CHDPU
CHIRCHIQ DAVLAT PEDAGOGIKA UNIVERSITETI
5 YOSH

D.M.Maxmudova, I.Q.Xaydarov,
A.R.Qutlimurotov, N.Yo'.Toshboeva.

# DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TALIM VAZIRLIGI

CHIRCHIQ DAVLAT PEDAGOGIKA UNIVERSITETI

D.M.Maxmudova, I.Q.Xaydarov, A.R.Qutlimurotov,
N.Yo'.Toshboeva



# DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

O'QUV QO'LLANMA



Toshkent
«Yangi chirchiq book»2022

**D.M.Maxmudova, I.Q.Xaydarov, A.R.Qutlimurotov, N.Yo'.Toshboeva.**
**Differensial tenglamalar. O'quv qo'llanma.**
**–T.: "Yangi chirchiq book", 2022, 112 bet.**

**UO'K: 53;520**
**KBK: 22.3;22.6**
**M 32**

Ushbu o'quv qo'llanma Fizika va astronomiya o'qitish metodikasi, Fizika, Astronomiya bakalavr ta'lim yo'nalishlarining o'quv rejasidagi matematika va tabiiy-ilmiy fanlar blokiga tegishli fanlarning o'quv dasturlari talablari asosida tayyorlangan bo'lib, unda amaliy mashg'ulotlarni o'z ichiga olgan ma'lumotlar berilgan.

O'quv rejalardagi matematika va tabiiy-ilmiy fanlar blokiga tegishli fanlarning xususiyatlaridan kelib chiqib, qo'llanmada "Oliy matematika" kursining differensial tenglamalar bo'limiga oid asosiy tushuncha va tasdiqlar yoritilgan bo'lib, ularning fizik mazmuni va tatbiqlari ko'rsatilgan. Mavzular bo'yicha mustaqil ishi uchun topshiriqlar va ularni yechilish usullari hamda talabalar uchun foydali bir qator tavsiyalar berilgan.

Qo'llanma oliy ta'lim muassalarining fizika, astronomiya hamda texnika yo'nalishlari talabalari, tayanch doktorantlari va ilmiy izlanuvchilar uchun mo'ljallangan.

**Taqrizchilar:** dots. E.I.Quchqorov (O'zMU)
dots. E.M.Maxkamov (ChDPI)

O'quv qo'llanma O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2021-yil 25-dekabrdagi 538-sonli buyrug'iga asosan nashr etishga ruxsan berilgan.

**ISBN: 978-9943-9169-6-8**





## SO'Z BOSHI

Yosh mutaxasislarni har taraflama rivojlangan komil inson qilib tarbiyalashda matematika alohida o'ringa ega. Matematikani o'rganish jarayonida inson faoliyatining barcha sohasi uchun zarur qobilyatlar: ijodiy fikrlash, mantiqiy mushohada, fazoviy tasavvur, tahliliy mulohaza, abstrakt tafakkur shakllanib boradi.

Tabiatda uchraydigan juda ko'p qonunlarni, jarayonlarni differensial va integral tenglamalar bilan ifodalash mumkin. Differensial tenglamalar fani erkli o'zgaruvchi, funksiya, funksiyaning hosilalari orasidagi funksional bog'lanishlarni o'rganuvchi fan bo'lib, mazkur fanning natijalari fizikaning kinematika, dinamika, to'lqinlar nazariyasi va boshqa ko'plab bo'limlarini o'rganishda muhim rol o'ynaydi.

O'zgaruvchan kuch ta'siridagi harakatlar, Nyutonning ikkinchi qonuni, tebranma harakatlar kabi fizik jarayonlarni differensial hisob tilida tavsiflash mazkur jarayonlarni o'rganishni juda soddalashtiradi. Mana shularning o'ziyoq differensial tenglamalar fanini fizika va astronomiya yo'nalishlarida o'qitilishining ahamyati muhim ekanligini ko'rsatadi.

Differensial tenglamalar fizika yo'nalishi bo'yicha bakalavr tayyorlash o'quv rejasidagi asosiy fanlardan biridir. Bu fan oddiy differensial, xususiy hosilali va sodda integral tenglamalarni analitik usul bilan va sifat jihatidan o'rganishni o'z oldiga asosiy maqsad qilib qo'yadi.

Mazkur fan talabalarni oddiy differensial tenglamalarni yechish, echimining xossalarini o'rganish bilan bir qatorda shu tenglamalar bilan ifodalanadigan fizik jarayonlar haqida tasavvurga ega bo'lishlariga imkon beradi.

Shu bilan bir qatorda differensial tenglamalar kursi o'zidan keyin yoki parallel qo'yiladigan matematik va ba'zi fizik kurslar uchun asos yoki zaruriy apparat sifatida qo'llaniladi.

O'quv qo'llanma differensial tenglamalarga oid mavzular: mavjudlik teoremalari, birinchi tartibli differenstial tenglamalar, yuqori tartibli differensial tenglamalar, differensial tenglamalar sistemalarini to'liq qamrab olgan.

Tavsiya etilayotgan ushbu o'quv qo'llanmada zamonaviy fan yutuqlari, respublikamizning shu sohadagi taniqli olimlarining ilmiy-tadqiqot ishlari natijalari o'z aksini topgan.

O‘quv qo‘llanmani pedagogika oliy ta’lim muassasalarining fizika va astronomiya o‘qitish metodikasi talabalari, aspirantlar, matematika o’qituvchilari hamda mazkur fan yo’nalishida ilmiy tadqiqot izlanishlarini olib borayotgan ilmiy xodimlar uchun tavsiya etish mumkin.

*Mualliflar*



# I BOB. BIRINCHI TARTIBLI ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

## 1.1-§. Differensial tenglamalar faniga kirish. Asosiy tushunchalar. Koshi masalasi.

REJA:

- Differensial tenglamalarga keltiriladigan tabiiy fanlar masalalari.
- Yechim, umumiy yechim tushunchalari.
- Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli tenglamalar. Koshi masalasi.
- Koshi masalasining yechimi haqidagi teorema.

**Tayanch iboralar**

Birinchi tartibli tenglamalar, umumiy yechim, Koshi masalasi, ekvivalentlik lemmasi, Gronuoll lemmasi, Pikar teoremasi, Lipshist sharti.

Hozirgi kunda fan-texnika rivojlanib borgan sari matematikani roli ortib bormoqda. Shu jumladan matematikadan fizika, mexanika va astronomiya hamda iqtisodiy masalalarni yechishda, biologik jarayonlarni tahlil etishda va boshqa ko‘p sohalarda foydalaniladi. Bu sohalardagi jarayonlarni matematik modeli differensial tenglamalar nomi bilan yuritiladi.

Erkli o‘zgaruvchi, noma’lum funksiya va uning hosilalari yoki differensiallari orasidagi bog‘lanishni ifodalovchi tenglamaga **differensial** tenglama deyiladi va umumiy holda quyidagicha yoziladi:

$$F(x, y, y', y'', ... y^{(n)}) = 0$$

Agar noma’lum funksiya bir argumentli bo‘lsa, u holda tenglama **oddiy differensial tenglama** deb, agar noma’lum funksiya ko‘p o‘zgaruvchili bo‘lsa, u holda tenglama **xususiy hosilali differensial tenglama** deb aytiladi.

**1-misol.** Faraz qilaylik moddiy nuqta $OX$ o‘qi bo‘ylab xarakat qilsin. Xarakat funksiyasi $f(t)$ bo‘lsin. Bundan tashqari biror $t=t_0$ momentda uning absissasi $x_0$ qiymatni qabul qilsin. Shu moddiy nuqtani xarakat qonunini toping.

Bu masalaning matematik modeli

$$\frac{dx}{dt} = f(t), \ \ x(t_0) = x_0$$

ko'rinish bilan ifodalanadi.

**2-misol.** Radiaktiv modda hisoblangan radiyni parchalanish tezligi uning miqdoriga to'g'ri proporstiolnal. Faraz qilaylik, $t$ momentda $R_0$ $g$ radiy bor bo'lsin. Ixtiyoriy $t$ momentda R $g$ radiy miqdorini aniqlang.

Agar proporstionallik Koeffitsienti $c(c>0)$ ga teng bo'lsa, u holda masala ushbu differensial tenglamani yechishga keltiriladi.

$$\frac{dR}{dt}=-cl$$

Bu tenglamani $t=t_0$ da $R=R_0$ ga teng bo'ladigan yechimi

$$R=R_0e^{-c(t-t_0)}$$

funksiya bilan ifodalanadi. Yuqoridagi masalalardan ko'rinadiki bitta differensial tenglamani bir necha funksiyalar qanoatlantirishi mumkin, shuning uchun differensial tenglamalar nazariyasining asosiy maqsadi berilgan tenglamaning barcha yechimlarini topish va ularning xususiyatlarini o'rganishdan iborat.

Differensial tenglamalarni **tartibi** tenglamada qatnashgan eng yuqori tartibli **hosila tartibi** bilan aniqlanadi.

**1-ta'rif.** Ushbu

$$F(x,y,y')=0 \tag{1}$$

tenglama hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli oddiy differensial tenglama deyiladi.

**2-ta'rif.** Ushbu

$$\frac{dy}{dx}=f(x;y) \tag{2}$$

ko'rinishdagi tenglama hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli oddiy differensial tenglama deyiladi.

**3-ta'rif.** Agar

$$y=\varphi(x,c) \tag{3}$$

funksiyalar oilasi (1) tenglamani ayniyatga aylantirsa, u holda ushbu (3) funksiyalar oilasi (1) tenglamaning **umumiy yechimi** deyiladi.

**4-ta'rif.** Umumiy yechimdan $c$- o'zgarmas sonning har bir qiymatlari uchun hosil bo'lgan yechimi **xususiy yechim** deb ataladi.

Yuqorida keltirilgan 1 va 2 masalalardagi $(t_0, x_0)$, $(t_0, R_0)$ nuqtalardan o'tuvchi yechimlarni yagonaligi muhim ahamiyatga ega, shuning uchun berilgan $(t_0, x_0)$ nuqtadan bitta yechim o'tsa shu nuqtada yagonalik o'rinli deb yuritiladi.



**5–ta'rif.** Yagonalik o'rinli bo'lmagan yechim **maxsus yechim** deyiladi.

**3-misol:** Tenglamani yeching

$$y'=2\sqrt{y} \qquad (y\geq 0)$$

Bu yerda $y\neq 0$ deb olib $\frac{y'}{2\sqrt{y}}=1$ yoki $\left(\sqrt{y}\right)'=1$ tenglikka ega bo'lamiz.

Bundan $\sqrt{y}=x+c$ $(x>-c)$ yoki $y=(x+c)^2$ $(x\geq -c)$ umumiy yechimga ega bo'lamiz.

Bundan tashqari $y\equiv 0$ ham tenglamaning yechimi, bu maxsus yechim bo'ladi. $Y=0$ ni , ya'ni $OX$ o'qini ixtiyoriy nuqtasidan

$$y=(x-x_0)^2 \qquad (x\geq x_0)$$

yarim parabola o'tadi.

Differensial tenglamalar nazariyasining asosiy masalalardan biri Koshi masalasi deb yuritiladi.

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{4}$$

ko'rinishidagi tenglama uchun Koshi masalasi quyidagicha qo'yiladi.

**Koshi masalasi**: (1) tenglamaning

$$y(x_0)=y_0 \tag{5}$$

shartni qanoatlantiradigan yechimini topish masalasi Koshi masalasi deyiladi yoki boshlang'ich masala deb yuritiladi.

Bunda $x_0$ va $y_0$ berilgan sonlar bo'lib $f(x,y)$ funksiya aniqlangan sohaga tegishli bo'ladi. (4) tenglamaning yechimi bo'lgan $y=\varphi(x)$ yoki oshkormas ko'rinishda $\varphi(x,y)$ funksiyani mos egri chizig'i (grafigi) **integral chiziq** deb ataladi. Koshi masalasi, geometrik nuqtaiy-nazardan qaraganda barcha integral chiziqlar ichidan berilgan $(x_0,y_0)$ nuqtadan o'tuvchi integral chiziqni topish masalasidir.

**4-misol:** Koshi masalasining yechimi mavjudmi?

$$\begin{cases}\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{x}{y} \qquad (x_0=0, y_0=0)\\ y(0)=0\end{cases}$$

Bu differensial tenglamaning umumiy ko'rinishi $y'=F(x,y)$ $F(x,y)=-\frac{x}{y}$, bo'lib, $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{x}{y^2}$ tenglik $y=0$ da ma'noga ega emas, bu Koshi masalasini yechimi mavjud emasligini bildiradi.

Demak, Koshi masalasi har doim ham yechimiga ega emas, agar yechim mavjud bo'lsa u yagona bo'ladimi?, kabi savol berilishi tabiiy.

Yechimining yagonaligi differensial tenglamalar olingan jarayonlarda biror qonun mavjud bo‘lib boshqa qonun yo‘qligini, xarakat yoki jarayon faqat shu qonun orqali amalga oshishini bildiradi.

Yuqorida qo‘yilgan savolga quyidagi Pikar teoremasi javob beradi.

**Teorema (Pikar teoremasi).** Agar (4) tenglamada $f(x,y)$ funksiya

1. $D=\{(x,y)$: $x_0-a\le x\le x_0+a$, $y_0-b\le y\le y_0+b\}$ to‘g‘ri to‘rtburchakda uzluksiz, (demak unda chegaralangan, ya’ni

$$|f(x,y)| \le M, \ M>0\ , \qquad (6)$$

2. $u$ o‘zgaruvchi bo‘yicha Lipshist shartini qanoatlantirsa, u holda (4) tenglamani (5) shartini qanoatlantiradigan va

$$|x-x_0|\le h, \ h=\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

intervalda aniqlangan yagona yechimi mavjud.

Teoremada keltirilgan Lipshist sharti $D$ sohada aniqlangan ikki o‘zgaruvchili $f(x,y)$ funksiya uchun quyidagicha bo‘ladi. Ixtiyoriy $(x,y_1)$, $(x,y_2)\in D$ nuqtalar uchun ushbu

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2| \qquad (7)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $f(x,y)$ $D$ sohada $u$ bo‘yicha Lipshist shartini qanoatlantiradi deyiladi. $L$ – Lipshist o‘zgarmasi.

**Eslatma.** Teoremadagi Lipshist shartini bajarilishini talab qilish o‘rniga $f(x,y)$ funksiyadan $y$ bo‘yicha hosilani uzluksizligini talab qilish mumkin.

Ya’ni,

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|\le K, \qquad K=const>0.$$

Endi Pikar teoremasini isbot qilishga o‘tamiz. Buning uchun avvalo quyidagi ikkita lemmani keltiramiz.

**Lemma 1. (Ekvivalentlik lemmasi)**

Agar $y=\varphi(x)$ funksiya $x_0$ nuqtani o‘z ichiga olgan biror J intervalda aniqlangan bo‘lib (4), (5), Koshi masalasining yechimi bo‘lsa, u holda $y=\varphi(x)$ funksiya J intervalda

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt \qquad (8)$$

integral tenglamaning yechimi bo‘ladi va aksincha, agar $y=\varphi(x)$ funksiya (8) tenglamaning yechimi bo‘lsa, u holda $y=\varphi(x)$ funksiya (4), (5), Koshi masalasini yechimi bo‘ladi.



**Isbot.** $y=\varphi(x)$ funksiya (1) tenglamaning yechimi bo‘lganligi uchun

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=f(x,\varphi(x))$$

ayniyat o‘rinli bo‘ladi. Bu ayniyatni $x_0$ dan $x$ gacha integrallaymiz

$$(x_0,x\in J) \quad \varphi(x)=\varphi(x_0)+\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt$$

(5) shartdan foydalansak,

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt.$$

Bu tenglikdan ko‘rinadiki, $y=\varphi(x)$ funksiya (8) tenglamaning yechimi.

Endi teskarisiga isbotlaymiz, $y=\varphi(x)$ funksiya (8) ning yechimi bo‘lsa, $\varphi(x)$ ni (8)ga qo‘yamiz va undan hosila olamiz.

$$\varphi'(x)=\frac{d}{dx}\left(y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt\right)=o+\frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt\right)=f(x,\varphi(x))$$

Demak, $\varphi'(x)=f(x,\varphi(x))$bu tenglik $y=\varphi(x)$ funksiya (4) tenglamaning yechimi ekanligini ko‘rsatadi. Lemma isbot bo‘ldi.

**Lemma 2. (Gronuoll lemmasi)**

Agar u($x$) funksiya $\left[x_0, \frac{x_0}{h}\right]$ intervalda manfiymas, uzluksiz bo‘lib, shu intervalda ushbu

$$u(x)=A+B\int_{x_0}^{x} u(t)dt, \qquad A\ge 0, B\ge 0 \qquad (9)$$

integral tengsizlikni qanoatlantirsa, shu u($x$) funksiya uchun quyidagi

$$u(x)\le Ae^{B(x-x_0)}, \quad x\in\left[x_0, \frac{x_0}{h}\right]$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi

Xususiy holda agar $A$=0 bo‘lsa u($x$)=0.

Ushbu lemmaning isboti $u(x)\le e^{B(x-x_0)}v(x)$ belgilash kiritib, (9) ga qo‘yish bilan isbotlanadi.

Yuqoridagi ikki lemmadan foydalanib, teoremani isbotlash mumkin.

Pikar teoremasining isboti, mavjudligi.

1. Lemmaga ko‘ra (4), (5) masala o‘rniga unga ekvivalent bo‘lgan

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

integral tenglamani yechish masalasini ko'ramiz. Yechimni ketma-ket yaqinlashish usuli bilan izlaymiz. $|x-x_0|\le h$ intervalda aniqlangan funksiyalar ketma-ketligini tuzamiz.

$$y_0(x) = y_0, \qquad y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt$$

- - - - - - - - - - - - - - - -

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt$$

Bu funksiyalarning grafigi ko'rilayotgan $|x-x_0|\le h$ intervalda $D_h = \{(x,y): |x-x_0|\le h, |y-y_0|\le b\}$ to'g'rito'rt burchakdan chiqib ketmasligini asoslab qo'yamiz, ya'ni $n=0,1,2,\ldots$ uchun $(x_n, y_n)\in D_h$ bo'lib $n=0$ bo'lsin, unda $(x_0, y_0)\in D_h$

$n=1$ da

$$|y_1(x) - y_0| = \left|y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt - y_0\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y(t))|dt\right| \le M\int_{x_0}^{x} dt =$$

$$= M|x-x_0| \le Mh \le b \qquad \left(h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)\right),$$

Xuddi shunday $n=2$ da

$$|y_2(x) - y_0| \le \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y(t))|dt\right| \le M|x-x_0| \le Mh \le b,$$

ixtiyoriy $n$ uchun

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt\right| \le M\int_{x_0}^{x} dt = M|x-x_0| \le Mh \le b,$$

eslatib o'tamizki bunda biz quyidagi formuladan foydalandik

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(x)dx\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(x)|dx\right|.$$

Shunday qilib, ko'rilgan $\{y_n(x)\}$ funksiyalar ketma-ketligi



$|x-x_0|\le h$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz. Bu funksional ketma-ketlikni tekis yaqinlashuvchi ekanligini isbotlaymiz.

Ushbu funksional qatorni qaraylik

$$y_0 + (y_1(x) - y_0) + (y_2(x) - y_1(x)) + \ldots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) + \ldots \tag{10}$$

Uning $n$ - xususiy yig'indisi $S_n(x)=y_n(x)$ va

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l^n M \dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}}{l^{n-1} M \dfrac{h^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} l\frac{h}{n-1} = 0 < 1 \text{ bo'lib, yaqinlashuvchi.}$$

Matematik analiz fanidagi Dalamber alomatining formulasi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \begin{cases} q < 1, \textit{ yaqinlashuvchi} \\ q > 1, \textit{ uzoqlashuvchi} \end{cases}$$

Xulosa qilib shuni aytishimiz mumkinki, sonli qatorni yaqinlashuvchiligidan Veyershtrass teoremasiga ko'ra (10) funksional qator $y=\varphi(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashuvchi va limit funksiyasi ham uzluksiz funksiya bo'ladi.

Endigi bosqichda $y=\varphi(x)$ limit funksiya (4), (5) masalaning yechimi ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun $n\to\infty$ da

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \tag{11}$$

tenglikdan

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt \tag{12}$$

tenglik kelib chiqishini isbotlash zarur.

Ravshanki,

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt - \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi(t)) - f(t, y_n(t))|dt\right| \le l\int_{x_0}^{x} |\varphi(t) - y_n(t)|dt$$

$y_n(x)$ ketma-ketlik $\varphi(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashganligidan ixtiyoriy $\varepsilon>0$ berilganda ham shunday $n_0$ nomer topiladiki $n>n_0$ bo'lganda

$$|\varphi(x) - y_n| \le \frac{\varepsilon}{lh}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Shuning uchun

$$l\left|\int_{x_0}^{x} |\varphi(t) - y_n(t)|dt\right| \le l\frac{\varepsilon}{lh}\int_{x_0}^{x} dt \le \left(\frac{\varepsilon}{h}|x-x_0|\right) \le \frac{\varepsilon}{h}h = \varepsilon \text{ ya'ni}$$

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt - \int_{x_0}^{x} f(t,y_n(t))dt\right| \le \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli, bundan

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(t,y_n(t))dt = \int_{x_0}^{x} f\left(t, \lim_{n\to\infty} y_n(t)\right)dt = \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt$$

bu esa (11) tenglikdan (12) kelib chiqishini ko'rsatadi.

Yuqorida ko'rsatilgan isbotlardan qisqa qilib shuni aytish mumkinki, (4), (5) Koshi masalasining yechimini mavjudligini $|x-x_0|\le h$ oraliqda 1-lemmaga ko'ra integral tenglamaga keltiriladi hamda bu integral tenglamaning yechimi ketma-ket yaqinlashish usuli yordamida mavjudligini va bu funksiya limit funksiya ekanligini ko'rsatiladi.

Endi (4), (5) Koshi masalasining yechimi mavjud bo'lsa, yagona ekanligini ko'rsatamiz.

Masala yechimining yagonaligi: Faraz qilaylik (4), (5) masalasining ikkita yechimi mavjud bo'lsin. $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ lar $|x-x_0|\le h$ intervalda aniqlangan bo'lib, $|x-x_0|\le h$ interval ularning umumiy aniqlanish intervali bo'lsin.

Shu intervalda $\varphi(x)\equiv\psi(x)$ ekanligini ko'rsatamiz. $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ yechim bo'lganligi uchun

$$\frac{d\varphi}{dx} = f(x,\varphi(x)), \quad \frac{d\psi}{dx} = f(x,\psi(x)).$$

Bundan $[x_0, x_0+h]$ interval uchun

$$|\varphi(x)-\psi(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt - \int_{x_0}^{x} f(t,\psi(t))dt\right| \le l\int_{x_0}^{x}|\varphi(t)-\psi(t)|dt,$$

$$\text{ya'ni } |\varphi(x)-\psi(x)| \le l\int_{x_0}^{x}|\varphi(t)-\psi(t)|dt$$

bu tengsizlikka Gronuoll lemmasini $A=0$ deb olib, qo'llasak, u holda $\varphi(x)=\psi(x)$ ekanligi kelib chiqadi, ya'ni lemmadagi $u(x)$ funksiya sifatida $u(x)=\varphi(x)-\psi(x)$ ayirmani olib, lemmadagi tengsizlikda $A=0$ bo'lsa $u(x)=0$ bo'ladi yoki $\varphi(x)=\psi(x)$. Biz $x\in[x_0, x_0+h]$ uchun ko'rsatdik. Shunga o'xshash $x\in[x_0+h, x_0]$ uchun ham muloxaza yuritish mumkin. Shunday qilib, Pikar teoremasi to'la isbot etildi.

**5-misol:** Quyidagi Koshi masalasining yechimiga yaqinlashuvchi yechimning birinchi uchta hadini toping.



$$y' = x + y^2$$
$$y(0) = 0$$

Bunda

$$f(x,y) = x + y^2, \quad x_0 = 0, \; y_0 = 0$$

$n=0$ da $y=0$

$n=1$ da $y_1(x) = 0 + \int_0^x (t + 0^2)dt = \int_0^x t\,dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x = \frac{x^2}{2}$

$n=2$ da $y_2(x) = 0 + \int_0^x \left(t + \left(\frac{t^2}{2}\right)^2\right)dt = \int_0^x \left(t + \frac{t^4}{4}\right)dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20}$

Demak, $y_0 = 0$, $y_1 = \frac{x^2}{2}$, $y_2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20}$.

Bu yechim teorema shartiga ko'ra faqat $x=0$ nuqtaning biror atrofida mavjud bo'ladi. $f(x,y)$ funksiya butun $(x,y)$ tekislikda aniqlangan va uzluksiz bo'lganligi uchun ixtiyoriy

$D=\{(x,y): x_0-a\le x\le x_0+a,\; y_0-b\le y\le y_0+b\}$ sohani, ya'ni $a$ va $b$ ni olish mumkin.

Unda $M = \max|x+y^2| = a + b^2$ bo'ladi.

Yechim esa $|x| \le \min\left(a, \frac{b}{a+b^2}\right)$ intervalda mavjud va yagona bo'ladi.

**Amaliy mashg'ulot uchun mavzuning qisqacha bayoni va yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar**

Birinchi tartibli differensial tenglamalar $F(x,y,\frac{dy}{dx})=0$ ko'rinishga ega. Bu tenglamani ko'p hollarda $\frac{dy}{dx}$ ga nisbatan yechib $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ ko'rinishga keltiriladi.

$\frac{dy}{dx}=f(x)$ ko'rinishdagi tenglamani $dy=f(x)dx$ ko'rinishda yozib, tomonlarini integrallasak $y=\int f(x)dx+c$ umumiy yechim kelib chiqadi.

Shunga o'xshash $\frac{dy}{dx}=g(y)$ tenglamaning umumiy yechimi $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{g(y)}$ dan $x(y)=\int\frac{dy}{g(y)}+c$ yoki $\int\frac{dy}{g(y)}=x+c$ ko'rinishda bo'ladi.

1.1. Yechimi $x^2+cy^2=2y$ bo'lgan differensial tenglamani tuzing.

Yechish: Tenglikning har ikkala tomonidan hosila olamiz:

$$2x+2c\cdot y\cdot y'=2y'$$

Bundan, $c=\frac{y'-x}{yy'}$. Berilgan tenglamaga qo'yib $x^2+\frac{y'-x}{yy'}\cdot y^2=2y$ ni hosil qilamiz.

Soddalashtirib $x^2y'-xy=yy'$ tenglamani topamiz.

1.2. $y=Cx^3$ funksiya $3y-xy'=0$ differensial tenglama yechimi ekanligini tekshiring va R(1;1) nuqtadan o'tuvchi xususiy yechimini toping.

**Yechish:** $y=Cx^3$ funksiyadan hosila olib $y'=3Cx^2$ differensial tenglamaga qo'ysak, $3Cx^3-x\cdot 3Cx^2=0$ ayniyat hosil bo'ladi. Demak, $y=Cx^3$ umumiy yechim ekan. $x=y=1$ ekanligidan $C=1$, ya'ni $y=x^3$ funksiya R(1;1) nuqtadan o'tuvchi xususiy yechimdir.

1.3. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$, $x\in R$ tenglamaning umumiy yechimini, $y(1)=\pi$ shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

**Yechish:** $dy=\frac{dx}{1+x^2}$ dan $y=arctgx+c$ umumiy yechim. $x=1$ da $y=\pi$ ekanligidan $\pi=arctg1+c$ ya'ni, $c=\frac{3\pi}{4}$.

Koshi masalasi yechimi $y=arctgx+\frac{3\pi}{4}$ ga teng.

**Mustaqil yechish uchun topshiriqlar:**

1.4. Quyidagi umumiy yechimlarga mos differensial tenglamalarni tuzing.

1. $y=e^{Cx}$ 2. $y=(x-e)^3$
3. $y=Cx^3$ 4. $y=\sin(x+C)$
5. $y^2+Cx=x^3$ 6. $y=C(x-C)^2$
7. $Cy=\sin Cx$

1.5. Quyidagi differensial tenglamalar yechilsin.

1. $y'=3x^2$ 2. $y'=\cos x$
3. $y'=3e^{3x}$ 4. $y'=y$
5. $y'=\sin y$ 6. $y'=e^y$

1.6. Koshi masalasi yechimini toping.

$y'=\sin x$, $y(0)=1$



**Tekshirish uchun savollar**

1. Differensial tenglama deb qanday tenglamaga aytiladi?
2. Tenglamani tartibi qanday aniqlanadi?
3. Yechim va umumiy yechim ta'rifini ayting?
4. Hosilaga nisbatan yechilgan tenglama uchun Koshi masalasini qo'ying?
5. Ekvivalentlik lemmasini ayting?
6. Gronuoll lemmasini ayting?
7. Pikar teoremasi?
8. Lipshist shartini keltiring?

