D.M.Maxmudova, B.R.Xanimqulov
B.Z.Usminov, Z.Bozorov

EHTIMOLLAR NAZARIYASI

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TALIM VAZIRLIGI

CHIRCHIQ DAVLAT PEDAGOGIKA UNIVERSITETI

D.M.Maxmudova, B.R.Xanimqulov
B.Z.Usminov, Z.Bozorov

EHTIMOLLAR NAZARIYASI

O'QUV QO'LLANMA

Toshkent
«Yangi chirchiq book»
2022

UO'K: 519.2
KBK: 22.171
M-32

D.M.Maxmudova, B.R.Xanimqulov, B.Z.Usminov, Z.Bozorov / Ehtimollari nazariyasi. / O'quv-qo'llanma /– Toshkent: «Yangi chirchiq book», 2022. – 146 b.

O'quv qo'llanmada"Ehtimollar nazariyasi" kursining ehtimollar nazariyasi va matematik statistika bo'limlariga oid asosiy tushuncha va tasdiqlar yoritilgan bo'lib, unda maruza va amaliy mashg'ulotlarini o'z ichiga olgan ma'lumotlar keltirilgan. Mavzular bo'yicha mustaqil ishi uchun topshiriqlar va ularni yechilish usullari hamda talabalar uchun foydali bir qator tavsiyalar berilgan.

Qo'llanma oliy ta'lim muassalarining matematika, fizika va astranomiya o'qitish metodikasi talabalari, aspirantlar, matematika o'qituvchilari hamda mazkur fan yo'nalishida ilmiy tadqiqot izlanishlarini olib borayotgan ilmiy xodimlar uchun mo'ljallangan.

Taqrizchilar: f-m.f.n.dotsent, B.Tadjibaev (O'zMU)
dots. I.Q. Seyitov (ChDPI)

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi Chirchiq davlat pedagogika instituti kengashining 2022yil 9 dekabrdagi5-sonli qaroriga asosan 60110600 – Matematika va informatika hamda 60110700 – Fizika va astronomiya ta'lim yo'nalishlari bo'yicha tahsil olayotgan talabalar uchun o'quv qo'llanma sifatida nashr qilishga tavsiya etilgan.

O'quv qo'llanma O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2022-yil 09-sentyabrdagi 302-sonli buyrug'iga asosan nashr etishga ruxsan berilgan (Ro'yxatga olish raqami 302-1023)

ISBN 978-9943-9396-6-0

SO'Z BOSHI

Bugungi kunda ta'lim tizimida fan va innovatsiya faoliyatining yutuqlaridan keng foydalanish, jamiyat va davlat hayotining barcha sohalarini barqaror rivojlantirish mamlakatning munosib kelajagini yaratishning muhim omili bo'lib bormoqda. Mamlakatimizda ilg'or xorijiy tajribalar asosida uzluksiz ta'lim tizimi uchun o'quvchilarda o'quv-bilish kompetensiyalarini shakllantirishni nazarda tutuvchi umumiy o'rta ta'lim tizimida zamonaviy kompetensiyali yondashuvlarni ishlab chiqishni ta'minlashga qaratilgan islohotlar natijasida o'quvchilarda o'quv-bilish kompetensiyalarini shakllantirishning zamonaviy ta'lim mazmunini modernizatsiyalash, ularning ichki imkoniyatlarini ro'yobga chiqarishga imkon beruvchi zarur shart-sharoitlar yaratishga yo'naltirilgan ta'lim muhitini yaratish bo'yicha bir qator ishlar amalga oshirilmoqda. Uzluksiz ta'lim tizimida matematika fanlari alohida o'rin tutganligi bois, bu fanlarni o'qitishga qaratilgan asosiy e'tibor har doim o'z dolzarbligini saqlab kelmoqda.

O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2018 yil 5 sentyabrdagi "Xalq ta'limini boshqarish tizimini takomillashtirish bo'yicha qo'shimcha chora-tadbirlar to'g'risida"giPF-5538-son, 2019 yil 29 apreldagi "O'zbekiston Respublikasi Xalq ta'limi tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to'g'risida"gi PF-5712-son farmonlari, 2018 yil 5 sentabrdagi "Xalq ta'limi tizimiga boshqarishning yangi prinsiplarini joriy etish chora-tadbirlari to'g'risida"gi PQ-3931-son qarorida belgilangan vazifalarni bajarishda ushbu o'quv qo'llanma muayyan darajada xizmat qiladi deb o'ylaymiz.

Mualliflar

I BOB. ASOSIY TUSHINCHALAR VA EHTIMOLLAR NAZARIYASINING TEOREMALARI

1.1-§. Ehtimollar nazariyasining predmeti

Reja

1. Tasodifiy hodisalar va ularning klassifikatsiyasi
2. Hodisalar ustida amallar

Ehtimollar nazariyasi "tasodifiy tajribalar", ya'ni natijasini oldindan aytib bo'lmaydigan tajribalardagi qonuniyatlatni o'rganuvchi matematikfandir. Bunda shunday tajribalar qaraladiki, ularni o'zgarmas (ya'ni, birxil) shartlar kompleksida hech bo'lmaganda nazariy ravishda ixtiyoriysonda takrorlash mumkin, deb hisoblanadi. Bunday tajribalar har biriningnatijasi tasodifiy hodisa ro'y berishidan iboratdir. Insoniyat faoliyatiningdeyarli hamma sohalarida shunday holatlar mavjudki, u yoki bu tajribalarni bir xil sharoitda ko'p matra takrorlash mumkin bo'ladi. Ehtimollar nazariyasini sinovdan-sinovga o'tishida natijalari turlicha bo'lgan tajribalar qiziqtiradi. Biror tajribada ro'y berish yoki bermasligini oldindan aytibbo'lmaydigan hodisalar *tasodifiy hodisalar* deyiladi. Masalan, tanga tashlash tajribasida har bir tashlashga ikki tasodifiy hodisa mos keladi: tanganing gerb tomoni tushishi yoki tanganing raqam tomoni tushishi. Albatta, bu tajribani bir marta takrorlashda shu ikki tasodifiy hodisalardan faqat bittasigina ro'y beradi.

Tasodifiy hodisalarni biz tabiatda, jamiyatda, ilmiy tajribalarda, sport va qimor o'yinlarida kuzatishimiz mumkin. Umumlashtirib aytish mumkinki, tasodifiyat elementlarisiz rivojlanishni tasavvur qilish qiyindir. Tasodifiyatsiz umuman hayotning va biologik turlarning yuzaga kelishini, insoniyat tarixini, insonlarning ijodiy faoliyatini, sotsial-iqtisodiy tizimlarning rivojlanishini tasavvur etib bo'lmaydi. Ehtimollar nazariyasi esa aynan mana shunday tasodifiy bog'liqliklarning matematik modelini tuzish bilan shug'illanadi. Tasodifiyat insoniyatni doimo qiziqtirib kelgandir. Shu sababli ehtimollar nazariyasi boshqa matematik fanlar kabi amaliyot talablariga mos ravishda rivojlangan. Ehtimollar nazariyasi boshqa matematik

fanlardan farqli o'laroq nisbatan qisqa, ammo o'ta shijoatlik rivojlanish tarixiga ega.

Endi qisqacha tarixiy ma'lumotlarni keltiramiz. Ommaviy tasodifiy hodisalarga mos masalalarni sistematik ravishda o'rganish va ularga mos matematik apparatning yuzaga kelishi XVII asrga to'g'ri keladi. XVII asr boshida, mashhur fizik Galiley fizik o'lchashlardagi xatoliklarni tasodifiy debhisoblab, ularni ilmiy tadqiqot qilishga uringan. Shu davrlarda kasallanish, o'lish, baxtsiz hodisalar statistikasi va shu kabi ommaviy tasodifiy hodisalardagi qonuniyatlarni tahlil qilishga asoslangan sug'urtalanishning umumiy nazariyasini yaratishga ham urinishlar bo'lgan. Ammo, ehtimollar nazariyasi matematik ilm sifatida murakkab tasodifiy jarayonlarni o'rganishdan emas, balki eng sodda qimor o'yinlarini tahlil qilish natijasida yuzaga kela boshlagan. Shu boisdan ehtimollar nazariyasining paydo bo'lishi XVII asr ikkinchi yarmiga mos keladi va u Paskal (1623 -1662), Ferma (1601-1665) va Gyuygens (1629-1695) kabi olimlarning qimor o'yinlarini nazariyasidagi tadqiqotlari bilan bog'liqdir. Ehtimollar nazariyasi rivojidagi katta qadam Yakov Bernulli (1654-1705) ilmiy izlanishlari bilan bog'liqdir. Unga, ehtimollar nazariyasining eng muhim qonuniyati, deb hisoblanuvchi "katta sonlar qonuni" tegishlidir. Ehtimollar nazariyasi rivojidagi yana bir muhim qadam de Muavr (1667-1754) nomi bilan bog'liqdir. Bu olim tomonidan normal qonun (yoki normal taqsimot) deb ataluvchi muhim qonuniyat mavjudligi sodda holda asoslanib berildi. Keyinchalik, ma'lum bo'ldiki, bu qonuniyat ham, ehtimollar nazariyasida muhim rol o'ynar ekan. Bu qonuniyat mavjudligini asoslovchi teoremalar "markaziy limit teoremalar" deb ataladi. Ehtimollar nazariyasi rivojlanishida katta hissa mashhur matematik Laplasga (1749 -1827) ham tegishlidir. U birinchi bo'lib ehtimollar nazariyasi asoslarini qat'iy va sistematik ravishda ta'rifladi, markaziy limit teoremasining bir formasini isbotladi (Muavr-Laplas teoremasi) va ehtimollar nazariyasining bir necha tadbiqlarini keltirdi. Ehtimollar nazariyasi rivojidagi yetarlicha darajadaoldinga siljish Gauss (1777-1855) nomi bilan bog'liqdir. U normalqonuniyatga yanada umumiy asos berdi va tajribadan olingan sonli ma'lumotlarni qayta ishlashning muhim usuli – "kichik kvadratlar usuli" ni yaratdi. Puasson (1781-1840) katta sonlar qonunini umumlashtirdi va ehtimollar nazariyasini o'q uzish masalalariga qo'lladi. Uning nomi bilan ehtimollar nazariyasida katta ro'l o'ynovchi taqsimot qonuni nomlangandir.

