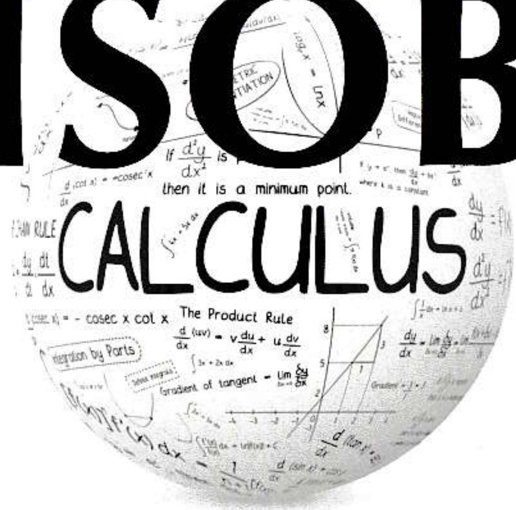
S.J. TURAYEV
I.N. RUZIMURODOV
R.V. SALOMOVA

HISOB

CALCULUS



O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI AXBOROT TEXNOLOGIYALARI VA KOMMUNIKATSIYALARINI RIVOJLANTIRISH VAZIRLIGI

TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI QARSHI FILIALI

DASTURIY INJINIRING KAFEDRASI

S.J.TURAYEV, I.N.RUZIMURODOV, R.V.SALOMOVA

HISOB (CALCULUS)

O'zbekiston Respublikasi oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan o'quv qo'llanma sifatida tavsiya etilgan

TOSHKENT
"CHINOR FAYZI BALAND"
2022

UO'K **510.56(075)**
KBK **22.161ya73**

T 87 Hisob (Calculus) fanidan: O'quv qo'llanma. S.J.Turayev, I.N.Ruzimurodov, R.V.Salomova; "Chinor fayzi baland" – T.: 2022 yil, 240 b.

Taqrizchilar:

Qarshi MII "Oliy matematika" kafedra mudiri, dotsent, **B.E.Eshmatov**

TATU Qarshi filiali f-m.f.n. dotsent, **A.K.Muhammadiyev**

Ushbu o'quv qo'llanma Hisob (Calculus) fanidan Oliy ta'lim muassasalarining 5330600-Dasturiy injiniringi, 5330500-Kompyuter injiniringi ta'lim yo'nalishlari kunduzgi va sirtqi ta'lim bakalavr talabalariga mo'ljallab yozilgan. Unda **Hisob (Calculus)** fanining asoslarini sodda tilda ifodalashga harakat qilingan. O'quv qo'llanmada mavzularni chuqur o'zlashtirish maqsadida o'z-o'zini tekshirish uchun savollar va mustaqil yechishga mo'ljallangan masollar ham keltirilgan. O'quv qo'llanma ko'proq amaliy tavsifga ega bo'lib, undan talabalar, tadqiqotchilar va professor-o'qituvchilar foydalanishi mumkin.

UO'K **510.56(075)**
KBK **22.161ya73**

O'quv qo'llanma Toshkent axborot texnologiyalari universiteti qarshi filialining 17-mart 2022-yil № 106-sonli bayonnomasi asosida kengashning qaroriga asosan chop etildi.

ISNB 978-9943-7877-7-3

MUNDARIJA

KIRISH

Bugungi kunda yoshlarni zamon talablariga mos raqobatbardosh kadrlar qilib tayyorlash dolzarb masala hisoblanib, mamlakatimizda bu masalaga juda katta e'tibor berilmoqda. Jumladan, 2017-yilning 7-fevralida yurtboshimiz Sh.M.Mirziyoyev tashabbusi bilan qabul qilingan 2017-2021 yillarga muljallangan O'zbekiston Respublikasini rivojlantirishning beshta ustuvor yo'nalishi bo'yicha «Harakatlar strategiyasi» dasturi hamda 2020-yil 7-maydagi "Matematika sohasidagi ta'lim sifatini oshirish va ilmiy tadqitotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi qarorlarining ishlab chiqilishi va tasdiqlanishi kelajakda bajarishimiz lozim bo'lgan bir qator vazifalarni belgilab berdi.

Respublikamizda matematika faniga yuqori hissa qo'shgan olimlar va akademik-larimizdan shu jumladan mamlakatimizdan tashqarida ham ma'lum. Yuqori natijalarga ega bo'lishda matematiklardan V.I.Romanovskiy, T.N.Qori-Niyoziy, T.A.Sarimsoqov, S.X.Sirojiddinov, M.S.Saloxiddinov, T.A.Azlarov, Sh.A.Ayupov, Sh.A.Alimov, A.A.Abdushukurov va boshqalarning xizmatlari nihoyatda kattadir.

Ushbu o'quv qo'llanma Davlat ta'lim standarti talablariga mos Dasturiy injiniring, Kompyuter injiniringi talabalari uchun "Hisob" fani namunaviy dasturi asosida yozilgan.

Hisob fanidan qo'llanmani yozishdan maqsad-talabalarda amaliy iqtisodiyotga yo'naltirishni kuchaytirish bilan, ularning fundamental matematik tayyorgarlik darajasini oshirish nazarda tutilgan.

Zamonaviy kadrlarni yetishtirish borasida shunday xulosa chiqarish kerakki, hozirgi zamonda fundamental fanlar bilan bir qatorda ularning tadbiqiga bag'ishlangan maxsus kurslarni ko'proq o'qitish dolzarb masalalardan biri bo'lib bormoqda. O'quv materiallarni talabalar o'zlashtirishi qiyin bo'lmasligi uchun mavzularga doir misollar yechib ko'rsatilgan.

Mualliflar o'quv qo'llanma to'g'risidagi tanqidiy fikr va mulohazalarni mamnuniyat bilan qabul qiladi.

I BO'LIM. DIFFERENSIAL HISOBI

§ 1. Sonlar ketma-ketlik tushunchasi. Ketma-ketlikning limiti. Funksiya tushunchasi. Funksiya limiti. Funksiya limitini hisoblash

1.1. Sonlar ketma-ketligi tushunchasi va uning limiti

Aytaylik, biror qoidaga ko'ra har bir natural n songa $(n \in N)$ bitta x_n haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsin $(f: n \to x_n)$. Ravshanki, bu holda argumenti n bo'lgan funksiyaga ega bo'lamiz. Bunday funksiya natural argumentli funksiya deyiladi:

$$x_n = f(n).$$

Bu funksiya qiymatlaridan iborat ushbu

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots \qquad (1.1)$$

to'plam sonlar ketma-ketligi deyiladi va $\{x_n\}$ kabi belgilanadi . $x_1, x_2, \ldots$ sonlar (1.1) ketma-ketlikning hadlari, x_n esa (1.1) ketma-ketlikning umumiy yoki n-hadi deyiladi.

Odatda, ketma-ketlik, uning umumiy hadi orqali belgilanadi.

Masalan,

1) $x_n = \frac{n+1}{n}$; $\quad \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots,$

2) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$; $\quad 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots$ - ketma-ketliklar bo'ladi.

Ketma-ketlikning har bir x_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ hadi sonlar o'qida bitta nuqtani tasvirlaydi.

Biror $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots \qquad (1.1)$$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

Agar (1.1) ketma-ketlikning hadlari uchun

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n \le \ldots \quad (x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < \ldots),$$

ya'ni

$$\forall n \in N \ uchun \ x_n \le x_{n+1} \ (\forall n \in N \ uchun \ x_n < x_{n+1})$$

bo'lsa, (1.1) ketma-ketlik o'suvchi (qat'iy o'suvchi) deyiladi.

Agar (1.1) ketma-ketlikning hadlari uchun

$$x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge \ldots \ge x_n \ge \ldots \quad (x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > \ldots),$$

ya'ni

$$\forall n \in N \ uchun \ x_n \ge x_{n+1} \ (\forall n \in N \ uchun \ x_n > x_{n+1})$$

bo'lsa, (1.1) ketma-ketlik kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) deyiladi.

O'suvchi hamda kamayuvchi ketma-ketliklar umumiy nom bilan monoton ketma-ketliklar deyiladi.

1-ta'rif. *Agar a nuqtaning ixtiyoriy $U_\varepsilon(a)$ atrofi olinganda ham (1.1) ketma-ketlikning biror hadidan boshlab keyingi barcha hadlari shu atrofga tegishli bo'lsa, a son x_n ketma-ketlikning limiti deyiladi va*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \ \ yoki \ \ n \to \infty \ \ da \ \ x_n \to a$$

kabi yoziladi.

Ta'rifdagi "biror hadidan boshlab, keyingi barcha hadidan" iborasi "shunday natural n_0 topilib, $\forall n > n_0$ uchun" deb aytilishini bildiradi.

Demak, $\forall n > n_0$ uchun $x_n \in U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, \ a + \varepsilon)$ bo'lishi bunday hadlarning ushbu

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \quad -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$

ya'ni

tengsizlikning bajarilishini keltirib chiqaradi. $\quad |x_n - a| < \varepsilon$

Unda yuqorida keltirilgan ta'rifni quyidagicha ham aytsa bo'ladi: agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday natural n_0 son topilib, barcha $n > n_0$ uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a son x_n ketma-ketlikning limiti deyiladi.

Misol. *Ushbu*

$$x_n = \frac{1}{n}:$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

ketma-ketlikning limiti 0 bo'lishi isbotlansin.

◀Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olamiz. Ravshanki berilgan ketma-ketlikning limiti 0 bo'lishi uchun

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \qquad (1.2)$$

tengsizlikning n ning biror qiymatidan boshlab o'rinli bo'lishini ko'rsatish yetarli. Keyingi tengsizlik

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \qquad (1.3)$$

ni yechib, $n > \frac{1}{\varepsilon}$ bo'lishini topamiz. Agar n_0 sifatida $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ ($[a]$–a soninig a dan katta bo'lmagan butun qismi) olinsa, $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ unda barcha $n > n_0$ da (1.3) demak, (1.2) tengsizlik bajariladi. Ta'rifga binoan $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ bo'ladi. ▶

Agar $\{\alpha_n\}$ ketma-ketlikning limiti 0 ga teng bo'lsa, bu ketma-ketlik cheksiz kichik miqdor deyiladi.

Masalan, $\alpha_n = \frac{1}{n}$ ketma-ketlik cheksiz kichik miqdor bo'ladi, chunki

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 .$$

Aytaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti a ga teng bo'lsin:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a .$$

U holda $\alpha_n = x_n - a$ *dan* $|\alpha_n| < \varepsilon$ bo'lib, u cheksiz kichik miqdor bo'ladi. Natijada $x_n = a + \alpha_n$ bo'ladi. Masalan, $x_n = \frac{n+1}{n}$ ketma-ketlik uchun $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ bo'lib, $\alpha_n = \frac{1}{n}$ cheksiz kichik miqdor bo'lganligidan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ bo'lishi kelib chiqadi.

Biror $\{x_n\}$: $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

Agar har qanday musbat M son olinganda ham, ketma-ketlikning biror hadidan boshlab, keyingi barcha hadlari uchun $|x_n| > M$ bo'lsa, x_n ketma-ketlikning limiti cheksiz deyiladi va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ kabi yoziladi.

Masalan,

$$x_n = (-1)^n \cdot n : -1, 2 - 3, 4 \ldots$$

ketma-ketlikning limiti ∞ bo'ladi, chunki

$$|x_n| = |(-1)^n n| = n$$

bo'lib, har qanday musbat M son olinganda ham shunday natural n son topiladiki, $n > M$ tengsizlik bajariladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti cheksiz, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ bo'lsa, $\{x_n\}$ cheksiz katta miqdor deyiladi.

Masalan, $x_n = n$: 1,2,3,4,... ketma-ketlik cheksiz katta miqdor bo'ladi, chunki $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.

1.2. Funksiya ta'rifi. Funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohalari (to'plamlari)

Aytaylik, x va y o'zgaruvchilar mos ravishda $E(E \subset R)$ hamda $F(F \subset R)$ haqiqiy sonlar to'plamlarida o'zgarsin: $x \in E$, $y \in F$.

1-ta'rif. *Agar E to'plamdan olingan har bir x songa biror f qoidaga (yoki qonunga) ko'ra F to'plamning bitta tayin y soni mos qo'yilgan bo'lsa, E to'plamda funksiya aniqlangan deyiladi.*

Bunda E to'plam funksiyaning aniqlanish (berilish) sohasi, $\{y = f(x) : x \in E\} = F$ to'plam funksiyaning o'zgarish sohasi, x - erkli o'zgaruvchi, funksiya argumenti, y - erksiz o'zgaruvchi, x ning funksiyasi deyiladi.

Ta'rifdagi x, y va f larni birlashtirib, y o'zgaruvchi x ning funksiyasi deyilishini

$$y = f(x) \qquad (1.4)$$

kabi yoziladi va "igrek teng ef iks" deb o'qiladi.

Ravshanki, har bir x ga boshqa qoidaga ko'ra bitta tayin y mos qo'yiladigan bo'lsa, unda boshqa funksiya hosil bo'ladi. U, masalan, $y=\varphi(x)$ kabi yozilishi mumkin.

Eslatma. *Funksiya ta'rifida E $y=f(x)$ $y=\sqrt{4-x^2}$ va F to'plamlarning berilishi aytilgan bo'lsada, amaliyotda bu to'plamlar (1.1) munosabatdan foydalanib topiladi. Jumladan, funksiyaning aniqlanish sohasi (to'plami) argument x ning shunday qiymatlaridan iborat to'plam bo'lishi kerakki, bu to'plamdan olingan har bir x ning qiymatida $y=f(x)$ munosabat ma'noga ega bo'lsin.* Masalan, da, uning ma'noga ega bo'lishi uchun $4-x^2\geq 0$ bo'lishi kerak. Keyingi tengsizlikni yechamiz: $4-x^2\geq 0$, $x^2-4\leq 0$, $(x-2)(x+2)\leq 0, -2\leq x\leq 2$.

Demak, qaralayotgan funksiyaning aniqlanish sohasi (to'plam) $E=[-2,2]$ bo'ladi. Bu funksiyaning o'zgarish sohasi esa $F=[0,2]$ bo'ladi.

Funksiya ta'rifidagi mos qo'yuvchi qoida turlicha usul-analitik, jadval, grafik va boshqa usullarda bo'lishi mumkin.

1.3. Funksiya limiti ta'rifi

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $E(E\subset R)$ to'plamda berilgan bo'lib, a nuqtaning ixtiyoriy atrofida to'plamning cheksiz ko'p nuqtalari bo'lsin. Ushbu

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \qquad (1.5)$$

ketma-ketlik quyidagi ikki shartni qanoatlantirsin:

1) (1) ketma-ketlikning barcha hadlari $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi E ga tegishli va $\forall n\in N$ uchun $x_n\neq a$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ mavjud.

Bu ikki shartni qanoatlantiruvchi ketma-ketliklar cheksiz ko'p bo'ladi. Modomiki, $x_n\in E$ $(n=1,2,3,\ldots)$ ekan, bu nuqtalarda $f(x)$ funksiya tayin $f(x_n)$ qiymatlarga ega bo'lib, ular

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots f(x_n), \ldots \qquad (1.6)$$

ketma-ketlikni (sonlar ketma-ketligini) hosil qiladi. Ravshanki, bunday ketma-ketliklar ham cheksiz ko'p bo'ladi.

Ta'rif: *Agar ikkala shartni qanoatlantiruvchi har qanday (1.5) ketma-ketlik uchun, funksiya qiymatlaridan iborat (1.6) ketma-ketlik har doim bitta A limitga ega bo'lsa, A $f(x)$ funksiyaning $x\to a$ dagi limiti deyiladi va*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

kabi belgilanadi.

Ta'rifdagi a va A lar chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin. Agar A chekli son bo'lsa, funksiya limiti chekli deyiladi.

Demak,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

bo'lishidan

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

bo'lishi kelib chiqsa, unda A $f(x)$ funksiyaning $x\to a$ dagi limiti bo'ladi.

Misol. Ushbu

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+1}$$

limit topilsin.

Yechish usullari.

$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ funksiya $E=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ to'plamda aniqlangan. Har bir hadi shu to'plamga tegishli bo'lgan va 2 ga intiluvchi (limiti 2 bo'lgan) ixtiyoriy x_n:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 2, \quad x_n\neq 2$$

$$\frac{1}{x_1+1}, \frac{1}{x_2+1}, \frac{1}{x_3+1}, \ldots, \frac{1}{x_n+1}, \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n+1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+1)} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n + 1} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{3}$. ▶

Funksiya limiti ta'rifidan quyidagilar kelib chiqadi:

1) Ixtiyoriy a (chekli yoki cheksiz) uchun $\lim\limits_{x\to a} x=a$ bo'ladi,

2) Agar barcha x larda $f(x)=c=const$ bo'lsa, ixtiyoriy a (chekli yoki cheksiz) uchun $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$ bo'ladi. Aytaylik, a va A lar chekli bo'lsin. Unda $x\to a$ *da* $f(x)\to A$ bo'lishini quyidagicha ham ta'riflasa bo'ladi:

Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ *son olinganda ham shunday* $\delta>0$ *son topilsaki,*

$$0<|x-a|<\delta$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x\in E$ *uchun*

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A *son* $f(x)$ *funksiyaning* $x\to a$ *dagi limiti deyiladi.*

Ravshanki, $|x-a|<\delta$ tengsizlik $a-\delta<x<a+\delta$ ga ekvivalent, ya'ni bir yo'la $a-\delta<x<a$ va $a<x<a+\delta$ bajariladi.

Agar $a-\delta<x<a$ bo'lganda $|f(x)-A|<\varepsilon$ bo'lsa, A son $f(x)$ funksiyaning $x\to a$ dagi chap limiti deyiladi va

$$f(a-0)=\lim_{x\to a-0} f(x)=A$$

kabi belgilanadi.

Agar $a<x<a+\delta$ bo'lganda $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$ $|f(x)-A|<\varepsilon$ bo'lsa, A son $f(x)$ funksiyaning $x\to a$ dagi o'ng limiti deyiladi va kabi belgilanadi.

Eslatma. *Funksiyaning o'ng* $f(a+0)$, *chap* $f(a-0)$ *limitlari bir-biriga teng bo'lishi ham mumkin, teng bo'lmasligi ham mumkin.* $f(a+0)=f(a-0)$ *bo'lgan holda* $f(x)$ *funksiya* $x\to a$ *da limitga ega bo'ladi.*

Misol. *Ushbu*

$$x_n=\frac{n}{n+1}:\quad \frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\ldots,\frac{n}{n+1},\ldots$$

ketma-ketlik monotonlikka tekshirilsin.

Yechish usullari.

$$x_n=\frac{n}{n+1},\qquad x_{n+1}-x_n=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$x_{n+1}=\frac{n+1}{n+1+1}=\frac{n+1}{n+2}$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}>0\ \ x_{n+1}-x_n>0\ \ x_n<x_{n+1}$$

Berilgan ketma-ketlik qat'iy o'suvchi. ▶

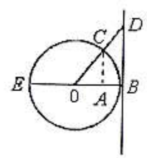
Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-4x}$
2. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x^2-5x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-16}{x-4}$
4. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$
5. $\lim\limits_{x\to 2.5}\frac{x}{x-2.5}$
6. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x+2}{x-5}$
7. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-16}{x^2-9}$

§ 2. 1- va 2- ajoyib limitlar. Ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar. Cheksiz kichik funksiyalar taqqoslash

1) Ushbu $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ *limitlar isbotlansin.*

◀Radiusi $OB=1$ bo'lgan aylana chizamiz:



2.1-chizma

Trigonometrik funksiyalar: $\sin x, \cos x, tgx$ larning ta'riflariga binoan

$$AC = |\sin x|,$$
$$OA = |\cos x|,$$
$$BD = |tgx|,$$

bo'ladi. Aytaylik, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ bo'lsin, unda BC yoyi BC vatardan kichik bo'lmaganligi va o'z navbatida vatar AC dan kichik bo'lmaganligi uchun

$$|\sin x| \le |x| \qquad (2.1)$$

bo'ladi. Shuningdek, OCA uchburchakda uning bir tomoni qolgan ikki tomonlari ayirmasidan kichik emasligi haqidagi tasdiqqa ko'ra

$$\cos x \ge 1 - |\sin x| \qquad (2.2)$$

bo'ladi.

Ravshanki, (2.1) tengsizlikdan

$$-|x| \le \sin x \le |x|$$

bo'lishi kelib chiqadi. Ayni paytda, $x \to 0$ da

$$-|x| \to 0, \qquad |x| \to 0$$

bo'lganligi uchun 1-teoremaga ko'ra

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

bo'ladi.

Ravshanki, $\cos x \le 1$. Unda (2.2) munosabatga muvofiq

$$1 - |\sin x| \le \cos x \le 1$$

bo'lib, 1-teoremaga ko'ra

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

bo'ladi.

Ma'lumki, ΔOAC ning yuzi $\frac{1}{2}\cos x \cdot |\sin x|$

OBC sektorning yuzi $\frac{1}{2}|x|$, ΔOBD ning yuzi $\frac{1}{2}|tgx|$

bo'lib, ular uchun

$$\frac{1}{2}\cos x \cdot |\sin x| \le \frac{1}{2}|x| \le \frac{1}{2}|tgx|$$

tengsizliklar bajariladi. Bu tengsizliklardan,

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{|\sin x|}{|x|}, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

munosabatlarni e'tiborga olgan holda

$$\cos x \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x},$$

bo'lishini topamiz. Ma'lumki,

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

Unda 1-teoremaga ko'ra $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ bo'ladi.

2) Ushbu $\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ limit isbotlansin.

Ma'lumki, $\lim_{n_x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Aytaylik, $x > 1$ bo'lsin. Agar x ning butun qismini n desak, unda $n \le x < n+1$ bo'lib,

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n}$$

bo'ladi. Bu munosabatlardan

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Ravshanki,

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} =$$
$$= \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e \cdot 1 = e,$$
$$\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e.$$

Unda 1-teoremaga ko'ra

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

bo'ladi. Aytaylik, $x<-1$ bo'lsin. Agar $x=-t$ deyilsa, u holda

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t=$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=e\cdot 1=e$$

bo'ladi. Demak, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

Keyingi muhim limitlarni keltirish bilan kifoyalanamiz.

3)Ushbu $\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e, \qquad (a>0, a\neq1)$

xususan, $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ munosabat o'rinli.

4)Ushbu $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad (a>0)$ tenglik o'rinli.

5)Ushbu $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$ tenglik o'rinli.

6) Ushbu $\lim_{x\to a}\left[U(x)\right]^{V(x)}=C$ limitda:

a) agar $\lim_{x\to a}U(x)=A, \qquad \lim_{x\to a}V(x)=B$ *bo'lsa,* $C=A^B$ *bo'ladi*

b) agar $\lim_{x\to a}U(x)=A\neq1, \qquad \lim_{x\to a}V(x)=\pm\infty$

bo'lsa, qaralayotgan limit bevosita hisoblanadi.

d) agar $\lim_{x\to a}U(x)=1, \qquad \lim_{x\to a}V(x)=\infty$ bo'lsa, u holda $C=e^{\lim_{x\to a}[U(x)-1]V(x)}$

bo'ladi. ▶

Funksiya limiti haqidagi ma'lumotlardan, shuningdek muhim limitlardan foydalanib funksiyalarning limitini hisoblaymiz.

1-*Misol.* *Ushbu* $\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{\sin x}$ *limit hisoblansin.*

Yechish usullari.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1, \qquad \lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2^x-1}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}}{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{\ln 2}{1}=\ln 2.\ ▶$$

2-*Misol.* *Ushbu* $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$ *hisoblansin.*

Yechish usullari.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^x==\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x\cdot\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e\cdot e=e^2.\ ▶$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cos x}{x}$
2. $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\cos x}$
3. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sin x}$
4. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{1+\sin 2x}$
5. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{1-\sin 2x}$
6. $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\sin x}{1+\sin 2x}$
7. $\lim_{x\to0}\frac{\cos x+\sin x}{1-\sin x}$

§ 3. Funksiyaning uzluksizligi. Uzilish nuqtalari va ularning turlari

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya E to'plamda $(E\subset R)$ berilgan bo'lib, $x_0\in E$ bo'lsin.

1-ta'rif. *Agar*

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0) \qquad (3.1)$$

bo'lsa, $f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada uzluksiz deyiladi.*

Masalan $y=f(x)=x^2$ funksiya ixtiyoriy $x_0\in(-\infty,+\infty)$da uzluksiz bo'ladi, chunki $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} x^2=\lim\limits_{x\to x_0}(x\cdot x)=x_0\cdot x_0=x_0^2=f(x_0)$.

Agar $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'ngdan,

agar $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chapdan uzluksiz deyiladi.

Masalan $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2, & agar \quad x\le 2\\ x, & agar \quad x>2\end{cases}$ funksiya uchun

$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0}\left(-\frac{1}{2}x^2\right)=-2=f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0} x=2\ne f(2)$

bo'ladi. Demak berilgan funksiya $x_0=2$ nuqtada chapdan uzluksiz.

$y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi sharti $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ ni quyidagicha yozish mumkin: $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0$.

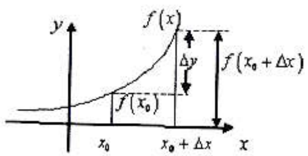
Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$\Delta x=x-x_0$, $\quad \Delta y=\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0) \qquad (3.2)$

Odatda, Δx argument orttirmasi, Δy esa funksiya orttirmasi deyiladi.

$x=x_0+\Delta x$, $\quad \Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Δx va Δy larning geometrik ma'nolari 3.1-chizmada keltirilgan.



3.1-chizma

(3.1) va (3.2) munosabatlardan

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0 \qquad (3.3)$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, (3.3) munosabat $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligi ta'rifi sifatida qaralishi mumkin.

Masalan, $f(x)=c=const$ funksiya ixtiyoriy $x_0\in(-\infty,+\infty)$ nuqtada uzluksiz bo'ladi, chunki $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(c-c)=0$.

2-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya E to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, funksiya E to'plamda uzluksiz deyiladi.

3.1. Funksiyaning uzilishi va uzilish turlari

Ma'lumki, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi. $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi ushbu

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ ning mavjudligi,

2) $A=f(x_0)$bo'lish shartlarining bajarilishi bilan ifodalanadi.

Agar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

munosabat bajarilmasa, $f(x)$ funksiya uzilishga ega, x_0 nuqta esa uzilish nuqtasi deyiladi.

Ma'lumki, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi $f(x_0+0)$ o'ng limiti, $f(x_0-0)$ chap limiti mavjud bo'lib,

$$f(x_0+0)\ne f(x_0-0)$$

bo'lsa, yoki bu limitlardan hech bo'lmaganda biri mavjud bo'lmasa, $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lmaydi. Binobarin, bu holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzilishga ega bo'ladi.

Masalan, $f(x)=\begin{cases}-1, & agar \quad x<0 \quad bo'lsa,\\ 0, & agar \quad x=0 \quad bo'lsa,\\ 1, & agar \quad x>0 \quad bo'lsa\end{cases}$ funksiya uchun

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0} 1=1$, $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}(-1)=-1$

bo'lib, $x=0$ nuqtada funksiyaning o'ng va chap limitlari bir-biriga teng bo'lmaydi. Demak, berilgan funksiya uzilishga ega va $x=0$ nuqtada uning uzilish nuqtasi bo'ladi.

Ushbu funksiya uchun $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & agar \quad x>0 \quad bo'lsa,\\ -x, & agar \quad x\le 0 \quad bo'lsa,\end{cases}$ $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}\sin\frac{1}{x}$ - mavjud emas, $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}(-x)=0$ bo'ladi. Demak, bu funksiya $x=0$ nuqtada uziladi.

Ushbu $f(x)=\begin{cases}x^2, & agar \quad x\ne 0 \quad bo'lsa,\\ 1, & agar \quad x=0 \quad bo'lsa,\end{cases}$

uchun bo'lib, u berilgan funksiyaning $x=0$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$ nuqtadagi qiymatiga teng emas: $f(0)\ne 0$. Demak, funksiya $x=0$ nuqtada uziladi.

Funksiyaning uzilish nuqtalari qatoriga uning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lmagan, sohaning chegaraviy nuqtalari ham kiritiladi.

Xususan, funksiyaning aniqlanish sohasi intervaldan iborat bo'lsa, intervalning chegaraviy nuqtalari uzilish nuqtalari bo'lishi mumkin.

Masalan, $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiya $E=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$da aniqlangan bo'lib, $x=0$ nuqta (ravshanki, bu nuqta funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli emas va u oraliqning chegarasi) uzilish nuqta bo'ladi.

Shunday qilib,

1) $x_0$nuqta funksiyaning aniqlanish sohasiga $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ tegishli va shart bajarilmaganda,

2) $x_0$nuqta aniqlanish sohasiga tegishli bo'lmasdan, uning chegaraviy nuqtasi bo'lsa, u holda $x_0$funksiyaning uzilish nuqtasi bo'ladi.

$f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng va chap limitlari mavjud bo'lib,

$$f(x_0+0)\ne f(x_0-0)$$

bo'lganda, uning x_0 nuqtadagi uzilishi birinchi tur uzilish deyiladi. Ushbu

$$f(x_0+0)-f(x_0-0)$$

miqdor funksiyaning x_0 nuqtadagi sakrashi deyiladi.

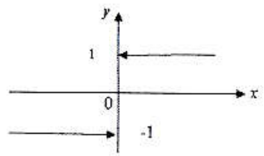
Masalan, ushbu $f(x)=\begin{cases}-1, & agar \quad x<0 \quad bo'lsa,\\ 0, & agar \quad x=0 \quad bo'lsa,\\ 1, & agar \quad x>0 \quad bo'lsa,\end{cases}$

funksiyaning $x=0$ nuqtadagi uzilishi birinchi tur uzilishi bo'lib, uning $x=0$ nuqtadagi sakrashi 2 ga teng bo'ladi (3.2-chizma):

$f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi boshqa uzilishlari

($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ A\ne f(x_0)$ holdan tashqari) ikkinchi tur uzilishi deyiladi.

3.2-chizma



Misol. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & agar \quad x>0 \quad bo'lsa,\\ x^2, & agar \quad x\le 0 \quad bo'lsa\end{cases}$

Yechish usullari

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=\infty \quad \lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0+0} x^2=0$$

bo'lib, bu funksiyaning $x=0$ nuqtadagi uzilishi ikkinchi tur uzilish bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

Funksiyalarning uzluksizligini tekshiring

1. $f(x)=x^2+3x+2$ $x_0=5$

2. $f(x)=\cos x+\sin x-\tan x$ $x_0=0$

3. f(x)=e^x+x^e $x_0=e$

4. $f(x)=\text{ctg}x-\tan x$ $x_0=\frac{\pi}{2}$

1. $f(x)=\cos x-\sin x-\cos^2 x$ $x_0=\frac{\pi}{2}$

2. $f(x)=\cos x+\sin x-\cos^2 x$ $x_0=\frac{\pi}{2}$

3. $f(x)=\cos x+\sin x-\cos^2 x$ $x_0=0$

§ 4. Hosilasi tushunchasi va misollar. Hosilani hisoblash. Yuqori tartibli hosila. Oshkormas va parametrik funksiyalar hosilasini hisoblash. Teskari funksiya hosilasi

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) intervalda berilgan bo'lib, $x_0\in(a,b)$ bo'lsin. x_0 nuqta билан birga shu (a,b) ga tegishli bo'lgan $x_0+\Delta x$ ni $(\Delta x\neq 0)$ qaraymiz. Natijada funksiya ushbu $\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ orttirmaga ega bo'ladi. Ravshanki, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ nisbat muayyan $f(x)$ va tayin x_0 da Δx ning funksiyasiga aylanadi. $\Delta x\to 0$ da bu nisbat limiti funksiya hosilasi tushunchasiga olib keladi.

Ta'rif. *Agar* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ (4.1)

limit mavjud bo'lsa, bu limit $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi va $f'(x_0)$ yoki $\frac{df(x_0)}{dx}$ yoki $y'_{x=x_0}$ kabi belgilanadi.

Agar (4.1) limit chekli bo'lsa, hosila chekli deyiladi, (4.1) limit cheksiz bo'lsa, hosila cheksiz deyiladi.

Eslatma. *Funksiyaning tayin nuqtadagi chekli hosilasi sonni ifodalaydi.*

Agar (a,b) oraliqning har bir x nuqtasida funksiyaning chekli hosilasi mavjud bo'lsa, unda hosila x ning funksiyasiga aylanadi.

Funksiyaning o'ng va chap limitlari singari funksiyaning o'ng va chap hosilalari ta'riflanadi. Ushbu $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, $\lim\limits_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ limitlar mavjud bo'lsa, ular mos ravishda funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng va chap hosilalari deyiladi va $f'(x_0+0)$, $f'(x_0-0)$ kabi belgilanadi:

$$f'(x_0+0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

$$f'(x_0-0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Xususan, $[a,b]$ segmentda berilgan $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi hosilasi deganda uning shu nuqtadan o'ng hosilasi, b nuqtadagi hosilasi deganda uning shu nuqtadagi chap hosilasi tushiniladi.

Misol. $y=\frac{2x+1}{3x+1}$. Bu funksiyaning hosilasini ta'rifga ko'ra hisoblaymiz:

Yechish usuli.

$$\Delta y=\frac{2(x+\Delta x)+1}{3(x+\Delta x)+1}-\frac{2x+1}{3x+1}=-\frac{\Delta x}{(3(x+\Delta x)+1)(3x+1)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{(3(x+\Delta x)+1)(3x+1)},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-\frac{1}{(3(x+\Delta x)+1)(3x+1)}\right]=-\frac{1}{(3x+1)^2}.$$

4.1. Murakkab va teskari funksiyaning hosilasi

Aytaylik, $u=\varphi(x)$ va $y=f(u)$ bo'lib, ular yordamida $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya tuzilgan bo'lsin.

Agar $u=\varphi(x)$ funksiya x nuqtada $u'=\varphi'(x)$ hosilaga ega bo'lib, $y=f(u)$ funksiya u nuqtada $(u=\varphi(x))$ $f'(u)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya x nuqtada hosilaga ega va

$$y'_x=f'(u)\cdot u'_x,\ ya'ni\ y'_x=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

bo'ladi.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lib, u teskari $x=\varphi(y)$ funksiyaga ega bo'lsin. Agar $y=f(x)$ funksiya $x\in(a,b)$ nuqtada $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, $f'(x)\neq 0$ bo'lsa, teskari funksiya $\varphi(y)$ ham y nuqtada $(y=f(x))$ hosilaga ega va $\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ bo'ladi.

◄ x va y o'zgaruvchilarning orttirmalari Δx va Δy lar uchun

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} \qquad (\Delta y \neq 0)$$

bo'ladi. Ayni paytda $\Delta y \neq 0$ da $\Delta x \neq 0$ bo'lib, $\Delta y \to 0$ *da* $\Delta x \to 0$. Keyingi

tenglikdan topamiz:
$$\lim_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}},$$
$$\lim_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

Demak, $\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$. ►

$y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arc}\,tgx$, $y=\mathrm{arc}\,ctgx$ berilgan bo'lsin. Ravshanki bu funksiyalar mos ravishda

$$x=\sin y, \quad x=\cos y, \quad x=tgy, \quad x=ctgy$$

funksiyalarga nisbatan teskari funksiyalardir.

Teskari funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$y'=(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y'=(\arccos x)'=\frac{1}{(\cos y)'}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y'=(arctgx)'=\frac{1}{(tgy)'}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\cos^2 y=\frac{1}{1+tg^2 y}=\frac{1}{1+x^2},$$

$$y'=(arcctgx)'=\frac{1}{(ctgy)'}=\frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}}=-\sin^2 y=-\frac{1}{1+ctg^2 y}=-\frac{1}{1+x^2}.$$

Agar $y=\arcsin u$, $y=\arccos u$, $y=\mathrm{arc}\,tgu$, $y=\mathrm{arc}\,ctgu$ bo'lib, $u=u(x)$ bo'lsa, u holda

$$(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u', \quad (\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u',$$
$$(\mathrm{arc}\,tgu)'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u', \quad (\mathrm{arc}\,ctgu)'=-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$$
bo'ladi.

Agar $y=\sin u$, $u=u(x)$ bo'lsa, $y'=(\sin u)'=\cos u\cdot u'$ bo'ladi.

Xuddi yuqoridagidek ko'rsatish mumkinki, $y=\cos x$

bo'lsa, $y'=(\cos x)'=-\sin x$ bo'ladi.

Agar $y=tgu$, $u=u(x)$ bo'lsa, $y'=(tgu)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$ bo'ladi.

Agar $y=ctgu$, $u=u(x)$ bo'lsa, $y'=(ctgu)'=\frac{-1}{\sin^2 u}\cdot u'$ bo'ladi.

Hosilalar jadvali. Yuqorida funksiya hosilalari uchun topilgan formulalarni jamlab, ularni jadval ko'rinishida yozamiz:

1) $\left(x^\alpha\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$, $\quad \left(u^\alpha\right)'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$

2) $\left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a$, $\quad \left(a^u\right)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$

3) $\left(e^x\right)'=e^x$, $\quad \left(e^u\right)'=e^u\cdot u'$

4) $\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x}\log_a e$, $\quad \left(\log_a u\right)'=\frac{1}{u}\log_a e\cdot u'$

5) $\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}$, $\quad \left(\ln u\right)'=\frac{1}{u}\cdot u'$

6) $\left(\sin x\right)'=\cos x$, $\quad \left(\sin u\right)'=\cos u\cdot u'$

7) $\left(\cos x\right)'=-\sin x$, $\quad \left(\cos u\right)'=-\sin u\cdot u'$

8) $\left(tgx\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}$, $\quad \left(tgu\right)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$

9) $\left(ctgx\right)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$, $\quad \left(ctgu\right)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$

10) $\left(\arcsin x\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad \left(\arcsin u\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

11) $\left(\arccos x\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad \left(\arccos u\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

12) $\left(\mathrm{arc}\,tgx\right)'=\frac{1}{1+x^2}$, $\quad \left(\mathrm{arc}\,tgu\right)'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$,

13) $\left(arcctgx\right)'=-\frac{1}{1+x^2}$, $\left(arcctgu\right)'=-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$

4.2. Yuqori tartibli hosilala

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lib, uning ixtiyoriy $x\in(a,b)$ nuqtasida $y'=f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Ravshanki, $f'(x)$ ham x ning funksiyasi bo'lib, u ham hosilaga ega bo'lishi mumkin.

$f'(x)$ ning hosilasi berilgan $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deyiladi va y'', *yoki* $f''(x)$ *yoki* $\frac{d^2y}{dx^2}$ kabi belgilanadi. Demak, $y''=(y')'$, $f''(x)=(f'(x))'$. $f''(x)$ ning hosilasi berilgan $f(x)$ funksiyaning uchinchi tartibli hosilasi deyiladi va y''', *yoki* $f'''(x)$ *yoki* $\frac{d^3y}{dx^3}$ kabi belgilanadi.

Xuddi shunga o'xshash $f(x)$ funksiyaning to'rtinchi va h.k., n-tartibli hosilalari ta'riflanadi va bu yuqori tartibli hosilalar quyidagicha $f^{IV}(x),\ldots,f^{(n)}(x)$ belgilanadi.

Masalan, $y=2x^3-5x^2+1$ funksiyaning yuqori tartibli hosilalari bo'ladi.

Funksiyaning yuqori tartibli hosilalarini topish uchun, umuman aytganda, uning hamma avvalgi tartibli hosilalarini hisoblash kerak bo'ladi. Ayrim funksiyalarning yuqori tartibli hosilalarini bir yo'la hisoblash mumkin.

Misol. $y=\sin x$ *funksiyaning yuqori tartibli hosilalarini topamiz*:

$y'=\cos x$ $\quad y'=6x^2-10x,\quad y''=12x-10,\quad y'''=12,$

$y''=(y')'$ $\quad y^{(IV)}=y^{(V)}=\ldots=0$

$y'''=[-\mathrm{si}$

....

$y^{(n)}=\sin$

Xuddi shunga o'xshash, agar $y=\cos x$ bo'lsa, u holda $y^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ bo'ladi.

Eslatma. *Yuqorida keltirilgan funksiyalarning n-tartibli hosilalarini ifodalovchi formulalar induksiya usuli yordamida isbotlanadi.*

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $f(x)=\cos3x+\sin5x-\tan x+e^x$, $f'(x)=?$
2. $f(x)=\cos^8x+\sin^8x$, $f'(x)=?$
3. $f(x)=e^x+x^2-\cos x$, $f'(x)=?$
4. $f(x)=\tan^2x+e^x-5x+3$, $f'(x)=$
5. $f(x)=\mathrm{ctg}7x-\cos2x-\tan x+e^x$, $f'(x)=?$
6. $f(x)=x^x$ $f'(x)=?$
7. $f(x)=\sin xe^x$, $f'(x)=?$

§ 5. Funksiyaning differensiali. Roll, Lagranj va Koshi teoremalari

Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lib, $x\in(a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin.

Ta'rifga binoan $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$ bo'lib, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'+\alpha$ bo'ladi, bunda α-cheksiz kichik funksiya ($\Delta x\to0da\quad \alpha=\alpha(\Delta x)\to0$). Keyingi tenglikning ikki tomonini Δx ga ko'paytirib topamiz:

$$\Delta y=y'\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x=f'(x)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x \qquad (5.1)$$

Yuqoridagi (5.1) tenglikdan, y' hosila chekli bo'lganda

$$\lim_{\Delta x\to0}\Delta y=0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $y=f(x)$ funksiya x nuqtada chekli hosilaga ega bo'lsa, u shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Biroq, funksiya biror nuqtada uzluksiz bo'lsa, u shu nuqtada hosilaga ega bo'lmasligi mumkin.

Masalan, $y=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz, biroq u shu nuqtada hosilaga ega emas, chunki

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

limit mavjud emas.

Funksiya orttirmasi $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ ni ifodalovchi (5.1) tenglikning o'ng tomoni ikki qo'shiluvchi $y'\cdot\Delta x$ hamda $\alpha\cdot\Delta x$ lardan iborat. Birinchi qo'shiluvchi uchun $y'\neq 0$ bo'lganda

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x)\cdot\Delta x}{\Delta x}=f'(x)\neq 0$$

bo'lib, undan Δx va $y'\cdot\Delta x$ larning nolga intilish tartiblari bir xil ekanligi kelib chiqadi. Ikkinchi qo'shiluvchi uchun

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0$$

bo'lib, undan $\alpha\cdot\Delta x\to 0$ ni $\Delta x\to 0$ ga qaraganda tezroq ekanligi kelib chiqadi.

Demak, $\Delta x\to 0$ da $\Delta x\to 0$ ni $y'\cdot\Delta x$ qo'shiluvchi aniqlaydi. Shuning uchun $y'\cdot\Delta x$ qo'shiluvchi funksiya orttirmasi Δy ning bosh qismi deyiladi.

Ta'rif. *Funksiya orttirmasining (5.1) ifodasidagi* $y'\cdot\Delta x$ *qo'shiluvchi* $y=f(x)$ *funksiyaning differensiali deyiladi va* dy *yoki* $df(x)$ *kabi belgilanadi.*

Demak, $dy=y'\cdot\Delta x$ $\quad (df(x)=f'(x)\cdot\Delta x)$.

Shunday qilib, funksiyaning differensiali funksiya hosilasi bilan argument differensiali ko'paytmasiga teng. Endi funksiya hosilalari jadvalidan foydalanib, ularning differensiallari jadvalini keltiramiz:

1) $d(x^\alpha)=\alpha x^{\alpha-1}dx$,

2) $d(a^x)=a^x\cdot\ln a\,dx$,

3) $d(e^x)=e^x dx$,

4) $d(\log_a x)=\frac{1}{x}\log_a e dx$,

5) $d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$,

6) $d(\sin x)=\cos x\,dx$,

7) $d(\cos x)=-\sin x\,dx$,

8) $d(tgx)=\frac{1}{\cos^2 x}dx$,

9) $d(ctgx)=-\frac{1}{\sin^2 x}dx$,

10) $d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$,

11) $d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$,

12) $d(arctgx)=\frac{1}{1+x^2}dx$,

13) $d(arcctgx)=-\frac{1}{1+x^2}dx$

Masalan, $y=e^{\sqrt{arctgx}}$ funksiyaning differensiali

$$dy=d\left(e^{\sqrt{arctgx}}\right)=\left(e^{\sqrt{arctgx}}\right)'\cdot dx=e^{\sqrt{arctgx}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{arctgx}}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$

bo'ladi.

5.1. Taqribiy formulalar

O'rganiladigan ko'p jarayonlar funksiyalar bilan, aniqrog'i funksiyalarning nuqtadagi qiymatini hisoblash bilan bog'liq. Funksiyalarning murakkab bo'lishi, ularning nuqtadagi qiymatini topishni ancha qiyinlashtiradi. Natijada funksiyalarning nuqtadagi qiymatini taqribiy hisoblash zaruriyati yuzaga keladi.

Funksiyaning differensiali esa taqribiy formulalarni topish imkonini beradi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lib, $x\in(a,b)$ nuqtada $f'(x)\neq 0$ hosilaga ega bo'lsin. U holda

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

funksiya orttirmasi uchun

$$\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x \qquad (f'(x)\cdot\Delta x = dy)$$

bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{dy} = \frac{f'(x)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x}{f'(x)\cdot\Delta x} = 1 + \frac{\alpha}{f'(x)}$$

bo'ladi, bunda $\Delta x \to 0$ da $\alpha \to 0$.

Keyingi tenglikdan $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy} = 1$ bo'lishi kelib chiqadi.

Bu hol ushbu $\Delta y \approx dy$ (5.2) munosabatga (taqribiy tenglikga) olib keladi.

Ravshanki, Δx ning har qancha kichik bo'lishi bu taqribiy tenglikning aniqligini shuncha oshiradi.

Funksiya differensialining tuzilishi funksiya orttirmasiga nisbatan ancha sodda bo'lishi (2) taqribiy formuladan taqribiy hisoblashlarda keng foydalanishga olib keladi. (5.2) formulani quyidagicha

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x$$

ham yozsa bo'ladi.

Misol. *Ushbu*

$$\sqrt[4]{17}$$

miqdor taqribiy hisoblansin.

Yechish usullari.

funksiyani olamiz. Unda $f(x) = \sqrt[4]{x}$

$$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

bo'ladi.

Endi $x = 16$, $\Delta x = 1$ deb topamiz:

$$\sqrt[4]{17} \approx \sqrt[4]{16} + \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \sqrt[4]{2^4} + \frac{1}{4\sqrt[4]{2^{12}}} =$$

$$= 2 + \frac{1}{4\cdot 8} = 2 + \frac{1}{32} = 2\frac{1}{32} = 2{,}03125$$

5.2. Yuqori tartibli differensiallar

Ma'lumki, $y = f(x)$ funksiyaning differensiali $dy = f'(x)dx$ da $f'(x)$ ko'payuvchi x ning funksiyasi, dx esa x ning orttirmasi Δx bo'lib, x ga bog'liq bo'lmaydi. Demak, dy x ning funksiyasi bo'ladi.

Ta'rif. *$y = f(x)$ funksiya differensialining differensiali berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali deyiladi va d^2y yoki $d^2f(x)$ kabi belgilanadi.*

Demak, $d^2f(x) = d(df(x)) \qquad (d^2y = d(dy))$.

Funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali d^2y o'z navbatida x ning funksiyasi bo'lishi mumkin. Bu differensialning differensiali $y = f(x)$ funksiyaning uchinchi tartibli differensiali deyiladi va d^3y yoki $d^3f(x)$ kabi belgilanadi. Demak, $d^3f(x) = d(d^2f(x)) \qquad (d^3y = d(d^2y))$

Umuman $y = f(x)$ funksiyaning n-tartibli differensiali d^ny quyidagicha

$d^ny = d(d^{n-1}y) \qquad (d^nf(x) = d(d^{n-1}f(x)))$ ta'riflanadi.

Shuni yana bir bor ta'kidlaymizki, yuqoridagi funksiya differensiallarida argument x ning differensiali dx $(dx = \Delta x)$ o'zgarmas sifatida qaraladi. Shu holatdan foydalanib yuqori tartibli differensiallarning yuqori tartibli hosilalar orqali ifodalarini topamiz:

$$d^2y = d(dy) = d(y'\cdot dx) = dx\cdot dy' = dx\cdot y''\cdot dx = y''dx^2,$$
$$d^3y = d(d^2y) = d(y''\cdot dx^2) = dx^2\cdot dy'' = dx^2\cdot y'''\cdot dx = y'''\cdot dx^3$$

umuman, $d^ny = y^{(n)}\cdot dx^n$.

Keyingi tenglik matematik induksiya usuli yordamida isbotlanadi.

Masalan, $y = \sin x$ funksiyaning 8-tartibli differensiali

$$d^8y = y^{(8)}\cdot dx^8 = \sin\left(x + 8\cdot\frac{\pi}{2}\right)dx^8 = \sin x dx^8 \text{ bo'ladi.}$$

5.3. Roll, Lagranj va Koshi teoremalari

1-teorema (Roll teoremasi): *Berilgan $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va uning ichki nuqtalarida differensiallanuvchi bo'lib, chegaralarida teng qiymatlar qabul etsin ya'ni $f(a)=f(b)$ bo'lsin. Bu holda shu kesma ichida kamida bitta shunday "c" nuqta topiladiki, bu nuqtada funksiyaning hosilasi nolga teng, ya'ni $f'(c)=0$ bo'ladi.*

◀Bizga ma'lumki, kesmada uzluksiz bo'lgan funksiya shu kesmada o'zining eng kichik m va eng katta M qiymatlariga erishadi. Agar $m=M$ bo'lsa, u holda albatta $f(x)=C$ (C-const) va $f'(x)=0$ bo'ladi, ya'ni teoremadagi tasdiq $[a,b]$ kesmaning har bir nuqtasida bajariladi.Endi $m<M$ holni qaraymiz. Kesma chegaralarida funksiya qiymatlari o'zaro teng bo'lgani uchun, funksiyaning eng katta M va eng kichik m qiymatlaridan kamida bittasi $[a,b]$ kesmaning ichki nuqtasida erishiladi. Agar biror $a<c<b$ nuqtada $f(c)=M$ bo'lsa, u holda, eng katta qiymat ta'rifiga asosan, ixtiyoriy Δx argument orttirmasi uchun $\Delta f(c)=f(c+\Delta x)-f(c)$ <0 bo'ladi. Bu yerdan

$$\frac{\Delta f(c)}{\Delta x}=\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\le 0,\quad \Delta x>0\quad ,$$

$$\frac{\Delta f(c)}{\Delta x}=\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\ge 0,\quad \Delta x<0$$

ekanligi kelib chiqadi. Teorema shartiga asosan, qaralayotgan $x=c$ nuqta $[a,b]$ kesmaning ichki nuqtasi bo'lgani uchun, $f'(c)$ hosila mavjuddir. Unda yuqoridagi tengsizliklardan , hosila ta'rifi va limit xossalariga asosan, quyidagi natijalarga kelamiz:

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\ge 0,\quad f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\le 0.$$

Ammo $f'(c)\ge 0$ va $f'(c)\le 0$ tengsizliklar faqat $f'(c)=0$ bo'lgan holda birgalikda bo'ladi.

Xuddi shunday ravishda, agar biror $a<c<b$ ichki nuqtada $f(c)=m$ bo'lsa, unda $f'(c)=0$ bo'lishi ko'rsatiladi.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lib, $x_0\in(a,b)$ bo'lsin. Ma'lumki, ixtiyoriy $x\in(a,b)$ uchun

$$f(x)\le f(x_0)\qquad \left(f(x)\ge f(x_0)\right)$$

bo'lsa, $f(x_0)$ miqdor $f(x)$ funksiyaning (a,b) dagi eng katta qiymati (eng kichik qiymati) deyiladi.

2-Teorema (Ferma). *Agar $y=f(x)$ funksiya c nuqtada $\left(c\in(a,b)\right)$ o'zining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishib, funksiya c nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda $f'(c)=0$ bo'ladi.*

◀Aytaylik, $f(x)$ funksiya c nuqtada $\left(c\in(a,b)\right)$ o'zining eng katta qiymatiga erishsin:

$$f(x)\le f(c)\qquad \left(x\in(a,b)\right)\qquad (5.3)$$

c nuqtaga Δx orttirma beramizki $c+\Delta x\in(a,b)$ bo'lsin.

Unda (1) ko'ra $f(c+\Delta x)\le f(c)$ bo'ladi. Keyingi tengsizlikdan

$$\Delta y=f(c+\Delta x)-f(c)\le 0$$

bo'lishi kelib chiqadi.Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya c nuqtada $f'(c)$ hosilaga ega.

Ta'rifga binoan $f'(c)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

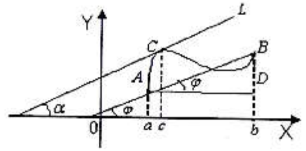
Agar $\Delta x>0$ bo'lsa, unda $\frac{\Delta y}{\Delta x}\le 0$ bo'lib,

$f'(c)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\le 0$ (5.4) bo'ladi.

Agar $\Delta x<0$ bo'lsa, unda $\frac{\Delta y}{\Delta x}\ge 0$ bo'lib,

$f'(c)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\ge 0$ (5.5)

bo'ladi. (5.4) va (5.5) munosabatlardan $f'(c)=0$ bo'lishi kelib chiqadi. ▶



5.1-chizma

3-Teorema. (Lagranj). *Agar* $y=f(x)$ *funksiya* $[a,b]$ *segmentda uzluksiz bo'lib,* (a,b) *intervalda hosilaga ega bo'lsa, u holda* a *bilan* b *orasida shunday* c *nuqta* $(a<c<b)$ *topiladiki,* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ *bo'ladi.*

◀Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lib, uning grafigi 5.1-chizmada tasvirlangan AB egri chiziqni ifodalasin. AB vatarning OX o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchakni φ deylik. Unda bu vatar (to'g'ri chiziq)ning burchak koeffitsiyenti $tg\varphi$ bo'ladi. AB egri chiziqda shunday C nuqta bo'lishini tasavvur etish mumkinki, egri chiziqqa shu nuqtada o'tkazilgan urinma AB vatarga parallel bo'ladi. Bu L urinmaning OX o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchakni α deylik. Ravshanki, urinma to'g'ri chiziq bo'lib, uning burchak koeffitsiyenti $tg\alpha$ bo'ladi.