## 1.2-§. O‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamalar. Bir jinsli va unga keltiriladigan tenglamalar.

REJA:

- O‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamalarning umumiy ko‘rinishlari va ularni ekvivalentligi.
- Bir jinsli funksiya tushunchasi.
- Bir jinsli tenglama va uni yechish usuli.
- Bir jinsli tenglamalarga keltiriladigan tenglamalar.

**Tayanch iboralar**

O‘zgaruvchilari ajiraladigan tenglama. Bir jinsli funksiya. Bir jinsli tenglama.

Hosilaga nisbatan echilgan differensial tenglamalarda, agar $f(x,y)=f_1(x)d_1(y)$ ko‘rinishdagi funksiya bo‘lsa, u holda tenglama

$$y'=f_1(x)d_1(y) \tag{1}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bunda $f_1(x)$ biror $J_1$ intervalda $d_1(y)$ esa $J_2$ intervalda aniqlangan funksiyalardir.

(1) ko‘rinishdagi differensial tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama deyiladi.

**Teorema.** Agar $a\le x\le b$, $c\le y\le d$ o‘zgarganda $f_1(x)d_1(y)$ funksiya uzluksiz, hamda $d_1(y)\ne 0$ bo‘lsa, u holda

$q=\{(x,y): a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$

to‘g‘ri to‘rtburchak sohani ixtiyoriy $(x_0,y_0)$ nuqtasidan tenglamani bitta va faqat bitta grafigi o‘tadi.

$\frac{dy}{dx}=y'$ ekanligidan foydalanib, (1) tenglamani

$$\frac{dy}{d_1(y)}=f_1(x)dx$$

ko‘rinishda yozib olamiz. So‘ngra integrallab $K_1(y)-F_1(x)=C$ yoki $F(x,y)=C$ ko‘rinishdagi umumiy integral topiladi.

**1-misol :** Tenglamani yeching

$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ *unda* $f_1(x)=-x,\ d_1(y)=\frac{1}{y}$ bo‘lib $y\ne 0$ $\quad ydy=-xdx$



ko‘rinishda o‘zgaruvchilarni ajratamiz va integrallaymiz, u holda $\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+\frac{C_1}{2}$ yoki $y^2+x^2=C_1$ ko‘rinishdagi umumiy integralga ega bo‘lamiz.

O‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamalar ushbu ko‘rinishda ham bo‘lishi mumkin.

$$M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0 \tag{2}$$

bu ko‘rinishdagi tenglamani ham (1) ko‘rinishga keltiramiz, ya’ni

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\frac{N_1(y)}{N_2(y)}$$

Agar $\frac{M_1(x)}{M_2(x)}=f_1(x)$, $-\frac{N_1(y)}{N_2(y)}=d_1(y)$ belgilash kiritsak, (2) tenglama (1) ko‘rinishni oladi. Uni yuqorida ko‘rilgan usulda yechimini topish mumkin.

Quyidagi differensial tenglama berilgan bo‘lsin.

$$M(x,u)dx+N(x,y)dy=0 \tag{3}$$

Agar $M(x,u)$ va $N(x,u)$ funksiyalar bir xil tartibdagi bir jinsli funksiyalar bo‘lsa, u holda (3) tenglama bir jinsli tenglama deyiladi. Matematik analiz kursidan ma’lumki, berilgan $f(x,y)$ funksiya $n$ - tartibli bir jinsli funksiya deyiladi, agar ixtiyoriy $t$ uchun

$$f(tx,ty)=t^m f(x,y) \tag{4}$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa. Endi ushbu ma’lumotdan foydalanib, (3) tenglamani tahlil etamiz.

( 4) tenglikda $t=\frac{1}{x}$ almashtirish bajaramiz

$$f(1,\frac{y}{x})=\frac{1}{x^m}f(x,y)$$

yoki

$$f(x,y)=x^m f(1,\frac{y}{x}) \tag{5}$$

(5) formuladan foydalanib ( 3 ) ni quyidagicha yozamiz .

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}=-\frac{x^m M(1,\frac{y}{x})}{x^m N(1,\frac{y}{x})}=-\frac{M(1,\frac{y}{x})}{N(1,\frac{y}{x})}=\varphi(\frac{y}{x})$$

Demak, bir jinsli tenglama

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x}) \tag{6}$$

Bu tenglamadan ko'rinadiki, koordinata boshida birorta ham integral chiziq o'tmaydi.

Bir jinsli tenglamani yechish uchun

$$y = z \cdot x \tag{7}$$

almashtirish qilamiz, bunda $z = z(x)$ yangi noma'lum funksiya (7) ni (6) tenglamaga qo'yamiz, buning uchun

$$dy = xdz + zdx \quad (y' = z'x + z)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Differensialni (hosilani) topamiz.

$$\frac{xdz + zdx}{dx} = \varphi(z)$$

soddalashtirsak ,

$$x\frac{dz}{dx} + z = \varphi(z)$$

yoki

$$\frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x}$$

ko'rinishga keladi. Bu o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir, so'ngi tenglamani integrallab,

$$F(z,x,c) = 0$$

funksiyani olamiz.

So'ng (7) almashtirishdan $z$ ni topib,

$$F\left(\frac{y}{x}, x, c\right) = 0 \text{ yoki } F(x,u,s) = 0$$

umumiy integralga ega bo'lamiz.

**2-misol:** Tenglamani yeching.

$$(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$$

avvalo bu tenglama bir jinsli ekanligini ko'rsatamiz. (4) formulaga ko'ra $x = xt$, $y = yt$ deb olamiz

$$(t^2y^2 - 2xtyt)dx + t^2x^2dy = 0$$

$$t^2(y^2 - 2xy)dx + t^2x^2dy = 0$$

$$t^2((y^2 - 2xy)dx + x^2dy) = 0$$

bundan kelib chiqadiki,

$$(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = [x = xt, y = yt] = t^2[(y^2 - 2xy)dx + x^2dy]$$

bo'lib $m=2$ bo'ladi. U holda berilgan tenglama uchun $y = zx$ almashtirish qilish mumkin.

Bundan $dy = zdx + xdz$ bo'lib, tenglamaga qo'yilsa



a) $z^2 - z \neq 0$

$\frac{dz}{z^2 - z} = -\frac{dx}{x}$ integrallab, topamiz:

$\ln(z-1) - \ln z = -\ln x + \ln c$ yoki $x\frac{z-1}{z} = c$ yoki $x(y-1) = yc$.

b) $z^2 - z = 0$ bo'lsa, u holda

$z(z-1) = 0$ bo'lib , $z=0$, $z=1$ undan yuqoridagi almashtirishga ko'ra

$$\frac{y}{x} = 0, y = 0$$

$$\frac{y}{x} = 1, y = x$$

ifodalarga ega bo'lamiz.

Demak, umumiy integral $x(y-1) = yc, y = 0$.

Bir jinsli tenglamalarga keltiriladigan differensial tenglamalardan biri

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{8}$$

ko'rinishdagi tenglama bo'lib, unda $s_1$ va $s_2$ lardan kamida bittasi noldan farqli bo'lsin. Unda 2 holni qaraymiz.

**1-hol:**

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0 \text{ bo'lsin}$$

Bu holda $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ sistemani yechib, $x = x_0$, $u = u_0$ yechimni topamiz va

$$\begin{array}{ll} \xi = x - x_0, & \eta = y - y_0 \\ x = \xi + x_0, & y = \eta + y_0 \end{array} \tag{9}$$

almashtirish bajaramiz. (9) almashtirishni (8) tenglamaga qo'ysak

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\eta + a_1x_0 + b_1\eta + b_1y_0 + c_1}{a_2\xi + a_2x_0 + b_2\eta + b_2y_0 + c_2}\right),$$

$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right)$ ko'rinishga keladi.

Bundan (6) ko'rinishdagi bir jinsli tenglamani olamiz, ya'ni

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_2 + b_1\frac{\eta}{\xi}}{a_2 + b_2\frac{\eta}{\xi}}\right) = \varphi\left(\frac{\eta}{\xi}\right).$$

Bu tenglamani oldingi usulda yechish mumkin.

**2-hol.** Agar

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a = 0$$

bo‘lsa, u holda

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$$ tenglikka ega bo‘lamiz.

Bundan esa

$a_1 = a_2 k,\ b_1 = b_2 k$ bo‘ladi. (8) tenglamaga qo‘ysak

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{(a_2 x + b_2 y)k + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) = f_1(a_2 x + b_2 y) \qquad (10)$$

ko‘rinishdagi tenglamaga ega bo‘lamiz.

(10) tenglamada $z = a_2 x + b_2 y$ almashtirish bajaramiz, u holda o‘zgaruvchilarni ajraladigan

$$\frac{dz}{dx} = a + b f_1(z)$$

tenglama hosil bo‘ladi.

**Amaliy mashg‘ulot uchun mavzuning qisqacha bayoni va yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar**

$y' = f(x)\cdot g(y)$ yoki $M(x)\cdot N(y)dx + P(x)\cdot Q(y)dy = 0$ ko‘rinishda yoziladigan differensial tenglamalar o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar deyiladi. Bunday tenglamalarni yechish uchun ikkala tomonni shunday ifodalarga bo‘lish (ko‘paytirish) kerakki, natijada tenglamaning bir tomonida faqat $y$ ga, ikkinchi tomonida faqat $x$ ga bog‘liq ifodalar hosil bo‘lsin.

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \text{yoki} \quad \frac{Q(y)}{N(y)}dy = -\frac{M(x)}{P(x)}dx$$

So‘ngra ikkala tomonni integrallab umumiy yechim hosil qilinadi. Ikkala tomon $x, y$ qatnashgan ifodalarga bo‘linganda, bu ifodalarni nolga aylantiradigan xususiy yechimlar yo‘qolishi mumkin.

$y' = f(ax + by + c)$ ko‘rinishdagi differensial tenglamalar,

$z = ax + by + c$ yangi o‘zgaruvchi kiritish yordamida o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalarga keltiriladi.

2.1. $xydx + (x+1)dy = 0$ tenglamani yeching.



**Yechish:** $(x+1)dy = -xydx$ ko‘rinishda yozib olib, ikkala tomonni $y\cdot(x+1)$ ga bo‘lamiz. Bunda tenglamani qanoatlantiruvchi $y=0,\ x=-1$ yechimlar borligini yodda tutamiz.

Tenglama $\frac{dy}{y} = -\frac{x}{x+1}dx$ ko‘rinishga keladi. Ikkala tomonni integrallaymiz:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x}{x+1}dx$$

$\ln|y| = -x + \ln|x+1| + \ln C$ ya’ni $y = C\cdot(x+1)\cdot e^{-x}$ umumiy yechimdir.

2.2. $y'\cdot ctgx + y = 2$ tenglamaning $y(\frac{\pi}{3}) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

**Yechish:** $\frac{dy}{dx}\cdot ctgx = 2 - y$ ko‘rinishda yozib, $\frac{dy}{2-y} = tgxdx$ ko‘rinishga keltiramiz. Ikkala tomonni integrallab $-\ln|2-y| = -\ln|\cos x| - \ln C$ yoki $-2 + y = C\cdot\cos x$ yechimga ega bo‘lamiz.

Demak, $y = 2 + C\cdot\cos x$ umumiy yechimdir.

Endi boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topamiz. $y(\frac{\pi}{3}) = 0$ dan $0 = 2 + C\cdot\cos\frac{\pi}{3}$, ya’ni $0 = 2 + C\cdot\frac{1}{2}$, $C = -4$.

Izlanayotgan yechim $y = 2 - 4Cosx$ bo‘ladi.

2.3. $y' = y + 2x - 3$ tenglamani o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamaga keltiring va yeching.

**Yechish:** $z = y + 2x - 3$ ko‘rinishda yangi o‘zgaruvchi kiritamiz.

$y = z - 2x + 3$ dan $y' = z' - 2$

$z' - 2 = z$ ko‘rinishdagi tenglamaga ega bo‘lamiz.

$\frac{dz}{z+2} = dx$ dan

$\ln|z+2| = x + \ln C$ yoki $z + 2 = C\cdot e^x$ kelib chiqadi.

Eski o‘zgaruvchilarga qaytib $y = C\cdot e^x - 2x + 1$ ekanligini topamiz.

**Bir jinsli va unga keltiriladigan tenglamalar tenglamalar**

$M(x,y)dx + N(x,y)dx = 0$ tenglamada $M(\lambda x; \lambda y)$, $N(\lambda\ \ \lambda x;$ almashtirishlar bajarganimizda tenglama ko‘rinishi o‘zgarmasa, bunday tenglama bir jinsli deyiladi. Bunday tenglamalar

$\frac{dy}{dx} = \varphi(\frac{y}{x})$ ko‘rinishga keladi va $\frac{y}{x} = u$ yoki $y = ux$ yangi o‘zgaruvchi kiritish yordamida o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamaga keltiriladi.

$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right)$ ko'rinishdagi differensial tenglamalar koorinatalar boshini $a_1x+b_1y+c_1=0$ va $ax+by+c=0$ to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasiga parallel ko'chirish yordamida bir jinsliga keltiriladi. Agar bu to'g'ri chiziqlar kesishmasa, $a_1x+b_1y=k(ax+by)$ bajarilib, $z=ax+by$ almashtirish yordamida o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamaga keladi.

Ba'zi tenglamalarda $y=z^m$ almashtirish yordamida bir jinsliga keltirib olinadi. Buning uchun m sonini differensial tenglama bir jinsli bo'ladigan qilib tanlab olinadi. Bunday m soni mavjud bo'lmasa, bu usul bilan tenglamani bir jinsliga keltirib bo'lmaydi.

2.4. $(x+2y)dx-xdy=0$ tenglamani yeching.

**Yechish:** $\lambda\neq 0$ uchun $(\lambda x+2\lambda y)dx-\lambda xdy=0$ tenglama berilgan tenglamaning aynan o'zi, demak, tenglama bir jinsli $y=u\cdot x$ almashtirish bajaramiz.

$$y'=u'x+u, \qquad dy=xdu+udx$$

ekanligidan $(x+2\cdot ux)dx-x\cdot(xdu+udx)=0$

$x\cdot[(1+2u)dx-(xdu+udx)]=0$ da $x=0$ xususiy yechim bo'ladi. Qavs ichini ixchamlab, $(1+u)dx=xdu$

$$\int\frac{du}{1+u}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|1+u|=\ln x+\ln C$$

$1+u=C\cdot x$ ga ega bo'lamiz.

$\frac{y}{x}=Cx-1$ dan $y=x\cdot(Cx-1)$ umumiy yechim kelib chiqadi.

2.5. $(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy=0$ tenglamani bir jinsliga keltiring va yeching.

**Yechish:** $2x-4y+6=0$ va $x+y-3=0$ to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasi R(1;2)dir. Demak, $X=x-1,\quad Y=y-2$ almashtirishlar o'tkazamiz.

$$[2(X+1)-4(Y+2)+6]dx+[(X+1+Y+2-3)]dy=0$$

$$(2X-4Y)dX+(X+Y)dY=0$$

hosil bo'lgan tenglama bir jinslidir.

$$(2x-4\cdot u\cdot x)dx+(x+u\cdot x)[udx+xdu]=0$$

$x=0$, ya'ni $x-1=0$ xususiy yechim bo'lishi mumkin.

$(2-4u)dx+(1+u)(udx+xdu)=0$



$$\frac{1+u}{(u-1)(u-2)}du=-\frac{dx}{x}$$

$$-\int\frac{2}{u-1}du+\int\frac{3}{u-2}du=-\int\frac{dx}{x}$$

$$-2\ln|u-1|+3\ln|u-2|=-\ln x+\ln C$$

$$3\ln|u-2|+\ln x=2\ln|u-1|+\ln C$$

$$(u-2)^3\cdot X=C(u-1)^2$$

$u=\frac{Y}{X}=\frac{y-2}{x-1}$ ekanligini hisobga olsak,

$$\left(\frac{y-2}{x-1}-2\right)^3\cdot(x-1)=C\left(\frac{y-2}{x-1}-1\right)^2$$

$(y-2x)^3(x-1)=C(y-x-1)^2$ umumiy yechimdir.

2.6. $x^3(y'-x)=y^2$ tenglamani bir jinsliga keltiring.

**Yechish:** $y=z^m$, $\quad y'=mz^{m-1}\cdot z'$ almashtirish o'tkazamiz.

$x^3(mz^{m-1}\cdot z'-x)=z^{2m}$

Bu tenglama bir jinsli bo'lishi uchun $3+m-1=4=2m$ tengliklar bajarilishi, ya'ni $m=2$ bo'lishi zarur.

Unda tenglama $x^3(2\cdot z\cdot z'-x)=z^4$ ko'rinishdagi bir jinsli differensial tenglamaga aylanadi.

**Mustaqil yechish uchun topshiriqlar:**

2.7. Quyidagi differensial tenglamalarni yeching.

| | |
|---|---|
| 1. $xy'-y=0$ | 2. $xy'+y=0$ |
| 3. $yy'+x=0$ | 4. $y'=y$ |
| 5. $x^2y'+y=0$ | 6. $x+xy+y'(y+xy)=0$ |
| 7. $\sqrt{y^2+1}dx=xydy$ | 8. $2x^2yy'+y^2=0$ |
| 9. $y'-xy^2=2xy$ | 10. $y'=e^{x+y}$ |

2.8. Berilgan boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarni toping.

| | |
|---|---|
| 1. $2y'\sqrt{x}=y;$ | $y(4)=1$ |
| 2. $y'=(2y+1)ctgx;$ | $y(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$ |
| 3. $x^2y'+y^2=0;$ | $y(-1)=1$ |

4. $y' = 2\sqrt{y}\ln x;$ $\quad y(e) = 1$

5. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0;$ $\quad y(0) = 1$

6. $xy' + y = y^2;$ $\quad y(1) = \frac{1}{2}$

2.9. Yangi o‘zgaruvchi kiritib o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamaga keltiring va yeching.

1. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$
2. $y' = \cos(y - 1)$
3. $(x + 2y)y' = 1;$ $\quad y(0) = -1$
4. $(2x - y + 1)y' = 1$

2.10. Bir jinsli ekanligini tekshiring va yeching.

1. $yy' = 2y - x$ $\qquad$ 2. $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$ $\qquad$ 4. $xy' + 2\sqrt{xy} = y$

5. $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$ $\qquad$ 6. $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$

7. $xy' = y - x \cdot e^{\frac{y}{x}}$ $\qquad$ 8. $xy' = y\cos Ln\frac{y}{x}$

2.11. Parallel ko‘chirish yordamida bir jinsliga keltiring va yeching.

1. $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$
2. $(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5$
3. $(y + 2)dx = (2x + y - 4)dy$
4. $y' = 2\left(\frac{x + 2}{x + y - 1}\right)^2$
5. $(y' + 1)\ln\frac{y + x}{x + 3} = \frac{y + x}{x + 3}$

2.12. Yangi o‘zgaruvchi kiritib bir jinsliga keltiring va yeching.

1. $2x^2y' = y^3 + xy$ $\qquad$ 2. $2xdy + (x^2y^4 + 1)ydx = 0$

3. $ydx + x(2xy + 1)dy = 0$ $\qquad$ 4. $2y' + x = 4\sqrt{y}$

5. $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$ $\qquad$ 6. $2y + (x^2 \cdot y + 1)xy' = 0$

## ? Tekshirish uchun savollar



1. O‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamani umumiy ko‘rinishi?
2. $y' = f(ax + by + c)$ tenglama qanday yechiladi?
3. $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ tenglamani yeching?
4. $y' = \sin^2 x$ tenglamani yeching?
5. $y' = f\left(\frac{1}{2x - y}\right)$ tenglamani yeching?
6. Bir jinsli funksiya tushunchasi?
7. Bir jinsli tenglama ko‘rinishi?
8. Bir jinsli tenglamaga keltiriladigan tenglamalar?
9. Umumlashgan bir jinsli tenglamani bir jinsli tenglamaga keltirish usuli?
10. $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$ tenglamani yeching?

## 1.3-§. Chiziqli tenglamalar. O'zgarmaslarni variatsiyalash usuli

REJA:

- Chiziqli tenglama va uning xossalari.
- Chiziqli tenglamaning umumiy yechimi.
- Bernulli tenglamasi.

**Tayanch iboralar**

Chiziqli tenglama, Bernulli tenglamasi, o'zgarmasni variastiyalash (Lagranj) usuli.

Quyidagi

$$y'+p(x)y=f(x) \tag{1}$$

ko'rinishdagi $y$ va $y'$ ga nisbatan chiziqli bo'lgan tenglama chiziqli tenglama deyiladi.

Tenglamadagi $p(x)$ va $f(x)$ funksiyalar $(a,b)$ intervalda uzluksiz $(-\infty \le a, b \le \infty)$.

Agar (1) tenglamada $f(x)\equiv 0$ $(x\in(a,b))$ bo'lsa , u holda

$$y'+p(x)y=0 \tag{2}$$

tenglama bir jinsli deyiladi.

Agar (1) tenglamada $f(x)\neq 0$ bo'lsa bir jinsli bo'lmagan tenglama deyiladi. Bu tenglama uchun boshlang'ich shart qo'yib, Koshi masalasini hosil qilamiz. Pikar teoremasiga ko'ra agar $p(x)$ va $f(x)$ funksiyalar $(a,b)$ intervalda uzluksiz bo'lsa, u holda

$$y(x_0)=y_0$$

shartni qanoatlantiruvchi yagona yechimi mavjud, shuningdek bir jinsli tenglamalarning integral chiziqlari OX o'qini kesib o'tmaydi.

Haqiqatdan ham, agar OX o'qini kesib o'tsa, u holda Koshi masalasining yechimini yagonaligi buziladi, chunki $y=0$ (OX o'qi) ham (2) tenglamaning yechimi.

Shunday qilib, quyidagi xulosaga kelamiz. Agar (2) tenglamani biron-bir yechimi $(a,b)$ intervalni bitta nuqtasida nolga aylansa, u holda butun $(a,b)$ intervalda nolga teng va aksincha $(a,b)$ intervalni bitta nuqtasida nolga teng bo'lmasa, butun intervalda noldan farqli.



**Chiziqli tenglama xossalari**

1. Chiziqli tenglamada $x$ argumentni ixtiyoriy

$$x=\varphi(t)$$

almashtirilganda ham, o'z ko'rinishini (ya'ni chiziqliligini) o'zgartirmaydi.

2. Chiziqli tenglamada $y$ noma'lum funksiya ixtiyoriy

$$y=a(x)z+b(x)$$

chiziqli almashtirilganda ham o'z ko'rinishini (ya'ni chiziqliligini) o'zgartirmaydi.

Bir jinsli (2) tenglamaning umumiy yechimini izlash uchun uni quyidagicha yozib olamiz.

$$dy=-yp(x)dx \quad \text{tenglikdan}$$

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx \text{ , buni integrallab}$$

$$y=ce^{-\int p(x)dx} \tag{3}$$

ko'rinishdagi yechimini olamiz, bunda

$$s=const$$

(3) ko'rinishidagi yechim ushbu xossalarga ega.

1. Agar $y_1$ (2) tenglamaning xususiy yechimi bo'lsa, u holda

$$y_1'+p(x)y\equiv 0 \tag{4}$$

ayniyat o'rinli hamda

$$y=cy_1 \tag{5}$$

funksiya ham uning yechimi bo'ladi.

**Isbot**: $y=cy_1$ funksiyani (2) tenglamaga qo'yamiz

$$(cy_1)'+p(x)(cy_1)=s(y_1'+p(x)y_1)$$

(4) tenglikka ko'ra yuqoridagining o'ng tomoni nolga teng, ya'ni

$$s(y_1'+p(x)y_1)=0$$

Demak, (5) ko'rinishdagi funksiya tenglamaning yechimi.

2. Agar $y_1$ (2) ni noldan farqli xususiy yechimi bo'lsa, u holda (5) ko'rinishdagi funksiya (2) ning umumiy yechimi bo'ladi.

Ma'ruza davomida bir jinsli bo'lmagan tenglama uchun o'zgarmasni variasiyalash usuli bilan tanishamiz. Bu usul ba'zan Lagranj usuli deb yuritiladi.

(1) tenglamaning yechimini (3) ko'rinishida qidiramiz, ya'ni

$$y=ce^{-\int p(x)dx} \tag{6}$$

bunda, $c$ o'zgarmasni o'rniga, $c=c(x)$ uzluksiz differensiallanuvchi funksiya deb, (6) dan hosila olamiz

$$y' = c'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx} \quad (7)$$

(6) va (7) ni (1) tenglamaga qo‘yamiz.

$$c'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x),$$

bundan

$$c'(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

yoki

$$c'(x) = f(x)e^{\int p(x)dx}$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

So‘nggi tenglikni integrallab,

$$c(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + c_1, \quad c_1 = const$$

Bu ko‘rinishdagi $c(x)$ funksiya qiymatini (6) ga qo‘ysak,

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(c_1 + \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx\right) \quad (8)$$

ko‘rinishdagi (1) tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

(8) ni yoyib yozsak

$$y = e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + c_1e^{-\int p(x)dx} \quad (9)$$

ko‘rinishga keladi. Buning birinchi hadi (1) tenglamani biror xususiy yechimini bildirsa, ikkinchi qo‘shiluvchi (2) tenglamaning umumiy yechimini ifodalaydi.

**Eslatma**: 1. Yuqoridagi (3) va (9) formulalardagi integralni $x_0$ dan $x$ gacha aniq integralga almashtirish mumkin, bunda $x_0 \in (a,b)$, ya’ni

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}\left(c_1 + \int_{x_0}^{x} f(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(x)dx}dx\right)$$

Agar $y(x_0)=y_0$ boshlang‘ich shart berilsa, u holda

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(x)dx}dx\right) \quad (10)$$

Koshi ko‘rinishidagi umumiy yechimga ega bo‘lamiz.

**Eslatma**: 2. Agar $p(x)$ va $f(x)$ funksiyalar $(-\infty,+\infty)$ intervalda aniqlangan va uzluksiz bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $x_0,y_0$ boshlang‘ich shart bilan aniqlangan yechim ham uzluksiz va uzluksiz differensiallanuvchi bo‘ladi, ya’ni (10) formula aniqlagan integral egri chiziq $(-\infty,+\infty)$ intervalda silliq bo‘ladi.



**Bernulli tenglamasi.** Ushbu

$$y' + p(x)y = f(x)y^n \qquad (n \neq 0,1) \qquad (11)$$

ko‘rinishdagi tenglama Bernulli tenglamasi deyiladi.

Bernulli tenglamasini chiziqli tenglamaga keltirish mumkin. Buning uchun (11) ni $y^n$ ga bo‘lamiz, u holda

$$y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = f(x) \quad (12)$$

tenglamani olamiz. Bunda

$$y^{1-n} = z \qquad \left(y = z^{\frac{1}{1-n}}\right) \quad (13)$$

almashtirish bajaramiz.(13) ni (12) ga qo‘yish uchun $y'$ ni topamiz. Ya’ni (13) dan hosila olib,

$$(1-n)y^{-n}y' = z', \quad y' = \frac{z'}{(1-n)y^{-n}} \quad (14)$$

endi (13) va (14) ni (12) ga qo‘yamiz

$$y^{-n}\frac{z'}{(1-n)y^{-n}} + p(x)z = f(x)$$

yoki

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)f(x)$$

Bu chiziqli tenglama, ushbu chiziqli tenglamani yuqoridagi usulda yechib, so‘ng yana $(x,y)$ o‘zgaruvchilarga o‘tsak Bernulli tenglamasining yechimi quyidagicha ko‘rinishga ega bo‘ladi.

$$y = \left(e^{\int(n-1)p(x)dx}\left(c + \int(1-n)f(x)e^{\int(1-n)p(x)dx}dx\right)\right)^{\frac{1}{1-n}} \quad (15)$$

**1-misol:** $y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x}y^2$ tenglamani yeching. Bu Bernulli tenglamasi bo‘lib $n=2$, $p(x)=-\frac{1}{x}$, $f(x)= -\frac{1}{x}$. Tenglamani $y^2$ ga bo‘lib yuboramiz

$$y^{-2}y' - \frac{1}{x}y^{-1} = -\frac{1}{x}$$

Bu yerda $y^{-1}=z$ $\left(\frac{1}{y} = z\right)$ almashtirish qilamiz, hosila olsak, $-\frac{1}{y^2}y' = z'$, $\qquad y' = -z'y^2$ va tenglamaga qo‘yamiz

$$y^{-2}\left(-z'y^2\right) - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x}$$

soddalashtirsak

$$z'+\frac{1}{x}z=\frac{1}{x}.$$

Bu chiziqli tenglamani o‘zgarmasni variastiyallash usulida yechib

$$z=\frac{1}{x}(c+x)$$

yechimga ega bo‘lamiz. $u$ o‘zgaruvchiga o‘tsak

$$y=\frac{x}{x+c}$$

umumiy yechim hosil bo‘ladi.