XVII va XIX asrlar uchun ehtimollar nazariyasining keskin rivojlanishi va u bilan har tomonlama qiziqish xarakterlidir. Keyinchalik ehtimollar nazariyasi rivojiga Rossiya olimlari V.Ya. Bunyakovskiy (1804-1889), P.L. Chebishev (1821-1894), A.A. Markov (1856-1922), A.M. Lyapunov (1857-1918), A.Ya. Xinchin (1894-1959), V.I. Romanovskiy (1879-1954), A.N. Kolmogorov (1903-1987) va ularning shogirdlari bebaho hissa qo'shdilar. O'zbekistonda butun dunyoga taniqli Sarimsokov (1915-1995) va S.X. Sirojiddinov (1920-1988) larning muhim rollarini alohida ta'kidlab o'tish joizdir.

Tasodifiy hodisalar, ularning klassifikatsiyasi

Dastlab ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri "tasodifiy hodisa" tushunchasini keltiramiz. Natijasini oldindan aytib bo'lmaydigan tajriba o'tkazilayotgan bo'lsin. Bunday tajribalar ehtimollar nazariyasida tasodifiy deb ataladi.

Tasodifiy hodisa(yoki hodisa) deb, tasodifiy tajriba natijasida ro'y berishi oldindan aniq bo'lmagan hodisaga aytiladi.

Hodisalar, odatda, lotin alifbosining bosh harflari A, B, C, ...lar bilan belgilanadi.

Tajribaning har qanday natijasi elementar hodisa deyiladi va ωorqali belgilanadi.

Tajriba natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha elementar hodisalar to'plami elementar hodisalar fazosi deyiladi va Ω orqali belgilanadi.

1-misol. Tajriba nomerlangan kub(o'yin soqqasi)ni tashlashdan iborat bo'lsin. U holda tajriba 6 elementar hodisadan hodisalarω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, $\omega_6$lardan iborat bo'ladi. $\omega_i$hodisa tajriba natijasida i (i=1,2,3,4,5,6) ochkotushishini bildiradi. Bunda elementar hodisalar fazosi: Ω=(1,2,3,4,5,6).

Tajriba natijasida albatta ro'y beradigan hodisaga*muqarrar hodisa*deyiladi. Elementar hodisalar fazosi muqarrar hodisaga misol bo'la oladi.

Aksincha, umuman ro'y bermaydigan hodisaga *mumkin bo'lmagan* hodisa deyiladi va u Ø orqali belgilanadi.

1-misolda keltirilgan tajriba uchun quyidagi hodisalarni kiritamiz:

A={5 raqam tushishi};

B={juft raqam tushishi};

C={7 raqam tushishi};

D={butun raqam tushishi};

Bu yerda Ava Bhodisalar tasodifiy, C hodisa mumkin bo'lmagan va Dhodisa muqarrar hodisalar bo'ladi.

Hodisalar ustida amallar

Tasodifiy hodisalar orasidagi munosabatlarni keltiramiz:

AvaB*hodisalar yig'indisi*deb, Ava Bhodisalarning kamida bittasi(ya'ni yokiA, yokiB, yokiAva B birgalikda) ro'y berishidan iborat$C=A\cup B$ $(C=A+B)$ hodisaga aytiladi.

A va B *hodisalar ko'paytmasi* deb, A va B hodisalar ikkilasi ham(ya'ni A va B birgalikda) ro'y berishidan iborat$C=A\cap B$ $(C=A*B)$ hodisaga aytiladi.

AhodisadanBhodisaning ayirmasi deb, A hodisa ro'y berib, Bhodisa ro'y bermasligidan iborat $C=A\backslash B$ $(C=A-B)$ hodisaga aytiladi.

Ahodisaga *qarama-qarshi*$\bar{A}$hodisa faqat va faqat A hodisa ro'y bermaganda ro'y beradi(ya'ni $\bar{A}$hodisa A hodisa ro'y bermaganda ro'y beradi).$\bar{A}$niAuchun teskari hodisa deb ham ataladi.

AgarA hodisa ro'y berishidan B hodisaning ham ro'y berishi kelib chiqsaAhodisa Bhodisani ergashtiradi deyiladi va A⊆B ko'rinishida yoziladi.

Agar A⊆B va B⊆A bo'lsa, u holda AvaBhodisalar teng(teng kuchli) hodisalar deyiladi va A=B ko'rinishida yoziladi.

1.2- §.Ehtimollar nazariyasi haqida dastlabki tushunchalar.Ehtimollikning ta'riflari

Reja

1. Ehtimollikning statistik ta'rifi.
2. Ehtimollikning klassik ta'rifi.
3. Kombinatorikaning ba'zi elementlari.

Ehtimollikning statistik ta'rifi. A hodisa n ta bog'liqsiz tajribalarda n_A marta ro'y bersin. n_A son A hodisaning chastotasi, $\frac{n_A}{n}$ munosabat esa Ahodisaning nisbiy chastotasi deyiladi.

Nisbiy chastotaning statistik turg'unlik xossasi deb ataluvchi xossasi mavjud, ya'ni tajribalar soni oshishi bilan nisbiy chastotasi ma'lum qonuniyatga ega bo'ladi va biror son atrofida tebranib turadi.

Misol sifatida tanga tashlash tajribasini olaylik. Tanga A={Gerb}tomoni bilan tushishi hodisasini qaraylik. Byuffon va K.Pirsonlar tomonidan o'tkazilgan tajribalar natijasi quyidagi jadvalda keltirilgan.

Tajriba o'tkazuvchi	Tajribalar soni, n	Tushgan gerblar soni, n_A	Nisbiy chastota, $\frac{n_A}{n}$
Byuffon	4040	2048	0.5080
K.Pirson	12000	6019	0.5016
K.Pirson	24000	12012	0.5005

Jadvaldan ko'rinadiki,n ortgani sarin_A/n nisbiy chastota ½=0.5 ga yaqinlashar ekan.

Agar tajribalar soni etarlicha ko'p bo'lsa va shu tajribalarda biror A hodisaning nisbiy chastotasi biror o'zgarmas son atrofida tebransa, bu songa Ahodisaning *statistik ehtimolligi* deyiladi.

Ahodisaning ehtimolligi $P(A)$simvol bilan belgilanadi. Demak $\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n} = P(A)$yoki yetarlicha katta n lar uchun $\frac{n_A}{n} \approx P(A)$.

Statistik ehtimollikning kamchiligi shundan iboratki, bu yerda statistik ehtimollik yagona emas. Masalan, tanga tashlash tajribasida ehtimollik sifatida nafaqat 0.5, balki 0.49 yoki 0.51 ni ham olishimiz mumkin. Ehtimollikni aniq hisoblash uchun katta sondagi tajribalar o'tkazishni talab qiladi, bu esa amaliyotda ko'p vaqt va xarajatlarni talab qiladi.

Statistik ehtimollik quyidagi xossalarga ega:

1. $0\leq P(A) \leq 1$;
2. P(Ø)=0;
3. P(Ω)=1;
4. $A\cdot B = \emptyset$ bo'lsa, u holda P(A+B)=P(A)+P(B);

Ehtimollikning klassik ta'rifi. Ω chekli n ta teng imkoniyatli elementar hodisalardan tashkil topgan bo'lsin.

A hodisaning ehtimolligi deb, A hodisaga qulaylik yaratuvchi elementar hodisalar soni k ning tajribadagi barcha elementar hodisalar soni n ga nisbatiga aytiladi.

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{k}{n} \quad (1)$$

Klassik ta'rifdan foydalanib, ehtimollik hisoblashda kombinatorika elementlaridan foydalaniladi. Shuning uchun kombinatorikaning ba'zi elementlarini keltiramiz. Kombinatirikada qo'shish va ko'paytirish qoidasi deb ataluvchi ikki muhim qoida mavjud.

$A=\{a_1,a_2,\dots a_n\}$ va $B=\{b_1,b_2,\dots b_m\}$ chekli to'plamlar berilgan bo'lsin.

Qo'shish qoidasi: agar $A$to'plam elementlari soni n va B to'plam elementlari soni m bo'lib, $A\cdot B$=Ø (A va B to'plamlar kesishmaydigan) bo'lsa, u holda $A+B$ to'plam elementlari soni $n+m$ bo'ladi.

Ko'paytirish qoidasi:A va B to'plamlardan tuzilgan barcha (a_i,b_j) juftliklar to'plami C=$\{(a_i,b_j): i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}\}$ ning elementlari soni $n\cdot m$ bo'ladi.

n ta elementdan m $(0< m \leq n)$ tadan tanlashda ikkita sxema mavjud: qaytarilmaydigan va qaytariladigan tanlashlar. Birinchi sxemada olingan elementlar qayta olinmaydi (orqaga qaytarilmaydi), ikkinchi sxemada esa har bir olingan element har qadamda o'rniga qaytariladi.