Ayni paytda $y=f(x)$ funksiya hosilasining geometrik ma'nosiga ko'ra

$tg\alpha=f'(c)$ (5.6) bo'ladi, bunda c nuqta AB egri chiziqdagi C ning absissasi.

Modomiki, vatar bilan urinma parallel ekan, unda

$$tg\varphi=tg\alpha \quad (5.7)$$

bo'ladi. Keltirilgan ADB to'g'ri burchakli uchburchakda

$AD=b-a,\quad BD=f(b)-f(a),\quad <A=\varphi$. Unda shu uchburchakdan

$$tg\varphi=\frac{BD}{AD}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad (5.8)$$

bo'lishini topamiz. (5.6), (5.7), va (5.8) munosabatlardan

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad (5.9)$$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

Bu teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

1-natija. *Agar* (a,b) *intervalda* $f'(x)=0$ *bo'lsa, u holda funksiya* (a,b) *da o'zgarmas bo'ladi.*

◀(a,b) intervalda tayin x_0 va ixtiyoriy x nuqtalarni olamiz. So'ng $[x_0,x]$ kesma (yoki $[x,x_0]$) ga Lagranj teoremasini qo'llaymiz: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(c)=0$

Bundan $f(x)=f(x_0)=const$ bo'lishi kelib chiqadi.▶

2-natija. $y=f(x)$ *funksiya uchun Lagranj teoremasining shartlari bajarilib,*

$$f(a)=f(b)$$

bo'lsin. U holda a *va* b *orasida shunday* c *nuqta* $(a<c<b)$ *topiladiki,* $f'(c)=0$ *bo'ladi.*

◀Bu natijaning isboti $f(a)=f(b)$ shartda (5.9) tenglikdan kelib chiqadi.▶

Endi Lagranj teoremasidan umumiyroq bo'lgan teoremani isbotsiz keltiramiz.

4-teorema. (Koshi). *Aytaylik,* $f(x)$ *va* $g(x)$ *funksiyalar*

1) $[a,b]$ *segmentda uzluksiz,*

2) (a,b) *intervalda* $f'(x), g'(x)$ *hosilalarga ega,*

3) (a,b) *da* $g'(x)\neq 0$ *bo'lsin. U holda* a *bilan* b *orasida shunday* c $(a<c<b)$ *topiladiki,* $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ *bo'ladi.*

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $f(x) = e^x-2$ funksiyaning, argumenti 2 dan 2,001 gacha o'zgargandagi orttirmasini taqriban toping.

2. $f(x) = lg(x)-x^2$ funksiyaning, argumenti 2 dan 2,015 gacha o'zgargandagi orttirmasini taqriban toping.

3. $f(x) = e^x - 2\ln x$ funksiyaning, argumenti 5 dan 5,001 gacha o'zgargandagi orttirmasini taqriban toping.

4. $f(x) = e^{\ln x} - \lg x$ funksiyaning, argumenti 6 dan 5.999 gacha o'zgargandagi orttirmasini taqriban toping.

5. $f(x) = x^2 - \lg x$ funksiyaning, argumenti 2 dan 1.995 gacha o'zgargandagi orttirmasini taqriban toping.

6. $f(x) = x + \lg^2 x$ funksiyaning, argumenti 2 dan 2.005 gacha o'zgargandagi orttirmasini taqriban toping.

7. $f(x) = x - \lg x$ funksiyaning, argumenti 2 dan 1.998 gacha o'zgargandagi orttirmasini taqriban toping.

II BO'LIM. DIFFERENSIAL HISOBINING TADBIQLARI

§ 6. Funksiyani Lagranj va Nyuton interpoliyatsion formulalari yordamida approksimasialash va egri chiziq yasash

$y = f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lsin. Ma'lumki, ixtiyoriy $x_1 \in (a,b)$, ixtiyoriy $x_2 \in (a,b)$ lar uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) \le f(x_2)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a,b) da o'suvchi, $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) \ge f(x_2)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a,b) da kamayuvchi deyiladi.

1-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya (a,b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, $f'(x) \ge 0$ $(x \in (a,b))$ bo'lsa, u holda funksiya (a,b) da o'suvchi bo'ladi.*

◄Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, $f'(x) \ge 0$ bo'lsin. (a,b) intervalda ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtalarni (ular uchun $x_1 < x_2$ bo'lsin) olib, $[x_1, x_2]$ segmentni qaraymiz. Ravshanki, $[x_1, x_2] \subset (a,b)$. Bu segmentda $f(x)$ funksiya Lagranj teoremasining shartlarini bajaradi. Unda Lagranj teoremasiga ko'ra shunday c nuqta, $x_1 < c < x_2$ topiladiki,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \text{ ya'ni } f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) \text{ bo'ladi.}$$

Keyingi tenglikda $f'(c) \ge 0$, $x_2 - x_1 > 0$ bo'lgani uchun $f(x_2) - f(x_1) \ge 0$ bo'lib, undan $f(x_1) \le f(x_2)$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) \le f(x_2)$ bo'ladi. $f(x)$ funksiya (a,b) da o'suvchi.►

2-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya (a,b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, funksiya (a,b) da o'suvchi bo'lsa, u holda $f'(x) \ge 0$ $(x \in (a,b))$ bo'ladi.*

◄(a,b) intervalda ixtiyoriy x nuqta hamda $x + \Delta x$ nuqtalarni olaylik $(x \in (a,b), x + \Delta x \in (a,b))$. $f(x)$ funksiya (a,b) da o'suvchi bo'lgani uchun

$\Delta x>0$ bo'lganda $f(x)\le f(x+\Delta x)$, ya'ni $f(x+\Delta x)-f(x)\ge 0$ $\Delta x<0$ bo'lganda $f(x)\ge f(x+\Delta x)$, ya'ni $f(x+\Delta x)-f(x)\le 0$ bo'lib, ikkala holda ham

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\ge 0 \qquad (6.1)$$

bo'ladi. Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya (a,b) da $f'(x)$ hosilaga ega. Unda

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

bo'lib, (1) munosabatga binoan $f'(x)\ge 0$ bo'ladi. ►

Xuddi shunga o'xshash quyidagi teoremalar isbotlanadi.

3-teorema. Agar $f(x)$ *funksiya* (a,b) *da* $f'(x)$ *hosilaga ega bo'lib,*

$$f'(x)\le 0\,(x\in(a,b))$$

bo'lsa, u holda funksiya (a,b)*da kamayuvchi bo'ladi.*

4-teorema. *Agar* $f(x)$ *funksiya* (a,b) *da* $f'(x)$ *hosilaga ega bo'lib, funksiya* (a,b) *da kamayuvchi bo'lsa, u holda* $f'(x)\le 0\,(x\in(a,b))$ *bo'ladi.*

Misol. Ushbu $y=f(x)=\ln(1-x^2)$ funksiyaning o'sish hamda kamayish oraliqlari topilsin.

◄Berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi,

$1-x^2>0,\quad (x-1)(x+1)<0,\quad -1<x<1$

$E=(-1,1)$ bo'ladi. Endi funksiyaning hosilasini topamiz: $y'=\frac{-2x}{1-x^2}$.

So'ng $y'\ge 0$, ya'ni $\frac{2x}{x^2-1}\ge 0$ tengsizlikni yechamiz: Ravshanki, $\frac{2x}{x^2-1}\ge 0$, $x(x-1)(x+1)\ge 0$.

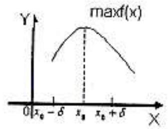
Demak, $-1<x<0$ bo'lib, bu $(-1,0)$ oraliqda berilgan funksiya o'suvchi bo'ladi.

Yuqoridagidek ko'rsatiladiki, berilgan funksiya $(0,1)$ oraliqda kamayuvchi bo'ladi.►

§ 7. Funksiyani hosila yordamida tekshirish va grafigini yasash (ekstrimum, qavariqlik, botiqligik va asimptotalar)

$f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lib, x_0 nuqta o'zining atrofi $U_\delta(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$ bilan a$(\delta>0)$ (a,b) intervalga tegishli bo'lsin.

1-ta'rif. *Agar ixtiyoriy* $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ *uchun*

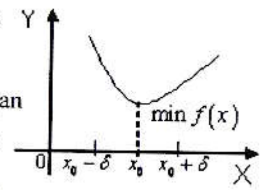


7.1-chizma

$f(x)\le f(x_0)$ *bo'lsa,* $f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada maksimumga erishadi deyiladi.* x_0 *funksiyaning maksimum nuqtasi,* $f(x_0)$ *ga funksiyaning maksimum qiymati deyiladi va* $\max f(x)$ *kabi belgilanadi:* $f(x_0)=\max f(x)$.

2-ta'rif. *Agar ixtiyoriy* $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ $f(x)\ge f(x_0)$ *uchun bo'lsa,* $f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada minimumga erishadi deyiladi.* x_0 *funksiyaning minimum nuqtasi,* $f(x_0)$ *ga funksiyaning minimum qiymati deyiladi va* $\min f(x)$ *kabi belgilanadi (7.2-chizma)*

Funksiyaning maksimum va minimumlari uning ekstremumlari deyiladi.



7.2-rasm

Masalan funksiyaga ekstremum qiymat beradigan nuqtalarni hamda funksiyaning ekstremum qiymatlarini topishdan iborat. Bu masala funksiyaning hosilalaridan foydalanib hal etilishi mumkin.

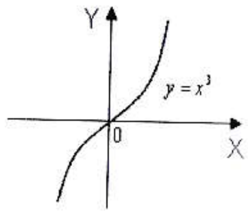
5-teorema. *Agar* $f(x)$ *funksiya* $x_0\in(a,b)$ *nuqtada ekstremumga erishsa va bu nuqtada funksiyaning hosilasi mavjud bo'lsa, u holda* $f'(x_0)=0$ *bo'ladi.*

◄ Aytaylik, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo'lib, $f'(x_0)$ hosila mavjud bo'lsin. U holda ta'rifga ko'ra ixtiyoriy $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ da

$f(x) \le f(x_0)$ tengsizlik bajariladi. Ayni paytda, $f(x_0)$ qaralayotgan funksiyaning $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ dagi eng katta qiymati bo'ladi. Ferma teoremasidan foydalanib $f'(x_0)=0$ bo'lishini topamiz.

Xuddi shunga o'xshash $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo'lib, $f'(x_0)$ hosila mavjud bo'lganda ham teorema isbotlanadi.

Eslatma. *$f(x)$ funksiyaning biror $x' \in (a,b)$ nuqtada $f'(x')$ hosilaga ega va $f'(x')=0$ bo'lishidan uning x' nuqtada ekstremumga ega bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi. Masalan, $y=x^3$ funksiyaning hosilasi $y'=3x^2$ $x=0$ da $y'=0$ bo'ladi, biroq bu funksiya $x=0$ nuqtada ekstremumga ega emas (7.3-chizma).*



7.3-rasm

Demak, 5-teorema funksiya ekstremumga erishishning zaruriy shartini ifodalaydi.

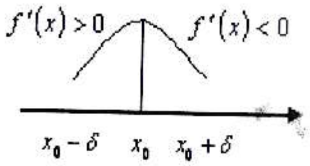
Endi funksiya ekstremumga erishishining yetarli shartlarini keltiramiz:

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da hosilaga ega bo'lib, $x_0 \in (a,b)$ nuqtada u nolga aylansin: $f'(x_0)=0$.

Quyidagi savol tug'iladi: x_0 nuqtada funksiya ekstremumga erishadimi? Erishsa, qaysi biriga maksimumgami, minimumgami? $y=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada minimumga erishadi, lekin $y'(0)$ mavjud emas.

Bu savollarning javobi funksiya ekstremumga erishishining yetarli shartlarini ifodalaydi. x_0 nuqtaning $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (a,b)$ atrofini olamiz.

a) Agar ixtiyoriy $x \in (x_0-\delta, x_0)$ da $f'(x)>0$, ixtiyoriy $x \in (x_0, x+\delta)$ da $f'(x)<0$, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda ishorasini "+" dan "-" ga o'zgartirsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi (7.4-chizma).

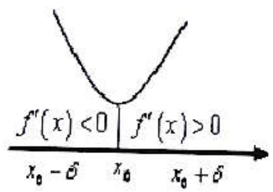


7.4-chizma

Haqiqatdan ham, $f(x)$ funksiya $(x_0-\delta, x_0]$ da o'suvchi bo'lib, $f(x)<f(x_0)$, $[x_0, x+\delta)$ da kamayuvchi bo'lib, $f(x_0)>f(x)$ bo'ladi.

Demak, ixtiyoriy $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ da $f(x)<f(x_0)$ bo'ladi. Bu esa funksiyaning x_0 nuqtada maksimumga erishishini bildiradi.

b) Agar ixtiyoriy $x \in (x_0-\delta, x_0)$ da $f'(x)<0$ ixtiyoriy $x \in (x_0, x+\delta)$ da $f'(x)>0$ ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda ishorasini "-" dan "+" ga o'zgartirsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga erishadi (7.5-chizma).



7.5-chizma

Haqiqatan ham, $f(x)$ funksiya $(x_0-\delta, x_0)$ da kamayuvchi bo'lib, $f(x)>f(x_0)$, $[x_0, x+\delta)$ da o'suvchi bo'lib, $f(x)>f(x_0)$ bo'ladi. Demak, ixtiyoriy $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ da $f(x)>f(x_0)$ bo'ladi. Bu esa funksiyaning x_0 nuqtada minimumga erishishini bildiradi.

d) Agar ixtiyoriy $x \in (x_0-\delta, x_0)$ da $f'(x)>0$ ixtiyoriy $x \in (x_0, x+\delta)$ da $f'(x)>0$ yoki ixtiyoriy $x \in (x_0-\delta, x_0)$ da $f'(x)<0$, ixtiyoriy $x \in (x_0, x+\delta)$ da $f'(x)<0$ ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda ishorasini o'zgartirmasa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishmaydi. Bu holda $f(x)$ funksiya $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ da o'suvchi yoki kamayuvchi bo'ladi.

Natijada $f(x)$ funksiya ekstremumini topishning quyidagi qoidasiga kelamiz:

1. funksiya hosilasi $f'(x)$ topiladi;
2. $f'(x)=0$ tenglama yechiladi. Aytaylik, bu tenglama yechimlaridan biri x_0 bo'lsin: $f'(x_0)=0$;
3. x_0 nuqtaning chap atrofi $(x_0-\delta, x_0)$ va o'ng atrofi $(x_0, x+\delta)$ da $f'(x)$ hosilaning ishorasi aniqlanadi va yuqorida keltirilgan a), b) qoidalar tatbiq etilib, ekstremum qiymati topiladi.

2-misol. Ushbu $f(x)=x^3-3x+2$ funksiya ekstremumga tekshirilsin.

◄Berilgan funksiyaning hosilasini topamiz: $f'(x)=3x^2-3$.

So'ng uni nolga tenglab, $f'(x)=0$ tenglamani yechamiz:

$3x^2-3=0,\ 3(x-1)(x+1)=0,$
$x_1=-1,\ x_2=+1.$

Funksiya hosilasi $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$ ning $x_1=-1$ va $x_2=1$ nuqtalar atrofida ishorasini aniqlaymiz. $x_1=-1$ nuqtaning $(-1-\delta,-1+\delta)$ atrofini $\left(0<\delta<\frac{1}{2}\right)$ olamiz.

Ixtiyoriy $x\in(-1-\delta,-1)$ da $f'(x)=3(x-1)(x+1)>0$ bo'ladi, chunki bunday nuqtalarda $x-1<0,\quad x+1<0$.

Ixtiyoriy $x\in(-1,-1+\delta)$ da $f'(x)=3(x-1)(x+1)<0$ bo'ladi., chunki bunday nuqtalarda $x-1<0,\quad x+1>0$.

Shunday qilib, $f'(x)$ hosila $x_1=-1$ nuqtadan o'tishda ishorasini "+" dan "-" ga o'zgartiradi. Demak, berilgan funksiya $x_1=-1$ nuqtada maksimumga erishadi va uning maksimum qiymati $\max f(x)=f(-1)=4$ bo'ladi. $x_2=1$ nuqtaning $(1-\delta,1+\delta)$ atrofini $\left(0<\delta<\frac{1}{2}\right)$ olamiz.

Ixtiyoriy $x\in(1-\delta,1)$ da $f'(x)=3(x-1)(x+1)<0$ bo'ladi, chunki, bunday nuqtalarda $x-1<0,\quad x+1>0$.

Ixtiyoriy $x\in(1,1+\delta)$ da $f'(x)=3(x-1)(x+1)>0$ bo'ladi, chunki, bunday nuqtalarda $x-1>0,\quad x+1>0$.

Shunday qilib, $f'(x)$ hosila $x_2=1$ nuqtadan o'tishda ishorasini "-" dan "+" ga o'zgartiradi. Demak, berilgan funksiya $x_2=1$ nuqtada minimumga erishadi va uning minimum qiymati $\min f(x)=f(1)=0$ bo'ladi.►

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lib, $x_0\in(a,b)$ bo'lsin.

6-teorema. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(a,b)$ atrofida birinchi va ikkinchi tartibli $f'(x), f''(x)$ hosilalarga ega bo'lib,

1) $f'(x_0)=0$,

2) x_0 nuqtada funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $f''(x)$ uzluksiz va $f''(x_0)\neq 0$ bo'lsa, u holda $f''(x_0)>0$ bo'lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga erishadi; $f''(x_0)<0$ bo'lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi.

◄Teylor formulasidan foydalanib topamiz:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2,$$
$$c=x_0+\theta(x-x_0),0<\theta<1.$$

Shartga ko'ra $f'(x_0)=0$. Unda $f(x)-f(x_0)=\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2$ bo'ladi.

Aytaylik, $f''(x_0)<0$ bo'lsin. Unda ikkinchi tartibli hosilaning x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishidan, x_0 nuqtaning biror atrofi topiladiki, bu atrofdagi nuqtalarda $f''(x)<0$, binobarin $f''(c)<0$ bo'ladi. Ravshanki, $(x-x_0)^2>0$. Demak, $\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2<0$ bo'lib, $f(x)-f(x_0)<0$ ya'ni, $f(x)<f(x_0)$ bo'ladi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada maksimumga erishishini bildiradi.

Xuddi shunga o'xshash, $f''(x_0)>0$ bo'lganda $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada minimumga erishishi ko'rsatiladi.►

Eslatma. *Agar $f'(x_0)=0$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada ekstremumga erishishi ham mumkin, erishmasligii ham mumkin. Bu holda qo'shimcha tekshirish bilan aniqlanadi.*

7.1. Funksiya grafigining qavariqligi va botiqligi

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan, $x_0\in(a,b)$ va bu nuqtaning $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ atrofi $(\delta>0)$ shu (a,b) intervalga tegishli bo'lsin.

Berilgan $f(x)$ funksiya grafigi – egri chiziqni Γ, unga $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nuqtasida o'tkazilgan urinmani L deylik.

Agar $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ da Γ egri chiziq L urinmadan pastda joylashgan bo'lsa, $f(x)$ funksiya grafigi $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ da qavariq deyiladi. Agar $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ da Γ egri chiziq L urinmadan yuqorida joylashgan bo'lsa, $f(x)$ funksiya grafigi $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ da botiq deyiladi

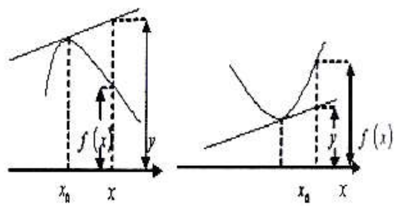
Funksiya hosilalari yordamida uning grafigini qavariqligini, botiqligini aniqlash mumkin.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ da ikkinchi tartibli uzluksiz $f''(x)$ hosilaga ega bo'lsin.

1-teorema. *Agar $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ da $f''(x) < 0$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya grafigi $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ da qavariq bo'ladi, agar $f''(x) > 0$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya grafigi $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ da botiq bo'ladi.*

◄Aytaylik, abssissasi x bo'lgan urinma nuqtasining ordinatasi y bo'lsin. Unda $f(x) - y \le 0 \ (x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta))$ bo'lganda funksiya grafigi qavariq bo'ladi;

$f(x) - y \ge 0$ bo'lganda esa funksiya grafigi botiq bo'ladi (7.3-chizma).Teylor formulasidan foydalanib ($n = 2$ bo'lgan hol uchun) topamiz:



7.3-chizma

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + f''(c) \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2!}, \qquad (7.1)$$

bunda c nuqta x_0 va x nuqtalar orasida. Ayni paytda, $f(x)$ funksiya grafigiga $(x_0, f(x_0))$ nuqtada o'tkazilgan urinma (yuqorida aytilgan urinma) tenglamasi

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \qquad (7.2)$$

bo'ladi. (7.1) tenglikdan (7.2) tenglikni hadlab ayirib topamiz:

$$f(x) - y = f''(c) \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2!} \qquad (7.3)$$

Ravshanki, $x \to x_0$ da $c \to x_0$ bo'ladi. Ikkinchi tartibli hosila x_0 nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun $f''(c) \to f''(x_0)$ bo'ladi.

Aytaylik, $f''(x) < 0$ bo'lsin. Bu holda $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ da $f''(c) \le 0$ bo'lib, (7.3) tenglikka ko'ra $f(x) - y \le 0$ bo'ladi. Demak, berilgan funksiya grafigi $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ da qavariq bo'ladi.

Aytaylik, $f''(x) > 0$ bo'lsin. Bu holda $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ da $f''(c) \ge 0$ bo'lib, (7.3) tenglikka ko'ra $f(x) - y \ge 0$ bo'ladi. Demak, berilgan funksiya grafigi $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ da botiq bo'ladi.►

2-teorema. Agar $(a;\ b)$ intervalning barcha nuqtalarida $f''(x)$ mavjud va $f''(x) < 0$ bo'lsa, u holda $(a;\ b)$ intervalda $y = f(x)$ funksiyaning grafigi qavariq bo'ladi.

Isboti. $(a;\ b)$ intervalda $f''(x) < 0$ bo'lsin. $(a;\ b)$ dan ixtiyoriy $x = x_0$ nuqtani olib $M_0(x_0; f(x_0))$ nuqtada grafikka urinma o'tkazamiz (3-chizma).

Urinmaning x abssissaga mos ordinatasini Y orqali belgilaymiz. U holda urinmaning tenglamasi

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \text{ yoki } Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (7.4)$$

bo'lishi ravshan. x nuqtada grafik va urinma ordinatalari ayirmasi

$$y - Y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \qquad (7.5)$$

bo'ladi. $f(x) - f(x_0)$ ayirmaga nisbatan Lagranj formulasini qo'llasak $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$ bo'ladi, bu yerdagi c x_0 bilan x orasidagi qiymat. Ushbu qiymatni (7.2) tenglikka qo'ysak $y - Y = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ yoki

$$y - Y = [f'(c) - f'(x_0)](x - x_0) \qquad (7.6)$$

kelib chiqadi.

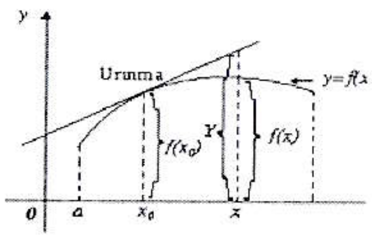
$f'(c) - f'(x_0)$ ayirmaga nisbatan Lagranj formulasini qo'llab $f'(c) - f'(x_0) = f''(c_1)(c - x_0)$ tenglikni hosil кilamiz, bu yerda c_1 c bilan x_0 orasidagi qiymat. Oxirgi tenglikni hisobga olib (7.3) ni

$$y-Y=f''(c_1)(c-x_0)(x-x_0) \qquad (7.7)$$

ko'rinishda yozamiz.

$x>x_0$ bo'lsin. U holda $x_0<c<x$ bo'lib $c-x_0>0$, $x-x_0>0$ va $(c-x_0)(x-x_0)>0$ bo'ladi.

$x<x_0$ bo'lsin. U holda $x<c<x_0$ bo'lib $c-x_0<0$, $x-x_0<0$ va $(c-x_0)(x-x_0)>0$ bo'ladi. Ushbu tengsizlikni hamda shartga ko'ra $f''(c_1)<0$ ekanini hisobga olib (7.4) dan $y-Y<0$ yoki $y<Y$ ga ega bo'lamiz.



7.4-rasm

Shunday qilib bir xil argument x ning o'zida funksiyaning ordinatasi y urinmaning ordinatasi Y dan kichik ekan. Bu grafik urinmadan pastda yotishini ya'ni grafik qavariqligini bildiradi.

2-teorema. Agar $(a;\, b)$ intervalning barcha nuqtalarida $f''(x)$ mavjud va $f''(x)>0$ bo'lsa, u holda $(a;\, b)$ intervalda $y=f(x)$ funksiyaning grafigi botiq bo'ladi.

Teoremaning isboti 6.1 teoremaning isbotiga o'xshaganligi sababli uni isbotlash o'quvchiga qoldirildi.

3-teorema. Agar $f''(x_0)=0$ bo'lsa yoki $f''(x_0)$ mavjud bo'lmasa va x_0 nuqtadan o'tganda ikkinchi hosila o'z ishorasini o'zgartirsa, u holda grafikning $M_0(x_0;f(x_0))$ nuqtasi $y=f(x)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi.

Isboti. Masalan, $x<x_0$ bo'lganda $f''(x_0)<0$ va $x>x_0$ bo'lganida $f''(x_0)>0$ bo'lsin. U vaqtda $x<x_0$ uchun grafik qavariq, $x>x_0$ uchun grafik botiq bo'ladi. Demak, grafikning $M_0(x_0;f(x_0))$ nuqtasi uning qavariq qismini botiq qismidan ajratib turadi, ya'ni u grafikning egilish nuqtasi.

1-misol. $y=x^3-9x^2+5x+43$ funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik intervallarini hamda egilish nuqtalarini toping.

Yechish usuli. Ikkinchi hosilani topamiz:

$y'=3x^2-18x+5$, $y''=6x-18$. Ikkinchi hosilani nolga tenglashtirib hosil bo'lgan tenglamani yechamiz: $y''=0$, $6x-18=0$, $x=3$.

7.2. Funksiya grafigining egilish nuqtasi

Agar ixtiyoriy $x\in(x_0-\delta,x_0)$ da funksiya grafigi Γ urinma L dan yuqorida (pastda) joylashgan bo'lib, ixtiyoriy $x\in(x_0,x_0+\delta)$ da funksiya grafigi Γ urinma L dan pastda (yuqorida) joylashgan bo'lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi deyiladi.

Boshqacha qilib aytganda, $f(x)$ funksiya grafigi $(x_0-\delta,x_0)$ da botiq (qavariq) bo'lib, $(x_0,x_0+\delta)$ da qavariq (botiq) bo'lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi deyiladi.

Funksiya hosilalari yordamida uning grafigining egilish nuqtasini topish mumkin.

Yuqorida keltirilgan 1-teorema va funksiya grafigining egilish nuqtasi ta'rifidan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. *$f(x)$ funksiya grafigining egilish nuqtalarini ikkinchi tartibli $f''(x)$ ni nolga aylantiradigan nuqtalar orasidan ($f''(x)=0$ tenglamaning yechimlari orasidan) qidirish kerak.*

2-teorema. *Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ da ikkinchi tartibli $f''(x)$ hosilaga ega bo'lsin.*

Agar $f''(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda ishorasini o'zgartirsa, u holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi.

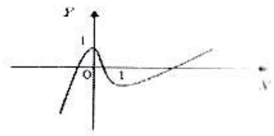
Misol. *Ushbu* $f(x)=x^3-3x^2+1$

funksiyaning qavariq va botiqlikka tekshirilsin, egilish nuqtasi topilsin.

◄Berilgan funksiya uchun

$$f'(x)=3x^2-6x, \qquad f''(x)=6x-6$$

bo'ladi.



7.4-chizma

Ravshanki, $f''(x)=6x-6<0,\ x-1<0,\ x<1$. Demak, berilgan funksiya grafigi $(-\infty,1)$ da qavariq bo'ladi.

Shuningdek $f''(x)=6x-6>0,\ x-1>0,\ x>1$.

Demak, berilgan funksiya grafigi $(1,+\infty)$ da botiq bo'ladi. $x=1$ nuqta $f(x)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi (7.4-chizma).►

7.3. Funksiya grafigining asimptotalari

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $a\in R$ nuqtaning biror $(a-\delta, a+\delta)$ atrofida $(\delta>0)$ berilgan bo'lsin.

Agar ushbu $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ limitlardan biri yoki ikkalasi cheksiz bo'lsa, to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiya vertikal asimptotasi deyiladi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $(a,+\infty)$, $(-\infty,a)$ $f(x)=kx+b+\alpha(x)$ oraliqda aniqlangan bo'lsin.

Agar $x\to+\infty$ da ($x\to-\infty$ da) $f(x)$ funksiya ushbu ko'rinishda ifodalansa, bunda k va b lar o'zgarmas sonlar va $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha(x)=0\right)$ bo'lsa,

$$y=kx+b \qquad (7.1)$$

to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining og'ma asimptotasi deyiladi.

Xususan, (7.1) da $k=0$ $y=b$ bo'lsa,to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining gorizontal asimptotasi deyiladi.

Shuni aytish kerakki, $y=kx+b$ to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiyaning og'ma asimptotasi bo'lishi uchun $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]$ (7.2) tengliklarning o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

Bundan $f(x)$ funksiya grafigining og'ma asimptotasini topish uchun (7.2) limitlarni hisoblash yetarli bo'ladi.►

7.4. Funksiya grafigini yasash

Endi funksiya grafigini yasashga o'tish mumkin.U quyidagi sxema asosida bajariladi:

1) Funksiyaning aniqlanish sohasini topish;
2) Funksiyani juft-toqlikka tekshirish;
3) Funksiyani davriylikka tekshirish;
4) Funksiyani uzluksizlikka tekshirish va uzilish nuqtalarini topish;
5) Funksiya grafigining koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topish;
6) Monotonlik oraliqlarini aniqlash;
7) Ekstremumga tekshirish;
8) Botiq va qavariqlikka tekshirish;
9) Funksiyaning asimptotalarini topish;
10) Funksiya grafigini chizish.

Misol. $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$ *funksiyani to'liq tekshiring va grafigini chizing.*

1. Funksiya $x=1$ nuqtadan tashqari sonlar o'qining barcha nuqtalarida aniqlangan.

2. $f(-x)=\frac{-2x-1}{(-x-1)^2}\neq f(x)$ va $f(-x)\neq -f(x)$, demak, funksiya toq ham emas, juft ham emas.

3. Funksiya davriy emas.

4. $x=1$ nuqtada II-tur uzilishga ega:

$$\lim_{x\to 1\pm 0} f(x) = \lim_{x\to 1\pm 0}\frac{2x-1}{(x-1)^2} = +\infty,$$

qolgan nuqtalarda funksiya uzluksiz.

5. Agar $x=0$ bo‘lsa, u holda $y=-1$ va $y=0$ da $x=\frac{1}{2}$. Bundan kelib chiqadiki, $(0;-1)$ va $\left(\frac{1}{2};0\right)$ nuqtalar funksiya grafigining koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalari.

6. $y' = -\frac{2x}{(x-1)^3}$ funksiya aniqlanish sohasini quyidagi oraliqlarga bo‘lamiz: $(-\infty;0)$, $(0,1)$, $(1;+\infty)$

$(-\infty;0)$ oraliqlarda funksiya kamayadi. $(0,1)$ oraliqda esa funksiya o‘sadi. $(1;+\infty)$ oraliqda funksiya kamayadi.

7. $y'(x)$ hosila ishorasini $x=0$ nuqtani o‘tishda manfiydan musbatga o‘zgartiradi. Demak, berilgan funksiya $x=0$ nuqtada minimumga erishadi va $y_{min}=y(0)=-1$ bo‘ladi.

8. Funksiya botiq va qavariqligini tekshirish uchun ikkinchi tartibli hosilani olamiz. $y''=2\cdot\frac{2x+1}{(x-1)^4}$ funksiyaning aniqlanish sohasini quyidagi oraliqlarga ajratamiz.

$\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};1\right)$ $(1;+\infty)$.

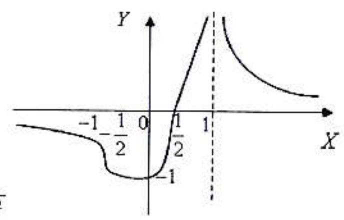
$\left(-\infty;\frac{-1}{2}\right)$ da $f''(-1)=-\frac{1}{8}<0$ funksiya qavariq,

$\left(-\frac{1}{2};1\right)$ da $f''(0)=2>0$ funksiya botiq, $(1;+\infty)$ oraliqda $f''(0)=10>0$ funksiya botiq. Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $x=-\frac{1}{2}$ dan o‘tishda o‘z

ishorasini o‘zgartiradi, bundan kelib chiqadiki, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{8}{9}$ nuqta egilish nuqtasi bo‘ladi.

9. $x=1$ funksiyaning vertikal asimptotasi, $y=0$ gorizontal asimptotasi, ya’ni

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=0$$



7.5-chizma

Og‘ma asimptotasini topamiz

$$k_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x(x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}$$

u holda

$$b_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=0,$$

u holda $b=0$. Bundan kelib chiqadiki $y=kx+b$ og‘ma asimptota yo‘q.

Mustaqil yechish uchun misollar

Funksiyalarni tekshiring

1. $y=f(x)=x^3(x-5)^2$
2. $y=f(x)=(x-3)^3(x+2)^2$
3. $y=f(x)=\ln x^3 x^2$
4. $y=f(x)=\text{conx}^2\cos^2 x$
5. $y=f(x)=\sin x^3(x-5)^2$
6. $y=\frac{\cos x+\sin x}{1-\sin x}$
7. $y=\frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x}$

§ 8. Optimallashtirish usullari (optemallashtirish masalalar Nyuton usuli)

Chiziqli dasturlash masalasini geometrik usulda tahlil qilish va yechish

Geometrik tahlilni masala misolida olib boramiz. Shartlarning har birining grafigini OX_1X_2 koordinatlar tekisligida tasvirlab olamiz. Buning uchun tengsizliklar sistemasini tenglama ko‘rinishida yozib chiqamiz.

$$\begin{cases} 0{,}1x_1 + & 0{,}3x_2 = & 30 \\ 0{,}5x_1 + & 0{,}2x_2 = & 45 \\ 0{,}1x_1 + & 0{,}1x_2 = & 12 \end{cases}$$

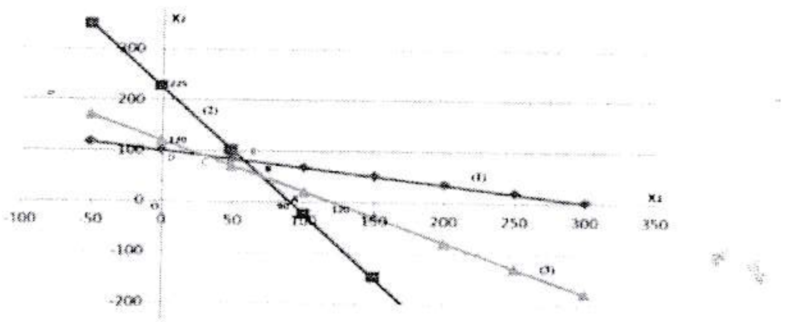
Hisoblashlarni soddalashtirish maqsadida tenglamalarning har birining kasr qismini yo'qotish uchun 10 ga ko'paytirib olamiz. Natijada u quyidagicha bo'ladi

$$\begin{cases} x_1 + & 3x_2 = & 300 \\ 5x_1 + & 2x_2 = & 450 \\ x_1 + & x_2 = & 120 \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasidagi har bir tenglamaning grafigini qurish uchun quyidagi jadvalni tuzib olamiz

	x_1	x_2		x_2	x_1
1- teng	0	100	1- teng	0	300
2- teng	0	225	2- teng	0	90
3- teng	0	120	3- teng	0	120

Jadvaldagi ma'lumotlar asosida sistema har bir tenglamasining grafigini OX_1X_2 koordinatlar tekisligida tasvirlab olamiz va belgilangan nomerlar bo'yicha raqamlab chiqamiz (8.1-rasm). Tenglamalar grafiklarini tasvirlashni MS Excel dasturidan foydalanishimiz mumkin.

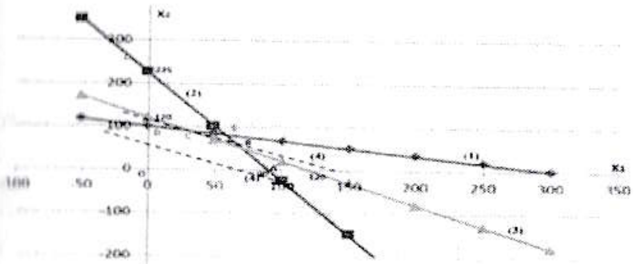


8.1-rasm

Qo'yilgan masalaning MBYSni topish uchun hosil bo'lgan shartlardagi to'g'ri chiziqlarning pastki qismida joylashgan va barchasi uchun umumiy bo'lgan sohani olamiz. Bizning misolimizda bu soha OABCD beshburchak shaklidagi sohadan iborat (8.1-rasm).

Izoh. E nuqta MBYS ga kirmaydi. Chunki bu nuqta (3) tenglamaning grafigidan yuqorida joylashgan.

Bu sohaning istalgan nuqtasining koordinatalari masalaning shartlariga mos mumkin bo'lgan yechimlaridan birini ifodalaydi. Bu yerda biz maqsad funksiyasining biror qiyamatiga mos keladigan rejalar (yechimlar)ga mos nuqtalar to'plamini ko'rib chiqamiz. Masalan $F(x_1,x_2) = 70000$ (maqsad funksiyasining bu qiymatini o'zimiz ixtiyoriy tanlaymiz) bo'ladigan nuqtalar to'plami $1000x_1 + 1400x_2 = 70000$ tenglama bilan ifodalanadi. Maqsad funksiyasining bu qiymatiga mos grafigini yuqorida ko'rsatib o'tilganidek qurib olamiz. Bu OX_1X_2 koordinat tekisligida (70;0) va (0;50) nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi bo'lib, 2 – rasmda uning grafigi punktir chiziq bilan ifodalangan. $F(x_1,x_2)$ funksiyaning qiymati orttirilsa, masalan $F(x_1,x_2) = 140000$ deb olinsa unga mos grafik avvalgiga parallel bo'lib yuqoriroqdan, ya'ni (140;0) va (0;100) nuqtalardan o'tgan to'g'ri chiziq hosil bo'ladi (8.2-rasmdagi (4) to'g'ri chiziqlar). Bu to'g'ri chiziqlarning MBYSga taaluqli har bir nuqtasining koordinatalari (2.1) – (2.2) masalaning yechimlarini ifodalaydi. Maqsad funksiyasining $F(x_1,x_2)$ = const tartibda olingan grafiklari o'zaro parallel to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lar ekan. Maqsad funksiyasining qiymati ortgan sari bu to'g'ri chiziq yuqorilab boraveradi (8.2-rasm).



8.2-rasm

Bora – bora MBYSdan chiqib ketishi mumkin. Xususan berilgan misolda maqsad funksiyasining grafigi MBYSdan oxiri C nuqtadan o'tgan holida chiqib ketadi. Ana shu holat, ya'ni C nuqta koordinatalari masala yechimini, **optimal rejani berar ekan deyishga** asos bo'ladi.

8.2-rasmdagi grafikdan ko'rinadiki C nuqtaning koordinatasi (1) va (3) to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasining koordinatasidan iborat. Demak, C nuqta koordinatalarini topish uchun (1) va (3) tenglamalarni sistema qilib yechish kerak.

Xuddi shuningdek, B nuqta koordinatalari (2) va (3) to'g'ri chiziqlar grafiklarining kesishish nuqtasidan iborat. Uning kooordinatalarini topish uchun ham (2) va (3) tenglamalarni sistema qilib yechamiz.

Dastlab C nuqtaning koordinatalarini topamiz. Buning uchun (1) va (3) tenglamalarni sistema qilib olamiz va uni yechamiz

$$\begin{cases} {}_1 + 3x_2 = 300 \\ {}_1 + {}_2 = 120 \end{cases}$$

Birinchi tenglamadan ikkinchi tenglamani ayiramiz

$$\begin{cases} 2x_2 = 180 \\ {}_1 + {}_2 = 120 \end{cases}$$

Bunda $x_2=90$ va $x_1=30$ kelib chiqadi. Demak C(30;90).

Endi B nuqtaning koordinatalarini topamiz. Buning uchun (2) va (3) tenglamalarni sistema qilib yechamiz

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 450 \\ {}_1 + {}_2 = 120 \end{cases}$$

Ikkinchi tenglamani 2 ga ko'paytirib birinchi tenglamadan ayiramiz. Natijada quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi

$$\begin{cases} 3x_1 = 210 \\ {}_1 + {}_2 = 120 \end{cases}$$

Bu sistemani yechib, noma'lumlarni topamiz va natija $x_1=70$, $x_2=50$ bo'ladi.

Demak B nuqta koordinatasi B(70;50) ekan.

2-rasmga asoslanib OABCD shakl uchlarining koordinatalarini yozib olamiz O(0;0), A(100;0), B(70;50), C(30;90), D(0;100) ekanligini ko'ramiz. Chizmada ko'rilganidek MBYS qabariq sohadan iborat bo'lib, bu holat barcha ChDMlar

uchun o'rinli bo'lgan holatdir. Maqsad funksiyasi grafigi ham to'g'ri chiziq bo'lganligi uchun uni oshirish parallel ko'chirishdan iborat bo'ladi va maqsad funksiyasining maksimal qiymati MBYS uchlaridan birida ya'ni maqsad funksiyasining grafigi MBYSdan chiqib ketish arafasida o'tgan nuqtasida bo'lar ekan. Bu esa optimal reja, ya'ni ChDMlar yechimini topish uchun umumiy qoida tavsiya qilishga imkoniyat beradi.

ChDMlarni yechishda avvalo MBYSni ifodalovchi qabariq soha topiladi va uning uchlarida maqsad funksiyasi hisoblanadi. Bu qiymatlardan eng kattasiga mos keluvchi nuqta koordinatalari izlanayotgan yechim – optimal rejani beradi. Bu qoidani yuqorida ko'rilgan masalaga tatbiq qilamiz. Maqsad funksiyasi (MF) ning MBYS OABCD beshburchak uchlari A(100;0), B(70;50), C(30;90), D(0;100) dagi qiymatlarini F_A, F_B, F_C, F_D deb belgilab, ularni hisoblasak, $F_A= 100000$, $F_B=140000$, $F_C=156000$, $F_D= 140000$.

Bu qiymatlarni taqqoslash natijasida optimal reja C(30;90) nuqtada ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Bu natija 2 – rasmdagi chizmaga ham mos keladi, ya'ni MF grafigini parallel ko'chirishda bu grafik MBYSdan C nuqta orqali chiqib ketishi ko'rinib turibdi. Bu keltirilgan grafik usul ikki noma'lumli masalalarda juda qulay bo'lish bilan birga ko'plab umumiy qoida va tavsiyalar ham ishlab chiqishga imkoniyat beradi.

Demak, qo'yilgan masalaning yechimi quyidagicha bo'ladi.

Optimal reja X^*=(30;90)

Maqsad funksiyasining maksimal qiymati: $\mathbf{F_{max}=F_c=156000}$

8.1. Optimal rejaning iqtisodiy tahlili

Yuqorida keltirilgan (2.1) – (2.2) masalaning topilgan yechimini tahlil qilamiz. Optimal reja C(30;90) nuqtada bo'lib, bu nuqtada $x_1 = 30$; $x_2 = 90$ va $F_c=156000$ ekanligini ko'rdik. Chizmadan (2–rasm) ko'rinadiki, C nuqtada 1,3-homashyo to'liq sarflanadi, 2-homashyo esa ortib qolar ekan, chunki 2-

homashyoga mos to'g'ri chiziq C nuqtadan o'tmaydi. Optimal reja qiymatlarini homashyo sarfi funksiyalariga qo'yib ham bunga ishonch hosil qilamiz.

$$f_1(x_1x_2) = (0{,}1x_1 + 0{,}3x_2)\Big|_{x_2=90}^{x_1=30} = 0{,}1 \times 30 + 0{,}3 \times 90 = 30$$

$$f_2(x_1x_2) = (0{,}5x_1 + 0{,}2x_2)\Big|_{x_2=90}^{x_1=30} = 0{,}5 \times 30 + 0{,}2 \times 90 = 33 < 45$$

$$f_3(x_1x_2) = (0{,}1x_1 + 0{,}1x_2)\Big|_{x_2=90}^{x_1=30} = 0{,}1 \times 30 + 0{,}1 \times 90 = 12$$

Bu holatdan kelib chiqib quyidagi mulohaza va tavsiyalarni keltirish mumkin. Ikkinchi tur homashyo 45 birlik bo'lib, undan 33 birlik ishlatiladi. Demak, 12 birlik 2 – tur homashyo ortib qoladi. Bu ortiqchasini homashyo sifatida sotib yuborish mumkin. Ikkinchi yo'li esa chizmadan ko'rinayapti, ishlab chiqarish rejasini oshirishga to'sqinlik qilayotgan kamyob (taxchil) homashyoni ko'paytirish kerak. Bunda barcha homashyolarni to'la jalb qilish, hamda daromadni oshirish imkoniyatiga ega bo'lamiz. Bizning masalada, chizmadan ko'rinadiki (2 – rasm), 3–tur homashyo, ya'ni shakar rejani oshirishga imkoniyat bermayapti. Agar shakarga mos to'g'ri chiziq grafigini paralell ko'chirib E nuqtagacha olib borilsa barcha homashyolar to'la ishlatilishiga erishiladi. Grafikni paralell ko'chirish esa shakar zaxirasini ko'paytirish hisobiga erishiladi. Hususan bizning masalada $f_3(x_1x_2) = (0{,}1x_1 + 0{,}1x_2) = C_3$ deb, grafik E nuqtadan o'tishi shartidan C_3 qiymat tanlanadi. E nuqta 1-,2- to'g'ri chiziqlar kesishgan nuqtasi bo'lib, uning koordinatalari

$$\begin{cases} 0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 = 30 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}2x_2 = 45 \end{cases}$$ sistemadan topiladi.

Bu sistemadan $x_1 = \frac{75}{1{,}3}; x_2 = \frac{105}{1{,}3}$ ekanligini topamiz. 3-xomashyo chizig'i bu nuqtadan o'tishi uchun $f_3(x_1x_2) = 0{,}1 \times \left(\frac{75}{1{,}3} + \frac{105}{1{,}3}\right) = \frac{180}{13} = 13{,}8$ bo'lishi kerak ekan.

Demak, shakar zaxirasini 13,8 birlikka yetkazsak, ya'ni 1,8 birlikka oshirsak optimal rejani $E\left(\frac{75}{1{,}3}; \frac{105}{1{,}3}\right)$ nuqtaga ko'chirish mumkin. Bunda maqsad funksiyasi

$$F_E = 1000 \times \frac{75}{1{,}3} + 1400 \times \frac{105}{1{,}3} = \frac{75000 + 147000}{1{,}3} = \frac{222000}{1{,}3} \approx 170770$$ qiymatga erishadi.

Bunda daromad C nuqtadaligiga qaraganda 14770 pul birligiga ortadi. Shunday qilib qo'yilgan iqtisodiy masalaning matematik modelini tuzish, matematik model yordamida masala yechimini topish va topilgan yechimning iqtisodiy tahlilini to'liq o'tkazish mumkin ekan.

8.2. Transport masalasini yechishning shimoliy-g'arb burchak usuli

Yechish. Bu yerda taminotchi punktlar soni m=3, istemolchi punktlar soni esa n=5. Shu sababli, masalaning tayanch rejasi 5+3-1=7 to'ldirilgan kataklardagi sonlar bilan aniqlanadi.

Jadvalni to'ldirishni x_{11} katakdan boshlaymiz. Buning uchun x_{11} katak (yacheyka) da keshishgan A_1 satr va B_1 ustunlardagi yuk zahiralarini va talablarni taqqoslaymiz hamda ularning eng kichigini olamiz

$$_{11} = min\{a_1; b_1\} = min\{140; 60\} = 60$$

6.2-jadvalning x_{11} yacheykasiga 60 ni yozamiz, shu bilan B_1 istemolchining talaba qondiriladi va x_{21}=0, x_{31}=0 bo'ladi.

Navbatdagi yechimni izlash yana shimoliy-g'arbiy burchak - x_{12} yacheykadan davom ettiriladi va A_1 satrda qolgan yuk zahirasi va B_2 ustundagi talabni taqqoslaymiz hamda ularning eng kichigini olamiz

$$_{12} = min\{a_1 - x_{11}; b_2\} = min\{140 - 60; 70\} = min\{80; 70\} = 70$$

x_{12} yacheykasiga 70 ni yozamiz, shu bilan B_2 istemolchining talaba qondiriladi va x_{22}=0, x_{32}=0 bo'ladi.

Keyingi shimoliy-g'arbiy burchak - x_{13} yacheyka bo'ladi. A_1 satrda qolgan yuk zahirasi va B_3 ustundagi talabni taqqoslaymiz hamda ularning eng kichigini olamiz

$_{13} = min\{a_1 - {}_{11} - {}_{12}; b_3\} = min\{140 - 60 - 70; 120\} = min\{10; 120\}$
$= 10$

x_{13} yacheykasiga 10 ni yozamiz, shu bilan A_1 zahiradagi yuk tugaydi va x_{14}=0, x_{15}=0 bo'ladi.

Navbatdagi shimoliy-g'arbiy burchak – x_{23} yacheyka bo'ladi. Bu yacheykada A_2 satrda yuk zahirasi va B_3 ustunda taminlanmagan istemolchi talabini taqqoslaymiz hamda ularning eng kichigini olamiz

$$_{23} = min\{a_2; b_3 - x_{13}\} = min\{180; 120 - 10\} = min\{180; 110\} = 110$$

x_{23} yacheykasiga 110 ni yozamiz, shu bilan B_3 istemolchining talaba qondiriladi va x_{33}=0 bo'ladi.

Endigi shimoliy-g'arbiy burchak – x_{24} yacheyka bo'ladi. Bu yacheykada A_2 satrda qolgan yuk zahirasi va B_4 ustundagi istemolchi talabini taqqoslaymiz hamda ularning eng kichigini olamiz

$$_{24} = min\{a_2 - x_{23}; b_4\} = min\{180 - 110; 130\} = min\{70; 130\} = 70$$

x_{24} yacheykasiga 70 ni yozamiz, shu bilan A_2 zahiradagi yuk tugaydi va x_{25}=0 bo'ladi.

Navbatdagi shimoliy-g'arbiy burchak – x_{34} yacheyka bo'ladi. Bu yacheykada A_3 satrdagi yuk zahirasi va B_4 ustunda taminlanmagan istemolchi talabini taqqoslaymiz hamda ularning eng kichigini olamiz

$$_{34} = min\{a_3; b_4 - x_{24}\} = min\{160; 130 - 70\} = min\{160; 60\} = 60$$

x_{34} yacheykasiga 60 ni yozamiz, shu bilan B_4 istemolchining talaba qondiriladi.

Bizda faqat bitta x_{34} yacheyka to'lmay qoldi. Bu yacheykaning qiymati

$$_{35} = min\{a_3 - x_{35}; b_4\} = min\{160 - 60; 100\} = min\{100; 100\} = 100$$

ga teng. Qolgan yuk zahirasi bilan istemolchi talabi bir xil. Shu sababli x_{34} yacheykaga 100 ni yozamiz.

Yuqorida amalga oshirgan ishlarimizni 8.3-jadvalga joylashtiramiz

8.3-jadval

Taminotchilar	Istemolchilar					Zahiralar
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2 60	3 70	4 10	2 0	4 0	140
A_2	8 0	4 0	1 110	4 70	1 0	180
A_3	9 0	7 0	8 0	7 60	2 100	160
Talablar	60	70	120	130	100	480

Bu jadvaldan masalaning **tayanch rejasi**

$$= \begin{bmatrix} 60 & 70 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 110 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 100 \end{bmatrix}$$

ko'rinishida bo'ladi. Bu rejaga asosan yuk tashishning umumiy xarajati:

$$F(x) = 2\cdot60 + 3\cdot70 + 4\cdot10 + 2\cdot0 + 4\cdot0 + 8\cdot0 + 4\cdot0 + 1\cdot110 + 4\cdot70 + 1\cdot0 + 9\cdot0$$
$$+7\cdot0 + 8\cdot0 + 7\cdot60 + 2\cdot100 = 120 + 210 + 40 + 110 + 280 + 420 + 200 = 1380$$

8.3. Transport masalasini yechishning minimal element usuli

Bu usulda yuk tashish xarajatlari hisobga olinadi.

Dastlab, yuklarni yetkazib berish xarajatlarining minimal qiymatlarini topib olamiz. Ular: c_{23}=1 va c_{25}=1. Jadvalni to'ldirishni qaysi biridan boshlashning farqi yo'q.

Dastlab, jadvalni to'ldirishni x_{23} yacheykadan boshlaymiz. Undagi yuk zahirasi va istemolchi talabini taqqoslaymiz

$$_{23} = min\{a_2; b_3\} = min\{180; 120\} = 120$$

x_{23} yacheykasiga 120 ni yozamiz, shu bilan B_3 istemolchi talabi bajariladi va x_{13}=0, x_{33}=0 bo'ladi. Keying eng kam xarajat c_{25}=1. Shu sababli x_{25} yacheykani to'ldirib olamiz. Buning uchun

$$_{25} = min\{a_2 - x_{23}; b_5\} = min\{180 - 120; 100\} = min\{60; 100\} = 60$$

x_{25} yacheykaga 60 ni yozamiz, shu bilan A_2 zahiradagi yuk tugaydi va x_{21}=0, x_{22}=0, x_{24}=0 bo'ladi.

