi.$$

Жавоб: $\left\{\frac{\pi}{60}(30\pi+15\pm5), n\in Z\right\}.$

Тригонометрик тенгсизликларни исботлаш

Тригонометрик тенгсизликларни исботлаш масаласи баъзан алгебраик тенгсизликларни исботлаш масаласига келтирилади.

26 – мисол. $4cosx-3sinx\le 5$ тенгсизликни исбот қиламиз.

Ечиш: $tg\frac{x}{2}=z, x\ne\pi+2\pi k, k\in Z$ универсал ўрнига қўйиш тенгсизликни қуйидаги кўринишга келтиради:

$$\frac{4(1-z^2)}{1+z^2}-\frac{6z}{1+z^2}\le 5\Rightarrow 9z^2+6z+1\ge 0\Rightarrow (3z+1)^2\ge 0 \qquad (1)$$

тенгсизлик z нинг ҳар қандай қийматида ўринли. Демак, берилган тенгсизлик барча $x\ne\pi+2\pi\kappa, k\in Z$ лада бажарилади. Текшириш тенгсизликнинг $x\ne\pi+2\pi\kappa, k\in Z$ учун ҳам ўринли эканини кўрсатади.

27 – мисол. ABC учбурчакда $tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}\ge 1$ тенгсизликнинг бажарилишини исбот қиламиз.

Исбот. ABC учбурчакнинг A, B ва C бурчаклари учун

$$\left(tg^2\frac{A}{2}-tg^2\frac{B}{2}\right)^2+\left(tg^2\frac{A}{2}-tg^2\frac{C}{2}\right)^2+\left(tg^2\frac{B}{2}-tg^2\frac{C}{2}\right)^2\ge 0$$

ёки

$$tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}\ge tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}$$

муносабат ўринли эканлиги равшан. Бу ерда геометрия курсида маълум бўлган

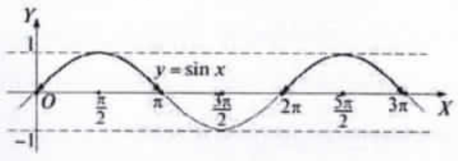
$$tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}=\frac{p-c}{p},\ tg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2}=\frac{p-b}{p} \text{ ва } tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}=\frac{p-a}{p}$$

тенгликлардан фойдалансак (бу ерда a, b, c – учбурчакнинг мос равишда A, B, C бурчаклари қаршисидаги томонлар, $p=\dfrac{a+b+c}{2}$), исботланиши керак бўлган тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Энг содда тригонометрик тенгсизликларни ечиш. $\sin x > m, \cos x > m,\ tgx > m, ctgx > m$ каби кўринишдаги тенгсизликларни ечишда координатали айланадан ёки тригонометрик функцияларнинг графикларидан фойдаланамиз.

28–мисол. *а)* $sin\alpha > 0$; *б)* $sin\alpha > m$, $-1 \le m < 1$; с) $sin\alpha < m$ тенгсизликларни ечамиз.

Ечиш: а) $sin\alpha > 0$ нинг ечимлар тўплами синусоиданинг абциссалар ўқидан юқорида жойлашган бўлаклари билан аниқланади (21- расм).

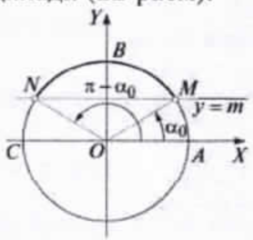


21-расм

Бу бўлаклардан бири абциссалар ўқининг (0; π) оралиғига, қолганлари ундан $2\pi k, k \in Z$ узоқликларда жойлашган оралиқларга мос келади.

Демак, $2\pi k < \alpha < (2k+1)\pi, k \in Z$ кўринишдаги оралиқларда ётувчи α сонларгина ечим бўлади.

б) $sin\alpha > m$ тенгсизликни ечамиз, бунда $-1 \le m < 1$. Бирлик айлананинг ординаталари m дан катта бўлган нуқталари $y = m$ тўғри чизиқдан юқорида жойлашади. Улар MBN ёйни ҳосил қилади (22-расм).