I. Qaytarilmaydigan tanlashlar sxemasi

Guruhlashlar **soni:** n ta elementdan m $(0< m \leq n)$ tadan guruhlashlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (2)$$

O'rinlashtirishlar soni: n ta elementdan m $(0< m \leq n)$ tadan o'rinlashtirishlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (3)$$

O'rin almashtirishlar soni: n ta elementdan n tadan o'rinlashtirish o'rin almashtirish deyiladi va u quyidagicha hisoblanadi:

$$P_n = n! \quad (4)$$

II. Qaytariladigan tanlashlar sxemasi

Qaytariladigan guruhlashlar soni: n ta elementdan m ($0< m \leq n$) tadan qaytariladigan guruhlashlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m \qquad (5)$$

.*Qaytariladigan o'rinlashtirishlar soni*: n ta elementdan m ($0< m \leq n$) tadan qaytariladigan o'rinlashtirishlari soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$\bar{A}_n^m = n^m \qquad (6)$$

Qaytariladigan o'rin almashtirishlar soni: k hil n ta elementdan iborat to'plamda 1-element $n_1$marta, 2-element $n_2$marta,…, k- element $n_k$marta qaytarilsin va$n_1+n_2+....+n_k=n$ bo'lsin, u holda n ta elementdan iborat o'rin almashtirish$P_n(n_1,n_2,....,n_k)$orqali belgilanadi va u quyidagichahisoblanadi:

$$P_n(n_1,n_2,....,n_k)=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot...\cdot n_k!}. \qquad (7)$$

Amaliy mashg'ulot uchun yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

2.1-masala. Ichida 9 ta oq, malla va ko'k shar boyalgan qutida 4 ta oq va 3 ta malla shar bor. Qutidan rangi ko'k bo'lmagan shar olish ehtimolini toping.

Yechish. A hodisa olingan sharning oq b'olishini, B hodisa esa uning malla rangli bo'lishi hodisasini ifoda qilsin. Olingan sharning ko'k rangli bo'lmasligi uning oq yoki malla rangli bo'lishini bildiradi. Ehtimolning ta'rifiga ko'ra:

$$P(A) = \frac{4}{9}, P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Endi ko'k rangli bo'lmagan shar chiqish ehtimolini qo'shish teoremasiga asosan topamiz:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{7}{9}.$$

2.2-masala. Guruhda 16 ta talaba bor. Ularning 12 tasi qiz bolalardir. Tasodifan ajratilgan 7 ta talabalar orasida 5 ta qiz bola bo'lishi ehtimoli topilsin.

Yechish. Ehtimollikning klassik ta'rifiga ko'ra

$$P(C) = \frac{C_{12}^5 \cdot C_4^2}{C_{16}^7} = 0.27.$$

2.3-masala. Idishda 9 ta yaroqli va 1 ta yaroqsiz detal bor edi. Idishdan tavakkaliga 3 ta detal olindi. Bu detallarning uchalasining ham yaroqli detal bo'lishi hodisasining ehtimolini toping.

Yechish. Ehtimollikning klassik ta'rifiga ko'ra

$$P(D) = \frac{C_9^3}{C_{10}^3} = \frac{9!}{3!\cdot 6!} \cdot \frac{3!\cdot 7!}{10!} = 0{,}7.$$

2.4-misol. Telefon nomerini terayotganda abonent oxirgi ikki raqamni eslay olmadi. U bu raqamlar har xil ekanligini eslab, ularni tavakkaliga terdi. Telefon nomeri to'g'ri terilganligi ehtimolligini toping.

Oxirgi ikki raqamni A_{10}^2usul bilan terish mumkin. A={telefon nomeri to'g'ri terilgan} hodisasini kiritamiz. A hodisa faqat bitta elementdan iborat bo'ladi(chunki kerakli telefon nomeri bitta bo'ladi). Shuning uchun klassik ta'rifga ko'ra $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{k}{n} = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{9\cdot 10} = \frac{1}{90} \approx 0.011$.

2.5-misol. 100 ta lotoreya biletlarlaridan bittasi yutuqli bo'lsin. Tavakkaliga olingan 10 lotoreya biletlari ichida yutuqlisi bo'lishi ehtimolligini toping.

100 ta lotoreya biletlaridan 10 tasini C_{100}^{10}usul bilan tanlash mumkin. B={10 lotoreya biletlari ichida yutuqlisi bo'lishi } hodisasi bo'lsa, N(B)=$C_1^1 \cdot C_{99}^9$ va $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{C_1^1\cdot C_{99}^9}{C_{100}^{10}} = \frac{1}{10} = 0.1$.

2.6-misol. Pochta bo'limida 6 xildagi otkritka bor. Sotilgan 4 ta otkritkadan: a) 4 tasi bir xilda; b) 4 tasi turli xilda bo'lishi ehtimolliklarini toping.

6 xil otkritkadan 4 tasini $\bar{C}_6^4$usul bilan tanlash mumkin. a) A={4 ta bir xildagi otkritka sotilgan} hodisasi bo'lsin. A hodisaning elementar hodisalari soni otkritkalar xillari soniga teng, ya'ni N(A)=6. Klassik ta'rifga ko'ra $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{6}{\bar{C}_6^4} = \frac{6}{126} = \frac{1}{21}$ bo'ladi. b) B={4 ta har xil

otkritka sotilgan} hodisasi bo'lsin, u holda N(B)=C_6^4ga teng va $P(A)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{C_6^4}{C_6^4}=\frac{15}{126}=\frac{5}{42}$.

Klassik ehtimollik quyidagi xossalarga ega:

1. $0\leq P(A)\leq 1$;
2. $P(\emptyset)=0$;
3. $P(\Omega)=1$;
4. Agar $A\cdot B=\emptyset$ bo'lsa, u holda $P(A+B)=P(A)+P(B)$;
5. $\forall$ A,B$\in \Omega$ uchun $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$

Mustaqil ishlash uchun misollar

1. Qutidabirxilo'lchamdagi 10ta sharbor. Ularning 3tasiqizil, qolganlariko'k.Tavakkaliga olingansharningko'kchiqishehtimolinitoping.

2. Talaba programmadagi 20 savoldan 18tasinibiladi.Talabaningimtihonoluvchitaklifetgan 3tasavolnihambilishehtimolinitoping.

3. Qutida 6ta qora, 9ta oqsharbo'lib, undantavakkaliga 4 ta sharolindi. Olingan 4 ta sharning 3 tasioqbo'lishehtimolinitoping.

4.O'yinkubigitashlanganda toqsonchiqishehtimolitopilsin.

5.Lotoo'yiniishtirokchilari 1dan 100gacha nomerlanganlotosharlarijoylashtirilganqopdantavakkaliga sharolishganda birinchison 5ga karralibo'lmasligiehtimolinitoping.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Hodisalarning turlarini ayting va ularga doir misollar keltiriing.
2. Elementar hodisa ta'rifini bering.
3. Tasodifiy hodisalarning turlarini ayting.
4. Ehtimolning klassik ta'rifini keltiring.
5. Kombinitorika haqida tushuncha bering.

1.3-§. Geometrik ehtimollik.

Reja

1.

Yuqorida aytilganidek,tajribanatijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan elementar hodisalar soni cheksiz bo'lsa, bu holda ehtimolning klassik ta'rifidan foydalanish mumkin emas. Masalan, l kesma L kesmaning bir qismi bo'lsin. L kesmaga tasodifiy tarzda nuqta qo'yilsin. Bunda qo'yilgan nuqta L kesmaning ixtiyoriy nuqtasida bo'lishi mumkin, nuqtaning l kesmaga tushish ehtimoli uning uzunligiga proporsional bo'ladi va l ning L kesmada qanday holatda joylashganligiga bog'liq bo'lmaydi deb faraz qilinsa, nuqtaning l kesmaga tushish ehtimolini ehtimolning klassik ta'rifi bilan aniqlash mumkin emas, bunday holatlardagi ehtimolning klassik ta'rifi kamchiliklarini yo'qotish uchun geometrik ehtimollik tushunchasi kiritiladi.

Yuqoridagi misolda nuqtaning l kesmaga tushish ehtimoli

$$P=\frac{l(uzunligi\ )}{L(uzunligi\ )}$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Misol.

Tasodifiy tarzda tashlangan nuqta muntazam *ABC* uchburchakning *A* uchidan chiqqan mediananing ixtiyoriy nuqtasiga tushadi. Bu nuqtaning *AO* (*O-ABC* uchburchak medianalarining kesishish nuqtasi) kesmaga tushish ehtimoli topilsin.

Yechish. Ma'lumki, uchburchak medianalari kesishish nuqtasida uchburchak uchidan boshlab hisoblanganda 2:1 nisbatda bo'linadi. Shu sababli, $AO=\frac{2}{3}m_A$ (m_A- *A* uchdan chiqqan mediana uzunligi). U holda $P=\frac{2}{3}$.

Biror tekislikda yassi G soha berilgan bo'lib, bu soha yassi g sohani o'z ichiga olsin. G sohaga tavakkaliga tashlangan nuqtaning g sohaga tushish ehtimolini toppish talab etilsin. Bu erda Ω elementar hodisalar fazosi G ning barcha nuqtalaridan iborat. Shuning uchun, bu holda ham klassik ta'rifdan foydalana olmaymiz.

Tashlangan nuqtaning g sohaga tushish ehtimoli uning yuziga proporsional bo‘lib, g soha G sohaning qayerida joylashganligiga bog‘liq bo‘lmasin. Bu shartlarda qaralayotgan hodisaning ehtimoli

$$P = \frac{g(yuzi)}{G(yuzi)}$$

formula yordamida aniqlanadi.