Endi, jadvalning yuk miqdorlari bilan to'ldirilmagan yuklarni yetkazib berish xarajatlarining minimal qiymatlarini topib olamiz. Ular: c_{11}=2 va c_{14}=2 va c_{35}=2.

Bularni to'ldirishni x_{11} dan boshlaymiz. Buning uchun A_1 dagi zahirani va B_1 dagi istemolchi talabini taqqoslaymiz va ulardan eng kichigini tanlaymiz

$$_{11} = min\{a_1; b_1\} = min\{140; 60\} = 60$$

x_{11} yacheykasiga 60 ni yozamiz, shu bilan B_1 istemolchi talabi bajariladi va x_{31}=0 bo'ladi. Keying eng kam xarajat c_{14}=2. Shu sababli, x_{14} yacheykani to'ldiramiz. Buning uchun

$$_{14} = min\{a_1 - x_{11}; b_4\} = min\{140 - 60; 130\} = min\{80; 130\} = 80$$

x_{14} yacheykaga 80 ni yozamiz, shu bilan A_1 zahiradagi yuk tugaydi va x_{12}=0 va x_{15}=0 bo'ladi.

Navbatdagi minimal xarajat c_{35}=2. Shuning uchun, x_{35} yacheykani to'ldiramiz

$$_{35} = min\{a_3; b_4 - x_{23}\} = min\{160; 100 - 60\} = min\{160; 40\} = 40$$

x_{35} yacheykasiga 40 ni yozamiz, shu bilan B_5 istemolchi talabi bajariladi.

Bo'sh qolgan yacheykalardagi eng kam xarajatlar: c_{32}=7 va c_{34}=7 ga teng. Shuning uchun, x_{32} yacheykani to'ldiramiz

$$_{32} = min\{a_3 - x_{35}; b_2\} = min\{160 - 40; 70\} = min\{120; 70\} = 70$$

x_{32} yacheykasiga 70 ni yozamiz, shu bilan B_2 istemolchi talabi bajariladi. Natijada bizda x_{34} yacheyka to'ldirilmasdan qoladi. Bunda

$$_{34} = min\{a_3 - x_{32} - x_{35}; b_4 - x_{14}\} = min\{160 - 70 - 40; 130 - 80\}$$
$$= min\{50; 50\} = 50$$

bo'ladi va bu qiymatni x_{34} ga yozamiz. Shunday qilib jadvalning barcha yacheykalarini to'ldirib olamiz (8.4-jadval).

8.4-jadval

Taminotchilar	Istemolchilar					Zahiralar
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2 60	3 0	4 0	2 80	4 0	140
A_2	8 0	4 0	1 120	4 0	1 60	180

A_3	9 0	7 70	8 0	7 50	2 40	160
Talablar	60	70	120	130	100	480

Bu jadvaldan masalaning **tayanch rejasi**

$$= \begin{bmatrix} 60\ 0\ 0\ 80\ 0 \\ 0\ 0\ 120\ 0\ 60 \\ 0\ 70\ 0\ 50\ 40 \end{bmatrix}$$

ko'rinishida bo'ladi. Bu rejaga asosan yuk tashishning umumiy xarajati:

$$F(x) = 2\cdot60 + 3\cdot70 + 4\cdot10 + 2\cdot0 + 4\cdot0 + 8\cdot0 + 4\cdot0 + 1\cdot110 + 4\cdot70 + 1\cdot0 + 9\cdot0$$
$$+7\cdot0 + 8\cdot0 + 7\cdot60 + 2\cdot100 = 120 + 210 + 40 + 110 + 280 + 420 + 200 = 1380$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Tumanga qarashli n – ta jamoa xujaligining ekin maydonlari mos xolda S1 ,S2,…Sn ga . Tuman rejasiga kura m xil ekindan pl „p2,…pm miqdorda hosil olinishi kerak. j-jamoa xujaligining i-ekindan j- maydonning bir gektaridan olishni kutadigan miqdori aij birlik jamoa xujaliklari buyicha max xosil olinishi uchun ekin maydonlari qanday taksimlanishi kerak.

2. Sexda 3ta bir-birini almashtira oladigan kurilma-stanoklar bor, ularning quvvatlari oyiga 400,850,300 norma-vaqtgacha. Sex 5 xil maxsulot tayyorlash majburiyatini olgan: P1- 600 birlik; P2 -350, P3- 450, P4- 500, P5- 600 birlik. Birinchi stanok xar bir xil maxsulotning bir birligini tayyorlashi uchun mos xolda 0,3, 0,6, 0,4, 0,8 va 0,5 soat sarflaydi, ikkinchi stanok – 0,6; 0,8; 0,7 va 0,9 soat, uchinchi stanok – 1,4, 0,5, 0,9, 0,6 va 1 soat sarflaydi. Bir birlik maxsulot tayyorlash uchun birinchi stanokning xarajatlari mos xolda 20, 10, 40, 50 va 80 pul birligi; ikkinchisiniki – 50, 40, 30, va 60; uchinsiniki 65, 90, 30, 20 va 50. Maxsulotlarning bir birligini baxosi – 80, 100, 60, 50 va 85 pul birligiga teng bulsa majburiyat bajarilishini kafolatlaydigan maxsulot ishlab chikarish rejasi shunday tuzilsinki: 1) maksimal daromad olinsin; 2) tayyorlangan maxsulotlarning umumiy bahosi minimal bo'lsin; 3) qurilma – stanoklarning sarflagan vaqti minimal bo'lsin; 4) P1 xil maxsulotdan uchta, P2 –dan bitta, P3- dan ikkitadan qilib tuziladigan komplektlar soni maksimal bo'ladigan rejaning iqtisodiy matematik modelini tuzing.

3. Firma stol va stullar ishlab chiqarishga ixtisoslashgan. Ularni tayyorlashga ishlatiladigan 72 m3 birinchi xil va 56 m3 ikkinchi xil yogoch maxsulotlari mavjud. Stol va stullarning bir – birligini tayyorlashga sarflangan yogoch maxsulotlarining normasi jadvalda berilgan. 1 xil yogoch 2 xil yogoch stol stul 0,18 0,09 0,08 0,28 Firma bitta stoldan 4,4 pul birligi sof daromad oladi, stuldan esa – 2,8. Maksimal daromad olish uchun firma nechtadan stol va stullar tayyorlashi mumkin. Bunday masalaning iqtisodiy matematik modelini tuzing.

4.Uzunligi 750 sm dan bulgan simlarni uzunliklari 250 sm, 200 sm va 150 sm kesmalarga qirqish kerak. Uzunligi 250 sm bo'lgan kesmadan 200000 ta, 200 sm ligidan 250000 ta va 150 sm li kesmadan 50000 ta tayyorlash buyurtmasi olindi. Eng kam chikindi chiqishini ta'minlab buyurtma bajariladigan eng kam sondagi similar qirqiladigan optimal qirqish rejasining iqtisodiy matematik modelini tuzing.

5.Savdo firmasi P1 ,P2 , P3 xil maxsulotlar sotadi. Buning uchun 460 m2 maydonga ega bulgan foydali joydan va 500 odam / soat ishchi vaqtidan foydalaniladi. Firmaning tovar aylantirishi (tovar oboroti) 240000 pul birligiga teng. Maksimal daromad keltiradigan tovar aylantirish rejasini tuzish zarur. Ma'lumotlar jadvalda berilgan. Bu masalaning matematik modelini tuzing.

6.Sexda 3ta bir-birini almashtira oladigan qurilma-stanoklar bor, ularning quvvatlari oyiga 300,550,400 norma-vaqtgacha. Sex 5 xil maxsulot tayyorlash majburiyatini olgan: P1- 400 birlik; P2 -450, P3- 500, P4- 550, P5- 600 birlik. Birinchi stanok har bir xil maxsulotning bir birligini tayyorlashi uchun mos xolda 0,3, 0,6, 0,4, 0,8 va 0,5 soat sarflaydi, ikkinchi stanok – 0,6; 0,8; 0,7 va 0,9 soat, uchinchi stanok – 1,4, 0,5, 0,9, 0,6 va 1 soat sarflaydi. Bir birlik maxsulot tayyorlash uchun birinchi stanokning xarajatlari mos xolda 20, 10, 40, 50 va 80 pul birligi; ikkinchisiniki – 50, 40, 30, va 60; uchinsiniki 65, 90, 30, 20 va 50. Maxsulotlarning bir birligini bahosi – 80, 100, 60, 50 va 85 pul birligiga teng bulsa majburiyat bajarilishini kafolatlaydigan maxsulot ishlab chikarish rejasi shunday tuzilsinki: 1) maksimal daromad olinsin; 2) tayyorlangan maxsulotlarning umumiy baxosi minimal bulsin; 3) qurilma – stanoklarning sarflagan vaqti minimal bulsin;

4) P1 xil maxsulotdan uchta, P2 –dan bitta, P3- dan ikkitadan kilib tuziladigan komplektlar soni maksimal bo'ladigan rejaning iqtisodiy matematik modelini tuzing.

7. Firma stol va stullar ishlab chikarishga ixtisoslashgan. Ularni tayyorlashga ishlatiladigan 64 m3 birinchi xil va 48 m3 ikkinchi xil yogoch maxsulotlari mavjud. Stol va stullarning bir – birligini tayyorlashga sarflangan yogoch maxsulotlarining normasi jadvalda berilgan. 1 xil yogoch 2 xil yogoch stol stul 0,18 0,09 0,08 0,28 Firma bitta stoldan 4,4 pul birligi sof daromad oladi, stuldan esa – 2,8. Maksimal daromad olish uchun firma nechtadan stol va stullar tayyorlashi mumkin. Bunday masalaning iqtisodiy matematik modelini tuzing.

§ 9. Lopital qoidasi va misollar

9.1. $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik

1-teorema. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqtaning biror atrofida uzluksiz, a nuqtaning o'zidan tashqari shu atrofda differensiallanuvchi bo'lib, shu atrofda $\varphi(x)\neq 0$ va $\varphi(a)=f(a)=0$ hamda chekli yoki cheksiz $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$ limit mavjud bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ limit ham mavjud bo'ladi va $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}$ nisbatni qaraymiz. $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$ bo'lgani uchun bu tenglik to'g'ri.

Agar x a nuqtaning atrofiga tegishli bo'lsa, u holda yuqoridagi nisbatning o'ng tomoniga Koshi teoremasini qo'llasak $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$ kelib chiqadi, bunda c a bilan x orasidagi qiymat bo'lgani uchun $x\to a$ da $c\to a$. Shu sababli oxirgi tenglikda $x\to a$ da limitga o'tsak

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

isbotlanishi lozim bo'lgan tenglik hosil bo'ladi.

1-eslatma. Agar $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$ va $f(x)$ hamda $\varphi(x)$ hosilalar 1- teorema shartlarini qanoatlantirsa, u holda teoremani $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ nisbatga ikkinchi marta qo'llash mumkin. Ya'ni: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ va hokazo.

1-misol. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x}{1}=\cos0=1.$

2-misol. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\left(\frac{0}{0}\right)=$

$=\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}\cdot1=\frac{1}{6}.$

2-eslatma. 1-teorema $x\to\infty$ da $f(x)\to0$, $\varphi(x)\to0$ bo'lganda ham to'g'riligicha qoladi, ya'ni $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Bu tenglikning to'g'riligiga $x=\frac{1}{z}$ almashtirish olib ishonch hosil qilish mumkin.

3-misol. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{tg\frac{2}{x}}{\frac{3}{x}}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{2}{x}}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)'}{\left(\frac{3}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{2}{x}}\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{3}{x^2}}=\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\cos^2\frac{2}{x}}=$

$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\cos^2 0}=\frac{2}{3}.$

4-misol. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to a}\frac{(x^m-a^m)'}{(x^n-a^n)'}=\lim\limits_{x\to a}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\frac{ma^{m-1}}{na^{n-1}}=\frac{m}{n}a^{m-n}.$

5-misol. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-5x^2+2x+8}{x^4-2x^3-16x^2+2x+15}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x^3-5x^2+2x+8)'}{(x^4-2x^3-16x^2+2x+15)'}=$

$=\lim\limits_{x\to-1}\frac{3x^2-10x+2}{4x^3-6x^2-32x+2}=\frac{3\cdot1-10\cdot(-1)+2}{4\cdot(-1)-6\cdot1-32\cdot(-1)+2}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}.$

9.2. $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslik

Ushbu teoremani isbotsiz keltiramiz.

2-teorema. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqtaning biror atrofida uzluksiz, differensiallanuvchi ($x=a$ nuqtaning o'zidan tashqari) bo'lsa hamda shu atrofda $\varphi(x)\neq0$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ bo'lsa va chekli yoki cheksiz $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ limit mavjud bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ limit ham mavjud bo'ladi va $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ tenglik to'g'ri bo'ladi. Bu teorema $x\to\infty$da ham o'z kuchini saqlaydi.

6-misol. $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+0}(-x)=0.$

7-misol. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$

8-misol. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty.$

3-eslatma. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ tenglikning o'ng tomonidagi chekli yoki cheksiz limit mavjud bo'lsa uning chap tomonidagi limit ham mavjud bo'ladi. O'ng tomonidagi limitning mavjud bo'lmasligidan uning chap tomonidagi limitning mavjud bo'lmasligi kelib chiqmaydi.

9-misol. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}$ limitni toping.

Yechish. Lopital qoidasini qo'llaymiz:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\cos x)$. $x\to+\infty$ da 1+cos$x$ ifoda 0 bilan 2 orasida tebranadi, ya'ni $x\to+\infty$ da 1+cos$x$ ifodaning limiti mavjud emas. Shu sababli Lopital qoidasini qo'llab bo'lmaydi.

Izlanayotgan limitni boshqa yo'l bilan topamiz.

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=1+0=1.$$

9.3. $\infty-\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslik

Bunday aniqmaslikni ochish deyilganda $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, bir xil ishorali cheksizlik bo'lganda $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-\varphi(x)\right)$ limitni topish tushuniladi. Bunday aniqmasliklar $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka keltirilib keyin Lopital qoidasidan foydalaniladi. Bunda $a=\infty$ bo'lishi ham mumkin.

10-misol. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$ limitni toping.

Yechish. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\left(\frac{0}{0}\right)= \quad =\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\ln x)'}=$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\ln x+x-1}{x}}==\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x+x-1)'}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}.$$

9.4. $0\cdot\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslik

Bunday aniqmaslikni ochish deyilganda $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\varphi(x)$ limitni topish tushuniladi. Agar $f(x)\cdot\varphi(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$ yoki

$$f(x)\cdot\varphi(x)=\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

ko'rinishda yozilsa $0\cdot\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslik $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka keltiriladi. Bunda $a=\infty$ bo'lishi ham mumkin.

11-misol. $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=0$ (6-misolga qarang).

9.5. 1^{∞} ko'rinishdagi aniqmaslik

Bunday aniqmaslikni ochish deyilganda $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}$ limitni topish tushuniladi.

Agar $[f(x)]^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\ln f(x)}$ (α) ko'rinishda tasvirlansa 1^{∞} ko'rinishdagi aniqmaslikni ochish $0\cdot\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ochishga keltiriladi. Bunda $a=\infty$ bo'lishi ham mumkin.

12-misol. $\lim\limits_{x\to+0}(1+mx)^{\frac{1}{x}}$ limitni hisoblang.

Yechish. $\lim\limits_{x\to+0}(1+mx)^{\frac{1}{x}}(1^{\infty})=\lim\limits_{x\to+0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+mx)}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{x}\ln(1+mx)}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln(1+mx)}{x}\left(\frac{0}{0}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\frac{m}{1+mx}}{1}}=e^{m}.$

9.6. 0^{0} ko'rinishdagi aniqmaslik

Bunday aniqmaslikni ochish deyilganda $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}$ limitni topish tushuniladi. Bu holda ham yuqoridagi (α) tenglikdan foydalaniladi. Bunda $a=\infty$ bo'lishi ham mumkin.

13-misol. $\lim\limits_{x\to+0}x^{x}(0^{0})=\lim\limits_{x\to+0}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+0}x\ln x}=e^{0}=1.$

9.7. ∞^{0} ko'rinishdagi aniqmaslik

Bunday aniqmaslikni ochish deyilganda $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}$ limitni topish tushuniladi. Bunda $a=\infty$ bo'lishi ham mumkin.

14-misol. $\lim\limits_{x\to+0}(-\ln x)^{x}(\infty^{0})=\lim\limits_{x\to+0}e^{\ln(-\ln x)^{x}}=\lim\limits_{x\to+0}e^{\lim\limits_{x\to+0}x\ln(-\ln x)}$.

$$\lim_{x\to+0}x\cdot\ln(-\ln x)(0\cdot\infty)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln(-\ln x)}{\frac{1}{x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{(\ln(-\ln x))'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{-\ln x}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$=\lim\limits_{x\to+0}\frac{x}{\ln x}=0$. Demak $\lim\limits_{x\to+0}(-\ln x)^{x}=e^{0}=1$.

4-eslatma. 1^{∞}, 0^{0} va ∞^{0} ko'rinishdagi aniqmasliklar $[f(x)]^{\varphi(x)}$ ifodani logariflab $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmasliklardan birortasiga keltiriladi.

Shunday qilib, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0} ko'rinishdagi aniqmasliklar $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishga keltirilib keyin Lopital qoidasidan foydalanilar ekan.

Isbotlangan $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{p}-1}{x}=p$ ajoyib limitlarni Lopital qoidasidan foydalanib isbotlashni o'quvchiga tavsiya qilamiz.

Mustaqil yechish uchun мисоллар

1. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{x^2-16}=?$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x}=?$
3. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{\sin x}=?$
4. $\lim\limits_{x\to 10}\frac{\lg x-1}{x^2-100}=?$

5. $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{e^x-1}=?$

6. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\tan x}{x-\pi}=?$

7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ctgx}{x-\frac{\pi}{2}}=?$

§ 10. Boshlang'ich funksiya. Aniqmas integral. Aniqmas integral o'zgaruvchini almashtirish va bo'laklab integrallash usullari

10.1. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral tushunchasi

1-Ta'rif. Agar *[a;b]* segmentning hamma nuqtalarida $F'(x)=f(x)$ tenglik bajarilsa, $F(x)$funksiya sxu segmentda $f(x)$funksiyaga nisbatan boshlang'ich funksiya deb ataladi.

1-Misol. $f(x)=4x^3$funksiyaning $(-\infty;\ +\infty)$ intervalda bosxlang'ich funksiyasi $F(x)=x^4$ bo'ladi,chunki $(-\infty;\ +\infty)$ da $F'(x)=4x^3$.

2-misol. $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiyaning $(0;\ +\infty)$ intervalda boshlang'ich funksiyasi $F(x)=\ln x$ bo'ladi,cxunki shu intervalda $F'(x)=\frac{1}{x}$.

1-Teorema. Agar $F_1(x)$ va $F_2(x)$funksiyalar $f(x)$funksiyaning *[a; b]* kesmada boshlang'ich funksiyalari bo'lsa, ular orasidagi ayirma o'zgarmas songa teng bo'ladi.

Isbot. Boshlang'ich funksiyaning ta'rifiga ko'ra x ning *[a; b]* kesmadagi xar qanday qiymatida

$F_1'(x)=f(x),\ F_2'(x)=f(x)$ (10.1)

tengliklarga ega bo'lamiz.

$\varphi(x)=F_1(x)-F_2(x)$ (10.2)

deb belgilaymiz. Unda (1) tengliklarga asosan x ning *[a; b]* kesmadagi xar qanday qiymatida $\varphi'(x)=[F_1(x)-F_2(x)]'=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0,$ bundan $\varphi(x)=S$ o'zgarmas son ekani kelib chiqadi $\propto$.

Isbot qilingan teoremadan bunday natija chiqadi: agar berilgan $f(x)$funksiya uchun qanday bo'lmasin biror $F(x)$ boshlang'ich funksiya topilgan bo'lsa, $f(x)$funksiya uchun xar qanday boshqa boshlang'ich funksiyalar $F(x)+S$ *(C-const)* ko'rinishga ega bo'ladi.

2-Ta'rif. Agar $F(x)$funksiya *[a; b]* da $f(x)$funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, u xolda $F(x)+S$, *(S-const)* bosxlang'ich funksiyalar to'plamiga $f(x)$funksiyaning *[a; b]* dagi aniqmas integrali deyiladi va $\int f(x)dx$ kabi belgilanadi. Bunda $\int$ - integral belgisi, $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ esa integral ostidagi ifoda deyiladi.

Demak, $\int f(x)dx=F(x)+C$ (10.3)

1-misol. $f(x)=4x^3$funksiyaning $(-\infty;\ +\infty)$ intervalda boshlang'ich funksiyasi $F(x)=x^4+C$ bo'lgani uchun uni aniqmas integrali $\int 4x^3dx=x^4+C$ *(S-sonst)* bo'ladi.

Shunday qilib, aniqmas integral $u=F(x)+C$funksiyalar to'plamidan iboratdir. Geometrik nuqtai nazardan qaraganda aniqmas integral egri chiziqlar to'plamidan iborat bo'lib, ularning xar biri egri chiziqlardan bittasini o'z-o'ziga parallel xolda yuqoriga yoki pastga, ya'ni o*u* o'q bo'ylab siljitish yo'li bilan xosil qilinadi.

Ushbu teoremani isbotsiz aytib o'tamiz:

2-Teorema. Agar $f(x)$funksiya *[a; b]* segmentda uzluksiz bo'lsa, bufunksiya uchun boshlang'ich funksiya (demak aniqmas integral)mavjud bo'ladi.

Berilgan $f(x)$funksiya bo'yicha uning boshlang'ich funksiyasini topish $f(x)$funksiyani integrallash deyiladi.

10.2. Aniqmas integralning xossalari

1-Xossa. Aniqmas integralning xosilasi integral ostidagi funksiyaga teng, ya'ni

$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$ (10.4)

Isbot. Haqiqatdan ham, $F(x)$funksiya $f(x)$ ning boshlang'ichfunksiyasi bo'lsin: $F'(x)=f(x)$. U holda $\int f(x)dx=F(x)+C$ bo'ladi. Keyingi tenglikdan topamiz:

$\left(\int f(x)dx\right)'=(F(x)+C)'=F'(x)+(C)'=F'(x)+0=F'(x)=f(x)$ $\propto$

2-Xossa. Aniqmas integralning differensiali integral ostidagi ifodaga teng, ya'ni $d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx.$ (10.5)

3-Xossa. Biron funksiya differensialining aniqmas integrali shu funksiya bilan o'zgarmas son yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int dF(x) = F(x) + C \quad \text{(C-const)} \quad (10.6)$$

Isbot. Haqiqatdan ham, *F(x)* funksiya *f(x)* ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin: *F'(x)=f(x)*. U holda

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (10.3)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Ikkinchi tomondan,

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dF(x) \qquad (10.7)$$

(7) ni (3) ga qo'yib quyidagiga ega bo'lamiz, $\int dF(x) = F(x) + C.$ ∝

4-Xossa. O'zgarmas ko'paytuvchini integral belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin, ya'ni

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx. \qquad (10.8)$$

Isbot. Agar *F(x)*funksiya *f(x)* ning boshlang'ichfunksiyasi bo'lsa, ya'ni *F'(x)=f(x)* bo'lsa, u xolda *k·F(x)* funksiya *k·f(x)* ning boshlang'ichfunksiyasi bo'ladi, chunki *(kF(x))' =kF' (x)=k·f(x),* bunda *k=const≠0.* Bundan $\int kf(x)dx = kF(x) + \overline{C} = k\left(F(x) + \frac{\overline{C}}{k}\right) = k(F(x) + C) = k\int f(x)dx$ Kelib chiqadi, bu erda $C = \frac{\overline{C}}{k}$ ∝ .

5-Xossa. chekli sondagi algebraik yig'indidan olingan aniqmas integral, har bir qo'shiluvchidan ayrim-ayrim holda olingan aniqmas integrallarning algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int [f(x) + g(x) - \varphi(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int \varphi(x)dx. \qquad (10.9)$$

4-Misol. $\int (x^4 + 4\sin x - 9)dx$ ni toping.

Yechilishi. 4-va 5-xossalarga asosan quyidagiga egamiz:

$$\int (x^4 + 4\sin x - 9)dx = \int x^4 dx + 4\int \sin x dx - 9\int dx = \frac{x^5}{5} - 4\cos x - 9x + C.$$

Hosil qilingan natijaning to'g'riligini differensiallash yordamida oson tekshirish mumkin. Haqiqatdan,

$$d\left(\frac{x^5}{5} - 4\cos x - 9x + C\right) = (x^4 + 4\sin x - 9)dx.$$

Asosiy integrallar jadvali

1^0 $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$ $(\alpha \neq -1)$

2^0 $\int dx = x + C.$

3^0 $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

4^0 $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

5^0 $\int \cos x dx = \sin x + C.$

6^0 $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$

7^0 $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$

8^0 $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C.$

9^0 $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C.$

10^0 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

11^0 $\int e^x dx = e^x + C.$

12^0 $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C.$

13^0 $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C.$

14^0 $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$

15^0 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

16^0 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

17^0 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

Jadvaldagi formulalarni to'g'riligini differensiallash yo'li bilan aniqlash mumkin.

8^0-formula bunday isbotlanadi:

$$d(-\ln|\cos x| + C) = -\frac{-\sin x}{\cos x}dx = tgxdx.$$

17^0-formula bunday isbotlanadi:

$$d\left(\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|\right) = \left(\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|\right)' dx =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right)dx = \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\int (e^x \sin x)dx$
2. $\int (e^x \cos x)dx$
3. $\int \left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+5}\right) dx$
4. $\int (\frac{1}{x^2 - 3x - 10})dx$
5. $\int (\cos x \sin x)dx$
6. $\int (\lg x + \sin x)dx$
7. $\int (\frac{1}{x^2 - 12x + 35})dx$

10.3. Integrallash hisoblashda o‘zgaruvchini almashtirish va bo‘laklab integrallash usuli

Aytaylik, $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsin: $F'(x)=f(x)$

Ravshanki,

$$\int f(x)dx=F(x)+c \qquad (10.10)$$

bo‘ladi. Keyingi integralda $x=\varphi(t)$ deylik, bunda $\varphi(t)$ uzluksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega bo‘lgan funksiya.

Ma’lumki, $F(\varphi(t))$ murakkab funksiya hosilaga ega bo‘lib, $(F(\varphi(t)))'=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ bo‘ladi. Modomiki, $F'(x)=f(x)$ ekan, unda $(F(\varphi(t)))'=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ bo‘lib, keyingi tenglikdan

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+c \qquad (10.11)$$

bo‘lishi kelib chiqadi. (10.10) va (10.11) munosabatlardan topamiz:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

Bu formula integrallarda o‘zgaruvchini almashtirish formulasi deyiladi.

Misol. *Ushbu*

$$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

integral hisoblansin.

◄ Bu integralda $x=t^2$ almashtirish bajaramiz. Unda $dx=2tdt$ bo‘lib,

$$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{\sin t}{t}\cdot 2tdt=$$
$$=-2\int\sin tdt=-2\cos t+c=-2\cos\sqrt{x}+c$$

bo‘ladi.

Ba’zi hollarda $x=\varphi(t)$ almashtirish o‘rniga $t=\psi(x)$ almashtirish qulay bo‘ladi.

Misol. *Ushbu*

$$\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$$

integral hisoblansin.

◄Bu integralda $t=x^2+x+1$ deymiz. Unda $dt=d(x^2+x+1)=(x^2+x+1)'dx=(2x+1)dx$ bo‘lib,

$$\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln|x^2+x+1|+c$$

bo‘ladi. ►

Ko‘p hollarda o‘zgaruvchi almashtirish ifodasini yozish zaruriyati bo‘lmaydi. Ushbu

1) $d(x+a)=dx, \quad (a=const)$

2) $d(ax)=adx$, ya’ni $dx=\frac{1}{a}d(ax) \quad (a=const, a\neq 0)$

tengliklarni e’tiborga olish va uni tadbiq etish yetarli bo‘ladi.

Aytaylik, $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar uzluksiz $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalarga ega bo‘lsin.

Ma’lumki, $d(u\cdot v)=vdu+udv$ bo‘ladi.

Keyingi tenglikni integrallab $\int d(uv)=\int vdu+\int udv$ so‘ng $\int d(u\cdot v)=u\cdot v$ bo‘lishini e’tiborga olib topamiz: $uv=\int vdu+\int udv$.

Natijada

$$\int udv=uv-\int vdu \qquad (10.12)$$

formulaga kelamiz. (10.12) formula bo‘laklab integrallash formulasi deyiladi. U $\int udv$ integralni hisoblashni $\int vdu$ integralni hisoblashga olib keladi.

Bo‘laklab integrallash formulasidan foydalanish uchun berilgan integral ostidagi ifodani $u(x)$ va dv lar ko‘paytmasi ko‘rinishida shunday yozib olinishi lozimki, bunda dv hamda $v(x)du$ lar oson hisoblanadigan bo‘lsin.

Misol. *Ushbu* $\int xe^x dx$ *integral hisoblansin.*

◀Bu integralda $\begin{matrix} x = u, \\ e^x dx = dv \end{matrix}$

deymiz. U holda

$$\begin{matrix} du = dx, \\ v = \int e^x dx = e^x \end{matrix}$$

bo'lib, (10.) formulaga ko'ra

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

bo'ladi. (bu holda $\int xe^x dx$ integralni hisoblash jadvalda keltirilgan $\int e^x dx$ integralga keldi. Ravshanki, $\int e^x dx = e^x + c$. Demak, $\int xe^x dx = xe^x - e^x + c = e^x(x-1)+c$.▶

Misol. *Ushbu*

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \ (n-1,2,3,...)$$

integral hisoblansin.

◀Avvalo $n=1$ bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{a}\int \frac{\frac{1}{a}dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c \text{ bo'ladi.}$$

Endi $J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ da $\begin{matrix} u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}, \\ dv = dx \end{matrix}$ deylik. U holda

$$du = \left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right)' dx = -\frac{2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx, \text{ bo'lib, (10.9) formulaga ko'ra}$$

$v = x$

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$

bo'ladi. Bu tenglikning o'ng tomonidagi integralni quyidagicha yozib olamiz:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx =$$

$$\int \frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx - \int \frac{a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx =$$

$$= \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx - a^2\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = J_n - a^2 \cdot J_{n+1}$$

Natijada

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \cdot J_n - 2na^2 \cdot J_{n+1}$$

bo'lib, undan

$$J_{n+1} = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} \cdot J_n \quad (10.10)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Yuqorida ko'rdikki,

$$J_1 = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c$$

(10.10) formulada $n=1$ deb

$$J_2 = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx = \frac{x}{2a^2 \cdot (x^2+a^2)} =$$

$$= +\frac{1}{2a^3} arctg\frac{x}{a} + c$$

bo'lishini topamiz.

Shu tariqa (10.10) formula yordamida $n = 2,3,4,...$ bo'lgan hollarda mos integrallar hisoblanadi.▶

Odatda, (10.10) formula rekurent formula deyiladi.

Ba'zi hollarda, u va dv lar uchun ularning ifodalarini yozib o'tirmasdan (10.10) fomuladan foydalanib integrallarni hisoblash mumkin.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\int \frac{x+5}{x-5}dx$
2. $\int ctgxdx$
3. $\int \left(\frac{1}{x+7} + \frac{1}{x-4}\right)dx$
4. $\int \cos^4 xdx$

5. $\int (\lg x - \text{ctg} x)dx$

6. $\int (\frac{1}{x^2+5x-24})dx$

7. $\int \sin^4 x dx$

§ 11. Kasr- ratsional ifodalarni va ba'zi irratsional funksiyalarni integrallash

Biror

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \quad (11.1)$$

ko'phad (butun ratsional funksiya) berilgan bo'lsin, bunda $a_0, a_1, ..., a_n$-o'zgarmas sonlar, $a_n \neq 0$, $n \in N$ esa ko'phadning darajasi.

Ma'lumki, α son uchun $P(\alpha)=0$

bo'lsa, α son $P(x)$ ko'phadning ildizi deyiladi. Agar $P(x)$ ko'phad $(x-\alpha)^k$ ga $(k \in N)$ qoldiqsiz bo'linsa, α son $P(x)$ ko'phadning k karrali ildizi bo'ladi.

Agar $h=\alpha+i\beta$ kompleks son $P(x)$ ko'phadning ildizi bo'lsa, u holda $\bar{h}=\alpha-i\beta$ kompleks son ham bu ko'phadning ildizi bo'ladi. Demak, $P(x)$ ko'phadning ifodasida quyidagi

$$(x-h)(x-\bar{h})=[x-(\alpha+i\beta)]\cdot[x-(\alpha-i\beta)]=$$
$$=x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=x^2+px+q$$
$$(p=-2\alpha,\ q=\alpha^2+\beta^2)$$

kvadrat uchhad ko'paytuvchi sifatida qatnashadi.

Faraz qilaylik,

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

ko'phad uchun

α_1 son m_1 karrali,

α_2 son m_2 karrali,

....

α_k son m_k karrali,

haqiqiy ildizlari bo'lib,

h_1 kompleks son t_1 karrali,

h_2 kompleks son t_2 karrali,

....

h_s kompleks son t_s karrali,

ildizlari bo'lsin. U holda $P(x)$ ko'phad quyidagi

$$P(x)=(x-\alpha_1)^{m_1}\cdot(x-\alpha_2)^{m_2}\dots(x-\alpha_k)^{m_k}\cdot$$
$$\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}\cdot(x^2+p_2x+q_2)^{t_2}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{t_s} \quad (11.2)$$

ko'rinishda ifodalanadi, bunda

$$m_1+m_2+\cdots+m_k+2(t_1+t_2+\cdots t_s)=n,$$
$$x^2+p_i\cdot x+q_i=0 \quad (i=1,2,...,s)$$

tenglamalar haqiqiy ildizga ega emas.

$P(x)$ ko'phadni (11.2) ko'rinishda ifodalash uni ko'paytuvchilarga ajratish ham deyiladi.

Endi ko'phadlarni ko'paytuvchilarga ajratishga misollar keltiramiz:

1) $x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$,

2) $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$,

3) $x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=$
$=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2x}+1)$,

4) $x^3+2x^2+2x+1=x^3+x^2+x^2+2x+1=$
$=x^2(x+1)+(x+1)^2=(x+1)(x^2+x+1)$.

Ushbu

1) $\frac{A}{x-a}$, A va a o'zgarmas sonlar ,

2) $\frac{A}{(x-a)^n}$, $n=2,3,4,...$

3) $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$, B, C-hamda p va q o'zgarmas sonlar, x^2+px+q kvadrat uchhad haqiqiy ildizga ega emas.

4) $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$, $m=2,3,4,...$ $\left(\frac{p^2}{4}-q<0\right)$ ko‘rinishdagi kasrlar sodda kasrlar deyiladi.

Masalan, quyidagi funksiyalar

$$\frac{2}{x+1},\ \frac{6}{(x-2)^4},\ \frac{2x+1}{x^2+x+1},\ \frac{4}{x^2+1},\ \frac{3x+2}{(x^2+4x+4)^3}$$ sodda kasrlar bo‘ladi.

11.1. To‘g‘ri kasrlarni sodda kasrlar yig‘indisi orqali ifodalash (to‘g‘ri kasrlarni sodda kasrlarga yoyish)

Ma’lumki, ushbu $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}$ kasr ratsional funksiya $n<m$ bo‘lganda (suratidagi ko‘phadning darajasi maxrajdagi ko‘phadning darajasidan kichik bo‘lganda) to‘g‘ri kasr deyiladi.

Aytaylik, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ to‘g‘ri kasrning maxraji $Q(x)$ ko‘phad quyidagicha

$$Q(x)=(x-a)^k(x^2+px+q)^s \quad (11.3)$$

ko‘paytuvchilarga ajralgan bo‘lsin, bunda $k\in N$, $s\in N$ va x^2+px+q kvadrat uchhad haqiqiy ildizga ega emas. Bunday to‘g‘ri kasr $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ni sodda kasrlar yig‘indisi orqali ifodalanishi haqidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema. *To‘g‘ri kasr* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *uchun*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{(x-a)^k(x^2+px+q)^s}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+$$
$$+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{B_sx+C_s}{(x^2+px+q)^s} \quad (11.4)$$

bo‘ladi, bunda $A_1,A_2,...,A_k$, $B_1,C_1,B_2,C_2,...,B_s,C_s$ - *o‘zgarmas haqiqiy sonlar. (11.4) yoyilmadagi o‘zgarmas sonlar quyidagicha topiladi.*

(11.4) tenglikning o‘ng tomonidagi sodda kasrlar yig‘indisi umumiy maxrajga keltiriladi.

Natijada $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{R(x)}{Q(x)}$ tenglik hosil bo‘lib, undan barcha x lar uchun o‘rinli bo‘lgan

$$P(x)=R(x)$$

tenglik kelib chiqadi. Bu tenglikning har ikki tomonidagi x ning bir xil darajalari oldida turgan koeffitsiyentlarni tenglashtirib, noma’lum sonlarni topish uchun tenglamalar sistemasi hosil qilinadi. Sistemani yechib noma’lum sonlar topiladi.

Eslatma. *Yuqorida* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *to‘g‘ri kasrda maxraj (11.4) ko‘rinishda ko‘paytuvchilarga ajralgan hol uchun to‘g‘ri kasrni sodda kasrlarga ajralishini ko‘rdik.*

To‘g‘ri kasr maxraji $Q(x)$ ko‘phad boshqa ko‘rinishda ko‘paytuvchilarga ajralganda ham kasr sodda kasrlar yig‘indisi sifatida ifodalanadi.

Masalan,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

to‘g‘ri kasr maxraji

$Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdot...\cdot(x-a_k)$

bo‘lsa,

$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{A_k}{x-a_k}$

bo‘ladi;

$Q(x)=(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)\cdot...\cdot(x^2+p_kx+q_k)$

bo‘lsa,

$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{B_1x+C_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{B_2x+C_2}{x^2+p_2x+q_2}+\cdots+\frac{B_kx+C_k}{x^2+p_kx+q_k}$

bo‘ladi.

To‘g‘ri kasrlarning sodda kasrlar yig‘indisi orqali ifodalash jarayonini misollarda ko‘rsatamiz.

Misol. *Ushbu* $\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}$ *to'g'ri kasr sodda kasrlarga yoyilsin.*

◄1) kasrning maxrajida turgan x^3+4x^2+4x ko'phadni ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$x^3+4x^2+4x=x\left(x^2+4x+4\right)=x(x+2)^2$$

2) berilgan to'g'ri kasrni noma'lum koeffitsiyentlar orqali yuqorida ko'rsatilgandek sodda kasrlar yig'indisi orqali yozamiz:

$$\frac{3x^2+8}{x\cdot(x+2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2} \qquad (11.5)$$

3) bu tenglikning ikki tomonini $x(x+2)^2$ ga ko'paytirib, uni maxrajdan qutqartiramiz:

$$3x^2+8=A(x+2)^2+Bx(x+2)+Cx.$$

Keyingi tenglikdan

$$3x^2+8=(A+B)x^2+(4A+2B+C)x+4A$$

bo'lishi kelib chiqadi.

4) bu tenglikning har ikki tomonidagi x ning bir xil darajalari oldida turgan koeffitsiyentlarni tenglashtirib, ushbu

$$\begin{cases} A+B=3 \\ 4A+2B+C=0 \\ 4A=8 \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz.

5) tenglamalar sistemasini yechib, $A=2,\ B=1,\ C=-10$ bo'lishini topamiz va ularni (5) tenglikdagi A,B,C larning o'rniga qo'yish natijasida berilgan to'g'ri kasrni sodda kasrlar yig'indisi orqali quyidagicha

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}=\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{10}{(x+2)^2}$$

ifodalanishini topamiz. ►

11.2. Sodda kasrlarni integrallash

Sodda kasrlarning integrallari quyidagicha hisoblanadi:

1) $\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\cdot\ln|x-a|+C.$

2) $\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^n}=A\int(x-a)^{-n}d(x-a)=$

$=A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C=A\frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C$

$(n=2,3,4,...).$

3) $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ sodda kasrning integrali

$$\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx$$

ni hisoblash uchun kasr maxrajidagi kvadrat uchhadni quyidagicha yozib olamiz:

$$x^2+px+q=x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}=$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2$$

bunda

$$a^2=q-\frac{p^2}{4}.$$

Natijada

$$\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Bx+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}dx$$

bo'ladi. Keyingi integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int\frac{Bx+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}dx=\left[x+\frac{p}{2}=t, \quad x=t-\frac{p}{2}, \quad dx=dt\right]=$$

$$=\int\frac{B\left(t-\frac{p}{2}\right)+C}{t^2+a^2}dt=B\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{B}{2}\int\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{t^2+a^2}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}=$$

$$=\frac{B}{2}\ln\left(t^2+a^2\right)+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C^* =$$

$$=\frac{B}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{2C-Bp}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C^*$$

Demak,

$$\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx=\frac{B}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+ \frac{2C-Bp}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C^* \quad (11.6)$$

bunda C^* - ixtiyoriy o'zgarmas son.

4) Ushbu

$$\int\frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx \quad (m=2,3,4,...)$$

to'g'ri kasrning integrali quyidagicha hisoblanadi:

$$J_m=\int\frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx=\left[\begin{matrix} x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}, \\ x+\frac{p}{2}=t, \quad x=t-\frac{p}{2}, \quad dx=dt\end{matrix}\right]=$$

$$=\int\frac{Bt+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)}{\left(t^2+a^2\right)^m}dt=\frac{B}{2}\int\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^m}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}=$$

$$=\frac{B}{2}\cdot\frac{1}{1-m}\cdot\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{m-1}}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}.$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi integral avvalgi paragrafda keltirilgan rekurent formula yordamida hisoblanadi.

11.3. Ratsional funksiyalarni integrallash

Aytaylik, $f(x)$ funksiya ratsional funksiya bo'lsin.

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Agar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ noto'g'ri kasr (suratidagi ko'phadning darajasi maxrajidagi ko'phadning darajasidan katta bo'lsa, unda suratini maxrajiga bo'lib, uning butun qismini ajratib, butun ratsional funksiya (ko'phad) ham to'g'ri kasr yig'indisi ko'rinishida quyidagicha

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=R(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

ifodalab olinadi. Integrallash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$\int f(x)dx=\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int R(x)dx+\int\frac{P_1(x)}{Q(x)}dx.$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi $\int R(x)dx$ integral butun ratsional funksiya (ko'phad) ning integrali bo'lib, u oson hisoblanadi.

Tenglikdagi $\int\frac{P_1(x)}{Q(x)}dx$ integral esa to'g'ri kasrning integrali. Uni hisoblash uchun avvalo $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ kasrni yuqorida ko'rsatilgan usul bilan sodda kasrlar yig'indisi orqali ifodalab olinadi. So'ng integrallash qoidalari va sodda kasrlarning integrallaridan foydalanib to'g'ri kasrning integrali topiladi.

Misol. *Ushbu* $\int\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx$ *integral hisoblansin.*

◄Ravshanki, integral ostidagi funksiya ratsional funksiya bo'lib, u noto'g'ri kasrdir. Bu kasrning suratini maxrajiga bo'lib, uning butun qismini ajratamiz:

Demak, $\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}=2x+\frac{1}{x^4+3x^2}$

bo'lib,

$$\int\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx=\int\left(2x+\frac{1}{x^4+3x^2}\right)dx=$$

$$\int 2xdx+\int\frac{1}{x^4+3x^2}dx=2\cdot\frac{x^2}{2}+\int\frac{1}{x^4+3x^2}dx$$

bo'ladi. Bu tenglikning o'ng tomonidagi integral to'g'ri kasrning integrali. Uni hisoblash uchun integral ostidagi to'g'ri kasr

$$\frac{1}{x^4+3x^2}$$

ni sodda kasrlarga yoyamiz:

1) $x^4+3x^2=x^2\left(x^2+3\right)$,

2) $\dfrac{1}{x^2\left(x^2+3\right)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+3}$,

3) $1=Ax(x^2+3)+B(x^2+3)+x^2(Cx+D)$,

$1=(A+C)x^3+(B+D)x^2+3Ax+3B$,

4) $A+C=0$,

$B+D=0$,

$3A=0$,

$3B=1$.

$A=0,\quad B=\dfrac{1}{3},\quad C=0,\quad D=-\dfrac{1}{3}$,

5) $\dfrac{1}{x^2\left(x^2+3\right)}=\dfrac{1}{3x^2}-\dfrac{1}{3\left(x^2+3\right)}$.

Endi keyingi tenglikdan foydalanib to‘g‘ri kasrning integralini topamiz:

$$\int\frac{1}{x^4+3x^2}dx=\int\left(\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3\left(x^2+3\right)}\right)dx=\frac{1}{3}\int x^{-2}dx-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+3}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1}-\frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+c=-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+c.$$

Shunday qilib berilgan integral uchun

$$\int\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx=x^2-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+c$$

bo‘ladi.▶

11.4. Ba’zi irratsional funksiyalarni integrallash

Biz yuqoridagi ma’ruzalarda ratsional funksiyalarning integralini har doim hisoblash mumkinligini ko‘rdik. Irratsional funksiyalarning integrallarini hisoblashda vaziyat boshqacha, ya’ni irratsional funksiyalarning integrallari har doim ham hisoblanavermaydi.

Integral ostidagi funksiyada o‘zgaruvchi x, $ax+b$, ax^2+bx+c lar turli kasr darajalarda qatnashgan ayrim hollarda integrallarning hisoblanishini misollarda bayon etamiz. Shuni aytish kerakki, bunday hollarda integrallar o‘zgaruvchilarini almashtirish yordamida ratsional funksiyalarga keltirilib, hisoblanadi.

Misol. *Ushbu* $J=\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$ *integral hisoblansin.*

◀Bu integralda $x=t^2$ almashtirish bajaramiz. Unda $dx=2tdt$ bo‘lib,

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx=\int\frac{t}{1+t}\cdot 2tdt=2\int\frac{t^2}{1+t}dt$$

bo‘ladi. Natijada irratsional funksiyani integrallash ratsional funksiyani integrallashga keldi.

Ravshanki,

$$\frac{t^2}{t+1}=t-1+\frac{1}{t+1}$$

bo‘ladi. Unda

$$\int\frac{t^2}{t^2+1}dt=\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dx=\frac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)+c$$

bo‘lib,

$$J=2\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)\right)+c=t^2-2t+2\ln(t+1)+c=$$

$$=x-2\sqrt{x}+2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+c$$

bo‘ladi.

Misol. *Ushbu* $J=\int\frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}$ *integral hisoblansin.*

Bu integralda $x=t^6$ almashtirishni bajaramiz. Unda $dx=6t^5dt$ bo‘lib,

$$J=\int\frac{6t^5dt}{\left(1+t^2\right)t^3}=6\int\frac{t^2dt}{1+t^2}=6\int\frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt=$$

$$=6\left[\int 1\cdot dt-\int\frac{dt}{1+t^2}\right]=6t-6arctgt+c$$

bo‘ladi. Demak,

$$J = 6\sqrt[6]{x} - 6arctg\sqrt[6]{x} + c. ▶$$

Misol. *Ushbu* $J=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ $(a \neq 0)$ *integral hisoblansin.*

Yechish usuli $t = x + \sqrt{x^2+a}$

$$dt = \left(x+\sqrt{x^2+a}\right)' dx = \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right)dx =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}dx = \frac{t}{\sqrt{x^2+a}}dx$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{dt}{t}$$

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + c.$$

Misol. *Ushbu* $J=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}$ *integral hisoblansin.*

$$x^2-6x+13 = x^2-6x+9+4 = (x-3)^2+4.$$

Yechish usuli

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+4}}$$

bo'ladi. Bu integralda $x-3=t$ deymiz. Natijada $J=\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right|+c$

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}} = \ln\left|x-3+\sqrt{(x-3)^2+4}\right| + c.$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\int \frac{x+5}{x-5}dx$
2. $\int$ tgxdx
3. $\int \left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+6}\right) dx$
4. $\int \cos x^2 dx$
5. $\int$ (lnx - tgx)dx
6. $\int (\frac{1}{x^2-10x+24})dx$
7. $\int \sin x \cos x dx$

§ 12. Trigonometrik funksiyalarni integrallash

$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tgx$, $y=ctgx$ funksiyalarning integrallari ma'lum. Jumladan, $\int ctgx dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + c$ bo'ladi.

Shuningdek $y=\sin ax$, $y=\cos ax$, $y=tgax$, $y=ctgax$ hamda $y=\sin(x+a)$, $y=\cos(x+a)$, $y=tg(x+a)$, $y=ctg(x+a)$ funksiyalarning integrallarini oson hisoblanishini ham bilamiz. Masalan,

$$\int \sin(2x+1)dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x+1)\, d(2x+1) = -\frac{1}{2}\cos(2x+1)+c.$$

$\sin x$ va $\cos x$ funksiyalar ustida ratsional amallar (qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish) bajarilishidan hosil bo'lgan ifodani $f(x)$ bilan belgilaylik. Odatda, bunday $f(x)$ funksiya $\sin x$ va $\cos x$ larning ratsional funksiyasi deyiladi. Ularga quyidagilar

$$f(x)=\frac{1}{\sin x},\ f(x)=\frac{1}{3\sin x-4\cos x},$$

$$f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\cos x\cdot \sin 2x},\ f(x)=\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x+1}$$

misol bo'ladi.

Bunday trigonometrik funksiyalarning integrallari har doim ushbu $tg\frac{x}{2}=t$ universal almashtirish natijasida ratsional funksiyalarning integrallariga keladi.

Bunda $x = 2arctgt$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$, $\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$,

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$ bo'ladi.

Misol. *Ushbu* $J=\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$ *integral hisoblansin.*

Yechish usuli $\quad tg\frac{x}{2}=t \quad J=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{6t}{1+t^2}-\frac{4\left(1-t^2\right)}{1+t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+\frac{3}{2}t-1}dt$

$$t^2+\frac{3}{2}t-1=t^2+2t-\frac{1}{2}t-1=t\left(t-\frac{1}{2}\right)+2\left(t-\frac{1}{2}\right)=\left(t-\frac{1}{2}\right)(t+2).$$

$$\frac{1}{t^2+\frac{3}{2}t-1}=\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)(t+2)}=\frac{A}{t-\frac{1}{2}}+\frac{B}{t+2},$$

$$1=A(t+2)+B\left(t-\frac{1}{2}\right), \quad 1=(A+B)t+2A-\frac{1}{2}B,$$

$$\begin{cases}A+B=0,\\ 2A-\frac{1}{2}B=1,\end{cases} \quad A=\frac{2}{5}, \quad B=-\frac{2}{5} \quad \frac{1}{t^2+\frac{3}{2}t-1}=\frac{\frac{2}{5}}{t-\frac{1}{2}}+\frac{-\frac{2}{5}}{t+2}$$

$$J=\frac{1}{2}\int\left(\frac{\frac{2}{5}}{t-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{2}{5}}{t+2}\right)dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\left(\int\frac{dt}{t-\frac{1}{2}}-\int\frac{dt}{t+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\ln\left|t-\frac{1}{2}\right|-\ln|t+2|\right)+c=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{2}}{t+2}\right|+c \qquad J=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{tg\frac{x}{2}+2}\right|+c.$$

Eslatma. *Ba'zi hollarda* $\sin x=t$, $\cos x=t$, $tgx=t$ *almashtirishlar integrallarni hisoblashni yengillashtiradi.*

Eslatma. *Ayrim trigonometrik funksiyalarni integrallashda trigonometriyada ma'lum bo'lgan ushbu*

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right],$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right], \quad \sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right],$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha,$$

$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, *formulalardan foydalanilsa, integrallar oson hisoblanadi.*

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

Misol. *Ushbu* $J=\int\sin^2 x\cos^4 xdx$ *integral hisoblansin.*

◄Bu integralni hisoblashda yuqorida keltirilgan formulalardan foydalanamiz:

$$J=\int(\sin x\cos x)^2\cos^2 xdx=\int\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\sin^2 2x(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{8}\int\sin^2 2xdx+\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cos 2xdx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int\sin^2 2xd(\sin 2x)=\frac{1}{16}\int(1-\cos 4x)\cdot dx+$$

$$+\frac{1}{16}\int\sin^2 2xd(\sin 2x)=\frac{1}{16}x-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+c. ►$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\int$ (sinx+tanx)dx
2. $\int$ (ctgx-sin^{2}x)dx
3. $\int$ (cos^{2}x+sin^{2}x)dx
4. $\int$ ln(sinx)dx
5. $\int$ lg(cosx)dx
6. $\int(\cos 4x+\sin 4x)dx$
7. $\int(\cos^2 x+\sin^2 x)dx$

III BO'LIM. ANIQ INTEGRALNING VA UNING TADBIQLARI

§ 13. Aniq integral ta'rifi (Riman yig'indilari)

13.1. Aniq integral tushunchasi. Integralning mavjudligi

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda berilgan bo'lsin. Bu segmentni

$x_0,x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n$ $(x_0=a,\ x_n=b,\ x_0<x_1<...<x_n)$ nuqtalar yordamida n ta

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_k,x_{k+1}],...,[x_{n-1},x_n]$$

bo'lakka ajratamiz. Bu bo'lakchalarning uzunliklarini mos ravishda quyidagicha belgilaymiz:

$\Delta x_0=x_1-x_0 \quad (x_0=a)$,

$\Delta x_1=x_2-x_1$,

....

$\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$,

....

$\Delta x_{n-1}=x_n-x_{n-1} \quad (x_n=b)$

Odatda $\Delta x_0,\Delta x_1,...,\Delta x_{n-1}$ kesmalar sistemasi (to'plami) $[a,b]$ segmentni bo'laklash deyiladi va uni λ bilan belgilanadi:

$$\lambda=\{\Delta x_0,\Delta x_1,...,\Delta x_{n-1}\}.$$

Bu $\Delta x_0,\Delta x_1,...,\Delta x_{n-1}$ larning eng kattasini $|\lambda|$ deylik:

$$|\lambda|=\max\{\Delta x_0,\Delta x_1,...,\Delta x_{n-1}\}.$$

Har bir tayin λ bo'laklash $[a,b]$ segmentining bitta bo'linishini aniqlaydi.