22-расм

Бу ёйга $M(\alpha_0)$ ва $N(\pi-\alpha_0)$ нуқталар кирмайди. Шундай қилиб, $\sin\alpha > m$ тенгсизликнинг ечими $(\alpha_0; \pi-\alpha_0)$ интервал ёрдамида аниқланади. $\alpha_0 = \arcsin m$ ва $y = \sin x$ функция даврий функция бўлгани учун берилган тенгсизликнинг барча ечимлар тўпламини

$$(arcsin\ m + 2\kappa\pi; \pi - arcsin\ m + 2\kappa\pi) k \in Z$$

ёки

$$arcsin\ m + 2\kappa\pi < \alpha < \pi - arcsin\ m + 2\kappa\pi, k \in Z$$

кўринишда ёзамиз.

$sin\alpha > m$ тенгсизлик $m \ge 1$ да бажарилмайди, $m < -1$ да эса барча α ларда бажарилади.

д) $sin\alpha < m$ тенгсизликни ечиш $\alpha = -z$ ўрнига қўйиш орқали юқорида қаралган ҳолга келади: $\sin z > -m$. Унинг барча ечимларини ёзамиз:

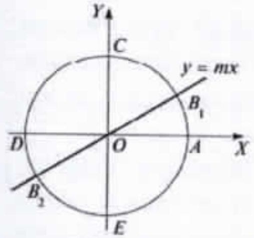
$$arcsin(-m) + 2\pi\kappa < z < \pi - arcsin(-m) + 2\pi\kappa, k \in Z.$$

$arcsin(-m) = -arcsin\ m$ ва $z = -a$ бўлгани учун берилган тенгсизликнинг барча ечимлари қуйидагича бўлади:

$$-\pi - arcsin\ m + 2\kappa\pi < \alpha < arcsin\ m + 2\kappa\pi, k \in Z.$$

30 – мисол. *а)* $cos\alpha > m$; *б)* $cos\alpha < m$ тенгсизликларни ечамиз.

Ечиш: а) $m \ge 1$ да тенгсизлик ечимга эга эмас, $m < -1$ да эса α нинг барча қийматлари тенгсизликни қаноатлантиради. Биз $-1 \le m < 1$ бўлган ҳолни қараймиз. 17-*д* расмга қаралганда $m < cos\alpha \le 1$ *га* B_2AB_1 ёй мос келади, бунда $B_1(a_0)$ *ва* $B_2(-a_0)$ лар $x = m$ тўғри чизиқ билан координатали айлананинг кесишиш нуқталари, $A(0)$ –ҳисоб боши нуқтаси. Демак, $cos\alpha > m$ тенгсизликнинг ечими $-a_0 < a < a_0$ ёки $-arccosm < \alpha < arccosm$, ёки функция даври эътиборга олинса, $-arccos\ m + 2\pi k < \alpha < arccos\ m + 2\pi k, k \in Z$ бўлади.



23-расм

б) $cos\ \alpha < m$ тенгсизлигини ечиш $\alpha = \pi - z$ алмаштириш орқали юқорида қаралган тенгсизликка келтирилади: $cosz > -m$. Бундан $-arccos(-m) + 2k\pi < z < arccos(-m) + 2k\pi, k \in Z$ ни топамиз. $z = \pi - \alpha$ ва $arccos(-m) = \pi - arccos\ m$ бўлгани учун

$arccosm + 2k\pi < \alpha < 2(k+1)\pi - arccosm, k \in Z$

бўлади.

31 – мисол. $tg\alpha < m$ ва $tg\alpha > m$ тенгсизликлар ечимини топамиз.

Ечиш: $arctg\ m$ таърифидан фойдаланамиз (23-расм).