Misol.

Radiusi R bo‘lgan doira ichigatavakkaliga nuqtatashlangan. Tashlangan nuqta doiraga ichkichizilgan:

a)kvadrat ichiga;

b) muntazamuchburchakichigatushish ehtimollarini toping.

Nuqtaning yassi figuraga tushish ehtimoli bu figuraning yuzigaproporsional bo‘lib, uning doiraningqayerida joylashishiga esa bog‘liq emasdebfaraz qilinadi.

Yechish.

a) $P=\frac{kvadratning\ \ yuzi}{doiraning\ \ yuzi} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}.$

b) $P=\frac{uchbur chak\ yuzi}{doiraning\ \ yuzi} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}.$

1-eslatma. Yuqoridagi keltirilganta’riflar geometrik ehtimollar uchun xususiy hollar edi. Agar sohaning o‘lchovini *mes* deb belgilasak, u holdanuqtaning G sohaning qismi bo‘lgan g sohagatushish ehtimoli

$$P= \frac{mes\,(g)}{mes\,(G)}$$

formula bilan hisoblanadi.

2-eslatma. Ehtimolning klassikta’rifiga asosan muqarrar (mumkin bo‘lmagan) hodisaning ro‘y berish ehtimoli bir (nol)ga teng; teskari tasdiqham o‘rinli (masalan, ehtimoli nolga teng bo‘lgan hodisamumkin bo‘lmagan hodisadir). Ehtimolning geometrikta’rifida esateskaritasdiq o‘rinli emas.Masalan, G sohagatashlangan nuqtaning$G$sohaning bitta aniq nuqtasiga tushish ehtimoli nolga teng (isboti keyinchalik uzluksiztasodifiy miqdorlar tushunchasida beriladi), ammo bu hodisa ro‘y berishi mumkin, ya’ni bu hodisani mumkin bo‘lmagan hodisa deb ayta olmaymiz.

Tasodifiy hodisalar bo‘ysinadigan qonuniyatlarni bilish shu hodisalar rivojiningqanday kechishini avvaldan ko‘ra bilishgaimkon

beradi. Ehtimollar nazariyasifanining usullari hozirgidavrda amaliyotning turli sohalarida, jumladan iqtisodiyot sohasidaham kengvasamarali qo‘llanilmoqda.Tasodifiylik bilan bog‘liq bo‘lganmasalalar iqtisodiy jarayonlarnitadqiq etishda, bujarayonlarning kechishinibashorat qilishda,hamdama’qul iqtisodiyyechimlarqabul qilishda qo‘llaniladi.

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikafani usullari makro va mikro-iqtisodiyotni rejalashtirish va tashkil etishda, turli texnologik jarayonlarni tahlil etishda, mahsulot sifatini nazorat qilishda, ommaviy xizmat ko‘rsatish jarayonini tahlil qilishda va boshqa ko‘plab sohalarda o‘z tadbiqlarini topmoqda.

3-eslatma. Hodisaning statistikta’rifiham noqulay, chunki bittahodisaning ro‘y berish chastotalari ketma-ketligi turlitajribalardaturlicha bo‘ladi. Bundantashqari, amalda biz chastotalar ketma-ketligini emas,balki uning chekli elementlarini olamiz, chunkihamma ketma-ketlikni olib bo‘lmaydi. Shusababli, ehtimollarnazariyasini aksiomatik asosdaqurishmaqsadga muvofiq hisoblanadi.

Amaliy mashg’ulot uchun yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

3.1-masala. Bir-biridan 6 *sm* masofada yotgan parallel to’g’ri chiziqlar bilan bo’lingan tekislikka radiusi 1 *sm* bo’lgan doira tavakkaliga tashlangan. Doira to’g’ri chiziqlarning hech birini kesmaslik ehtimolini toping. Nuqtaning kesmaga tushish ehtimoli kesmaning uzunligiga proporsional bo’lib, uning joylashishiga bog’liq emas deb faraz qilinadi.

Yechish. Ehtimollikning geometrik ta’rifiga ko’ra doira diametri uzunligini parallel to’g’ri chiziqlar orasidagi masofa uzunligiga nisbatini hisoblash talab qilinadi. Demak $P=\frac{6-2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$

3.2-masala. Tekislikka radiuslari mos ravishda 5 sm va 10 sm bo’lgan ikkita konsentrik aylana chizilgan. Katta doiraga tavakkaliga tashlangan nuqtaning aylanalardan hosil bo’lgan halqaga ham tushish ehtimolini toping.

Yechish. $P = \frac{10^2-5^2}{10^2}$=0,75.

3.3-masala. OX o'qining uzunligi L bo'lgan OA kesmasiga tavakkaliga $B(x)$ nuqta qo'yilgan. OB va BA kesmalarning kichigi 1/3 dan ortiq uzunlikka ega bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. $P = \frac{L/3}{L}$=1/3.

Mustaqil ishlash uchun misollar

1.Tanga 12000martatashlandi. Gerbtushishlarsoni6007ta. Gerb tushishlar sonini nisbiy chastotasini toping.

2. Tekshirishda100ta detal ichidan 6ta nostandart detal topildi. Nostandart detalningtopilish nisbiy chastotasi aniqlansin.

3. Ikki talabama'lum bir joyda soat 12^{00}va 13^{00} orasida uchrashishni kelishib olishdi. Birinchi kelgan ikkinchisini chorak soat kutadi va so'ngra ketadi. Agarhar bir talaba kelishvaqtini (soat 12^{00}va 13^{00}orasidagi) o'zlaritasodifiytanlashsa, ularning uchrashish ehtimolitopilsin.

4. Tekislikda bir-biridan2$a$masofada yotuvchiparallel to'g'ri chiziqlar o'tkazilgan. Tekislikka uzunligi2l(l<a) bo'lgan igna tavakkaliga tashlangan. Ignaning birorta to'g'ri chiziqni kesish ehtimolini toping.

5. Radiusi R bo'lgan doira ichiga tavakalliga nuqta tashlangan. Tashlangan nuqta doiraga ichki chizilgan:

a) muntazam oltiburchak ichiga.

b) muntazam o'n ikki burchak ichiga tushish ehtimolini toping.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Nisbiy chastotani tushuntiring.
2. Ehtimollikning statistik ta'rifini keltiring. Uning ehtimolning klassik ta'rifidan farqi nimada?
3. Nisbiy chastotaning turg'unlik xossasi nimadan iborat?
4. Geometrik ehtimol ta'rifini ayting.

Tavsiya etiladigan mustaqil ta'lim va referat mavzulari

1. Geometrik ehtimollikka doir misollar.
2. Ehtimollar nazariyasining aksiomatik qurilishi.

1.4-§. Hodisalar ustida amallar. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremalari. Shartli ehtimollik

Reja

1. Hodisalarni qo'shish va ko'paytirish.
2. Hech bo'lmaganda bitta hodisaning ro'y berish ehtimoli.
3. Hodisalarning birgalikda ro'y berish ehtimoli.
4. Shartli ehtimol.

Hodisalarni qo'shish va ko'paytirish. Kuzatilayotgan yoki ustida tajriba o'tkazilayotgan hodisa bir nechta hodisalarning natijasi, ya'ni bir nechta hodisalardanhech bo'lmaganda bittasining ro'y berishidan yoki bir nechta hodisalarning hammasi bir paytda ro'y berishidan va hakozolardan, iborat bo'lishi mumkin,bu esa kuzatilayotgan hodisani bilish uchun hodisalar ustida qo'shish yoki ko'paytirish amallarini bajarish demakdir. Shu sababli, quyida bu amallarning ta'rifini keltirib o'tamiz.

1-ta'rif. Ikki$A$va$B$hodisalarning$A+B$-yig'indisi (birlashmasi) deb, yoki$A$, yoki$B$ hodisaning, yoki ikkala hodisaning ham ro'y berishini bildiruvchi hodisaga aytiladi.

Masalan, mergan nishonga qarata ikkita o'q uzdi:A –birinchi o'qning nishonga tegishi,B -ikkinchi o'qning nishonga tegishi bo'lsa, $A+B$-birinchi o'qning, yoki ikkinchi o'qning, yoki ikkala o'qning ham nishonga tegishi bo'ladi.

Xususiy holda,A va$B$ hodisalar birgalikda bo'lmasa, u holda$A+B$hodisa ulardanfaqat bittasining (qaysi biriligining ahamiyati yo'q) ro'y berishini ifodalaydi.

2-ta'rif. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalarning $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ -yig'indisi (birlashmasi) deb, bu hodisalardankamida bittasining ro'y berishiga aytiladi.

Masalan, $A+B+C$ yig'indi, A va B, A va C, B va C yoki A, B va C hodisalardan birining ro'y berishini bildiradi.

Hech bo'lmaganda bitta hodisaning ro'y berish ehtimoli. Birgalikda bo'lmagan hodisalar yig'indisining ro'y berish ehtimolinitopish quyidagi teoremaga asoslanadi.

1-teorema. Agar A va B hodisalar birgalikda bo'lmasa, u holda $A+B$ hodisaning ro'y berish ehtimoli bu hodisalar ehtimollarining yig'indisigateng:

$$\mathbf{P(A+B)=P(A)+P(B)} \quad (1)$$

Isbot. n -tajribada mumkin bo'lganbarcha hodisalar soni;

m_1- A hodisa ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi hodisalar soni;

m_2- Bhodisa ro'yberishiga qulaylik tug'diruvchi hodisalar soni bo'lsin. Yoki A hodisa, yoki B hodisa ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi hodisalar soni m_1+m_2 ga teng bo'ladi. Bundan esa

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}$$

munosabatni hosil qilamiz. Agar $P(A)=\frac{m_1}{n}$, $P(B)=\frac{m_2}{n}$ ekanligini e'tiborga olsak, u holda:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Misol.