**Eslatma**: Bernulli tenglamasini $y^n$ ga bo‘lganda ($n>0$) yechim yo‘qotishimiz mumkin. Shuning uchun $n>1$ da $y=0$ yechimni (15) formuladan $c=\infty$ bo‘lganda olish mumkin, bu xususiy yechim bo‘ladi. Agar $0<n<1$ bo‘lsa $y=0$ yechim (14) formuladan kelib chiqmaydi va maxsus yechim bo‘ladi.

**Amaliy mashg‘ulot uchun mavzuning qisqacha bayoni va yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar**

No‘malum funksiya va uning hosilalari birinchi darajada qatnashgan differensial tenglamalar chiziqli deyiladi.

Birinchi tartibli chiziqli tenglama $y'+P(x)y=Q(x)$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bunday tenglamani $y=u\cdot v$ almashtirish yordamida o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamaga keltirish mumkin. O‘zgarmas sonni variasiyalash deb ataluvchi ikkinchi usulda bunday tenglamani yechish uchun dastlab $y'+P(x)y=0$ tenglama umumiy yechimi olinadi, undagi o‘zgarmas S soni S(x) funksiya bilan o‘zgartiriladi, berilgan tenglamaga qo‘yilib va S(x) funksiya topiladi.

Bu xususiy yechim va bir jinsli tenglama umumiy yechimi yig‘indisi berilgan tenglama yechimi hisoblanadi.

$y'+P(x)y=Q(x)\cdot y^n$ $(n\neq 1)$ ko‘rinishdagi tenglama Bernulli tenglamasi deyiladi. Bu tenglamaning ikkala tomoni $y^n$ ga bo‘linib $\frac{1}{y^{n-1}}=z$ almashtirish o‘tkazilsa, chiziqli tenglamaga ega bo‘lamiz.

$y'+P(x)y+Q(x)\cdot y^2=R(x)$ ko‘rinishdagi tenglama Rikkati tenglamasi deyiladi. Bunday tenglamaning biror xususiy $y_0(x)$ yechimi



ma’lum bo‘lsagina, $y=y_0(x)+z$ almashtirish yordamida Bernulli tenglamasiga keltirish mumkin.

3.1. $y'-\frac{2}{x}\cdot y=2x^3$ chiziqli differensial tenglamani yeching.

**Yechish:** $y'-\frac{2}{x}\cdot y=0$ tenglamaning umumiy yechimi $y=Cx^2$; $y=C(x)\cdot x^2$ deb olamiz va berilgan tenglamaga qo‘yamiz

$$C'(x)\cdot x^2+2x\cdot C(x)-\frac{2}{x}\cdot C(x)x^2=2x^3$$

soddalashtirib, $C'(x)=2x$, ya’ni $C(x)=x^2$ ekanligini topamiz. Xususiy yechim $y=x^4$ ekan. Berilgan tenglamaning umumiy yechimi $y=Cx^2+x^4$ ko‘rinishda bo‘ladi.

3.2. $y'-\frac{1}{x}y=\frac{x}{y^2}$ Bernulli tenglamasini yeching.

**Yechish:** $n=-2$ ekanligidan $z=\frac{1}{y^{-2-1}}=y^3$ almashtirish o‘tkazamiz. $y=z^{\frac{1}{3}}$, $y'=\frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}}\cdot z'$ ekanligidan $\frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}}\cdot z'-\frac{1}{x}\cdot z^{\frac{1}{3}}=\frac{x}{z^{\frac{2}{3}}}$ kelib chiqadi.

Tomonlarni $3z^{\frac{2}{3}}$ ga ko‘paytirib, $z'-\frac{3}{x}z=3x$ chiziqli tenglamani hosil qilamiz.

$z'-\frac{3}{x}z=0$ ning umumiy yechimi $z=C\cdot x^3$.

$z=C(x)\cdot x^3$ deb olamiz va berilgan tenglamaga qo‘yamiz.

$C'=\frac{3}{x^2}$ dan $C(x)=-\frac{3}{x}+C_1$. Xususiy yechim $z=-3x^2$ ko‘rinishida, umumiy yechim esa $z=C_1\cdot x^3-3x^2$ bo‘ladi. Eski o‘zgaruvchiga qaytib $y^3=Cx^3-3x^2$ Bernulli tenglamasi yechimi ekanligini topamiz.

3.3. $y'-2xy+y^2=5-x^2$ Rikkati tenglamasining xususiy yechimi $y_1=x+2$ ma’lum bo‘lsa, umumiy yechimini toping.

**Yechish:** $y=x+2+z$, $y'=1+z'$ almashtirish bajaramiz

$$1+z'-2x(x+2+z)+(x+2+z)^2=5-x^2.$$

Soddalashtirib, $z'+4z=-z^2$ Bernulli tenglamasiga ega bo‘lamiz. $\frac{1}{z^{2-1}}=t$, $z=\frac{1}{t}$, $z'=-\frac{1}{t^2}\cdot t'$ almashtirish yordamida $t'-4t=1$ chiziqli tenglamaga kelamiz.

$t'-4t=0$ tenglama yechimi $t=C\cdot e^{4x}$,

$t'-4t=1$ tenglama yechimi esa $t=\frac{4Ce^{4x}-1}{4}$ ekanligini topish mumkin.

Mos Bernulli tenglamasini yechimi $z=\frac{4}{4Ce^{4x}-1}$ ko‘rinishda, Rikkati tenglamasi umumiy yechimi esa $y=x+2+\frac{4}{4Ce^{4x}-1}$ ko‘rinishda bo‘ladi.

**Mustaqil yechish uchun topshiriqlar:**

3.4. Chiziqli tenglamalarni yeching.

1. $y'-\frac{3y}{x}=x$ 2. $(2x+1)y'=4x+2y$
3. $y'+ytgx=\frac{1}{\cos x}$ 4. $(xy+e^x)dx-xdy=0$
5. $2x(x^2+y)dx=dy$ 6. $x^2\cdot y'+(x+1)y=3x^2\cdot e^{-x}$

3.5. Izlanayotgan funksiya va bog‘liqsiz o‘zgaruvchi «rollarini» almashtiring, hosil bo‘lgan tenglamalarni yeching.

1. $y=(2x+y^3)\cdot y'$ 2. $(x+y^2)dy=ydx$
3. $(2\cdot e^y-x)y'=1$ 4. $(\sin^2 y+xctgy)\cdot y'=1$

3.6. Bernulli tenglamalarini yeching.

1. $x^2y'-xy=y^2$ 2. $y'-xy=-y^3\cdot e^{-x^2}$
3. $y'x+y=-xy^2$ 4. $xydy=(y^2+x)dx$
5. $xy'+2y+x^5y^3\cdot e^x=0$ 6. $y'x^3\sin y=xy'-2y$.

3.7. Xususiy yechimi berilgan Rikkati tenglamalarini yeching.

1. $x^2y'+xy+x^2y^2=4$ $y_0=\frac{2}{x}$
2. $3y'+y^2+\frac{2}{x^3}=0$ $y_0=\frac{1}{x}$
3. $xy'-(2x+1)y+y^2=-x^2$ $y_0=x$
4. $y'+2ye^x-y^2=e^{2x}+e^x$ $y_0=e^x$



**Tekshirish uchun savollar**

1. Chiziqli tenglamaning umumiy ko‘rinishi?
2. Bir jinsli qismi?
3. Chiziqli tenglamani yechishni o‘zgarmasni variastiyalash usuli?
4. Chiziqli tenglamani yechishni o‘rniga qo‘yish usuli?
5. $y'+3\frac{y}{x}=x$ ?
6. Bernulli tenglamasini umumiy ko‘rinishi?
7. Bernulli tenglamani yechishdan almashtirish ko‘rinishi?
8. Rikkati tenglamasini umumiy ko‘rinishi?
9. Rikkati tenglamasini yechimi usuli?
10. Rikkati tenglamasi qanday tenglamaga keltiriladi?

## 1.4-§. To‘la differensialli tenglamalar. Integrallovchi ko‘paytuvchi. Hosilaga nisbatan yechilmagan tenglamalar

REJA:

- To‘la differensialli tenglamalar tushunchasi.
- Eyler –Dalamber sharti.
- Integrallovchi ko‘paytuvchi haqida tushuncha.
- Tenglamaning turli ko‘rinishlari va uni yechish.
- Parametr kiritish usuli.
- Lagranj tenglamasi. Klero tenglamasi

**Tayanch iboralar**

To‘la differenstialli tenglama, integrallovchi ko‘paytuvchi, Eyler - Dalamber sharti, tenglama yechimning parametrik ko‘rinishi, Klero tenglamasi, Langraj tenglamasi

Bizga

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{1}$$

ko‘rinishidagi tenglama berilgan bo‘lsin. Bunda $M(x,y)$, $N(x,y)$ funksiyalar biror $D$ to‘plamda aniqlangan va uzluksiz.
Agar (1) tenglamani chap tomoni biror $F(x,y)$ funksiyani to‘la differensiali bo‘lsa, ya’ni

$$dF=M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

u holda (1) tenglama to‘la differensial tenglama deyiladi.

Faraz qilaylik (1) tenglama to‘la differensial tenglama bo‘lsin, u holda

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy$$

tenglik o‘rinli. Bundan esa

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$$

ekanligi kelib chiqadi. So‘ngi tengliklarni mos holda $y$ va $x$ bo‘yicha differensiallaymiz

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{3}$$



Matematik analiz kursidan ma’lumki aralash hosilalar uzluksiz, u holda hosila olish tartibiga bog‘liq bo‘lmaydi. Shuning uchun (3) ni chap tomonlari teng bo‘ladi. Demak, o‘ng tomonlari ham teng

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \tag{4}$$

(4) shart (1) tenglamani to‘la differensial tenglama bo‘lishi uchun zaruriy va yetarli shart bo‘lib Eyler-Dalamber sharti deb ataladi.

(1) tenglamani integrallash quyidagicha amalga oshiriladi. (3) ni birinchi ayniyatini olib $x$ bo‘yicha integrallaymiz, ya’ni

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)$$

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\varphi(y) \tag{5}$$

$x_0 - D$ sohadan olingan biror nuqta. Bundan $y$ bo‘yicha hosila olamiz

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\varphi'(y)$$

yoki $M(x,y)$ funksiya aniqlangan soha bir bog‘lamli bo‘lganligi uchun hosila bilan integral tartibini almashtirish mumkin

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{dM}{dy}dx+\varphi'(y)$$

(3) ni ikkinchi tengligidan foydalanib, $\frac{\partial F}{\partial y}$ o‘rniga $N(x,y)$ qo‘yamiz

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M}{\partial y}dx+\varphi'(y)=N(x,y)$$

Bu erda (4) tenglikdan foydalansak,

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}dx+\varphi'(y)=N(x,y)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Integrallab

$$N(x,y)-N(x_0,y)+\varphi'(y)=N(x,y)$$

topamiz. Bundan esa

$$\varphi'(y)=N(x_0,y)$$

yoki integrallab

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy+c_1 \tag{6}$$

formulaga ega bo‘lamiz, $c_1=const$, $\varphi(u)$ ni ifodasini (5) ifodaga qo‘yib,

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy+c_1$$

ko'rinishda izlanayotgan funksiyani topamiz. Bu formulada $c_1$=0 deb, quyidagi ko'rinishda yozamiz.

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy=c \qquad (7)$$

(7) ifoda (1) tenglamaning umumiy integralini ifodalaydi.

**Eslatma**: (3) tenglikni ikkinchi tengligini olib $u$ bo'yicha integrallab, yuqoridagi ishlarni bajarsak, u holda umumiy integral

$$\int_{x_0}^{x} M(x_0,y)dx+\int_{y_0}^{y} N(x,y)dy=c$$

ko'rinishda bo'ladi.

**1-misol:** $(x^3+y)dx+(x-y)dy=0$

$$M=x^3+y,\quad N=x-y,\qquad \frac{dM}{dy}=1,\qquad \frac{dN}{dx}=1$$

(4) shart bajarildi

$$F_x=M=x^3+y,\qquad F_y=N=x-y$$

deb olsak, u holda (7) formuladan foydalanib

$$\int_0^x (t^3+y)dt+\int_0^y (-t)dt=c \quad (x_0=0,\ y_0=0)$$

integrallab quyidagini topamiz.

$$\left(\frac{t^4}{4}+yt\right)\Big|_0^x+\left(-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^y=c \text{ yoki } \frac{x^4}{4}+yx-\frac{y^2}{2}=c$$

Bu berilgan tenglamaning umumiy integrali.

Yuqorida to'la differensial tenglama to'g'risida fikr yuritdik, agar Eyler-Dalamber sharti bajarilmasa, u holda tenglama to'la differensial tenglama bo'lmaydi. Ba'zi hollarda tenglamani to'la differensial tenglamaga keltirish mumkin.

Agar (1) tenglamaning chap tomoni to'la differensial bo'lmasa shunday $\mu=\mu(x,y)\geq 0$, $(x,y)\in D$ funksiya topish mumkinki, tenglamaning chap tomonini shu funksiyaga ko'paytirilsa, to'la differensial tenglama hosil bo'ladi, ya'ni

$$dF=Mdx+Ndy \qquad (8)$$

Shunday xossaga ega bo'lgan $\mu=\mu(x,y)$ funksiyaga integrallovchi ko'paytuvchi deyiladi.



$F(x,y)$ funksiyaga

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (9)$$

tenglamaning integrali deyiladi

Faraz qilaylik, $M$ va $N$ funksiyalar $M_y$, $N_y$ hosilalari bilan uzluksiz, u holda Eyler-Dalamber shartiga ko'ra

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \qquad (10)$$

tenglik o'rinli, bundan ko'rinadiki, $M$, $N$ lar birinchi tartibli hosilalari bilan uzluksiz. (10) ni yoyib yozsak.

$$\frac{\partial M}{\partial y}\mu+M\frac{\partial \mu}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\mu+N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

yoki

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x}-M\frac{\partial \mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu \qquad (11)$$

ko'rinishga keladi. Bu $(x,y)$ funksiyaga nisbatan xususiy hosilali birinchi tartibli tenglama bo'lib, bu tenglamani yechish oson emas. Shuning uchun ba'zi xususiy hollarini ko'rib chiqamiz.

**1-hol:** $\mu=\mu(x)$ bo'lsin. U holda (4) da $\frac{\partial \mu}{\partial y}=0$ bo'ladi va

$$N\frac{d\mu}{dx}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bundan ($N\neq 0$ ) tenglikni olamiz.

$\frac{\mu'}{\mu}=(\ln\mu)'$ ekanligidan foydalanib $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\psi(x)$ belgilash kiritsak,

$$\frac{\mu'}{\mu}=\psi(x) \text{ yoki } (\ln\mu)'=\psi(x)$$

tenglamaga kelamiz. Uni integrallab, $\mu=ce^{\int\psi(x)dx}$ yechimga ega bo'lamiz. $c$ – ixtiyoriy o'zgarmas son ekanligidan $c$= 1 deb olsak

$$\mu=e^{\int\psi(x)dx} \qquad (12)$$

integrallovchi ko'paytuvchining (12) ko'rinishiga ega bo'lamiz. (12) ni (9) ga ko'paytirsak, to'la differensial tenglamaga kelamiz.

**2-hol:** $\mu=\mu(y)$ bo'lsin, unda (11) tenglik

$$-M\frac{d\mu}{dy}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$$

ko'rinishni oladi. Bunda

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\psi(y)$$

belgilash kiritib, 1-holdagi kabi fikr yuritib,

$$\mu = ce^{\int \psi(y)dy}$$

integrallovchi ko‘paytuvchi ko‘rinishini olamiz.

**3-hol:** $\mu=\mu(w(x,y))$ ko‘rinishda bo‘lsin. U holda (4) tenglik

$$N\frac{\partial \mu}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}-M\frac{\partial \mu}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu(w)$$

ko‘rinishga keladi. So‘nggi tenglikdan

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial w}{\partial x}-M\frac{\partial w}{\partial y}}$$

ifodani hosil qilib va ung tomonini $\psi(w)$ funksiya bilan belgilasak,

$$\mu = e^{\int \psi(w)dw}$$

ko‘rinishdagi integrallovchi ko‘paytuvchini topamiz.

Xususiy holda agar $w(x,y)=x\cdot y$ bo‘lsa:

a) $\psi(x,y)=\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{Ny-Mx}$ ga teng

(bunda $\frac{dw}{dx}=y,\ \frac{dw}{dy}=x$)

b) agar $w(x,y)=x+y$ bo‘lsa,

$$\psi(x+y)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N-M}$$

ko‘rinishda bo‘ladi, (bunda $\frac{dw}{dx}=1,\ \frac{dw}{dy}=1$ )

**Eslatma:** $\mu=\mu(x,y)$ integrallovchi ko‘paytuvchini bilgan holda umumiy va maxsus yechimlar topiladi. Haqiqatdan ham (9) tenglama berilgan bo‘lib, $\mu=\mu(x,y)$ uning integrallovchi ko‘paytuvchisi bo‘lsa

$$dF=\mu Mdx+\mu Ndy$$

tenglik o‘rinli, bundan

$$\mu\,(Mdx+Ndy)=dF$$

yoki



$$(Mdx+Ndy)=\frac{1}{\mu}dF$$

buni (10) tenglamaga qo‘ysak, $\frac{1}{\mu}dF=0$ tenglikka ega bo‘lamiz, hamda

$$\frac{1}{\mu}=0,\ dF=0 \qquad (13)$$

tengliklarga kelamiz, (13) dan

$$F=c\ (c=const)$$

umumiy integralni va $\frac{1}{\mu}=0$ dan maxsus yechimni olishimiz mumkin.

Hosilaga nisbatan yechilmagan tenglama

$$F(x,y,y')=0 \qquad (14)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu tenglamani $y'$ ga nisbatan yechish mumkin bo‘lsa

$$y'=f_k(x,y)\ \ (k=1,2,\ldots) \qquad (15)$$

ko‘rinishdagi tenglamaga keladi. Bu tenglamalarni yechib, umumiy yechimni topish mumkin.

Agar (14) ni $y'$ga nisbatan yechish mumkin bo‘lmasa, u holda (14) ni yechimini turli usullarda topish mumkin. Buning uchun ba’zi hollarni alohida qaraymiz.

**1-hol:** $F=F(y')$ bo‘lsin, ya’ni

$$F(y')=0 \qquad (16).$$

Bu tenglamaning kamida bitta $y'=k_i$ yechimi mavjud, $k_i$ – o‘zgarmas son:

$y'=k_i$ ni integrallab, $y=k_ix+c$ yoki $k_i=\frac{y-c}{x}$ tengliklarni olamiz. $k_i$ yechim ekanligini nazarda tutsak, (3) tenglamani $F\left(\frac{y-c}{x}\right)=0$ ko‘rinishdagi integralga kelamiz.

**2-hol:** $F=F(x,y')$ bo‘lsin, ya’ni

$$F(x,y')=0 \qquad (17)$$

Bu tenglamani $y'$ ga nisbatan yechish mumkin bo‘lsa $y'=f_i(x)$ $(i=1,2,\ldots)$ tenglamani olamiz va uni integrallab, yechimini topamiz . Agar $y'$ ga nisbatan yechish mumkin bo‘lmasa,

$$x=\varphi(t),\ y'=\psi(t) \qquad (18)$$

ko'rinishda parametr kiritib, (17) ni o'rniga 2 ta (18) ko'rinishidagi tenglamani qaraymiz.
$dy=y'dx$ bo'lganligi, (18) ni birinchi tengligidan $dx=\varphi(t)dt$ ekanligi uchun $dy=\psi(t)\varphi'(t)dt$ yoki $y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+c$ tenglikni olamiz va (17) ning yechimi parametrik ko'rinishda

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+c \end{cases}$$ ifodalanadi.

**Eslatma**: Agar (17) ni $x=\varphi(y)$ ko'rinishida yozish mumkin bo'lsa $y'=t$ parametr kiritiladi.

**3-hol:** $F=F(y, y')$ bo'lsin, ya'ni

$$F(y,\ y')=0 \tag{19}$$

Bu holda $y=\varphi(t)$, $y'=\psi(t)$ ko'rinishida parametr kiritiladi. Bunda

$$dy=y'dx \qquad dx=\frac{dy}{y'}=\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}$$

tengliklardan

$$x=\int\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}dt+c$$

tenglikka ega bo'lamiz.
Demak, (19) ning yechimi parametrik ko'rinishda

$$\begin{cases} x=\int\dfrac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}dt+c \\ y=\varphi(t) \end{cases}$$

ifodalanadi.

**Eslatma**: Agar $y=\varphi(y')$ ko'rinishida yozish mumkin bo'lsa, u holda $y'=t$ almashtirish amalga oshiriladi.

**4-hol:** $F=F(x,y,y')$ bo'lsin, ya'ni

$$F(x,y,y')=0 \tag{20}$$

Bunda agar $y=f(x,y')$ (21) ko'rinishida yozish mumkin bo'lsa, parametr p kiritiladi. (21) ni differensiallab,

$$dy=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dp}{dx}$$

yoki $dx$ ga bo'lib

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dp}{dx}$$

tenglamaga kelamiz, almashtirishdan foydalansak,



$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dp}{dx}$$

$p$ ga nisbatan differensial tenglamaga kelamiz, buni integrallab, $F(x,p,c)=0$ integral topamiz.
Shunday qilib,

$$\begin{cases} y=f(x,p) \\ \Phi(x,p,c)=0 \end{cases}$$

funksiyalar (7) ning integrallari oilasini aniqlaydi.

**Eslatma**: (7) ni $x=f(y,y')$ ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, $y'=p$ almashtirish bajariladi.

Bunda $x=f(y,p)$ parametrik ko'rinishdagi tenglamani olamiz, bu tenglamaga $dy=y'dx$, $dx=f'_y dy+f'_p dp$ qiymatlarni qo'yib,

$$dy=p(\varphi'_y dy+\varphi'_p dp)$$

tenglamaga kelamiz.
$y$ ni o'zgaruvchi deb qarab, $dy$ ga bo'lamiz

$$1=p\left(\varphi'_y+\varphi'_p\frac{dp}{dy}\right) \text{ yoki } \frac{1}{p}=\varphi'_y+\varphi'_p\frac{dp}{dy}$$

tenglama hosil bo'ladi. So'nggi tenglamadan

$$p=\omega(y,c)$$

bo'lib, umumiy yechim

$$x=\varphi(y,\omega(y,c))$$

ko'rinishda yoziladi.

Agar $p=\varphi(y)$ maxsus yechim bo'lsa,

$$x=\varphi(y,\gamma(y))$$

maxsus yechim bo'ladi.
Ushbu

$$y=\varphi(y')x+\psi(y') \tag{21}$$

ko'rinishidagi tenglama Lagranj tenglamasi deyiladi va bu tenglamada $y'=p$ parametr kiritamiz. U holda (21)

$$y=\varphi(p)x+\psi(p),\ y'=p \tag{22}$$

$dy=y'dx$ da $dy$ va $y'$ ni (22) dan foydalanib,

$$\varphi(p)dx+(\varphi'(p)x+\psi'(p))dp=pdx$$

yoki

$$(\varphi(p)-p)dx+(\varphi(p)+\psi'(p))dp=0$$

tenglamani olamiz. Bu tenglamada oldidagi koeffitsient $x$ ga bog'liq emas, $dx$ oldidagi koeffitsient esa $x$ ga nisbatan chiziqli, shuning uchun uni $x$ ga nisbatan chiziqli tenglamaga keltiramiz. Buning uchun uni

$dp$ ga va $\varphi(p)-p \neq 0$ ga bo'lamiz

$$\frac{dx}{dp}+\frac{\varphi(p)}{\varphi(p)-p}=\frac{\varphi(p)}{p-\varphi(p)}$$

Bu chiziqli tenglama bo'lib yechimi $x=A(p)c+B(p)$ ko'rinishiga ega, buni (22) ga qo'yamiz

$$y=A(p)\varphi(p)c+B(p)\varphi(p)+\psi(p)$$

yoki

$$\begin{cases} y=A_1(p)c+B_1(p) \\ x=A(p)c-B(p) \end{cases}$$

parametrik ko'rinishidagi yechimini topamiz.

**Eslatma**: Agar $\varphi(p)-p=0$ bo'lsa, u holda (22) dan

$$y=p\,x+\varphi(p) \qquad (23)$$

ko'rinishga keladi.

$\varphi(p)-p \neq 0$ deb bo'linganda bu tenglamani $p=p_i$ yechimlarini yo'qotgan bo'lishimiz mumkin. Shuning uchun bu qiymatlarni (23) ga qo'yib,

$$y=p_i x+\varphi(p_i) \qquad (i=1,2,\ldots)$$

ko'rinishdagi xususiy yoki maxsus yechimlarini olamiz. So'nggi tenglikdan ko'rinadiki, Lagranj tenglamasining maxsus yechimlari to'g'ri chiziqlardan iborat.

Quyidagi

$$y=y'x+\psi(y') \qquad (24)$$

tenglama Klero tenglamasi deyiladi.

Lagranj tenglamasida $\varphi(y')=y'$ deb olingan. (24) tenglamada ham $y'=p$ parametr kiritiladi.

Unda

$$y=p\,x+\psi(p), \quad y'=p \qquad (25)$$

bo'lib, $dy=y'dx$ ga ko'ra (25) ni differensiallab,

$$pdx+(x+\psi'(p))=pdx$$

yoki

$$x+\psi'(p)dp=0$$

tenglamaga keltiriladi. So'nggi tenglamadan

$$dp=0, \quad x+\psi'(p)=0$$

2 ta tenglamaga kelamiz. Ularni birinchisidan $p=c$ ni topib, (25) ni birinchi tenglamasiga qo'yamiz va

$$y=cx+\psi(s)$$

ko'rinishdagi to'g'ri chiziqlar oilasini hosil qilamiz.

Ikkinchi tenglamadan



$$x=\psi'(p)$$

tenglikni olib, Klero tenglamasini

$$\begin{cases} x=-\psi'(p) \\ y=-p\psi'(p)+\psi(p) \end{cases}$$

parametrik ko'rinishdagi yechimini yozish mumkin.

**Amaliy mashg'ulot uchun mavzuning qisqacha bayoni va yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar**

$P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0$ tenglama chap tomoni biror $F(x;y)$ funksiyaning to'la differensiali bo'lsa, bu tenglama to'la differensial tenglama deyiladi.

Masalan, $xdy+ydx=0$ va $\frac{xdy-ydx}{x^2}=0$ tenglamalar chap tomoni mos ravishda $F(x;y)=x\cdot y$ va $F(x;y)=\frac{y}{x}$ funksiyalarning to'la differensiali bo'lib, umumiy yechimlari $x\cdot y=C$ va $\frac{y}{x}=C$ ko'rinishda bo'ladi.

$P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0$ tenglama chap tomoni to'la differensial bo'lishi uchun $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ shart bajarilishi zarur. Bu shart bajarilsa, $dF=F_x'dx+F_y'dy=Pdx+Qdy=0$ dan $F_x'=P$, $F_y'=Q$ kelib chiqadi.

$F=\int P(x;y)dx+\varphi(y)$ desak, (o'zgarmas son o'rniga $\varphi(y)$ olamiz.)

$F_y'=\left(\int P(x;y)dx\right)_y'+\varphi_y'(y)=Q(x;y)$ dan $\varphi(y)$, ya'ni $F(x;y)$ topiladi.

Agar $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$ bo'lsa, ba'zi hollarda shunday $\mu Pdx+\mu Qdy=0$ tenglama to'la differensial tenglama bo'ladi. Bu ko'paytuvchi integrallovchi ko'paytuvchi deyilib, quyidagi hollarda oson topiladi:

1) $\frac{P_{\delta}'-Q_{\delta}'}{Q}=\phi(x)$ bo'lsa, $\ln\mu=\int\phi(x)dx$.