$B_1(a_0)$ нуқта EAC ярим айланани EAB_1 ва B_1C ёйларга ажратади, бунда $E\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ва $C\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. Ундан E, B_1, C нуқталар чиқарилади. EAB_1 ёйда $tg\alpha < m$, B_1C ёйда эса $ctg\alpha > m$ тенгсизлик бажарилади. Демак, $ctg\alpha < m$ тенгсизликнинг ечими

$$-\frac{\pi}{2}+\kappa\pi < \alpha < arctg\ m+\kappa\pi, k\in Z,$$

$tg\alpha > m$ тенгсизлик ечими эса

$$arctg\ m+\kappa\pi < \alpha < \frac{\pi}{2}+\kappa\pi, k\in Z$$

бўлади.

Шу каби $ctg\alpha < m, ctga > m$ тенгсизликлар ечими мос равишда

$$arcctg\ m+k\pi < \alpha < \pi+k\pi, k\in Z \quad ва \quad k\pi < \alpha < arcctg\ m+k\pi, k\in Z$$

бўлади.

32 – мисол. $ctgx\le 1$ тенгсизликни ечамиз.

Ечиш. $y=1$ тўғри чизиқ $y=ctg$ котангенсоидани чексиз кўп A_0, A_1, A_2, ... нуқталарда кесади (24-расм). Ҳосил бўладиган оралиқлардан бири $\left[\frac{\pi}{4};\pi\right]$. Котангенснинг даврини ҳам эътиборга олиб, ечимни $\frac{\pi}{4}+\ \pi\kappa < x < \ \pi\ +\ \pi\kappa, k\in Z$ кўринишда ёзамиз.

Тригонометрик тенгсизликларни интерваллар усули билан ечиш. $F(t)>0$ ёки $F(t)<0$ тригонометрик тенгсизликларни ечишда интерваллар усулидан фойдаланамиз. Шу мақсадда олдин $F(t)$ функциянинг T_0 асосий даври, $F(t)=0$ тенгламанинг [0; T_0) оралиқда ётган илдизлари ва узилиш нуқталари топилади. Улар [0; T_0) оралиқни бир неча интервалга ажратади. sinаш нуқталари усули қўлланилиб, функциянинг интерваллардаги ишоралари аниқланади. Функциянинг хоссаларидан, жумладан, жуфт-тоқлигидан фойдаланиш ишни осонлаштиради.

33 – мисол. $F(a)=cos2\alpha-cos3\alpha<0$ тенгсизликни ечамиз.

Ечиш. 1) $cos2\alpha$ нинг даври: $cos(2\alpha\ +2\pi)=cos2(\alpha\ +T_1)$, бундан $2\alpha\ +2\pi\ =2(\alpha\ +T_1), T_1=\ \pi$; шу каби $cos3\alpha$ нинг даври

$T_2=\frac{2\pi}{3}$. Бу сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчиси , яъни $T_0=2\pi$ сони $F(x)$ функциянинг асосий даври бўлади;

2) $F(\alpha)=0$ тенглама илдизлари $2\alpha=\ \pm3\alpha+2\pi\kappa, k\in Z$ муносабат бўйича аниқланади. Бизга улар ичидан (0; T_0) оралиқда ётганларини аниқлаш етарли, қолганлари T_0 давр билан такрорланади. Оралиқнинг $\alpha=0$ чап учида $F(0)=0$, яъни $F(x)<0$ тенгсизлик бажарилмайди. Демак, оралиқнинг чап учи очиқ қолади. оралиқнинг ичида ётган илдизларни топамиз. Шу мақсадда муносабатдаги κ га кетма-кет 0, 1, 2, ... қийматлар бериш ва а нинг қийматлари ичидан (0; 2π) интервалда ётганларини ажратиш керак. Улар: $\frac{2\pi}{5},\frac{4\pi}{5},\frac{6\pi}{5},\frac{8\pi}{5}$.