Qutida 6ta qizil, 8ta ko'kva 6ta oqshar bor. Qutidantasodifiy ravishda olingansharningrangli bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish. A hodisa-qutidan olingan sharning qizil bo'lishi; B hodisa-qutidan olingan sharning ko'k bo'lishi bo'lsin, u holda:

$$P(A)=\frac{3}{10},\ P(B)=\frac{2}{5},$$

A va B hodisalar birgalikda bo'lmaganligi sababli $P(A+B)$ehtimolni topish uchun 1-teoremani qo'llash mumkin:

$$P(A+B)=\frac{3}{10}+\frac{2}{5}=\frac{7}{10}.$$

3-ta'rif. Ikki A va B hodisalarning AB -ko'paytmasi (kesishmasi) deb, bu hodisalarning birgalikda (birpaytda) ro'y berishini bildiruvchi hodisaga aytiladi.

Masalan, mergan nishonga qarata ikkita o'q uzdi: A -birinchi o'qning nishonga tegishi, B -ikkinchi o'qning nishonga tegishi bo'lsa, AB -birinchi va ikkinchi o'qlarning nishonga tegishi bo'ladi.

4-ta'rif. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalarning $A_1 A_2 \ldots A_n$ - ko'paytmasi (kesishmasi) deb, bu hodisalarning birgalikda ro'y berishini bildiruvchihodisaga aytiladi.

5-ta'rif. Agar A hodisaning ro'y berishi B hodisaning ro'y berish ehtimolini o'zgartirmasava aksincha bo'lsa, A va B hodisalar erkli (bog'liqmas) hodisalar deyiladi.

Masalan, ikkita mergan turli nishongaqarata bittadan o'q uzdi: A -birinchi merganning nishonga tekkizishi, B -ikkinchi merganning nishonga tekkizishi bo'lsa, A va B hodisalar erkli (bog'liqmas) hodisalar bo'ladi.

6-ta'rif. Agar $A_1, A_2, \ldots, A_n$hodisalarning ixtiyoriy ikkitasi o'zaro erkli bo'lsa, u holda bu hodisalarjuft-jufti bilan erkli deyiladi.

Masalan, agar A va B, A va C,B va C hodisalar erkli bo'lsa, u holda A, B, C hodisalarjuft-jufti bilan erkli bo'ladi.

7-ta'rif. Agar $A_1, A_2, \ldots, A_n$hodisalar juft-jufti bilan erkli hamda har bir hodisava boshqa hodisalarning mumkin bo'lganko'paytmalari erkli bo'lsa, u holda $A_1, A_2, \ldots, A_n$-birgalikda erkli hodisalar deyiladi.

Masalan, A,B,C hodisalar birgalikda erkli bo'lsa, u holda A va B, A va C, B va C, A va BC, va AC, C va AB hodisalar erkli bo'ladi.

Hodisalarning birgalikda ro'y berish ehtimoli.

Agar $P(A/B)=P(A)$tenglik o'rinli bo'lsa, u holdaAhodisaBhodisaga bog'liq emas deyiladi va $A\perp B$orqali belgilanadi.

Agar$A\perp B$bo'lsa, u holda (2) formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A/B)=P(B)\cdot P(A).$$

A va B hodisalar *o'zaro bog'liq emas* deyiladi, agar

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

munosabat o'rinli bo'lsa.

Erkli hodisalarko'paytmasining ro'y berish ehtimolini topish quyidagi teoremagaasoslanadi.

2-teorema. Agar A va B erkli (bog'liqmas) hodisalar bo'lsa, u holda AB -ko'paytmaning ro'y berish ehtimoli hodisalar ehtimollarining ko'paytmasiga teng:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B). \quad (2)$$

Misol.

I va II to'plardan otilgan o'qlarning nishonga tegish ehtimollari mos ravishda $p_1=0{,}8$ va $p_2=0{,}9$ bo'lsin. Agar nishon yo'q bo'lishi uchun ikkala o'qning unga tegishi shart bo'lsa, nishonning yo'q bo'lish ehtimolini toping.

Yechish.A hodisa-I to'pdan otilgan o'qning nishonga tegishi; B hodisa-II to'pdan otilgan o'qning nishonga tegishi bo'lsin. Masala shartidan ko'rinib turibdiki, nishon yo'q bo'lishi uchun AB hodisa ro'y berishi kerak. To'plardan otilgan o'qlarning nishonga tegishi bir-biriga bog'liqmas. Shuning uchun A va B hodisalar erkli hodisalardir.

Demak, 2-teoremani qo'llash mumkin:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B) = 0{,}8\cdot 0{,}9 = 0{,}72\,.$$

Shartli ehtimol.

A va B hodisalar biror tajribadagi hodisalar bo'lsin.

B hodisaning A hodisa ro'y bergandagi *shartli ehtimolligi* deb,

$$\frac{P(A\cdot B)}{P(A)} (P(A)\neq 0) \quad (3)$$

nisbatga aytiladi. Bu ehtimollikni $P(B/A)$ orqali belgilaymiz.

Shartli ehtimollik ham Kolmogorov aksiomalarini qanoatlantiradi:

1. $P(B/A)\geq 0;$
2. $P(\Omega/A)=\frac{P(\Omega\cdot A)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1;$
3. Agar $B\cdot C=\emptyset$ bo'lsa, u holda

$$P((B+C)/A)=\frac{P((B+C)\cdot A)}{P(A)}=\frac{P(B\cdot A+C\cdot A)}{P(A)}=\frac{P(B\cdot A)+P(C\cdot A)}{P(A)}=$$
$$=\frac{P(B\cdot A)}{P(A)}+\frac{P(C\cdot A)}{P(A)}=P(B/A)+P(C/A) \text{ bo'ladi.}$$

Shartli ehtimollik formulasidan hodisalar ko'paytmasi ehtimolligi uchun ushbu formula kelib chiqadi:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B) \quad (4)$$

(2) tenglik ko'paytirish qoidasi(teoremasi) deyiladi.

Amaliy mashg'ulot uchun yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

4.1-masala. 50 ta sharcha 1 dan 50 gacha raqamlanib, xaltachaga solingan. Tavakkaliga olingan sharcha nomerining 3 ga yoki 19 ga karrali bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. A - "olingan sharchaning nomeri 3 ga karrali", B - "olingan sharchaning nomeri 19 ga karrali" hodisalari bo'lsin. Biz $A\cup B$ hodisaning ro'y berish ehtimolini topishimiz kerak. 50 gacha bo'lgan sonlar orasida 3 ga bo'linuvchilar 16 ta, 19 ga bo'linuvchilar 2 ta. A va B hodisalar birgalikda ro'y bermaydi, ya'ni $A\cap B=\emptyset$. Shunday qilib, jami 50 ta sondan 16+2=18 tasi yo 3 ga, yoki 19 ga bo'linadi. Demak, $P(A\cup B)=\frac{18}{50}=\frac{9}{25}$. A va B hodisalarning ro'y berish ehtimolliklari esa $P(A)=\frac{16}{50}=\frac{8}{25}$, $P(B)=\frac{2}{50}=\frac{1}{25}$. Xulosa: agar $A\cap B=\emptyset$ bo'lsa $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ bo'ladi.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{8}{25}+\frac{1}{25}=\frac{9}{25}.$$

4.2-masala. Kub tashlanganda A-"juft son tushadi" va B-"tushgan son 3 ga bo'linadi" hodisalari bog'liqmas ekanligini isbotlang.

Yechish. Juft sonli ochkolar uchta (2,4,6). Demak, $P(A)$=3/6=1/2. Barcha ochkolar ichida 3 ga bo'linuvchilar ikkita (3 va 6). Demak, $P(B)$=2/6=1/3. Juft va 3 ga bo'linuvchi son bitta, bu 6 soni. Demak, $P(A\cap B)=$ 1/6. Natijalarga qaraganda $P(A\cap B)$=1/6=1/2·1/3=$P(A)\cdot P(B)$ tenglik bajarilmoqda. Demak, A va B bog'liqmas hodisalar.

4.3-masala. Uch ovchi bir vaqtda va bir-biridan mustaqil ravishda bir quyonga qaratib faqat bittadan o'q uzishgan. Agar ovchilardan aqalli bittasi quyonga o'q tekkizgan bo'lsa, quyon otilgan bo'ladi. Har qaysi ovchining nishonga o'q tekkizish ehtimolligi 0,4 ga teng. Quyonning otilish ehtimolligini toping.

Yechish. Haqiqatda uchta erkli sinash o'tkazilmoqda. Har qaysi sinash ikki natijali: quyonga o'q tegdi, o'q tegmadi. A_k-"k-ovchi tekkizdi", $\overline{A_k}$-"k-ovchi tekkiza olmadi" hodisalari bo'lsin, bunda $k=\overline{1;3}$. Masalaning sharti bo'yicha $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 0{,}4$. U holda $P(\overline{A_1}) = P(\overline{A_2}) = P(\overline{A_3})$ =1-0,4=0,6. Biz $A_1 \cup A_2 \cup A_3$-"quyonga yo 1-ovchi, yoki 2-ovchi, yoki 3-ovchi tekkizdi" hodisasining ehtimolligini topishimiz kerak:

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)=1-P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3})= \quad 1-P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3})=1-0{,}6^3=0{,}784$.