2) $\frac{Q_{\delta}'-P_{\delta}'}{P}=\phi_1(y)$ bo'lsa, $\ln\mu=\int\phi_1(y)dy$.

Dastlabki paragraflardagi differensial tenglamalarning har biri to'la yoki to'la differensial tenglamaga biror integrallovchi ko'paytuvchi yordamida keltiriluvchi tenglamalardir. Masalan, $y'+a(x)y=b(x)$ chiziqli tenglama uchun integrallovchi ko'paytuvchi

$$\mu(x)=e^{\int a(x)dx}$$

ko'rinishda bo'ladi.

**4.1.** $y\cos x dx+\sin x dy=\cos 2x dx$ tenglamani to'la differensialga keltirib yeching.

**Yechish:** Tenglama chap tomonini $d(y\sin x)$, o'ng tomonini $d\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)$ deyish mumkin.

Bundan $d(y\sin x-\frac{\sin 2x}{2})=0$.

Umumiy yechim $y\sin x-\sin x\cos x=C$ yoki $y=\cos x+\frac{C}{\sin x}$ ko'rinishda bo'ladi.

**4.2.** $\frac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0$. To'la differensial tenglama ekanligini tekshiring va yeching.

**Yechish:** $P=\frac{y}{x}$, $Q=y^3+\ln x$ uchun $P_{\delta}'=Q_{\delta}'=\frac{1}{x}$.

Demak, berilgan tenglama to'la differensial tenglamadir.

$$F_{\delta}'=\frac{y}{x},\ F_{\delta}'=y^3+\ln x.$$

$$F(x;y)=\int\frac{y}{x}dx+\varphi(y)=y\ln x+\varphi(y).$$

$F_{\delta}'(x;y)=\ln x+\varphi_{\delta}'(y)=y^3+\ln x$ tenglikdan $\varphi_{\delta}'(y)=y^3$, ya'ni $\varphi(y)=\frac{y^4}{4}$. Demak, umumiy yechim $y\ln x+\frac{y^4}{4}=C$ ko'rinishda bo'ladi.

**4.3.** $(x\cdot\sin y+y)dx+(x^2\cdot\cos y+x\ln x)dy=0$ tenglama uchun integrallovchi ko'paytuvchi toping va yeching.

**Yechish:** $P_{\delta}'=x\cos y+1;\ Q_{\delta}'=2x\cos y+\ln x+1.$

$$\frac{P_{\delta}'-Q_{\delta}'}{Q}=\frac{-x\cos y-\ln x}{x^2\cos y+x\ln x}=-\frac{1}{x}.$$

$\ln\mu=\int(-\frac{1}{x})dx=-\ln x$ dan $\mu(x)=\frac{1}{x}$.



Demak, $(\sin y+\frac{y}{x})dx+(x\cos y+\ln x)dy=0$ tenglama to'la differensial tenglama bo'ladi. Haqiqatan, hosil bo'lgan tenglama uchun $P_{\delta}'=\cos y+\frac{1}{x}=Q_{\delta}'$

$$F_{\delta}'=\sin y+\frac{y}{x};\ F_{\delta}'=x\cos y+\ln x.$$

$$F(x;y)=\int(\sin y+\frac{y}{x})dx=x\sin y+y\ln x+\varphi(y)$$

$$F_{\delta}'(x,y)=x\cos y+\ln x+\varphi_{\delta}'(y)=x\cos y+\ln x$$

Bundan. $\varphi_{\delta}'(y)=0,\ \varphi=C.$

Demak, umumiy yechim $x\sin y+y\ln x=C_1$ ko'rinishda bo'ladi.

Hosilaga nisbatan yechilmagan $F(x,y,y')=0$ tenglama asosan $y'=\frac{dy}{dx}=p$ parametr kiritish usuli bilan yechiladi. Tenglamani $y=f(x,p)$ ko'rinishda yozib, ikkala tomondan to'la differensial olamiz.

$dy=pdx$ ekanligidan

$M(x,p)dx+N(x,p)dp=0$ ko'rinishdagi tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama yechimi $x=\varphi(p)$ bo'lsa, berilgan tenglama yechimi $y=f(\varphi(p),p)$ bo'ladi.

Differensial tenglama $x=f(y,y')$ ko'rinishga kelsa ham, shu usulda umumiy yechimdan tashqari maxsus yechimlarni $F(x,y,p)=0$, $F_{\delta}'(x,y,p)=0$ tenglamalarda r ni yo'qotib topish mumkin.

$y=xf(y')+\varphi(y')$ tenglama Lagranj tenglamasi deyilib, $y'=p$ almashtirishdan quyidagi

$$p=f(p)+[xf'(p)+\varphi'(p)]\frac{dp}{dx}$$

x ga nisbatan chiziqli tenglamani hosil qilamiz.

$y=px+\varphi(p)$ tenglama Klero nomi bilan yuritilib, Lagranj tenglamasi xususiy holidir. Bunday tenglamalar maxsus yechimga ham egadir.

**4.4.** $y(y')^3+x=1$ tenglamani yeching.

**Yechish:** $y'$ ga nisbatan yechamiz: $y'=-\sqrt[3]{\frac{x-1}{y}}$

O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama hosil bo'ldi. Uning umumiy yechimi

$y^{\frac{4}{3}}+(x-1)^{\frac{4}{3}}=\frac{4}{3}C$ ko‘rinishda bo‘ladi.

**4.5.** $(y')^2+xy=y^2+xy'$ tenglamani ga nisbatan yeching, so‘ngra umumiy yechimini toping.

**Yechish:** $(y')^2-xy'+xy-y^2=0$ tenglama $y'$ ga nisbatan kvadrat tenglamadir.

$(y')_{1,2}=\dfrac{x\pm\sqrt{x^2-4(xy-y^2)}}{2}=\dfrac{x\pm(x-2xy)}{2}$ dan

a) $y'=x-y$ (chiziqli)

b) $y'=y$ (o‘zgaruvchilari ajraladigan)

Bu tenglamalar mos ravishda $y=C\cdot e^{-x}+x-1$, $y=Ce^{x}$ umumiy yechimlarga egadir.

**4.6.** $y=(y')^2+2(y')^3$ tenglamani parametr kiritib yeching.

**Yechish:** $y'=p$ belgisi kiritsak, $y=p^2+2p^3$ dan $p=2p\cdot p'+6p^2\cdot p'$ Tomonlarni $p\neq 0$ ga qisqartirsak $1=2p'+6pp'$ yoki $x'=2+6p$. Bunda $x'=\dfrac{dx}{dp}$. Demak, $x=2p+3p^2+C,\ y=p^2+2p^3$.

$p=0$ bo‘lgan holda $y'=0$, ya’ni $y=C$ dan $y=0$ maxsus yechim bo‘ladi.

**4.7.** $y=xy'-(y')^2$ Klero tenglamasini yeching.

**Yechish:** $y'=p$ belgilash kiritib, $p=x\cdot p'+p-2pp'$ ga egamiz. Undan $p'(x-2p)=0$ kelib chiqadi. Agar $p'=0$ bo‘lsa $y'=C$ yoki $y=Cx+C_1$, $x-2p=0$ dan $y'=\frac{x}{2}$ yoki $4y=x^2+4c$ ga ega bo‘lamiz.

**Mustaqil yechish uchun topshiriqlar:**

**4.8.** To‘la differensial tenglamaga keltirib yeching.

1. $x^2dy+xydy=dx$ 2. $y^2xdy-y^3dx=x^2dy$
3. $ydx+(x-y^3)dy=0$ 4. $ydx-(x-y^3)dy=0$
5. $x^2y^2+1+x^3yy'=0$ 6. $xdy-ydx=x^2dx$
7. $xy'+tgy=\dfrac{2x}{\cos y}$ 8. $y(y\cdot e^{\frac{x}{2}}+1)=x\cdot y'$



**4.9.** To‘la differensial tenglama ekanligini tekshiring va yeching.

1. $(4-\frac{y^2}{x^2})dx+\frac{2y}{x}dy=0$
2. $3x^2e^ydx+(x^3\cdot e^y-1)dy=0$
3. $e^{-y}dx+(1-xe^{-y})dy=0$
4. $2x\cos^2 ydx\_+(2y-x^2\sin 2y)dy=0$
5. $(3x^2y-4xy^2)dx+(x^3-4x^2y+12y^3)dy=0$
6. $(x\cos 2y+1)dx-x^2\sin 2ydy=0$
7. $3x^2(1+\ln y)dx=(2y-\frac{x^3}{y})dy$
8. $2x(1+\sqrt{x^2-y})dx-\sqrt{x^2-y}dy=0$

**4.10.** Integrallovchi ko‘paytuvchini toping va yeching.

1. $(x^2-y)dx+xdy=0$
2. $2xtgydx+(x^2-2\sin y)dy=0$
3. $(e^{2x}-y^2)dx+ydy=0$
4. $(\sin x+e^y)dx+\cos xdy=0$
5. $(1+3x^2\cdot\sin y)dx-xctgydy=0$
6. $x(\ln y+2nx-1)dy=2ydx$
7. $(x^2-y)dx+x(y+1)dy=0$
8. $y^2(ydx-2xdy)=x^3(xdy-2ydx)$

**4.11.** Tenglamalarni barcha yechimlarini toping.

1. $(y')^2-y^2=0$ 2. $8(y')^3=27y$
3. $(y'+1)^3=27(x+y)^2$ 4. $y^2((y')^2+1)=1$
5. $(y')^2-4y^3=0$ 6. $x(y')^2=y$

**4.12.** $y'$ ga nisbatan yechib, so‘ngra umumiy yechimlarini toping.

1. $xy'(xy'+y)=2y^2$ 2. $x(y')^2-2yy'+x=0$
3. $x(y')^2=y(2y'-1)$ 4. $(y')^2+x=2y$
5. $(y')^2-2xy'=8x^2$ 6. $(xy'+3y)^2=7x$

**4.13.** Yangi parametr kiritib yeching.

1. $x=(y')^3+y'$ 2. $x((y')^2-1)=2y'$
3. $(y')^4-(y')^2=y^2$ 4. $(y')^2-(y')^3=y^2$

5. $5y+(y')^2=x(x+y')$ 6. $y=2xy'+y\cdot(y')^3$

**4.14.** Lagranj va Klero tenglamalarini yeching.

1. $y=xy'^2+y'^2$ 2. $y=2xy'+\dfrac{1}{y'^2}$

3. $y=\dfrac{xy'^2}{y'+2}$ 4. $y=xy'-y'^2$

5. $y=xy'-a\sqrt{1+y'^2}$ 6. $y=xy'+\dfrac{1}{2y'^2}$

### Tekshirish uchun savollar

1. To‘liq differensial tushunchasi?
2. To‘liq differensial tenglamani umumiy ko‘rinishi?
3. To‘liq differensial tenglama bo‘lishi shart?
4. To‘liq differensial tenglamani yechish haqida tushuncha?
5. To‘liq differensial tenglamaga misol keltiring?
6. Integrallovchi ko‘paytuvchi haqida tushuncha?
7. Integrallovchi ko‘paytuvchi $\mu=\mu(x)$ bo‘lsa uni ko‘rinishini yozing?
8. Integrallovchi ko‘paytuvchi $\mu=\mu(y)$ bo‘lsa uni ko‘rinishini yozing?
9. Integrallovchi ko‘paytuvchi $\mu=xy$ bo‘lsa uni ko‘rinishini yozing?
10. Hosilaga nisbatan yechilmagan tenglamalar umumiy ko‘rinishi?
11. $F=F(y')=0$ xolni yeching?
12. $F=F(y,y')=0$ xolni yeching?
13. $xy'=\sqrt{1+y'^2}$ hosilaga nisbatan yechiladigan tenglamani yeching?
14. Lagranj tenglamasini umumiy ko‘rinishi?
15. Klero tenglamasi umumiy ko‘rinishi?
16. Lagranj tenglamasi yechish haqida tushuncha?
17. Klero tenglamasi yechish haqida tushuncha?
18. Yechimni parametrik ko‘rinishi?



# II BOB. YUQORI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

## 2.1-§. Tartibini pasaytirish mumkin bo‘lgan differensial tenglamalar. $n$-tartibli chiziqli tenglamalar

REJA:

- Chiziqli tenglamalar va uning xossalari.
- Chiziqli tenglama yechimining xossalari.
- Funksiyalarning chiziqli bog‘liqligi va erkliligi .
- Vronskiy determinanti va xossalari.
- Ostrogradskiy-Lyuvill formulasi.
- Yuqori tartibli tenglamalarning turli ko‘rinishlari.
- Quyi tartibli hosila qatnashmagan hol.
- Bir jinsli bo‘lgan hol.
- Almashtirishlar.

**Tayanch iboralar**

Tartibini kamaytirish mumkin bo‘lgan tenglama turlari, almashtirish ko‘rinishlari, $n$ – tartibli chiziqli tenglamalar, funksiyani chiziqli bog‘liqliligi, Vronskiy determinanti, ikkinchi tartibli o‘zgaruvchan koeffitsientli tenglama.

Yuqori tartibli tenglamalarni ba’zi hollarda tartibini pasaytirish mumkin. Xozir shunday tenglamalarning bir necha tiplarini ko‘rib o‘tamiz.

**1.** Ushbu

$$F\left(x,y^{(k)},\dots,y^{(k+1)},\dots,y^{(n)}\right)=0 \qquad (1\leq k\leq n) \qquad (1)$$

(1) tenglamada $y,y',\dots,y^{(k-1)}$ tartibli hosilalar qatnashmaydi. Bu holda $y^{(k)}$=z ko‘rinishda yangi z funksiya kiritamiz, unda (1) tenglama

$$F\left(x,z,z',\dots,z^{(n-k)}\right)=0 \qquad (2)$$

ko‘rinishga kelib, tartibi ($n$-$k$) ga teng. Biror usul bilan (2) tenglamani yechib, umumiy yechimini topamiz.

$$z=w\left(x,c_1,c_2,\dots,c_{n-k}\right)$$

almashtirishga ko‘ra

$$y^{(k)}=w\left(x,c_1,c_2,\dots,c_{n-k}\right)$$

ko‘rinishiga keladi. So‘ngi tenglamani integrallab,

$$y=\varphi\left(x,c_1,c_2,\dots,c_n\right)$$

ko'rinishdagi umumiy yechimini olamiz.

**1-misol:** $4y' + y''^2 = 4xy''$

Unda $y' = z(x)$ deb olsak, $4z + z'^2 = 4xz'$ yoki $z = xz' - \frac{z'^2}{4}$ Klero tenglamasiga keladi.

Klero tenglamasining yechimi

$z = cx - \frac{c^2}{4}$ bo'lib, undan $y' = cx - \frac{c^2}{4}$ tenglamaga kelamiz.

Integrallab, quyidagi

$$y = c_1 x(x - c_1) + c_2 \quad (c_1 = \frac{c}{2})$$

ko'rinishdagi umumiy yechimni topamiz.

**Eslatma**: Agar (1) tenglama

$$F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$$

ko'rinishida bo'lsa $y^{(n-1)} = z$ almashtirish qilamiz.

Agar

$$F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right) = 0$$

ko'rinishda bo'lsa $y^{(n-2)} = z$ almashtirish kiritib

$$z'' = f(z)$$

ko'rinishdagi tenglamaga keltiriladi.

Agar $n$-tartibli tenglamani $y^{(n)} = f(x)$ ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, uni integrallash oson amalga oshiriladi. Bunda $f(x)$ $(a,b)$ intervalda uzluksiz funksiya. Bu tenglamani integrallashda $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$ tenglikdan ketma-ket foydalanib, integrallaymiz, ya'ni

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + c_1$$

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(t)dtdt + c_1(x - x_0) + c_2$$

$$- - - - - - - - - - - -$$

shu jarayonni $n$-marta takrorlab umumiy yechimni hosil qilamiz.

**2.** (1) tenglamada erkli o'zgaruvchi qatnashmasa, ya'ni

$$F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{3}$$

bo'lsa, u holda $y' = z$ ko'rinishda yangi o'zgaruvchi kiritamiz va uni erkli o'zgaruvchi sifatida olamiz hamda ketma-ket hosila hisoblamiz:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}$$



$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dy}z\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy}z\right)\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2 z}{dy^2} + \frac{dz}{dy}\right)^2$$

$$y^{(n)} = w\left(z, \frac{dz}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right)$$

Bu hosilalarni (3) tenglamaga qo'yib,

$$F = \left(y, z, \frac{dz}{dy}z, \ldots, w\left(\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right)\right) = 0$$

$n$-1 tartibli tenglamaga kelamiz. Bu tenglamaning umumiy yechimini topsak,

$$z = \varphi(y, c, c_1, \ldots, c_{n-1})$$

ko'rinishida ifodalanadi. Bundan esa

$$y' = \varphi(y, c, c_1, \ldots, c_{n-1})$$

tenglamaga kelamiz. So'nggi tenglamani integrallab, (3) tenglamani umumiy yechimi topiladi.

**3.** (1) tenglamada $F$ funksiya $y, y', \ldots, y^{(n)}$ o'zgaruvchilarga nisbatan bir jinsli bo'lsin, ya'ni bir jinsli tenglamalar mavzusida berilgan ta'rifga ko'ra ixtiyoriy $t$ uchun

$$F\left(x, ty, ty', ty'', \ldots, ty^{(n)}\right) = t^m F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)$$

tenglik o'rinli bo'lsin.

Bunday tenglamalar uchun

$$\frac{y'}{y} = z$$

almashtirish qilamiz, unda

$$y' = yz, \quad y'' = y'z + z'y = (yz)z + y'z = y(z^2 - z')$$

$$y''' = y(z^3 - 3zz' + z''), \ldots, y^{(n)} = yw\left(z, z', \mathrm{K}, z^{(n-1)}\right)$$

bo'lib, (1) tenglama

$$F\left(x, y, yz, y(z^2 + z'), \ldots, yw\left(z, z', \mathrm{K}, z^{n-1}\right)\right) = 0$$

bu bir jinsli ekanligini nazarda tutsak,

$$y^m F\left(x, 1, z, z^2 + z', \ldots, w\left(z, z', \mathrm{K}, z^{n-1}\right)\right) = 0$$

Bu tenglamani $y^m$ ga bo'lib yuborsak, $n$-1 tartibli tenglamaga kelamiz. Uni yechib,

$$z = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})$$

yechimga ega bo'lamiz , yoki almashtirishga ko'ra

$$y' = y\varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})$$

tenglamani yechamiz, buni umumiy yechimi

$$y=c_n e^{\int \varphi(x,c_1,c_2,\ldots,c_{n-1})dx}$$

ko'rinishda bo'lib, (1) tenglamaning bir jinsli bo'lgan holdagi umumiy yechimini ifodalaydi.

Faraz qilaylik tenglama

$$P\left(x,y^{(n)}\right)+Q\left(x,y^{(n)}\right)=0 \qquad (4)$$

ko'rinishda bo'lib, $P$ va $Q$ funksiyalar mos holda $k$ va $m$ tartibli bir jinsli funksiyalar bo'lsin. U holda

$$y^{(n)}=tx \qquad (5)$$

almashtirish qilib, (4) ni $x$ ga nisbatan yechamiz va $x$ ni o'rniga $x=\varphi(t)$ parametr kiritamiz, uni (5) ga qo'yib,

$$y^{(n)}=t\varphi(t)$$

ko'rinishni hosil qilamiz.

Shunday qilib,

$$x=\varphi(t)$$
$$y^{(n)}=t\varphi(t)$$

parametrik ko'rinishdagi tenglamani hosil qilamiz. $dy^{(n-1)}=y^{(n)}dy$ tenglikdan foydalanib ketma-ket integrallaymiz.

**Eslatma**: $F$ funksiya bir jinsli bo'lgan holda $y=e^{\int zdz}$ almashtirish kiritish ham tenglama tartibini kamaytirishiga olib keladi.

**2-misol:** $yy''-(y)^2=6xy^2$ tenglamani yeching.

Tekshiramiz: $ty-ty''-(ty')^2=6xt^2y^2$,

bundan $t^2\left(yy''-(y')^2\right)=6xy^2$ demak, berilgan tenglama $y,y',y''$ ga nisbatan bir jinsli ekan. Endi

$$y=e^{\int zdz}$$

belgilash kiritamiz: $y'=ze^{\int zdz}$

$y''=e^{\int zdz}\left(z^2+z'\right)$ hosilalar bilan birga tenglamaga qo'yamiz.

$$e^{\int zdz}e^{\int zdz}\left(z^2+z'\right)-z^2e^{2\int zdz}6xe^{2\int zdz}$$

yoki $z^2+z'-z^2=6x$ bo'ladi. $z'=6x$ tenglamani yechib, $z=3x^2+c$ topamiz. Almashtirishga ko'ra,

$y=e^{\int\left(3x^2+c\right)dx}=c_2e^{x^3+cx}$ umumiy yechim hosil bo'ladi.

$n$-chi tartibli chiziqli tenglama deb quyidagi tenglamaga aytiladi.

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=f(x) \qquad (6)$$

agar $f(x)=0$ bo'lsa bir jinsli tenglama,



agar $f(x)\neq0$ bo'lsa bir jinsli bo'lmagan tenglama deyiladi.

$x\in[a,b]$ uchun (6) tenglamada $a_0(x)\neq0$ bo'lsa, u holda bir jinsli tenglamani

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=0 \qquad (7)$$

ko'rinishida yozish mumkin .

(7) ni $L[y]=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y$ deb belgilansa, $L[y]=0$ bo'ladi.

$L-n$ - tartibli chiziqli operator deb atalib, ushbu xossalarga ega:

1. $L[cy]=cL[y]$ $c=const$,
2. $L[y_1+y_2]=L[y_1]+L[y_2]$

Bu xossalarni isboti mos holda $(cu)'=c(u)'$ va $(u+v)'=u'+v'$ formulalar yordamida isbotlanadi.

Bu xossalarni umumlashtirib,

$$L\left[\sum_{i=1}^{n}c_iy_i\right]=\sum_{i=1}^{n}c_iL[y_i], \quad c=const \qquad (8)$$

formulani yozishimiz mumkin.

Endi ushbu xossalardan foydalanib, bir jinsli tenglama yechimlarining ushbu ikki xossasini isbotlaymiz.

1. Agar $y=\varphi(x)$ $x\in I$ funksiya $L[y]=0$ tenglamaning yechimi bo'lsa, u holda $y=c\varphi(x)$ ($c=const$) funksiya ham tenglamaning yechimi bo'ladi.

Haqiqatdan ham, $L$ operatorni birinchi xossasiga ko'ra

$L[c\varphi(x)]=cL[\varphi(x)]$ o'rinli.

Demak, $\varphi(x)$ tenglamaning yechimi bo'lganligi uchun ixtiyoriy $c=const$ bo'lganda

$$cL[\varphi(x)]=0.$$

Shartga ko'ra $L[\varphi_1(x)]=0$, $L[\varphi_2(x)]=0$. $L$ – operatorning ikkinchi xossasiga ko'ra

$$L[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)]=L[\varphi_1(x)]+L[\varphi_2(x)]=0$$

Yuqoridagi xossalardan va (8) formuladan foydalansak,

$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$ funksiyalar $L[y]=0$ tenglamaning yechimi bo'lsa $y=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x)$ funksiya ham shu tenglamaning yechimi bo'lishi kelib chiqadi.

### Funksiyalarni chiziqli bog'liqligi va erkliligi.

**Ta'rif.** Agar $[a,b]$ intervalda

$$\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\ldots+\alpha_ny_n=0$$

ayniyat $\alpha_i$ – o‘zgarmas sonlarni kamida bittasi noldan farqli bo‘lganda bajarilsa, u holda $y_1, y_2, \ldots, y_n$ funksiyalar chiziqli bog‘liq deyiladi, agar ayniyat faqat $\alpha_i=0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ bo‘lganda bajarilsa $y_1, y_2, \ldots, y_n$ funksiyalar chiziqli erkli deyiladi.

Misol: $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$ tenglik faqat $\alpha_1=0$ $\alpha_2=0$ bo‘lganda bajarilishini ko‘rish mumkin. Shuning uchun bu funksiyalar chiziqli erkli.

**Ta’rif.** $n$ – tartibli chiziqli tenglamani $n$ – ta chiziqli erkli yechimlari shu tenglamaning fundamental yechimlari sistemasi deb ataladi.

Shu o‘rinda ushbu teorema o‘rinli.

**Teorema 1**. Koeffitsientlari $[a,b]$ intervalda uzluksiz bo‘lgan ixtiyoriy bir jinsli chiziqli tenglama fundamental yechimlar sistemasiga ega.

**Vronskiy determinanti**

Quyidagi ko‘rinishdagi determinantga Vronskiy determinanti deyiladi:

$$W(x) = W(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ - & - & - & - \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Bu determinant uchun ushbu teoremalar o‘rinli.

**Teorema 2:** Agar $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ funksiyalar biror $I$ intervalda chiziqli bog‘liq bo‘lsa, shu intervalda

$$W(x) \equiv 0$$

tenglik o‘rinli.

**Isbot:** $I$ intervalda kamida bittasi noldan farqli $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sonlar uchun $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0$ o‘rinli. ($y_1, y_2, \ldots, y_n$ lar chiziqli bog‘liq, bo‘lganligi uchun)

Bu ayniyatni $p$-1 marta differensiallaymiz, unda

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0 \\ \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \ldots + \alpha_n y_n' = 0 \\ - - - - - - - - - - - - - - - - \\ \alpha_1 y^{(n-1)}{}_1 + \alpha_2 y^{(n-1)}{}_2 + \ldots + \alpha_n y^{(n-1)}{}_n = 0 \end{cases}$$

$\alpha_i$ larga nisbatan sistemani olamiz. $\alpha_i$ lardan kamida bittasi noldan farqli bo‘lganligi uchun sistema noldan farqli yechimga ega. Demak, algebra



kursidan ma’lumki bu sistemani determinanti nolga teng (teorema isbot bo‘ladi).

**Teorema 3:** Agar $y_1, y_2, \ldots, y_n$ chiziqli erkli funksiyalar bir jinsli tenglamaning $I$ intervalda aniqlangan yechimlari bo‘lsa, u holda mos Vronskiy determinanti biror nuqtada ham nolga teng emas.

Endi bir jinsli tenglamaning umumiy yechimni haqidagi teoremani keltiramiz.

**Teorema 4**: Agar $y_1, y_2, \ldots, y_n$ funksiyalar $L[y]=0$ tenglamani fundamental yechimlari sistemasi bo‘lsa, bu tenglamaning umumiy yechimi

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i \tag{9}$$

formula bilan aniqlanadi.

**Isbot**: Teoremani isbotlash uchun ixtiyoriy

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{10}$$

shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechim (7) formuladan kelib chiqishini ko‘rsatamiz.

(10) ni $y^{(j)} = y_0^{(j)}$, $\left(j=\overline{0,n-1}\right)$ ko‘rinishda belgilaymiz va (9) ga qo‘yamiz:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(j)}(x_0) = y_0^{(j)} \qquad \left(j=\overline{0,n-1}\right)$$

Buni yoyib chiqsak tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi. Uning determinanti Vronskiy determinanti bo‘lib, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ lar chiziqli erkli yechim bo‘lganligi uchun noldan farqli (3-teoremaga ko‘ra). U holda sistema $a_i$ ixtiyoriy $x_0 \in I$ uchun $c_i$ larga nisbatan yagona yechimga ega, ya’ni bu sistemadan $c_i$ larni aniq qiymatini topish mumkin. Uni (9) qo‘ysak xususiy yechimi hosil bo‘ladi. Teorema isbotlandi.

$n$ – nchi tartibli tenglamani xususiy holi sifatida $n$=2 bo‘lganda

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0 \tag{11}$$

tenglamani qaraylik. Bu tenglamani bitta xususiy yechimi ma’lum bo‘lsa, uni umumiy yechimi

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = c e^{-\int a_1(x) dx} \tag{12}$$

ko‘rinishida ifodalanadi. (12) ko‘rinishidagi formula Ostrogradskiy-Lyuvill formulasi deb ataladi.

(12) ni yoyib yozsak

$$y_1y' - y_1'y = ce^{-\int a_1(x)dx}$$ bo‘lib, uni $y_1^2$ ga bo‘lsak,

chap tomoni bo‘linmani hosilasi formulasini $\left(\frac{y}{y_1}\right)'$ ifodalaydi, unda

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{c}{y_1^2}e^{-\int a_1(x)dx}$$ tenglikka ega bo‘lamiz.