3) f функция сон ўқида узлуксиз;

4) $(0;2\pi)$ оралиқ $\left(0;\frac{2\pi}{5}\right],\left[\frac{2\pi}{5};\frac{4\pi}{5}\right],\left[\frac{4\pi}{5};\frac{6\pi}{5}\right],\left[\frac{6\pi}{5};\frac{8\pi}{5}\right],\left[\frac{8\pi}{5};2\pi\right)$ интервалларга ажралади;

5) $\left(0;\frac{2\pi}{5}\right]$ оралиқдан синаш нуқтаси сифатида $\frac{\pi}{3}$ ни олайлик. Унда $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}-\cos\frac{3\pi}{3}=-\frac{1}{2}+1>0$. Демак, бу оралиқда берилган тенгсизлик бажарилмайди. Текшириш тенгсизлик $\left[\frac{2\pi}{5};\frac{4\pi}{5}\right],\left[\frac{4\pi}{5};\frac{6\pi}{5}\right]$ оралиқларда бажарилишини кўрсатади. Ечим ушбу оралиқлар бирлашмасидан иборат:

$$\left(\frac{2\pi}{5}+2\pi k;\frac{4\pi}{5}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{6\pi}{5}+2\pi k;\frac{8\pi}{5}+2\pi k\right), k\in Z.$$

34 – мисол. $F(\alpha)=tg\alpha-tg\frac{\alpha}{3}>0$ тенгсизлигини ечамиз.

Ечиш: 1) $tg\alpha$ нинг даври $T_1=\pi$, $t\frac{\alpha}{3}g$ нинг даври $T_2=3\pi.T_1$ *ва* T_2 нинг энг кичик умумий бўлинувчиси, яъни f нинг асосий даври $T_0=3\pi$. Тенгсизликнинг [0; 3π] оралиқдаги ечимини топиш етарли. Қолганлари сон ўқида 3π давр билан такрорланади;

2) $tg\alpha - tg\dfrac{\alpha}{3} = 0$ тенгламанинг илдизлари: $\alpha = 3\pi k, k \in Z$. Улардан $[0; 3\pi]$ оралиқда ётгани 0 ва 3π;

3) f функция $cos\alpha = 0$ *ва* $cos\dfrac{\alpha}{3} = 0$ да, яъни $\alpha = \dfrac{\alpha}{3} + \pi\kappa, k \in Z$ нуқталарда узилишга эга. Шу жумладан $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}$ нуқталар қаралаётган $[0; 3\pi]$ оралиқда жойлашган;

4) топилган нуқталар $[0;3\pi]$ оралиқни $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right],\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right],\left[\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{5\pi}{2}\right],\left[\dfrac{5\pi}{2};3\pi\right]$ қисмларга ажратади;

5) синиш нуқталари ёрдамида берилган тенгсизлик ечими ушбу интерваллардан тузилганлигини аниқлаймиз:

$$\left(3\pi k;\frac{\pi}{2}+3\pi k\right),\left(\frac{3\pi}{2}+3\pi k;\frac{5\pi}{2}+3\pi k\right),k \in Z.$$

f – тоқ функция. Шунга кўра ҳисоблашларни $[0; 3\pi]$ да эмас, балки $\left[-\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$ да бажариш маъқул. Ҳақиқатан, $F(\alpha) > 0$ тенгсизлик $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ да бажарилса, $\left[-\dfrac{\pi}{2};0\right]$ да $F(\alpha) < 0$ тенгсизлик бажарилади.

Жавоб: $\left(-\dfrac{3\pi}{2}+3\pi k;-\dfrac{\pi}{2}+3\pi k\right),\left(3\pi k;\dfrac{\pi}{2}+3\pi k\right),k \in Z.$

35-мисол. Ушбу $2\sin^2 x - \sin x - 1 < 0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш:

$$(2) \Leftrightarrow (\sin x - 1)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \sin x < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ 2\pi k - \dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z. \end{cases}$$

5.5-§. Тригонометрик тенгламалар системаси.

Тригонометрик тенгламалар системасини ечишда юқорида кўрилган тенгламаларни ечиш усулларидан ва тригонометрик формулалардан фойдаланилади.

Қуйида тенгламалар системасини ечишнинг ўзига хос хусусиятлари билан танишамиз.