Har bir bo'lakchada ixtiyoriy ravishda bittadan

$$\xi_0,\xi_1,...,\xi_k,...,\xi_{n-1}$$

nuqtalarni olib, bu nuqtalardagi funksiyaning qiymatlari

$$f(\xi_0),f(\xi_1),...,f(\xi_k),...,f(\xi_{n-1})$$

ni mos ravishda bo'lakchalarning uzunliklariga ko'paytirib

$f(\xi_0)\cdot\Delta x_0, f(\xi_1)\cdot\Delta x_1,...,f(\xi_k)\cdot\Delta x_k,...,f(\xi_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1}$ quyidagi

$$\sigma=f(\xi_0)\cdot\Delta x_0+f(\xi_1)\cdot\Delta x_1+...+f(\xi_k)\cdot\Delta x_k+$$
$$+...+f(\xi_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

yig'indini hosil qilamiz.

Odatda,

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\cdot\Delta x_k \qquad (13.1)$$

yig'indi $f(x)$ funksiyaning integral yig'indisi deyiladi. Bu yig'indi $[a,b]$ segmentning bo'laklanishiga, hamda har bir bo'lakchada olingan ξ_k nuqtalarga bog'liq bo'ladi.

Endi $[a,b]$ segmentining shunday bo'laklashlar ketma-ketligi $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n,...$ (13.2)

ni olaylik, ular uchun $\lim_{n\to\infty}|\lambda_n|=0$ bo'lsin.

Ixtiyoriy (4) ketma-ketlikni olib, bu ketma-ketlikning har bir hadiga mos integral yig'indilarni tuzamiz. Ular

$$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,...,\sigma_n,... \qquad (13.3)$$

ketma-ketlikni hosil qiladi, bunda $\sigma_n=\sum_{k=0}^{n-1}\cdot f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$

Ta'rif. *Agar har bir bo'lakchada olingan ixtiyoriy ξ_k nuqtalarda $\{\sigma_n\}$ ketma-ketlik har doim bitta I songa intilsa, (uni $\sigma_n=\sum_{k=0}^{n-1}\cdot f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$ ning limitideyiladi), $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda integrallanuvchi, I son esa $f(x)$ funksiyaning*

$[a,b]$ segment bo'yicha aniq integrali deyiladi va u $\int_a^b f(x)dx$

kabi belgilanadi. Demak, $\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x)=I=\int_a^b f(x)dx$.

Bunda a son integralning quyi chegarasi, b son esa integralning yuqori chegarasi, $[a,b]$ segment integrallash oralig'i deyiladi.

O'tilgan S yo'l, tezlik $V(t)$ ning $[t_0, T]$ oraliq bo'yicha aniq integraldan iborat ekanligini bildiradi:

$$S = \int_{t_0}^{T} V(t)dt$$

Misol: *Agar* $[a,b]$ da $f(x) = c - const$ *bo'lsa, u holda* $\int_a^b c \cdot dx = c \cdot (b-a)$ *bo'lishi isbotlansin.*

◄ $[a,b]$ segmentning ixtiyoriy bo'laklashi

$[a,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$,..., $[x_k,x_{k+1}]$,... $[x_{n-1},b]$ni olib, har bir bo'lakchada bittadan ixtiyoriy

$\xi_0, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_k, ..., \xi_{n-1}$ nuqtalarni tanlaymiz. Ravshanki,

$f(\xi_0) = c, f(\xi_1) = c, f(\xi_2) = c, ..., f(\xi_k) = c, ..., f(\xi_{n-1}) = c$ bo'lib,

$$\sigma = c \cdot \Delta x_0 + c \cdot \Delta x_1 + c \cdot \Delta x_2 + ... + c \cdot \Delta x_k + ... + c \cdot \Delta x_{n-1} =$$
$$= c(\Delta x_0 + \Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_k + ... + \Delta x_{n-1}) =$$
$$= c(x_1 - a + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + ... + x_{k+1} - x_k + ... + b - x_{n-1}) =$$
$$= c \cdot (b-a)$$

bo'ladi. Demak, $\int_a^b c \cdot dx = \lim_{n\to\infty} \sigma = \lim_{n\to\infty} c \cdot (b-a) = c \cdot (b-a)$. ►

Xususan, $f(x) \equiv 1$ bo'lsa, $\int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx = b - a$ bo'ladi..

Yuqorida funksiyaning aniq integrali integral yig'indining limiti sifatida ta'riflandi. Albatta, yig'indining limiti integrallanadigan funksiyaga bog'liq bo'ladi.

Integral yig'indi limitining mavjudligini ko'rsatish (ya'ni funksiyaning integrallanuvchi bo'lishini isbotlash) ancha murakkab bo'lib, ular maxsus adabiyotlarda ma'lum sinf funksiyalari uchun isbotlanadi. Biz quyida bunday teoremalardan birini isbotsiz keltiramiz.

Teorema. *Agar* $f(x)$ *funksiya* $[a,b]$ *segmentda uzluksiz bo'lsa, u shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi.*

Eslatma.

1) Agar $f(x)$ *funksiya* $[a,b]$ *da integrallanuvchi bo'lsa, u* $[a,b]$ *da chegaralangan bo'ladi.*

2) Agar $f(x)$ *funksiya* $[a,b]$ *da chegaralangan bo'lib, u* $[a,b]$ *ning chekli sondagi nuqtalarida uzilishga ega va qolgan barcha nuqtalarida uzluksiz bo'lsa,* $f(x)$ *funksiya* $[a,b]$ *da integrallanuvchi bo'ladi.*

13.2. Aniq integralning xossalari

Funksiyaning aniq integrali qator xossalarga ega. Bu xossalardan aniq integralni hisoblashda va uning turli sohalarga tatbiqlarida foydalaniladi. Ko'p hollarda xossalarning isboti aniq integral ta'rifi va funksiya limiti xossalaridan kelib chiqadi. Biz xossalarni keltirish bilan kifoyalanamiz:

1) Aniq integral $\int_a^b f(x)dx$ da x ning o'rniga ixtiyoriy harf ishlatilishi mumkin:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz \text{ va h.k.}$$

3) Ushbu

$$\int_a^a f(x) = 0,$$
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

tengliklar o'rinli.

3) Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lsa, u holda $c \cdot f(x)$ funksiya ($c = const$) ham $[a,b]$ da integrallanuvchi va $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$ bo'ladi.

4) Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lsa, u holda $f(x) + g(x)$ funksiya ham $[a,b]$ da integrallanuvchi va

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

bo'ladi.

5) Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lib, ixtiyoriy $x\in[a,b]$ da $f(x)\geq 0$ bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ bo'ladi.

6) Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lib, ixtiyoriy $x\in[a,b]$ da $f(x)\leq g(x)$ bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ bo'ladi.

7) Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya $[a,b]$ ning istalgan $[\alpha,\beta]$ qismida ($[\alpha,\beta]\subset[a,b]$) integrallanuvchi bo'ladi.

8) Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lib, $a<c<b$ bo'lsa, u holda funksiya $[a,c]$ va $[c,b]$ da integrallanuvchi va $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda berilgan bo'lib, u shu segmentda integrallanuvchi bo'lsin.

$$M[f]=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

miqdor $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ dagi o'rta qiymati deyiladi.

9) Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz bo'lsa, u holda shunday c nuqta ($a<c<b$) topiladiki, $\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$

bo'ladi. Bu xossa o'rta qiymat haqidagi teorema deb ham yuritiladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\int_1^2 (x+5-\lg x)dx$
2. $\int_0^{\pi} (x\cos x)dx$
3. $\int_0^{\pi} (\tan x)dx$
4. $\int_0^{e} (5x+\ln x)dx$

5. $\int_1^2 (\lg x)dx$
6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} ctgx dx$
7. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (ctg4x-\tan 4x)dx$

§ 14. O'rta qiymat haqidagi teorema

1-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda bu kesmada shunday c nuqta topiladiki,

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \qquad (14.1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada integrallanuvchi. Demak 10^0-xossaga ko'ra $m(b-a)\leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ tengsizlik o'rinli. $m\leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$ tengsizlik hosil bo'ladi. Endi Boltsano-Koshining 2-teoremasiga asosan $[a;b]$ kesmada shunday c nuqta topiladiki,

$$f(c)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}, \text{ yoki } \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

bo'ladi. Ushbu tenglikning mohiyati quyidagicha: $f(x)\geq 0$ bo'lganda tenglikning chap tomoni egri chiziqli trapetsiyaning yuzini, o'ng tomoni $f(c)(b-a)$ ifoda esa to'g'ri to'rtburchak yuzini ifoda qiladi (5-rasm).

Demak, $y=f(x)$ funksiyaning grafigida shunday $M(c;f(c))$ nuqta mavjudki, tomonlarining uzunliklari $f(c)$ va $b-a$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning yuzi yuqoridan $y=f(x)\geq 0$, quyidan Ox o'q bilan va $x=a$, $x=b$ vertikal to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuziga teng bo'ladi. Boshqacha aytganda, $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ da qabul qiladigan barcha qiymatlarining o'rta arifmetigi $f(c)$ ga teng bo'ladi, ya'ni

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (14.2)$$

Bunda $f(c)$-berilgan $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ kesmadagi *o'rta qiymati* deyiladi.

Misol. $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiyaning [1;2] kesmadagi o'rta qiymatini toping.

Yechish. (142) formulaga ko'ra $f(c)=\frac{1}{2-1}\int_1^2\frac{dx}{x}=\ln|x|\Big|_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2$, demak, funksiyaning o'rta qiymati ln2 ga teng ekan.

2-*teorema.* Agar $[a;b]$ da $f(x)$ va $\varphi(x)$ lar uzluksiz, $\varphi(x)\geq 0$ (yoki ≤ 0) bo'lsa, u holda $[a;b]$ da shunday c nuqta topiladiki,

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=f(c)\int_a^b\varphi(x)dx \qquad (14.3)$$

o'rinli bo'ladi.

Isboti. $f(x)$ va $\varphi(x)$ uzluksizligidan $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx$, $\int_a^b\varphi(x)dx$ integrallar mavjud bo'ladi. Veyershtrass teoremasiga ko'ra, $\sup\limits_{[a;b]}f(x)=M$, $\inf\limits_{[a;b]}f(x)=m$ lar mavjud va $m\leq f(x)\leq M$. $\varphi(x)\geq 0$ bo'lgani uchun $m\varphi(x)\leq f(x)\varphi(x)\leq M\varphi(x)$ kelib chiqadi. U holda

$$m\int_a^b\varphi(x)dx\leq\int_a^b f(x)\varphi(x)dx\leq M\int_a^b\varphi(x)dx.$$

Bu yerda ikki hol bo'lishi mumkin:

I-hol: $\int_a^b\varphi(x)dx=0$ bo'lsin. Ravshanki, bu holda so'ngi tengsizlikdan $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=0$ kelib chiqadi va (3) tenglik o'rinli bo'ladi.

II-hol: $\int_a^b\varphi(x)dx>0$ bo'lsin. U holda m M tengsizlik o'rinli. $[a;b]$ da $f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lgani uchun shunday c nuqta topiladiki, $\frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)dx}{\int_a^b\varphi(x)dx}=f(c)$ bo'ladi.

§ 15. Nyuton- Leybnis formulasi. Aniq integralning tadbiqlari (Yassi shaklning yuzasi. Egri chiziq yoyi uzunligi. Hajmlarni hisoblash)

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lib, $F(x)$ funksiya esa u $[a,b]$ segmentdagi boshlang'ich funksiyasi bo'lsin: $F'(x)=f(x)$.

Ravshanki, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi, ya'ni $\int_a^b f(x)dx$ mavjud. Bu integral uchun

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) \qquad (15.1)$$

bo'lishini isbotlaymiz. $[a,b]$ segmentni

$$x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x_n \qquad (a=x_0<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n=b)$$

nuqtalar yordamida n ta

$$[a,x_1],\ [x_1,x_2],\dots,\ [x_k,x_{k+1}],\dots,\ [x_{n-1},b]$$

bo'lakchalarga ajratamiz. Har bir bo'lakchada $F(x)$ funksiyaga Lagranj teoremasini qo'llab topamiz:

$$F(x_1)-F(a)=F'(\xi_0)\cdot(x_1-a)=f(\xi_0)\cdot\Delta x_0,\quad a<\xi_0<x_1$$
$$F(x_2)-F(x_1)=F'(\xi_1)\cdot(x_2-x_1)=f(\xi_1)\cdot\Delta x_1,\quad x_1<\xi_1<x_2$$
....
$$F(b)-F(x_{n-1})=F'(\xi_{n-1})\cdot(b-x_{n-1})=f(\xi_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1},\quad x_{n-1}<\xi_{n-1}<b$$

Bu tengliklarni hadlab qo'shish natijasida

$$F(b)-F(a)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k \qquad (15.2)$$

hosil bo'ladi. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lgani uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k=\int\limits_a^b f(x)dx$ bo'ladi. (15.2) tenglikda limitga o'tsak, unda

$$\int\limits_a^b f(x)\cdot dx=F(b)-F(a)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Shuni isbotlash kerak edi.

Odatda (15.1) formula Nyuton-Leybnits formulasi deb yuritiladi. Bu formula yordamida aniq integrallar hisoblanadi.

(15.1) tenglikning o'ng tomonidagi $F(b)-F(a)=F(x)\big|_a^b$, $F(b)-F(a)$ (yozuvni qisqa qilish maqsadida) $F(x)\big|_a^b$ kabi yoziladi: $\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\big|_a^b$

Shunday qilib, $\int\limits_a^b f(x)dx$ integralni Nyuton-Leybnits formulasidan foydalanib hisoblash uchun avvalo $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali hisoblanadi: $\int f(x)dx=F(x)+C$ So'ng $(F(x)+C)\big|_a^b=F(b)+C-(F(a)+C)=F(b)-F(a)$ topiladi.

Misol. *Ushbu* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$ *integral hisoblansin.*

Yechish usuli $\int\sin x dx=-\cos x+c$.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=(-\cos x+c)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\cos\frac{\pi}{2}-(-\cos 0)=0+1=1$$ bo'ladi. ►

Eslatma. *Aytaylik,* $f(x)$ *funksiya* $[a,b]$ *segmentda uzluksiz bo'lsin. U* $[a,b]$ *da integrallanuvchi bo'lib, integralning xossasiga ko'ra* $[a,x]$ *da* $(a\le x\le b)$ *da ham integrallanuvchi bo'ladi:*

$$\int\limits_a^x f(t)dt.$$

Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, ya'ni $F'(x)=f(x)$ bo'lsa, u holda Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra $\int\limits_a^x f(t)\cdot dt=F(x)-F(a)$ bo'lib, undan $\left(\int\limits_a^x f(t)\cdot dt\right)'=(F(x)-F(a))'=F'(x)$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $\int\limits_a^x f(t)dt$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi. Bu uzluksiz funksiya har doim boshlang'ich funksiyaga ega bo'lishini bildiradi.

15.1. Aniq integrallarni o'zgaruvchini almashtirish usuli bilan hisoblash

$[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiyaning aniq integrali

$$\int\limits_a^b f(x)dx \qquad (15.3)$$

ni hisoblash kerak bo'lsin. Ko'p hollarda bu integralda o'zgaruvchini almashtirish natijasida u soddaroq, hisoblash uchun qulayroq integralga keladi.(15.3) integralda $x=\varphi(t)$ deylik, bunda $\varphi(t)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $x=\varphi(t)$ funksiya $[\alpha,\beta]$ da uzluksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega,

2) ixtiyoriy $t\in[\alpha,\beta]$ da $a\le\varphi(t)\le b$ ва $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

U holda, $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$ bo'ladi.

◄Faraz qilaylik, $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin: $F'(x)=f(x)$.

Ravshanki, $\left[F(\varphi(t))\right]' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$.

Demak, $F(\varphi(t))$ funksiya $[\alpha,\beta]$ da $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi. Unda Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

bo'ladi. Ikkinchi tomondan $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ bo'lishi ma'lum. Keyin ikki tenglikdan

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \qquad (15.4)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Misol. *Ushbu* $J = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx$ *integral hisoblansin.*

Yechish usuli

$\sqrt{1+x^2} = t$, $x=0$ da $t=1$,

$x=1$ da $t=\sqrt{2}$

$$dx = \left(\sqrt{t^2-1}\right)'\cdot dt = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}. \qquad J = \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = \frac{t^3}{3}\bigg|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

15.2. Aniq integrallarni bo'laklab integrallash usuli yordamida hisoblash

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ da uzluksiz va uzluksiz $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lsin. Ravshanki, $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$.

Ayni paytda $\int_a^b (f(x)\cdot g(x))'dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b$ bo'ladi. Demak,

$$\int_a^b [f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)]dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b$$

bo'lib, undan

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx \qquad (15.5)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu formula yordamida aniq integrallar hisoblanadi.

Yuqoridagi (15.5) formula aniq integrallarda bo'laklab integrallash formulasi deyilib, uni $\int_a^b f(x)dg(x) = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)df(x)$ kabi ham yozish mumkin.

Misol. *Ushbu* $\int_0^1 xe^x dx$ *integral hisoblansin.*

Yechish usuli.

$f(x) = x, \quad dg(x) = e^x dx$

$df(x) = f'(x)dx = (x)'dx = dx,$

$g(x) = \int e^x dx = e^x$

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

$$xe^x\Big|_0^1 = 1\cdot e^1 - 0\cdot e^0 = e, \quad \int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e-1.$$

$$\int_0^1 xe^x dx = e-(e-1) = 1.$$

15.3. Aniq integralning ba'zi-bir tatbiqlari

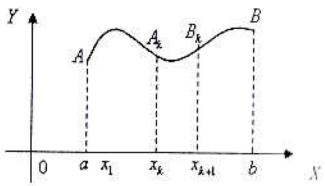
Matematika, fizika, mexanika hamda fan va texnikaning turli sohalarida uchraydigan ko'pgina masalalar ma'lum funksiyaning aniq integralini hisoblash bilan hal etiladi.

Biz quyida geometrik hamda fizik masalalarni aniq integral yordamida yechilishini bayon qilamiz.

1. Tekis shaklning yuzini hisoblash

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lib, $\forall x \in [a,b]$ da $f(x) \geq 0$ bo'lsin.

Yuqoridan $f(x)$ funksiya grafigi, yon tomonlardan $x=a$, $x=b$ vertikal chiziqlar hamda pastdan abssissa o'qi bilan chegaralangan $aABb$ tekis shaklni qaraylik (15.1-chizma).



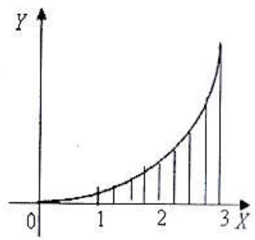
15.1-chizma

Odatda, bunday shakl egri chiziqli trapetsiya deyiladi. $aABb$ egri chiziqli trapetsiya yuzaga ega bo'ladi. Uning yuzini topish masalasini qaraymiz. $[a,b]$ segmentni

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lamiz, bunda $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ $(k = 0,1,2,\ldots,n-1)$

deymiz. Har bir $[x_k, x_{k+1}]$ da ixtiyoriy ξ_k nuqtani olib, funksiyaning shu nuqtadagi qiymatini Δx_k ga ko'paytiramiz: $f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$.Bu miqdor asosi Δx_k va balandligi $f(\xi_k)$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning yuzini ifodalaydi (15.2-chizma). U $x_k A_k B_k x_{k+1}$ egri chiziqli trapetsiyaning yuziga taqriban teng bo'ladi.



15.2-chizma

Ushbu $\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$ yig'indi esa $aABb$ egri chiziqli trapetsiyaning yuzi S ga taqriban teng bo'ladi: $S \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$.

Endi $[a,b]$ ning bo'laklash sonini orttirib borilsa, ya'ni n cheksizga intila borsa, $\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$ miqdor izlanayotgan S yuzani tobora aniqroq ifodalay boradi.

Binobarin, $S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$.

Ravshanki, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$.

Demak, $S = \int_a^b f(x)dx$.

Misol. *Quyidagi* $y=0$, $y=\frac{1}{2}x^2$, $x=1$, $x=3$ *chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzi topilsin.*

◄Bu shakl 15.3-chizmada tasvirlangan: (1) formuladan foydalanib topamiz:

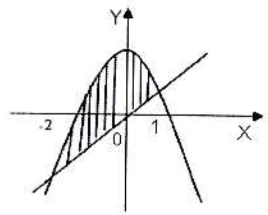
$$S = \int_1^3 \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{2}\int_1^3 x^2 dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{27}{3}-\frac{1}{3}\right) = \frac{13}{3}. ►$$

Aytaylik, $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalar $[a,b]$ da uzluksiz bo'lib, $\forall x \in [a,b]$ da $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$ bo'lsin.Yuqoridan $f_2(x)$ funksiya grafigi, pastdan $f_1(x)$ funksiya grafigi, tomonlardan $x=a$, $x=b$ vertikal chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzi

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx \quad (2)$$

bo'ladi

Misol. *Ushbu* $y=x$, $y=2-x^2$ *chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzi topilsin.* Avvalo $\begin{cases} y = x \\ y = 2-x^2 \end{cases}$ sistemani yechib, chiziqlarning kesishish nuqtalarining abssissalarini topamiz (15.4-chizma):



$$x = 2 - x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1.$$

Bu shaklning yuzini (15.2) formuladan foydalanib hisoblaymiz:

$$S=\int_{-2}^{1}\left[(2-x^2)-x\right]dx=\int_{-2}^{1}\left(2-x^2-x\right)dx==(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2})\Big|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}.$$

Eslatma. *Biz $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda $f(x)\geq 0$ qaradik. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da ishora saqlamasa, (15.1) integral egri chiziqli trapetsiyalar yuzalarining yig'indisidan iborat bo'ladi. Bunda OX o'qining yuqorisidagi yuza musbat ishora bilan, OX o'qining pastdagi yuza manfiy ishora bilan olinadi.*

Masalan, OX o'qi va $f(x)=\sin x$ ning $0\leq x\leq 2\pi$ oraliqdagi qismi bilan chegaralangan shaklning yuzi

$$S=\int_0^{\pi}\sin xdx+(-\int_{\pi}^{2\pi}\sin xdx)=(-\cos x)=$$
$$=\Big|_0^{\pi}-(-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi}=4$$

bo'ladi.

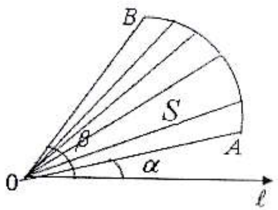
Qutb koordinatalar sistemasida ushbu $r=f(\varphi),\ \alpha\leq\varphi\leq\beta$

funksiya bilan aniqlangan $\breve{AB}$ yoyi hamda OA va OB radius vektorlar bilan chegaralangan (S) shaklni qaraylik (15.5-chizma).

Agar $r=f(\varphi)$ funksiya $[\alpha,\beta]$ da uzluksiz bo'lsa, (S) shaklning yuzi

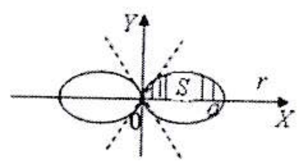
$$S=\frac{1}{2}\int_{\beta}^{\alpha}\left[f(\varphi)\right]^2d\varphi\quad(15.3)$$

bo'ladi.



15.5-chizma

Misol. *Qutb koordinatalar sistemasida ushbu* $r^2=a^2\cos 2\varphi$ *funksiya bilan chegaralangan shaklning yuzi topilsin.* $r^2=a^2\cos 2\varphi$ tenglama bilan berilgan egri chiziq yopiq chiziq bo'lib, u lemniskata deyiladi. Lemniskata Dekart koordinatalar o'qlariga nisbatan simmetrik joylashgan (15.6-chizma).



15.6-chizma

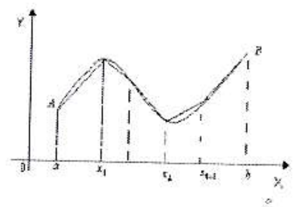
Izlanayotgan shaklning yuzini topish uchun uning I-chorakdagi qismi (S) ning yuzini topish yetarli bo'ladi. (S) shaklning yuzi (15.3) formulaga ko'ra

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}r^2d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/4}\cos 2\varphi d\varphi=\frac{a^2}{4}\int_0^{\pi/4}\cos 2\varphi d(2\varphi)=$$
$$=\frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^2}{4}$$

bo'ladi. Demak, izlanayotgan shaklning yuzi $4\cdot\frac{a^2}{4}=a^2$ ga teng.▶

15.4. Yoy uzunligini hisoblash

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz va uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu funksiyaning $[a,b]$ dagi grafigi $\breve{AB}$ yoyni (egri chiziqni) tasvirlasin (15.7-chizma).


15.7-chizma

$[a,b]$ segmentda $a=x_0,x_1,x_2,...,x_k,...,x_{n-1},x_n=b$

$(a=x_0<x_1<x_2<...<x_k<...<x_{n-1}<x_n=b)$

nuqtalarni olib, bu nuqtalar orqali OY o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Ularning $\breve{AB}$ yoyi bilan kesishgan nuqtalarini

$$A_k(x_k,f(x_k))\quad(k=0,1,2,...,n;\ A_0=A,\ A_n=B)$$

deymiz. So'ng bu nuqtalarni o'zaro to'g'ri chiziq kesmalari yordamida birin-ketin birlashtiramiz. Natijada $\breve{AB}$ yoyiga chizilgan siniq chiziq hosil bo'ladi. Bu siniq chiziq perimetrini L_n deylik.

Ravshanki siniq chiziqni $A_k(x_k, f(x_k))$, $A_{k+1}(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ nuqtalarni birlashtiruvchi bo'lagining uzunligi (ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko'ra)

$$\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+\left[f(x_{k+1})-f(x_k)\right]^2}$$

bo'lib, siniq chiziq perimetri $L_n=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+\left[f(x_{k+1})-f(x_k)\right]^2}$ bo'ladi.

Endi $[a,b]$ segmentning bo'laklash sonini orttira borilsa, ya'ni n cheksizga intila borsa, unda siniq chiziq $\breve{AB}$ yoyiga yaqinlasha boradi, uning perimetri esa $\breve{AB}$ yoyining uzunligi l ni borgan sari aniqroq ifodalay boradi. Bundan, tabiiy ravishda $\breve{AB}$ yoyining uzunligi deb $l=\lim_{n\to\infty}L_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+\left[f(x_{k+1})-f(x_k)\right]^2}$ qarash mumkinligi kelib chiqadi.

Yuqorida aytilishiga ko'ra $f(x_{k+1})-f(x_k)=f'(\tau_k)\cdot\Delta x_k$, $(k=0,1,2,...,n-1)$ $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega. Binobarin, u har bir $[x_k,x_{k+1}]$ da ham shu xususiyatga ega bo'ladi. Har bir $[x_k,x_{k+1}]$ da $f(x)$ ga Lagranj teoremasini qo'llab topamiz:bunda $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$ va $\tau_k\in[x_k,x_{r+1}]$. Natijada

$$l=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+[f'(\tau_k)\cdot(x_{k+1}-x_k)]^2}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\cdot(x_{k+1}-x_k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\,\Delta x_k$$

bo'ladi.

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lgani uchun u shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi. Unda integral yig'indi ixtiyoriy $\xi_k\in[x_k,x_{k+1}]$ da, jumladan τ_k da ham chekli limitga, ya'ni aniq integralga intiladi. Demak,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$$

Shunday qilib, $\breve{AB}$ yoyining (egri chiziqning) uzunligi

$$l=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx \qquad (15.4)$$

bo'ladi.

Misol. *Ushbu* $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ ***tenglama bilan berilgan egri chiziqning uzunligi topilsin.***

◀Bu yopiq egri chiziq bo'lib, u astroida deyiladi.

Astroida koordinatalar o'qlariga nisbatan simmetrik bo'lib, uning birinchi chorakdagi qismining uzunligini topish yetarli bo'ladi (topilgan qiymatni 4 ga ko'paytirish bilan butun astroidaning uzunligi topiladi).

Astroida tenglamasidan topamiz: $y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}$, ya'ni $y=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

Ravshanki,

$$y'=\left(\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}-1}\cdot\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)'=$$
$$=\frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}\right)=-\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}$$

bo'lib, birinchi chorakda $0\le x\le a$ bo'ladi.

(15.4) formuladan foydalanib, astroidaning birinchi chorakdagi qismining uzunligini topamiz:

$$\frac{l}{4}=\int_0^a\sqrt{1+f'^2(x)}dx=\int_0^a\sqrt{1+\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)\cdot x^{-\frac{2}{3}}}dx=$$
$$=\int_0^a\sqrt{1+a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}-1}dx=\int_0^a a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{2}a.$$

Demak, astroidaning uzunligi $l=4\cdot\frac{3}{2}a=6a$ o'ladi.▶

Aytaylik, $A\breve{B}$ egri chiziq ushbu

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases},\quad (\alpha\le t\le\beta)$$

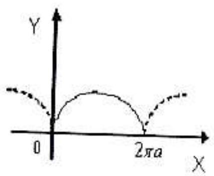
tenglamalar sistemasi bilan (parametrik ko'rinishda) berilgan bo'lsin, bunda $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar $[\alpha,\beta]$ da uzluksiz $\varphi'(t)$ hamda $\psi'(t)$ hosilalarga ega. Bu egri chiziqning uzunligi

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \qquad (15.5)$$

bo'ladi.

Misol. *Ushbu* $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ parametrik ko'rinishda berilgan $A\breve{B}$ egri chiziqning $[0,2\pi]$ dagi (sikloidaning) uzunligi topilsin.

◀ Bu egri chiziq 15.8-chizmada tasvirlangan.



15.8-chizma

Bu holda $\varphi(t)=a(t-\sin t)$, $\psi(t)=a(1-\cos t)$ bo'lib,

$$\varphi'(t)=a(1-\cos t),\quad \psi'(t)=a\sin t,$$

$$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)=a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t=$$
$$=a^2 2(1-\cos t)=4a^2\sin^2\frac{t}{2},$$

bo'ladi. (15.5) formuladan foydalanib topamiz:

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{4a^2\cdot\sin^2\frac{t}{2}}dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=$$
$$\left[t=2u,\ dt=2du\ \text{va}\ t=0\ \text{da}\ u=0,\ t=2\pi \text{da}\ \ u=\pi\right]=$$

$$=4a\int_0^\pi\sin u du=4a(-\cos u)\Big|_0^\pi=8a.\ ▶$$

Aytaylik, $A\breve{B}$ egri chiziq qutb koordinatalar sistemasida quyidagi

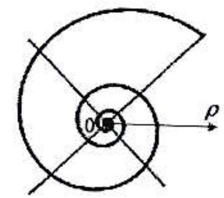
$$r=\rho(\theta),\quad (\alpha\le\theta\le\beta)$$

tenglama bilan berilgan bo'lsin, bunda $\rho(\theta)$ uzluksiz $\rho'(\theta)$ hosilaga ega. Bu egri chiziqning uzunligi

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho'^2(\theta)+\rho^2(\theta)}d\theta \qquad (15.6)$$

bo'ladi.

Misol. Qutb koordinatalar sistemasida berilgan ushbu $\rho(\theta)=e^\theta$ egri chiziqning 15.9-chizma) $0\le\theta\le\pi$ dagi uzunligi topilsin.



15.9-chizma

Ravshanki, $\rho(\theta)=e^\theta$ bo'lib, $\rho'^2(\theta)+\rho^2(\theta)=2e^{2\theta}$ bo'ladi. (15.6) formuladan foydalanib topamiz:

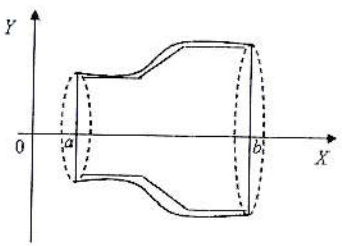
$$l=\int_0^\pi\sqrt{2e^{2\theta}}d\theta=\sqrt{2}\int_0^\pi e^\theta d\theta=\sqrt{2}\left(e^\theta\right)\Big|_0^\pi=\sqrt{2}\left(e^\pi-1\right)$$

15.5. Aylanma sirtning yuzini hisoblash

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz bo'lib, $\forall x\in[a,b]$ da $f(x)\ge0$ bo'lsin. Bu funksiya grafigining

$$(a, f(a)),\ (b, f(b))$$

nuqtalari orasidagi bo'lagini $A\breve{B}$ yoy deylik.



15.10-chizma

$A\breve{B}$ yoyni OX o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan sirt aylanma sirt deyiladi

$A\breve{B}$ Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz, u (a,b) oraliqda uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, aylanma sirtning yuzi

$$A\breve{B}\ S = 2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}dx \qquad (15.7)$$

bo'ladi.

Misol. *Ushbu* $f(x)=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{\frac{-x}{a}}),\quad a>0,\ 0\le x\le a$ *zanjir chizig'ini* OX *o'qining* $[0,a]$ *qismi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan aylanma sirtning yuzi topilsin.*

◀ Ravshanki, $f'(x)=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}\cdot\frac{1}{a}-e^{-\frac{x}{a}}\cdot\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{\frac{-x}{a}})$.

(15.7) formuladan foydalanib, izlanayotgan aylanma sirtning yuzini topamiz:

$$S=2\pi\int_0^a\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})^2}\,dx=$$

$$=\frac{\pi a}{2}\int_0^a(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})^2dx=\frac{\pi a}{2}\int_0^a(e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}})dx=$$

$$=\frac{\pi a}{2}\left[\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\right]\Bigg|_0^a=\frac{\pi a^2}{4}(e^2-e^{-2}+4).$$ ▶

15.6. Statik momentlar va og'irlik markazlarini hisoblash

Tekislikda m massaga ega bo'lgan A nuqtani qaraylik. Bu nuqtaning koordinatalari x va y bo'lsin: $A(x,y)=A$.

Ushbu $M_x=m\cdot y,\ M_y=m\cdot x$ miqdorlar mos ravishda OX va OY o'qlariga nisbatan statik momentlari deyiladi.

Aytaylik, tekislikda har biri mos ravishda $m_0, m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$ massaga ega bo'lgan $A_0(x_0,y_0),\ A_1(x_1,y_1),\ldots,A_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$ nuqtalar sistemasi berilgan bo'lsin.

Ushbu $M_x=\sum_{k=0}^{n-1}m_k y_k,\quad M_y=\sum_{k=0}^{n-1}m_k x_k$

miqdorlar $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ nuqtalar sistemasining mos ravishda OX va OY o'qlariga nisbatan statik momentlari deyiladi.

Agar nuqtalar sistemasining barcha massalari $(m=m_0+m_1+\ldots+m_{n-1})$ $C=C(x^*,y^*)$ nuqtada bo'lib, bu nuqtaning OX va OY o'qlariga nisbatan statik momentlari sistemaning shu o'qlarga nisbatan statik momentlariga teng, ya'ni

$$M_x=\sum_{k=0}^{n-1}m_k y_k=my^*,$$

$$M_y=\sum_{k=0}^{n-1}m_k x_k=mx^*,$$

bo'lsa, $C=C(x^*,y^*)$ nuqta sistemaning og'irlik markazi deyiladi.

Keyingi tengliklardan sistema og'irlik markazining koordinatalari uchun

$$y^*=\frac{M_x}{m}=\frac{\sum_{k=0}^{n-1}m_k y_k}{\sum_{k=0}^{n-1}m_k},\qquad x^*=\frac{M_y}{m}=\frac{\sum_{k=0}^{n-1}m_k x_k}{\sum_{k=0}^{n-1}m_k}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Aytaylik, $A\breve{B}$ egri chiziq ($A\breve{B}$ yoyi)

$y=f(x),\quad a\le x\le b,$

tenglama bilan aniqlangan bo'lsin, bunda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega. Bu egri chiziq bo'yicha zichligi o'zgarmas va u 1 ga teng bo'lgan massa tarqatilgan. Ravshanki, bu holda massa (u yoy uzunligi bilan zichlik ko'paytmasiga teng bo'lganligi sababli) yoy uzunligiga teng bo'ladi.

(15.4) formuladan foydalanib topamiz:

$$m=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx \qquad (15.8)$$

Massali $A\breve{B}$ egri chiziqning OX va OY koordinata o'qlariga nisbatan statik momentlarini hamda uning og'irlik markazining koordinatalarini topish uchun $[a,b]$ segmentini

$$a=x_0<x_1<...<x_{n-1}<x_n=b$$

nuqtalar yordamida n bo'lakka bo'lamiz. Unda $A\breve{B}$ yoyidagi

$$A_k=A_k(x_k,f(x_k))\ (k=0,1,2,...,n-1)$$

nuqtalar $A\breve{B}$ yoyini n ta $A_k\breve{A}_{k+1}$ bo'lakka ajratadi. Bunda $A_k\breve{A}_{k+1}$ yoy bo'lagining massasi (8) formulaga ko'ra

$$m_k=\int_{x_k}^{x_{k+1}} \sqrt{1+f'^2(x)}\ dx\ (k=0,1,2,...,n-1)$$

bo'ladi.

Aniq integralning xossasi (o'rta qiymat haqidagi teorema)dan foydalanib topamiz:

$$m_k=\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k,$$

bunda $\xi_k\in[x_k,x_{k+1}]$, $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$.

Yuqorida aytilganlarga ko'ra $(\xi_k,f(\xi_k))$ nuqtaning OX va OY o'qlarga nisbatan statik momentlari

$$M_{\xi_k}=m_kf(\xi_k)=f(\xi_k)\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k,$$

$$M_{f(\xi_k)}=m_k\cdot\xi_k=\xi_k\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k,$$

$(k=0,1,2,...,n-1)$ bo'lib, $(\xi_0,f(\xi_0)),\ (\xi_1,f(\xi_1)),...,(\xi_{n-1},f(\xi_{n-1}))$ nuqtalar sistemasining OX va OY o'qlariga nisbatan statik momentlari

$$M_x=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k,$$
$$M_y=\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k,$$

bo'ladi.

Endi $[a,b]$ segmentning bo'laklash sonini orttira borilsa, ya'ni n cheksizga intila borsa, unda $A_k\breve{A}_{k+1}$ yoyi nuqtaga aylana boradi, yuqoridagi yig'indilar esa massaga ega bo'lgan egri chiziqning OX ва OY o'qlarga nisbatan statik momentini ifodalay boradi. Binobarin, (8) massali egri chiziqning OX va OY o'qlarga nisbatan statik momentlari

$$I_x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k,$$
$$I_y=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k,$$

bo'ladi.

Ayni paytda

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k=\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}dx,$$
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k=\int_a^b x\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

bo'lganligidan

$$I_x=\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,\quad I_y=\int_a^b x\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,$$

bo'lishini topamiz.

Shuningdek, (15.8) massali egri chiziq og'irlik markazi $C = C(x^*, y^*)$ nuqta koordinatalari uchun

$$x^* = \frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}, \quad y^* = \frac{\int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}$$

bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\int_1^2 \left(\frac{\sqrt{x+5}}{x+5}\right) dx$
2. $\int_0^\pi \left(\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x-5}\right) dx$
3. $\int_0^\pi (ctgx)\, dx$
4. $\int_0^e (5 - \ln x + \cos x)\, dx$
5. $\int_1^2 (x + 5 - \sin x + \cos x + \tan x)\, dx$
6. $\int_0^e (x - 2 - \ln x) dx$
7. $\int_0^3 (\frac{1}{x^2+9x+20}) dx$

§ 16. I- va II- tur xosmas integrallar. Xosmas integrallarning yaqinlashishi

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, +\infty)$ oraliqda (cheksiz oraliqda) uzluksiz bo'lsin. Bu funksiyaning ixtiyoriy $[a, t]$ oraliq (chekli oraliq) bo'yicha integrali $\int_a^t f(x)dx$ $(a < t < +\infty)$ ni qaraylik. Ravshanki, integral t ga bog'liq bo'ladi.

1-ta'rif. *Agar* $\lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx$ *limit mavjud bo'lsa, bu limit* $f(x)$ *funksiyaning chegarasi cheksiz xosmas integrali deyiladi va* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *kabi belgilanadi.* Demak,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx. \quad (16.1)$$

Agar (16.1) limit chekli bo'lsa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar (16.1) limit cheksiz bo'lsa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

Eslatma: *Agar (16.1) limit mavjud bo'lmasa,* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *xosmas integral uzoqlashuvchi deb qaraladi.*

Misol. *Ushbu*

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (a > 0)$$

xosmas integral yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀Aytaylik, $\alpha \neq 1$ bo'lsin. Bu holda

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t x^{-\alpha} dx = \lim_{t\to+\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_a^t =$$
$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right)$$

bo'ladi, $\alpha > 1$ bo'lganda

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{a^{\alpha-1}}$$

bo'ladi, $\alpha < 1$ bo'lganda

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$$

bo'ladi. Demak, berilgan integral $\alpha > 1$ da yaqinlashuvchi, $\alpha < 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi.

Aytaylik, $\alpha = 1$ bo'lsin. Bu holda

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t\frac{dx}{x}=\lim_{t\to+\infty}(\ln t-\ln a)=+\infty$$

bo'lib, berilgan integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

Eslatma: *$f(x)$ funksiya $(-\infty,a)$ oraliqda uzluksiz bo'lganda*

$$\int_{-\infty}^{a}f(x)dx$$

xosmas integral, $f(x)$ funksiya $(-\infty,+\infty)$ da uzluksiz bo'lganda

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$$

xosmas integrallar yuqoridagidek ta'riflanadi:

$$\int_{-\infty}^{a}f(x)dx=\lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)dx\ ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{a}f(x)dx+\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)dx+=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx.$$

Xosmas integrallar haqidagi keyingi ma'lumotlarni

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx$$

integralga nisbatan keltiramiz.

16.1. Xosmas integrallarni hisoblash

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda uzluksiz bo'lib, uning xosmas integrali $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsin.

Ma'lumki, bu holda $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda boshlang'ich funksiyaga ega bo'ladi. Uni $F(x)$ bilan belgilaylik, $(F'(x)=f(x))$.

Ta'rifga binoan $\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$.

Ayni paytda, Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra $\int_a^t f(x)dx=F(t)-F(a)$

bo'ladi.

Agar $\lim_{t\to+\infty}F(t)=F(+\infty)$ deyilsa, unda $\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}(F(t)-F(a))=F(+\infty)-F(a)$

bo'ladi. Demak,

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=F(+\infty)-F(a)=F(x)\Big|_a^{+\infty}. \qquad (16.2)$$

Ko'pincha xosmas integrallar shu formula yordamida hisoblanadi.

Misol. *Ushbu*

$$\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

integral hisoblansin.

◄Bu integralning yaqinlashuvchi bo'lishi ravshan. Endi

$$f(x)=\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

funksiyaning boshlang'ich funksiyasini topamiz:

$$\int\frac{xdx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}\int(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}d(1+x^2)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}+C=-(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}+C$$

Unda (16.2) formulaga ko'ra

$$\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\left[-(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}+C\right]\Big|_0^{\infty}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)-\left(-(1+0)^{-\frac{1}{2}}\right)=0+1=1$$

bo'ladi. Demak,

$$\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=1.$$ ►

16.2. Chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrallari

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b)$ da uzluksiz bo'lsin. Bu funksiya $x\to b-0$ da cheksizga intilsin: $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$. Demak, $f(x)$ funksiya $[a,b)$ da chegaralanmagan (aniqrog'i $f(x)$ funksiya b nuqta atrofida chegaralanmagan). $f(x)$ funksiyaning ixtiyoriy $[a,t]$ oraliq $(a<t<b)$ bo'yicha integrali

$$\int_a^t f(x)dx \; (a<t<b)$$

ni qaraylik. Ravshanki, integral t ga bog'liq bo'ladi.

4-ta'rif. *Agar ushbu* $\lim\limits_{t\to b-0}\int_a^t f(x)dx$ *limit mavjud bo'lsa, bu limit chegaralanmagan* $f(x)$ *funksiyaning* $[a,b)$ *bo'yicha xosmas integrali deyiladi va* $\int_a^b f(x)dx$ *kabi belgilanadi.*

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to b-0}\int_a^t f(x)dx. \quad (16.3)$$

Agar (16.3) limit mavjud va chekli bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar (16.3) limit cheksiz yoki mavjud bo'lmasa, $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(a,b]$ da uzluksiz bo'lib, $x\to a+0$ da cheksizga intilsin. Ravshanki, bu funksiyaning $[t,b]$ oraliq $(a<t<b)$ bo'yicha integrali

$\int_t^b f(x)dx \; (a<t<b)$ t o'zgaruvchiga bog'liq bo'ladi.

Agar ushbu $\lim\limits_{t\to a+0}\int_t^b f(x)dx$ limit mavjud bo'lsa, bu limit chegaralanmagan $f(x)$ funksiyaning xosmas integrali deyiladi va $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi. Demak,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to a+0}\int_t^b f(x)dx. \quad (16.4)$$

Agar (16.5) limiti mavjud va chekli bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi, cheksiz yoki mavjud bo'lmasa, $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

Misol. *Ushbu* $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ *integral hisoblansin.*

Yechish usuli. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad x\to 1-0$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{t\to 1-0}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{t\to 1-0}(\arcsin x)\Big|_0^t==\lim_{t\to 1-0}(\arcsin t-\arcsin 0)=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}.$$

Xuddi yuqoridagidek ko'rsatish mumkin,

$$J_1=\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$$

xosmas integral $0<p<1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $p\ge 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi.

Biz mazkur ma'ruzaning 1^0 -5^0paragraflarida chegaralari cheksiz xosmas integral

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

ni o'rgandik. Bu integralga nisbatan keltirilgan tushuncha va tasdiqlarga o'xshash ma'lumotlar chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali ($t\to a+0$ da $f(x)\to\infty$ yoki $t\to b-0$ da $f(x)\to\infty$)

$$\int_a^b f(x)dx$$

uchun ham keltirilishi mumkin. Jumladan, agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar:

1) $(a,b]$ da uzluksiz va ixtiyoriy $x\in(a,b]$ da $0\le g(x)\le f(x)$;

2) xosmas integral $\int_a^b f(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^b g(x)dx$

xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Misol. Ushbu $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}dx$

Yechilish usuli. $0<x<1$ bo'lganda

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ yaqinlashuvchi. $\frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{x}}$ Demak. berilgan integral $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}dx$

yaqinlashuvchi bo'ladi.▶

16.3. Birinchi va ikkinchi tur xosmas integrallar

Berilgan $y=f(x)$ funksiya $[a, +\infty)$ cheksiz yarim oraliqda aniqlangan va ixtiyoriy chekli $b\ge a$ uchun $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi , ya'ni

$$F(b)=\int_a^b f(x)dx$$

5-ta'rif: $y=f(x)$ funksiyaning $[a, +\infty)$ cheksiz yarim oraliq bo'yicha ***I tur xosmas integrali*** deb yuqori chegarasi o'zgaruvchi $F(b)$ integralning $b\to+\infty$ bo'lgandagi limitiga aytiladi.

$y=f(x)$ funksiyaning $[a, +\infty)$ cheksiz yarim oraliq bo'yicha I tur xosmas integrali

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad (16.5)$$

deb belgilanadi va , ta'rifga asosan,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \quad (16.6)$$

kabi aniqlanadi.

Geometrik nuqtai nazardan (16.6) xosmas integral $y=f(x)$ $[f(x)\ge 0]$, $x=a$ va $y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan cheksiz shaklning yuzasini ifodalaydi.

6-ta'rif: Agar (16.7) limit mavjud va chekli bo'lsa, unda (16.1) xosmas integral ***yaqinlashuvchi***, aks holda esa ***uzoqlashuvchi*** deyiladi. (16.6) xosmas integralni qarashda ikkita masala paydo bo'ladi.

I. (16.6) xosmas integral yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlash;

II. (16.6) xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lgan holda uning qiymatini topish.

Misol sifatida ushbu I tur xosmas integralni qaraymiz:

$$I_\alpha=\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha},\ a>0 \quad (16.7)$$

Bu integralni uch holda tahlil etamiz.

Dastlab $\alpha>1$ holni qaraymiz. Bu holda xosmas integral ta'rifi va Nyuton – Leybnits formulasiga asosan quyidagi natijani olamiz:

$$I_\alpha=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_a^b=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}}-a^{1-\alpha}\right)=\frac{1}{1-\alpha}(0-a^{1-\alpha})=\frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

Demak, bu holda qaralayotgan (16.7) xosmas integral yaqinlashuvchi va uning qiymati $a^{1-\alpha}/(\alpha-1)$ bo'ladi.

Endi $\alpha=1$ holni tahlil etamiz:

$$I_1=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_a^b=\lim_{b\to+\infty}(\ln b-\ln a)=\infty$$

Demak, bu holda (16.8) xosmas integral uzoqlashuvchi.

$\alpha<1$, ya'ni $1-\alpha>0$ holni ko'rib chiqamiz:

$$I_\alpha=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_a^b=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to+\infty}(b^{1-\alpha}-a^{1-\alpha})=\infty.$$

Demak, bu holda ham (16 .8) xosmas integral uzoqlashuvchi ekan.

II tur xosmas integrallar. Endi chegaralanmagan funksiyalar uchun aniq integral tushunchasini umumlashtiramiz. Berilgan $y=f(x)$ funksiya $(a,b]$ yarim oraliqda chegaralanmagan, ammo ixtiyoriy $\varepsilon\in(0,b-a]$ uchun bu funksiya $[a+\varepsilon,b]$ kesmada chegaralangan va integrallanuvchi bo'lsin. Bu holda

$$F(\varepsilon)=\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx,\quad \varepsilon\in(0,b-a],$$

funksiyani qarash mumkin.

7-ta'rif: *$F(\varepsilon)$ funksiyaning $\varepsilon\to 0+0$ holdagi o'ng limiti berilgan $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesma bo'yicha **II tur xosmas integrali** deb ataladi.*

Berilgan $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesma bo'yicha II tur xosmas integrali quyidagicha belgilanadi va aniqlanadi:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0+0}F(\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx \quad (16.8)$$

limitga aytiladi.

8-ta'rif: *Agar (16.13) limit mavjud va chekli bo'lsa, u holda II tur xosmas integral **yaqinlashuvchi** deyiladi. Aks holda bu xosmas integral **uzoqlashuvchi** deb ataladi.*

Misol. sifatida ushbu II tur xosmas integralni ko'ramiz:

$$I(\alpha)=\int_0^b\frac{dx}{x^\alpha}\quad (0<b<+\infty,\alpha>0)\quad (16.9)$$

Bu yerda uch holni qaraymiz.

Dastlab $0<\alpha<1$ holni tahlil etamiz:

$$I(\alpha)=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_\varepsilon^b\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{\alpha-1}\right|_\varepsilon^b=\frac{1}{\alpha-1}\lim_{\varepsilon\to 0+0}(b^{1-\alpha}-\varepsilon^{1-\alpha})=b^{1-\alpha}.$$

Demak, bu holda (16.14) II tur xosmas integral yaqinlashuvchi va uning qiymati $b^{1-\alpha}$.

2) Endi $\alpha=1$ holni o'rganamiz:

$$I(1)=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_\varepsilon^b\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\ln x\Big|_\varepsilon^b=\lim_{\varepsilon\to 0+0}(\ln b-\ln\varepsilon)=+\infty.$$

Demak, bu holda (16.14) II tur xosmas integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

3) $\alpha>1$ holni qaraymiz:

$$I(\alpha)=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_\varepsilon^b\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{\alpha-1}\right|_\varepsilon^b=\frac{1}{\alpha-1}\lim_{\varepsilon\to 0+0}(b^{1-\alpha}-\varepsilon^{1-\alpha})=-\infty.$$

Demak, bu holda ham (16.14) II tur xosmas integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

II tur xosmas integrallarning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini yetarli shartlari oldin I tur xosmas integrallar uchun ifodalangan 1-3 teoremalarga o'xshash ifodalanadi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(1-x^2+5x)}dx$

2. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1-x^2)}dx$

3. $\int_0^{+\infty}\tan x\,dx$

4. $\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(1+x^4-x)}dx$

5. $\int_0^{+\infty}(x^2+4x-x)dx$

6. $\int_0^{+\infty}(\frac{1}{x^2+5x+6})dx$

7. $\int_0^{+\infty}(\ln x-\lg x)dx$

IV BO'LIM. SONLI VA FUNKSIANAL QATORLAR

§.17. Sonli qatorlar (musbat hadli qatorlarning yaqinlashish teoremalari, Leybnits teoremasi. Absaluyt va shartli yaqinlashish)

17.1. Sonli qatorlar

Aytaylik, $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ haqiqiy sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Ushbu

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (17.1)$$

ifoda sonli qator (qisqacha qator) deyiladi. Bunda $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ sonlar qatorning hadlari, a_n ga esa qatorning umumiy yoki n – hadi deyiladi.

Quyidagi

$$S_1 = a_1; \quad S_2 = a_1 + a_2; ...; S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n, ...$$

yig'indilar (17.1) qatorning qismiy yig'indilari deyiladi.

Agar $\{S_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lsa,

$\lim_{n\to\infty} S_n = S$ (S chekli son)

(17.1) qator yaqinlashuvchi deyiladi, S son esa (17.1) qatorning yig'indisi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Agar $\lim_{n\to\infty} S_n$ limit cheksiz yoki u mavjud bo'lmasa (17.1) qator uzoqlashuvchi deyiladi.

17.2. Qator yaqinlashishining zaruriy sharti

Agar (17.1) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ bo'ladi.

Bu tasdiq qator yaqinlashishining zaruriy shartini ifodalaydi.

Eslatma. Qatorning umumiy hadi $n\to\infty$ da nolga intilishidan uning yaqinlashuvchi bo'lishi har doim kelib chiqavermaydi. Masalan, ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

garmonik qatorning umumiy hadi $a_n = \frac{1}{n}$ bo'lib, u $n\to\infty$ da nolga intiladi, ammo bu qator uzoqlashuvchi.

Ravshanki, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uchun $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ bo'lsa, unda qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

1-misol. Ushbu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} + ...$ qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin va yg'indisi topilsin.

Yechish usuli $\quad S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}$

$b_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$ bo'lgan geometrik progressiyaning dastlabki n ta hadining yg'indisidan iborat. Unda

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

formulaga ko'ra

$$S_n = 1 \cdot \frac{\frac{1}{2^n} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{-\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

bo'ladi.