Buni integrallasak,

$$\frac{y}{y_1} = \int \frac{c_1e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)}dx + c_2$$

yoki

$$y = c_2y_1 + c_1y_1\int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu (11) ning umumiy yechimini ifodalaydi.

**Amaliy mashg‘ulot uchun mavzuning qisqacha bayoni va yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar**

$y^{(n)} = f(x)$ ko‘rinishdagi differensial tenglamaning umumiy yechimi ketma-ket n-marta integrallash yoramida topiladi. Har bir integrallashda bittadan o‘zgarmas qo‘shiladi, natijada, umumiy yechimda n ta o‘zgarmas qatnashadi.

$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ...., y^{(n)}) = 0$ ko‘rinishagi, noma’lum funksiyaning o‘zi qatnashmaydigan differensial tenglamalar $y^{(k)} = z$ yangi o‘zgaruvchi kiritish yordamida tartibi pasayadi.

Erkin o‘zgaruvchi x qatnashmagan $F(y, y', y'', ...., y^{(n)}) = 0$ ko‘rinishdagi differensial tenglamalar $y' = p(y)$, $y'' = pp'$ almashtirishlar yordamida tartibi pasayadi.

Agar tenglama funksiya va uning hosilalariga nisbatan bir jinsli bo‘lsa ($(y, y', y'', ...., y^{(n)})$ lar $(ky, ky', ky'', ...., ky^{(n)})$ lar bilan almashtirganda tenglama o‘zgarmasa), $y' = yz$ yangi o‘zgaruvchi kiritish yordamida tartibi pasayishi mumkin.

Agar tenglama tomonlari to‘la differensiallar bo‘lsa, integrallash yordamida tartibi pasayadi.



5.1. $y''' = \frac{6}{x^3}$ tenglamaning $x = 1$ da $y = 2$, $y' = 1$, $y'' = 1$ shartlarga bo‘ysunuvchi yechimini toping.

Yechish: Ketma-ket integrallab quyidagilarni topamiz

$$y'' = -\frac{3}{x^2} + C, \quad y' = \frac{x}{3} + C_1x + C_1, \quad y = 3\ln x + C\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$$

$x = 1$ da o‘zgarmaslarni topish uchun quyidagi sistemaga ega bo‘lamiz

$$\begin{cases} 1 = -3 + C \\ 1 = 3 + C + C_1 \\ 2 = \frac{C}{2} + C_1 + C_2 \end{cases}$$

Bundan esa $C = 4$, $C_1 = -6$, $C_2 = 6$. Xususiy yechim $y = 3\ln x + 2x^2 - 6x + 6$ ko‘rinishida ekan.

5.2. $x^2 \cdot y'' = y'^2$ tenglamani yeching.

Yechish: $y' = z$, $y'' = z'$ almashtirish yordamida $x^2 \cdot z' = z^2$ o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamaga ega bo‘lamiz. Uning yechimi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} - C$, úí č $\frac{1}{y'} = \frac{1}{x} - C$.

Bundan $y' = \frac{x}{1 - Cx}$, $Cy \neq C^2x + \ln|1 - Cx| = C_1$ umumiy yechimni topamiz. Agar $z = 0$ bo‘lsa, $y' = 0$, $y = C$.

5.3. $2yy'' - 1 = y'^2$ tenglamani yeching.

Yechish: $y' = p$, $y'' = pp'$

almashtirishlardan $2ypp' - 1 = p^2$, $\frac{2pdp}{p^2 + 1} = \frac{dy}{y}$ va $\ln|p^2 + 1| = \ln y + \ln C$.

Bundan $p^2 + 1 = C \cdot y$, yoki $y' = \pm\sqrt{Cy - 1}$.

Bundan, $4(Cy - 1) = C^2(x + C_2)$ umumiy yechimini olamiz.

5.4. $y' \cdot y''' = 2y''^2$ tenglama tomonlarini to‘la hosilalar ko‘rinishida keltirib yeching.

Yechish: Tomonlarni $y' \cdot y''$ ga bo‘lib, $\frac{y'''}{y''} = 2\frac{y''}{y'}$ yoki $(\ln y'')' = (2\ln y')'$ dan $y'' = C \cdot y'^2$ ga ega bo‘lamiz. Bu tenglamani ham

$\frac{y''}{y'} = Cy'$ yoki $(\ln y')' = (C \cdot y)'$ ko‘rinishda yozish mumkin. Demak,

$\ln y' = Cy + LnC_1$ yoki $y' = C_1 e^{Cy}$ lardan $-\frac{1}{c}e^{-Cy} = C_1 x + C_2$ yoki

$y = -\frac{1}{C}\ln|CC_2 - CC_1 x|$ kelib chiqadi.

5.5. Bir jinsliligidan foydalanib tarkibini pasaytiring va yeching.

$$xyy'' - xy'^2 = yy'$$

**Yechish:** $y' = y \cdot z$; $y'' = y' \cdot z + y \cdot z' = yz^2 + yz'$ almashtirishlar o‘tkazamiz: $xy(yz^2 + yz') - xy^2 \cdot z^2 = y \cdot yz$. $y^2 \neq 0$ deb tomonlarni qisqartirsak, $xz^2 + xz' - xz^2 = z$ yoki $xz' = z$ tenglama hosil bo‘ladi. Bundan $z = Cx$ yoki $y' = C \cdot yx$. Bu tenglama yechimi esa

$y = c_1 \cdot e^{\frac{1}{2}cx^2}$ ko‘rinishda bo‘ladi.

**Mustaqil yechish uchun topshiriqlar:**

5.6. Tenglamalarni yeching.

1. $y'' = 4\cos 2x$ 2. $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$
3. $y'' = \frac{1}{1+x^2}$ 4. $x^3 \cdot y'' + x^2 \cdot y' = 1$
5. $yy'' + y'^2 = 0$ 6. $y'' + y'tgx = \sin 2x$
7. $y'' + 2y \cdot y'^3 = 0$ 8. $y''x\ln x = y'$
9. $y'' \cdot y^3 = 1$ 10. $2yy'' = y'^2$
11. $2yy'' = 1 + y'^2$ 12. $y''tgx = y' + 1$
13. $xy'' - y' = e^x \cdot x^2$

5.7. Tenglama tomonlarini to‘la hosilaga keltirib yeching.

1. $yy''' + 3y'y'' = 0$ 2. $yy'' = y'(y' + 1)$
3. $yy'' + y'^2 = 1$ 4. $y'' = xy' + y + 1$
5. $xy'' + y' = 2yy'$ 6. $xy'' - y' = x^2 \cdot yy'$

5.8. Tenglamani bir jisnliligidan foydalanib yeching:



1. $yy'' = y'^2 + 15y^2 \cdot \sqrt{x}$ 2. $(x^2+1)(y'^2 - yy'') = xyy'$
3. $xyy'' + xy'^2 = 2yy'$ 4. $x^2yy'' = (y - xy')^2$
5. $x^2yy'' + y'^2 = 0$ 6. $xyy'' = y'(y + y')$
7. $x^2(y'^2 - 2yy'') = y^2$

**Tekshirish uchun savollar**

1. Yuqori tartibli tenglamalarning tartibini pasaytirish haqida tushuncha?
2. $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, y^{(k)}) = 0$ $(1 \le k \le n)$ ko‘rinishidagi tenglamani yechish usuli?
3. F funksiya bir jinsli bo‘lsa, qanday almashtirish bajariladi?
4. Tenglama $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ ko‘rinishida bo‘lsa tenglamaning tartibi qanday pasaytiriladi?
5. $F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ tenglamani tartibini pasaytirish?
6. Qaysi holda $y' = P(y)$ almashtirish bajariladi?
7. Qaysi holda $y' = P(x)$ almashtirish bajariladi?
8. Umumlashgan bir jinsli funksiya tushunchasi?
9. Qanday tenglamalar uchun $y = e^{\int z dz}$ almashtirish bajariladi?
10. n-tartibli bir jinsli tenglama?
11. n-tartibli bir jinsli tenglamalarning xossalari?
12. Funksiyani chiziqli bog‘liqligi?
13. Funksiyani chiziqli erkliligi?
14. Fundamental yechimlar sistemasi ta’rifi?
15. Vronskiy determinanti?
16. Vronskiy determinantini 1-xossasi (teorema)?
17. Vronskiy determinantini 2-xossasi (teorema)?
18. Ostrogradskiy-Lyuvill formulasi (n=2)?
19. 1, x, $e^x$ funksiyalarni chiziqli bog‘liq yoki chiziqli erkli ekanligini aniqlang?

## 2.2-§. Chiziqli bir jinsli o'zgarmas koeffitsientli tenglamalar.

REJA:

- Chiziqli o'zgarmas koeffitsientli tenglama va xarakteristik tenglamasi.
- Xarakteristik tenglamaning ildizlari:
  a) Haqiqiy va har xil
  b) Haqiqiy va ildizlar ichida karralisi ham bor
  s) Kompleks va har xil
  g) Kompleks va karrali hollarda umumiy yechim ko'rinishlari.

**Tayanch iboralar**

$n$ – tartibli tenglamaning umumiy yechimi, xarakteristik tenglama, Eyler formulasi, kompleks yechim, karrali yechim.

Oldingi mavzuda $p$-chi tartibli tenglamani umumiy nazariyasi bilan tanishdik. Endi koeffitsientlari o'zgarmas sonlar bo'lganda ko'rib chiqamiz .

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \qquad a_i = const \tag{1}$$

ko'rinishdagi tenglama o'zgarmas koeffitsientli n-chi tartibli chiziqli bir jinsli tenglama deb ataladi.

Bu tenglamaning xususiy yechimi

$$y = e^{\lambda x} \tag{2}$$

ko'rinishida qidiriladi. $\lambda = const$ (1) ni (2) ga qo'yish uchun hosila olamiz.

$$y' = \lambda e^{\lambda x},\ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \ldots, y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$$

bularni tenglamaga qo'yib,

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \ldots + a_n e^{\lambda x} = 0$$

yoki

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n\right) = 0$$

tenglikka kelamiz, bu yerdan $e^{\lambda x} \neq 0$ bo'lganligi uchun unga qisqartirib,

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{3}$$



ko'rinishda λ ga nisbatan algebraik tenglamaga kelamiz. (3) tenglama (1) tenglamaning xarakteristik tenglamasi deb ataladi.

Ma'lumki (3) tenglamani $n$–ta ildizi bor, ular haqiqiy, kompleks bo'lishi mumkin. Shuning uchun alohida ko'rib chiqamiz.

**1-hol:** (3) xarakteristik tenglama $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ildizlari haqiqiy va har xil bo'lsin. Bu holda barcha ildizlarni (2) ga qo'yib,

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots, y_n = e^{\lambda_n x}$$

ko'rinishdagi xususiy yechimlarni hosil qilamiz. Bundan

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x} \tag{4}$$

umumiy yechimini yozamiz.

**1-misol:** $y''' - y = 0$. Xarakteristik tenglamasi $\lambda^3 - \lambda = 0$ bo'lib, $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1$ ildizlarga ega. (4) formulaga ko'ra umumiy yechim

$$y = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x}$$

**2-hol:** (3) ni ildizlari haqiqiy va ichida karralisi bor. Agar (3) ni $\lambda_i$ ildizi $k_i$ karrali bo'lsa (bunda $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = n$), u holda chiziqli erkli yechimlar soni $n$ dan kam biz $n$-ta chiziqli erkli yechimlarini topamiz.

Faraz qilaylik $k_i$ – karrali ildiz, $A_i = 0$ – lar $k_i$ karrali bo'lsin. (3) tenglama

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-k} \lambda^{k_i} = 0$$

ko'rinishiga ega bo'ladi.

Bu xarakteristik tenglamaga mos tenglama

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-k} y^{k_i} = 0$$

ko'rinishda bo'lib, uni xususiy yechimlari

$$1, x, x^2, \ldots, x^{k_i - 1} \text{ ko'rinishda bo'ladi.}$$

Agar $\lambda_i \neq 0$ bo'lsa, u holda $y = e^{k_i x} t$ almashtirish bilan nol holga keltiriladi, $\lambda_i = 0$ ga nisbatan olingan tenglama ildizlari

$$1, x, x^2, \ldots, x^{k_i - 1} \text{ bo'lib}$$

$$\lambda_i \neq 0,\ e^{k_2 x}, x e^{k_2 x}, \ldots, x^{k_i - 1} e^{k_2 x}$$

Yechimlar mos keladi. Unda umumiy yechim

$$y = \sum_{i=1}^{m} \left(c_{0i} + c_{1i} x + \ldots + c_{k_{i-1}} x^{k_{i-1}}\right) e^{k_i x}$$

ko'rinishida bo'ladi. Bunda $m$ chiziqli erkli yechimlar soni.

**2-misol:** $y'' + 2y' + y = 0$ tenglamani yeching.

Xarakteristik tenglama:

$$\lambda^2+2\lambda+1=0 \text{ yoki } (\lambda+1)^2=0 \quad \lambda_1=-1, \ \lambda_2=-1$$
bu ildizga mos umumiy yechim
$$y=(c_1+xc_2)e^{-x}$$
formula bilan ifodalanadi.

**3-hol:** (3) ni ildizlari teng emas, ammo ichida kompleks ildizlari bor.

Ildizlar kompleks bo'lsa, ular o'zaro qo'shma bo'ladi.

$\lambda_k=\alpha_k \pm i\beta_k$ ularga
$$e^{(\alpha_k+i\beta_k)x}, \ e^{(\alpha_k-i\beta_k)x}.$$
xususan $e^{(\alpha+i\beta)x}, e^{(\alpha-i\beta)x}$ bo'lgan yechimlar mos keladi. Bu kompleks yechimlarni Eyler formulasidan foydalanib,
$$y^{(\alpha\pm i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x \pm \sin\beta x)$$
ko'rinishida yozish mumkin, ya'ni $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$. Bu yechimlar $(-\infty;+\infty)$ oraliqda chiziqli erklidir. Xuddi shunday $\alpha-i\beta$ yechimga
$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \ -e^{-\alpha x}\sin\beta x \text{ yechimlar mos keladi.}$$
Bu yechimlar yangi yechimlar to'plamini hosil qilmaydi.

Demak, kompleks qo'shma yechimlarga ikkita haqiqiy yechim mos keladi.

Kompleks yechimlarni haqiqiy yechim bilan ifodalash uchun quyidagi teoremani keltiramiz.

**Teorema**: Agar koeffitsientlari uzluksiz bo'lgan $L[y]=0$ tenglama $y=u(x)+iv(x)$ yechimga ega bo'lsa, u holda shu yechimni haqiqiy qismi $u(x)$ va mavxum qismi $v(x)$ funksiyalar ham tenglamaning yechimi bo'ladi.

Shu teoremaga ko'ra

$e^{\alpha x}\cos\beta x$ ва $e^{\alpha x}\sin\beta x$ funksiyalar tenglamaning yechimlari bo'ladi.

**3-misol:** $y''+4y'+5y=0$ tenglama uchun (3) tenglama quyidagicha bo'ladi.
$$\lambda^2+4\lambda+5=0$$
Buning yechimlari

$\lambda_1=-2+i$, $\lambda_2=-2-i$, u holda umumiy yechim
$$y=e^{-2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$$
ko'rinishga ega.

**4-hol:** (3) ning ildizlari kompleks va karrali bo'lsin.



Agar (3) ning ildizlari $\alpha+i\beta$ ko'rinishida bo'lsa, unga qo'shma $\alpha-i\beta$ ildizga ham ega. Shuning uchun $\alpha+i\beta$ $k_i$ karrali bo'lsa $\alpha-i\beta$ ildiz ham $k_i$ - karrali bo'ladi, ya'ni
$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x,\dots,x^{k_i-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x,\dots,x^{k_i-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$
ko'rinishidagi $2k$ ta haqiqiy yechim olishimiz mumkin.

Bu tenglamalar $(-\infty;+\infty)$ oraliqda chiziqli erkli, bunga Eyler formulasidan foydalanib, $x^m e^{\lambda_i x}$ ko'rinishda yozib ishonch hosil qilish mumkin (2–holga qarang).

Shunday qilib, $\alpha\pm i\beta$ $k_i$ karrali kompleks qo'shma yechimlarga $2k$ ta yechim mos keladi.

Umumiy yechimni, haqiqiy va kompleks yechimlarni xar biri uchun yozib olib, jami $n$–ta chiziqli erkli yechimlardan hosil qilamiz.

**4-misol:** $y^{IV}+2y'+y=0$

tenglama xarakteristik tenglamasining ildizlari
$$\lambda_4=i, \ \lambda_2=-i, \ \lambda_3=i, \ \lambda_4=-i$$
bo'lib umumiy yechim
$$y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x$$
ko'rinishida ifodalanadi.

**Amaliy mashg'ulot uchun mavzuning qisqacha bayoni va yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar**

$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+.......+a_ny=0$ (1) tenglamada $y=e^{kx}$ almashtirish yordamida $k^n+a_1k^{n-1}+.......+a_n=0$ (2) xarakteristik tenglamaga ega bo'lamiz.

1) Agar (2) tenglama o'zaro tengmas $k_1$, $k_2$, ...$k_n$- haqiqiy ildizlarga ega bo'lsa, $e^{k_1x}$, $e^{k_2x}$, ... $e^{k_nx}$ funksiyalar (1) ning xususiy, $y_0=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}+....+c_ne^{k_nx}$ esa umumiy yechim bo'ladi.

2) Agar (2) tenglama $k_1=k_2=....=k_m$, $k_{m+1}$, ...,$k_n$-haqiqiy ildizlarga ega bo'lsa, yaqni $k_1$-m karrali ildiz bo'lsa, u holda dastlabki m ta ildizga mos xususiy yechimlar $e^{k_1x}$, $xe^{k_1x}$, ...$x^{m-1}$ $e^{k_1x}$, ularga mos umumiy yechim esa $y_0=(c_1+c_2x+c_3x^2+....+c_nx^{n-1})e^{k_1x}$ ko'rinishda bo'ladi.

3) Har bir qo‘shma kompleks $\alpha \pm \beta i$ ildizlarga $(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)e^{\alpha x}$ yechim, agar bu ildizlar m-karrali bo‘lsalar, $y_0 = \left[(c_1 + c_2x + ... + c_m x^{m-1})\cos\beta x + (c_1 + c_2 x + .... + c_m x^{m-1})\sin\beta x\right]e^{\alpha x}$ yechim mos keladi.

6.1. $y'' - 4y' + 3y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.
**Yechish:** Xarakteristik tenglama $k^2 - 4k + 3 = 0$ bo‘lib, $k_1 = 1,\ k_2 = 3$ dir. Demak, $y_0 = c_1e^x + c_2e^{3x}$ umumiy yechim.

6.2. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.
**Yechish:** $k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$ tenglama $(k-1)^3 = 0$ ga ekvivalent tenglamadir. Demak, $k_{1,2,3} = 1$ va $y_0 = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^x$.

6.3. $y'' - 2y' + 5 = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.
**Yechish:** $k^2 - 2k + 5 = 0$ xarakteristik tenglama $k_{1,2} = 1 \pm 2i$ ildizlarga ega. Umumiy yechim esa $(c_1 \cos 2x + c_2 \sin x)e^x$ ko‘rinishda bo‘ladi.

6.4. $y^{(4)} + 8y'' + 16 = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.
**Yechish:** Xarakteristik tenglama $k^4 + 8k^2 + 16 = (k^2+4)^2 = 0$ ko‘rinishda bo‘lib, $k_{1,2} = 2i$, $k_{3,4} = -2i$ ildizlarga ega. Umumiy yechim
$y_0 = \left[(c_1 + c_2x)\cos 2x + (c_3 + c_4x)\sin 2x\right]e^{0x}$ ko‘rinishda bo‘ladi.

6.5. Berilgan differensial tenglama xarakteristik tenglamasi

**Yechish:** $k_1 = 2;\ k_2 = 3;\ k_{3,4} = 4;\ k_{5,6} = -1 \pm 5i;\ k_{7,8,9,10} = 2 \pm 7i$ ildizlarga ega. Umumiy yechim ko‘rinishini yozing.
Ildizlar barcha xususiy hollarni o‘z ichiga oladi. Umumiy yechim esa
$$y_0 = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + (c_3 + c_4x)e^{4x} + (c_5 \cos 5x + c_6 \sin 5x)e^{-x} +$$
$$+\left[(c_7 + c_8x)\cos 7x + (c_9 + c_{10}x)\sin 7x\right]e^{2x}$$



## Mustaqil yechish uchun topshiriqlar:

6.6. Tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

| | |
|---|---|
| 1. $y'' - 4y' = 0$ | 2. $y'' - 4y' + 4y = 0$ |
| 3. $y'' - 4y' + 13y = 0$ | 4. $y'' - 4y' = 0$ |
| 5. $y'' + 4y = 0$ | 6. $y'' + 4y' = 0$ |
| 7. $y'' + 3y' - 4y = 0$ | 8. $y'' + 2ay' + a^2y = 0$ |
| 9. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$ | 10. $y''' - 3y'' + 4y = 0$ |
| 11. $y''' + 3ay'' + 3a^2y' + a^3y = 0$ | 12. $y^{IV} + 4y = 0$ |
| 13. $4y^{IV} - 3y'' - y = 0$ | 14. $y^{IV} - 3y'' - 4y = 0$ |
| 15. $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$ | |

## Tekshirish uchun savollar

1. n-tartibli umumiy ko‘rinishi?
2. n-tartibli o‘zgarmas koeffitsientli bir jinsli tenglamalar?
3. Xarakteristik tenglama ko‘rinishi?
4. Xarakteristik tenglama ildizlari haqiqiy va har hil bo‘lganda yechim ko‘rinishi?
5. Xarakteristik tenglama ildizlari haqiqiy va xar xil yechim ko‘rinishi?
6. Xarakteristik tenglama ildizlari haqiqiy va ichida karralisi bor bo‘lgan xolda?
7. Eyler formulasi?
8. Xarakteristik tenglamani ildizlari kompleks bo‘lgan xol?
9. $y''' - 3y'' + 9y^1 - 18y = 0$ tenglamani yeching?
10. $y^{IV} + 4y = 0$ tenglamani yeching?

## 2.3-§. O'zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli bo'lmagan tenglamalar

REJA:

- Bir jinsli bo'lmagan tenglama?
- Lagranj usuli?
- Tenglamaning o'ng tomoni maxsus ko'rinishga ega bo'lgan hollar?

**Tayanch iboralar**

Lagranj usuli, umumiy yechim strukturasi, noma'lum koeffitsientlar usuli.

Ushbu

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = q(x) \qquad (1)$$

tenglamani yechish masalasi bilan tanishamiz.

Umuman (1) tenglamani umumiy yechimini $q(x)$ funksiyaning ko'rinishiga bog'liq bo'lmagan holda o'zgarmasni variastiyalash usulida (Lagranj usulida) yechish mumkin.

Buning uchun (1) ga mos bir jinsli tenglamani yechib, umumiy yechim topiladi, ya'ni

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n \qquad (2)$$

bu erda $c_i = c_i(x)$ deb olamiz va (2) ni (1) ga qo'yish uchun ketma-ket hosila olamiz

$$y' = c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2' + \ldots + c_n' y_n + c_n y_n' \qquad (3)$$

(3) da $c_1' y_1 + c_2' y_2 + \ldots + c_n' y_n = 0$ deb kolgan qismidan yana hosila olamiz

$$y'' = c_1' y_1' + c_1 y_1'' + \ldots + c_n' y_n' + c_n y_n''$$

bunda ham $c_i(x)$ larni hosilasi qatnashganlarini nolga tenglaymiz

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' + \ldots + c_n' y_n' = 0.$$

Shu tartibda $n$ – marta hosila olamiz va hosilalarni (1) ga qo'yamiz. Unda



$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 + \ldots + c_n' y_n = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + \ldots + c_n' y_n' = 0 \\ ------------- \\ c_1' y_1^{(n-2)} + c_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + c_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n' y_n^{(n-1)} = q(x) \end{cases} \qquad (4)$$

ko'rinishidagi sistemaga kelamiz.

(4) sistemadan algebra kursidagi biror usul bilan $c_i(x)$ larni topib (2)ga qo'yamiz va (1) ning umumiy yechimini hosil qilamiz.

(1) tenglamani umumiy yechimi, mos bir jinsli

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \qquad (5)$$

tenglamaning umumiy yechimi bilan (1) tenglamaning xusisiy yechimi yig'indisiga teng bo'ladi, ya'ni

$$y = y_{б.ж} + \bar{y} \qquad (6)$$

$\bar{y}$ - (1) ning xususiy yechimi.

$y_{б/ж}$ - (5) ning umumiy yechimi.

Bundan tashqari $q(x)$ maxsus ko'rinishga ega bo'lsa $\bar{y}$ - xususiy yechimni noma'lum koeffitsientlar usulida topish mumkin:

*a)* $q(x) = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_s$

ko'rinishda bo'lsa,

$$\bar{y} = B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ldots + B_s \qquad (7)$$

deb olib (1) tenglamaga qo'yiladi va mos koeffitsientlar tenglanadi

$$\left.\begin{aligned} x^0 &: a_n B_0 = A_0 \\ x^1 &: a_n B_1 + s a_{n-1} B_0 = A_1 \\ &------------ \\ & a_n B_s + \ldots = A_s \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

(8) dan $B_i$ - o'zgarmaslar topilib (7) ga qo'yiladi. (1) ning umumiy yechimi (6) ko'rinishda ifodalanadi.

*b)* $q(x) = \left(A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_s\right) e^{\gamma x}$

ko'rinishda bo'lsa, u holda

1) $\gamma$ - xarakteristik tenglamani ildizi bo'lmasa

$\bar{y} = \left(B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ldots + B_s\right) e^{\gamma x}$ ko'rinishda,

2) $\gamma$ - xarakteristik tenglamani k - karrali ildizi bo'lsa

$\bar{y} = x^k e^{\gamma x}\left(B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ldots + B_s\right)$

ko'rinishda izlanadi va

a) holdagi kabi $B_i$ - koeffitsientlar topiladi.

Agar

$$q(x)=e^{ax}(P_m(x)\cos bx+Q_m\sin bx) \qquad (9)$$

ko'rinishda bo'lsa (bunda $P_m$ va $Q_m$ lar $x$ ga nisbatan $m$-tartibli ko'phad bo'lib, kamida bittasining darajasi $m$ ga teng).

Bunda ushbu formuladan foydalanamiz:

$$\cos bx=\frac{e^{ibx}+e^{-ibx}}{2},\ \sin bx=\frac{e^{ibx}-e^{-ibx}}{2i} \qquad (10)$$

shunga ko'ra (9) ni quyidagicha yozamiz

$$q(x)=P_m(x)e^{ax}\frac{e^{ibx}+e^{-ibx}}{2}+Q_m(x)e^{ax}\frac{e^{ibx}-e^{-ibx}}{2i}=$$

$$=\overline{P}_m(x)e^{(a+ib)x}+\overline{Q}_m(x)e^{(a-ib)x},$$

$q(x)$ funksiyani (1) ga qo'ysak, tenglamaning o'ng tomoni 2 ta funksiya yig'indisidan iborat bo'ladi.

Shu o'rinda ushbu ma'lumotni keltiramiz:

Agar (1) tenglamaning o'ng tomoni ikkita funksiya yig'indisidan iborat bo'lsa, $q(x)=f_1(x)+f_2(x)$ bo'lib, $y_1$ funksiya $L(u)=f_1(x)$ tenglamaning, $y_2$ funksiya $L(u)=f_2(x)$ tenglamaning yechimlari bo'lsa, u holda $u_1+u_2$ funksiya

$$L(u)=f_1(x)+f_2(x)$$

tenglamaning yechimi bo'ladi.

Ushbu ma'lumotni e'tiborga olib, quyidagi ikkita holni qaraymiz

a) $\lambda=a+ib$ soni (1) tenglamaga mos xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lmasa, u holda xususiy yechim

$$\overline{y}=R_m(x)e^{(a+ib)x}+N_m(x)e^{(a-ib)x} \qquad (11)$$

ko'rinishda qidiriladi.

b) $\lambda=a+ib$ soni (1) tenglamaga mos xarakteristik tenglamaning $k$ karrali ildizi bo'lsa, u holda xususiy yechim

$$\overline{y}=x^k\left(R_m(x)e^{(a+ib)x}+N_m(x)e^{(a-ib)x}\right) \qquad (12)$$

ko'rinishda qidiriladi.