1–мисол. $\begin{cases} 5\sin x = \sin y, \\ 3\cos x = 2 - \cos y \end{cases}$ тенгламалар системасини ечамиз.

Ечиш. Берилган системани $\begin{cases} 5\sin x = \sin y, \\ 2 - 3\cos x = \cos y \end{cases}$ кўринишда ёзиб оламиз. Бу системанинг квадратга кўтарилган тенгламаларини ҳадма-ҳад қўшсак,

$$25\sin^2 x + 4 - 12cosx + 9cos^2 x = 1$$

ёки

$$16cos^2 x + 12cosx - 28 = 0$$

тенглама ҳосил бўлади. Ҳосил бўлган бу тенгламани $cosx$ га нисбатан ечиб, $cosx = 1$, $cosx = -\dfrac{7}{4}$ тенгламаларга эга бўламиз. $cosx = -\dfrac{7}{4}$ тенглама ечимга эга эмас. Демак, $cosx = 1$ бўлиши зарур. $cosx = 1$, яъни $x = 2\pi n, n \in Z$ да $sinx = 0$ бўлгани учун $\begin{cases} 5 \cdot 0 = \sin y, \\ 2 - 3 \cdot 1 = \cos y \end{cases}$ систамага эга бўламиз. Бу системадан, $y = (2k+1)\pi, k \in Z$ эканлиги топилади.

Жавоб: $x = 2\pi n, n \in Z, y = (2k+1)\pi, k \in Z.$

2 – мисол. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{4}{3}, \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$ тенгламалар системасини ечамиз.

Ечиш:

$$\begin{cases} \sin x+\sin y=\dfrac{4}{3}, \\ x+y=\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{4}{3}, \\ x+y=\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{4}{3}, \\ x+y=\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{4}{3}, \\ x+y=\dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

$\left|\cos\dfrac{x-y}{2}\right|\le 1$ шарт бажарилмаганлиги учун система ечимга эга эмас.

3 – мисол. Тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases} \sin x-\cos y=1, \\ \cos 2x-\cos 2y=1. \end{cases} \qquad (1)$$

Ечиш: $u=\sin x,\ v=\cos y$ деб белгилаб олсак,

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x-\cos y=1, \\ \sin^2 x+\cos^2 y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u-v=1, \\ u^2+v^2=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\dfrac{1}{2}, \\ v=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Бу ердан $(n,k\in Z)$;

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x=\dfrac{1}{2}, \\ \cos y=-\dfrac{1}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_n=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+n\pi, \\ y_k=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi. \end{cases}$$

Жавоб: $\begin{cases} x_n=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+n\pi, \\ y_k=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi. \end{cases} \quad (n,k\in Z).$

4 – мисол. Тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{12}, \\ \dfrac{1-tg2x}{1+tg2x}=tg2y. \end{cases} \qquad (2)$$

Ечиш: Система $x\ne\dfrac{\pi}{4}(1+2k),\ y\ne\dfrac{\pi}{4}(1+2t),\ x\ne\dfrac{\pi}{8}(8m-1);k,l,m\in Z$ шартда аниқланган бўлиб, унда $(n\in Z)$;

$$(2)\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-\dfrac{\pi}{12}, \\ \dfrac{1-tg2x}{1+tg2x}=tg\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-\dfrac{\pi}{12}, \\ tg\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)=tg\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-\dfrac{\pi}{12}, \\ x=\dfrac{5\pi}{48}-\dfrac{n\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_n=\dfrac{5\pi}{48}-\dfrac{n\pi}{4}. \\ y_n=\dfrac{\pi}{48}-\dfrac{\pi n}{4}. \end{cases} \qquad (2a)$$

Жавоб: Ўзгарувчиларнинг (2а) даги қийматлари системанинг аниқланиш соҳасига киргани учун у ечим бўлади.