4.4 - *masala*. Idishda 3 ta oq va 7 ta qora shar bor. Tavakkaliga ketma -ket bittadan 2 ta shar olinadi. Birinchi shar oq rangda bo'lsa ikkinchi sharning qora rangda bo'lishi ehtimolligini toping.

Bu misolni ikki usul bilan yechish mumkin:

1) A={birinchi shar oq rangda}, B ={ikkinchi shar qora rangda}. A hodisa ro'y berganidan so'ng idishda 2 ta oq va 7 ta qora shar qoladi. Shuning uchun $P(B/A)=\frac{7}{9}$.

2) (1) formuladan foydalanib, hisoblaymiz: $P(A)=\frac{3}{10}$, $P(A\cdot B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{30}$

Shartli ehtimollik formulasiga ko'ra: $P(B/A)=\frac{P(A\cdot B)}{P(A)}=\frac{7/30}{3/10}=\frac{7}{9}$.

Mustaqil ishlash uchun misollar

1. A_1, A_2, A_3 erkli hodisalarning ro'y berish ehtimollari mos ravishdap_1, p_2, p_3 ga teng bo'lsin.

a) faqat bitta hodisaning ro'y berish ehtimoli;

b) faqat ikkita hodisaning ro'y berish ehtimoli;

c) uchala hodisaning ro'y berish ehtimoli;

d)hechbo'lmaganda bittahodisaning ro'y berishehtimoli topilsin.

2. I va II to'plardan o'q otishda nishonga tekkizish ehtimollari mosravishda $p_1=0,75$ va $p_2=0,86$. Bir yo'la otishda to'plardan kamida birining nishonga tekkizish ehtimolini toping.

3. Qutida 5 ta oq, 8 ta qora shar bor. Qutidan qaytarilmasdan ikkita shar olindi. Olingan sharlarning turli rangda bo'lish ehtimolini toping.

4. Qutida 5 ta oq, 8 ta qora, 7 ta qizil shar bor. Qutidan qaytarilmasdan uchta shar olindi. Olingan sharlarning turli rangda bo'lish ehtimolini toping.

5. Javonda 10 ta kitob bo'lib, ulardan 4 tasi matematikaga oiddir. Tavakkaliga 3 ta kitob olinadi. Olingan kitoblardan hech bo'lmaganda bittasi matematikaga oidbo'lish ehtimoliqanday?

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Hodisalar yig'indisi va ko'paytmasi amallarini ta'riflang.
2. Qarama-qarshi hodisalar ta'rifini bering.
3. Erkli hodisalar ta'rifini bering.
4. Shartli ehtimol ta'rifini keltiring.
5. Ehtimollarni qo'shishteoremalarini ayting.
6. Ehtimollarni ko'paytirish teoremalarini keltiring.

1.5-§. To'la ehtimollik va Bayes formulalari

Reja

1. Hodisalarning to'la guruhi.
2. To'la ehtimol formulasi.
3. Bayes formulasi.

Hodisalarning to'la guruhi. Shu paytgacha biror bir hodisaning ro'y berish ehtimolini hisoblashda bu hodisaning ro'y berishi uchun sharoit yaratib beruvchi faktorlarni e'tibordan chetda qoldirdik. Amaliyotda esa bunday holatning uchrashi deyarli mumkin emas. Shu sababli, A hodisa ro'y berishiga ta'sir etuvchi va ma'lum bir shartlarga bo'ysinuvchi faktorlarni e'tiborga olgan holda uning ro'y berish ehtimolini hisoblaymiz. Buning uchun to'la guruhtashkil etuvchi hodisalar to'plamining ba'zi bir xossalarni ko'rib chiqamiz.

Ma'lumki, to'la guruhtashkil etuvchi hodisalar quyidagicha ta'riflanadi.

1-ta'rif. Agar tajriba natijasida $A_1, A_2,...,A_n$ -hodisalar to'plamidan hech bo'lmaganda bittasi ro'y bersa va ular juft-jufti bilan birgalikda bo'lmasa, u holda bu hodisalar to'plami to'la guruh tashkil etadi deyiladi.

Ta'rifga binoan, agar $A_1, A_2,...,A_n$ hodisalar to'la guruhtashkil etsa, u holda

$$A_1+A_2+....+A_n=\Omega,\ A_iA_j=\theta\quad (i\neq j)$$

munosabatlar o'rinlidir.

Misol.

Ikkita talaba biror sport normativini topshirmoqda. Bu sinovda: A_1 -faqat bitta talabaning normativni topshirishi; A_2 –ikkala talaba ham normativni topshirishi; A_3 -talabalarning ikkalasi ham normativni topshira olmasligi bo'lsa, bu hodisalar to'plami to'la guruh tashkil etadi.

To'la guruh tashkil etuvchi $A_1, A_2,...,A_n$ -hodisalar uchun xos bo'lgan quyidagi teoremani keltiramiz.

1-teorema. To'la guruhtashkil etuvchi $A_1, A_2,...,A_n$ - hodisalar ehtimollarining yig'indisi birga teng:

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1 \qquad (1)$$

Isbot. Ta'rifga asosan to'la guruhtashkil etuvchi hodisalardan hech bo'lmaganda birining ro'y berishi muqarrardir: muqarrar hodisaning ehtimoli esa birgateng bo'lgani uchun

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=1$$

Ta'rifga asosan to'la guruhda istalgan ikkita hodisa birgalikda emas, shuning uchun qo'shish teoremasiga ko'ra:

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

Hodisalar to'la guruhi tushunchasi yordamida qarama-qarshi hodisalarni quyidagicha ta'riflash ham mumkin.

2-ta'rif. Agar ikkita hodisa to'la guruh tashkil etsa u holda bu hodisalarga qarama-qarshi hodisalar deb ataladi.

Yuqoridagi 1-teoremaga asosan,qarama-qarshi hodisalar ehtimollarining yig'indisi birga teng:

$$P(A)+P(\bar{A})=1 \qquad (2)$$

Odatda, qarama-qarshi hodisalardan birining ehtimoli p orqali belgilansa, ikkinchisining ehtimoli q orqali belgilanadi. Shunday qilib, $p+q=1$.

Shuni ta'kidlab o'tamizki, ba'zan A hodisaning ehtimolini topishda avval $\bar{A}$ hodisaning ehtimolini hisoblash, keyin esa izlanayotganehtimolni quyidagi formula orqali topish qulaybo'ladi:

$$P(A)=1-P(\bar{A})(3)$$

Misol.

Qutida 20 ta detal bo'lib, ulardan 12 tasi standart. Tavakkaliga olingan 5 ta detal orasida kamida 1 standart detal bo'lishi ehtimolini toping.

Yechish. A - olingan detallar ichida kamida bittasi standart va $\bar{A}$ olingan detallar orasida bitta ham standart detal yo'q hodisalari qarama-qarshi hodisalardir.

Bunda $P(\bar{A})$ ehtimolni topish osonroq.

$$P(\bar{A})=\frac{m}{n}=\frac{C_8^5}{C_{20}^5}, P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{C_8^5}{C_{20}^5}.$$

To'la ehtimol formulasi. A hodisa to'la guruh tashkil etuvchi birgalikda bo'lmagan $B_1, B_2,...,B_n$-hodisalardan bittasining amalga oshish shartida ro'y berishi mumkin bo'lsin. $B_1, B_2,...,B_n$-hodisalardan har birining ro'y berish ehtimollari va $P_{B_i}(A)$, $(i=\overline{1,n})$ - shartli ehtimolliklar ma'lum bo'lsin. U holda, A hodisaning ro'y berish ehtimoli qanday topiladi savoliga quyidagi teorema javob beradi.

2-teorema. Agar A hodisa to'la guruh tashkil etuvchi, birgalikda bo'lmagan $B_1, B_2,...,B_n$ -hodisalardan bittasining amalga oshish sharti bilan ro'y bersa, u holda A hodisaning ro'y berish ehtimoli

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+...+P(B_n)P_{B_n}(A) \quad (4)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Isbot. Teorema shartiga asosan, A hodisa ro'y berishi uchun birgalikda bo'lmagan $AB_1, AB_2,...,AB_n$ hodisalardan bittasining ro'y berishizarurva yetarli, ya'ni $A=AB_1+AB_2+...+AB_n$

teorema shartiga asosan $\{AB_i\}$ $(i=\overline{1,n})$ hodisalar to'plami birgalikdabo'lmaganligiva

$$P(B_1A)=P(B_1)P_{B_1}(A),\ P(B_2A)=P(B_2)P_{B_2}(A),...,$$
$$P(B_nA)=P(B_n)P_{B_n}(A)$$

bo'lgani uchun

$$P(A)=P(AB_1+AB_2+...+AB_n)=P(AB_1)+P(AB_2)+...+P(AB_n)=$$
$$=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+...+P(B_n)P_{B_n}(A).$$

(4) formula «**to'la ehtimol formulasi**» deb ataladi.

Bayes formulasi. To'la ehtimol formulasi shartlarida A hodisaning ro'y berishida$B_1, B_2,...,B_n$–hodisalardanqaysi birining amalga oshishi oldindanma'lum bo'lmaganligisabali $B_1, B_2,...,B_n$ - hodisalar **gipotezalar** deb ataladi.

Faraz qilamiz,tajriba o‘tkazilgan bo‘lib, uningnatijasida Ahodisaro‘y bergan bo‘lsin. $B_1, B_2,...,B_n$ gipotezalarning ehtimollariqanday o‘zgarganligini(A hodisa ro‘y berganligisababli) aniqlashmasalasini qaraymiz. Boshqacha aytganda

$$P_A(B_1),\ P_A(B_2),\ldots,\ P_A(B_n)$$

shartli ehtimollarni izlaymiz.