Bunda $R_m(x)$ va $N_m(x)$ lar $m$ tartibli noma'lum koeffitsientli ko'phadlar. (11), (12) formulalarni haqiqiy yechimlarga o'tkazsak, mos holda

$$\overline{y}=e^{ax}(R_m(x)\cos bx+N_m\sin bx)$$

va

$$\overline{y}=x^k e^{ax}(R_m(x)\cos bx+N_m\sin bx)$$



ko'rinishlarni oladi. $R_m(x)$ va $N_m(x)$ ko'phadlarning koeffitsientlari yuqorida ko'rsatilgan usulda topiladi.

**Amaliy mashg'ulot uchun mavzuning qisqacha bayoni va yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar**

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+....+a_ny=f(x) \quad (1) \quad \text{va} \quad y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+....+a_ny=0 \qquad (2)$$

tenglamalarni qaraymiz.

Agar $y_1$ (1) tenglama xususiy yechimi, $y_0$ esa (2) tenglama umumiy yechimi bo'la, (1) tenglamaning umumiy yechimi $y=y_0+y_1$ ko'rinishda bo'ladi.

(1) tenglamaning xususiy yechimi ikki xil usulda topilishi mumkin:

**I. Aniqmas koeffitsient metodi.**

(1) tenglamaning xususiy yechimi, bu metod yordamida quyidagi hollarda topiladi:

1) $f(x)=P_n(x)e^{mx}$ – ko'phad

2) $f(x)=e^{mx}(a\cos nx+b\sin nx)$

3) Funksiya yuqoridagilarning yig'indisi yoki ko'paytmasi.

Bu hollarda $y_1$ xususiy yechim ham noma'lum koeffitsientli $f(x)$ funksiya ko'rinishida izlanadi.

Agar 1) holda $k=m$, 2) holda $k=m\pm ni$ xarakteristik tenglamaning r-karrali ildizlari bo'lsa, izlanayotgan noma'lum koeffitsientli funksiya $x^k\cdot f(x)$ ko'rinishda bo'ladi.

Ko'p hollarda $f(x)$ tarkibida sinus va kosinus qatnashganda Eylerning $\cos\beta x=\frac{1}{2}(e^{i\beta x}+e^{-i\beta x})$, $\sin\beta x=\frac{1}{2i}(e^{i\beta x}-e^{-i\beta x})$ formulalar yordamida yuqoridagi hollarga keltiriladi.

**II. Lagranjning o'zgarmasni variasiyalash usuli.**

Agar $y_0=c_1y_1+c_2y_2+....+c_ny_n$ bir jinsli (2) tenglamaning umumiy yechimi bo'lsa, (1)-tenglamaning umumiy yechimi $y_0=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2+....+C_n(x)y_n$ ko'rinishda izlanadi. Noma'lum $C_i(x)$ funksiyalar

$$
\begin{aligned}
&C_1^{\prime} y_1+\ldots+C_n^{\prime} y_n=0 \\
&C_1^{\prime} y_1^{\prime}+\ldots+C_n^{\prime} y_n^{\prime}=0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&C_1^{\prime} y_1^{(n-2)}+\ldots+C_n^{\prime} y_n^{(n-2)}=0 \\
&C_1^{\prime} y_1^{(n-1)}+\ldots+C_n^{\prime} y_n^{(n-1)}=f(x)
\end{aligned}
$$

sistemadan topiladi.

7.1. $y'''-3y''+3y'-y=e^x+x$ tenglamani aniqmas koeffitsientlar metodi bilan yeching.

Yechish: Bir jinsli tenglamaning xarakteristik tenglamasi ildizlari $k_{1,2,3}=1$ ekanligidan $y_0=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^x$.

a) $y'''-3y''+3y'-y=e^x$ tenglamaning xususiy yechim $y=Ax^3e^x$ ko'rinishda izlanadi.

$y_1'=A[3x^2e^x+x^3e^x]=A(3x^2+x^3)e^x$.

$y_1''=A[6x+3x^2+3x^2+x^3]e^x=A[6x+6x^2+x^3]e^x$.

$y_1'''=A[6+12x+3x^2+6x+6x^2+x^3]e^x=A[6+18x+9x^2+x^3]e^x$.

Topilganlarni o'rniga qo'yib

$A[6+18x+9x^2+x^3-18x-18x^2-3x^3+9x^2+3x^3-3x^2-x^3]e^x=e^x$ ni hosil kilamiz. $A[6-3x^2]=1$ dan $A=\frac{1}{6}$ ва $y_1=\frac{x^3}{6}\cdot e^x$ bo'ladi.

b) $y'''-3y''+3y'-y=x$ tenglamaning xususiy yechimi $y_2=Ax+B$ tarzida izlanadi. $y_2'=A,\ y_2''=0$. Bundan $3A-Ax-B=x$, ya'ni $A=-1, B=-3$ ва $y_2=-x-3$.

Umumiy yechim esa $y=(c_1+c_2x+cx^2)e^x+\frac{x^3}{6}e^x-x-3$ ko'rinishda bo'ladi.

7.2. $y''-3y'+2y=\frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}$ tenglamani o'zgarmasni variastiyalash yordamida yeching.

Yechish: $k^2-3k+2=0$ tenglamaning yechimlari $k_1=1,\ k_2=2$ ekanligidan tenglama xususiy yechimlari $e^x$ va $e^{2x}$ dir. Bundan

$$y_0=C_1e^x+C_2e^{2x} \quad \text{va} \quad \begin{cases} C_1'+C_2'e^{2x}=0 \\ C_1'e^x+2C_2'e^{2x}=\dfrac{e^{3x}}{1+e^{2x}} \end{cases}$$



sistemaga ega bo'lamiz. $C_1'=-C_2'e^x$ ni ikkinchi tenglamaga qo'yib $C_2^1e^{2x}=\frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}$, ya'ni $C_2^1=\frac{e^x}{1+e^{2x}}$ ga ega bo'lamiz. Bundan $C_2=\operatorname{arctg}e^x$.

$C_1^1=-\frac{e^{2x}+1-1}{1+e^{2x}}$ dan $C_1^1=-1+\frac{1}{1+e^{2x}}$ va $C_1=-\ln\sqrt{1+e^{2x}}$.

Demak, umumiy yechim

$y=C_1e^x+C_2e^{2x}-\ln\sqrt{1+e^{2x}}\cdot e^x+e^{2x}\operatorname{arctg}e^x$.

**Mustaqil yechish uchun topshiriqlar:**

7.3. Tenglamalarni yeching.

1. $y''-2y'+y=e^{2x}$
2. $y''-4y=8x^3$
3. $y''+3y'+2y=\sin 2x+2\cos 2x$
4. $y''+y=x+2e^x$
5. $y''+3y'=9x$
6. $y''+4y'+5y=5x^2-32x+5$
7. $y''-3y'+2y=e^x$
8. $y''-2y=x\cdot e^{-x}$
9. $y''-2y'=x^2-x$
10. $y''+5y'+6y=e^{-x}+e^{-2x}$
11. $y'''+y''=6x+e^{-x}$
12. $y^{IV}-81y=27e^{-3x}$
13. $y'''+8y=e^{-2x}$
14. $y^{IV}-3y''+4y=3\sin x$
15. $y'''-3y''+3y'-y=e^x$.

7.4. O'zgarmasni variasiyalash yordamida yeching:

1. $y''+4y=\frac{1}{\sin 2x}$

2. $y''-4y'-5y=\dfrac{e^{2x}}{\cos x}$

3. $y''-2y'+y=x^{-2}\cdot e^{x}$

4. $y''+y=tgx$

5. $y''+y'=\dfrac{1}{1+e^{x}}$

6. $y''+4y'+4=\dfrac{e^{-2x}}{x^{3}}$

7. $y''+4y'+4y=e^{-2x}\cdot \ln x$

8. $y''+y=\dfrac{1}{\cos^{3}x}$

9. $y''-2y'+y=\dfrac{e^{x}}{\sqrt{4-x^{2}}}$

10. $y''+4y=\dfrac{1}{\sin^{2}x}$

**Tekshirish uchun savollar**

1. O‘zgarmas koeffisentli n-tartibli bir jinsli bo‘lmagan tenglama umumiy ko‘rinishi?
2. Bir jinsli tenglama yechimini strukturasi?
3. O‘zgarmasni variastiyalash (Lagranj) usuli?
4. Noma’lum $s_i$ (x) funksiyalarga nisbatan tenglamalar sistemasini ko‘rinishi?
5. Tenglamani o‘ng tomoni maxsus ko‘rinishga ega bo‘lgan xol. $q(x)=A_0x^s+A_1x^{s-1}+...+A_s$ bo‘lganda noma’lum koeffitsientlar usuli?
6. $q(x)=(A_0x^s+A_1x^{s-1}+...+A_s)e^{jx}$ ko‘rinishda bo‘lsa, yechim qanday ko‘rinishda qidiriladi?
7. Yuqoridagi savolda j–xarakteristik tenglamani ildizi bo‘lsa yechimni ko‘rinishi?
8. j–xarakteristik tenglamani ildizi bo‘lmagan holda yechimni ko‘rinishi?
9. $y''+4y-2ctq9x$ tenglamani yeching?
10. $y''-3y+2y=xe^{x}$ tenglamani noma’lum koeffitsientlar usulida yeching?



# III BOB. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR SISTEMASI. XUSUSIY HOSILALAI DIFFERENSIAL TENGLAMLAR

**3.1-§. Normal sistema uchun Koshi masalasi yechimi haqidagi teorema. O‘zgarmas koeffitsientli chiziqli tenglamalar sistemasi. Eyler usuli.**

REJA:

- Chiziqli o‘zgarmas koeffitsientli sistema.
- Xarakteristik tenglamasi.
- Umumiy yechimi.
- Normal sistema uchun Koshi masalasi.
- Chiziqli bog‘liqlik.
- Vronskiy determinanti va xossalari.

**Tayanch iboralar**

Normal sistema, Koshi masalasi, funksiyalarning chiziqli bog‘liqligi, sistema uchun Vronskiy determinanti, fundamental yechimlar sistemasi, o‘zgarmas koeffitsientli sistema, sistemaning xarakteristik tenglamasi

Ushbu

$$\left.\begin{array}{l} y_1'=f_1(x,y_1,y_2,...,y_n) \\ y_2'=f_2(x,y_1,y_2,...,y_n) \\ ------------- \\ y_n'=f_n(x,y_1,y_2,...,y_n) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi differensial tenglamalar sistemasini normal sistema deyiladi, bu yerda $y_i$ lar $x$ ning noma’lum funksiyalari, $f_i$ lar biror $Q_{n+1}$ chegaralangan sohada aniqlangan, uzluksiz funksiyalar.

**Ta’rif**: Agar biror I intervalda aniqlangan $(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x),...,\varphi_n(x))$ funksiyalar sistemasi uchun

1. $(x,\ \varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x),...,\varphi_n(x))\in Q_{n+1}$
2. $\varphi_i(x)\in C^1(I)$
3. $\varphi_i(x)\equiv f_i(x,\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ ...,\ \varphi_n(x))\ \ x\in I$

shartlar bajarilsa, bu funksiyalar (1) sistemani I da aniqlangan yechimi deyiladi.

**Koshi masalasi**: $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ bo'lib, (1) sistemaning va

$$\varphi_1(x_0) = y_1^0, \varphi_2(x_0) = y_2^0, ..., \varphi_n(x_0) = y_n^0 \qquad (2)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi (1) sistema uchun Koshi masalasi deyiladi.

**Teorema 1**: Agar (2) sistema uchun $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ boshlang'ich qiymatlar berilgan bo'lib

1. $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ funksiyalar quyidagi

$$P = \{(x, y_1, y_2, ..., y_n) : |x - x_0| \le a, \ |y_i - y_i^0| \le b\}$$

yopiq sohada uzluksiz (Demak chegaralangan $|f_i| \le M$).

2. P sohada $f_i$ funksiya $(y_1, y_2, ..., y_n)$ argumentlar bo'yicha Lipshist shartini qanoatlantirsa, u holda (1) sistema $(|x - x_0| \le h)$ intervalda (2) shartni qanoatlantiruvchi yagona yechimga ega.

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

Bu holda Lipshist sharti

$(x, y_1', y_2', ..., y_n')$ $\quad$ $(x, y_1'', y_2'', ..., y_n'')$ nuqtalar uchun

$$|f_i(x, y_1', y_2', ..., y_n') - f_i(x, y_1'', y_2'', ..., y_n'')| \le L\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i' - y_i''|\right)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Ushbu teorema ham birinchi tartibli tenglama uchun Pikar teoremasini isbotiga o'xshash isbotlanadi.

**1-misol:** Koshi masalasini yeching.

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \ y_2(0) = 1$$

$$y_1' = -y'' \Rightarrow -y'' = y_2 \Rightarrow y'' + y_2 = 0 \qquad \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 = -1 \qquad \lambda_{1,2} = \pm i$$

$$y_2 = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad y_2' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x = -y_1,$$

$$y_1 = c_1 \sin x - c_2 \cos x, \quad y_1(0) = -c_2 = 1, \ y_2(0) = c_1 = 1,$$

Xususiy yechim

$$\begin{cases} y_1 = \sin x + \cos x \\ y_2 = \cos x - \sin x \end{cases}$$



ko'rinishda bo'ladi.

**Vronskiy determinanti**

Agar $I$ intervalda aniqlangan $(\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), ..., \varphi^{(n)}(x))$ vektor funksiyalar uchun bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ o'zgarmas sonlar mavjud bo'lsaki, shu sonlar uchun

$$\alpha_1 \varphi^{(1)} + \alpha_2 \varphi^{(2)} + ... + \alpha_n \varphi^{(n)} = 0 \qquad (3)$$

ayniyat o'rinli bo'lsa, u holda berilgan funksiyalar I da chiziqli bog'liq deyiladi. Aks holda chiziqli erkli deyiladi.

bu erda

$$\varphi^1(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) \\ \varphi_{21}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{n1}(x) \end{pmatrix}$$

(3) ayniyatni ochib yozamiz

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1\varphi_{11} + \alpha_2\varphi_{21} + \alpha_3\varphi_{31} + ... + \alpha_n\varphi_{n1} = 0 \\ \alpha_1\varphi_{12} + \alpha_2\varphi_{22} + \alpha_3\varphi_{32} + ... + \alpha_n\varphi_{n2} = 0 \\ ------------------ \\ \alpha_1\varphi_{1n} + \alpha_2\varphi_{2n} + \alpha_3\varphi_{3n} + ... + \alpha_n\varphi_{nn} = 0 \end{array}\right\}.$$

Bu sistema $\alpha_i$ larga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasi hosil qiladi. Uning determinantini yozib olamiz

$$W(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n) = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{n1} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix}$$

Bu determinantga sistema uchun Vronskiy determinanti deyiladi .

Bizga

$$y' = A(x)y + b(x) \qquad (4)$$

$$y' = A(x)y \qquad (5)$$

chiziqli sistema berilgan bo'lsin.

**Teorema 2**: Agar (5) sistemada $A(x)$ $I$ da uzluksiz bo'lib shu sistema yechimlaridan tuzilgan Vronskiy determinanti $I$ intervalda kamida bitta ($x$=$x_0$) nuqtada nolga teng bo'lsa, u holda $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, ..., \varphi^{(n)})$ funksiyalar I da chiziqli bog'liq bo'ladi.

**Teorema 3**. Agar $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, ..., \varphi^{(n)})$ yechimlar uchun $W(x_0) \neq 0$ bo'lsa

$(x_0 \in I)$ $W(x_0) \neq 0$, $x \in I$ o'rinli.

Misol:

$$\varphi^1 = \begin{pmatrix} e^x \\ 2e^x \end{pmatrix} \quad \varphi^2 = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 2e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} = 0 \\ 2\alpha_1 e^x + 2\alpha_2 e^{2x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$$W(\varphi^1, \varphi^2) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ 2e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} - 2e^{3x} = 0$$

(5) ning chiziqli erkli yechimlari sistemasi, fundamental yechimlar sistemasi deyiladi.

Endi sistemani mexanik maonosiga qisqacha to'xtalib o'tamiz.

(1) ko'rinishdagi normal sistemani

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x) \tag{6}$$

yechimga $n$ o'lchovli fazoda $x$ nuqtaning xarakati mos keladi.

Bu fazoga holatlar fazosi ($n$=2 da holatlar tekisligi), xarakat natijasida hosil bo'lgan egri chiziq xarakat traektoriyasi deyiladi.

(6) tenglamalar xarakat traektoriyasining parametrik tenglamalaridir.

Bu tenglamalar nafaqat nuqtaning geometrik o'rnini aniqlaydi, balki shu nuqtani ixtiyoriy vaqtda traektoriyadagi holatini aniqlab, traektoriya bo'yicha vaqt o'zgarishi bilan nuqtaning xarakatini ko'rsatadi.

(6) sistema $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ fazoning $f_1$, $f_2$, ..., $f_n$ funksiyalar aniqlangan qismida tezliklar maydonini aniqlaydi.

Umuman (6) sistemani integrallashdan maqsad barcha xarakat traektoriyalarini topish va ularning xossalarini o'rganishdan iborat.

Endi tenglamalardagi koeffitsientlar o'zgarmas sonlar bo'lganda sistemani yechish usuli bilan tanishamiz.

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \text{-------------} \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{array}\right\} \tag{7}$$

ko'rinishdagi yoki yozishga qulay

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}y_i + f_k(x) \qquad (k = \overline{1,n})\ a_{ij}=\text{const},$$

ko'rinishdagi sistema o'zgarmas koeffitsientli chiziqli sistema deyiladi.



Agar $f(x) \equiv 0$ bo'lib,

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}y_i \tag{8}$$

ko'rinishida bo'lsa, bir jinsli sistema deyiladi.

O'zgarmas koeffitsientli tenglamalarni xususiy yechimini topish usulini esga olib, (8) sistemaning yechimini

$$y_k = \gamma_k e^{\lambda x} \quad (k = 1,2,\ldots,n) \tag{9}$$

ko'rinishda izlaymiz, bunda $\gamma_k$ va $\lambda$ - lar o'zgarmas sonlar.
Bu yerda shunga e'tibor berish kerakki, barcha $y_k$ lar uchun $\lambda$ bir xil.
(9) ni (8) ga qo'yamiz.

$$y_k' = \lambda \gamma_k e^{\lambda x} \qquad (k = 1,2,\ldots,n) \text{ bo'lib,}$$

$\lambda \gamma_k e^{\lambda x} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\gamma_i e^{\lambda x}$ tenglikni olamiz, $e^{\lambda x}$ ga qisqartirib,

$$\lambda \gamma_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\gamma_i$$

tenglikni hosil qilamiz. So'nggi tenglik hadlarini bir tomonga o'tkazib, quyidagi ko'rinishda yozib olamiz.

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{ki} - \delta_{ki}\lambda)\gamma_k = 0 \qquad (k = 1,2,\ldots, n) \tag{10}$$

bu yerda

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$$

(10) ifoda $\gamma_k$ larga nisbatan sistema bo'lib, algebradan ma'lumki, sistema noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun, uning determinanti nolga teng bo'lishi lozim. Shuning uchun (10) sistemaning determinantini nolga tenglaymiz.

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{21} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{11}$$

(11) ni yoyib chiqsak, $\lambda$ ga nisbatan $p$ – tartibli tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglama (6) sistemaning xarakteristik tenglamasi deyiladi. Uni ildizlari xarakteristik sonlar deyiladi.

$\Delta(\lambda)$ determinant xarakteristik determinant deb ataladi.

$p$ – tartibli xarakteristik tenglamani $p$ ta ildizi bo'lib, ular $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sonlar bo'lsin.

**1-hol:** $\lambda_i$ lar haqiqiy va xar xil. Unda barcha $\lambda_i$ larni (10) ga qo'yamiz.

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11}-\lambda_i)\gamma_1 + a_{21}\gamma_2 + \ldots + a_{n1}\gamma_n = 0 \\ a_{12}\gamma_1 + (a_{22}-\lambda_i)\gamma_2 + \ldots + a_{n2}\gamma_n = 0 \\ ------------------ \\ a_{1n}\gamma_1 + a_{2n}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda_i)\gamma_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (12)$$

Bu sistemani $i$=1, 2, .., $n$ lar uchun alohida-alohida yechib, xar bir $\lambda_i$ ga mos $\gamma_i$ larni topamiz va (9) ga qo'yamiz. Natijada

$$y_{ij} = \gamma_{ij} e^{\lambda_i x} \quad \left(i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}\right)$$

xususiy yechimlar hosil bo'ladi. Ulardan esa

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = c_1\gamma_{11}e^{\lambda_1 x} + c_2\gamma_{21}e^{\lambda_1 x} + \ldots + c_n\gamma_{n1}e^{\lambda_1 x} \\ y_2 = c_1\gamma_{12}e^{\lambda_2 x} + c_2\gamma_{22}e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n\gamma_{n2}e^{\lambda_2 x} \\ ---------------- \\ y_n = c_1\gamma_{1n}e^{\lambda_n x} + c_2\gamma_{2n}e^{\lambda_n x} + \ldots + c_n\gamma_{nn}e^{\lambda_n x} \end{array}\right\}$$

ko'rinishida umumiy yechimni hosil qilamiz.

Bu yechimlar chiziqli erkli bo'lib, fundamental yechimlar sistemasini hosil qiladi.

**2-hol:** $\lambda_i$ - larni ichida komplekslari bo'lsa, u holda

$$y_1 = \gamma_1 e^{(\alpha+i\beta)x}, y_2 = \gamma_2 e^{(\alpha+i\beta)x}, \ldots, y_n = \gamma_n e^{(\alpha+i\beta)x}$$

yechimni olamiz, hamda

$$\gamma_1 = \gamma_{11} + i\gamma_{21},\ \gamma_2 = \gamma_{12} + i\gamma_{22}, \ldots, \gamma_n = \gamma_{1n} + i\gamma_{2n}$$

deb olib, haqiqiy va mavxum qismlarini ajratamiz.

$$y_{1k} = e^{\alpha x}(\gamma_{1k}\cos bx - \gamma_{2k}\sin bx)$$

$$y_{2k} = e^{\alpha x}(\gamma_{1k}\sin bx - \gamma_{2k}\cos bx)$$

Bu yechimlar chiziqli erkli bo'lib, *a-ib* ko'rinishdagi ildizlar yangi yechimlarni tashkil etmaydi.

**3-hol:** $\lambda_i$ - ildizlar haqiqiy va ichida karralisi bor. Unda $k$ - karrali xarakteristik son uchun $k$ ta chiziqli erkli yechimlar mos keladi.
Shu o'rinda ushbu teorema o'rinli

**Teorema 4**: Agar $\lambda$, $k$ - karrali ildiz bo'lsa, u holda unga

$$y_m = P_m(x)e^{\lambda x} \quad (m=1,2,\ldots,n) \qquad (13)$$

ko'rinishdagi yechimlar mos keladi, bunda $P_1(x),\ldots,P_m(x)$ lar $k$-1 – tartibli ko'phadlar.

Yechimni topishda (13) ni (8) ga qo'yib $P_i(x)$ ko'phadni mos darajalari oldidagi koeffitsientlar tenglanib topiladi.



**4-hol:** Agar $\lambda_i$ ildizlar ichida kompleks va $k$ – karralisi bo'lsa, u holda yechim

$$y_1 = P_{k-1}(x)e^{\alpha x}\cos bx$$

$$y_2 = R_{k-1}(x)e^{\alpha x}\sin bx$$

ko'rinishida izlanadi, bunda $P_{k\text{-}1}(x)$, $R_{k\text{-}1}(x)$ lar $k$–1 – tartibli ko'phadlar. Sistemalarni bu usulda yechish Eyler usuli deyiladi.

Agar tenglamalar sistemasi bir jinsli bo'lmasa, u holda oldingi mavzuda ko'rilgan o'zgarmasni variasiyalash usulini qo'llash mumkin.

**Amaliy mashg'ulot uchun mavzuning qisqacha bayoni va yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar**

Noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish yordamida murakkab bo'lmagan sistemalarni yechish mumkin.

8.1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$ sistemani yeching, bunda $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$.

**Yechish:** Birinchi tenglamada $y = \dot{x} - 2x$ ekanligidan, uni ikkinchi tenglamaga qo'yib $\ddot{x} - 2\dot{x} = 3x + 4(\dot{x} - 2x)$ yoki $\ddot{x} - 6\dot{x} + 5x = 0$ tenglamaga ega bo'lamiz. Xarakteristik tenglama ildizlari $k_1 = 1$, $k_2 = 5$ ekanligidan $x = c_1e^t + c_2e^{5t}$. $\dot{x} = c_1e^t + 5c_2e^{5t}$ bo'lganligi uchun $y = c_1e^t + 5c_2e^{2t} - 2c_1e^t - 2c_2e^{5t} = -c_1e^t + 3c_2e^{5t}$ kelib chiqadi.

Demak, $\begin{array}{l} x = c_1e^t + c_2e^{5t} \\ y = -c_1e^t + 3c_2e^{5t}. \end{array}$

8.2. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 8t \\ \dot{y} = 5x - y \end{cases}$ bir jinsli bo'lmagan sistemani yeching.

**Yechish:** Ikkinchi tenglamadan $x = \dfrac{\dot{y}}{5} + \dfrac{y}{5}$, $\dot{x} = \dfrac{\ddot{y}}{5} + \dfrac{\dot{y}}{5}$ larni topib birinchi tenglamaga qo'yamiz.

$$\frac{\ddot{y}}{5}+\frac{\dot{y}}{5}=\frac{\dot{y}}{5}+\frac{y}{5}-y+8t$$

$\overset{\circ\circ}{y}+4y=40t$ tenglama hosil bo‘ladi.

$k^2+4=0$ dan $k_{1,2}=\pm 2i$, ya’ni $y_0=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t$. Xususiy yechim $y_1=At+B$ ko‘rinishda izlanadi. $4At+4B=40t$ dan $A=10,\ B=0$. Demak,

$$y=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t+10t,$$

$$x=\frac{1}{5}(-2c_1\sin 2t+2c_2\cos 2t+10+c_1\cos 2t+c_2\sin 2t+10t).$$

**Mustaqil yechish uchun topshiriqlar:**

8.3. Differensial tenglamalar sistemasini yeching.

1. $\begin{cases}\overset{\circ}{x}=x-y\\ \overset{\circ}{y}=y-4x\end{cases}$ 2. $\begin{cases}\overset{\circ}{x}+x-8y=0\\ \overset{\circ}{y}-x-y=0\end{cases}$

3. $\begin{cases}\overset{\circ}{x}=x+y\\ \overset{\circ}{y}=3y-2x\end{cases}$ 4. $\begin{cases}\overset{\circ}{x}=x+z-y\\ \overset{\circ}{y}=x+y-z\\ \overset{\circ}{z}=2x-y\end{cases}$

5. $\begin{cases}\overset{\circ}{x}=x-2y-z\\ \overset{\circ}{y}=y-x+z\\ \overset{\circ}{z}=x-z\end{cases}$

8.4. Differensial tenglamalar sistemasini yeching.

1. $\begin{cases}\overset{\circ}{x}=y+2e^t\\ \overset{\circ}{y}=x+t^2\end{cases}$ 2. $\begin{cases}\overset{\circ}{x}=y-5\cos t\\ \overset{\circ}{y}=2x+y\end{cases}$



3. $\begin{cases}\overset{\circ}{x}=3x+2y+4e^{5t}\\ \overset{\circ}{y}=x+2y\end{cases}$ 4. $\begin{cases}\overset{\circ}{x}=2x-4y+4e^{-2t}\\ \overset{\circ}{y}=2x-2y\end{cases}$

5. $\begin{cases}\overset{\circ}{x}=4x+y-e^{2t}\\ \overset{\circ}{y}=y-2x\end{cases}$ 6. $\begin{cases}\overset{\circ}{x}=2y-x+1\\ \overset{\circ}{y}=3y-2x\end{cases}$

**Tekshirish uchun savollar**

1. Normal sistemani umumiy ko‘rinishini yozing?
2. Normal sistemaning yechimi deb nimaga aytiladi?
3. 
4. Normal sistemani uchun Koshi masalasini qo‘ying?
5. Yechimni mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremani ayting?
6. Bu xolda Lipshist sharti qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
7. Funksiyalarning chiziqli bog‘liqliliga ta’rif bering?
8. Chiziqldi bog‘lik funksiyalarga misol keltiring?
9. Vronskiy determinantini yozing?
10. Vronskiy determinantini 1-xossasi?.
11. Vronskiy determinantini 2-xossasi?
11. Chiziqli o‘zgarmas koeffitsientli tenglamalar sistemasi?
12. Chiziqli sistemani yechimi qanday ko‘rinishida izlanadi?
13. Sistemaning xarakteristik tenglamasini yozing?
14. Xarakteristik tenglamani ildizlarini haqiqiy va xar xil?
15. Xarakteristik tenglamani ildizlarini haqiqiy va karralisi bor?
16. Xarakteristik tenglamani ildizlari kompleks?
17. Xarakteristik tenglamani ildizlari kompleks va karralisi bor?
18. Agar sistema bir jinsli bo‘lmasa qanday yechiladi?