5-мисол. Тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases} tgx+ctgy=3, \\ |x-y|=\dfrac{\pi}{3}. \end{cases} \qquad (3)$$

Ечиш: $x\ne\dfrac{\pi}{4}(1+2k),\ y\ne\dfrac{\pi}{2}+m\pi\,(m\in Z),\ x\ne\pi+n\pi\,(n\in Z)$ шартлар асосида

$$(3)\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x-y)=3\cos x\sin y, \\ |x-y|=\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos x\sin y=\dfrac{1}{3}, \\ |x-y|=\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(y+x)+\sin(y-x)=\dfrac{1}{3}, \\ |x-y|=\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

бу ерда $\cos(x-y)=\cos|x-y|=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ эканлигини ҳисобга оламиз.

а) $x>y$ бўлса,

$$x-y=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\sin(y-x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\sin(y+x)=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}>1$$

бу ҳолда система ечимга эга эмас.

б) $x<y$ бўлса, $x-y=-\frac{\pi}{3}\Rightarrow\sin(y+x)=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Демак:

$$(3)\Leftrightarrow\begin{cases} x-y=-\dfrac{\pi}{3}, \\ x+y=(-1)^k\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\pi k,\ k\in Z \end{cases}$$

Бу ердан:

$$\begin{cases} x_k=-\dfrac{\pi}{6}+(-1)^k\cdot\dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z \\ y_k=\dfrac{\pi}{6}+(-1)^k\cdot\dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z \end{cases} \quad (4)$$

Жавоб: Барча (4) лар билан аниқланган (x_k, y_k) лар ечими ҳисобланади.

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МАСАЛАЛАР

V- БОБ. ТРИГОНОМЕТРИК ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР.

1. Айниятларни исботланг:

$a)\ \frac{tg\alpha tg2\alpha}{tg2\alpha-tg\alpha}=\sin2\alpha;\ b)\ tg\frac{\alpha}{2}+2\sin^2\frac{\alpha}{2}ctg\alpha=\sin\alpha;$

$c)\ \frac{\sin^2 2\beta-4\sin^2\beta}{\sin^2 2\beta-4+4\sin^4\beta}=2ctg4\beta;$

2. $a)\ \sin\alpha(\sin\alpha+\sin\beta)+\cos\alpha(\cos\alpha+\cos\beta)=2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2};$

$b)\ \sin\alpha(\sin\alpha-\sin\beta)+\cos\alpha(\cos\alpha-\cos\beta)=2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2};$

$c)\ (\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2};$

2. Соддалаштиринг:

$a)\ \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha};\ b)\ \frac{2\sin3\alpha\cos3\alpha}{\cos^2 3\alpha-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-3\alpha\right)};$

$c)\ \frac{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha};$

3. Тўғрилигини текширинг:

$a)\ tg55^\circ-tg35^\circ=2tg20^\circ;$

$b)\ \cos10^\circ\cdot\cos50^\circ\cdot\cos70^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8};$

$c)\ \cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{8};$

4. Тригонометрик тенгламаларни ечинг:

1) $3\sin^2 x-2\sin x=0;$ 4) $\cos^2 x+12\cos x=10;$

2) $4tg2x+5tg^2x=0;$ 5) $ctg^2 2x+3=4ctg2x;$

3) $\cos2x-\sin2x=2\sin x\cos x;$ 6) $(tgx-ctgx)^2=1+ctg^2x.$

5. Жуфт даражасини пасайтириш усули билан ечиладиган тригонометрик тенгламалар:

$a)\sin^2 x+\sin^2 2x=\cos^2 3x+\cos^2 4x;$

$b)\sin^4 2x+\cos^4 2x=1;$

$c)\sin^4 2x+\cos^4 2x=\dfrac{1+\sin 6x}{2};$

6.Тенгсизликларни ечинг:

$a)\sin x>-\dfrac{1}{2};\ \ b)\cos 2x<\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ \ c)tgx>-\sqrt{3}.$

7.Тенгсизликларни ечинг:

$a)2\sin^2 x-7\sin x+3\ge 0;\ b)12\cos^2 x+7\sin x<13;$

$c)tgx+ctgx<-3;\ d)\cos x+\cos 2x+\cos 3x<0;$

$e)2\cos 2x+\sin 2x>tgx;\ \ f)\sin x\left(\cos x+\dfrac{1}{2}\right)\le 0.$

6. Тенгламалар системаларини ечинг:

$$a)\begin{cases}\sin x\sin y=-\dfrac{1}{4},\\ \cos x\cos y=\dfrac{3}{4};\end{cases}\quad b)\begin{cases}tgx-tg2y=1\\ tg(x-2y)=\dfrac{4}{3};\end{cases}$$

$$c)\begin{cases}tgx+\sin 2y=\sin 2x,\\ 2\sin y\cos(x-y)=\sin x;\end{cases}$$

$$d)\begin{cases}\sqrt{2}\sin x=\sin y,\\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{5}\cos y.\end{cases}\quad e)\begin{cases}x=y+\dfrac{\pi}{4},\\ tgx=-3tgy;\end{cases}$$

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. RON LARSON, LAURIE BOSWELL, TIMOTHY D. KANOLD Algebra 1: Concepts and Skills (Ron Larson - Laurie Boswell - Timothy Kanold - Lee Stiff). McDougal Littell 2004.

2. **Ron Larson** (The Pennsylvania State UniversityтThe Behrend ollege). **With the assistance of David C. Falvo** (The Pennsylvania State University. The Behrend College) «College Algebra» (Ron Larson & David Falvo), 9th edition. Cengage Learning 2014.

3. Allyn J.Washington (*Dutchess Community College)* Richard S. Evans (*Corning Community College).* Basic Technical Mathematics with Calculus (Allyn Washington & Richard Evans), 11th edition. Pearson 2018.

4. James Stewart, Lothar RedLin, SaLeem Watson «Precalculus: Mathematics for Calculus» (James Stewart - Lothar Redlin - Saleem Watson), 7th edition. Cengage Learning 2015.

5. В.М. Говоров, Дыбов и др. Сборник конкурсных задач по математике. «Наука» М., 1983 й.

6. М.И. Сканави. Сборник конкурсных задач по математике «Высшая школа», М. 1978й.

7. А.А Бухштаб «Теория чисел» М.1966 г.

8. Е.Л Вандер Варден «Алгебра» М 1979 г.

9. Д.К. Фаддеев, И. С Соминский «Сборник задач по вышей алгебре» М.1977 г.

10. Александров В.А. Задачник-практикум по теории чисел/ – М.: Просвещение, 1972 г.

11. Алфутова Н.Б., Устинов А.В. “Алгебра и теория чисел”, Сборник задач для математических школ.-М.: МЦНМО, 2002,-264 с.

12. Барабанов Е.А. Задачи заключительного тура Минской городской математической олимпиады школьников / Е.А. Барабанов, И.И. Воронович, В.И. Каскевич, С.А. Мазаник. – Минск, 2006 г.- 352 с.

13. Боревич З. И. Теория чисел / З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич. – М.: Наука, 1972 г.

14. Бошмаков М.И., Беккер Б.М., Гольговей В.М., Ионин Ю.И. Алгебра и начала анализа: задачи и решения. Учебное пособие. – М.: Высшая школа. 2004 г.

15. Воробьев Н.Н. Признаки делимости. Серия "Популярные лекции по Математике"— Вып. 39. — М.: Наука, 1963 г.

16. Гильфорд А.О. Решение уравнений в целых числах / А.О. Гильфорд. – М.: Наука, 1983 г. – 64 с.

17. Грибанов В.У. Сборник упражнений по теории чисел / В.У. Грибанов, П.И. Титов. – М.: Просвещение, 1964 г. – 144 с.

18. Грибанов В.У., Титов П.И. Сборник упражнений по теории чисел. Учебное пособие для физико-математических факультетов пед. институтов. – М.: Просвещение, 1964 г. – 142 с.

19. Гринько, Е.П. Методы решения алгебраических олимпиадных задач: учебно-методическое. пособие / Е.П. Гринько; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест: БрГУ, 2012 г. – 108 с.