Keyingi tenglikda limitga o'tib topamiz:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2.$$

Demak, berilgan qator yaqinlashuvchi, uning yg'indisi 2 ga teng.▶

2-misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + ... + \frac{n}{n+1} + ...$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀Ravshanki, berilgan qatorning umumiy hadi

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

bo'ladi.

Qatorning yaqinlashuvchi bo'lishinin zaruriy sharti bajarilmaydi. Demak, berilgan qator uzoqlashuvchi.▶

Musbat hadli qatorlar

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$

qatorning har bir hadi manfiy bo'lmasa, ya'ni

$$a_n \geq 0 \quad (n=1,2,3,...)$$

bo'lsa, qator musbat hadli (qisqacha musbat) qator deyiladi.

Taqqoslash alomatlari

a) Aytaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad (17.2)$$

musbat qator bo'lib,

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

uning qismiy yig'indisi bo'lsin. Ravshanki,

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

bo'lib, $a_n \geq 0$ bo'lgani uchun

$$S_n \leq S_{n+1} \quad (n=1,2,3,...)$$

bo'ladi.

Demak, musbat qatorlarda uning qismiy yig'indilaridan iborat $\{S_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi bo'ladi.

Musbat hadli (17.2) qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning qismiy yig'indilari ketma-ketligi $\{S_n\}$ ning yuqoridan chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.

Eslatma. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

musbat hadli qatorda, uning qismiy yig'indilaridan iborat $\{S_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, u holda qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Taqqoslash alomatlari

a) Aytaylik, Ikkita musbat hadli qatorlar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad (17.3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + ... + b_n + ... \qquad (17.4)$$

Uchun $a_n \leq b_n \quad (n=1,2,3,...)$ bo'lsa, u holda (17.4) qator yaqinlashuvchi bo'lganda (17.3) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi, (17.3) qator uzoqlashuvchi bo'lganda (17.4) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

b) Agar musbat hadli (17.3) va (17.4) qatorlar uchun

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \qquad (a_n > 0, b_n > 0, \quad n=1,2,...)$$

bo'lsa, u holda (17.4) qator yaqinlashuvchi bo'lganda (17.3) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi, (17.3) qator uzoqlashuvchi bo'lganda (17.4) qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

3-misol. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + ... + \frac{1}{n\cdot 2^n} + ...$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀Berilga qatorning umumiy hadi uchun

$$a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n} < \frac{1}{2^n}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Unda solishtrish alomati hamda 1-misoldan foydalanib berilgan qatorning yaqinlashuvchi bo'lishini topamiz.▶

Dalamber alomati

Musbat hadli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uchun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d \quad (a_n > 0\,,\, n = 1,2...)$$

bo'lib, $d<1$ bo'lsa (17.2) qator yaqinlashuvchi, $d>1$ bo'lsa, (17.2) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

4-misol. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n} = \frac{3 \cdot 1}{1} + \frac{3^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{3^3 \cdot 3!}{3^3} + ... + \frac{3^n \cdot n!}{n^n} + ...$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀ Bu qatorning a_n va a_{n+1} hadlari

$$a_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}\,, \qquad a_{n+1} = \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{3^{n+1} \cdot n!(n+1)}{(n+1)^n (n+1)} = \frac{3^{n+1} \cdot n!}{(n+1)^n}.$$

bo'ladi. Ularning nisbatining limiti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3^{n+1} \cdot n!}{(n+1)^n}}{\dfrac{3^n \cdot n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} \cdot n! \, n^n}{(n+1)^n \cdot 3^n \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e}$$

bo'lib, u 1 dan katta (chunki $e \approx 2,71...$). Demak, Dalamber alomatiga ko'ra berilgan qator uzoqlashuvchi bo'ladi.▶

Eslatma. Agar $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ bo'lsa, u holda (17.2) qator yaqinlashuvchi ham, uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin.

Koshining integral alomati. Musbat hadli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uchun

$$f(n) = a_n \qquad (n = 1,2,3,...)$$

bo'lib, bunda $f(x)$ funksiya $[1,+\infty)$ da musbat, kamayuvchi, uzluksiz hamda

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \quad (17.5)$$

xosmas integral yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'lsa, qator ham yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'ladi.

5-misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha} + ... \qquad (\alpha \in R)$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀ Bu qatorning umumiy hadi

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

bo'lib, $\alpha \le 0$ bo'lganda uning a_n hadining $n \to \infty$ dagi limiti nolga teng bo'lmaydi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \ne 0 \qquad (\alpha \le 0)$$

Demak, $\alpha \le 0$ bo'lganda qat uzoqlashuvchi.

Aytaylik, $\alpha > 0$ bo'lsin. Koshining integral alomatda keltirilgan $f(x)$ funksiya sifatida $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ $(\alpha > 0)$ olinsa, bu funksiya, ravshanki $[1,+\infty)$ da uzluksiz, ixtiyoriy $x \in [1,+\infty)$ da $f(x) \ge 0$, $[1,+\infty)$ da kamayuvchi va

$$1 = f(1), \frac{1}{2^\alpha} = f(2), \frac{1}{3^\alpha} = f(3), ..., \frac{1}{n^\alpha} = f(n), ...$$

bo'ladi.

Ma'lumki,

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

xosmas integral $0<\alpha\le 1$ da uzoqlashuvchi, $\alpha>1$ da yaqinlashuvchi.

Demak, Koshining integral alomatiga ko'ra

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$$

qator $\alpha>1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $\alpha\le 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi.▶

Odatda, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ qator umumlashgan garmonik qator deyiladi.

Ishorasi o'zgaruvchi qatorlar

Faraz qilaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+...+a_n+... \qquad (17.6)$$

qator berilgan bo'lib, uning har bir hadi ixtiyoriy ishorali haqiqiy sonlardan iborat bo'lsin. (Odatda, bunday qator ixtiyoriy hadli qator deyiladi.) Bu qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=|a_1|+|a_2|+...+|a_n|+... \qquad (17.7)$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (17.7) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu holda qator absolyut yaqinlashuvchi qator deyiladi.

6-misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}=\frac{1}{2}-\frac{8}{4}+\frac{27}{8}-\frac{64}{16}+...+\frac{n^3}{2^n}(-1)^{n+1}+...$$

qator absolyut yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

Qatorning absolyut yaqinlashuvchiligi

◀Berilgan qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan quyidagi

$$\frac{1}{2}+\frac{8}{4}+\frac{27}{8}+\frac{64}{16}+...+\frac{n^3}{2^n}+... \qquad (17.8)$$

qatorni qaraymiz. Bu qator uchun

$$a_n=\frac{n^3}{2^n},\qquad a_{n+1}=\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}$$

bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\,2^n}{2^{n+1}n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}{2}=\frac{1}{2}$$

bo'ladi. Dalamber alomatiga ko'ra (17.8) qator yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, berilgan qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.▶

Eslatma. Agar $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ qator uzoqlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qator yaqinlashuvchi ham bo'lishi mumkin, uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin.

Agar $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ qator uzoqlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qator shartli yaqinlashuvchi qator deyiladi.

Leybnits alomati:

Endi ixtiyoriy hadli qatorning bitta muhim hususiy holini qaraymiz.

Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n=c_1-c_2+c_3-c_4+...+(-1)^{n-1}c_n+... \quad (c_n>0,\ n=1,2,...) \qquad (17.9)$$

qator hadlarining ishoralari navbat bilan o'zgarib keladigan qator deyiladi.

Masalan,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+...$$

qator hadlarining ishoralari navbat bilan o'zgarib keladigan qator bo'ladi.

Agar (17.9) qatorda:

1) $c_{n+1}<c_n$, $\quad (n=1,2,3,...)$

2) $\lim_{n\to\infty}c_n=0$

bo'lsa, u holda (17.10) qator yaqinlashuvchi bo'ladi. (Leybnits teoremasi)

7-misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^{n-1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+...$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀ Bu qator uchun $c_n=\frac{1}{n}\quad (n=1,2,3...)$

bo‘lib, $c_{n+1}<c_n$ va $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

bo‘ldi. Leybnits alomatiga ko‘ra berilgan qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.▶

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}=?$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=?$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}=?$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-5}=?$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)^2}=?$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+8}$
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4}$

§ 18. Darajali qatorlar. Yaqinlashish radiusi yaninlashish sohasi.Teylor formulasi va Teylor qatori

Har bir hadi $X\ (X\subset R)$ to‘plamda aniqlangan funksiyalardan iborat bo‘lgan ushbu

$$f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\quad (18.1)$$

qator funksional qator deyiladi.

X to‘plamdan olingan tayin x_0 nuqtani (18.1) dagi x ning o‘rniga qo‘yish bilan

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x_0)=f_1(x_0)+f_2(x_0)+...+f_n(x_0)+...\quad (18.2)$$

qator sonli qatorga aylanadi.

Funksional qatorning yaqinlashish sohasi. Agar (18.2) sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, (18.1) funksional qator x_0 nuqtada yaqinlashuvchi, x_0 nuqta esa (18.1) funksional qatorning yaqinlashish nuqtasi deyiladi. (18.1) funksional qatorning barcha yaqinlashish nuqtalaridan iborat to‘plam, funksional qatorning yaqinlashish sohasi deyiladi.

Funksional qatorlarning yaqinlashish sohalarini topishda sonli qatorlarning yaqinlashish alomatlaridan foydalaniladi, bunda x ni tayinlangan deb qaraladi.

1-misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot x^{2n-1}}=\frac{1}{x}+\frac{1}{3\cdot x^3}+\frac{1}{5\cdot x^5}+...+\frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}}+...$$

funksional qatorning yaqinlashish sohasi topilsin.

◀Bu qatorga Dalamber alomatini qo‘llaymiz, bunda x ni ayinlangan deb qaraymiz.

Berilgan qator uchun

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}},\quad a_{n+1}=\frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}}$$

bo‘lib,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left|\frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}}:\frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}}\right|=\left|\frac{(2n-1)x^{2n-1}}{(2n+1)x^{2n+1}}\right|=\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{1}{x^2},$$

bo‘ladi. Limitga o‘tib topamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{1}{x^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}.$$

Dalamber alomatiga ko‘ra

$$\frac{1}{x^2}<1,\ \text{ya'ni}\ |x|>1$$

bo'lganda qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

$$\frac{1}{x^2}=1, \text{ ya'ni } x=-1, \quad x=1 \text{ bo'lganda qator quyidagi}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2n-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$$

sonli qatorlarga aylanadi va ular uzoqlashuvchidir.

Demak, berilgan funksional qatorning yaqinlashish sohasi $|x|>1$ ya'ni

$$(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$$

to'plamdan iborat bo'ladi.▶

Funksional qatorning tekis yaqinlashishi. (18.1) funksional qator M to'plamda $(M\subset R)$ yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indisi $S(x)$ bo'lsin.

Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda shunday x ga bog'liq bo'lmagan $n_0=n_0(\varepsilon)\in N$ son topilsaki, barcha $n>n_0$ va ixtiyoriy $x\in M$ uchun

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon \quad (S(x)=S_n(x)+r_n(x))$$

ya'ni

$$|r_n(x)|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, (18.1) funksional qator M to'plamda tekis yaqinlashuvchi deyiladi.

Darajali qatorlar. Ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+... \quad (x\in R)\,(18.3)$$

ko'rinishdagi funksional qator darajali qator deyiladi, bunda

$$a_0,a_1,...,a_n,...$$

haqiqiy sonlar darajali qatorning koeffitsiyentlari deyiladi.

Abel teoremasi. Agar (5) darajali qator $x=x_0\neq 0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'lsa, unda x ning $|x|<|x_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida, ya'ni $(-|x_0|;|x_0|)$

intervalda qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar (18.3) darajali qator $x=x_1$ nuqtada uzoqlashuvchi bo'lsa, ya'ni

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_1^n=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+...+a_nx_1^n+...$$

sonli qator uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda x ning $|x|>|x_1|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarda, ya'ni ushbu to'plamda $(-\infty,-|x_1|)\cup(|x_1|,+\infty)$ (18.3) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Yaqinlashish radiusi va yaqinlashish intervali

Har qanday (18.3) darajali qator uchun shunday chekli yoki cheksiz musbat r son mavjud bo'ladiki, x ning:

1) $|x|<r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida (18.3) darajali qator yaqinlashuvchi (absolyut yaqinlashuvchi),

2) $|x|>r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida (18.3) darajali qator uzoqlashuvchi,

3) $|x|=r$, ya'ni $x=-r, x=r$ da (18.3) darajali qator yoki yaqinlashuvchi, yoki uzoqlashvchi bo'ladi.

Odatda r son (18.3) darajali qatorning yaqinlashish radiusi, $(-r,r)$ interval esa darajali qatorning yaqinlashish intervali deyiladi.

(18.3) darajali qatorning yaqinlashish radiusi ushbu

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad (a_n\neq 0,\ n=1,2,3...) \qquad (18.4)$$

formula yordamida topiladi.

Darajali qator o'zining yaqinlashish intervaliga tegishli bo'lgan har qanday oraliqda (segmentda) tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu oraliqda darajali qatorni hadlab differensiallash hamda integrallash mumkin.

2-misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 10^n}x^n=\frac{x}{10}+\frac{x^2}{200}+\frac{x^3}{300}+\ldots+\frac{x^n}{n\cdot 10^n}+\ldots$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusi, yaqinlashish intervali hamda yaqinlashish sohasi topilsin.

◀Bu darajali qator uchun $a_n=\frac{1}{n\cdot 10^n}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)\cdot 10^{n+1}}$

bo'lib, (18.4) formulaga ko'ra

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n\cdot 10^n}}{\frac{1}{(n+1)\cdot 10^{n+1}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 10^{n+1}}{n\cdot 10^n}=\lim_{n\to\infty}10\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=10$$

bo'ladi. Demak, berilgan darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r=10$ bo'lib, yaqinlashish intervali $(-10,10)$ bo'ladi.

Endi yaqinlashish intervalining chegaralari, ya'ni $x=10$ va $x=-10$ nuqtalarda qatorni yaqinlashishga tekshiramiz.

Berilgan darajali qatordagi x ning o'rniga -10 va 10 qo'sak, unda quyidagi

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots+\frac{(-1)^n}{n}+\ldots,$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

sonli qatorlar hosil bo'ladi. Ulardan birinchisi Leybnits alomatiga ko'ra yaqinlashuvchi, ikkinchisi esa (u garmonik qator) uzoqlashuvch bo'ladi.

Demak, berilgan qatorning yaqinlashish sohasi $[-10,10)$ yarim segmentdan iborat.▶

Teylor qatori

Ushbu

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n \quad (18.5)$$

ko'rinishdagi funksional qator ham darajali qator deyiladi, bunda $a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots$ hamda a o'zgarmas sonlar.

Agar r son $(r>0)$ (7) darajali qatorning yaqinlashish radiusi bo'lsa, uning yaqinlashish intervali $(a-r,a+r)$ bo'ladi.

Agar $f(x)$ funksiya $(a-r,a+r)$ intervalda istalgan tartibdagi hosilalarga ega bo'lib, barcha $x\in(a-r,a+r)$ va barcha $n=0,1,2,\ldots$ lar uchun shunday o'zgarmas $M>0$ topilsaki,

$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$ tengsizlik bajarilsa, u holda $f(x)$ funksiya uchun $(-r,r)$ da

$$\left(f^{(0)}(x)=f(x)\right)$$

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

bo'ladi. Bu formula o'rinli bo'lgan holda $f(x)$ funksiya darajali qatorga yoyiladi deyiladi.

Ushbu

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \quad (18.6)$$

(18.6) qator $f(x)$ funksiyaning *Teylor qatori* deyiladi.

Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish

Agar (18.6) da $a=0$ deyilsa, unda

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots(18.6)$$

bo'ladi va bu qatorni $f(x)$ funksiyaning Makloren qatori deyiladi.

Ba'zi sodda funlsiyalarning Makloren qatoriga yoyilmasini keltiramiz

1) $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \quad x\in(-\infty,+\infty)$,

2) $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\ldots \quad x\in(-\infty,+\infty)$,

3) $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\ldots \quad x\in(-\infty,+\infty)$,

4) $(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots x\in(-1,1)$,

5) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+...\quad x\in(-1,1]$.

Darajali qatorlarning taqribiy hisoblashlarga tatbiqlari

Funksiyalarning darajali qatorlarga yoyilmasidan foydalanib taqribiy formulalar hosil qilinadi. Ular jumlasiga ushb

$$f(x)\approx f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (18.7)$$

taqribiy formula kiradi. Xususan,

$$e^x\approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x\approx x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-...+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

$$\cos x\approx 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-...+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},$$

$$(1+x)^\alpha\approx 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n,$$

bo'ladi.

Bu taqribiy formulalardan ko'pgina masalalarni hal etishda, jumladan funksiyalarning qiymatlarini taqribiy hisoblashda, aniq integarallarni taqribiy hisoblashda foydalaniladi.

1-misol. Ushbu

$$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$$

funksiya Teylor (Makloren) qatoriga yoyilsin.

◀ Ma'lumki,

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x).$$

Ravshanki, $(-1,1]$ da

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+...\quad (18.8)$$

bo'ladi. Bu tenglikda x ni $-x$ ga almashtramiz. Natijada

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-...-\frac{x^n}{n}-...\quad (18.9)$$

bo'ladi. (18.8) tenglikdan (18.9) tenglikni hadlab ayirib topamiz:

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+...-$$

$$-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-...-\frac{x^n}{n}-...\right)=2x+\frac{2x^3}{3}+...+\frac{2x^{2n-1}}{2n-1}+...$$

Demak,

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2x+\frac{2x^3}{3}+...+\frac{2x^{2n-1}}{2n-1}+...$$

bo'ladi.▶

2-misol. Ushbu

$$\alpha=\sin 20^0$$

miqdor 0, 0001 aniqlikda taqribiy hisoblansin.

◀ Bu miqdorni taqribiy hisoblashda $f(x)=\sin x$ funksiyaning darajali qatorga yoyilmasidan hosil bo'lgan

$$\sin x\approx x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-...+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\quad (18.10)$$

formuladan foydalanamiz.

Keyingi formuladan foydalanish uchun $x=20^0$ ni radian ulchovida yozish lozim bo'ladi:

$$x=\frac{\pi}{9}=0,3491.$$

x ning bu qiymatini (18.10) formuladagi x ning o'rniga qo'yib topamiz.

$$\sin\frac{\pi}{9}\approx\frac{\pi}{9}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3\approx 0,3491-0,0070=0,3421.$$

Shunday qilib

$$\alpha=\sin 20^0=0,3421$$

bo'ladi.▶

3-misol. Ushbu

$$J=\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{\sin x}{x}dx$$

integral 0, 00001 aniqlikda taqribiy hisoblansin.

◀ Ma'lumki,

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-...+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+....$$

Bu tenglikning ikki tomonini x ga bo'lamiz:

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+...$$

Keyingi tenglikni $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ oraliq bo'yicha integrallab topamiz:

$$\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{\frac{1}{4}}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+...\right)dx=\left(x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\frac{x^7}{7\cdot 7!}+...\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{4}}=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{3\cdot 3!}\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5\cdot 5!}\frac{1}{4^5}-\frac{1}{7\cdot 7!}\frac{1}{4^7}+...$$

Qatorning dastlabki ikkita hadini olib

$$\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{\sin x}{x}dx\approx\frac{1}{4}-\frac{1}{3\cdot 3!}\frac{1}{4^3}\approx 0,25000-0,00087=0,24913$$

taqribiy qiymatiga ega bo'lamiz. Bunda tashlab yuborilgan brinchi qo'shiluvchi

$$\frac{1}{5\cdot 5!}\frac{1}{4^5}=\frac{1}{614400}<\frac{1}{100000}$$

bo'lgani uchun

$$\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{\sin x}{x}dx\approx 0,24913$$

bo'ladi.▶

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\cos x}{x}dx$ 0.0001 aniqlikda hisoblang

2. $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\tan x}{x}dx$ 0.000001 aniqlikda hisoblang

3. $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{ctgx}{x}dx$ 0.0002 aniqlikda hisoblang

4. $f(x)=\ln\frac{5-x}{5+x}$ funksiya Teylor (Makloren) qatoriga yoyilsin.

5. $f(x)=\lg\frac{x^2+3}{x^2-1}$

6. $f(x)=\lg\frac{3-x}{3+x}$ funksiya Teylor (Makloren) qatoriga yoyilsin.

7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{x}dx$ 0.000001 aniqlikda hisoblang

§ 19. Furye qatori va unung tadbiqlari. Furye qatori

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $R=(-\infty,+\infty)$ da berilgan bo'lsin. Ma'lumki, shunday $T\in R\setminus\{0\}$ son topilsaki, $\forall x\in R$ da

$$f(x+T)=f(x)$$

tenglik bajarilsa, $f(x)$ davriy funksiya, $T\neq 0$ son esa uning davri deyiladi.

Agar $T\neq 0$ son $f(x)$ funksiyaning davri bo'lsa, u holda

$$kT\quad (k=\pm1,\pm2,...)$$

sonlar ham shu funksiyaning davri bo'ladi.

Agar $f(x)$ va $g(x)$ davriy funksiyalar bo'lib, $T\neq 0$ ularning davri bo'lsa,

$$f(x)\pm g(x),\ \ f(x)\cdot g(x),\ \ \frac{f(x)}{g(x)}\quad (g(x)\neq 0)$$

funksiyalar ham davriy bo'lib, ularning davri T ga teng bo'ladi.

$y=\sin x$, $y=\cos x$ funksiyalar $T=2\pi$ davrli funksiya bo'lgan holda ushbu

$$\varphi(x)=a\cos\alpha x+b\sin\alpha x \quad (a,b,\alpha - \text{o'zgarmas}, \ \alpha\neq 0)$$

funksiya ham davriy funksiya bo'lib, uning davri $T=\frac{2\pi}{\alpha}$ bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$\varphi\left(x+\frac{2\pi}{\alpha}\right)=a\cos\left[\alpha\left(x+\frac{2\pi}{\alpha}\right)\right]+b\sin\left[\alpha\left(x+\frac{2\pi}{\alpha}\right)\right]=$$
$$=a\cos(\alpha x+2\pi)+b\sin(\alpha x+2\pi)=a\cos\alpha x+b\sin\alpha x=\varphi(x)$$

bo'ladi.

Bu $\varphi(x)=a\cos\alpha x+b\sin\alpha x$ sodda davriy funksiya bo'lib, u garmonika deb ataladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[-\pi,\pi]$ da uzluksiz bo'lsin. Unda

$$f(x)\cos nx,\ f(x)\sin nx \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

funksiyalar ham $[-\pi,\pi]$ da uzluksiz bo'lib, ular $[-\pi,\pi]$ da integrallanuvchi bo'ladi. Bu integrallarni quyidagicha belgilaymiz:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx, \ (n=1,2,\ldots) \qquad (19.1)$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx. \ (n=1,2,\ldots)$$

Bu sonlardan foydalanib, ushbu

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (19.2)$$

qatorni (uni trigonometrik qator deyiladi) hosil qilamiz.

(19.2) qator funksional qator bo'lib, uning har bir hadi garmonikadan iborat.

Ta'rif. *(19.2) funksional qator $f(x)$ funksiyaning Furye qatori deyiladi. (19.1) munosabatlar bilan aniqlangan*

$$a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$$

sonlar Furye koeffitsiyentlari deyiladi.

Demak, berilgan $f(x)$ funksiyaning Furye koeffitsiyentlari shu funksiyaga bog'liq bo'lib, (19.2) formulalar yordamida aniqlanadi, qator esa quyidagicha:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

belgilanadi.

1-misol. *Ushbu* $f(x)=e^{\alpha x}$ $(-\pi\le x\le\pi, \alpha\neq 0)$ *funksiyaning Furye qatori topilsin.*

◄ (19.1) formulalardan foydalanib, berilgan funksiyaning Furye koeffitsiyentlarini hisoblaymiz:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha\pi}\left(e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}\right)=\frac{2}{\alpha\pi}sh\alpha\pi,$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\frac{\alpha\cos nx+n\sin nx}{\alpha^2+n^2}e^{\alpha x}\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$
$$=(-1)^n\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2}sh\alpha\pi \quad (n=1,2,\ldots),$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\frac{\alpha\sin nx-n\cos nx}{\alpha^2+n^2}e^{\alpha x}\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$
$$=(-1)^{n-1}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2n}{\alpha^2+n^2}sh\alpha\pi \quad (n=1,2,\ldots).$$

Demak,

$$f(x)=e^{\alpha x}$$

funksiyaning Furye qatori

$$f(x)=e^{\alpha x}\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=$$
$$=\frac{2sh\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2+n^2}(\alpha\cos nx-n\sin nx)\right]$$

bo'ladi.►

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[-\pi,\pi]$ da berilgan juft funksiya bo'lsin: $f(-x)=f(x)$. U holda

$f(x)\cdot\cos nx$ juft, $f(x)\cdot\sin nx$ toq $(n=1,2,3,\ldots)$ funksiya bo'ladi.

(19.1) formulalardan foydalanib, $f(x)$ funksiyaning Furye koeffitsiyentlarini topamiz:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nxdx+\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx+\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx\right]=$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx \quad (n=0,1,2,...)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nxdx+\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx+\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx\right]=0 \qquad (n=1,2,...).$$

Demak, juft $f(x)$ funksiyaning Furye koeffitsiyentlari

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx \quad (n=0,1,2,\ ...)$$

$$b_n=0 \quad (n=1,2,\ ...)$$

bo'lib, Furye qatori

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$$

bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[-\pi,\pi]$ da berilgan toq funksiya bo'lsin: $f(-x)=-f(x)$. U holda

$f(x)\cdot\cos nx$ toq, $f(x)\cdot\sin nx$ juft $(n=1,2,3,...)$ funksiya bo'ladi.

(19.1) formulalardan foydalanib, $f(x)$ funksiyaning Furye koeffitsiyentlarini topamiz:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nxdx+\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx+f(x)\cos nxdx\right]=0 \qquad (n=0,1,2,\ ...),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nxdx+\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx\right] \quad (n=1,2,\ ...).$$

Demak, toq $f(x)$ funksiyaning Furye koeffitsiyentlari

$$a_n=0, \quad (n=0,1,2,\ ...),$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \ (n=1,2,\ ...)$$

bo'lib, Furye qatori

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx$$

bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da berilgan bo'lsin. $[a,b]$ segment a_k nuqtalar yordamida bo'laklarga ajratilgan. $(a_0=a,\ a_n=b)$.

Agar har bir (a_k,a_{k+1}) $(k=0,1,2,...,n-1)$ da $f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lib, $x=a_k$ nuqtalarda chekli o'ng

$$f'(a_k+0) \quad (k=0,1,2,...,n-1),$$

va chap

$$f'(a_k-0) \quad (k=0,1,2,...,n)$$

hosilalarga ega bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da bo'lakli-differensiallanuvchi deyiladi.

Endi Furye qatorining yaqinlashuvchi bo'lishi haqidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema. *2π davrli $f(x)$ funksiya $[-\pi,\pi]$ oraliqda bo'lakli-differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiyaning Furye qatori $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ $[-\pi,\pi]$ da yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

ga teng bo'ladi.

2-misol. *Ushbu*

$$f(x)=\cos ax \quad (-\pi\le x\le\pi\ ,\ a\ne n\in Z)$$

funksiyaning Furye qatori topilsin va u yaqinlashishga tekshirilsin.

◄ Bu funksiyaning Furye koeffitsiyentlarini topamiz. Qaralayotgan funksiya juft bo'lgani uchun

$$b_n=0 \quad (n=1,2,3,\ ...)$$

bo'lib,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cos nx dx=\int_0^{\pi}\left[\cos(a-n)x+\cos(a+n)x\right]dx=$$

$$=\frac{\sin a\pi}{\pi}(-1)^n\left[\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a-n}\right]$$

bo'ladi. Demak,

$$f(x)\sim\frac{\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a-n}\right)\cos nx\right].$$

Agar $f(x)=\cos ax$ funksiya teoremaning shartlarini bajarishini e'tiborga olsak, unda

$$\cos ax=\frac{\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a-n}\right)\cos nx\right]$$

bo'lishini topamiz.▶

19.2. Juft va toq funksiyalar uchun Furye qatori

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx,\quad (n=1,2,\ldots)\qquad (19.3)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx.\quad (n=1,2,\ldots)$$

Bu sonlardan foydalanib, ushbu

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\qquad (19.4)$$

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[-\pi,\pi]$ da berilgan juft funksiya bo'lsin:

$$f(-x)=f(x).$$

U holda $f(x)\cdot\cos nx$ juft, $f(x)\cdot\sin nx$ toq $(n=1,2,3,\ldots)$ funksiya bo'ladi. (19.1) formulalardan foydalanib, $f(x)$ funksiyaning Furye koeffitsiyentlarini topamiz:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx dx+\int_0^{\pi}f(x)\cos nx dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}f(x)\cos nx dx+\int_0^{\pi}f(x)\cos nx dx\right]=$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx dx\quad (n=0,1,2,\ldots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin nx dx+\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx+\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx\right]=0\qquad (n=1,2,\ldots).$$

Demak, juft $f(x)$ funksiyaning Furye koeffitsiyentlari

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx dx\quad (n=0,1,2,\ldots)$$

$$b_n=0\quad (n=1,2,\ldots)$$

bo'lib, Furye qatori

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[-\pi,\pi]$ da berilgan toq funksiya bo'lsin:

$$f(-x)=-f(x).$$

U holda $f(x)\cdot\cos nx$ toq, $f(x)\cdot\sin nx$ juft $(n=1,2,3,\ldots)$ funksiya bo'ladi. (19.1) formulalardan foydalanib, $f(x)$ funksiyaning Furye koeffitsiyentlarini topamiz:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx dx+\int_0^{\pi}f(x)\cos nx dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\int_0^{\pi}f(x)\cos nx dx+f(x)\cos nx dx\right]=0\qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin nx dx+\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx\right]\quad (n=1,2,\ldots).$$

Demak, toq $f(x)$ funksiyaning Furye koeffitsiyentlari

$$a_n = 0, \quad (n = 0,1,2,\ldots),$$
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx, \ (n = 1,2,\ldots)$$

bo'lib, Furye qatori

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

bo'ladi.

3-misol. *Ushbu* $f(x) = x^2 \ (-\pi \le x \le \pi)$ *juft funksiyaning Furye qatori topilsin.*

◀ Avvalo berilgan funksiyaning Furye koeffitsiyentlarini topamiz:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2,$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi}x^2\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx =$$
$$= \frac{4}{\pi n}\left(\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx\right) = (-1)^n \cdot \frac{4}{n^2}, \ (n = 1,2,\ldots)$$

Demak, $f(x) = x^2$ funksiyaning Furye qatori $f(x) = x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$ bo'ladi. ▶

4-misol. *Ushbu* $f(x) = x \ (-\pi \le x \le \pi)$ *toq funksiyaning Furye qatori topilsin.*

◀Berilgan funksiyaning Furye koeffitsiyentlarini hisoblaymiz:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx\right) = \frac{2(-1)^{n-1}}{n}.$$

Demak, $f(x) = x$ funksiyaning Furye qatori $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin nx$ bo'ladi.▶

19.3. Fur'e integrali

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right] \quad (19.5)$$

bunda

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx; \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (19.6)$$

Agar $[-l, l]$ segmentda (3) qator bilan aniqlangan $f(x)$ funksiyani $f(l) = \frac{f(l-0) + f(l+0)}{2}$ shartning bajarilishini talab etib, uni $2l$ ga teng davr bilan davom ettirsak, funksiya o'zining butun davomida ham (3) qator bilan aniqlanadi.

$f(x)$ funksiya $(-\infty, \infty)$ oraliqda absolyut integrallanuvchi (ya'ni $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ yaqinlashadi) bo'lsa va har qanday chekli segmentda Dirixle shartlariga bo'ysunsa, u holda bu funksiya quyidagi Fur'e integrali bilan ifodaladi:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(x-t)dt = \int_0^{\infty}[a(\alpha)\cos\alpha x + b(\alpha)\sin\alpha x]d\alpha \quad (19.7)$$

bunda

$$a(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t dt \ \text{ va } \ b(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t dt \quad (19.8)$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $f(x) = \sin ax \quad (-\pi \le x \le \pi)$ *funksiyaning Furye qatori topilsin va u yaqinlashishga tekshirilsin.*

2. $f(x) = 2^{ax} \quad (-5 \le x \le 5)$ *funksiyaning Furye qatori topilsin va u yaqinlashishga tekshirilsin.*

3. $f(x) = x^2 + 2xa \quad (-\pi \le x \le \pi)$ *funksiyaning Furye qatori topilsin va u yaqinlashishga tekshirilsin.*

4. $f(x) = x^3 \ (-\pi \le x \le \pi)$ *toq funksiyaning Furye qatori topilsin.*

$f(x) = \tan(x) \ (-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2})$ *toq funksiyaning Furye qatori topilsin.*

5. $f(x) = 3^{ax} \ (-5 \le x \le 5)$ *funksiyaning Furye qatori topilsin va u yaqinlashishga tekshirilsin.*

6. $f(x) = x^3 - 5xa \quad (-e \le x \le e)$ *funksiyaning Furye qatori topilsin va u yaqinlashishga tekshirilsin.*

V BO'LIM. KO'P O'ZGARUVCHI FUNKSIYALAR

§ 20. Ikki argumentli funksiya aniqlanish sohasi, grafigi, limiti, uzluksizligi

Ixtiyoriy $x_1, x_2, x_3, , x_n$ haqiqiy sonlardan hosil qilingan $x=(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ vektorlardan tuzilgan n o'lchovli chiziqli fazoni qaraymiz va uni R^n kabi belgilaymiz. Bu fazodagi ikkita

$$x'=(x_1',x_2',\cdots,x_n'),\ x''=(x_1'',x_2'',\cdots,x_n'')$$

vektorlar uchun (x', x'') kabi belgilanadigan ***skalyar ko'paytma*** tushunchasini quyidagicha kiritamiz:

$$(x',x'')=x_1'x_1''+x_2'x_2''+\cdots+x_n'x_n'' \qquad (20.1)$$

1-ta'rif: *Ixtiyoriy ikkita vektorlari uchun (20.1) tenglik orqali skalyar ko'paytma kiritilgan R^n chiziqli fazo **n o'lchovli evklid fazo** deb ataladi.*

Kelgusida R^n evklid fazosiga tekislik va uch o'lchovli fazoga o'xshash geometrik talqin berish maqsadida unga tegishli har bir $x=(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ vektorni shu fazoning nuqtasi deb ataymiz va uni bitta M harfi bilan belgilaymiz. Bunda $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ sonlari M nuqtaning koordinatalari deb olinadi va bu tasdiq $M(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ ko'rinishda ifodalanadi.

Endi R^n evklid fazodagi ikkita

$$M'(x_1',x_2',\cdots,x_n'),\quad M''(x_1'',x_2'',\cdots,x_n'')$$

nuqtalar orasidagi masofa tushunchasini kiritamiz. Bu masofani $d(M',M'')$kabi belgilaymiz vaR^2 tekislik yoki R^3 fazodagi masofaga o'xshash tarzda quyidagicha kiritamiz:

$$d(M',M'')=\sqrt{(x_1'-x_1'')^2+(x_2'-x_2'')^2+\cdots+(x_n'-x_n'')^2}\ .$$

Bu tushunchani skalyar ko'paytma orqali $d^2(M_1, M_2)=(x'-x'', x'-x'')$ tenglik bilan ham kiritish mumkin.

2-ta'rif: *Agar n o'lchovli R^n evklid fazosidagi biror D to'plamdagi har bir $M(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ nuqtaga ma'lum bir qonun asosida qandaydir u haqiqiy son*

*mos qo'yilgan bo'lsa, unda u berilgan D to'plamda aniqlangan **n o'zgaruvchili funksiya** deb ataladi.*

$D\subset R^n$ to'plamda aniqlangan n o'zgaruvchili funksiya $u=f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ yoki qisqacha $u=f(M)$ kabi belgilanadi. Bunda $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ sonlari funksiyaning ***argumentlari*** deb yuritiladi.

3-ta'rif: *Berilgan n o'zgaruvchili $u=f(M)$ funksiya ma'noga ega bo'lgan R^n evklid fazosidagi barcha $M(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ nuqtalar to'plami funksiyaning **aniqlanish sohasi**, $u=f(M)$ funksiya qabul etadigan haqiqiy sonlar to'plami esa bu funksiyaning **qiymatlar to'plami** deyiladi.*

Funksiyaning aniqlanish sohasi D{*f*}, qiymatlar sohasi esa E{*f*} kabi belgilanadi.

Masalan, $u=\sqrt{r^2-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}$

funksiyaning D{*f*} aniqlanish sohasi R^n evklid fazosini

$$r^2-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2\ge 0 \Rightarrow x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\le r^2$$

shartni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamidan iborat bo'ladi. Bu to'plam, uch o'lchovli fazodagi sharga o'xshatib, R^n evklid fazosidagi markazi O(0,0,⋯,0) nuqtada joylashgan r radiusli ***n o'lchovli shar*** deb ataladi. Ko'rilayotgan funksiyaning qiymatlar sohasi E{*f*}=[0, *r*] kesmadan iborat bo'ladi.

Kelgusida soddalik uchun va olinadigan natijalarni geometrik talqinini berish maqsadida asosan ikki o'zgaruvchili funksiyalarni qarash bilan cheklanamiz. Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, bu xususiy $n=2$ holda olinadigan natijalar osonlik bilan $n>2$ holga umumlashtirilishi mumkin. Bundan tashqari yozuvlarni soddalashtirish va uch o'lchovli fazodagi (kelgusida uni qisqacha fazo deb yuritamiz) nuqta koordinatalariga moslashtirish maqsadida ikki o'zgaruvchili funksiyani z, uning argumentlarini esa x va y kabi belgilaymiz. Shunday qilib, umumiy holda ikki o'zgaruvchili funksiya $z=f(x,y)$, $z=g(x,y)$ va hokazo ko'rinishda yoziladi. Masalan,

$$z=f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2},\quad z=g(x,y)=3x+5y-1,\quad z=h(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$$

ikki o'zgaruvchili funksiyalar bo'ladi.

Ikki o'zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyaning D{f} aniqlanish sohasi tekislikdagi $M(x,y)$ nuqtalardan tashkil topganligi uchun u tekislik yoki undagi biror sohadan iborat bo'ladi. Masalan, yuqorida keltirilgan funksiyalar uchun D{f} markazi O(0,0) koordinata boshida joylashgan va radiusi $r=1$ bo'lgan birlik doiradan, D{g} butun tekislikdan (D{g}=R^2), D{h}= R^2–{O}, ya'ni tekislikning koordinata boshidan tashqari barcha nuqtalaridan iboratdir.

Ikki o'zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyani geometrik mazmuni uning grafigi tushunchasidan kelib chiqadi. Bu tushunchani kiritish uchun fazoda XYZ to'g'ri burchakli Dekart koordinatalari sistemasini olamiz. XOY koordinata tekisligida funksiyaning D{f} aniqlanish sohasini qaraymiz va uning har bir $M(x,y)$ nuqtasidan XOY koordinata tekisligiga perpendikular o'tkazamiz. Bu perpendikularga funksiyaning $z= f(x,y)$ qiymatini qo'yamiz. Natijada fazoda koordinatalari $(x, y, f(x,y))$ bo'lgan P nuqtani hosil qilamiz.

4-ta'rif: $z=f(x,y)$ funksiyaning ***grafigi*** deb fazodagi

$$P(x, y, z)=P(x, y, f(x,y))= P(x, y, f(M)),\ M=M(x,y)\in D\{f\},$$

nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladi.

Umuman olganda ikki o'zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyaning grafigi fazodagi biror sirtdan iborat bo'ladi va shu sababli $z=f(x,y)$ fazodagi ***sirt tenglamasi*** deb ham ataladi. Ammo yuqoridagi $z=h(x,y)$ funksiya grafigini to'g'ridan-to'g'ri tasavvur etish oson emas. Bunday hollarda funksiyaning sath chiziqlari tushunchasidan foydalanish mumkin.

5-ta'rif: *$z=f(x,y)$ funksiyaning qiymatlari biror o'zgarmas C soniga teng bo'ladigan XOY koordinata tekisligidagi nuqtalar to'plamidan iborat chiziq funksiyaning **sath chizig'i**, C soni esa **sath** deb ataladi.*

Ta'rifdan ko'rinadiki, $z=f(x,y)$ funksiyaning C sathli sath chizig'i tenglamasi $f(x,y)=C$ bo'lgan chiziqdan iborat bo'ladi. Ko'p hollarda sath chiziqlarini chizish osonroq bo'lib, ular asosida $z=f(x,y)$ funksiya grafigi haqida tasavvur hosil qilish mumkin bo'ladi. Masalan, $z=h(x,y)$ funksiyaning sath chiziqlarini topamiz:

$$z=h(x,y)=C\Rightarrow\frac{1}{x^2+y^2}=C(C>0)\Rightarrow x^2+y^2=\frac{1}{C}=r^2,\ r=\sqrt{\frac{1}{C}}$$

Bu yerdan ko'rinadiki, bu funksiyaning barcha sath chiziqlari markazi koordinata boshida joylashgan aylanalardan iborat. Bu aylanalarning radiuslari C sath oshgan sari kichrayib boradi. Demak, bu funksiyaning grafigi "asosi" XOY tekislikka yaqinlashgan sari ($z\to 0$) radiusi cheksiz kattalashib boradigan, "uchi" esa OZ o'qi bo'yicha yuqoriga chiqqan sari radiusi cheksiz kamayib boradigan aylanalardan iborat (teleminoraga o'xshash) aylanma sirt kabi bo'ladi. Sath chiziqlaridan tashqari $z=f(x,y)$ funksiya grafigi haqida tasavvur hosil qilish uchun uni XOZ yoki YOZ koordinata tekisliklariga parallel bo'lgan $y=y_0$ yoki $x=x_0$ tekisliklar bilan kesishdan hosil bo'ladigan $z=f(x,y_0)$ yoki $z=f(x_0,y)$ chiziqlardan ham foydalanish mumkin. Masalan, biz ko'rib o'tgan $z=h(x,y)$ funksiya uchun bu chiziqlar

$$z=h(x,y_0)=\frac{1}{x^2+y_0^2},\quad z=h(x_0,y)=\frac{1}{x_0^2+y^2}$$

tenglamali egri chiziqlardan iboratdir.

20.1. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning limiti

Bir o'zgaruvchili $y=f(x)$ funksiyalar nazariyasida limit tushunchasi muhim ahamiyatga ega ekanligini ko'rib o'tgan edik. Shu sababli bu tushunchani ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun ham kiritish maqsadga muvofiqdir.

6-ta'rif: Berilgan $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning ***r radiusli atrofi*** deb tekislikdagi

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan $M(x,y)$ nuqtalar to'plamiga aytiladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning r radiusli atrofi markazi shu nuqtada joylashgan va radiusi r bo'lgan ochiq doiradan [uni $U_r(x_0,y_0)$ kabi belgilaymiz] iborat bo'ladi. Demak, $M(x,y)\in U_r(x_0,y_0)$ bo'lishi uchun undan $M_0(x_0,y_0)$ nuqtagacha masofa $d(M,M_0)<r$ shartni qanoatlantirishi kerak.

7-ta'rif: Biror chekli A soni $|f(x,y)-A|<\varepsilon$

ikki o'zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyaning uning argumentlari $x\to x_0$, $y\to y_0$ (yoki $M(x,y)\to M_0(x_0,y_0)$) bo'lgandagi ***limiti*** deb aytiladi, agar har qanday kichik $\varepsilon>0$ soni uchun unga bog'liq shunday $r(\varepsilon)=r>0$ son topilsaki, $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning $r=r(\varepsilon)$ radiusli atrofiga tegishli bo'lgan barcha $M(x,y)\neq M_0(x_0,y_0)$ nuqtalar uchun tengsizlik bajarilsadi.

Ikki o'zgaruvchili $f(x,y)$ funksiyaning $x\to x_0$, $y\to y_0$ holdagi limiti

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \quad \text{yoki} \quad \lim_{M\to M_0} f(M)=A$$

kabi belgilanadi.

Masalan,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{1-\sqrt{x^2+y^2+1}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2+y^2)(1+\sqrt{x^2+y^2+1})}{(1-\sqrt{x^2+y^2+1})(1+\sqrt{x^2+y^2+1})}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2+y^2)(1+\sqrt{x^2+y^2+1})}{-(x^2+y^2)}=-\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+\sqrt{x^2+y^2+1})=-2.$$

Ikki o'zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiya uchun $M(x,y)\to M_0(x_0,y_0)$ bo'lganda A limitni mavjud bo'lishi va uni hisoblash masalasi bir o'zgaruvchili funksiya holiga nisbatan ancha murakkab bo'ladi. Bunga sabab shuki to'g'ri chiziqda $x\to x_0$ intilish faqat ikki yo'nalishda, o'ng va chap tomondan bo'lishi mumkin. Tekislikda esa $M(x,y)\to M_0(x_0,y_0)$ intilish cheksiz ko'p yo'nalishda amalga oshirilishi mumkin va bularning har birida $z=f(x,y)$ funksiya bir xil A soniga yaqinlashib borishi kerak. Buni bir necha misollarda ko'ramiz.

Misol. $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ funksiyaning $x\to 0$, $y\to 0$ holda limiti qanday bo'lishini tekshiramiz. Bunda $y=kx$ deb olsak

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0.$$

Demak, O(0,0) nuqtaga ixtiyoriy to'g'ri chiziqlar bo'yicha yaqinlashganimizda limit qiymati bir xil va nolga teng. Ammo hali bundan berilgan limit mavjud va uning qiymati nol deya olmaymiz, chunki bu natija ixtiyoriy yo'nalish bo'yicha bir xil bo'lishi kerak.

Yuqorida 7-ta'rif orqali aniqlangan limitda funksiyaning ikkala argumenti x va y bir paytda x_0 va y_0 sonlariga intiladi deb olamiz va bunda

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

karrali limit deb yuritiladi. Ammo bu yerda x yoki y argumentlarni u yoki bu tartibda x_0 yoki y_0 sonlariga ketma-ket yaqinlashtirib,

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=A_1, \quad \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=A_2$$

limitlarni ham hosil etish mumkin. Bular ***takroriy limitlar*** deb ataladi va ularni hisoblash osonroq.

Misol. $f(x,y)=3x+5xy-y^2$ funksiyaning $x\to 2$, $y\to -3$ holdagi takroriy limitlarini qaraymiz :

$$\lim_{x\to 2}\lim_{y\to -3} f(x,y)=\lim_{x\to 2}\lim_{y\to -3}(3x+5xy-y^2)=\lim_{x\to 2}(3x-15x-9)=-33=A_1,$$

$$\lim_{y\to -3}\lim_{x\to 2} f(x,y)=\lim_{y\to -3}\lim_{x\to 2}(3x+5xy-y^2)=\lim_{y\to -3}(6+10y-y^2)=-33=A_2$$

Demak, bu funksiya uchun ikkala takroriy limit mavjud va ular o'zaro teng.

Misol. Ushbu funksiyaning $x\to 0$, $y\to 0$ holdagi takroriy limitlarini hisoblaymiz:

$$f(x,y)=\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}.$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{x}=\lim_{x\to 0}(1+x)=1=A_1$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y+y^2}{y}=-1=A_2.$$

Demak, bu funksiya uchun ikkala takroriy limit mavjud, ammo ular o'zaro teng emas.

Yuqoridagi misollardan ko'rinadiki takroriy limitlar doimo o'zaro teng bo'lishi shart emas ekan. Bundan tashqari karrali va takroriy limitlar orasida qanday munosabat mavjudligini ham umumiy holda aytib bo'lmaydi. Bunday hollarda quyidagi teoremadan foydalanish mumkin.

1-teorema: Berilgan $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning biror $U_r(x_0,y_0)$ atrofida aniqlangan va karrali limit

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

mavjud bo'lsin. Agar ixtiyoriy $M(x,y)\in U_r(x_0,y_0)$ uchun

$$\varphi(y)=\lim_{x\to x_0} f(x,y),\quad \psi(x)=\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

oddiy limitlar mavjud bo'lsa, unda ikkala takroriy limit

$$A_1=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\psi(x),\quad A_2=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\varphi(y)$$

mavjud va $A_1=A_2=A$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu teoremani isbotsiz qabul etamiz.

Ammo takroriy limitlar mavjudligi va ularning o'zaro tengligidan karrali limitning mavjudligi va $A_1=A_2=A$ tenglik o'rinli bo'lishi kelib chiqmaydi. Masalan, yuqorida ko'rilgan 2-misolda $A_1=A_2=0$, ammo karrali limit mavjud emas.

Ikki o'zgaruvchili funksiyaning limiti uchun bir o'zgaruvchili funksiya limitining oldin ko'rib o'tilgan barcha xossalari (VII bob, §3, asosiy teorema) saqlanib qolishini ushbu teorema ko'rsatadi.

2-teorema: Agar $z=f(x,y)$ va $z=g(x,y)$ funksiyalarning ikkalasi ham $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning biror $U_r(x_0,y_0)$ atrofida aniqlangan va ularning karrali limitlari

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)=B$$

mavjud bo'lsa, unda quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} C=C\quad (C-const.),\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} Cf(x,y)=C\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=CA\,,$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}[f(x,y)\pm g(x,y)]=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)\pm\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)=A\pm B\,,$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}[f(x,y)\cdot g(x,y)]=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)\cdot\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)=AB\,,$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)}=\frac{A}{B}\quad (\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)=B\neq 0).$$

Bu teorema yuqorida eslatilgan teorema singari isbotlanadi va shu sababli uning ustida to'xtalib o'tirmaymiz.

Ikki o'zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyaning karrali limiti ta'rifini $x\to\pm\infty$, $y\to\pm\infty$ yoki $A=\pm\infty$ hollar uchun ham berish mumkin, ammo ular ustida to'xtalib o'tirmaymiz.

20.2. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi

Bir o'zgaruvchili $y=f(x)$ funksiyalar uchun limit tushunchasi kiritilgach, uning yordamida funksiyaning uzluksizlik ta'rifi berilgan edi. Bu tushunchani ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun ham kiritish mumkin.

8-ta'rif: $M_0(x_0,y_0)$ nuqta $z=f(x,y)$ funksiyaning $D\{f\}$ aniqlanish sohasidagi biror nuqta bo'lib, o'zgaruvchi $M(x,y)$ nuqta funksiyaning aniqlanish sohasida qolgan holda $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaga ixtiyoriy usulda intilganda ($M\to M_0$ bo'lganda)

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)\ \text{yoki}\ \lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)\quad (20.2)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada ***uzluksiz*** deyiladi. Bu holda $M_0(x_0,y_0)$ funksiyaning ***uzluksizlik nuqtasi*** deyiladi. Biror D sohaning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lgan funksiya shu ***sohada uzluksiz*** deyiladi.

Masalan, $f(x,y)=2x^2+3xy-5y^2$ funksiya tekislikdagi barcha nuqtalarda aniqlangan va ularning har birida uzluksizdir. Demak, bu funksiya butun tekislikda uzluksiz.

Endi $z=f(x,y)$ funksiyaning $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada uzluksizligini boshqa bir ta'rifini keltiramiz. Agar $M(x,y)$ o'zgaruvchi nuqta bo'lsa, unda $\Delta x=x-x_0$ va $\Delta y=y-y_0$ ayirmalar mos ravishda x va y argumentlarning o'zgarishlarini ifodalaydi hamda

argument orttirmalari deyiladi. Bu holda $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$ deb yozish mumkin. Bunda $z=f(x,y)$ funksiyaning o'zgarishi

$$\Delta z= \Delta f=f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0) \quad (20.3)$$

ayirma orqali aniqlanadi va u funksiyaning ***to'la orttirmasi*** deb ataladi. Orttirmalar tilida (20.3) tenglikdagi $x\to x_0$, $y\to y_0$ munosabatlardan $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ ekanligi kelib chiqadi. Shu sababli (20.3) tenglikni

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta f=0 \qquad (20.4)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. Bu $z=f(x,y)$ funksiya uzluksizligini orttirmalar tilidagi ifodasidir. Undan uzluksiz funksiyada x va y argumentlar qanchalik kichik o'zgarishga ega bo'lsa, funksiya ham shunchalik kichik o'zgarishga ega bo'lishi kelib chiqadi. Amaliy masalalarda $z=f(x,y)$ funksiya uzluksizligini (20.4) tenglik bilan aniqlash osonroq bo'ladi.

Ikki o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi ta'rifini ifodalovchi (20.4) tenglikdan va limit xossalarini ifodalovchi 2-teoremadan bevosita quyidagi teorema kelib chiqadi.

3-teorema: Agar $f(x,y)$ va $g(x,y)$ funksiyalar $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, unda shu nuqtada $Cf(x,y)$ (C-const.), $f(x,y)\pm g(x,y)$, $f(x,y)\cdot g(x,y)$ va $g(x,y)\neq 0$ qo'shimcha shartda $f(x,y)/g(x,y)$ funksiyalar ham uzluksiz bo'ladi.

Bu teoremadan foydalanib murakkabroq ko'rinishdagi funksiya uzluksizligini tekshirish masalasini soddaroq ko'rinishdagi funksiyalarning uzluksizligini tekshirish masalasiga keltirish mumkin. Masalan,

$$z=\frac{2x^3+3x^2y^2-y^3}{x^4+x^2y^2+y^4+1}=\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

funksiyada $f(x,y)$ va $g(x,y)$ tekislikdagi barcha nuqtalarda uzluksiz, $g(x,y)\neq 0$ (hatto $g(x,y)\geq 1$) ekanligidan uni butun tekislikda uzluksizligi teoremadan kelib chiqadi.

Yuqoridagi 8-ta'rifda ikki o'zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyaning ikkala x va y argumentlari bo'yicha uzluksizligi qaralgan edi. Bu yerda funksiyaning alohida har bir argumenti bo'yicha uzluksizligini qarash mumkin. Buning uchun dastlab funksiyaning xususiy orttirmasi tushunchasini kiritamiz.