## 3.2-§. Chegaraviy masala. Xususiy hosilali birinchi tartibli tenglamalar.Oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechish usullari.

REJA:

- Ikkinchi tartibli tenglama uchun chegaraviy masala.
- Grin funksiyasining ta'rifi.
- Gilbert teoremasi.
- Bir jinsli tenglama.
- Simmetrik formasi.
- Bir jinsli bo'lmagan tenglama.
- Koshi masalasi.
- Sonli usullar misollari .
- Runge – Kutt usullari

**Tayanch iboralar**

Chegaraviy masala, Grin funksiyasi, chegaraviy masalani yechish, birinchi tartibli xususiy hosilali tenglama, xususiy hosilali chiziqli tenglama, simmetrik forma, Koshi masalasi, To'r, chekli ayirma, qadam, yaqinlashish, xatolik, yaqinlashish tartibi, aproksimasiya

Differensial tenglamalar uchun chegaraviy masala yechilganda ba'zan chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimni topish mumkin emas, masalan

$$y''+y=0$$

$$y(0)=0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

masalani qanoatlantiruvchi trivial bo'lmagan yechim mavjud emas. Shuning uchun bunday masalalarni yechishni o'ziga xos usuli bor.

Ushbu

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=\varphi(x) \tag{1}$$

tenglamaning

$$y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1 \tag{2}$$

shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi **chegaraviy masala** deyiladi.

Biz quyida ushbu masala yechimini izlaymiz.

Agar (1), (2) masalada



$$z=y-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)-y_0 \qquad x_0\neq x_1$$

almashtirish bajarilsa (1) tenglama 2-tartibli tenglamaga o'tadi, (2) shartlar

$$z(x_0)=0, \ z(x_1)=0 \tag{3}$$

shartlarga o'tadi.

Bundan tashqari (1) tenglamani $e^{\int p_1(x)dx}$ funksiyaga ko'paytiramiz, unda

$$e^{\int p_1(x)dx}y''+e^{\int p_1(x)dx}p_1(x)y'+e^{\int p_1(x)dx}p_2(x)y=\varphi(x)e^{\int p_1(x)dx}$$

bundan

$$\left(e^{\int p_1(x)dx}y'\right)'+e^{\int p_1(x)dx}p_2(x)y=\varphi(x)e^{\int p_1(x)dx}$$

yoki

$$\frac{d}{dx}(p(x)y')+q(x)y=f(x) \tag{4}$$

bunda

$$p(x)=e^{\int p_1(x)dx}, \ q(x)=p_2(x)e^{\int p_1(x)dx}, \ f(x)=\varphi(x)e^{\int p_1(x)dx}$$

ko'rinishga keladi. Shuning uchun (1), (2) masala o'rniga (3), (4) masalani taxlil etamiz.

Agar $f(x)=0$ bo'lsa, tenglama bir jinsli, $\frac{d}{dx}(p(x)y')+q(x)y=0$

Agar $f(x)\neq 0$ bo'lsa, tenglama bir jinsli bo'lmagan tenglama deyiladi.

Endi Grin funksiyasi tushunchasini kiritamiz $G(x,s)$ funksiya ushbu shartlarni qanoatlantirsin:

1. $G(x,s)$ – $x$ bo'yicha $x_0\le x\le x_1$ da uzluksiz, bunda $s$ – fiksirlangan va $x_0<s<x_1$
2. $G(x,s)$ - $x_0\le x\le x_1$ da $x\neq s$ nuqtalarda $(py')'+qy=0$ tenglamaning yechimi.
3. $G(x,s)$ funksiya

$$G(x_0,s)=G(x_1,s)=0 \tag{5}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi.

4. $x=s$ nuqtada $G_x(x,s)$ hosila birinchi tur uzulishiga ega va uning sakrashi $-\frac{1}{p(s)}$ ga teng,

$$G'_x(s+0,s)-G'_x(s-0,s)=\frac{1}{p(s)}$$

ёки (6)

$$G'_x(s,s+0)-G'_x(s,s-0)=-\frac{1}{p(s)}$$

Yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvch funksiya (3), (4) masalaning **Grin funksiyasi** deb ataladi.

Grin funksiyasining tatbiqi to'g'risidagi quyidagi teorema o'rinli.

**Teorema 1**: (Gilpbert teoremasi). Agar $f(x)$ uzluksiz bo'lib (3), (4) masalaning Grin funksiyasi ma'lum bo'lsa, u holda uning yechimi

$$y=\int_{x_0}^{x}G(x,s)f(s)ds \qquad (7)$$

formula bilan ifodalandi va aksincha agar $y=y(x)$ funksiya (3), (4)ning yechimi bo'lsa, uni (7) ko'rinishda yozish mumkin.

Ushbu teoremadan foydalanib, biz qo'yilgan masalaning Grin funksiyasini ko'rishimiz mumkin.

Faraz qilaylik, (3) tenglama berilgan bo'lib, $y(x_0)=y(x_1)=0$ shartni qanoatlantiruvchi $y$ yechim bo'lsin.

Grin funksiyasini quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$G(x,s)=\begin{cases}c_1y_1(x), & x_0\le x\le s\\ c_2y_2(x), & s\le x\le x_1\end{cases}$$

Bu yerda $y_1(x)$–$y(x_0)=0$ shartni, $y_2(x)$–$y(x_1)=0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimlar, $c_1,c_2$ – noma'lumlar.

$G(x,s)$ funksiya ta'rifdagi 4 ta shartni qanoatlantiradi.

1. $G(x,s)$ funksiya fiksirlangan $s$ uchun $x$ bo'yicha uzluksiz, $x=s$ da

$$c_1y_1(s)-c_2y_2(s)=0 \qquad (8)$$

2. $G(x,s)$ – $x=s$ da uzulishga ega

$$c_2y_2'-c_1y_2'(s)=\frac{1}{p(s)} \qquad (9)$$

Bu erda $y_1(x)$, $y_2(x)$ funksiyalar chiziqli erkli, chunki $y_1(x_1)\neq0$ ekanligidan $c_1y_1(x_1)\neq0$, $y_2(x_1)\neq0$. Shuning uchun

$$W=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}$$

Vronskiy determinanti $x=s$ da noldan farqli, (8), (9) tenglamalarni yechib,



$$c_1=\frac{y_2(s)}{W(s)p(s)},\quad c_2=\frac{y_1(s)}{W(s)p(s)}$$

tengliklarga ega bo'lamiz. U holda

$$G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{y_2(s)y_1(s)}{W(s)p(s)}, & x_0\le x\le s\\[2mm] \dfrac{y_1(s)y_2(s)}{W(s)p(s)}, & s\le x\le x_1\end{cases}$$

ko'rinishdagi Grin funksiyasi hosil bo'ladi.

$y_1(x)$, $y_2(x)$ xususiy yechimlarni shunday tanlash mumkinki, $W(s)p(s)=1$ bo'ladi.

Unda Grin funksiyasi

$$G(x,s)=\begin{cases}y_2(s)y_1(x), & x_0\le x\le s\\ y_1(s)y_2(x), & s\le x\le x_1\end{cases}$$

ko'rinishga keladi .

Bir jinsli bo'lmagan masalani yechish uchun

$$(py')'+qy=f(x)$$

$$y(x_0)=y_0 \quad y(x_1)=y_1$$

$z=y-\eta(x)$, $\eta(x)\in C^2[x_0,x_1]$ almashtirish yordamida bir jinsli masalaga keltiriladi.

Biz oldingi barcha mavzularda bir argumentli funksiyaning hosilasi qatnashgan birinchi va yuqori tartibli tenglamalar bilan tanishdik.

Endi ko'p o'zgaruvchili funksiyalarda birinchi tartibli xususiy hosila qatnashgan tenglamani ko'rib chiqamiz.

$$\Phi\left(x_1,x_2,...,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},...,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0 \qquad (10)$$

ko'rinishdagi tenglama **xususiy hosilali birinchi tartibli** tenglama deyiladi. Agar $F$ funksiya xususiy hosilalarga chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda

$$X_1(x_1,x_2,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+X_n(x_1,x_2,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=R(x_1,x_2,...,x_n,u) \qquad (11)$$

ko'rinishdagi tenglama chiziqli tenglama deyiladi.

Avvalo

$$X_1(x_1,x_2,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+X_n(x_1,x_2,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0 \qquad (12)$$

ko'rinishdagi xususiy hosilali chiziqli bir jinsli tenglama bilan tanishamiz.

Shuni aytish lozimki $u$=*const* xar doim yechim. Biz trivial bo‘lmagan yechimni qidiramiz.

(12) ga mos oddiy differensial tenglamalar sistemasining simmetrik formasi

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,x_2,...,x_n)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1,x_2,...,x_n)}=...=\frac{dx_n}{X_n(x_1,x_2,...,x_n)} \qquad (13)$$

ko‘rinishda yoziladi.

Ushbu teoremani keltiramiz:

**Teorema 2.** (13) sistemaning integrali (12) ning yechimi bo‘ladi.

**Isbot:** $\psi_i(x_1,x_2,...,x_n)$ (13) integrali bo‘lsin. U holda undan olingan to‘la differensial nolga teng, ya’ni

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}dx_n=0 \qquad (14)$$

Bu yerda (13) dan foydalanib $dx_i$ larni o‘rniga

$$dx_i=\frac{X_i}{X_n}dx_n \qquad \left(i=\overline{1,n}\right)$$

tengliklarni qo‘yamiz va

$$\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\frac{X_1}{X_n}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\frac{X_2}{X_n}+...+\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\frac{X_{n-1}}{X_n}+\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}\right)dx_n=0$$

ifodani hosil qilamiz. $dx_n$ ga qisqartirib va $X_n$ ga ko‘paytirsak,

$$X_1\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}+...+X_n\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}=0$$

tenglikka kelamiz. So‘nggi tenglik esa $u=\psi(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya (12) ning yechimi ekanligini ko‘rsatadi.

**Teorema 3**. (12) ning yechimi (13) ning integrali bo‘ladi.
Bu teorema ham sodda isbotlanadi.

Agar (13) ni $n$-1 ta integrali ma’lum bo‘lsa, u holda (12) ning umumiy yechimi

$$u=F(\psi_1,\psi_2,...,\psi_{n-1})$$

ko‘rinishda yoziladi.

**Bir jinisli bo‘lmagan tenglama.**

Quyidagi ko‘rinishdagi

$$X_1(x_1,x_2,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+X_2(x_1,x_2,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_2}+...+X_n(x_1,x_2,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}= \qquad (13)$$
$$=R(x_1,x_2,...,x_n,u)$$

tenglama xususiy hosilali bir jinsli bo‘lmagan chiziqli tenglama deyiladi.



Bunda $X_1,X_2,\dots,X_n$ va R funksiya $\left(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0\right)$ nuqtani atrofida uzluksiz differensiallanuvchi deb faraz qilamiz.
tenglamaning yechimini

$$V(x_1,x_2,...,x_n,u)=0$$

oshkormas ko‘rinishda qidiramiz. $V$ funksiya barcha argument bo‘yicha uzluksiz xususiy hosilalarga ega va

$$\frac{\partial V\left(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0,u^0\right)}{\partial u}\neq 0$$

$u=u(x_1,x_2,...,x_n)$ ekanligidan

$$\frac{\partial V}{\partial x_k}+\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_k}=0 \quad (k=1,2,...,n)$$

hosilaga egamiz. Bundan

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=-\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial V}{\partial u}}$$

tenglikni olib , ularni (1) tenglamaga qo‘yib soddalashtirsak,

$$X_1(x_1,x_2,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+X_2(x_1,x_2,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_2}+...+X_n(x_1,x_2,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}+$$
$$+R(x_1,x_2,...,x_n,u)=0$$

tenglama hosil bo‘ladi.

Bu bir jinsli tenglama ko‘rinishiga ega bo‘lib, uning simmetrik formasini quyidagicha

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=...=\frac{dx_n}{X_n}=\frac{du}{R} \qquad (14)$$

yozish mumkin. Bu sistemani $n$ ta erkli integralini

$$\left.\begin{array}{l}\psi_1(x_1,x_2,...,x_n,u)\\ \psi_2(x_1,x_2,...,x_n,u)\\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\\ \psi_n(x_1,x_2,...,x_n,u)\end{array}\right\}$$

topamiz. U holda (1) ning umumiy yechimi $V$=F$(\psi_1,\psi_2,...,\psi_n)$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu funksiyani 0 ga tenglab, (13) tenglamaning umumiy yechimini olamiz

$$F\left(\psi_1(x_1,x_2,...,x_n,u),\psi_2(x_1,x_2,...,x_n,u),...,\psi_n(x_1,x_2,...,x_n,u)\right)=0 \qquad (15)$$

**Koshi masalasi.** Xususiy hosilali tenglama uchun quyidagicha qo‘yiladi. (13) tenglamaning yechimlari ichidan shunday

$$u=f(x_1,x_2,...,x_n)$$

yechimni topingki , u $x_n=x_n^0$ da

$$u=\varphi(x_1,x_2,...,x_{n-1}) \tag{16}$$

funksiyaga teng bo‘lsin , bunda φ - berilgan funksiya.
Koshi masalasini yechish ushbu tartibda amalga oshiriladi:

1.Tenglamaning simmetrik (14) formasini tuzib, $n$ ta integral topiladi.

$$\begin{array}{l}\psi_1(x_1,x_2,...,x_n,u)\\ \psi_2(x_1,x_2,...,x_n,u)\\ -----------\\ \psi_n(x_1,x_2,...,x_n,u)\end{array} \tag{17}$$

2. (17) dagi $x$ o‘rniga $x_n^0$ ni qo‘yamiz

$$\left.\begin{array}{l}\psi_1(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n^0,u)=\overline{\psi}_1\\ \psi_2(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n^0,u)=\overline{\psi}_2\\ ---------------\\ \psi_n(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n^0,u)=\overline{\psi}_n\end{array}\right\}$$

va bu sistemani $x_1,x_2,...,x_{n-1},u$ ga nisbatan yechiladi, bunda $\psi_1$ va $\psi_2$ ni ko‘rinishidan foydalansak,

$$2z-4y-\left(2\sqrt{z-x-y}+y^2\right)=0$$

$$\left.\begin{array}{l}x_1=\omega_1(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,...,\overline{\psi}_n)\\ ---------------\\ x_{n-1}=\omega_{n-1}(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,...,\overline{\psi}_n)\\ u=\omega(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,...,\overline{\psi}_n)\end{array}\right\}$$

3. Bu funksiyalardan

$$\omega(\psi_1,\psi_2,...,\psi_n)=\varphi(\omega_1(\psi_1,\psi_2,...,\psi_n),\omega_2(\psi_1,\psi_2,...,\psi_n),...,\omega_{n-1}(\psi_1,\psi_2,...,\psi_n)), \tag{18}$$

munosabatni tuzamiz. (18) ga Koshi masalasining oshkormas ko‘rinishdagi yechimi deyiladi. Agar (18) ni u ga nisbatan yechsak, oshkor ko‘rinishida Koshi masalasining yechimini olamiz.

**1-misol.** Tenglamani yeching.

$$\left(1+\sqrt{z-x-y}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2$$

$$z=2x;\ y=0 \text{ да}$$

bu tenglamaning simmetrik formasi



$$\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}.$$

sistemani yechib,

$$\psi_1=z-2y, \qquad \psi_2=2\sqrt{z-x-y}+y,$$

bunda $y$=0 qo‘yib,

$$z=\overline{\psi}_1$$
$$2\sqrt{z-x}=\overline{\psi}_2$$

bu sistemadan x va $z$ ni topamiz.

$$x=\overline{\psi}_1-\frac{\overline{\psi}_2^2}{4}$$
$$z=\overline{\psi}_1$$

(6) formulaga ko‘ra

$\psi_1-2\left(\overline{\psi}_1-\frac{\overline{\psi}_2^2}{4}\right)=0, \quad 2\psi_1-\psi_2^2=0$ Koshi masalasining yechimi bo‘ladi.

**1. Masalaning qo‘yilishi.**

$\frac{du}{dt}=f(t,u), \quad u(0)=u^0$ (18) sistema uchun yoki batafsilroq

$$\frac{du_i(t)}{dt}=f_i(t,u_1,u_2,...,u_n),\ t\succ 0\ ,\ \ i=1,2,...,n \tag{19}$$

$$u_i(0)=u_i^{(0)}, \quad i=1,2,...,n \tag{20}$$

Koshi masalasini qaraymiz. Agar

$$f_i(t,u_1,u_2,...,u_n), D=\{|t|\le a, |u_i-u_i^{(0)}|\le b, i=1,2,...,n\}$$

funksiyalar yopiq sohada uzluksiz bo‘lsalar, unda $|f_i|\le M$ , $i=1,2,...,n$ shart o‘rinli bo‘ladi.

Bundan tashqari agar $f_i$ lar, D – sohada istalgan $(t,u_1',u_2',...,u_n')$, $(t,u_1'',u_2'',...,u_n'')$ nuqtalar uchun $u_i$ argumentlar bo‘yicha, istalgan u' va u'' uchun Lipshist shartini qanoatlantirsa, ya’ni

$$\left|f_i(t,u_1',u_2',...,u_n')-f_i(t,u_1'',u_2'',...,u_n'')\right|\le L\{|u_1'-u_1''|+|u_2'-u_2''|+...+|u_n'-u_n''|\}$$

bo‘lsa, unda (19) - sistemaning $u_1=u_1(t), u_2=u_2(t),..., u_n=u_n(t)$

$|t|\le t_0=\min\left(a,\frac{b}{M}\right)$ va (20) - shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud bo‘lib yagonadir.

Koshi masalasini sonli yechish va uni tadqiq etishda Koshi masalasining yechimi mavjud va birdan-bir va keraklicha silliq deb faraz qilamiz.

**2. Sonli usullar misollari.**

Koshi masalasini yechishning ikki guruh sonli usullari mavjud: Ko'p qadamli ayirmali usullar va Runge-Kutt usullari.

Quyida sonli usullarning bir qancha misollarini qarab chiqamiz va bayon qilamiz.

Soddalik uchun birta

$$\frac{du}{dt}=f(t,u),\, t>0,\, u(0)=u_0 \qquad (21)$$

tenglamani qaraymiz.

$$\omega_\tau=\{t_i=i\tau, i=0,1,2,...\}$$

nuqtalar to'plamini qaraymiz. Buni to'r deb ataymiz.

u(t) (21) - tenglamaning aniq yechimi bo'lsin. $y_i=y(t_i)$ (21) - masalaning taqribiy yechimi bo'lsin. $y_i$ taqribiy yechim to'r funksiya deb aytiladi, ya'ni faqat $\omega_\tau$ to'rda aniqlangan funksiyadir.

**2- misol.** Eyler usuli.

(21) - tenglama

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{\tau}-f(t_i,y_i)=0, i=0,1,...,y_0=u_0 \qquad (22)$$

ayirmali tenglama bilan almashtiriladi.

Bu tenglamaning yechimi

$$y_{i+1}=y_i+\tau f(t_i,y_i)=0, i=0,1,...,y_0=u_0$$

rekurrent formula yordamida oshkor tarzda topiladi.

Taqribiy usullar qaralganda yaqinlashish ularning asosiy xossasi hisoblanadi. Taqribiy usullar yaqinlashishini turlicha ta'riflash mumkin. Chekli ayirmalar usulida $\tau\to 0$ dagi yaqinlashish tushunchasi ko'p tarqalgan. Bu quyidagilardan iborat. t - nuqtani tanlab olib shunday $\omega_\tau$ to'rlar ketma-ketligini qaraymizki

$$\tau\to 0, t_i=i\tau=t(i\to\infty)$$

bo'lsin.

(22) - usul t - nuqtada yaqinlashadi deb aytiladi, agar $\tau\to 0$ $|y_i-u(t_i)|\to 0$

(22) - usul $(0.T]$ kesmada yaqinlashadi deb aytiladi agar bu usul kesmaning har bir nuqtasida yaqinlashsa.

Usulning tartibi r-ga teng deb aytiladi, agar $p>0$ uchun $\tau\to 0$ $|y_i-u(t_i)|=0(\tau^p)$ bo'lsa. Usul xatoligi $z_i$=$y_i$ - u($t_i$) ni qanoatlantiradigan tenglamani hosil qilamiz. $y_i$ = $z_i$ + $u_i$ ni (5) ga qo'yib



$$\frac{z_{i+1}-z_i}{\tau}=f(t_i,u_i+z_i)-\frac{u_{i+1}-u_i}{\tau} \qquad (23)$$

tenglamani hosil qilamiz. (23) - ning o'ng tomonini

$$\psi_i^{(1)}+\psi_i^{(2)}$$

yig'indi ko'rinishda yozish mumkin.

Bunda

$$\psi_i^{(1)}=-\frac{u_{i+1}-u_i}{\tau}+f(t_i,u_i)\ ,\quad \psi_i^{(2)}=f(t_i,u_i+z_i)-f(t_i,u_i)$$

$\psi_i^{(1)}$ funksiya (23) - ayirmali tenglamaning (21) – dastlabki tenglama yechimidagi approksimastiya xatoligi deb aytiladi. Approksimastiya xatoligi (22) - ayirmali tenglama chap tomoniga (21) - dastlabki tenglama aniq yechimi u(t) qo'yilganda hosil bo'lgan farqdan iborat ekanligi ko'rinib turibdi. $y_i$ taqribiy yechim u($t_i$) - aniq yechimga teng bo'lganda xatolik nolga teng bo'ladi.

Agar $\tau\to 0$, $\psi_i^{(1)}\to 0$ ayirmali usul dastlabki differensial tenglamani approksimastiyalaydi deb aytiladi. Agar $\psi_i^{(1)}=0(\tau^p)$ bo'lsa ayirmali usul dastlabki tenglamani r- tartib bilan approksimastiyalaydi deb aytiladi. Keyinroq juda katta umumiy farazlarda aniqlik tartibining approksimastiya tartibiga tengligi ko'rsatiladi.

$$\psi_i^{(2)}=f(t_i,u_i+z_i)-f(t_i,u_i)$$

Agar dastlabki tenglamaning o'ng tomoni $u(t)$ga bog'liq bo'lmasa bu funksiya aynan nolga teng bo'ladi. Umumiy holda $\psi_i^{(2)}, z_i$ xatolikka proporsionaldir, chunki

$$\psi_i^{(2)}=\frac{df}{du}(t_i,u_i+\theta\cdot z_i)\cdot z_i, |\theta|\le 1.$$

Eyler usulining approksimasiya tartibini Teylor formulasini qo'llab topish qiyin emas.

$$\frac{u_{i+1}-u_i}{\tau}=u'(t_i)+0(\tau)$$

bo'lganligi uchun (4) ga asosan

$$\psi_i^{(1)}=-u'(t_i)+f(t_i,u_i)+0(\tau)=0(\tau)\ ,$$

ya'ni, Eyler usuli birinchi tartibli approksimasiyaga ega. Buni hosil qilishda u"(t) ning chegaralanganligini faraz qilindi.

**3- misol.** Simmetrik sxema.

(4) - tenglama

$$\frac{u_{i+1}-y_i}{\tau}-\frac{1}{2}[f(t_i,y_i)+f(t_{i+1},y_{i+1})]=0, i=0,1,...,y_0=u_0 \qquad (24)$$

ayirmali sxema bilan almashtiriladi.

Bu usul Eyler usuliga qaraganda ancha murakkabdir, chunki $y_{i+1}$ qiymat oldin aniqlangan $y_i$ qiymat orqali

$$y_{i+1} - \frac{1}{2}\tau \cdot f(t_{i+1}, y_{i+1}) = F,$$

bunda

$$F_i = y_i + \frac{1}{2}\tau \cdot f(t_i, y_i)$$

tenglamani yechish bilan aniqlanadi. Shu sababli usul oshkormas deb aytiladi. (24) - usulning (22)- ga nisbatan afzalligi uning yuqori tartibli aniqligidadir.

$$\psi_i^{(1)} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} + \frac{1}{2}[f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1})]$$

funksiya uchun

$$\psi_i^{(1)} = -u_i' - \frac{\tau}{2}u_i'' + 0(\tau^2) + \frac{1}{2}(u_i' + u_{i+2}') = -u_i' - \frac{\tau}{2}u_i'' + \frac{1}{2}[u_i' + u_i' + \tau u_i'' + 0(\tau^2)]$$

o'rinlidir, ya'ni $\psi_i^{(1)} = 0(\tau^2)$.

Shunday qilib, (24) - usul ikkinchi tartibli approksimasiyaga ega. Keltirilgan misollar ayirmali usullar deb ataluvchi usullardan eng soddalaridirlar, ular yana ayirmali sxemalar ham deb aytiladilar.

Runge - Kutt usulining ayirmali usullardan farqi shundaki, tenglamalarning o'ng tomoni $f(t,u)$ qiymatlari nafaqat to'r nuqtalarida, balki oraliq nuqtalarda ham hisoblanib topiladi.

**4- misol.** Ikkinchi tartibli Runge-Kutt usullari.

Faraz qilamiz, dastlabki $y_i$ yechim $t=t_i$ laxzada aniqlangan bo'lsin. $y_{i+1}=y(t_{i+1})$ qiymatni topish uchun eng avval

$$\frac{y_{i+\frac{1}{2}} - y_i}{0{,}5\tau} = f(t_i, u_i) \qquad (25)$$

Eyler sxemasi buyicha $y_{i+\frac{1}{2}}$ oraliq qiymatni topib, undan so'ng

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} = f(t_i + 0{,}5\tau, y_{i+\frac{1}{2}}) \qquad (26)$$

sxemadan $y_{i+1}$ ni oshkor tarzda topamiz.

Bog'lanishsizlikni tadqiq etish uchun $y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + 0{,}5\tau f(t_i, u_i)$ – ni (26)-ga qo'yib

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} - f(t_i + 0{,}5\tau, y_i + 0{,}5\tau, f(t_i, u_i)) = 0 \qquad (27)$$

ayirmali tenglamani hosil kilamiz. Bu tenglamaning bog'lanishsizligi



$$\psi_i^1 = -\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} - f(t_i + 0{,}5\tau, u_i + 0{,}5\tau, f(t_i, u_i)) \qquad (28)$$

ko'rinishda yoziladi.

Teylor formulasiga asosan

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} = \frac{u_i + u_i'\tau + \frac{1}{2}u_i''\tau^2 + O(\tau^3) - u_i}{\tau} = u_i' + \frac{1}{2}u_i''\tau + O(\tau^2)$$

va

$$f(t_i + 0{,}5\tau, u_i + 0{,}5\tau f(t_i, u_i)) = f(t_i, u_i)) + 0{,}5\tau\frac{\partial f}{\partial t}(t_i, u_i) + 0{,}5\tau f(t_i, u_i)\frac{\partial f(t_i, u_i)}{\partial u} + O(\tau^2) =$$

$$f(t_i, u_i) + 0{,}5\tau\left[\frac{\partial t(t_i, u_i)}{\partial t} + f(t_i, u_i)\frac{\partial t(t_i, u_i)}{\partial u}\right] + O(\tau^2) = f(t_i, u_i) + 0{,}5\tau u_i'' + O(\tau^2),$$

chunki, (21) - ga asosan

$$u_i'' = \frac{\partial f(t_i, u_i)}{\partial t} + f(t_i, u_i)\frac{\partial f(t_i, u_i)}{\partial u}.$$

Bulardan (27) - ning ikkinchi tartibli approksimasiya xatoligiga ega ekanligi kelib chiqadi, $\psi_i^{(1)} = O(\tau^2)$ va (24) - dan farqli oshkor usuldir. (27) - usulni qo'llash ikki bosqichdan iborat, shuning uchun bu usul predikator-korrektor deb aytiladi. (27) - usul boshqacha amalga oshirilishi mumkin.

Eng avval ketma-ket

$$k_1 = f(t_i, y_i) \quad , \quad k_2 = f(t_i + 0{,}5\tau, y_i + 0{,}5\tau k_1)$$

hisoblanadilar, undan keyin $y_{i+1}$, $(y_{i+1} - y_i)/\tau = k_2$ tenglamadan topiladi. (27)-usulning bunday qo'llanilishi Runge-Kutt usuli deb aytiladi.