20. Гринько, Е.П. Система работы с интеллектуально одаренными детьми: монография / Е.П. Гринько; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест: Изд-во БрГУ, 2009 г. – 229 с.

21. Довбыш Р.И. Математические олимпиады: 906 самых интересных задач и примеров с решениями [Текст] / Р.И. Довбыш, Н.А. Кулеско, В.В. Лиманский, Л.Л. Оридрога, Л.Л. Потемкина, Н.Л. Трегуб. – Ростов н/Д: Феникс; Донецк: издательский центр «Кредо», 2006 г.

22. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика / Г. Дэвенпорт –М.: Наука, 1965 г.

23. Зарубежные математические олимпиады / Конягин С.В., Тоноян Г.А., Шарыгин И.Ф. и др.; под ред. И. Н. Сергеева – М.: Наука, Физматлит, 1987 г.

24. Хинчин, А.Я. Цепные дроби. / А.Я. Хинчин. – М.: Наука, 1978 г.

25. Исмаилов Ш.Н. Сонлар назарияси. Т: 2008 й. - 63 б.

26. Andreescu T., Andrica D., Feng Z. 104 Number Theory Problems. Boston: Birkhäuser, 2007.

27. Engel A. Problem-Solving Strategies. Springer-Verlag New York Inc. 1998.

28. H. Lee. Problems in elementary number theory.

29. Mathematical Olympiads, Problems and solutions from around the world, 1998-1999. Edited by Andreescu T. and Feng Z. Washington. 2000.

30. T.Andreescu, D. Andrica, Z. Feng. 104 Number Theory Problems. Boston: Birkhäuser, 2007.

31. А.У. Умирбеков, Ш.Ш.Шаабзалов «Математикани такрорланг» Тошкент «Ўқитувчи» 1989 й.

32. Д.М. Махмудова, Г.Х.Дўсмуродова, И.А. Эшматов, П.Т. Абдуқодирова "Алгебра ва сонлар назарияси" Тошкент "Университет" 2020 й.

33. Э.М. Сайдаматов, А.К. Аманов, А.С. Юнусов, С.С. Ходжабагян "Алгебра и основы математического анализа" Тошкент "Ilm Ziyo", 2017 й.

34. А.А Бухштаб, И.М. Виноградов «Сонлар назарияси асослари» Т. 1959 й.

35. Ж.Х Хожиев, А.С Файнлейб "Алгебра ва сонлар назарияси курси" Т. 2001 й.

36. Д.И Юнусова, А.С Юнусов " Алгебра ва сонлар назарияси"

37. Р.Ҳ. Вафоев, Ж.Ҳ. Ҳасанов, К.Н. Файзиев, Ю.Й. Ҳамроев "Алгебра ва анализ асослари".

38. http://my.netian.com/ideahitme/ eng.html

39. Math Links, http://www.mathlinks.ro

40. Art of Problem Solving, http://www.artofproblemsolving.com

41. Math Pro Press, http://www.mathpropress.com

42. Математические задачи, http://www.problems.ru

Хайдаров И.Қ., Қутлимуротов А.Р., Дўсмуродова Г.Х., Жураева Н.В., Маҳкамов Э.М.

ЭЛЕМЕНТАР МАТЕМАТИКА (АЛГЕБРА)

Ўқув қўлланма

Муҳаррир: Х. Таҳиров
Техник муҳаррир: С. Меликузиева
Мусаҳҳиҳ: М. Юнусова
Саҳифаловчи: А. Муҳаммад

Нашр. лиц № 2244. 25.08.2020.
Босишга рухсат этилди 22.12.2022.
Бичими 60x84 1/16. Офсет қоғози. ‘‘Times New Roman’’ гарнитураси. Ҳисоб-нашр табоғи. 16,0.
Адади 100 дона. Буюртма № 120.

«ZEBO PRINT» МЧЖ босмахонасида чоп этилди.
Манзил: Тошкент ш., Яшнобод тумани, 22-ҳарбий шаҳарча.

ҚАЙДЛАР УЧУН

ҚАЙДЛАР УЧУН