9-ta'rif: Berilgan $z=f(x,y)$ funksiya uchun argumentlarning Δx va Δy orttirmalarida

$$\Delta_x f=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),\quad \Delta_y f=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$
(20.5)

ayirmalar mos ravishda funksiyaning x va y argumentlari bo'yicha $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadagi ***xususiy orttimalari*** deb ataladi.

(20.5) tenglik bilan aniqlangan Δf orttirma funksiyaning ikkala x va y argumentlari bo'yicha o'zgarishini ifodalaydi va shu sababli to'la orttirma deyiladi. (20.5) tenglik bilan aniqlangan $\Delta_x f$ yoki $\Delta_y f$ orttirmalar esa funksiyaning faqat x (bunda y o'zgarmas) yoki y argumenti bo'yicha (bunda x o'zgarmas) o'zgarishini ifodalaydi va shu sababli xususiy orttirma deyiladi.

10-ta'rif: Berilgan $z=f(x,y)$ funksiya uchun $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta_x f=0 \quad \text{yoki} \quad \lim_{\Delta y\to 0}\Delta_y f=0 \quad (20.6)$$

tengliklar bajarilsa, unda bu funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada ***x yoki y argumenti bo'yicha uzluksiz*** deyiladi .

Masalan, yuqorida ko'rilgan $f(x,y)=x^2+3xy-4y$ funksiya uchun ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtada (20.6) shartlar bajariladi. Demak, bu funksiya butun tekislikda x va y argumentlari bo'yicha uzluksizdir.

Agar $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada ikkala argumentlari bo'yicha uzluksiz bo'lsa, unda bu nuqtada har bir argumenti bo'yicha ham uzluksiz bo'ladi, chunki (20.4) tenglikdan (20.6) tengliklar xususiy hol sifatida kelib chiqadi. Ammo teskari tasdiq o'rinli bo'lishi shart emas. Masalan,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases} \qquad (20.7)$$

funksiyani O(0,0) nuqtada uzluksizlikka tekshiramiz. Bunda

$$\Delta_x f=f(0+\Delta x,0)-f(0,0)=f(\Delta x,0)=\frac{\Delta x\cdot 0}{(\Delta x)^2+0^2}=0\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\Delta_x f=0,$$

$$\Delta_y f=f(0,0+\Delta y)-f(0,0)=f(0,\Delta y)=\frac{0\cdot \Delta y}{0^2+(\Delta y)^2}=0\Rightarrow \lim_{\Delta y\to 0}\Delta_y f=0.$$

Demak, bu funksiya O(0,0) nuqtada x va y argumentlari bo'yicha uzluksiz. Ammo $y=kx$ ($k\neq0$)) deb olsak, unda

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2}=\lim_{x\to0}\frac{k}{1+k^2}=\frac{k}{1+k^2}\neq0=f(0,0)$$

Demak, bu funksiya O(0,0) nuqtada ikkala x va y argumentlari bo'yicha uzluksiz emas.

11-ta'rif: *Agar biror $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada (2) tenglik bajarilmasa, bu nuqtada berilgan $z=f(x,y)$ funksiya* ***uzlukli****, $M_0(x_0,y_0)$ esa funksiyaning* ***uzilish nuqtasi*** *deyiladi.*

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $f(x,y)=\dfrac{x+y^2}{x^2+y}$ $\quad x\to2, y\to3 \quad f(x)\to?$

2. $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2y}$ $\quad x\to2, y\to3 \quad f(x)\to?$

3. $f(x,y)=\dfrac{x^2-e^y}{xy}$ $\quad x\to1, y\to0 \quad f(x)\to?$

4. $f(x,y)=\dfrac{\cos x}{\sin y}$ $\quad x\to\dfrac{\pi}{2}, y\to\pi \quad f(x)\to?$

5. $f(x,y)=\dfrac{\tan x}{ctgx}$ $\quad x\to\pi, y\to\dfrac{\pi}{2} \quad f(x)\to?$

6. $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ $\quad x\to4, y\to2 \quad f(x)\to?$

7. $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2-y^2}$ $\quad x\to5, y\to4 \quad f(x)\to?$

§.21. Birinchi va ikkinchi tartibli xususiy hosilalar. To'la differensial, taqribiy hisoblash. Ikkinchi tartibli hosila va differensial

Bir o'zgaruvchili funksiyaning hosilasi Δf funksiya orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbatining $\Delta x\to0$ bo'lgandagi limiti kabi aniqlanishini

eslatib o'tamiz. Ikki o'zgaruvchili funksiya uchun ham hosila tushunchasini shunday tarzda kiritamiz.

Berilgan $z=f(x,y)$ funksiya biror D sohada aniqlangan va $M(x,y)$ shu sohaning ichki nuqtasi bo'lsin. Bu nuqtaning x abssissasiga Δx orttirma berib, ordinatani o'zgartirmay qoldiramiz. Bunda hosil bo'ladigan $N(x+\Delta x,y)$ nuqta ham D sohaga tegishli deb hisoblaymiz. Bu holda $z=f(x,y)$ funksiyaning o'zgarishi

$$\Delta_x f=f(x+\Delta x,y)-f(x,y),$$

ya'ni x argument bo'yicha xususiy orttirma orqali ifodalanadi.

1-ta'rif: *Agar $z=f(x,y)$ funksiyaning x bo'yicha $\Delta_x f$ xususiy orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbati $\Delta x\to0$ bo'lganda chekli limitga ega bo'lsa, bu limit qiymati funksiyaning* ***x bo'yicha xususiy hosilasi*** *deb ataladi.*

Bu hosila

$$z'_x,\quad f'_x,\quad f'_x(x,y),\quad \frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial x}$$

kabi belgilardan biri bilan belgilanadi. Bunda indeks yoki maxrajdagi x belgi hosila x argument bo'yicha olinayotganligini ifodalaydi. Ta'rifga ko'ra

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta_x f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} \qquad (21.1)$$

Bu yerda $\Delta_x f$ xususiy orttirma faqat x hisobiga o'zgarib, unda y o'zgarmas bo'ladi. Shu sababli f'_x xususiy hosila bir x o'zgaruvchili funksiyaning hosilasi singari aniqlanadi. Bundan $z=f(x,y)$ funksiyaning x bo'yicha xususiy hosilasini hisoblashda ikkinchi y o'zgaruvchinio'zgarmas son kabi qarash kerakligi va oldin ko'rib o'tilgan hosilalar jadvali hamda differensiallash qoidalaridan foydalanish mumkinligi kelib chiqadi.

Masalan,

$$f(x,y)=3x^2\sin y+5xy+y^2 \Rightarrow f'_x(x,y)=(3x^2\sin y+5xy+y^2)'_x=$$
$$=(3x^2\sin y)'_x+(5xy)'_x+(y^2)'_x=3\sin y(x^2)'_x+5y(x)'_x+(y^2)'_x=6x\sin y+5y$$

Xuddi shunday tarzda $z=f(x,y)$ funksiyaning

$$z'_y,\quad f'_y,\quad f'_y(x,y),\quad \frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

kabi belgilanadigan y bo'yicha xususiy hosilasi kiritiladi:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} \qquad (21.2)$$

Yuqoridagi misolda x o'zgaruvchini o'zgarmas deb qarab, y bo'yicha xususiy hosilani hisoblaymiz:

$$f'_y(x,y)=(3x^2\sin y+5xy+y^2)'_y=(3x^2\sin y)'_y+(5xy)'_y+(y^2)'_y=$$

$$=3x^2(\sin y)'_y+5x(y)'_y+(y^2)'_y=3x^2\cos y+5x+2y$$

Yana bir misol sifatida

$$f(x,y)=\text{arctg}xy^2$$

funksiyaning xususiy hosilalarini hisoblaymiz:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\text{arctg}xy^2)=\frac{1}{1+(xy^2)^2}\frac{\partial}{\partial x}(xy^2)=\frac{y^2}{1+x^2y^4},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\text{arctg}xy^2)=\frac{1}{1+(xy^2)^2}\frac{\partial}{\partial y}(xy^2)=\frac{2xy}{1+x^2y^4}.$$

Berilgan $z=f(x,y)$ funksiyaning

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}$$

xususiy hosilalari mavjud bo'lsin. Bu holda ular x vay o'zgaruvchilarning funksiyalari bo'ladi va shuning uchun ulardan yana xususiy hosilalar olish mumkin. Agar bu xususiy hosilalar mavjud bo'lsa, unda

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{xx},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{yy}$$

$z=f(x,y)$ funksiyaning x vay argumentlari bo'yicha ***II tartibli xususiy hosilalari***,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f''_{xy},\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f''_{yx}$$

esa $z=f(x,y)$ funksiyaning ***II tartibli aralash hosilalari*** deyiladi. Shunday qilib jami 4 ta II tartibli hosilalarga ega bo'lamiz.

Masalan, $z=3x^2y+5x-3y+4$ funksiyaning I tartibli xususiy hosilalari

$$f'_x=(3x^2y+5x-3y+4)'_x=6xy+5,\quad f'_y=(3x^2y+5x-3y+4)'_y=3x^2-3,$$

bo'lgani uchun uning II tartibli hosilalari quyidagicha bo'ladi:

$$f''_{xx}=(f'_x)'_x=(6xy+5)'_x=6y,\quad f''_{yy}=(f'_y)'_y=(3x^2-3)'_y=0,$$

$$f''_{xy}=(f'_x)'_y=(6xy+5)'_y=6x,\quad f''_{yx}=(f'_y)'_x=(3x^2-3)'_x=6x.$$

Yana bir misol sifatida yuqorida ko'rib o'tilgan $f(x,y)=\text{arctg}(xy^2)$ funksiyaning II tartibli hosilalarini topamiz:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2}{1+x^2y^4}\right)=-\frac{2xy^6}{(1+x^2y^4)^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2xy}{1+x^2y^4}\right)=\frac{2x-6x^3y^4}{(1+x^2y^4)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{1+x^2y^4}\right)=\frac{2y-2x^2y^5}{(1+x^2y^4)^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2xy}{1+x^2y^4}\right)=\frac{2y-2x^2y^5}{(1+x^2y^4)^2}.$$

Bu misollarda II tartibli aralash hosilalar o'zaro teng, ya'ni $f''_{xy}=f''_{yx}$ ekanligini ko'ramiz. Ammo bu tenglik barcha funksiyalar uchun o'rinli bo'lishi shart emas. Masalan, ushbu funksiyani qaraymiz:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}xy, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

Bu funksiyani x bo'yicha xususiy hosilasini hisoblab, quyidagi natijani olamiz:

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

Bu yerda $x=0$ deb,

$$f'_x(0,y)=-y\Rightarrow f''_{xy}(0,y)=-1\Rightarrow f''_{xy}(0,0)=-1$$

natijaga kelamiz. Xuddi shunday tarzda $f''_{yx}(0,0)=1$ ekanligini ko'rish mumkin. Demak, bu funksiya uchun O(0,0) nuqtada II tartibli aralash hosilalar o'zaro teng emas.

Ammo ma'lum bir shartlarni qanoatlantiradigan funksiyalar uchun yuqoridagi misollarda ko'rilgan aralash hosilalar tengligi o'rinli bo'ladi.

1-teorema: *Agar $z=f(x,y)$ funksiya va uning f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} hosilalari $M(x,y)$ nuqta va uning biror atrofida aniqlangan, bu nuqtada II tartibli f''_{xy}, f''_{yx} aralash hosilalar uzluksiz bo'lsa, unda aralash hosilalar bu nuqtada o'zaro teng, ya'ni $f''_{xy}=f''_{yx}$ bo'ladi.*

Bu teorema ***aralash hosilalar haqidagi teorema*** deb ataladi va uni isbotsiz qabul qilamiz.

21.1. Ikki o'zgaruvchili funksiya differensiallari va ularning tatbiqlari

Oldin $z=f(x,y)$ funksiyaning aniqlanish sohasidagi biror $M(x,y)$ nuqtadagi to'la orttirmasini eslaymiz (§1, (3) ga qarang):

$$\Delta z=\Delta f=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y).$$

4-ta'rif: *Agar $z=f(x,y)$ funksiyaning berilgan $M(x,y)$ nuqtadagi to'la orttirmasi*

$$\Delta f=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y \qquad (21.3)$$

*ko'rinishda ifodalanib, unda $A=A(x,y)$ va $B=B(x,y)$ argumentlarning Δx va Δy orttirmalariga bog'liq bo'lmagan sonlar, αvaβesa $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ holda cheksiz kichik miqdorlar bo'lsa, unda bu funksiya $M(x,y)$ nuqtada **differensiallanuvchi** deb ataladi.* To'la orttirmaning Δx va Δy orttirmalariga nisbatan bosh, chiziqli qismi $A\Delta x+B\Delta y$ funksiyaning ***differensiali*** deyiladi.

$z=f(x,y)$ funksiyaning differensiali df yoki $df(x,y)$ kabi belgilanadi va, ta'rifga asosan, (21.5) tenglikdan

$$df=A\Delta x+B\Delta y \qquad (21.4)$$

formula orqali topiladi.

Misol sifatida $f(x,y)=x^2+xy+3y$ funksiyaning differensiallanuvchi ekanligini ta'rif bo'yicha tekshiramiz. Buning uchun dastlab funksiyaning to'la orttirmasini topamiz:

$$\Delta f=[(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)(y+\Delta y)+3(y+\Delta y)]-[x^2+xy+3y]=$$

$$=2x\Delta x+(\Delta x)^2+x\Delta y+y\Delta x+\Delta x\Delta y+3\Delta y=(2x+y)\Delta x+(x+3)\Delta y+\Delta x\Delta x+\Delta x\Delta y.$$

Bu tenglikni (21.) bilan taqqoslab, $A=2x+y$, $B=x+3$, $\alpha=\Delta x$, $\beta=\Delta x$ ekanligini ko'ramiz. Bunda 4-ta'rifdagi barcha shartlar bajarilmoqda va shu sababli bu funksiya tekislikdagi ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtada differensiallanuvchi va uning differensiali, (21.6) tenglikka asosan, quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$df=(2x+y)\Delta x+(x+3)\Delta y.$$

Ammo funksiyani differensiallanuvchi ekanligini har doim ham uning ta'rifi asosida tekshirish oson bo'lmaydi. Shu sababli bu savolga umumiy holda javob topish masalasi paydo bo'ladi. Bu masala quyidagi teoremada o'z yechimini topadi.

2-teorema: *Agar $z=f(x,y)$ funksiyaning f'_x, f'_y xususiy hosilalari $M(x,y)$ nuqta va uning biror atrofida aniqlangan hamda uzluksiz bo'lsa, unda funksiya bu nuqtada differensiallanuvchi va uning differensiali*

$$df=f'_x\Delta x+f'_y\Delta y=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \qquad (21.5)$$

formula bilan aniqlanadi.

Isbot: $z=f(x,y)$ funksiyaning $M(x,y)$ nuqtadagi to'la orttirmasini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\Delta f=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)=[f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)]+[f(x, y+\Delta y)-f(x,y)]$$

Bu yerda kvadrat qavs ichidagi ayirmalar bir o'zgaruvchili funksiyaning orttirmalarini ifodalaydi. I qavsdagi bir o'zgaruvchili funksiya $f(x,y+\Delta y)$ ko'rinishda bo'lib, uning argumenti $[x, x+\Delta x]$ kesmada o'zgaradi. Teorema shartiga ko'ra $f(x,y+\Delta y)$ funksiya bu kesmada f'_x hosilaga ega. Unda I qavsdagi orttirmaga Lagranj teoremasini qo'llash mumkin:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)=\frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x}\Delta x, \quad x<\bar{x}<x+\Delta x \quad (21.6)$$

Xuddi shunday tarzda

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}\Delta y,\quad y<\bar{y}<y+\Delta y \qquad (21.7)$$

tenglikni hosil qilamiz. Teorema shartiga ko'ra xususiy hosilalar uzluksiz va $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0\Rightarrow \bar{x}\to x,\bar{y}\to y$ bo'lgani uchun

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\partial f(\bar{x},y+\Delta y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Bu tengliklardan, limit xossasiga asosan quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$\frac{\partial f(\bar{x},y+\Delta y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\gamma_1,\quad \frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\gamma_2 \qquad (21.8)$$

Bu yerda γ_1 va γ_2 $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ bo'lganda cheksiz kichik miqdorlar bo'ladi.

Endi (21.5) tenglikka dastlab (21.6)-(21.7), so'ngra ular o'rniga (21.8) tengliklarni qo'yib, funksiyaning to'la orttirmasini ushbu ko'rinishga keltiramiz:

$$\Delta f=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y \qquad (21.9)$$

Bu yerdan, (21.5) natijani (21.6) tenglik bilan taqqoslab, $z=f(x,y)$ funksiya $M(x,y)$ nuqtada differensiallanuvchi va uning differensiali uchun (21.9) formula o'rinli ekanligini ko'ramiz. Teorema to'la isbotlandi.

Masalan, yuqorida ko'rib o'tilgan $f(x,y)=x^2+xy+3y$ funksiyaning differensialini endi (21.7) formula bo'yicha topamiz:

$$df=(x^2+xy+3y)'_x\Delta x+(x^2+xy+3y)'_y\Delta y=(2x+y)\Delta x+(x+3)\Delta y.$$

Bu oldin olingan natijani ifodalaydi, ammo unga ancha oson erishildi.

Endi xususiy $f(x,y)=x$ holda funksiya differensialini (21.9) formula orqali topamiz:

$$dx=df=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y=1\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y=\Delta x.$$

Xuddi shunday ravishda $f(x,y)=y$ holda $dy=\Delta y$ ekanligini ko'ramiz. Shu sababli funksiya differensiali uchun (21.9) formulani ushbu ko'rinishda yozish mumkin:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad (21.10)$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi qo'shiluvchilar $z=f(x,y)$ funksiyaning mos ravishda x va y bo'yicha ***xususiy differensiallari*** deyiladi va $d_x f$, $d_y f$ kabi belgilanadi. Bu holda *df* ***to'la differensial*** deb yuritiladi.

Izoh: Bir o'zgaruvchili $y=f(x)$ funksiya $M(x)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun uning shu nuqtada faqat $f'(x)$ hosilasi mavjudligi talab qilinib, uning uzluksizligi talab etilmas edi. Ikki o'zgaruvchili funksiya uchun esa uning xususiy hosilalarini mavjudligi differensiallanuvchi bo'lishi uchun yetarli emas.

Masalan,

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & x=0 \text{ yoki } y=0,\\ 1, & x\neq 0 \text{ va } y\neq 0\end{cases}$$

funksiya uchun $f(x,0)=0$ va $f(0,y)=0$ bo'lgani uchun O(0,0) nuqtada uning xususiy hosilalari mavjud va $f'_x(0,0)=0$, $f'_y(0,0)=0$. Ammo O(0,0) nuqtada bu funksiya to'la orttirmasini (5) ko'rinishda yozib bo'lmaydi. Haqiqatan ham, ixtiyoriy $\Delta x\neq 0$, $\Delta y\neq 0$ uchun $\Delta f=f(0+\Delta x,\ 0+\Delta y)-f(0,0)=1-0=1$, ya'ni $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ bo'lganda cheksiz kichik miqdor emas. Demak, O(0,0) nuqtada bu funksiyaning xususiy hosilalari mavjud, ammo differensiallanuvchi emas.

Natija: Agar $z=f(x,y)$ funksiyaning f'_x, f'_y xususiy hosilalari $M(x,y)$ nuqta va uning biror atrofida aniqlangan hamda uzluksiz bo'lsa, unda bu funksiya $M(x,y)$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Haqiqatan ham bu shartlarda funksiya $M(x,y)$ nuqtada differensiallanuvchi va shu sababli uzluksiz bo'ladi.

Endi to'la differensialning tatbig'iga doir bir masalani qaraymiz. Buning uchun yuqoridagi (21.10) tenglikda $z=f(x,y)$ funksiyaning Δx va Δy argument orttirmalari kichik sonlardan iborat deb olamiz. Bu holda bu tenglikda $\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y$

qo'shiluvchi ham kichik son bo'ladi. Shu sababli (21.10) tenglikda bu qo'shiluvchini hisobga olmasak, undan quyidagi taqribiy tengliklar kelib chiqadi:

$$\Delta f \approx df \Rightarrow f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy \Rightarrow$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y. \quad (21.11)$$

Bu formuladan foydalanib, $z=f(x,y)$ funksiyaning hisoblash uchun "noqulay" bo'lgan $N(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ nuqtadagi qiymati uning hisoblash uchun "qulay" bo'lgan $M(x,y)$ nuqtadagi qiymati yordamida taqriban topilishi mumkin.

Misol sifatida $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ funksiyaning $N(2.98,\ 4.03)$ nuqtadagi qiymatini, ya'ni $\sqrt{2.98^2+4.03^2}$ ildizni taqribiy qiymatini topamiz. Bunda "qulay" nuqta $M(3,4)$ bo'ladi, chunki unda funksiyaning qiymati oson hisoblanadi va $f(3,4)=5$ bo'ladi. Bu holda $\Delta x=2.98-3=-0.02$, $\Delta y=4.03-4=0.03$ va

$$f'_x(3,4)=\left.\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{x=3}^{y=4}=\frac{6}{5}=1.2,\quad f'_y(3,4)=\left.\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{x=3}^{y=4}=\frac{8}{5}=1.6\ .$$

Bu natijalarni (21.11) taqribiy formulaga qo'yib,

$$f(2.98,4.03)=\sqrt{2.98^2+4.03^2}\approx 5+1.2\cdot(-0.02)+1.6\cdot 0.03=5.024$$

ekanligini topamiz. Bu ildizning uch xona aniqlikdagi qiymati 5.012 ekanligidan olingan taqribiy natijaning aniqligi haqida tasavvur hosil qilishimiz mumkin.

21.2. Yuqori tartibli differensiallar

Endi yuqori tartibli differensiallar tushunchasini kiritamiz. $z=f(x,y)$ funksiya II tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo'lsin. Bu holda

$$df=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

to'la differensial ikki o'zgaruvchili funksiya sifatida uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'ladi. Shu sababli df differensialning $d(df)$differensiali haqida so'z yuritish mumkin.

***6-ta'rif:** Agar $z=f(x,y)$ funksiya df differensialning $d(df)$differensiali mavjud bo'lsa, u funksiyaning **II tartibli differensiali** deb ataladi va d^2f kabi belgilanadi.*

Agar $z=f(x,y)$ funksiya II tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, uning II tartibli differensiali d^2f mavjud va uning ta'rifi hamda to'la differensial formulasiga asosan quyidagi natijani olamiz:

$$d^2f=d(df)=\frac{\partial(df)}{\partial x}dx+\frac{\partial(df)}{\partial y}dy=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right]dx+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right]dy=$$
$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dydx+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

Bunda argument differensiallari dx va dy o'zgarmas son singari qaraldi hamda aralash hosilalar haqidagi teoremadan foydalanildi.

Demak, II tartibli differensial d^2f funksiyaning II tartibli hosilalari orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$d^2f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 \qquad (21.11)$$

$$d^nf=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{\partial^n f}{\partial^k x\partial^{n-k}y}dx^k dy^{n-k} \qquad (21.12)$$

Ikki o'zgaruvchili funksiyaning n-tartibli d^nf differensiali bir o'zgaruvchili funksiyaning n-tartibli differensialiga o'xshash vazifani bajaradi va ulardan funksiyalarning xususiyatlarini o'rganishda va turli masalalarni yechishda foydalaniladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $y=\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ x=0.0014 y=2.1423
2. $y=\sqrt{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}$ x=0.25 y=0.15
3. $y=\sqrt{\cos x+\sin x}$ x=0.2 y=2.2
4. $y=\sqrt{ctg(x+y)}$ x=0.5 y=11.5

5. $y=\sqrt{tg(x-y)}$ $x=\pi$ $y=\frac{\pi}{2}$

6. $y=\sqrt{ctg(x-y)}$ $x=\pi$ $y=\frac{\pi}{2}$

7. $y=\sqrt{x^2+\sqrt{y}}$ $x=\pi$ $y=\frac{\pi}{2}$

§ 22. Ikki argumentli funksiyaning ekstremumlari va eng katta, eng kichik qiymatlarini topish. Shartli ekstremumlar

22.1. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning lokal ekstremumlari

Berilgan $z=f(x,y)$ funksiya tekislikdagi biror D sohada aniqlangan bo'lib, $M_0(x_0, y_0)$ bu sohaning ichki nuqtasi bo'lsin.

1-ta'rif: *Agar $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning biror $U_r(x_0, y_0)$ atrofiga tegishli ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqta uchun*

$$f(x_0, y_0)\geq f(x,y) \quad [f(x_0, y_0)\leq f(x,y)] \quad (22.1)$$

tengsizlik bajarilsa, unda $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada ***lokal maksimumga (minimumga)*** *ega deyiladi.*

Masalan, $f(x,y)=4-x^2-y^2$ funksiya $M_0(0,0)$ nuqtada lokal maksimumga ega, chunki bu nuqtaning ixtiyoriy atrofidagi $M(x,y)$ nuqtalar uchun $f(x,y)\geq 4=f(0,0)$. Xuddi shunday $g(x,y)=4+x^2+y^2$ funksiya $M_0(0,0)$ nuqtada $g(0,0)=4$ lokal minimumga ega ekanligi ko'rsatiladi.

1-ta'rifda $f(x_0, y_0)\geq f(x,y)$ $[f(x_0, y_0)\leq f(x,y)]$ tengsizlik faqat $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning biror kichik atrofida bajarilishi talab etiladi. Bu tengsizlik, biz yuqorida ko'rgan misoldagi singari, $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning ixtiyoriy atrofida o'rinli bo'lishi shart emas. Shu sababli $f(x_0, y_0)$ lokal maksimum yoki minimum deb atalmoqda.

Agar (22.1) tengsizlikda $x=x_0+\Delta x$ va $y=y_0+\Delta y$ deb olsak, uni lokal maksimum holida

$$f(x_0,y_0)\geq f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\Rightarrow f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\leq 0\Rightarrow \Delta f\leq 0$$

lokal minimum holida esa $\Delta f\geq 0$ ko'rinishda yozish mumkin. Shu sababli 1-ta'rifni funksiyaning to'la orttirmasi orqali quyidagicha ifodalash mumkin.

2-ta'rif: *Agar $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning biror $U_r(x_0, y_0)$ atrofida $z=f(x,y)$ funksiyaning to'la orttirmasi uchun $\Delta f(x_0, y_0)\leq 0$ $(\Delta f(x_0, y_0)\geq 0)$ tengsizlik bajarilsa, unda bu funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada* ***lokal maksimumga (minimumga)*** *ega deyiladi.*

3-ta'rif: *Funksiyaning lokal maksimum va minimumlari birgalikda* ***funksiyaning lokal ekstremumlari*** *deyiladi.*

2-ta'rifga asosan funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada lokal ekstremumga ega bo'lishi uchun uning bu nuqtadagi $\Delta f(x_0, y_0)$ to'la orttirmasi Δx va Δy argument orttimalarining turli kichik qiymatlarida o'z ishorasini o'zgartirmasligi lozim.

Yuqoridagi misolda ko'rib o'tilgan $f(x,y)=4-x^2-y^2$ va $g(x,y)=4+x^2+y^2$ funksiyalar uchun lokal ekstremumlar $f(x,y)$ va $g(x,y)$ ifodalari bo'yicha bevosita topildi. Ammo murakkabroq ko'rinishdagi funksiyalar uchun bunday qilib bo'lmaydi. Shu sababli umumiy holda ikki o'zgaruvchili funksiyaning lokal ekstrimumlarini topish masalasi paydo bo'ladi. Bu masala bir o'zgaruvchili funksiyalar uchun oldin ko'rilgan edi. Bu yerda $z=f(x,y)$ funksiyani ekstremumga tekshirish ham shunga o'xshash amalga oshirilishini ko'ramiz.

1-teorema(Ferma teoremasi): *Agar $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada lokal ekstremumga erishsa va bu nuqtada uning ikkala xususiy hosilalari mavjud bo'lsa, unda ular nolga teng bo'ladi, ya'ni*

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)=0 \\ f'_y(x_0,y_0)=0 \end{cases} \quad (22.2)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Isbot: $z=f(x,y)$ funksiyada $y=y_0$ deb olamiz va bunda hosil bo'ladigan bir o'zgaruvchili $h(x)=f(x,y_0)$ funksiyani qaraymiz. Teorema shartiga ko'ra bu funksiya $x=x_0$ nuqtada lokal ekstremumga ega va uning hosilasi $h'(x)=f'_x(x,y_0)$ mavjud. Unda, bir o'zgaruvchili funksiyalar uchun oldin isbotlangan Ferma teoremasiga asosan (VII bob,§5), $h'(x_0)=f'_x(x_0,y_0)=0$ ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shunday tarzda $f'_y(x_0,y_0)=0$ tenglik o'rinli ekanligi ko'rsatiladi va teoremaning isboti yakunlanadi.

Bu teorema ***ekstremumning zaruriy shartini*** ifodalaydi va undan ushbu natija kelib chiqadi.

Natija: *Agar $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada lokal ekstremumga erishsa va differensiallanuvchi bo'lsa, unda bu nuqtada uning differensiali $df(x_0,y_0)=0$ va gradienti $\mathrm{grad}f(x_0,y_0)=0$ bo'ladi.*

Bu tasdiq bevosita (22.2) tengliklardan va differensial, gradient ta'riflaridan kelib chiqadi.

Masalan, yuqorida ko'rilgan $f(x,y)=4-x^2-y^2$ funksiya uchun haqiqatan ham u lokal maksimumga erishadigan $M_0(0,0)$ nuqtada

$$f'_x(0,0)=2x\Big|_{x=0}^{y=0}=0\quad,\quad f'_y(0,0)=-2y\Big|_{x=0}^{y=0}=0\Rightarrow df(0,0)=0,\ \mathrm{grad}f(0,0)=0$$

tengliklar bajariladi.

(22.2) tengliklar lokal ekstremumning faqat zaruriy shartini ifodalab, lokal ekstremum bo'lishi uchun yetarli emas.

Bu funksiya uchun O(0,0) nuqtada (22.2) tengliklar bajariladi, ammo bu nuqtada funksiya lokal ekstremumga ega emas. Haqiqatan ham bu holda to'la orttirma

$$\Delta f=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=f(\Delta x,\Delta y)=\Delta x^2-\Delta y^2$$

ko'rinishda bo'lib, $\Delta x>\Delta y$ bo'lganda musbat, $\Delta x<\Delta y$ holda esa manfiy qiymat qabul etadi. Demak, O(0,0) nuqtaning ixtiyoriy atrofida $\Delta f(0,0)$ to'la orttirma o'z ishorasini o'zgartiradi va shu sababli bu nuqtada lokal ekstremum mavjud emas.

Bu funksiyaning grafigi bo'lmish sirt quyidagi chizmada ko'rsatilgan va unda O(0,0) nuqta ***egar nuqta*** deb ataladi. Sirtlar uchun egar nuqta egri chiziqlar uchun burilish nuqtasiga o'xshash xususiyatga ega bo'ladi.

4-ta'rif: *Agar $z=f(x,y)$ funksiyaning xususiy hosilalari mavjud bo'lsa, unda (22.2) tengliklarni qanoatlantiruvchi nuqtalar bu funksiyaning* ***kritik*** *yoki* ***statsionar nuqtalari*** *deb ataladi.*

Ferma teoremasidan funksiya lokal ekstremumlariga kritik nuqtalarida erishishi mumkinligi kelib chiqadi. Shu sababli funksiyani ekstremumga tekshirish uchun birinchi navbatda uning kritik nuqtalarini topish kerak. Agar $z=f(x,y)$

funksiya uchun $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqta bo'lsa, unda funksiya bu nuqtada yoki lokal maksimumga, yoki lokal minimumga ega yoki umuman lokal ekstremumga ega bo'lmasligi mumkin. Shu sababli $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqta bu xususiyatlardan qaysi biriga ega ekanligini aniqlash masalasi paydo bo'ladi. Bu masala ekstremumning yetarli shartini topish orqali hal etiladi. Buning uchun $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqtaning biror atrofida aniqlangan, uzluksiz hamda uzluksiz I va II tartibli hosilalarga ega deb hisoblaymiz. Quyidagi belgilashlar kiritamiz:

$$A=f''_{xx}(x_0,y_0)\,,\ B=f''_{xy}(x_0,y_0)\,,\ C=f''_{yy}(x_0,y_0)\,,\ \Delta=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=AC-B^2\,. \quad (22.3)$$

2-teorema (Ekstremumning yetarli shartlari): *Agar $z=f(x,y)$ funksiya uchun $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqta bo'lsa, unda (3) belgilashlarda quyidagi tasdiqlar o'rinli:*

1. $\Delta>0$, $A>0$ holda funksiya $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqtada lokal minimumga ega;
2. $\Delta>0$, $A<0$ holda funksiya $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqtada lokal maksimumga ega;
3. $\Delta<0$ holda funksiya $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqtada lokal ekstremumga ega emas.

Bu teoremani isbotsiz qabul etamiz.

Izoh: Agar $\Delta=0$ bo'lsa funksiyaning $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqtadagi xususiyatini bu teorema orqali aniqlab bo'lmaydi. Bu holda javob funksiyaning $\Delta f(x_0,y_0)$ to'la orttirmasining ishorasini tekshirish orqali topiladi.

Shunday qilib ikki o'zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyani ekstremumga tekshirish quyidagi algoritm asosida amalga oshiriladi:

1. funksiyaning $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ xususiy hosilalari hisoblanadi;
2. xususiy hosilalar nolga tenglashtirilib,

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0\\ f'_y(x,y)=0\end{cases}$$

3. tenglamalar sistemasi hosil etiladi;
4. hosil etilgan tenglamalar sistemasi yechilib, funksiyaning kritik nuqtalari topiladi. Agar kritik nuqtalar mavjud bo'lmasa, unda funksiya ekstremumga ega bo'lmaydi;

5. funksiyaning II tartibli hosilalari topiladi;

6. kritik nuqtada (22.3) formulalar bo'yicha A, B, C va Δ qiymatlari hisoblanadi;

7. A, B, C va Δ qiymatlari bo'yicha kritik nuqtada funksiyaning xususiyati 2-teorema yordamida aniqlanadi.

Misol sifatida, $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ funksiyani ekstremumga tekshiramiz. Bu holda

$$f'_x(x,y) = 2x + y - 3, \quad f'_y(x,y) = 2y + x - 6$$

bo'lib, ulardan tuzilgan $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$

tenglamalar sistemasidan $M_0(0,3)$ kritik nuqtani topamiz. Bu yerda

$$f''_{xx}(x,y) = 2, \quad f''_{xy}(x,y) = 1, \quad f''_{yy}(x,y) = 2$$

bo'lgani uchun $A=2$, $B=1$, $C=2$ va $\Delta=AC-B^2=3$ ekanligini ko'ramiz.

Bunda $\Delta>0$, $A>0$ va shu sababli,ekstremumning yetarli shartiga asosan, bu funksiya $M_0(0,3)$ kritik nuqta lokal minimumga ega va $f_{min}=f(0,3)=3^2-18=-9$ bo'ladi.

22.2. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning shartli ekstremumlari

Oldingi qismda $z=f(x,y)$ funksiyani ekstremumga tekshirishda uning x va y argumentlari butun $D\{f\}$ aniqlanish sohasida qaralgan edi. Ammo bir qator masalalarni yechishda x va y argumentlarni faqat ma'lum bir shartni qanoatlantiradigan qiymatlarida funksiya ekstremumini topishga to'g'ri keladi.

Masalan, perimetri $2p$ bo'lgan barcha to'g'ri to'rtburchaklar orasidan yuzi eng katta bo'lganini topish masalasini qaraymiz. Agar to'g'ri to'rtburchak tomonlarini x va y deb olsak, bu masala $S(x,y)=xy$ funksiyaning uning argumentlari $2(x+y)=2p$ yoki $x+y=p$ shartni qanoatlantirganda, ya'ni $y=-x+p$ tenglamali to'g'ri chiziqda yotganda, ekstremumini topish masalasiga keladi. Bu masala yechimini quyidagicha topamiz:

$$\begin{cases} S(x,y) = xy \\ y = p - x \end{cases} \Rightarrow S(x,y) = x(p-x) = px - x^2 = g(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x) = p - 2x = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{p}{2} \Rightarrow g(x_0) = p \cdot \frac{p}{2} - (\frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4}.$$

Shunday qilib, bu masalani yechish uchun x va y argumentlarga qo'yilgan shartdan foydalanib, ikki o'zgaruvchili $S(x,y)$ funksiyadan bir o'zgaruvchili $g(x)$ funksiyaga o'tdik va uni ekstremumga tekshirdik. Bu yerda $g''(x)=-2<0$ bo'lgani uchun $g(x)$ funksiya topilgan $x_0=p/2$ kritik nuqtada maksimumga ega bo'ladi. Demak, perimetri $2p$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklar orasida eng katta yuzaga tomonlari $x_0=p/2 \Rightarrow y_0=p-p/2=p/2$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchak, ya'ni kvadrat erishadi va bu yuza qiymati $S=p^2/4$ bo'ladi.

Endi ko'rib o'tilgan bu masalani umumlashtiramiz. Bizga $z=f(x,y)$ ikki o'zgaruvchili funksiya berilgan bo'lib, uning x va y argumentlari $D\{f\}$ aniqlanish sohasida biror

$$\varphi(x,y)=0 \quad (22.4)$$

tenglama bilan ifodalanadigan shartni qanoatlantirsin.

5-ta'rif: *$z=f(x,y)$ funksiyaning argumentlari qanoatlantiradigan (22.4) tenglama **bog'lanish tenglamasi** deb ataladi.*

6-ta'rif: *Koordinatalari (22.4) bog'lanish tenglamasini qanoatlantiruvchi $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning biror atrofidagi koordinatalari (22.4) shartni qanoatlantiruvchi barcha $M(x,y)$ nuqtalar uchun $z=f(x,y)$ funksiya $f(x_0,y_0)\geq f(x,y)$ $[f(x_0,y_0)\leq f(x,y)]$ tengsizlikni qanoatlantirsa, unda bu funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada **shartli maksimumga (mimnimumga)** ega deyiladi va ular birgalikda **shartli ekstremumlar** deb ataladi.*

Umumiy holda ham funksiyaning shartli ekstremumini yuqorida ko'rilgan xususiy masaladagi singari usulda quyidagicha topish mumkin:

1) dastlab (22.4) bog'lanish tenglamasidan $y=\psi(x)$ funksiyani topamiz ;

2) so'ngra ikki o'zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyadan, $y=\psi(x)$ ekanligini hisobga olib, bir o'zgaruvchili $g(x)=f(x,\psi(x))$ funksiyaga o'tamiz;

3) Hosil bo'lgan $g(x)$ funksiyani bizga ma'lum usulda ekstremumga tekshiramiz.

Ammo bu usul har doim ham qulay emas, jumladan $y=\psi(x)$ funksiyani topish masalasi murakkab bo'lishi mumkin. Shu sababli bu masalani Lagranj tomonidan taklif etilgan usulda yechamiz. Buning uchun berilgan $z=f(x,y)$ funksiya va (22.4) bog'lanish tenglamasi bo'yicha

$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)$ (22.5)

uch o'zgaruvchili funksiyani hosil qilamiz. Bunda $L(x,y,\lambda)$–***Lagranj funksiyasi***, λ–***Lagranj ko'paytuvchisi*** deb ataladi. Bu holda quyidagi teorema o'rinli ekanligini isbotlash mumkin.

3-teorema. *Agar $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada $z=f(x,y)$ funksiya shartli ekstremumga ega bo'lsa, unda shunday λ_0 soni topiladiki, $N(x_0,y_0,\lambda_0)$ nuqtada $L(x,y,\lambda)$ Lagranj funksiyasi ekstremumga (shartsiz) ega bo'ladi.*

Bu teoremadan ko'rinadiki, $z=f(x,y)$ funksiyaning shartli ekstremumini topish masalasi $L(x,y,\lambda)$ Lagranj funksiyasini ekstremumga tekshirishga keltiriladi. Bu xulosadan, ekstremumning zaruriy (22.5) shartiga asosan, quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} L'_x = f'_x(x,y) - \lambda\varphi'_x(x,y) = 0 \\ L'_y = f'_y(x,y) - \lambda\varphi'_y(x,y) = 0 \\ L'_\lambda = \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \qquad (22.6)$$

Bu sistemani yechib, λ_0, x_0, y_0 ildizlarni topamiz. Unda $z=f(x,y)$ funksiyaning shartli ekstremumlari (22.6) sistema ildizlari orqali aniqlanadigan $M_0(x_0,y_0)$ nuqtalarda bo'lishi mumkin.

Misol sifatida, dastlab $z=f(x,y)=(x/3)+(y/4)$ funksiyani $x^2+y^2=1$ aylanada shartli ekstremumga tekshiramiz. Qaralayotgan misolda bog'lanish tenglamasi $\varphi(x,y)=x^2+y^2-1=0$ ko'rinishda bo'ladi. Lagrang funksiyasini tuzamiz:

$$L(x,y,\lambda)=\frac{x}{3}+\frac{y}{4}-\lambda(x^2+y^2-1)\ .$$

Bu funksiyadan foydalanib, (6) tenglamalar sistemasini hosil etamiz va uni yechamiz:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}-2\lambda x=0 \\ \frac{1}{4}-2\lambda y=0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{6\lambda} \\ y=\frac{1}{8\lambda} \\ (\frac{1}{6\lambda})^2+(\frac{1}{8\lambda})^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=\pm\frac{4}{5} \\ y_0=\pm\frac{3}{5} \\ \lambda_0=\pm\frac{5}{24} \end{cases}$$

Demak, $f(x,y)$ funksiya o'zining shartli ekstremumlariga $\lambda_0=5/24$ bo'lganda $M_1(4/5,3/5)$ va $\lambda_0=-5/24$ bo'lganda $M_2(-4/5,-3/5)$ nuqtalarda erishishi mumkin. Bu nuqtalarda $L(x,y,\lambda_0)$ funksiyani ekstremumga tekshiramiz. Bunda

$$A=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=-2\lambda_0,\ B=\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}=0,\ C=\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=-2\lambda_0 \Rightarrow \Delta=AC-B^2=4\lambda_0^2$$

Bu yerdan $\lambda_0=\pm5/24$ bo'lganda $\Delta>0$ ekanligi kelib chiqadi va shu sababli $L(x,y,\pm5/24)$ funksiya lokal ekstremumga ega bo'ladi. Bunda $\lambda_0=5/24$ bo'lganda $A=-5/12<0$ va shu sababli, 2-teoremaga asosan, $M_1(4/5,3/5)$ nuqtada $L(x,y,5/24)$ funksiya lokal maksimumga egadir. Unda bu nuqtada qaralayotgan $f(x,y)$ shartli maksimumga ega va uning qiymati $f_{max}=f(4/5,3/5)=5/12$ bo'ladi.

Xuddi shunday tarzda $M_2(-4/5,-3/5)$ nuqtada $f(x,y)$ shartli minimumga ega va $f_{min}=f(-4/5,-3/5)=-5/12$ bo'lishi ko'rsatiladi.

Endi yana bir misol sifatida $z=f(x,y)=xy$ funksiyani $x^2+y^2=8$ aylanada shartli ekstremumga tekshiramiz. Bunda Lagranj funksiyasi $L(x,y,\lambda)=xy-\lambda(x^2+y^2-8)$ ko'rinishda bo'ladi. (6) tenglamalar sistemasini tuzamiz va uni yechamiz:

$$\begin{cases} y-2\lambda x=0 \\ x-2\lambda y=0 \\ x^2+y^2-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4\lambda^2 y \\ x=2\lambda y \\ x^2+y^2-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0=\frac{1}{2} \\ x_0=\pm2 \\ y_0=\pm2 \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda_0=-\frac{1}{2} \\ x_0=\pm2 \\ y_0=\mp2 \end{cases}$$

Demak, berilgan $f(x,y)=xy$ funksiya o'zining shartli ekstremumlariga

$M_1(2,2)$, $M_2(-2,-2)$ $[\lambda_0=1/2]$ va $M_3(2,-2)$, $M_4(-2,2)$ $[\lambda_0=-1/2]$

nuqtalarda erishishi mumkin. Bu nuqtalarda $L(x,y,\lambda_0)$ funksiyani ekstremumga tekshiramiz. Bu yerda

$$A=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=-2\lambda_0,\ B=\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}=1,\ C=\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=-2\lambda_0 \Rightarrow \Delta=AC-B^2=4\lambda_0^2-1$$

va $\lambda_0=\pm 1/2$ holda $\Delta=0$ bo'ladi. Shu sababli $L(x,y,\lambda_0)$ funksiyani ekstremumga tekshirish uchun ekstremumning yetarli shartini ifodalovchi 2-teoremadan foydalana olmaymiz. Unda $L(x,y,\lambda_0)$ funksiyaning $\Delta L(x,y,\lambda_0)$ to'liq orttirmasiga murojaat etamiz:

$\Delta L(x,y,\lambda_0)= L(x+\Delta x,y+\Delta y,\lambda_0)- L(x,y,\lambda_0)=\{(x+\Delta x)(y+\Delta y)-\lambda_0[(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2-8]\}-[xy-\lambda_0(x^2+y^2-8]=x\Delta y+y\Delta x+\Delta x\Delta y-\lambda_0[2x\Delta x+2y\Delta y+\Delta x^2+\Delta y^2]$.

Bu yerdan $\lambda_0=1/2$ va $x=y$ holda $\Delta L(x,x,1/2)=-(\Delta x-\Delta y)^2/2\le 0$ ekanligini ko'ramiz. Unda, 2-ta'rifga asosan, $M_1(2,2)$ va $M_2(-2,-2)$ nuqtalarda $L(x,y,1/2)$ funksiya maksimumga, qaralayotgan $f(x,y)=xy$ funksiya esa shartli maksimumga ega va uning qiymati $f_{max}=f(\pm 2,\pm 2)=4$ bo'ladi.

Xuddi shunday tarzda $\lambda_0=-1/2$ va $x=-y$ holda $\Delta L(x,-x,-1/2)=(\Delta x+\Delta y)^2/2\ge 0$ ekanligini va $M_3(2,-2)$ va $M_4(-2,2)$ nuqtalarda $f(x,y)=xy$ funksiya shartli minimumga ega va uning qiymati $f_{min}=f(\pm 2,\mp 2)=-4$ ekanligi ko'rsatiladi.

22.3. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning global ekstremumlari

Berilgan $z=f(x,y)$ funksiya biror yopiq va chegaralangan D sohada aniqlangan va uzluksiz, bu sohaning ichki nuqtalarida chekli xususiy hosilalarga ega bo'lsin. Unda bu funksiya, Veyershtrass teoremasiga asosan, D sohada o'zining eng katta *maxf* (global maksimum) va eng kichik *minf* (global minimum) qiymatlariga erishadi. Bu qiymatlar, funksiyani lokal ekstremumga tekshirishdan foydalanilib, quyidagi tartibda topiladi:

1. Funksiyaning $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ xususiy hosilalari hisoblanadi;

2. Xususiy hosilalar nolga tenglashtirilib, kritik nuqtalar topiladi;

3. Topilgan kritik nuqtalardan faqat D soha ichida yotuvchilari qaralib, ularda berilgan funksiyaning qiymatlari hisoblanadi;

4. D soha chegarasini ifodalovchi chiziqning $y=\varphi(x)$, $x\in[a,b]$, tenglamasidan foydalanilib, chegarada ikki o'zgaruvchili $f(x,y)$ funksiyani $g(x)=f(x,\varphi(x))$ bir o'zgaruvchili funksiyaga keltiriladi va uning $[a,b]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topiladi.

5. Funksiyaning oldingi ikki qadamda hisoblangan barcha qiymatlarini taqqoslab, uning D sohadagi eng katta *maxf* va eng kichik *minf* qiymatlarini, ya'ni global ekstremumlarini topamiz.

6. Misol sifatida, $f(x,y)=x^2+2y^2-x-3y+5$ funksiyaning $x=1$, $y=1$ va $x+y=1$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan uchburchakdan iborat D sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topamiz.

Berilgan funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz:

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=2x-1=0 \\ f'_y(x,y)=4y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=1/2 \\ y_0=3/4 \end{cases}$$

Demak, funksiyaning bitta $M_0(1/2,\ 3/4)$ kritik nuqtasi mavjud. Bu kritik nuqta qaralayotgan D soha ichida joylashgan va shu sababli uni hisobga olib, bu nuqtada $f(1/2,\ 3/4)=29/8$ ekanligini aniqlaymiz.

1) Berilgan funksiyani AC chegarada qaraymiz. Unda $x=1$ bo'lgani uchun funksiyamiz $f(1,y)=1^2+2y^2-1-3y+5=2y^2-3y+5$, $0\le y\le 1$, ko'rinishga keladi, ya'ni bir o'zgaruvchili funksiyaga aylanadi. Uning kritik nuqtasini topamiz:

2) $f'(1,y)=4y-3=0 \Rightarrow y=3/4$.

Bu kritik nuqta va $[0,1]$ kesmaning chegaraviy nuqtalarida berilgan funksiya qiymatlarini hisoblab, $f(1,3/4)=31/8$, $f(1,0)=5$, $f(1,1)=4$ ekanligini topamiz;

3) Berilgan funksiyani BC chegarada qaraymiz. Unda $y=1$ bo'lgani uchun funksiyamiz $f(x,1)=x^2-x+4$, $0\le x\le 1$, ko'rinishga keladi. Bu yerda kritik nuqta $x=1/2$ bo'lib, unda va $[0,1]$ kesma chegaralarida $f(1/2,1)=15/4$, $f(0,1)=f(1,1)=4$ ekanligini topamiz;

4) Berilgan funksiyani AB chegarada qaraymiz. Unda $y=1-x$ bo'lgani uchun funksiyamiz $f(x,1-x)=3x^2-2x+4$, $0\le x\le 1$, ko'rinishga keladi. Bunda kritik nuqta $x=1/3$ va unda $f(1/3,2/3)=11/3$ bo'ladi. Chegaraviy nuqtalarda $f(0,1)=4$, $f(1,0)=5$ ekanligi oldin ko'rilgan edi.

Shunday qilib, berilgan funksiyaning hisoblangan

$f(1/2, 3/4)=29/8, f(1, 3/4)=31/8, f(1,0)=5, f(1, 1)=4, f(1/2, 1)=15/4, f(0,1)=4,$ $f(1/3, 2/3)=11/3$ qiymatlarini taqqoslab, uning global minimumi $minf=f(1/2,3/4)=29/8$ va global maksimumi $maxf=f(1,0)=5$ ekanligini ko'ramiz.

Mustaqil yechish uchun misollar

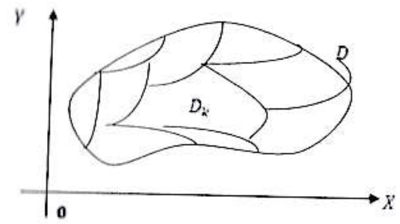
1. $f(x)=(x+3)^2\sqrt[3]{(x-1)^2}, x\in R$ Funksiyaning ekstrimum nuqtalarini toping
2. $f(x)=(x-2)^3\sqrt{(x+2)^3}, x\in R$ Funksiyaning ekstrimum nuqtalarini toping
3. $f(x)=x^2\sqrt[3]{x}, x\in R$ Funksiyaning ekstrimum nuqtalarini toping
4. $f(x)=\sin x^2\sqrt[3]{\cos^2 x}, x\in R$ Funksiyaning ekstrimum nuqtalarini toping
5. $f(x)=\cos x\sqrt[3]{\sin x}, x\in R$ Funksiyaning ekstrimum nuqtalarini toping
6. $f(x)=\cos x\sqrt{\sin x^2}, x\in R$ Funksiyaning ekstrimum nuqtalarini toping
7. $f(x)=ctgx\sqrt[3]{\sin x^2}, x\in R$ Funksiyaning ekstrimum nuqtalarini toping

VI BO'LIM. KARRALI VA CHIZIQLI INTEGRALLAR

§ 23. Ikki o'lchavli integral (ta'rifi va misollar, ikki o'lchovli integralni hisoblash)

23.1. Ikki o'lchovli integral tushunchasi

Aytaylik, tekislikdagi D to'plam chegaralangan hamda yuzaga ega bo'lgan tekis shaklni ifodalasin (23.1- chizma).



23.1-chizma

Bu to'plamda $z=f(x,y)$ funksiya aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. $f(x,y)$ funksiyaning D to'plam bo'yicha ikki karrali integrali quyidagicha kiritiladi:

1) D to'plam (shakl) yuzaga ega bo'lgan

$$D_1, D_2, ..., D_n$$

bo'lakchalarga ajratiladi (23.1- chizma). Bunda D_k bo'lakchaning yuzini S_k bilan belgilaymiz, $k=1,2,3,...,n$.

2) Har bir D_k bo'lakchada ixtiyoriy (ξ_k,η_k) nuqtani olib, funksiyaning shu nuqtadagi qiymati $f(\xi_k,\eta_k)$ ni S_k ga ko'paytiriladi:

$$f(\xi_k,\eta_k)\cdot S_k \qquad (k=1,2,3,...,n)$$

3) Bu ko'paytmalardan quyidagi

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\cdot S_k \qquad (23.1)$$

yig'indi tuziladi. Bu yig'indini integral yig'indi deyiladi.

4) Har bir bo'lakcha diametrlarining eng kattasi nolga intilganda, σ yig'indining limiti qaraladi:

$$\lim \sigma = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \cdot S_k$$

Agar bu limit mavjud bo'lsa, ($f(x,y)$ funksiya D da uzluksiz bo'lsa, limit mavjud bo'ladi) uni $f(x,y)$ funksiyaning D to'plam bo'yicha ikki karrali integrali deyiladi va

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \cdot S_k$$

bunda $\lambda = \max\{d_k\}$ ($d_k - D_k$ bo'lakchaning diametri. U D_k sohaning ikki nuqtasi orasidagi masofalarning eng kattasi).

Ikki karrali integral ham aniq integral xossalari kabi xossalarga ega bo'ladi.