Ko‘rsatilgan ehtimollardan birini masalan, $P_A(B_1)$ ni topamiz. Ko‘paytirish teoremasiga ko‘ra:

$$P(AB_1)=P(A)P_A(B_1) = P(B_1)\,P_{B_1}(A).$$

Bundan

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\,P_{B_1}(A)}{P(A)}$$

Bu munosabatdagi $P(A)$ ehtimolni uning to‘la ehtimol formulasidagi ifodasi bilan almashtirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\,P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{P(B_1)\,P_{B_1}(A)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\,P_{B_i}(A)}.$$

Qolgan gipotezalarning shartli ehtimollari ham shunga o‘xshash keltirib chiqariladi. Shunday qilib, ixtiyoriy B_k gipoteza uchun

$$P_A(B_k)=\frac{P(B_k)\,P_{B_k}(A)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\,P_{B_i}(A)},\quad (k=1,2,\ldots,n) \qquad (5)$$

formulalar o‘rinli.

Bu formulalar Bayes formulalari deb ataladi (Tom Bayes (1702-1761)-ingliz matematigi). Bayes formulalari tajriba natijasida A hodisa ro‘y berganligi ma’lum bo‘lgandan so‘ng B_k (k=1,2,…) gipotezalarning ehtimollarini qayta baholash imkonini beradi.

To‘la ehtimol formulasi va Bayes formulalarining qo‘llanishiga doir quyidagi misolni qaraymiz.

Amaliy mashg’ulot uchun yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

5.1-Misol. Talabalarningsaralashsportmusobaqasida qatnashishiuchunkursningIguruhidan 4 ta, IIguruhidan 6 ta, IIIguruhidan 5 ta talaba ajratilgan. I, IIva IIIguruhtalabalarininginstitutterma komandasiga kirishehtimollarimosravishda 0,9; 0,7 va 0,8 ga teng. Quyidagilarni toping:

a) tavakkaliga tanlangan talabaning terma komandaga tushish ehtimolini;

b) tavakkaliga tanlangan talaba terma komandaga kirgan bo‘lsa, uning I, II, III guruhdan bo‘lish ehtimollarini.

Yechish. Tanlangantalabaning terma komandaga kirishi- Ahodisa bo‘lsin. U holdatalabatanlash hodisasini quyidagi elementar hodisalarga ajratish mumkin:

B_1-tanlangantalabaningI guruhdan bo‘lishi;

B_2-tanlangantalabaningIIguruhdan bo‘lishi;

B_3-tanlangantalabaningIII guruhdanbo‘lishi.

Masala shartiga ko‘raB_1, B_2, B_3 -hodisalar to‘la guruhtashkil etadi, chunkitalabatanlashda boshqa elementar hodisa bo‘lishi mumkin emas,hamda ular birgalikda bo‘lmaydi.Uholda:

$$P(B_1)=\frac{4}{15};\ P(B_2)=\frac{6}{15};\ P(B_3)=\frac{5}{15};$$

$$P_{B_1}(A)=0{,}9;\ P_{B_2}(A)=0{,}7;\ P_{B_3}(A)=0{,}8;$$

a)tavakkaligatanlangantalabaning terma komandaga kirish ehtimolini (4) formulaga asosantopamiz:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+P(B_3)P_{B_3}(A)=$$
$$=\frac{4}{15}\cdot 0.9+\frac{6}{15}\cdot 0.7+\frac{5}{15}\cdot 0.8=\frac{59}{75}.$$

b) Bayesformulasiga asosan:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\,P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{15}\cdot 0.9}{\frac{59}{75}}=\frac{18}{59};$$

$$P_A(B_2)=\frac{P(B_2)\,P_{B_2}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{6}{15}\cdot 0.9}{\frac{59}{75}}=\frac{21}{59};$$

$$P_A(B_3)=\frac{P(B_3)\,P_{B_3}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{15}\cdot 0.9}{\frac{59}{75}}=\frac{20}{59};$$

Misoldan ko‘rinib turibdiki, gipotezalarning ro‘y berish ehtimollarining qiymatisaqlanibqolmaydi.

5.2-masala. Sexda 7 ta erkak va 3ta ayol ishchi ishlaydi. Tabel nomerlari bo’yicha tavakkaliga 3 kishi ajratildi. Barcha ajratib olingan kishilar erkaklar bo’lish ehtimolini toping.

Yechish. A hodisa birinchi ajratilgan erkak kishi, B ikkinchi ajratilgan erkak kishi, C uchinchi ajratilgan erkak kishi.

Birinchi ajratilgan kishi erkak kishi bo’lish ehtimoli: $P(A)$=7/10.

Birinchi ajratilgan erkak kishi shartida ikkinchi kishining erkak kishi bo'lish ehtimoli, ya'ni B hodisaning shartli ehtimoli: $P(B/A)=6/9=2/3$.

Oldin ikki erkak kishi ajratilib olinganligi shartida uchinchi ajratilgan kishining erkak kishi bo'lish ehtimoli, ya'ni C hodisaning shartli ehtimoli: $P(C/AB)=5/8$.

Barcha ajratib olingan kishilar erkaklar bo'lish ehtimoli:

$$P(ABC) = P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/AB)=\frac{7}{10}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{7}{24}.$$

5.3-masala. Ko'prik yakson bo'lishi uchun bitta aviatsion bombaning kelib tushishi kifoya. Agar ko'prikka tushish ehtimollari mos ravishda 0,3; 0,4; 0,6; 0,7 bo'lgan 4 ta bomba tashlansa, ko'prikning yakson bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. Demak, kamida bitta bombaning ko'prikka tushishi uni yakson qilishi uchun yetarli (A hodisa). U holda izlanayotgan ehtimol:

$P(A)=1-0,7\cdot 0,6\cdot 0,4\cdot 0,3\approx 0,95.$

5.4-masala. Birinchi qutida 2 ta oq va 6 ta qora, ikkinchi qutida esa 4 ta oq va 2 ta qora shar bor. Birinchi qutidan tavakkaliga 2 ta shar olib ikkinchi qutiga solindi. Shundan so'ng ikkinchi qutidan tavakkaliga bitta shar olindi.

a) Olingan sharning oq bo'lish ehtimolini toping.

b) Ikkinchi qutidan olingan shar oq bo'lib chiqdi. Birinchi qutidan olib ikkinchi qutiga solingan 2 ta shar oq bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

A-ikkinchi qutidan olingan shar oq.

B_1 –birinchi qutidan ikkinchi qutiga 2 ta oq shar solingan.

B_2 –birinchi qutidan ikkinchi qutiga 2 ta turli rangdagi sharlar solingan.

B_3 –birinchi qutidan ikkinchi qutiga 2 ta qora shar solingan.

B_1, B_2, B_3 –hodisalar hodisalarning to'la guruhini tashkil qiladi. U holda to'la ehtimol formulasiga ko'ra:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+P(B_3)P_{B_3}(A).$$

Bunda: $P(B_1)=\frac{1}{28}$; $P(B_2)=\frac{12}{28}$; $P(B_3)=\frac{15}{28}$;

$$P_{B_1}(A)=\frac{3}{4};\ P_{B_2}(A)=\frac{5}{8};\ P_{B_3}(A)=\frac{1}{2};$$

U holda $P(A)=\frac{1}{28}\cdot\frac{3}{4}+\frac{12}{28}\cdot\frac{5}{8}+\frac{15}{28}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{16}$.

c) Bayes formulasiga asosan:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\,P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{28}\frac{3}{4}}{\frac{9}{16}}=\frac{1}{21}.$$

Mustaqil ishlash uchun misollar

1. Birinchiqutida 3ta oqva 4ta qizilshar, ikkinchiqutida esa 5ta oq, 4ta qizilsharbor. Birinchiqutidantavakkaliga 2ta sharolinibikkinchiqutiga solindi, so'ngra ikkinchiqutidantavakkaliga bitta sharolindi. Olingansharningoqsharbo'lishehtimolinitoping.
2. Yig'uvchiga birinchizavoddan 5ta, ikkinchizavoddan 7ta, uchinchizavoddanesa 6ta birxilqutida detalkeltirildi. Birinchizavoddatayyorlangandetalningyaroqlibo'lishehtimoli-0,95; ikkinchizavoduchunbuehtimollik-0,85; uchinchizavoduchunbuehtimollik-0,9ga teng.Tavakkaliga olingandetalyaroqlichiqqanbo'lsa, budetalningqaysizavoddatayyorlanganbo'lishehtimoliyuqori.
3. Omborga 3 ta firma tomonidan mahsulotlar 6:9:5 nisbatda yetkazib beriladi. Birinchi firma mahsulotlarining 90% i, ikkinchisining80% i va uchinchisining 70% i a'lo sifatlidir. Ombordan tavakkaliga olingan bitta mahsulotning a'lo sifatli bo'lmaslik ehtimoli qanday? Agarolingan mahsulot a'lo sifatli ekanligi ma'lum bo'lsa, uning uchinchi firmatomonidan tayyorlanganlik ehtimolini toping.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Hodisalar to'la guruhiga ta'rif bering va misollar keltiring.
2. To'la ehtimol formulasi daqanday shartlar talab qilinadi?
3. Bayes formulasi va to'la ehtimol formulalari orasidagi umumiylik hamda farq qiluvchi jihatlarni ayting.