**3. Runge - Kutt usullari.**

Usullarning tavsifi.

$$\frac{du}{dt} = f(t,u) \quad , \quad t > 0 \quad , \quad u(0) = u_0 \qquad (29)$$

Koshi masalasini qaraymiz.

Runge-Kuttning m-bosqichli oshkor usuli quyidagidan iborat. $y_i=y(t_i)$ qiymat bo'lsin. $a_i, b_{ij}$, i=2,3,...,m, j=1,2,...,m-1, $\sigma_i$, i=1,2,...,m koeffitsientlar beriladi va

$$k_1 = f(t_i, y_i), k_2 = f(t_i + a_2\tau, y_i + b_{21}\tau \cdot k_1),$$

$$k_3 = f(t_i + a_3\tau, y_i + b_{31}\tau \cdot k_1 + b_{32}\tau \cdot k_2),$$

$$k_m = f(t_i + a_m\tau, y_i + b_{m1}\tau \cdot k_1 + b_{m2}\tau \cdot k_2 + ... + b_{m,m-1} \cdot \tau \cdot k_{m-1})$$

funksiyalar ketma-ket hisoblanadilar.

Undan so'ng

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{\tau}=\sum_{l=1}^{m}\sigma_l k_l \qquad (30)$$

formuladan $y_{i+1} = y(t_{i+1})$ topiladi. $a_i, b_{ij}, \sigma_i$, koeffitsientlar aniqlik shartlaridan topiladilar. Masalan, (30) - dastlabki (29) - tenglamani approksimasiya qilishi uchun $\sum_{l=1}^{m}\sigma_l=1$ bo‘lishi zarur. Ba’zi bir usullarga alohida to‘xtalamiz. m=1 bo‘lsa 1 - misolda qaralgan Eyler sxemasi hosil bo‘ladi.

m=2 bo‘lganda

$$k_1=f(t_i,y_i),\ k_2=f(t_i+a_2\tau,y_i+b_{21}\tau\cdot k_1),\ y_{i+1}=y_i+\tau(\sigma_1k_1+\sigma_2k_2) \qquad (31)$$

usullar majmuasini hosil qilamiz. (3) - usullar approksimasiya parametrlarini tadqiq etamiz.

Oxirgi tengliklardan $k_1$ va $k_2$ - larni f orqali ifodasini almashtirib

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{\tau}=\sigma_1f(t_i,y_i)+\sigma_2f(t_i+a_2\tau,y_i+b_{21}\tau\cdot f(t_i,y_i)) \qquad (32)$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Approksimasiya xatoligi ta’rifiga ko‘ra (31) - usulning approksimasiyasi (32)-dan $y_i$ -ni $u_i$ – aniq yechimi bilan almashtirishdan hosil bo‘lgan

$$\psi_i^{(1)}=-\frac{u_{i+1}-u_i}{\tau}+\sigma_1f(t_i,u_i)+\sigma_2f(t_i+a_2\tau,u_i+b_{21}\tau\cdot f(t_i,u_i)) \qquad (33)$$

ifodaga aytiladi.

u(t) va f(t,y) funksiyalarni yetarlicha silliq deb qarab approksimasiya tartibini aniqlaymiz. Buning uchun (33) - dagi barcha qiymatlarni Teylor formulasi buyicha $t_i$ - nuqtada yoyib chiqamiz.

Quyidagilarga ega bo‘lamiz.

$$\frac{u_{i+1}-u_i}{\tau}=u'(t_i)+\frac{\tau}{2}u''(t_i)+O(\tau^2)$$

$$f(t_i+a_2\tau u_i+b_{21}\tau f(t_i,u_i))=f(t_i,u_i)+a_2\tau\frac{\partial f(t_i,u_i)}{\partial t}+b_{21}\tau\frac{\partial f(t_i,u_i)}{\partial u}+O(\tau^2),$$

(1) - ga asosan

$$u''=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial u}u'=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial u}{\partial u}f.$$

shuning uchun

$$\psi_i^1=-u'(t_i)-\frac{\tau}{2}u''(t_i)+O(\tau^2)+\sigma_1f(t_i,u_i)+\sigma_2f(t_i,u_i)+\sigma_2a_2\tau\frac{\partial f(t_i,u_i)}{\partial t}+\sigma_2b_{21}\tau\frac{\partial f(t_i,u_i)}{\partial u}+O(\tau^2)=$$

$$=-f(t_i,u_i)+(\sigma_1+\sigma_2)f(t_i,u_i)+\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial f(t_i)}{\partial t}+\frac{\tau\partial f(t_i,u_i)}{2\partial u}f(t_i,u_i)\right)+O(\tau^2)+\sigma_2a_2\tau\frac{\partial f(t_i,u_i)}{\partial u}+$$



$$+\sigma_2b_{21}\tau\frac{\partial f(t_i,u_i)}{\partial u}+O(\tau^2)=-f(t_i,u_i)+(\sigma_1+\sigma_2)f(t_i,u_i)+\tau[(\sigma_2a_2-0{,}5)\frac{\tau\partial f(t_i,u_i)}{2\partial u}+(\sigma_2b_{21}-0{,}5)\frac{\partial f(t_i,u_i)}{\partial u}+]O(\tau^2)=$$

$$=-f(t_i,u_i)[1-\sigma_1+\sigma_2]+\tau[(\tau_2a_2-0{,}5)\frac{\partial f(t_i,u_i)}{\partial t}+(\sigma_2b_{21}-0{,}5)\cdot\frac{\partial f(t_i,u_i)}{\partial u}+]O(\tau^2)$$

Bundan ko‘rinib turibdiki, agar $\sigma_1+\sigma_2=1$ qilib olinsa, approksimasiya tartibi birga teng bo‘ladi. Agar bunga qo‘shimcha ravishda $\sigma_2a_2=\sigma_2b_{21}=0{,}5$ talab qilsak, approksimastiya tartibi ikkiga teng bo‘ladi. Shunday qilib, ikki bosqichli approksimastiya tartibi ikkiga teng bo‘lgan bir parametrli Runge-Kutt usuli borligi aniqlandi.

Bu usullar oilasini quyidagicha yozish mumkin.

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{\tau}=(1-\sigma)f(t_i,u_i)+\sigma f(t_i+a\tau,y_i+a\tau\cdot f(t_i,u_i)) \qquad (35)$$

Bunda $\sigma\cdot a=0{,}5$

Xususiy holda, $\sigma=1, a=0{,}5$ bo‘lganda 3-misol kelib chiqadi. $\sigma=\frac{1}{2}, a=1$ bo‘lganda ikkinchi tartibli

$$k_1=f(t_i,u_i), k_2=f(t_i+\tau,y_i+\tau k_1), y_{i+1}=y_i+0{,}5(k_1+k_2)$$

usul hosil bo‘ladi.

Uchinchi tartibli ikki bosqichli usul mavjud emas. Bunga ishonch hosil qilish uchun u'=u tenglamani qarash kifoya.

Approksimasiya tartibi yuqori bo‘lgan Runge-Kutt usullari misollari bor.

Uchinchi tartibli usul:

$$k_1=f(t_i,u_i), k_2=f\left(t_i+\frac{\tau}{2}y_i+\frac{\tau}{2}\tau k_1\right)$$

$$k_3=f(t_i+\tau,y_i-\tau k_1+2\tau k_2)$$

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{\tau}=\frac{1}{6}(k_1+4k_2+k_3).$$

Uchinchi tartibli usul:

$$k_1=f(t_i,u_i), k_2=f\left(t_i+\frac{\tau}{3},y_i+\frac{\tau}{3}k_1\right),$$

$$k_3=f\left(t_i+\frac{2\tau}{3},y_i+\frac{2\tau}{3}k_2\right),$$

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{\tau}=\frac{1}{4}(k_1+3k_3).$$

To‘rtinchi tartibli usul

$$k_1=f(t_i,u_i), k_2=f\left(t_i+\frac{\tau}{4},y_i+\frac{\tau}{4}k_1\right),$$

$$k_3=f\left(t_i+\frac{\tau}{2},y_i+\frac{\tau}{2}k_2\right),$$

$$k_4=f(t_i+\tau,y_i+\tau k_1-2\tau k_2+2\tau k_3),$$

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{\tau}=\frac{1}{6}(k_1+4k_3+k_4).$$

To'rtinchi tartibli Runge - Kutt usullardan ikkinchisi:

$$k_1=f(t_i,u_i), k_2=f\left(t_i+\frac{\tau}{2}, y_i+\frac{\tau}{2}k_1\right),$$
$$k_3=f\left(t_i+\frac{\tau}{2}, y_i+\frac{k_2}{2}\right),$$
$$k_4=f(t_i+\tau, y_i+k_3),$$
$$\frac{y_{i+1}-y_i}{\tau}=\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4).$$

Keltirilgan usullar Runge - Kutt usullarining xususiy hollaridir.

**Amaliy mashg'ulot uchun mavzuning qisqacha bayoni va yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar**

**Mustaqil yechish uchun topshiriqlar:**

Differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

1. $y''-2y'=2ch2x.$
2. $y''+y=2\sin x-6\cos x+2e^x.$
3. $y''-y'=2e^x+\cos x.$
4. $y''-3y'=2ch3x.$
5. $y''+4y=-8\sin 2x+32\cos 2x+4e^{2x}.$
6. $y'''-y'=10\sin x+6\cos x+4e^x.$
7. $y''-4y'=16ch4x.$
8. $y''+9y=-18\sin 3x-18e^{3x}.$
9. $y'''-4y'=24e^{2x}-4\cos 2x+8\sin 2x.$
10. $y''-5y'=50ch5x.$

Koshi muammosiga yechim toping

1. $y''+\pi^2 y=\frac{\pi^2}{\cos\pi x},$ $y(0)=3, y'(0)=0.$
2. $y''+3y'=\frac{9e^{3x}}{1+e^{3x}},$ $y(0)=\ln 4, y'(0)=3(1-\ln 2).$
3. $y''+4y=8ctg2x,$ $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=3, y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=4.$
4. $y''-6y'+8y=\frac{4}{1+e^{-2x}},$ $y(0)=1+2\ln 2, y'(0)=6\ln 2.$



5. $y''+-9y'+18y=\frac{9e^{3x}}{1+e^{-3x}},$ $y(0)=0, y'(0)=0.$
6. $y''+\pi^2 y=\frac{\pi^2}{\sin\pi x},$ $y\left(\frac{1}{2}\right)=3, y'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{2}.$
7. $y''+\frac{1}{\pi^2}y=\frac{1}{\pi^2\cos(x/\pi)},$ $y(0)=2, y'(0)=0.$
8. $y''-3y'=\frac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}},$ $y(0)=4\ln 4, y'(0)=4(3\ln 4-1).$
9. $y''+y=4ctgx,$ $y(\pi/2)=4, y'(\pi/2)=4.$
10. $y''-6y'+8y=\frac{4}{2+e^{-2x}},$ $y(0)=1+3\ln 3, y'(0)=10\ln 3.$

### Tekshirish uchun savollar

1. Ikkinchi tartibli tenglama uchun bir jinsli bo'lmagan chegaraviy masala?
2. Bir jinsli bo'lmagan chegaraviy masalani bir jinsli chegaraviy masalaga keltirish?
3. Ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensti al tenglamalarni soddalashtirish?
4. Grin funksiyasini ta'rifi?
5. Gilpbert teoremasi?
6. Grin funksiyasi qachon mavjud bo'ladi?
7. Grin funksiyasining xossalari?
8. Grin funksiyasini ko'rishni tushuntiring?
9. Grin funksiyasining birinchi tur uzulish nuqtasidagi sakrashi?
10. Grin funksiyasi qaysi ko'rinishda izlanadi?
11. Xususiy xosilali tenglama umumiy ko'rinishi?
12. Xususiy xosilali chiziqli tenglama ko'rinishi?
13. Tengloama tartibini tushuntiring?
14. Simmetrik formasini yozing?
15. Umumiy yechimni ta'riflang?
16. Xususiy hosilali tenglama uchun Koshi masalasini qo'ying?
17. Koshi masalasini yechish strukturasini tushuntring?
18. Koshi masalasining oshkormas ko'rinishdagi yechimi?
19. Koshi masalasining oshkor ko'rinishdagi yechimini xosil qilish?
20. Sonli yechish nima ?
21. Eyler usuli nima ?
22. Runge – Kutt usuli nima ?
23. Aproksimastiya xatoligi deb nimaga aytiladi ?
24. Yaqinlashish nima ?
25. Ko'p qadamli usul nima:



### MUSTAHKAMLASH UCHUN MASHQLAR:

Differensial tenglamalarning umumiy integrallari topilsin.

1. $4xdx-3ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$
2. $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$
3. $\sqrt{4+y^2}dx-ydy=x^2ydy$
4. $\sqrt{3+y^2}dx-ydy=x2ydy$
5. $ydx-6ydy=2x^2ydy+3y^2dx$
6. $x\sqrt{3+y^2}dx+y\sqrt{2+x^2}dy=0$
7. $(e^{2x}+5)dy+y\ell^{3x}dx=0$
8. $y'y\sqrt{\frac{1-x^{\,2}}{1-y^2}}+1=0$
9. $6xdx-6ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$
10. $y\left(4+e^x\right)dy-e^xdx=0$
11. $x\sqrt{5+y^2}dx+y\sqrt{4+x^2}dy=0$
12. $\sqrt{4+x^2}y'+xy^2+x=0$
13. $2xdx-2ydy=x^2ydy-2xy^2dx$
14. $(e^x+8)dy-y\ell^xdx=0$
15. $x\sqrt{5+y^2}+y'y\sqrt{1-x^2}=0$
16. $x\sqrt{4+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0$
17. $6xdx-ydy=yx^2dy-3x^2y^2dx$
18. $y\ln y+xy'=0$
19. $(1+e^x)y'=ye^x$
20. $\sqrt{1-x^2}y'+xy^2+x=0$

21. $(3+\ell^x)y \cdot y' = \ell^x$

22. $y(1+\ell ny)+xy'=0$

23. $xdx - ydy = yx'dy - xy^2dx$

24. $\sqrt{3+y^2}+\sqrt{1-x^2}yy'=0$

25. $\sqrt{5+y^2}dx + 4(x^2y+y+y)dy=0$

26. $(1+\ell^x)y \cdot y' = \ell^x$

27. $3(x^2y+y)dy+\sqrt{2+y^2}dx=0$

28. $6xdx - ydy = yx^2dx - 3xy^2dx$

29. $2xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx$

30. $2x+2xy^2+\sqrt{2-x^2}y'=0$

31. $Y' = \frac{y^2}{x^2}+4\frac{y}{x}+2$

32. $xy' = \frac{3y^3+2yx^2}{2y^2+x^2}$

33. $Y' = \frac{x+y}{x-y}$

34. $xy' = \sqrt{x^2+y^2}+y$

35. $2y' = \frac{y^2}{x^2}+6\frac{y}{x}+3$

36. $xy' = \frac{3y^3+4yx^2}{2y^2+3x^2}$

37. $Y' = \frac{x+2y}{2x-y}$

38. $xy' = \frac{3y^3+6x^2y}{2y^2+3x^2}$

39. $3y' = \frac{y^2}{x^2}+8\frac{y}{x}+4$



40. $xy' = 2\sqrt{x^2+y^2}+y$

41. $ó' = \frac{x \quad xy+y^2}{x^2-2xy}$

42. $xy' = \frac{3y^3+8yx^2}{2y^2+4x^2}$

43. $y' = \frac{x \ +2xy \quad y^2}{2x^2- \quad xy}$

44. $xy' = \frac{3y^3+10yx^3}{2y^2+5x^2}$

45. $y' - \frac{y}{x} = x^2, y(1)=1$

46. $y' - yctgx = 2x\sin x$, $y(\frac{\pi}{2})=0$

47. $y' + y\cos x = \frac{\sin 2x}{2}$, $y(0)=0$

48. $y' + ytgx = \cos^2 x$, $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$

49. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2+2x$, $y(-1)=\frac{3}{2}$

50. $y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1)$, $y(0)=1$

51. $y' - \frac{y}{x} = x\sin x, y(\frac{\pi}{2})=1$

52. $y' + \frac{y}{2x} = x^2, y(1)=1$

53. $y' + \frac{2x}{1+x} \qquad \frac{2}{\quad 2}$

54. $y' - \frac{2x-}{x^2} \qquad 5$, $y(2)=4$

55. $y'+\frac{y}{x}=\frac{x+1}{x}e^{2}$, $y(1)=e$

56. $y'-\frac{2xy}{1+x^2}=1+x^3$, $y(1)=3$

57. $y'+\frac{3y}{x}+\frac{2}{x^3}=0, y(1)=1$

58. $y'+\frac{xy}{2(1-x^2)}=\frac{x}{2}$

59. $y'-\frac{2y}{x+1}=e^x(x+1)^2$

60. $y'+2xy=xe^{-x^2}\sin x$

61. $y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$

62. $4y^3y''=y^4-1$

63. $y''+2\sin y\cos^3 y=0$

64. $y''y^2+16=0$

65. $y''=8\sin^3 y\cos^3 y$

66. $y''=18y^3$

67. $y''+32\sin y\cos^2 y=0$

68. $y''y^3+9=0$

69. $y''=50\sin^3 y\cos y$

70. $y^3y''=4(y^4-1)$

71. $y''y^3+4=0$

72. $y^3y''=y^4-16$

73. $y''=2y^3$

74. $y'''+3y''+2y'=1-x^2$

75. $y'''-y''=6x^2+3x$

76. $y'''-y'=x^2+x$

77. $y^{IV}-3y'''+3y''-y'=2x$



78. $y^{IV}-y'''=5(x+2)^2$

79. $y^{IV}-2y'''+y''=2x(1-x)$

80. $y^{IV}-y'''=5(x+2)^2$

81. $y^{V}-y^{IV}=2x+3$

82. $3y^{IV}+y'''=6x-1$

83. $y^{IV}+2y'''+y''=4x^2$

84. $y'''+y''=5x^2-1$

85. $y^{IV}+4y'''+4y''=x-x^2$

86. $7y'''+y''=12x$

87. $y'''+3y''+2y'=3x^2+2x$

88. $y'''-y'=3x^2-2x+1$

89. $y'''-y''=4x^2-3x+2$

90. $y^{IV}-3y'''+3y''-y'=x-3$

91. $y^{IV}+y'''=x$

92. $y^{IV}-2y'''+y''=12x^2-6x$

93. $y'''-4y''=32-384x^2$

94. $y^{IV}-2y''=3x^2+x-4$

95. $y'''-y''=40-24x^2$

96. $y'''-2y''=3x^2+x-4$

97. $y'''-13y''+12y'=x-1$

98. $y'''+3y''+2y'=x^2+2x+3$

99. $y'''-y''=6x+5$

100. $y'''-5y''+6y'=(x-1)^2$

101. $y^{IV}+y''=12x+6$

102. $y'''-13y''+12y'=18x^2-39$

103. $y'''-5y''+6y'=6x^2+2x+5$

104. $y''+2y'=4e^x(\sin x+\cos x)$

105. $y''-4y'+4y=-e^{2x}\sin 6x$

106. $y''+2y'=-2e^x(\sin x+\cos x)$

107. $y''+y=2\cos 7x+3\sin 7x$

108. $y''+2y'+5y=-\sin 2x$

109. $y''-4y'+8y = e^x(5\sin z - 3\cos x)$

110. $y''+2y' = e^x(\sin x + \cos x)$

111. $y''-4y'+4y = e^{2x}\sin 3x$

112. $y''+6y'+13y = e^{-3x}\cos 4x$

113. $y''+y = 2\cos 3x - 3\sin 3x$

114. $y''+2y'+5y = -5\sin x$

115. $y''-4y'+8y = e^x(4\cos x - 3\sin x)$

116. $y''+2y' = 10e^x(\sin x + \cos x)$

117. $y''-4y'+4y = e^{2x}\sin 5x$

118. $y''+y = 2\cos 5x + 3\sin 5x$

119. $y''+2y'+5y = -17\sin 2x$

120. $y''+6y'+13y = e^{-3x}\cos x$

121. $y''-4y'+8y = e^x(3\sin x + 5\cos x)$

122. $y''-4y'+4y = -e^{2x}\sin 4x$

123. $y''+6y'+13y = e^{-3x}\cos 5x$

124. $y''+y = 2\cos 7x - 3\sin 7x$

125. $y''+2y'+5y = -\cos x$

126. $y''-4y'+8y = e^x(2\sin x - \cos x)$

127. $y''+2y = 3e^x(\sin x + \cos x)$

128. $y''-4y'+4y = e^{2x}\sin 4x$

129. $y''+6y'+13y = e^{-3x}\cos 8x$

130. $y''+y = 2\cos 4x + 3\sin 4x$

131. $y''+2y'+y = e^x\cos 2x$



## *GLOSSARIY*

**Differensial tenglamalar** – erkli o‘zgaruvchining funksiyasi va uning hosilalarini bog‘lovchi tenglama.

**Oddiy differensial tenglama** – differensial tenglama yagona erksiz o‘zgaruvchiga ega bo‘ladi.

**Xususiy hosilali differensial tenglama** – differensial tenglama ikki va undan ortiq erksiz o‘zgaruvchiga ega bo‘ladi.

**Differensial tenglama tartibi** – tenglamada qatnashgan hosilalarning eng yo‘qori tartibi.

**Differensial tenglamaning umumiy yechimi** – shunday, $y = \varphi(x, C)$ funksiyaki uni berilgan tenglamadagi no‘malum funksiya o‘rniga qo‘yilganda tenglama ayniyatga aylanadi.

**Differensial tenglamaning xususiy yechimi** – biror boshlang‘ich $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ shartlarda shunday $C = C_0$ mavjud bo‘ladiki, unda differensial tenglamaning yechimi $y = \varphi(x, C_0)$ bo‘ladi.

**Koshi masalasi** – differensial tenglamaning boshlang‘ich $y(x_0) = y_0$ shartni qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x, C_0)$ ko‘rinishdagi xususiy yechimini topish.

**Differensial tenglamaning integrali** – beirlgan differensial tenglamadan kelib chiqadigan hosilalalarga ega bo‘lmagan.

**Integral chiziq**–differensial tenglama $y = \varphi(x)$ XOY tekislikdagi grafigi.

**Differensial tenglamaning maxsus yechimlari** – bu shunday yechimki uning har bir nuqtasida yagonalik sharti bajarilmaydi, ya’ni biror (x,y) nuqtaning kichik atrofida kamida ikki integral chiziq yotadi.

**Birinchi tartibli differensial tenglama** – funksiya va uning birinchi hosilasini bog‘lovchi munosabat.

**Hosilaga nisbatan yechilgan tenglama** – $y' = f(x,y)$ ko‘rinishdagi tenglama.

**Birinchi tartibli differensial tenglamaning differensial formasi** – $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ ko‘rinishdagi tenglama.

**O‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama** – $y' = \alpha(x)\beta(y)$ ko‘rinishga keltirish mumkin bo‘lgan tenglamalar.

**n- tartibli bir jinsli funksiya f(x, y)** - ixtiyoriy t parametr (holdan boshqa) uchun $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ ayniyatning o‘rinli bo‘lishligi.

**Bir jinsli differensial tenglama** – $y' = f(x,y)$ ko'rinishdagi shunday tenglamaki, unda unng o'ng tomoni f(x, y) argumentlarga nisbatan nolinchi tartibli bir jinsli funksiya.

**Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama** – no'malum funksiya va uning hosilasiga nisbatan chiziqli bo'lgan ya'ni $y' + P(x)y = Q(x)$ ko'rinishdagi tenglama.

**Birinchi tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglama** – $y' + P(x)y = 0$ ko'rinishdagi tenglama.

**Birinchi tartibli chiziqli bir jinssiz differensial tenglama** – $y' + P(x)y = Q(x)$ ko'rinishdagi tenglama.

**Bernulli tenglamasi** – $y' + Py = Q \cdot y^n$, ko'rinishdagi tenglama bu yerda P va Q lar x ning funksiyasi, n 1 dan farqli o'zgarmas son.

**To'liq differensialli tenglama** – $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ birinchi tartibli differensial tenglamaning chap tomoni biror $u = F(x,y)$ funksiyaning to'liq differensialidan iborat.

**Lagarnj tenglamasi** – $P(y')x + Q(y')y + R(y') = 0$ ko'rinishdagi differensial tenglama.

**Klero tenglamasi** – $y = xy' + \varphi(y')$. ko'rinishdagi tenglama

**Yo'nalish maydoni** – qaralayotgan sohadagi urinmalar to'plami.

**n–tartibli differensial tenglama** - $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ ko'rinishdagi tenglama

**Koshi masalasini yechish** – $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ differensial tenglamaning $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish.

**n-tatibli chiziqli differensial tenglama** – y va uning hosilalarining birinchi darajalarining $y', y'', ..., y^{(n)}$ kombinasyasidan tashkil topgan $p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = f(x)$; ko'rinishdagi tenglama.

**n-tatibli chiziqli bir jinsli differensial tenglama** – $p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = 0$ ko'rinishdagi tenglama

**n-tatibli chiziqli o'zgarmas koeffitsientli differensial tenglama** – $p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = f(x)$; ko'rinishdagi koeffitsientlari o'zgarmas bo'lgan tenglama.

**Yechimning fundamental sistemasi** – n- tatibli chiziqli bir jinslidifferensial tenglamaning chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlari sistemasi.

**Vronskiy determinanti** –



$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

ko'rinishdagi determinant

**Xarakteristik tenglama** – $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$ differensial tenglamaga mos kelgan $F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n$ ko'rinishdagi tenglama.

**Differensial tenglamalarning normal sistemasi** – hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi.

**Differensial tenglamalar sistemasining umumiy yechimi** – tenglamalar sistemasini qanoatlantiruvchi $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, $y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, ... $y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, funksiyalar to'plami.

**Ikkinchi tartibli chegaraviy masala** –

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x)$$

$$a \le x \le b,$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_0 \cdot y(a) + \alpha_1 \cdot y'(a) = A, \\ \beta_0 \cdot y(b) + \beta_1 \cdot y'(b) = B, \end{array}\right\}$$

$$(|\alpha_0| + |\alpha_1| \ne 0, \ |\beta_0| + |\beta_1| \ne 0,$$

ko'rinishdagi tenglama

## FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR


1. M.S.Saloxitdinov, G.N.Nasriddinov. Oddiy differensial tenglamalar. T. O‘qituvchi.1992y.

2. K.B.Boyqo‘ziev. Differensial tenglamalar.T.O‘qituvchi .1988y.

3. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Высшая школа. 1967 г.

4. Еругин Н.П. и дрг. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений, Головное изд. Киев. 1974

5. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения, изд.«Мир», М., 1970.

6. Islomov B.I., Abdullaev O.X. Differensial tenglamalari fanidan masalalar to`plami. Toshkent. “Bayoz”. 2012. 216 bet.

7. Филипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.:Наука, 1979

8. Жўраев Т. ва бошқ. Олий математика асослари. 2-қисм. Т. «Ўзбекистон», 1999, 304 б.

9.Turgunbayev R., Ismailov Sh, Abdullayev O., “Differensial tenglamalar kursidan misol va masalalar to‘plami”. T.: TDPU. 2007

10. Oppoqov Y. P. va bosh. Oddiy differensial tenglamalardan misol va masalalar to‘plami. T.:Yangi avlod. 2006.

11. Гусак А.А. Математический анализ и дифференциалние уравнения. М.: "Тетра системс" . 1998 г.

12. Morris Tenebout, Harry Pollard. Ordinary Differential Equations, Birkhhauzer. Germane, 2010.

13. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений . М., Дом Книга. URSS. 2006.472 с.

14. Эльгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационные исчисление. М.Дом Книга. URSS. 2006.312 с

15. Флиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальнқм уравнениям. Ижевск: Изд-во РХД.2000.175 с.

16. Ернестович Е.А. Дифференциальные уравнения. М.:Дом Книга. 2006 г.

17. Романко В.К. Курс дифференциалных уравнений и вариационного исчисление. М.: ЛБЗ. 2002 г.





18. Агафонов С.А. Дифференциальные уравнения. М.: МГТУ имени Н.Е.Баумана 2006 г.

19. James.C.Robinson. An Introduction No Ordinary Differential Equations. Cambridge. 2004.

## MUNDARIJA





## QAYDLAR UCHUN