1) Agar $f(x,y)$ va $g(x,y)$ funksiyalar D uzluksiz bo'lib, α va β lar o'zgarmas sonlar bo'lsa, u holda

$$\iint_D (\alpha f(x,y) \pm \beta g(x,y))dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)dxdy \pm \beta \iint_D g(x,y)dxdy$$

bo'ladi.

Agar $f(x,y)$ va $g(x,y)$ funksiyalar D da uzluksiz bo'lib, ixtiyoriy $(x,y) \in D$ da $f(x,y) \le g(x,y)$ bo'lsa, u holda

$$\iint_D f(x,y)dxdy \le \iint_D g(x,y)dxdy$$ bo'ladi.

Agar $f(x,y)$ funksiya D da uzluksiz bo'lsa, u holda shunday $M_0(x_0, y_0) \in D$ nuqta topiladiki,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0) \cdot S, \text{ ya'ni } \frac{1}{S}\iint_D f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)$$

bo'ladi.

4)Agar D to'plam $D = D_1 \cup D_2$ (bunda $D_1 \cap D_2 = \varnothing$) bo'lsa, u holda

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

bo'ladi.

5)Agar $f(x,y)$ funksiya D da uzluksiz bo'lsa,

$$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint_D |f(x,y)|dxdy$$

bo'ladi.

1-misol. Ushbu $f(x,y) = c - const$ funksiyaning D to'plam bo'yicha ikki karrali integrali topilsin. (1) formulaga ko'ra bu funksiyaning integral yig'indisi

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \cdot S_k = \sum_{k=1}^{n} c \cdot S_k = c\sum_{k=1}^{n} S_k = cS$$

bo'ladi. Ravshanki, $\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} cS = cS$.

Demak, $\iint_D cdxdy = cS$ bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1.Hisoblang : $I = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x^2 + y^2)dy \right) dx$

2.Hisoblang : $I = \int_0^1 \left(\int_0^{-x^2} (x^2 - y^2)dy \right) dx$

3. Agar D soha x=0, x=1, y=0, y=3/2 to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan bo'lsa, $\iint_D (4 - x^2 - y^2)dxdy$

4. Agar D soha x=2, x=3, y=1, y=2 to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan bo'lsa, $\iint_D (4 + x^2 - 2y^2)dxdy$

5. Agar D soha x=0, x=3, y=1, y=0 to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan bo'lsa, $\iint_D (x^3 - y^2)dxdy$

6. Agar D soha x=0, x=3, y=1, y=0 to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan bo'lsa, $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$

7. Hisoblang : $I=\int_0^1\left(\int_0^{-x^2}(x+y)dy\right)dx$

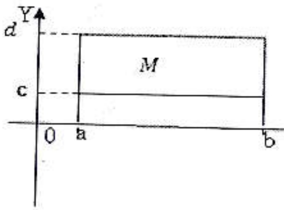
§.24 Dekart va qutb koordinatalar sistemasida ikki karrali integrallarni hisoblash. Ikki karrali integral tartibini o'zgartirish

a) To'g'ri to'rtburchak soha (to'plam) bo'yicha ikki karrali integrallarni hisoblash.

Aytaylik, $z=f(x,y)$ funksiya tekislikdagi

$$M=\{(x,y): a\le x\le b, \quad c\le y\le d\}$$

to'plamda (to'g'ri to'rtburchak sohada) berilgan va uzluksiz bo'lsin (24.1-chizma).



24.1- chizma

Bu holda

$$\iint_M f(x,y)dxdy=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx \quad (24.1)$$

o'ladi.

Bu munosabatlar yordamida ikki karrali integrallar takroriy integrallash yo'li bilan hisoblanadi.

1-misol. Ushbu $J=\iint_M (x^2+y^2)dxdy$ ikki karrali integral hisoblansin, bunda

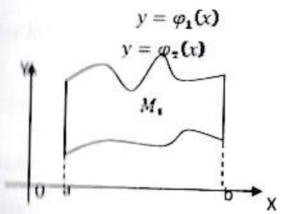
$M=\{(x,y): 0\le x\le 1, \quad 0\le y\le 1\}$ to'g'ri to'rtburchak (kvadrat) dan iborat.

◄Integrallash chegaralarini qo'yib, so'ng (1) munosabatdan foydalanib topamiz:

$$J=\int_0^1\int_0^1(x^2+y^2)dxdy=\int_0^1\left[\int_0^1(x^2+y^2)dy\right]dx=\int_0^1\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{y=1}dx=$$

$$=\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}x\right)\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}. ►$$

b) Egri chiziqli trapetsiya soha bo'yicha ikki karrali integrallarni hisoblash. Tekislikda yuqoridan $\varphi_2(x)$ funksiya grafigi, pastdan $\varphi_1(x)$ funksiya grafigi, yon tomonlardan $x=a, x=b$ vertikal chiziqlar bilan chegaralangan sohani (to'plamni) qaraylik, bunda $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(x)$ funksiyalar $[a,b]$ da uzluksiz va unda $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$. Odatda, bu soha egri chiziqli trapesiya deyiladi. Uni M_1 bilan belgilaymiz (24.2- chizma).



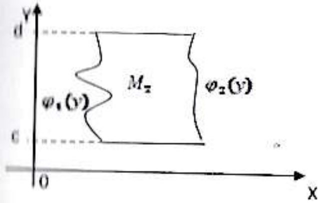
24.2-chizma

$$M_1=\{(x,y): a\le x\le b, \quad \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$$

Aytaylik, $z=f(x,y)$ funksiya M_1 to'plamda uzluksiz bo'lsin. Unda

$$\iint_{M_1} f(x,y)dxdy=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx \quad (24.1)$$

bo'ladi.



24.3-chizma

Aytaylik, $z=f(x,y)$ funksiya

$$M_2=\{(x,y): \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y), c\le y\le d\}$$

sohada (to'plamda) uzluksiz bo'lsin, unda

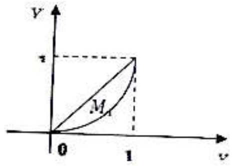
$$\iint_{M_2} f(x,y)dxdy=\int_c^d\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right]dy$$

(24.3) bo'ladi (24.3- chizma).

2-misol. Ushbu $J=\iint_{M_2} xy^2dxdy$ ikki karrali integral hisoblansin, bunda

$$M_2 = \{(x,y): 0 \le x \le 1, \quad x^2 \le y \le x\}$$

to'plamdan iborat. (24.4 - chizma)



24.4 – chizma

◀Ravshanki, bu hol uchun

$a=0, \quad b=1, \quad \varphi_1(x)=x^2, \quad \varphi_2(x)=x$

bo'lib, qaralayotgan integral (24.1) formulaga ko'ra

$$J=\iint_{M_1} xy^2dxdy=\int_0^1\left[\int_{x^2}^{x} xy^2dy\right]dx$$ bo'ladi.

Avvalo x ni o'zgarmas deb $\int_{x^2}^{x} xy^2dy$ integralni hisoblaymiz:

$$\int_{x^2}^{x} xy^2dy = x\int_{x^2}^{x} y^2dy = x\cdot\left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=x} = x\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{3}\right)=\frac{x^4}{3}-\frac{x^7}{3}.$$

Unda

$$J=\int_0^1\frac{1}{3}\left(x^4-x^7\right)dx=\frac{1}{3}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^8}{8}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{40}$$

bo'ladi. ▶

3-misol. Ushbu $J=\iint_{M_2} e^{-y^2}dxdy$ ikki karrali integral hisoblansin, bunda $M_2=\{(x,y): 0\le x\le y, \quad 0\le y\le 1\}$

◀Ravshanki, bu holda $\psi_1(y)=0, \quad \psi_2(y)=y, \quad c=0, d=1$ bo'lib, qaralayotgan integral (24.1) formulaga ko'ra

$$J=\iint_{M_2} e^{-y^2}dxdy=\int_0^1\left[\int_0^y e^{-y^2}dx\right]dy$$ bo'ladi.

Keyingi integralni hisoblaymiz:

$$\int_0^1\left[\int_0^y e^{-y^2}dx\right]dy=\int_0^1 e^{-y^2}\left[\int_0^y dx\right]dy=\int_0^1 e^{-y^2}\cdot(x)\Big|_{x=0}^{x=y}dy=\int_0^1 ye^{-y^2}dy=$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_{y=0}^{y=1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

Demak, $\iint_{M_2} e^{-y^2}dxdy=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$.▶

§.25 Ikki karrali integralning tadbiqlari. Ikki karrali integral yordamida yuza va hajmni hisoblash. Massa va o'rta qiymat inersiya momentini hisoblash

Tekislikdagi P shunday soha (to'plam) bo'lsinki, uni koordinata o'qlariga parallel to'g'ri chiziqlar bilan bo'lakchalarga ajratilish natijasida hosil bo'lgan bo'lakchalar yuqorida qaralgan M, M_1, M_2 ko'rinishdagi sohalar bo'lsin.

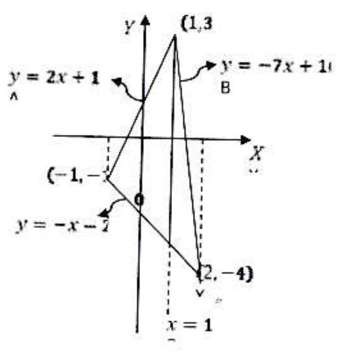
Masalan, $z=f(x,y)$ funksiya tekislikdagi P sohada uzluksiz bo'lib, bu soha yuqorida aytilgan ko'rinishdagi M, M_1, M_2 sohalarga ajralsin. Unda

$$\iint_P f(x,y)dxdy=\iint_M f(x,y)dxdy+\iint_{M_1} f(x,y)dxdy+\iint_{M_2} f(x,y)dxdy$$

bo'ladi.

4-misol. Ushbu $J=\iint_D (2x+3y+1)dxdy$

ikki karrali integral hisoblansin, bunda P to'plam tekislikda (-1, -1), (2, -4), (1, 3) nuqtalarni birlashtirishdan hosil bo'lgan uchburchak (25.1-chizma).



25.1-chizma

◀Avvalo ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

dan foydalanib uchburchak tomonlarining tenglamalarini topamiz. Ular 25.1 - chizmada ko'rsatilgan.

So'ng $x=1$ to'g'ri chiziq yordamida P to'plamni P_1 va P_2 to'plamlarga ajratamiz, bunda

$$P_1=\{(x,y): \quad -1\le x\le 1, \quad -x-2\le y\le 2x+1\}$$

$$P_2=\{(x,y): \quad 1\le x\le 2, \quad -x-2\le y\le -7x+10\}$$

bo'ladi. Integral xossasiga ko'ra

$$\iint_P (2x+3y+1)dxdy = \iint_{P_1} (2x+3y+1)dxdy + \iint_{P_2} (2x+3y+1)dxdy$$

bo'ladi.

Endi bu tenglikning o'ng tomonidagi integrallarni hisoblaymiz:

$$\iint_{P_1} (2x+3y+1)dxdy = \int_{-1}^{1}\left[\int_{-x-2}^{2x+1} (2x+3y+1)dy\right]dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(2xy+\frac{3}{2}y^2+y\right)\Bigg|_{y=-x-2}^{y=2x+1} dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{21}{2}x^2+9x-\frac{3}{2}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{21}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+9\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}x\right)\Bigg|_{x=-1}^{x=1} = 4,$$

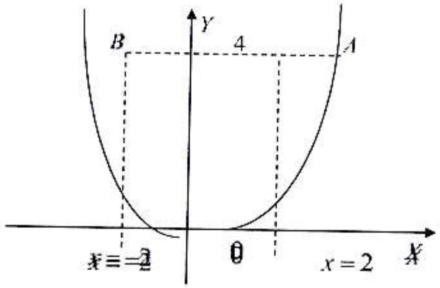
$$\iint_{P_2} (2x+3y+1)dxdy = \int_{1}^{2}\left[\int_{-x-2}^{-7x+10} (2x+3y+1)dy\right]dx =$$

$$= \int_{1}^{2}\left(2xy+\frac{3}{2}y^2+y\right)\Bigg|_{y=-x-2}^{y=-7x+10} dx = -1$$

Demak, $\iint_P (2x+3y+1)dxdy = 4+(-1)=3.$

5-misol. Ushbu $\int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} f(x,y)dy$ integralda integrallash tartibi o'zgartirilsin.

◄Avvalo integrallash chegaralariga ko'ra integrallash sohasini aniqlaymiz.



25.2-chizma

Buning uchun x o'zgaruvchini x bo'yicha integrallash chegaralariga tenglab, y o'zgaruvchini y bo'yicha integrallash chegaralariga tenglab olamiz:

$$x=-2, \quad x=2, \quad y=x^2, \quad y=4.$$

Bu chiziqlarni tekislikda tasvirlab integrallash sohasini topamiz (25.2- chizma)

Endi integrallashni boshqa tartibda, avvalo x bo'yicha, so'ng y bo'yicha bajaramiz. $y=x^2$ni x ga nisbatan echamiz. Unda $x=-\sqrt{y}$, $x=\sqrt{y}$ bo'ladi. Demak, $-\sqrt{y}\le x\le\sqrt{y}$. Ravshanki, $0\le y\le 4$ bo'ladi. Demak,

$$\int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} f(x,y)dy = \int_{0}^{4} dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx \text{ bo'ladi.}$$

a) O'zgaruvchilarini almashtirish bilan ikki karrali integrallarni hisoblash. Ba'zan, integrallarda o'zgaruvchi x va y larni almashtirish natijasida integrallanadigan funksiya ham, integrallash to'plami ham soddaroq ko'rinishga keladi va ularni hisoblash osonroq bo'ladi.

Aytaylik, ushbu $\iint_D f(x,y)dxdy$

integralni hisoblash kerak bo'lsin. Bu integralda

$x=r\cos\varphi,$
$y=r\sin\varphi$ almashtirish bajaramiz,

Natijada

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_M f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot rd\varphi dr \qquad (24.2)$$

bo'ladi. Agar

$$M=\{(\varphi,r): \alpha\le\varphi\le\beta, \quad r_1(\varphi)\le r\le r_2(\varphi)\}$$

bo'lsa, $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{\alpha}^{\beta}\left[\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot rdr\right]d\varphi \qquad (24.3)$

bo'ladi.

$J=\iint_M (x^2+y^2)dxdy$ ikki karrali integral hisoblansin, bunda

$$M=\{(x,y): 0\le x\le 1, \quad 0\le y\le 1\}$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\iint_M (x^2-y^2)dxdy$

ikki karrali integral hisoblansin, bunda

$$M=\{(x,y): 0\le x\le 1, \quad 0\le y\le 1\}$$

2. $\iint_M (\sin x^2-\cos y^2)dxdy$

ikki karrali integral hisoblansin, bunda

$$M=\{(x,y): 0\le x\le \frac{\pi}{2}, 0\le y\le \pi\}$$

3. $\iint\limits_M (\sin x+\cos y)dxdy$

ikki karrali integral hisoblansin, bunda

$$M=\{(x,y): 0\le x\le \frac{\pi}{2}, 0\le y\le \pi\}$$

4. $\iint\limits_M (\sin^2 x-\cos^2 y)dxdy$

ikki karrali integral hisoblansin, bunda

$$M=\{(x,y): 0\le x\le \frac{\pi}{2}, 0\le y\le \pi\}$$

5. $\iint\limits_M (\ln x+\ln y)dxdy$

ikki karrali integral hisoblansin, bunda

$$M=\{(x,y): 0\le x\le e, 0\le y\le e\}$$

6. $\iint\limits_M (\lg x+\lg y)dxdy$

ikki karrali integral hisoblansin, bunda

$$M=\{(x,y): 0\le x\le 10, 0\le y\le 100\}$$

7. $\iint\limits_M (\sin x-\cos y)dxdy$

ikki karrali integral hisoblansin, bunda

$$M=\{(x,y): 0\le x\le \pi, 0\le y\le \frac{\pi}{2}\}$$

§ 26. Uch karrali integralni hisoblash. Silindrik va sferik koordinatalar sistemasida uch karrali integral. Uch karrali integral tadbiqlari

26.1. Uch karrali integral va ularni hisoblash

Aytaylik, $u=f(x,y,z)$ funksiya fazodagi biror (V) to'plamda (sohada) berilgan bo'lsin. Bu sohaning (jismning) hajmini esa V deylik.

(V) ni (sirtlar yordamida) n ta bo'lakka

$$(V_1),(V_2),...,(V_n)$$

bo'lamiz. Ularning diametrlari

$$d_1,d_2,...,d_n$$

bo'lib, hajmlari esa $V_1,V_2,...,V_n$ bo'lsin.

Har bir (V_k) da ixtiyoriy (x_k,y_k,z_k) nuqtani olib, $u=f(x,y,z)$ funksiyaning shu nuqtadagi qiymati $f(x_k,y_k,z_k)$ ni (V_k) bo'lakchaning hajmi V_k ga ko'paytiramiz:

$$f(x_k,y_k,z_k)\cdot V_k \qquad (k=1,2,3,...,n).$$

Bu ko'paytmadan quyidagi

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\cdot V_k$$

yig'indi tuzamiz. Uni integral yig'indi deyiladi.

Agar $\max\limits_k d_k\to 0$ da σ yig'indi chekli limitga ega bo'lsa, bu limit $f(x,y,z)$ funksiyaning (V) bo'yicha uch karrali integrali deyiladi va $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz$ kabi belgilanadi.

Demak, $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz=\lim\limits_{\max\limits_k d_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\cdot V_k$.

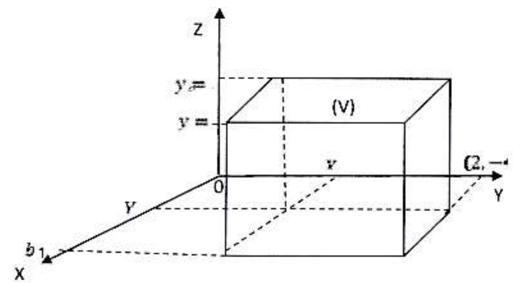
Agar $u=f(x,y,z)$ funksiya (V) da uzluksiz bo'lsa, unda bu funksiyaning uch karrali integrali mavjud bo'ladi.

Ko'p hollarda uch karrali integral takrorlab integrallash yordamida hisoblanadi.

a) Aytaylik, integrallash sohasi (V) quyidagi

$$(V)=\{(x,y,z):\ a\le x\le b,\ c\le y\le d,\ p\le z\le q\}$$

to'plamdan- parallelepipiddan iborat bo'lsin (26.1- chizma).



26.1- chizma

Bu holda $u = f(x,y,z)$ funksiyaning (V) bo'yicha uch karrali integral

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b\left[\int_c^d\left(\int_p^q f(x,y,z)dz\right)dy\right]dx \qquad (26.1)$$

bo'ladi.

1-misol. Ushbu $J = \iiint_{(V)}(x+y+z)dxdydz$ integral hisoblansin, bunda

$$(V) = \{(x,y,z):\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3,\ 0 \le z \le 2\}$$

parallelopipiddan iborat.

◀Berilgan uch karrali integral (26.1) formulaga ko'ra

$$\iiint_{(V)}(x+y+z)dxdydz = \int_0^1\left[\int_0^3\left(\int_0^2(x+y+z)dz\right)dy\right]dx$$

bo'ladi. Uni takrorlab integrallash yordamida hisoblaymiz.

Avvalo $\int_0^2(x+y+z)dz$

integralni hisoblaymiz, bunda x va y lar o'zgarmas deb qaraladi.

$$\int_0^2(x+y+z)dz = (xz+yz+\frac{z^2}{2})\Big|_{z=0}^{z=2} = 2x+2y+2 = 2(x+y+1)$$

Unda

$$\int_0^3\left(\int_0^2(x+y+z)dz\right)dy = \int_0^3 2(x+y+1)dy = 2(xy+\frac{y^2}{2}+y)\Big|_{y=0}^{y=3} =$$

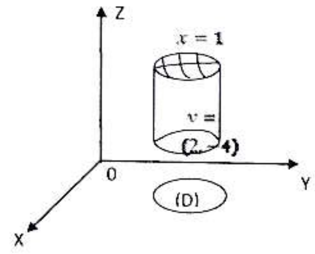
$$= 2(3x+\frac{9}{2}+3) = 6x+15$$

va nihoyat

$$\int_0^1\left[\int_0^3\left(\int_0^2(x+y+z)dz\right)dy\right]dx = \int_0^1(6x+15)dx = (3x^2+15x)\Big|_0^1 = 18$$

bo'ladi.▶

Aytaylik, fazoda (V) soha (to'plam) pastdan $z = \Psi_1(x,y)$, yuqoridan $z = \Psi_2(x,y)$ sirtlar bilan, yon tomondan esa OZ o'qiga parallel silindrik sirt bilan chegaralangan jism bo'lib, uning XOY tekislikdagi proyeksiyasi D bo'lsin.



26.2- chizma

Agar $u = f(x,y,z)$ funksiya (V) da, $z = \Psi_1(x,y)$, $z = \Psi_2(x,y)$ funksiyalar esa D uzluksiz bo'lsa,

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iint_D\left[\int_{\Psi_1(x,y)}^{\Psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dxdy \qquad (26.2)$$

bo'ladi.

Agar $D = \{(x,y):\ a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$

bo'lib, $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(x)$ funksiyalar $[a,b]$ da uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left(\int_{\Psi_1(x,y)}^{\Psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dy\right]dx \qquad (26.3)$$

bo'ladi.

2-misol. Ushbu

$$J = \iiint_{(V)}\frac{1}{(1+x+y+z)^4}dxdydz$$

integral hisoblansin, bunda

$$(V) = \{(x,y,z):\ o \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x,\ o \le z \le 1-x-y\}$$

◀Bu integralni (26.2) formuladan foydalanib hisoblaymiz. (26.3) formulaga ko'ra

$$\iiint_{(V)}\frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^4} = \int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^4}\right)dy\right]dx$$

bo'ladi.

Ravshanki,

$$\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^4}dz=\int_0^{1-x-y}(1+x+y+z)^{-4}d(1+x+y+z)=$$

$$=\frac{(1+x+y+z)^{-3}}{-3}\Bigg|_{z=0}^{z=1-x-y}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(1+x+y)^3}-\frac{1}{8}\right];$$

$$\int_0^{1-x}\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(1+x+y)^3}-\frac{1}{8}\right]dy=\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2(1+x+y)^2}-\frac{1}{8}y\right]\Bigg|_{y=0}^{y=1-x}=$$

$$=\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2\cdot 2^2}-\frac{1-x}{8}+\frac{1}{2(1+x)^2}\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2(1+x)^2}-\frac{2-x}{8}\right].$$

Unda

$$\int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^4}\right)dy\right]dx=\int_0^1\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2(1+x)^2}-\frac{2-x}{8}\right]dx=$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^2}-\frac{1}{12}\int_0^1 dx+\frac{1}{24}\int_0^1 xdx=-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(1+x)}\Bigg|_0^1-\frac{x}{12}\Bigg|_0^1+\frac{x^2}{48}\Bigg|_0^1=$$

$$=-\frac{1}{12}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}+\frac{1}{48}=\frac{1}{48}$$

bo'ladi. Demak, $J=\frac{1}{48}$.▶

b) O'zgaruvchilarni almashtirish bilan uch karrali integrallarni hisoblash.

1) Agar $V=\iiint_{(V)}dxdydz$

uch karrali integralda o'zgaruvchilarni quyidagicha

$x=r\cos\varphi,$

$y=r\sin\varphi,$

$z=z$

almashtirilsa, (silindrik koordinatalarga o'tilsa) u holda

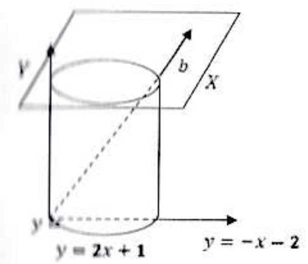
$$\iiint_{(V)}f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{P}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi,z)\cdot zdrd\varphi dz \quad (26.4)$$

bo'ladi, bunda

$$0\le r<+\infty,\quad 0\le\varphi<2\pi,\quad -\infty<z<+\infty$$

3-misol. Ushbu $\iiint_{(V)}z\sqrt{x^2+y^2}dzdxdy$

uch karrali integral hisoblansin, bunda (V) soha $z=0$, $z=a$ tekisliklar hamda $y^2=2x-x^2$ silindrik sirt bilan chegaralangan jism



26.3-chizma

◀Bu integralni hisoblash uchun o'zgaruvchilarini quyidagicha

$x=r\cos\varphi,$

$y=r\sin\varphi,$

$z=z$

almashtiramiz. Bu holda φ o'zgaruvchi $-\frac{\pi}{2}$ dan $\frac{\pi}{2}$ gacha o'zgaradi; $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, r o'zgaruvchining o'zgarish oralig'ini topish uchun

$y^2=2x-x^2$, ya'ni $x^2+y^2=2x$

da $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ deymiz:

$r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=2r\cos\varphi,\quad r^2=2r\cos\varphi$

Keyingi tenglikdan $r=0$, $r=2\cos\varphi$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, r o'zgaruvchi 0 bilan $2\cos\varphi$ oralig'ida o'zgaradi. Ravshanki, $0\le z\le a$

Unda (26.7) formulasiga ko'ra

$$\iiint_{(V)}z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{2\cos\varphi}\left(\int_0^a z\cdot\sqrt{z^2}rdz\right)dr\right]d\varphi \text{ bo'ladi.}$$

Endi bu tenglikdagi takroriy integrallarni hisoblaymiz:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{2\cos\varphi}\left(\int_0^a z\cdot\sqrt{z^2}rdz\right)dr\right]d\varphi=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\cos\varphi}r^2\left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=a}dr\right)d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=2\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{8a^2}{6}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi=\frac{4}{3}a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\varphi\right)\cos\varphi d\varphi=\frac{4}{3}a^2\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{4}{3}a^2\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}a^2\left(2-\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{9}a^2$$

Demak, $\iiint\limits_{(V)} z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \frac{16}{9}a^2$. ▶

2) Agar $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz$

uch karrali integralda o'zgaruvchilarni quyidagicha

$x = r\cos\varphi\cdot\sin\theta,$

$y = r\sin\varphi\cdot\sin\theta,$

$z = r\cos\theta$

almashtirilsa (sferik koordinatalarga o'tilsa) u holda

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(D)} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi \quad (26.4)$$

bo'ladi, bunda $0\le r<+\infty$, $0\le\varphi<2\pi$, $0\le\theta\le\pi$ deb qaraladi.

4-misol. Ushbu $J=\iiint\limits_{(V)} dxdydz$

integral hisoblansin, bunda (V) soha fazoda quyidagi

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^3 = a^2z^4$$

sirt bilan chegaralangan jismning birinchi oktandagi qismi.

◀Bu integralda

$x = r\cos\varphi\cdot\sin\theta,$

$y = r\sin\varphi\cdot\sin\theta,$

$z = r\cos\theta$

almashtirishni bajaramiz. Bunda sirt tenglamasi $r^6 = a^2r^4\cos^4\theta$ bo'lib, undan $r=0$, $r^2=a^2\cos^4\theta$, $r=a\cos^2\theta$ bo'lishi kelib chiqadi.

Sirtni birinchi oktantda qaralayotgani uchun

$$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le r\le a\cos^2\theta$$

bo'ladi. Demak, qaralayotgan integral formulaga ko'ra

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{a\cos^2\theta}\sin\theta\cdot r^2dr\right)d\theta\right]d\varphi$$

bo'ladi.

Endi takroriy integrallarni hisoblaymiz:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{a\cos^2\theta}\sin\theta\cdot r^2dr\right)d\theta\right]d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cdot\left(\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=a\cos\theta}d\theta\right)d\varphi =$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^3\frac{\cos^6\theta\sin\theta}{3}d\theta\right]d\varphi = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{\cos^7\theta}{7}\right)\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}d\varphi = \frac{a^3}{21}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi = \frac{a^3}{21}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Demak, $J=\frac{a^3\pi}{42}$. ▶

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $J=\iiint\limits_{(V)}(x-y+z)dxdydz$ integral hisoblansin, bunda

$(V)=\{(x,y,z): 0\le x\le 3, 0\le y\le 5, 0\le z\le 6\}$

2. $J=\iiint\limits_{(V)}(x-y-z)dxdydz$ integral hisoblansin, bunda

3. $J=\iiint\limits_{(V)}dxdydz$ integral hisoblansin, bunda (V) soha fazoda quyidagi

$(x^3+y^3+z^3)^2=a^4z^2$

4. $J=\iiint\limits_{(V)}dxdydz$ integral hisoblansin, bunda (V) soha fazoda quyidagi

$(x+y+z)^5=az$

5. integral hisoblansin, bunda (V) soha fazoda quyidagi

$(x+y+z)^2=az^2$

6. $J=\iiint\limits_{(V)}dxdydz$ integral hisoblansin, bunda (V) soha fazoda quyidagi

$(x^2+y^2+z^2)^2=az^2$

7. $J=\iiint\limits_{(V)}(x+y-z)dxdydz$ integral hisoblansin, bunda

$(V)=\{(x,y,z): 0\le x\le 4, 0\le y\le 3, 0\le z\le 5\}$

§ 27. I- va II- tur egri chiziqli integrallar (geometric va fizik ma'nosi). Grin formulasi

Faraz qilaylik, tekislikdagi biror D to'plamda

$$z = z(x,y) \quad (27.1)$$

funksiya berilgan bo'lsin.

Ma'lumki, bu funksiyaning grafigi (umuman aytganda) fazodagi biror (S) sirtni tasvirlaydi. Odatda, (27.1) tenglik (S) sirtning tenglamasi deyiladi.

Agar $z(x,y)$ funksiya D da uzluksiz $z'_x(x,y)$, $z'_y(x,y)$ xususiy hosilalarga ega bo'lsa, unda bu sirt yuzaga ega bo'lib, uning yuzi ikki karrali integral orqali quyidagi formula yordamida

$$S = \iint_D \sqrt{1 + z'^2_x(x,y) + z'^2_y(x,y)}\,dxdy \quad (27.2)$$

topiladi.

Aytaylik, (S) sirtda (sirt nuqtalari to'plamida) $f(x,y,z)$ funksiya aniqlangan bo'lsin.

(S) sirtni undagi chiziqlar yordamida n ta

$$(S_1),(S_2),\dots,(S_n)$$

bo'lakka ajratamiz. So'ng (S_k) bo'lakchaning yuzini ΔS_k bilan belgilaymiz. $(k = 1,2,3,\dots,n)$.

Bu (S_k) bo'lakchada ixtiyoriy (x_k, y_k, z_k) nuqtani olib, funksiyaning shu nuqtadagi qiymati $f(x_k, y_k, z_k)$ ni ΔS_k ga ko'paytiramiz:

$$f(x_k, y_k, z_k)\cdot\Delta S_k \qquad (k = 1,2,3,\dots,n).$$

Ko'paytmalardan tuzilgan ushbu

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\cdot\Delta S_k \quad (27.3)$$

yig'indi $f(x,y,z)$ funksiyaning integral yig'indisi deyiladi. (S_k) $(k = 1,2,3,\dots,n)$ bo'lakchalar diametrlarining eng kattasini λ deylik. Agar $\lambda \to 0$ da (27.3) yig'indi

chekli limitga ega bo'lsa, bu limit $f(x,y,z)$ funksiyaning (S) sirt bo'yicha birinchi tur sirt integrali deyiladi va $\iint_{(S)} f(x,y,z)dS$

kabi belgilanadi. Demak, $\iint_{(S)} f(x,y,z)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\cdot\Delta S_k$

Eslatma. *Agar* $f(x,y,z) \equiv 1$ *bo'lsa, u holda*

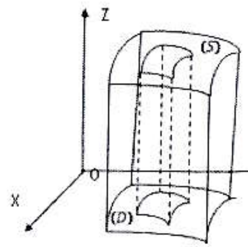
$$\iint_{(S)} 1\cdot dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} 1\cdot\Delta S_k = \lim_{\lambda\to 0} S = S$$

bo'ladi. Demak, bu holda qaralayotgan $z = z(x,y)$ *sirtning yuzini ifodalovchi ushb* $S = \iint_{(S)} dS$ *formulaga kelamiz.*

Birinchi tur sirt integrallari ko'p hollarda ikki karrali integrallarga keltirilib hisoblanadi.

Aytaylik, fazodagi (S) sirt $z = z(x,y)$

tenglama bilan berilgan bo'lib, bunda $z(x,y)$ funksiya tekislikdagi (D) to'plamda uzluksiz hamda uzluksiz $z'_x(x,y)$, $z'_y(x,y)$ xususiy hosilalariga ega. Ayni paytda bu (D) to'plam (S) sirtning XOY tekisligidagi proyeksiyasi (27.1-chizma).



27.1-chizma

Faraz qilaylik, $f(x,y,z)$ funksiya (S) sirtda berilgan va uzluksiz bo'lsin. (S) sirtni, undagi chiziqlar yordamida n ta bo'lakka ajratib, har bir bo'lakchada ixtiyoriy (x_k, y_k, z_k) nuqtani olib, $f(x,y,z)$ funksiyaning intgeral yig'indisi

$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\cdot\Delta S_k$ ni tuzamiz.

(x_k, y_k, z_k) nuqta sirt bo'lagi (S_k) ga tegishli bo'lgani uchun (ya'ni nuqta $z = z(x,y)$ sirtda yotgani uchun) $z_k = z(x_k, y_k)$ bo'ladi.

Ikkinchi tomondan, (27.2) formulaga ko'ra

$$\Delta S_k = \iint\limits_{(D_k)} \sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}\,dxdy$$

bo'ladi, bunda (D_k) to'plam (S_k) sirtning XOY tekisligidagi proyeksiyasi.

O'rta qiymat haqidagi teoremadan foydalanib topamiz:

$$\Delta S_k = \sqrt{1+z_x'^2(x_k,y_k)+z_y'^2(x_k,y_k)}\cdot \Delta D_k.$$

Natijada integral yig'indi ushbu

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z(x_k,y_k))\cdot\sqrt{1+z_x'^2(x_k,y_k)}\cdot \Delta D_k$$

ko'rinishiga keladi. Bu esa (D) da uzluksiz bo'lgan

$$f(x,y,z(x,y))\cdot\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}$$

funksiyaning (ikki o'zgaruvchili funksiyaning) integral (ikki karrali integral) yig'indisi ekanligini payqash qiyin emas.

Keyingi tenglikda limitga o'tish bilan

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{(D)} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}\,dxdy \quad (27.4)$$

bo'lishini topamiz.

(27.4) formula yordamida birinchi tur sirt integrallari hisoblanadi.

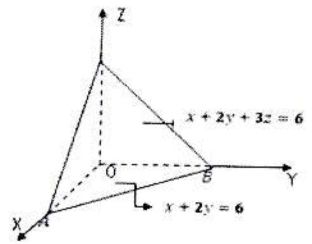
1-Misol. *Ushbu* $\iint\limits_{(S)}(6x+4y+3z)ds$

birinchi tur sirt integrali hisoblansin, bunda (S) *sirt quyidagi*

$$x+2y+3z=6$$

tekislikning birinchi oktantdagi qismi.

◀(S) sirt 27.2–chizmada tasvirlangan bo'lib, uning XOY tekislikdagi proyeksiyasi $(D)-ABO$ uchburchakdan iborat.



27.2-chizma

Ravshanki,

$$z = \frac{1}{3}(6-x-2y),$$

$$z_x'(x,y) = -\frac{1}{3},\quad z_y'(x,y) = -\frac{2}{3}$$

$$1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y) = 1+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}=\frac{14}{9}$$

(27.4) formuladan foydalanib topamiz:

$$\iint\limits_{(S)}(6x+4y+3z)ds = \iint\limits_{(D)}\left(6x+4y+3\frac{1}{3}(6-x-2y)\right)\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\frac{14}{9}}dxdy = \frac{\sqrt{14}}{3}\iint\limits_{(D)}(5x+2y+6)dxdy$$

Keyingi ikki karrali integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\iint\limits_{(D)}(5x+2y+6)dxdy = \int_0^3\left[\int_0^{6-2y}(5x+2y+6)dx\right]dy = \int_0^3\left(\frac{5}{2}x^2+2xy+6x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=6-2y}dy =$$

$$6\int_0^3(y^2-10y+21)dy = 6\left(\frac{y^3}{3}-5y^2+21y\right)\Bigg|_0^3 = 162$$

Demak,

$$\iint\limits_{(S)}(6x+4y+3z)ds = \frac{\sqrt{14}}{3}\cdot 162 = 54\cdot\sqrt{14}. ▶$$

Birinchi tur sirt integrali yordamida sirtlarning yuzini, massali sirtning massasini, og'irlik markazlarining koordinatalarini, inersiya momentlarini topish mumkin.

Masalan, massali (S) sirtning massasi

$$m = \iint\limits_{(S)}\rho(x,y,z)dS \quad (27.5)$$

bo'ladi, bunda $\rho(x,y,z)$- zichlik.

2-Misol. *Ushbu*

$$x^2+y^2+z^2=a^2,\quad z\ge 0$$

yarim sfera bo'yicha massa tarqatilgan bo'lib, uning har bir (x,y,z) *nuqtasidagi zichlik*

$$\rho(x,y,z)=\frac{z}{a}$$

bo'lsin. Massa topilsin.

◀Bu massa (27.5) formulaga ko'ra

$$m=\iint_{(S)}\frac{1}{a}z\,ds=\frac{1}{a}\iint_{(S)}z\,ds$$

bo'ladi, bunda (S) berilgan yarim sfera:

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

Endi sirt integralni ikki karrali integralga keltirib hisoblaymiz. Ravshanki,

$$\iint_{(S)}z\,ds=\iint_{(D)}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}\,dxdy,$$

bunda (D) yarim sferaning XOY tekisligidagi proyeksiyasi bo'lib, u

$$x^2+y^2\le a^2$$

doiradan iborat bo'ladi.

Endi $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ funksiyaning xususiy hosilalarini hisoblab, $\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}$ ning qiymatini topamiz.

Ravshanki,

$$z_x'(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$z_y'(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot(-2y)=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Natijada

$$\iint_{(S)}z\,ds=\iint_{(D)}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy=a\iint_{x^2+y^2\le a^2}dxdy=a\pi a^2$$

bo'lib, $m=\frac{1}{a}\iint_{(S)}z\,ds=\frac{1}{a}\cdot a\cdot\pi a^2=\pi a^2$

bo'ladi.

27.2. Ikkinchi tur egri chiziqli integrallar tushunchasi

Tekislikda $\breve{AB}$ egri chiziq va unda $f(x,y)$ funksiya berilgan bo'lsin. $\breve{AB}$ egri chiziqni (yoyni)

$$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n \qquad (A_0=A, \quad A_n=B)$$

nuqtalar yordamida n ta

$$\breve{A_kA_{k+1}} \qquad (k=1,2,3,\ldots,n)$$

bo'lakka bo'lamiz. Bu $\breve{A_{k-1}A_k}$ yoyning OX o'qidagi proeksiyasini Δx_k, OY o'qidagi proeksiyasi Δy_k deylik. Har bir $\breve{A_{k-1}A_k}$ yoyda ixtiyoriy (x_k,y_k) nuqta olib, bu nuqtadagi funksiyaning $f(x_k,y_k)$ qiymatini mos ravishda Δx_k va Δy_k ko'paytirib, ushbu

$$\sigma_1=\sum_{k=1}^{n}f(x_k,y_k)\cdot\Delta x_k, \qquad \sigma_2=\sum_{k=1}^{n}f(x_k,y_k)\cdot\Delta y_k$$

yig'indilarni hosil qilamiz.

Agar $\lambda\to0$ da bu yig'indilar chekli limitga ega bo'lsa, bu limitlar $f(x,y)$ funksiyaning $\breve{AB}$ egri chizig'i bo'yicha ikkinchi tur egri chiziqli integrallari deyiladi va mos ravishda $\int_{\breve{AB}}f(x,y)dx$ $\int_{\breve{AB}}f(x,y)dy$ kabi belgilanadi.

Demak, $\int_{\breve{AB}}f(x,y)dx=\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^{n}f(x_k,y_k)\cdot\Delta x_k,$

$$\int_{\breve{AB}}f(x,y)dy=\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^{n}f(x_k,y_k)\cdot\Delta y_k.$$

Eslatma. Ikkinchi tur egri chiziqli integrallar $\breve{AB}$ egri chiziqning yo'nalishiga bog'liq bo'lib,

$$\int_{\breve{BA}}f(x,y)dx=-\int_{\breve{AB}}f(x,y)dx,$$

$$\int_{\breve{BA}}f(x,y)dy=-\int_{\breve{AB}}f(x,y)dy$$

bo'ladi.

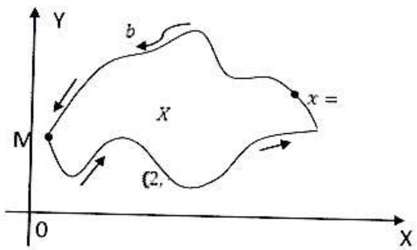
Agar $A\breve{B}$ egri chiziq OX o'qiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq kesmasidan iborat bo'lsa, $\int_{A\breve{B}} f(x,y)dx = 0$, OY o'qiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq kesmasidan iborat bo'lsa, $\int_{A\breve{B}} f(x,y)dy = 0$ bo'ladi.

Faraz qilaylik, $A\breve{B}$ egri chiziqda ikkita $P(x,y)$ va $Q(x,y)$ funksiyalar berilgan bo'lib, $\int_{A\breve{B}} P(x,y)dx$, va $\int_{A\breve{B}} Q(x,y)dy$ ularning ikkinchi tur egri chiziqli integrallari bo'lsin.

Ushbu $\int_{A\breve{B}} P(x,y)dx + \int_{A\breve{B}} Q(x,y)dy$ yig'indi ikkinchi tur egri chiziqli integralning umumiy ko'rinishi deyiladi va $\int_{A\breve{B}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ kabi yoziladi.

Demak, $\int_{A\breve{B}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{A\breve{B}} P(x,y)dx + \int_{A\breve{B}} Q(x,y)dy$.

Aytaylik, K yopiq egri chiziqda $f(x,y)$ funksiya berilgan bo'lsin (27.3-chizma).



27.3-chizma

Bu yopiq K chiziqda yo'nalish quyidagicha aniqlanadi, shunday yo'nalish musbat deb qabul qilinadiki, kuzatuvchi yopiq chiziq bo'ylab xarakat qilganda, yopiq chiziq bilan chegaralangan soha unga nisbatan har doim chap tomonda yotadi.

Ushbu

$$\int_{Ma\breve{N}} f(x,y)dx + \int_{Nb\breve{M}} f(x,y)dx$$

yig'indi $f(x,y)$ funksiyaning K yopiq chiziq bo'yicha ikkinchi tur egri chiziqli integrali deyiladi va

$$\oint_K f(x,y)dx$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\oint_K f(x,y)dx = \int_{Ma\breve{N}} f(x,y)dx + \int_{Nb\breve{M}} f(x,y)dx.$$

Xuddi shunga o'xshash

$$\oint_K f(x,y)dy \quad \oint_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

integrallar ta'riflanadi.

27.3. Ikkinchi tur egri chiziqli integrallarni hisoblash

Aytaylik, $f(x,y)$ funksiya $A\breve{B}$ egri chiziqda berilgan va uzluksiz bo'lsin.

$a)$ Agar $A\breve{B}$ egri chiziq ushbu

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

sistema bilan berilgan bo'lib, $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar $[\alpha,\beta]$ da uzluksiz $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ hosilalarga ega bo'lsa, u holda

$$\int_{A\breve{B}} f(x,y)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\cdot\varphi'(t)dt, \qquad (27.2)$$

$$\int_{A\breve{B}} f(x,y)dy = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\cdot\psi'(t)dt \qquad (27.3)$$

$$\int_{A\breve{B}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \left[P(\varphi(t),\psi(t))\cdot\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\cdot\psi'(t)\right]dt, \quad 27.4)$$

bo'ladi.

$b)$ Agar $A\breve{B}$ egri chiziq ushbu

$$y = y(x) \qquad (a \le x \le b)$$

tenglama bilan aniqlangan bo'lib, $y = y(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz

$y'(x)$ hosilalarga ega bo'lsa, u holda

$$\int_{A\breve{B}} f(x,y)dx = \int_a^b f(x,y(x))dx,$$

$$\int_{A\breve{B}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left[P(x,y(x)) + Q(x,y(x))\cdot y'(x)\right]dx \qquad (27.5)$$

bo'ladi.

c) Agar $A\breve{B}$ egri chiziq ushbu $x = x(y) \qquad (c \le y \le d)$

tenglama bilan aniqlangan bo'lib, $x = x(y)$ funksiya $[c,d]$ da uzluksiz

$x'(y)$ hosilalarga ega bo'lsa, u holda $\int_{A\breve{B}} f(x,y)dy = \int_c^d f(x(y),y)dy,$

$$\int_{A\breve{B}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_c^d \left[P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),y)\right]dy \qquad (27.5)$$

bo'ladi.

1-misol. Ushbu $\int_{A\breve{B}} y^2dx + x^2dy$

ikkinchi tur egri chiziqli integral hisoblansin, bunda $A\breve{B}$ egri chiziq

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ellipsning yuqori yarim tekislikdagi qismi.

◀Ma'lumki, ellipsning parametrik tenglamasi

$$\begin{cases} x = \varphi(t) = a\cos t, \\ y = \Psi(t) = b\sin t \end{cases} \qquad (o \le t \le \pi)$$

bo'ladi. $A = A(a,0)$ nuqtaga parametr t ning $t = 0$ qiymati, $B = B(-a,0)$ nuqtaga esa $t = \pi$ qiymati mos kelib, t parametr 0 dan π gacha o'zgarganda (x,y) nuqta A dan B ga qarab $A\breve{B}$ ni chizib chiqadi.

Bu holda $P(x,y) = y^2, \quad Q(x,y) = x^2$

bo'lishini e'tiborga olib, (27.5) formuladan foydalanib topamiz.

$$\int_{A\breve{B}} y^2dx + x^2dy = \int_0^\pi \left[b^2\sin^2 t(-a\sin t) + a^2\cos^2 t\cdot(b\cos t)\right]dt =$$

$$= ab\int_0^\pi \left(a\cos^3 t - b\sin^3 t\right)dt = -\frac{4}{3}ab^2$$ (qaralsin [2] ▶

2-misol. Ushbu $\int_{A\breve{B}} (4x+y)^2\, dx + 5yx^2dy$

integral hisoblansin, bunda $A\breve{B}$ egri chiziq quyidagi $y = 3x^2$

parabolaning $A = A(0,o), \quad B = B(1,3)$ nuqtalari orasidagi qismi.

◀Bu integralni (27.4) formuladan foydalanib hisoblaymiz:

$$\int_{A\breve{B}} (4x+y)^2\, dx + 5yx^2dy = \int_0^1 \left[4x - 3x^2 + 5x^2\cdot 3x^2\cdot 6x\right]dx =$$

$$= \int_0^1 \left(4x - 3x^2 + 90x^5\right)dx = \left(4\cdot\frac{x^2}{2} - 3\cdot\frac{x^3}{3} + 90\cdot\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 = 16.$$ ▶

27.4. Ikkinchi tur egri chiziqli integrallarning tatbiqlari

a) **Tekis shakilning yuzini topish.** Aytaylik, tekislikda yuzaga ega bo'lgan D shakil berilgan bo'lib, uning chegarasi (konturi – yopiq egri chiziq) ∂D bo'lsin. Bu shaklning S yuzi

$S = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} xdy - ydx$ (27.6) bo'ladi.

3-misol. Ushbu

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

ellips bilan chegaralangan shaklning yuzi topilsin.

◀Bu shaklning yuzini (27.6) formuladan foydalanib topamiz:

$$S=\frac{1}{2}\oint_{\partial D} xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos t\cdot b\cos t+b\sin t\cdot a\sin t)dt=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}dt=\pi ab.$$ ▶

b) **Bajarilgan ishni topish.** Aytaylik, o'zgaruvchi kuch

$$\vec{F}=p(x,y)\cdot\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$$

tekislikdagi $A\breve{B}$ egri chizig'i bo'yicha ish bajarsin, bunda $P(x,y)$ va $Q(x,y)$ uzluksiz funksiyalar bo'lib, ular $\vec{F}$ kuchning koordinata o'qlardagi proeksiyalari. Unda bu kuchning bajargan W

$$W=\int_{A\breve{B}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy \quad (27.7)$$

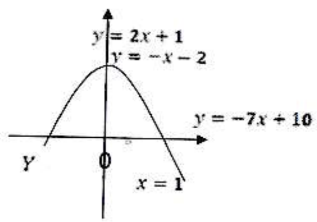
bo'ladi.

4-misol. Ushbu $\vec{F}=(x^2+2y)\cdot\vec{i}+(y^2-2x)\cdot\vec{j}$ kuchning

a) MN kesma bo'yicha, $M=M(-4,0)$, $N=N(0,2)$,

b) MON sniq chiziq bo'yicha,

c) MN yoy, ushbu $y=2-\frac{x^2}{8}$ parabola yoyi bo'yicha bajargan ish hisoblansin.(27.4 - chizma)



27.4-chizma

◀ Kuchning bajargan ishini (27.7) formuladan foydalanib hisoblaymiz:

a) MN **kesma bo'yicha:**

Ravshanki, MN to'g'ri chiziqning tenglamasi

ya'ni

$$y=\frac{1}{2}x+2$$

bo'lib,

$$dy=\frac{1}{2}dx$$

bo'ladi. Unda (27.7) formulaga ko'ra

$$W=\int_{MN}(x^2+2y)dx+(y^2-2x)dy=\int_{-4}^{0}\left[x^2+2\left(\frac{1}{2}x+2\right)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}x+2\right)^2-2x\right)\right]dx=$$

$$=\left(\frac{9}{8\cdot 3}x^3+\frac{x^2}{2}+6x\right)\Big|_{-4}^{0}=40$$

bo'ladi.

b) MON **siniq chiziq bo'yicha:**

Izlanayotgan ish ushbu formula yordamida hisoblanadi:

$$W=\int_{MON}(x^2+2y)dx+(y^2-2x)dy=\int_{M0}(x^2+2y)dx+(y^2-2x)dy+$$

$$+\int_{0N}(x^2+2y)dx+(y^2-2x)dy.$$

Agar $M0$ kesmada $y=0$ ($dy=0$), $0N$ kesmada $x=0$ va $dx=0$ bo'lishini e'tiborga olsak, unda

$$W=\int_{M0}x^2dx+\int_{0N}y^2dy=\int_{-4}^{0}x^2dx+\int_{0}^{2}y^2dy=24.$$

bo'lishini topamiz.

c) MN **yoy, ushbu** $M(-4,0)$ **parabola yoyi bo'yicha:**

Bu holda $M(-4,0)$ va $dy=-\frac{x}{4}dx$ bo'lib,

$$W = \int_{MN} \left(x^2+2y\right)dx + \left(y^2-2x\right)dy = \int_{-4}^{0}\left[x^2+4-\frac{x^2}{4}\right]dx + \left[\left(2-\frac{x^2}{8}\right)^2 - 2x\right]\left(-\frac{x}{4}dx\right)$$

$$= \int_{-4}^{0}\left[-\frac{x^5}{256}+\frac{x^3}{8}+\frac{5}{4}x^2 - x + 4\right]dx = \left(-\frac{x^6}{256\cdot 6}+\frac{x^4}{8\cdot 4}+\frac{5}{4\cdot 3}x^3-\frac{x^2}{2}+4x\right)\Bigg|_{-4}^{0} = 45\frac{1}{3}$$

bo'ladi.▶

Grin formulasi: Agar $P(x,y)$ va $Q(x,y)$ funksiyalar D sohada o'zlarining xususiy hosilalari bilan birgalikda uzluksiz bo'lsa, u holda $\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D\left(\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}\right)dxdy$ bo'ladi.

Bu tenglikka Grin formulasi deyiladi. Bu formula ikkinchi tur egri chiziq bilan ikki karrali integral orasidagi bog'lanishni beradi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\iint_{(S)}(5x-y+2z)$ birinchi tur sirt integrali hisoblansin, bunda (S) sirt quyidagi

2x+y-z=5 tekislikning birinchi oktantdagi qismi.

2. $\iint_{(S)}(3x+2y+z)$ birinchi tur sirt integrali hisoblansin, bunda (S) sirt quyidagi

x+y+z=2 tekislikning birinchi oktantdagi qismi.

3. $\iint_{(S)}(x-y+z)$ birinchi tur sirt integrali hisoblansin, bunda (S) sirt quyidagi

2x+3y-7z=8 tekislikning birinchi oktantdagi qismi.

Ushbu

$$\vec{F} = \left(x^2+2y\right)\cdot\vec{i} + \left(y^2-2x\right)\cdot\vec{j}$$

kuchning

MN a) kesma bo'yicha, $M=M(-4,0)$, $N=N(0,2)$,

4. Ushbu $\vec{F} = (x^2-5y)\vec{i} + (y^2+5x)\vec{j}$

Kuchning MN kesma, M=M(-4,2) , N=N(2,-4) nuqtada bajargan ishini toping

5. Ushbu $\vec{F} = (x^2-5y)\vec{i} + (y^2+5x)\vec{j}$

Kuchning MN yoy , $y=x^2-2$ parabola yoyi buyicha bajargan ishini toping

6. $\iint_{(S)}(x+2y-3z)$ birinchi tur sirt integrali hisoblansin, bunda (S) sirt quyidagi

x+y+z=4 tekislikning birinchi oktantdagi qismi.

7. $\iint_{(S)}(x-2y-z)$ birinchi tur sirt integrali hisoblansin, bunda (S) sirt quyidagi

x+y+z=1 tekislikning birinchi oktantdagi qismi.

VII BO‘LIM. SIRT INTEGRAL

§ 28. I va II tur sirt integrallari. Sirt integrallarining tadbiqlari

28.1. Birinchi tur sirt integrali tushunchasi

Faraz qilaylik, tekislikdagi biror D to‘plamda

$$z = z(x,y) \quad (28.1)$$

funksiya berilgan bo‘lsin.

Ma’lumki, bu funksiyaning grafigi (umuman aytganda) fazodagi biror (S) sirtni tasvirlaydi. Odatda, (28.1) tenglik (S) sirtning tenglamasi deyiladi.

Agar $z(x,y)$ funksiya D da uzluksiz $z'_x(x,y)$, $z'_y(x,y)$ xususiy hosilalarga ega bo‘lsa, unda bu sirt yuzaga ega bo‘lib, uning yuzi ikki karrali integral orqali quyidagi formula yordamida

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1+z'^2_x(x,y)+z'^2_y(x,y)}\,dxdy \quad (28.2)$$

topiladi.

Aytaylik, (S) sirtda (sirt nuqtalari to‘plamida) $f(x,y,z)$ funksiya aniqlangan bo‘lsin.

(S) sirtni undagi chiziqlar yordamida n ta $(S_1),(S_2),...,(S_n)$ bo‘lakka ajratamiz. So‘ng (S_k) bo‘lakchaning yuzini ΔS_k bilan belgilaymiz. $(k=1,2,3,...,n)$.

Bu (S_k) bo‘lakchada ixtiyoriy (x_k,y_k,z_k) nuqtani olib, funksiyaning shu nuqtadagi qiymati $f(x_k,y_k,z_k)$ ni ΔS_k ga ko‘paytiramiz:

$$f(x_k,y_k,z_k)\cdot\Delta S_k \qquad (k=1,2,3,...,n).$$

Ko‘paytmalardan tuzilgan ushbu

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\cdot\Delta S_k \qquad (28.3)$$

yig‘indi $f(x,y,z)$ funksiyaning integral yig‘indisi deyiladi.

(S_k) $(k=1,2,3,...,n)$ bo‘lakchalar diametrlarining eng kattasini λ deylik.

Agar $\lambda\to 0$ da (28.3) yig‘indi chekli limitga ega bo‘lsa, bu limit $f(x,y,z)$ funksiyaning (S) sirt bo‘yicha birinchi tur sirt integrali deyiladi va $\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dS$ kabi belgilanadi.

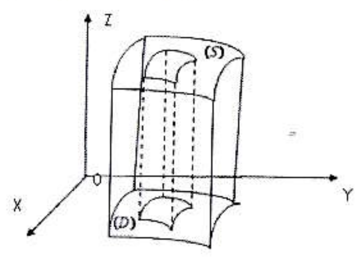
Demak, $\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dS = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\cdot\Delta S_k$

Eslatma. *Agar* $f(x,y,z)\equiv 1$ *bo‘lsa, u holda* $\iint\limits_{(S)} 1\cdot dS = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} 1\cdot\Delta S_k = \lim\limits_{\lambda\to 0} S = S$ *bo‘ladi. Demak, bu holda qaralayotgan* $z=z(x,y)$ *sirtning yuzini ifodalovchi ushbu* $S=\iint\limits_{(S)} dS$ *formulaga kelamiz.*

28.2. Birinchi tur sirt integrallarini hisoblash

Birinchi tur sirt integrallari ko‘p hollarda ikki karrali integrallarga keltirilib hisoblanadi.

Aytaylik, fazodagi (S) sirt $z=z(x,y)$ tenglama bilan berilgan bo‘lib, bunda $z(x,y)$ funksiya tekislikdagi (D) to‘plamda uzluksiz hamda uzluksiz $z'_x(x,y)$, $z'_y(x,y)$ xususiy hosilalariga ega. Ayni paytda bu (D) to‘plam (S) sirtning XOY tekisligidagi proyeksiyasi (28.1-chizma).



28.1-chizma

Faraz qilaylik, $f(x,y,z)$ funksiya (S) sirtda berilgan va uzluksiz bo‘lsin.

(S) sirtni, undagi chiziqlar yordamida n ta bo'lakka ajratib, har bir bo'lakchada ixtiyoriy (x_k, y_k, z_k) nuqtani olib, $f(x,y,z)$ funksiyaning intgeral yig'indisi

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\cdot \Delta S_k$$

ni tuzamiz.

(x_k, y_k, z_k) nuqta sirt bo'lagi (S_k) ga tegishli bo'lgani uchun (ya'ni nuqta $z = z(x,y)$ sirtda yotgani uchun) $z_k = z(x_k, y_k)$ bo'ladi.

Ikkinchi tomondan, (28.2) formulaga ko'ra

$$\Delta S_k = \iint_{(D_k)} \sqrt{1 + z_x'^2(x,y) + z_y'^2(x,y)}dxdy$$

bo'ladi, bunda (D_k) to'plam (S_k) sirtning XOY tekisligidagi proyeksiyasi.

O'rta qiymat haqidagi teoremadan foydalanib topamiz:

$$\Delta S_k = \sqrt{1 + z_x'^2(x_k, y_k) + z_y'^2(x_k, y_k)}\cdot \Delta D_k.$$

Natijada integral yig'indi ushbu

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z(x_k, y_k))\cdot \sqrt{1 + z_x'^2(x_k, y_k)}\cdot \Delta D_k$$

ko'rinishiga keladi. Bu esa (D) da uzluksiz bo'lgan

$$f(x, y, z(x,y))\cdot \sqrt{1 + z_x'^2(x,y) + z_y'^2(x,y)}$$

funksiyaning (ikki o'zgaruvchili funksiyaning) integral (ikki karrali integral) yig'indisi ekanligini payqash qiyin emas.

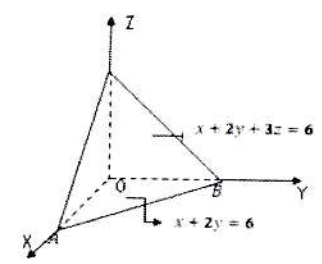
Keyingi tenglikda limitga o'tish bilan

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)ds = \iint_{(D)} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + z_x'^2(x,y) + z_y'^2(x,y)}dxdy \quad (28.4)$$

bo'lishini topamiz. (28.4) formula yordamida birinchi tur sirt integrallari hisoblanadi.

1-Misol. *Ushbu* $\iint_{(S)}(6x + 4y + 3z)ds$ *birinchi tur sirt integrali hisoblansin, bunda* (S) *sirt quyidagi* $x + 2y + 3z = 6$ *tekislikning birinchi oktantdagi qismi.*

◄ (S) sirt 28.2–chizmada tasvirlangan bo'lib, uning XOY tekislikdagi proyeksiyasi (D) – ABO uchburchakdan iborat.



28.2-chizma

Ravshanki, $z = \frac{1}{3}(6 - x - 2y)$,

$$z_x'(x,y) = -\frac{1}{3}, \quad z_y'(x,y) = -\frac{2}{3}$$

$$1 + z_x'^2(x,y) + z_y'^2(x,y) = 1 + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{14}{9}$$

(28.4) formuladan foydalanib topamiz:

$$\iint_{(S)}(6x + 4y + 3z)ds = \iint_{(D)}\left(6x + 4y + 3\frac{1}{3}(6 - x - 2y)\right)\cdot$$

$$\sqrt{\frac{14}{9}}dxdy = \frac{\sqrt{14}}{3}\iint_{(D)}(5x + 2y + 6)dxdy$$

Keyingi ikki karrali integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\iint_{(D)}(5x + 2y + 6)dxdy = \int_0^3\left[\int_0^{6-2y}(5x + 2y + 6)dx\right]dy = \int_0^3\left(\frac{5}{2}x^2 + 2xy + 6x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=6-2y}dy =$$

$$6\int_0^3(y^2 - 10y + 21)dy = 6\left(\frac{y^3}{3} - 5y^2 + 21y\right)\Bigg|_0^3 = 162$$

Demak, $\iint_{(S)}(6x + 4y + 3z)ds = \frac{\sqrt{14}}{3}\cdot 162 = 54\cdot\sqrt{14}.$ ►

28.3. Birinchi tur sirt integrallarining ba'zi tatbiqlari

Birinchi tur sirt integrali yordamida sirtlarning yuzini, massali sirtning massasini, og'irlik markazlarining koordinatalarini, inersiya momentlarini topish mumkin.

Masalan, massali (S) sirtning massasi

$$m=\iint_{(S)}\rho(x,y,z)dS \qquad (28.5)$$

bo'ladi, bunda $\rho(x,y,z)$ - zichlik.

2-Misol. *Ushbu* $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\geq 0$ *yarim sfera bo'yicha massa tarqatilgan bo'lib, uning har bir* (x,y,z) *nuqtasidagi zichlik* $\rho(x,y,z)=\frac{z}{a}$ *bo'lsin. Massa topilsin.*

◄Bu massa (28.5) formulaga ko'ra $m=\iint_{(S)}\frac{1}{a}zds=\frac{1}{a}\iint_{(S)}zds$ bo'ladi, bunda (S) berilgan yarim sfera: $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

Endi sirt integralni ikki karrali integralga keltirib hisoblaymiz.

Ravshanki,

$\iint_{(S)}zds=\iint_{(D)}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}dxdy$, bunda (D) yarim sferaning XOY tekisligidagi proyeksiyasi bo'lib, u $x^2+y^2\leq a^2$ doiradan iborat bo'ladi.

Endi $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ funksiyaning xususiy hosilalarini hisoblab, $\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}$ ning qiymatini topamiz.

Ravshanki,

$$z_x'(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$z_y'(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot(-2y)=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Natijada $\iint_{(S)}zds=\iint_{(D)}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=a\iint_{x^2+y^2\leq a^2}dxdy=a\pi a^2$

bo'lib, $m=\frac{1}{a}\iint_{(S)}zds=\frac{1}{a}\cdot a\cdot\pi a^2=\pi a^2$ bo'ladi.►

28.4. Ikkinchi tur sirt integrali tushunchasi

Ikkinchi tur sirt integrali tushunchasini bayon etishdan avval sirt tomonlari, ikki tomonli sirt tushunchalarini keltiramiz.

Faraz qilaylik, fazoda biror (S) sirt berilgan bo'lsin. Ravshanki, bu sirtning har bir nuqtasida urinma tekislik mavjud bo'lib, urinish nuqtasi sirt bo'lib uzluksiz o'zgara borsa, mos urinma tekislik ham (uning normali ham) o'z holatini uzluksiz o'zgartira boradi .

(S) sirtda biror M_0 nuqtani olaylik. Bu nuqta orqali o'tkazilgan sirt normali ikki yo'nalishga ega bo'lib, ulardan birini tayinlaymiz. So'ng M_0 nuqtadan chiqib, shu M_0 nuqtaga qaytadigan yopiq chiziqni (konturni) qaraymizki, u (S) sirtga tegishli bo'lsin va sirtning chegarasini kesmasin.

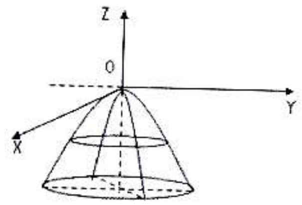
M_0 nuqtada sirt normalini malum yo'nalish, olinganligini e'tiborga olib, o'zgaruvchi M nuqtani M_0dan boshlab, kontur bo'yicha xarakatlantirib yana M_0 nuqtaga qaytganda (bu xolda M nuqta kontor bo'ylab o'zgarganda mos nuqtadagi sirt normali xam o'zgarib boradi) ikki xol sodir bo'ladi:

1) M_0 nuqtadagi sirt normalining yo'nalishi shu nuqtaga qaytib kelganda qarama-qarshisiga o'zgaradi;

2) M_0 nuqtadagi sirt normalining yo'nalishi qaytib shu nuqtaga kelganda ham o'zgarmaydi.

Birinchi holda (S) sirt bir tomonli sirt deyiladi, ikkinchi holda esa (S) sirt ikki tomonli sirt deyiladi.

Masalan, $z=-\left(x^2+y^2\right)$ tenglama bilan aniqlanadigan sirt (giperboloid 28.3-chizma),



28.3-chizma

ikki tomonli sirt bo'ladi. Bu sirt yuqori va quyi (ustki va ostki) tomonlarga ega.

Shuningdek $z^2=1-x^2-y^2$

tenglama bilan aniqlanadigan sirt (markazi (0,0,0) nuqtada, radiusi 1 ga teng sfera) ham ikki tomonli sirt bo'lib, uning tashqi va ichki tomonlari bo'ladi.

Biz ikki tomonli sirtlarni qaraymiz.

Aytaylik, fazoda (S) sirt $z=z(x,y)$ tenglama bilan aniqlangan bo'lib, bunda $z=z(x,y)$ funksiya XOY tekisligidagi (D) da uzluksiz hamda uzluksiz $z'_x(x,y)$, $z'_y(x,y)$ xususiy hosilalarga ega bo'lsin. ((D) to'plam (S) sirtning XOY tekisligidagi proyeksiyasi).

Bu ikki tomonli sirt bo'lib, uning har bir nuqtasida urinma tekislik mavjud.

(S) sirtda, uning chegarasi bilan kesishmaydigan K yopiq chiziqni olaylik. Bu yopiq chiziqning XOY tekisligidagi proyeksiyasi K_n bo'lsin.

Agar (x_0,y_0,z_0) nuqta (S) sirtning K yopiq chiziq bilan chegaralangan qismiga tegishli bo'lib, bu nuqtadagi sirt normali OZ o'q bilan o'tkir burchak tashkil etsa (bunda sirtning ustki tomoni qaralayotgan bo'ladi) K va K_n yopiq chiziqlarning yo'nalishlari musbat bo'lib, K_n bilan chegaralangan shaklning yuzi musbat ishora bilan olinadi.

Agar (x_0,y_0,z_0) nuqtadagi sirt normali OZ o'q bilan o'tmas burchak tashkil etsa (bunda sirtning ostki tomoni qaralayotgan bo'ladi) K ning manfiy yo'nalishiga K_n ning musbat yo'nalishi mos kelib, K_n bilan chegaralangan shaklning yuzi manfiy ishora bilan olinadi.

Aytaylik, yuqorida aytilgan

$$z=z(x,y)$$

tenglama bilan aniqlangan (S) sirtda (sirt nuqtalari to'plamida) $f(x,y,z)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. Bu sirtning ikki tomonidan birini tanlaymiz.

(S) sirtni undagi chiziqlar yordamida n ta

$$(S_1),(S_2),...,(S_n)$$

bo'laklarga ajratamiz. Bu sirt bo'lakchasi (S_k) ning $(k=1,2,3,...,n)$ XOY tekisligidagi proyeksiyasi (D_k) ning yuzini D_k deylik.

Har bir (S_k) da ixtiyoriy (x_k,y_k,z_k) nuqta olib, bu nuqtadagi $f(x,y,z)$ funksiyaning qiymati $f(x_k,y_k,z_k)$ ni D_k ga ko'paytirib quyidagi

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\cdot D_k \qquad (28.6)$$

yig'indini tuzamiz. Uni integral yig'indi deyiladi.

Agar $\lambda\to 0$ da (6) yig'indi chekli limitga ega bo'lsa, bu limit $f(x,y,z)$ funksiyaning (S) sirtning tanlangan tomoni bo'yicha ikkinchi tur sirt integrali deyiladi va

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)dxdy \qquad (28.7)$$

kabi belgilanadi. Demak, $\iint_{(S)} f(x,y,z)dxdy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\cdot D_k$.

Eslatma. *Yuqoridagi (28.7) integral qaralganda har gal sirtning qaysi tomoni olinganligi aytib boriladi.*

$f(x,y,z)$ funksiyaning (S) sirtning bir tomoni bo'yicha olingan ikkinchi tur sirt integrali, funksiyaning shu sirtning ikkinchi tomoni bo'yicha olingan ikkinchi tur sirt integralidan faqat ishorasi bilangina farq qiladi.

Yuqoridagidek, ushbu $\iint_{(S)} f(x,y,z)dydz$, $\iint_{(S)} f(x,y,z)dzdx$

ikkinchi tur sirt integrallari ta'riflanadi.

Umumiy holda, (S) sirtda $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ va $R(x,y,z)$ funksiyalar berilgan bo'lib, ushbu $\iint_{(S)} P(x,y,z)dxdy$, $\iint_{(S)} Q(x,y,z)dydz$, $\iint_{(S)} R(x,y,z)dzdx$

integrallar mavjud bo'lsa, u holda $\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dxdy + \iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)dydz + \iint\limits_{(S)} R(x,y,z)dzdx$

yig'indi ikkinchi tur sirt integralning umumiy ko'rinishi deyiladi va u

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dxdy + Q(x,y,z)dydz + R(x,y,z)dzdx \quad (28.8)$$

kabi belgilanadi.

Demak,

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dxdy + Q(x,y,z)dydz + R(x,y,z)dzdx =$$

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dxdy + \iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)dydz + \iint\limits_{(S)} R(x,y,z)dzdx$$

Faraz qilaylik, fazoda biror (V) jism berilgan bo'lib, uni o'rab turgan yopiq silliq sirt (Π) bo'lsin. Bu (V) da $f(x,y,z)$ funksiya aniqlangan deylik. (V) jismni XOY tekisligiga parallel bo'lgan tekislik yordamida ikki qismga ajratamiz:

$$(V) = (V_1) + (V_2)$$

Natijada uni o'rab turgan (Π) sirt ham (Π_1) va (Π_2) sirtlarga ajraladi.

Ushbu $\iint\limits_{(\Pi_1)} f(x,y,z)dxdy$, $\iint\limits_{(\Pi_2)} f(x,y,z)dxdy$

ikkinchi tur sirt integrallarining yig'indisi $\iint\limits_{(\Pi_1)} f(x,y,z)dxdy + \iint\limits_{(\Pi_2)} f(x,y,z)dxdy$

$f(x,y,z)$ funksiyaning (Π) yopiq sirt bo'yicha ikkinchi tur sirt integrali deyiladi va

$\oiint\limits_{(\Pi)} f(x,y,z)dxdy$ kabi belgilanadi:

$$\oiint\limits_{(\Pi)} f(x,y,z)dxdy = \oiint\limits_{(\Pi_1)} f(x,y,z)dxdy + \oiint\limits_{(\Pi_2)} f(x,y,z)dxdy.$$

Bunda tenglikning o'ng tomonidagi birinchi integral (Π_1) sirtning ustki tomoni, ikkinchi integral esa (Π_2) sirtning ostki tomoni bo'yicha olinadi.

Xuddi yuqoridagidek $\oiint\limits_{(\Pi)} f(x,y,z)dydz$, $\oiint\limits_{(\Pi)} f(x,y,z)dzdx$

hamda, umumiy holda $\oiint\limits_{(\Pi)} P(x,y,z)dxdy + Q(x,y,z)dydz + R(x,y,z)dzdx$

integrallar ta'riflanadi.

28.5. Ikkinchi tur sirt integrallarini hisoblash

Aytaylik, fazodagi (S) sirt

$$z = z(x,y)$$

tenglama bilan aniqlangan bo'lib, $z(x,y)$ funksiya (S) sirtning XOY tekisligidagi proyeksiyasi (D) da berilgan va tegishli shartlarni qanoatlantirsin.

Agar $f(x,y,z)$ funksiya (S) sirtda uzluksiz bo'lsa, u holda $\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{(D)} f(x,y,z(x,y))dxdy$ (28.9)

bo'ladi.

Xuddi yuqoridagidek, tegishli shartlarda $\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dydz = \iint\limits_{(D)} f(x,y,z(y,z))dydz$ (28.10)

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dzdx = \iint\limits_{(D)} f(x,y(z,x),z)dzd \quad (28.11)$$

bo'ladi.

Shunday qilib, ikkinchi tur sirt integrallari ikki karrali integrallarga keltirilib, (28.9), (28.10) va (28.11) formulalar yordamida hisoblanadi.

Eslatma. *1)* Agar (S) sirt yasovchilari OZ o'qiga parallel bo'lgan silindrik sirt bo'lsa, u holda $\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dxdy = 0$

bo'ladi.

2) Agar (S) sirt yasovchilari OX o'qiga parallel bo'lgan silindrik sirt bo'lsa, u holda

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dydz = 0$$

bo'ladi.

3) Agar (S) sirt yasovchilari OY o'qiga parallel bo'lgan silindrik sirt bo'lsa, u holda

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dzdx = 0$$

bo'ladi.

3-Misol. Ushbu $\iint\limits_{(S)} z^2 dxdy$

ikkinchi tur sirt integrali hisoblansin, bunda (S) sirt quyidagi

$$x^2+y^2+z^2=1, \quad z\geq 0$$

sferaning tashqi tomoni.

◀Ravshanki, qaralayotgan yarim sfera

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

tenglama bilan aniqlanadigan sirt ($z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ funksiya grafigi) bo‘lib, uning XOY tekisligidagi proyeksiyasi

$$(D)=\{(x,y): x^2+y^2\leq 1\}$$

doiradan iborat bo‘ladi.

Sirtning tashqi tomoni sirt normalining OZ o‘q bilan o‘tkir burchak tashkil etilishi bilan aniqlanadi.

(28.9) formuladan foydalanib topamiz:

$$\iint\limits_{(S)} z^2 dxdy=\iint\limits_{(D)}\left(1-x^2-y^2\right)dxdy=$$

$$=\begin{bmatrix} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi, \end{bmatrix} 0\leq r<1,\ 0\leq\varphi<2\pi =$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\left(1-r^2\right)rdr\right]d\varphi=\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1}d\varphi=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{1}{4}\cdot 2\pi=\frac{\pi}{2}.$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\iint\limits_{(S)}(4x-2y+5z)ds$ birinchi tur sirt integrali hisoblansin , bunda (S) sirt quyidag

x-2y+z=4

2. $\iint\limits_{(S)}(x+4y-2z)ds$ birinchi tur sirt integrali hisoblansin , bunda (S) sirt quyidag

4x+y-2z=7

3. $\iint\limits_{(S)}(2x-4y+3z)ds$ birinchi tur sirt integrali hisoblansin , bunda (S) sirt quyidag

x+y-z=5

4. $\iint\limits_{(S)} x^2dydz$ ikkinchi tur sirt integrali hisoblansin , bunda (S) sirt quyidagi

$x^2+y^2+z^2=2, x\geq 0$ sferaning tshqi tomoni

5. $\iint\limits_{(S)} y^2dxdz$ ikkinchi tur sirt integrali hisoblansin , bunda (S) sirt quyidagi

$x^2+y^2+z^2=3, x\geq 0$ sferaning tshqi tomoni

6. $\iint\limits_{(S)} ydxdz$ ikkinchi tur sirt integrali hisoblansin , bunda (S) sirt quyidagi

$x^2+y^2+z^2=2, x\geq 0$ sferaning tshqi tomoni

7. $\iint\limits_{(S)}(y+1)dxdz$ ikkinchi tur sirt integrali hisoblansin , bunda (S) sirt quyidagi

$x^2+y^2+z^2=5, x\geq 0$ sferaning tashqi tomoni

§ 29. Vektor va skalyar maydonlar. Sath chiziqlari. Yo‘nalish bo‘yicha hosila. Skalyar maydon gradinti. Ostragradskiy teoremasi. Vektor maydon divergensiyasi

Faraz qilaylik, Oxyz fazoning V sohasida

$$\vec{a}(M)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{i}+R(x,y,z)\vec{h}$$

vektor maydon berilgan bo‘lsin, bunda R(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) shu sohada uzluksiz bo‘lgan funksiyalar.

Bu sohada orientirlangan σ sirtni olamiz, uning har bir nuqtasida normalning musbat yo‘nalishi

$$\vec{n_0}=\cos\alpha\cdot\vec{i}+\cos\beta\cdot\vec{j}+\cos\gamma\cdot\vec{k}$$

birlik vektor orqali aniqlansin, bunda α,β,γ –normal $\vec{n}_0$ ning koordinatalar o‘qlari bilan tashkil qilgan burchaklari.

Ta'rif. $\vec{a}(M)$ vektorning σ sirt orqali o'tuvchi P oqimi deb quyidagi ikkinchi tur sirt integraliga aytiladi:

$$\Pi = \iint P(x,y,z)dy\,dz + Q(x,y,z)dz\,dx + R(x,y,z)dx\,dy. \qquad (29.1)$$

Bu formulani

$$\prod = \iint\limits_{\sigma} [P(x,y,z)cos\alpha + Q(x,y,z)cos\beta + R(x,y,z)cos\gamma]d\sigma$$

ko'rinishida yoki yanada soddaroq

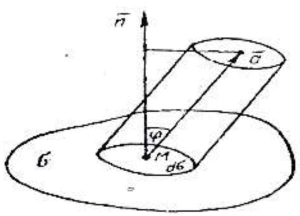
$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_o d\sigma \qquad (29.2)$$

ko'rinishda yozish mumkin, chunki $Pcos\alpha + Qcos\beta + Rcos\gamma = \vec{a} \cdot \vec{n}_0$.

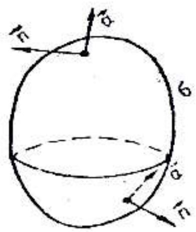
Bu yerda $d\sigma$ ifoda σ sirt yuzining elementi. (29.2) formula $\vec{a}$ vetorning $\prod$ *oqimini* vektor yozuvda ifodalaydi.

Vektor maydon oqimining fizik ma`nosini aniqlaymiz.

Faraz qilaylik, $\vec{a}(M)$ vektor oqayotgan suyuqlikning tezliklari maydonini σ sirt orqali aniqlasin. Bu tezlik vektorai har bir M nuqtada suyuqlik zarrachasi intilayotgan yo'nalish, vektor chiziqlari esa suyuqlikning oqim chiziqlari bo'ladi (29.1-rasm). σ sirt orqali vaqt birligi ichida oqib o'tadigan



29.1-rasm.



29.2-rasm.

Suyuqlik miqdorini hisoblaymiz. Buning uchun sirtda M nuqtani va sirtning $d\sigma$ elementini qayd qilamiz.

Vaqt birligida bu element orqali oqib o'tgan suyuqlik miqdori asosi $d\sigma$ va yasovchisi $\vec{a}$ bo'lgan silindrning hajmi bilan aniqlanadi. Bu silindrning balandligi

uning yasovchisini $\vec{a}$ normal birlik vektoriga proeksiyalash yo'li bilan hosil qilinadi. Shuning uchun silindirning hajmi

$$\vec{a} \cdot \vec{n}_0 \cdot d\sigma$$

kattalikka teng bo'ladi. Vaqt birligi ichida butun σ sirt bo'yicha oqib o'tgan suyuqlikning to'liq hajmi yoki suyuqlik miqdori σ bo'yicha integrallash natijasida hosil bo'ladi:

$$\iint\limits_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 \cdot d\sigma.$$

Bu natijani (29.2) formula bilan taqqoslab, bunday xulosa chiqaramiz: σ sirt orqali o'tayotgan $\vec{a}$ tezlik vektori $\prod$ oqimi shu sirt orqali vaqt birligi ichida sirt orientatsiyalangan yo'nalishda oqib o'tgan suyuqlik miqdorida. Vektorlar oqimining fizik ma`nosi ana shundan iborat.

σ sirt fazoning biror sohasini chegaralovchi yopiq sirt bo'lgan hol ayniqsa katta qiziqish uyg'otadi. Bu holda $\vec{n}_0$ normal vektorini doim fazoning tashqi qismiga yo'naltirishga shartlashib olamiz. (1-rasm).

Normal tomonga qarab harakat sirtning tegishli joyida suyuqlik ω sohadan oqib chiqishini anglatadi, normalning qarama-qarshi tomoniga qarab harakat esa suyuqlik sirtning tegishli joyida shu sohaga oqib kirishini anglatadi.

σ yopiq sirt buyicha olingan integralning o'zi esa?

$$\prod = \oiint\limits_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_0\, d\sigma$$

ko'rinishda belgilanadi va ω oqib chiqayotgan suyuqlik bilan unga oqib kirayotgan suyuqlik orasidagi farqni beradi.

Bunda, agar $\prod = 0$ bo'lsa, ω sohaga undan qancha suyuqlik oqib chiqib ketsa, shuncha suyuqlik oqib kiradi.

Agar $\prod$ bo'lsa, u holda ω sohadan unga oqib kiradigan suyuqlikdan ko'proq suv oqib chiqadi.

Agar $\prod < 0$ bo'lsa, bu hol Qurdum (stok)lar borligini ko'rsatadi, ya'ni suyuqlik oqimdan uzoqlashadigan joylar borligini ko'rsatadi (masalan, bog'lanadi). Shunday qilib, $\oiint_\sigma \vec{a}\,\vec{n}_o d\sigma$ integral manbalarning va qurdumlarning umumiy quvvatini beradi.

29.1. Vektor maydoni divergensiya va rotori
Vektor maydon divergensiyasi

Oxyz fazoning ω sohasida

$$\vec{a}\,(M) = P\,(x, y, z)\,\vec{i} + Q\,(x,y,z)\,\vec{j} + R\,(x,y,z)\,\vec{k}.$$

vektor maydon berilgan bo'lsin, unda P (x, y, z), Q (x, y, z), R (x, y, z) funksiyalar diferensiyalanuvchi funksiyadir.

Ta'rif. $\vec{a}\,(M)$ vektor maydonning divergensiyasi (uzoqlashuvchisi) deb M nuqtaning skalyar maydoniga aytiladi, u $div\,\vec{a}\,(M)$ ko'rinishida yoziladi va

$$div\,\vec{a}\,(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad (29.3)$$

formula bilan aniqlanadi, bunda hususiy formulalar M nuqtada hisoblanadi.

Divergensiyadan foydalanib, Ostrogradskiyning

$$\oint\oint_\sigma P\,(x,y,z)\,dy\,dz + Q\,(x,y,z)dz\,dx + R\,(x,y,z)dx\,dy$$

$$= \iiint_\omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

formulasini vektor shaklida qayta yozish mumkin:

$$\oint\oint_\sigma \vec{a}\,\vec{n}_0\,d\sigma = \iiint_\omega div\,\vec{a}\,(M)\,d\omega \qquad (29.4)$$

Uni bunday ifodalash mumkin: yopiq sirt orqali o'tuvchi (bu sirt tashqi $\vec{n}$ normali yo'nalishida orienterlangan) $\vec{a}$ vektor maydon oqimi shu sirt bilan chegaralangan hajm bo'yicha maydon divergensiyasidan olingan uch karrali integralga teng.

Divergensiyani hisoblashda quyidagi xossalardan foydalaniladi:

1) $div\left(\vec{a}\,(M) + \vec{b}\,(M)\right) = div\,\vec{a}\,(M) + div\,\vec{b}\,(M);$
2) $div\,C * \vec{a}\,(M) = C\,div\,\vec{a}\,(M), bunda\ C - o'zganmas\ son;$
3) $div\,u\,(M) * \vec{a}\,(M) = u\,(M)div\,\vec{a}\,(M) + \vec{a}\,(M)grad\,u(M),$

bunda $u\,(M)$ – skalyar maydonni aniqlovchi funksiya.

Divergensiyaning invariant ta'rifi. Divergensiyani (29.1) formula yordamida aniqlash koordinata o'qlarini tashlash bilan bog'liq. Ostrogradskiy formulasidan foydalanib, divergensiyaning koordinatalar o'qlarini tanlash bilan bog'liq bo'lmagan boshqa ta'rifini berish mumkin.

Bu formulaning o'ng qismida uch karrali integral turibdi. Uchta qiymat haqidagi ma'lum teoremaga ko'ra bu integral V hajm bilan integral osti funksiyaning ω sohaning biror M_1 nuqtasidagi qiymati ko'paytmasiga teng. Shuning uchun (1.2) Ostrogradskiy formulasini quyidagicha yozish mumkin:

$$\iint_\sigma \vec{a}\,\vec{n}\,d\sigma = V\,div\,\vec{a}\,(M_1)$$

yoki

$$div\,\vec{a}\,(M_1) = \frac{1}{V}\iint_\sigma \vec{a}\,\vec{n}\,d\sigma.$$

Agar ω soha M nuqtaga tortilsa yoki $V \to 0$ bo'lsa u holda M_1 nuqta M ga intiladi. Natijada limitga o'tib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\lim_{M_1\to M} div\ \vec{a}\ (M_1) = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint\oint_{\sigma} \vec{a}\ \vec{n}\ d\sigma$$

yoki

$$div\ \vec{a}(M) = \lim_{V\to 0}\frac{\iint_\sigma \vec{a}\vec{n}\ d\sigma}{V} = \lim_{V\to 0}\frac{\Pi}{M} \qquad (29.5)$$

Endi divergensiyaning koordinata o'qlarini tanlash bilan bog'liq bo'lmagan invariant ta'rifini berish mumkin.

Ta'rif. M nuqtada vektor maydonning divergensiyasi deb, M nuqtani o'rab olgan yopiq sirt orqali o'tuvchi maydon oqimining shu sirti bilan chegaralangan qismining V hajmiga nisbatining bu hajm nuqtada tortilgandagi, ya'ni $V\to 0$ dagi limitiga aytiladi.

Divergensiyaning fizik ma'nosi. (29.3) divergensiyasiga tushunchasiga fizik talqin beramiz.

Faraz qilaylik, ω sohada oqayotgan suyuqlikning tezliklari maydoni $\vec{a}\ (M)$ berilgan bo'lsin. $\vec{a}\ (M)$ vektorning σ yopiq sirt orqali tashqi normal yo'nalishdagi Π oqimi shu sirt bilan chegaralangan vaqt birligi ichida oqib kirgan va oqib chiqqan suyuqlik miqdorlari orasidagi ayirmani ifodalashi aniqlangan edi.

Ushbu $\frac{\Pi}{V} = \frac{\oint\oint_\sigma \vec{a}\vec{n}\ d\sigma}{V}$

nisbat hajm birligiga bo'lingan suyuqlik miqdorini aniqlaydi, ya'ni manbaning ($\Pi>0$ bo'lganda) yoki qurdum ($\Pi<0$ bo'lganda) o'rtacha hajmiy quvvatini ifodalaydi. Bu nisbatning limiti

$$\lim_{V\to 0}\frac{\oint\oint_\sigma\ \vec{a}\,\vec{n}\ d\sigma}{V} = div\ \vec{a}\ (M)$$

(29.3) divergensiya bo'lib, u berilgan nuqtadagi suyuqlik sarfining hajm birligiga nisbatini ifodalaydi.

Agar $div\ \vec{a}$(M >0) bo'lsa, suyuqlik sarfi musbat, ya'ni M nuqtani o'rab olgan cheksiz kichik sirt orqali tashqi normal yo'nalishda suyuqlik oqib kirganidan ko'proq oqib chiqib ketadi. Bunda M nuqta manba bo'ladi.

Agar $div\ \vec{a}$(M <0) bo'lsa, u holda M nuqta qurdum bo'ladi. $div\ \vec{a}\ (M) = 0$ bo'lsa, u holda M nuqtada na manba na qurdum bo'ladi. (29.2) vektor shaklida yozilgan Ostrogradskiy teoremasi oqayotgan suyuqlikning tezlik maydonida yopiq sirt orqali oquvchi suyuqlikning oqimi hamma manbalar va qurdumlar quvvatlarining yig'indisiga teng bo'lishini, ya'ni qaralayotgan sohada vaqt birligi ichida paydo bo'ladigan suyuqlik miqdoriga teng bo'lishini ifodalaydi.

29.2. Vektor maydon uyurmasi (rotori)

Faraz qilaylik Oxyz fazoning ω sohasida quyidagi vektor maydon berilgan bo'lsin:

$$\vec{a}'\ (M) = P\ (x, y, z)\ \vec{i} + Q\ (x, y, z)\ \vec{j} + R\ (x, y, z)\ \vec{k}.$$

Ta'rif. $\vec{a}'$ (M) Vektor maydon uyurmasi (yoki rotori) deb M nuqtaning rot $\vec{a}'$ (M) bilan belgilanadigan va

$$\text{rot}\ \vec{a}'\ (M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \quad (29.6)$$

formula bilan aniqlanadigan vektor maydoniga aytiladi, bunda xususiy hosilalarini M (x, y, z) nuqtada topamiz.

Misol. Ushbu $\vec{a}(M) = z^2\,\vec{i} + x^2\,\vec{j} + y^2\,\vec{k}$

Vektor maydonning uyurmasini toping.

Yechish. $P=z^2$, $Q=x^2$, $R=y^2$ ga egamiz. Xususiy hosilani topamiz:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 2y, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 2z, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x.$$

Demak,

$$rot\,\vec{a} = 2y\,\vec{i} + 2z\,\vec{j} + 2x\,\vec{k}.$$

Uyurma tushunchasidan foydalanib,

$$\oint_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \iint_\sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz +$$
$$+\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

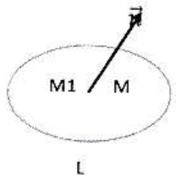
Stoks formulasini Vektor shaklida qayta yozish mumkin:

$$\oint_L \vec{a}\,d\vec{r} = \iint_\sigma \vec{n}\,rot\,\vec{a}\,d\sigma \quad (1.2)$$

va bunday ifodalash mumkin: $\vec{a}$ vektorning σ sirtni chegaralovchi L konturni aylanib chiqishning musbat yo'nalishi bo'yicha sirkulatsiyasi rot $\vec{a}$ vektorning shu sirt orqali o'tadigan oqimiga teng.

Uyurmaning ta'rifidan foydalanib, quyidagi xossalarning to'g'ri ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin:

1) $rot\,(\vec{a} + \vec{b}) = rot\,\vec{a} + rot\,\vec{b}$;
2) $rot\,(C\vec{a}) = C\,rot\,\vec{a}, bunda\ C - o'zgarmas\ skalyar.$



3) $rot\,(u\vec{a}) = u\,rota + (grad\,u) * \vec{a}$, bunda u=u(M) skalyar maydonni aniqlovchi funksiya.

29.3. Uyurmaning invariant ta'rifi

Uyurmaning yuqorida berilgan ta'rifi koordinatalar sistemasini tanlashga bog'liq. Endi uyurmali maydonga invariant ta'rif beramiz.

Faraz qilaylik, $\vec{n}$ ixtiyoriy belgilangan birlik vektor va D esa M nuqtani o'z ichiga olgan L chegarali yassi shakl bo'lib, u $\vec{n}$ vektorga perpendikulyar bo'lsin.

(1.2) Stoks formulasini

$$\oint_L \vec{a}\,d\vec{r} = \iint_D rot_n\,\vec{a}\,d\sigma$$

ko'rinishda yoziladi, chunki $\vec{n} * rot\,\vec{a} = rot_n\vec{a}$ (1-shakl).

O'rta qiymat haqidagi teoremaga muvofiq:

$$\oint_L \vec{a}\,d\vec{r} = S rot_n\,\vec{a}\,(M_1),$$

bundan $rot_n\,\vec{a}\,(M_1) = \frac{1}{S}\oint_L \vec{a}\,d\vec{r}$, bu yerda S yuz – D sohaning yuzi, M_1 – bu sohadagi biror nuqta.

Oxirgi tenglikda D sohani M nuqtaga tortib (yoki S → 0 da), limitga o'tamiz, bunda M_1 nuqta M nuqtaga intiladi:

$$\lim_{M_1 \to M} rot_n\,\vec{a}\,(M_1) = \lim_{S \to 0}\frac{1}{S}\oint_L \vec{a}\,d\vec{r}$$

yoki

$$rot_n\,\vec{a}\,(M) = \lim_{S \to 0}\frac{1}{S}\oint_L \vec{a}\,d\vec{r} = \lim_{S \to 0}\frac{\text{П}}{S}$$

Ta'rif. Vektor maydon uyurmasi deb, shunday vektorga aytiladiki, uning biror yo'nalishga bo'lgan proeksiyasi shu yo'nalishga perpendikulyar bo'lgan D yassi yuzning L kontur bo'yicha vektor maydon sirkulyasiyasining S yuzning kattaligiga nisbatiga teng, bunda yuzning o'lchamlari nolga intiladi $(S \to 0)$, yuzning o'zi esa nuqtaga tortiladi.

29.3 Uyurmaning fizik ma'nosi. Vektor maydon uyurmasi tushunchasining fizik talqinini beramiz. Qattiq jismning ko'zg'almas nuqta atrofidagi harakatini qarab chiqamiz. Kinematikada tezliklar maydoni $\vec{v}$ istalgan momentda

$$\vec{v} = \vec{\omega} * \vec{r}$$

formula bilan aniqlanadi, bunda $\vec{\omega}$ oniy burchak tezlik, $\vec{r}$ – jismning ixtiyoriy M nuqtasining radius – vektori.

Agar $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j}$

ekani ma'lum bo'lsa, u holda qo'yidagiga ega bo'lamiz:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_y z - \omega_z y)\vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z)\vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x)\vec{k}.$$

Endi $rot\,\vec{v}$ vektorning proeksiyalarini topamiz.

$$\text{пр}_x\,(rot\,\vec{v}) = \frac{\partial}{\partial y}(\omega_x y - \omega_y x) - \frac{\partial}{\partial z}(\omega_z x - \omega_x z) = \omega_x + \omega_x = 2\omega_x,$$

$$\text{пр}_y\,(rot\,\vec{v}) = \frac{\partial}{\partial z}(\omega_y z - \omega_z y) - \frac{\partial}{\partial x}(\omega_x y - \omega_y x) = \omega_y + \omega_y = 2\omega_y,$$

$$\text{пр}_z\,(rot\,\vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x}(\omega_z x - \omega_x z) - \frac{\partial}{\partial y}(\omega_y z - \omega_z y) = \omega_z + \omega_z = 2\omega_z,$$

Shunday qilib,

$$rot\,\vec{v} = 2\omega_x\vec{i} + 2\omega_y\vec{j} + 2\omega_z\vec{k} = 2\vec{\omega}$$

Ekanini hosil qildik.

Demak, $\vec{v}$ tezlik maydoni uyurmasi qattiq jism aylanishining oniy burchak tezligi vektoriga kollinear vektordir:

$$rot\,\vec{v} = 2\vec{\omega}.$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Ushbu $\vec{a}(M) = z^3\vec{i} + x^3\vec{j} + y^3\vec{k}$ Vektor maydonning uyurmasini toping.

2. Ushbu $\vec{a}(M) = 2z\,\vec{i} + 2x\,\vec{j} + 2y\,\vec{k}$ Vektor maydonning uyurmasini toping.

3. Ushbu $\vec{a}(M) = 2z^2\vec{i} - 2x^2\vec{j} - 2y^2\vec{k}$ Vektor maydonning uyurmasini toping.

4. Ushbu $\vec{a}(M) = 5z\,\vec{i} - 2x\,\vec{j} + y\,\vec{k}$ Vektor maydonning uyurmasini toping.

5. Ushbu $\vec{a}(M) = z^3\vec{i} + 4x^3\vec{j} - 2y^3\vec{k}$ Vektor maydonning uyurmasini toping

6. Ushbu $\vec{a}(M) = 3z^3\vec{i} - 2x^3\vec{j} + y^3\vec{k}$ Vektor maydonning uyurmasini toping

7. Ushbu $\vec{a}(M) = 2z\,\vec{i} - 3x\,\vec{j} + y\,\vec{k}$ Vektor maydonning uyurmasini toping

§ 30. Vektor maydon sirkulyatsiyasi. Stoks formulasi. Vektor maydon uyurmasi

30.1. Stoks formulasi

Faraz qilaylik, ω soxada vektor maydon

$$\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

vektor orqali hosil qilingan bo'lsin. Bu soxada biror L chiziqni olamiz va unda ma'lum yo'nalishni tanlaymiz.

Ta'rif. Yo'nalgan L chiziq bo'yicha olingan ushbu

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

ikkinchi tur egri chiziqli integral yoki vektor shaklidagi

$$\int_L \vec{a}\,d\vec{r}$$

integral $\vec{a}(M)$ vektorning L chiziq bo'yicha olingan *chiziqli integralli* deyiladi (10.2-rasm).

Agar $\vec{a}(M)$ vektor kuch maydoni hosil qilsa, $\vec{a}$ vektorning L chiziq bo'yicha chiziqli integrali ma'lum yo'nalishda L chiziq bo'yicha bajariladigan ishga teng bo'ladi.

Ta'rif. Yopiq L kontur bo'yicha chiziqli integral vektor **sirkulyatsiyasi** deyiladi va Ц bilan belgilanadi, ya'ni

$$Ц = \oint_L \vec{a}\,d\vec{r} = \oint P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

$\vec{a}$ ={P,Q ,R} vektorning L egri chiziq bo'yicha chiziqli integrali deb bu L egri chiziq bo'yicha vektor maydon bajargan ishni aniqlovchi ushbu egri chiziqli integralga aytiladi:

$$\int_L P\,dx + Q dy + R dz = \int_L \vec{a} \cdot \overrightarrow{dr}.$$

Agar L kontur yopiq bo'lsa, chiziqli integral $\vec{a}$ vektor maydonning bu kontur bo'yicha ***sirkulyatsiya*** deyiladi.

Yopiq egri chiziq L fazoda biror σ sirtni chegaralagan bo'lib, bu sirtda $\vec{a}$={P,Q,R} vektor berilgan bo'lsin, u xolda sirkulyatsiya va sirt integralini bog'lovchi ushbu ***Stoks formulasi*** o'rinlidir:

$$\oint_L P\,dx + Q dy + R dz$$

$$= \iint_\sigma \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma \right) d\sigma,$$

bu yerda $\vec{n}^0$ ={$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$} – integrallash bajarilayotgan σ sirt tomoni normalining birlik vektori, bunda σ sirtning shu tomoni bo'yicha L konturni aylanib o'tish musbat bo'lishi kerak.

Grin formulasi Stoks formulasining L egri chiziq va σ sirt Oxy tekislikda yotgan holdagi hususiy xolidir.

$\vec{a}$={P,Q ,R} vektor maydonning ***rotori*** yoki ***uyurmasi*** deb ushbu

$$\text{rot } \vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

vektorga aytiladi.

Vektor shaklida Stoks formulasi quyidagi ko'rinishda yoziladi.

$$\oint_L \vec{a} d\vec{r} = \iint_\sigma \vec{n}^0 \cdot rot\vec{a} d\sigma$$

Vektor maydoni rotorining ba'zi xossalari:

a) rot ($\vec{a} + \vec{b}$)=rot $\vec{a}$ + rot $\vec{b}$;

b) rot $\vec{c}$ = $\vec{0}$, bu yerda $\vec{c}$ – doimiy (o'zgarmas) vektor;

v) rot ($\varphi\vec{a}$)=φ rot $\vec{a}$ + g rat $\varphi \cdot \vec{a}$, bu yerda φ=φ (x, y, z) skalyar funksiya.

1-misol. $\vec{\vartheta} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ chiziqli tezlik vektor maydonning fazoning ixtiyoriy M (x, y, z) nuqtasidagi rotorini toping.

Yechish. Chiziqli tezlik vektori $\vec{\vartheta}$ ni hisoblaymiz:

$$\vec{\vartheta} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= (\omega_y z - \omega_z y)\,\vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z)\,\vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x)\vec{k}$$

Demak,

$$\text{rot } \vec{\vartheta} = 2\,\omega_x\,\vec{i} + 2\,\omega_y\,\vec{j} + \omega_z\vec{k} = 2\,\vec{\omega}.$$

2-misol. $\vec{a}$=y$\vec{i}$+$x^2\vec{j}$-z$\vec{k}$ vektor maydonining L: x^2+y^2=4, z=3 aylana bo'yicha birlik vektor $\vec{k}$ ga nisbatan aylanib o'tishning musbat yo'nalishda sirkulyatsiyasini ikki usul bilan:

a) sirkulyatsiya ta'rifidan foydalanib;

b) Stoks formulasidan foydalanib hisoblang.

Yechish. Chizma chizib, unda normalning birlik vektor n^0=$\vec{k}$ yo'nalishini va konturni aylanish yo'nalishini ko'rsatamiz:

a) Aylananing parametrik tenglamalari :

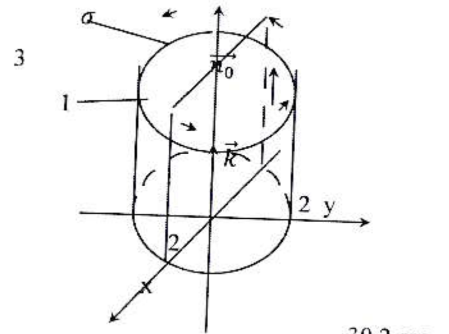
x=2cos t, y=2sin t, z=3, 0≤t≤2π.

Izlanayotgan C sirkulyatsiyani ta'rifdan foydalanib topamiz:

$$C = \oint_n y dx + x^2 dy - z dz = \int_0^{2\pi} [2\sin t(-2\sin t dt) + 4cos^2 t \cdot 2\cos t dt - 3 \cdot 0] =$$

$$= 8\int_0^{2\pi} \cos^3 t dt - 4\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = 8 \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t)\, d(\sin t) - 2\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t)dt =$$

$$= 8(\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t)\Big|_0^{2\pi} - 2(t - \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{2\pi} = -4\pi$$



30.2-rasm

b) Shartga ko'ra : $\vec{n}^0 = \vec{k}, rot\vec{a} = (2x-1)\vec{k}$. Stoks formulasiga ko'ra:

$$C = \iint_{\sigma} rot\,\vec{a} \cdot \vec{n}^0 d\sigma = \iint_{\sigma_{xy}} (2x-1)dxdy = \iint_{\sigma_{xy}} (2r\cos\varphi - 1)rdrd\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (2r\cos\varphi - 1)rdr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3}r^3\cos\varphi - \frac{1}{2}r^2\right)\Big|_0^2 d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{8}{3}\cos\varphi - 2\right)d\varphi = \left(\frac{8}{3}\sin\varphi - 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = -4\pi.$$

(Ikki o'lchovli integralni hisoblashda qutb koordinatalariga o'tiladi.)

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z^2\vec{k}$ vektor maydonining L: $x^2+y^2=9$ $z=5$ aylana bo'yicha birlik vektor $\vec{j}$ ga nisbatan aylanib o'tishning musbat yo'nalishda sirkulyatsiyasini

2. $\vec{a} = y^2\vec{i} + 2x\vec{j} - z^2\vec{k}$ vektor maydonining L: $x^2+y^2=9$ $z=5$ aylana bo'yicha birlik vektor $\vec{k}$ ga nisbatan aylanib o'tishning musbat yo'nalishda sirkulyatsiyasini

3. $\vec{a} = y\vec{i} + x^2\vec{j} - 2z\,\vec{k}$ vektor maydonining L: $x^2+y^2=9$ $z=5$ aylana bo'yicha birlik vektor $\vec{i}$ ga nisbatan aylanib o'tishning musbat yo'nalishda sirkulyatsiyasini

4. $\vec{a} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ vektor maydonining L: $x^2+y^2=9$ $z=5$ aylana bo'yicha birlik vektor $\vec{i}$ ga nisbatan aylanib o'tishning musbat yo'nalishda sirkulyatsiyasini

5. $\vec{a} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j} - z^2\vec{k}$ vektor maydonining L: $x^2+y^2=9$ $z=5$ aylana bo'yicha birlik vektor $\vec{k}$ ga nisbatan aylanib o'tishning musbat yo'nalishda sirkulyatsiyasini

6. $\vec{a} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j} - z^2\vec{k}$ vektor maydonining L: $x^2+y^2=16$ $z=5$ aylana bo'yicha birlik vektor $\vec{k}$ ga nisbatan aylanib o'tishning musbat yo'nalishda sirkulyatsiyasini

7. $\vec{a} = y^3\vec{i} - x^3\vec{j} - z^3\vec{k}$ vektor maydonining L: $x^2+y^2=25$ $z=5$ aylana bo'yicha birlik vektor $\vec{k}$ ga nisbatan aylanib o'tishning musbat yo'nalishda sirkulyatsiyasini

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer I-part, 2008, II-part, 2010

2. W W L Chen "Introduction to Fourier Series", London, Chapter 1-8, 2004, 2013.

3. W W L Chen "Fundamentales of Analysis", London, Chapter 1-10, 1983, 2008.

4. Soatov Y.U. Oliy matematika. Toshkent. O'qituvchi, 1995. 1-4 qismlar.

5. Sh.Xurramov "Oliy matematika" 1-2-qismlar, Toshkent. 1999.

6. N.M.Jabborov, E.O.Aliqulov.«Oliy matematika» 1-2 qism. Qarshi, 2010.

7. Sirojiddinov S.X., Mamatov M. Ehtimollar nazariyasi kursi. Toshkent. O'qituvchi, 1980.

8. Jo'rayev T., Sa'dullayev A., Xudoyberganov G., Mansurov X., Vorisov A. Oliy matematika asoslari.1-2 qism, Toshkent, "O'qituvchi", 1997.

9. T. Azlarov, X. Mansurov "Matematik analiz" 1-2 qism Toshkent 1995.

10. X.Latipov, Sh.Tojiyev, R.Rustamov "Analitik geometriya va chiziqli algebra", Toshkent "O'zbekiston" 1995.

11. A.S.Sa'dullayev, X.Xudoyberganov, A.Vorisov, R.G'ulomov "Matematik analizdan misol va masalalar to'plami" 1-2 qism Toshkent "O'zbekiston" 1992.

12. V.P. Minorskiy "Oliy matematikadan masalalar to'plami" Toshkent 1977.

13. В.А. Коллемаев, О.В. Староверов, Теория вероятностей и математическая статистика, Москва. Высшая школа 1991.

Elektron adabiyotlar

1. http://www.ziyonet.uz
2. www. Ziyonet.uz
3. www.estudu.uz
4. www.tuit.uz
5. www.Math.uz

S.J.TURAYEV, I.N.RUZIMURODOV,
R.V.SALOMOVA

HISOB (CALCULUS)

O'quv qo'llanma

Muharrir: Sh. Bozorova
Badiiy muharrir: K. Boyxo'jayev
Sahifalovchi: Z. Ulug'bekova

Nashr lits. AI' 305. Bosishga ruxsat etildi 07.05.2022.
Qog'oz bichimi 60x84 1/16. Shartli bosma tabog'i 13,8.
Hisob-nashr tabog'i 14,4. Adadi. 50
11-buyurtma.

"CHINOR FAYZI BALAND" MCHJ NASHRIYOTI
100000, Toshkent sh. Chilonzor tum. Almazor 15/1-uy, 8-xonadon

«DAVR MATBUOT SAVDO» MCHJ
bosmaxonasida chop etildi.
100198, Toshkent, Qo'yliq, 4-mavze, 46.