II BOB. TAKRORLANUVCH ERKLI SINOVLAR

2.1-§. Erkli sinovlar ketma-ketligi. Bernulli formulasi

Reja

1. Erkli sinovlar ketma-ketligi.
2. Binomial sxema.
3. Polinomial sxema

Erkli sinovlar ketma-ketligi. Ma'lumki, hodisani kuzatish uchun o'tkaziladigan tajribalar bir necha marta takrorlanishi mumkin. U holda bu tajribalar ketma-ketligida har bir tajribaning natijasi undan oldingi tajribalar natijasiga bog'liq bo'lishi yoki bog'liq bo'lmasligi mumkin. Masalan, qutida n ta qora, m ta oq shar bor.Tajriba qutidan bitta shar olinishi, A hodisa esa olingan sharning oq chiqishi bo'lsin. Buni ikki usulda amalga oshirish mumkin: a)har birtajribada olingan shar tajribadan so'ng yana qaytarib qutiga solinadi; b)har birtajribadaolingan shartajribadan so'ng qaytarib qutiga solinmaydi.Har birini alohidako'rib chiqamiz.

a) Agarhar birtajribada olingan shartajribadan so'ng yanaqaytarib qutiga solinsa,har birtajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli: $P(A)=\frac{m}{n+m}$.

b) Agarhar birtajribada olingan shartajribadan so'ngqaytaribqutiga solinmasa,har birtajribada$P(A)$ ehtimolning qiymatini hisoblash uchun oldingitajriba natijasini e'tiborga olishgamajburmiz.

Haqiqatanham, birinchitajribada $P(A)=\frac{m}{n+m}$bo'ladi, ikkinchi tajribada$P(A)=\frac{m-1}{n+m-1}$(birinchitajribanatijasi A hodisa bo'lsa) yoki $P(A)=\frac{m}{n+m-1}$(birinchitajribanatijasi $\bar{A}$ hodisa bo'lsa)vahakozo, ya'ni ikkinchitajribadan boshlabhar birtajribaningnatijasi oldingi tajribalarnatijasiga bog'liq.

Bu misolning a) holatdagitajribalar ketma-ketligini erkli sinovlar ketma-ketligi deb ataymiz.

1-ta'rif. Agar o'tkazilayotgantajribalar ketma-ketligidahar bir tajribaningnatijasi (ikkinchitajribadan boshlab) oldingitajribalar

natijasiga bog'liq bo'lmasa, u holda butajribalar ketma-ketligi erklisinovlar ketma-ketligi deb ataladi.

Biz quyida bir nechta alohida sodda hodisalardan iborat bo'lgan murakkab hodisa tushunchasidan foydalanamiz.

Erkli sinovlar ketma-ketligininghar birtajribasida A hodisaning ro'y berish ehtimoli yohar xil, yoki bir xil bo'lishi mumkin. Biz soddalik uchun bu ketma-ketlikininghar birtajribasida A hodisa bir xil ehtimolga ega deb faraz qilamiz.

Faraz qilaylik, n ta erkli sinash o'tkazilayotgan bo'lib, ularning har birida A hodisa ro'y berishi yoki ro'y bermasligi mumkin bo'lsin va har bir sinashda A hodisaning ehtimoli bir xil, chunonchi p ga teng deb hisoblansin, u holda ro'y bermaslik ehtimoli $q=1-p$. Masalan, o'yin soqqasini tashlashdan iborat tajriba o'tkazilmoqda. Har bir tashlashda u yoki bu sonda ochkolar chiqish ehtimolligi oldingi tashlashlarda qanday ochko chiqqanligiga bog'liqmasligi ravshan, binobarin biz A hodisa sifatida 3 ochkoning chiqishini qarasak, bu holda erkli sinovlar ketma-ketligiga ega bo'lamiz va $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{5}{6}$.

Binomial sxema. n ta sinashda A hodisaning rosa k marta ro'y berishi va n-k marta ro'y bermaslik ehtimoli – $P_n(k)$ ni hisoblaymiz. Buning uchun ketma-ket o'tkazilgan n tatajribani bitta murakkab tajriba debqarasak, butajribaningnatijasi $A_1, A_2,\dots,A_n$ ko'rinishdabo'lib, uninghar birA_i $(i=\overline{1,n})$ hadi yoki A, yoki $\bar{A}$ bilan ifodalanadi. Bunday hodisalar soni 2^nta bo'ladi.Haqiqatanham, $A_1, A_2,\dots,A_n$ hodisalar ichida:

1) $A_1,A_2,\dots,A_n$ hodisaning $A_i=A$ $(i=\overline{1,n})$ shartni qanoatlantiradigan kombinatsiyasi bitta;

2) $A_1,A_2,\dots,A_n$ hodisaning $\bar{A}AA\dots A$ ko'rinishdagi kombinatsiyalari soni n ta;

k) $A_1,A_2,\dots,A_n$ hodisaning $\underbrace{AA\dots A}_{k}\underbrace{\bar{A}\bar{A}\dots\bar{A}}_{n-k}$ ko'rinishdagi kombinatsiyalari soni C_n^k ta;

n) $A_1,A_2,\dots,A_n$ hodisaning $A_i=\bar{A}(i=\overline{1,n})$ shartni qanoatlantiradigan kombinatsiyasi bitta.

Shunday qilib, $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$ ketma-ketlikni hosil qilamiz, u holda guruhlashxossasiga asosan,$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$.

Agar n ta tajribada A hodisaning rosa k marta ro‘y berishini B hodisa deb qarasak,

$$B=(\underbrace{AA...A}_{k}\underbrace{\bar{A}\bar{A}...\bar{A}}_{n-k}) \cup \underbrace{AA...A}_{k-1}\underbrace{\bar{A}\bar{A}...\bar{A}}_{n-k}A) \cup ... \cup (\underbrace{\bar{A}\bar{A}...\bar{A}}_{n-k}\underbrace{AA...A}_{k})(1)$$

bo‘lib, u C_n^k ta haddan iborat bo‘ladi. Tajribalar ketma-ketligi erkli bo‘lganligi sababli ko‘paytirish teoremasiga ko‘ra (1) ifodadagi har bir hadning ehtimolligi $p^k q^{n-k}$bilan aniqlanadi, u holda (1) ifodada yig‘indidagihar bir had birgalikmasligini e’tiborga olsak:

$$P(B)=C_n^k\ p^k q^{n-k}(2)$$

Boshlang‘ich belgilashlarga qaytib,

$$P_n(k)=C_n^k\ p^k q^{n-k}(3)$$

Bernulli (binomial) formulasini hosil qilamiz. (3) binomial formula deb atalishiga sabab u

$$(p+q)^n=C_n^n\ p^n q^0+C_n^{n-1}\ p^{n-1}q+...+C_n^k\ p^k q^{n-k}+...+C_n^0\ p^0 q^n$$

Nyuton binomining umumiy hadini ifodalashidir.

Misol.

1. Har bir detalning standart bo‘lish ehtimoli p=0,8 bo‘lsa, tavakkaliga olingan 5 ta detaldan 2 tasining standart bo‘lish ehtimolini toping.

Yechish. Bu holda n=5, m=2, p=0,8 va q=0,2. Bernulli formulasiga asosan

$$P_5(2)=C_5^2 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3 = \frac{5!}{3!2!} \cdot 0{,}00512 = 0{,}0512.$$

2. Tanga 10 marta tashlandi. «Gerb»ning 3 marta tushish ehtimoli qanchaga teng?

Yechish. Bu hodisaninghar birtajribadagi ehtimoli 1/2 ga teng. Bundan,

$$P_{10}(3)=C_{10}^3 \cdot (\tfrac{1}{2})^3 \cdot (\tfrac{1}{2})^7 = \frac{10!}{3!7!} \cdot (\tfrac{1}{2})^{10} = \frac{15}{28}.$$

A hodisaning o‘tkazilayotgan n ta erkli sinovda kamida k_1 marta va ko‘pi bilan k_2 marta ro‘y berish ehtimoli

$$P_n(k_1 \le k \le k_2)=P_n(k_1)+P_n(k_1+1)+...+P_n(k_2) \qquad (4)$$

formula bilan hisoblanadi.

2-ta’rif. Agar n ta erkli sinovda hodisaning $k_0$marta ro‘y berish ehtimoli sinovning boshqa mumkin bo‘lgan natijalari ehtimollari ichida eng kattasi bo‘lsa, ya’ni

$$P_n(k_0)=\max_{0 \le k \le n}\{P_n(k)\}(5)$$

bo‘lsa, u holda k_0 soni- ***eng ehtimolli son*** deb ataladi.

Eng ehtimolli son quyidagi qo‘sh tengsizlik bilan aniqlanadi:

$$np-q \le k_0 \le np+q(6)$$

Eng ehtimolli sonni aniqlash uchun hamma ehtimollarni hisoblab chiqmasdan, balki sinovlar soni n ni va har bir sinovda A hodisaning ro‘y berish ehtimolini bilish kifoya ekan.

a) agar $np-q$ son kasr bo‘lsa, u holda bitta eng ehtimolli k_0 son mavjud bo‘ladi;

b) agar $np-q$ butun son bo‘lsa, u holda k_0 va k_0+1 eng ehtimolli sonlar mavjud bo‘ladi;

c) agar np butun son bo‘lsa, u holda eng ehtimolli son $k_0=np$ bo‘ladi.

Misol.

3. Tanga 6 marta tashlanadi. Gerbli tomon tushishlarining eng ehtimolli sonini toping.

Yechish. Berilgan masalaning shartlariga asosan, n=6, p=q=1/2. U holda, «**gerb**» tushishining eng ehtimolli soni $k_0$ni quyidagicha topamiz: $k_0=np=3$.

Demak, engehtimolli son 3ekan.

Shunday qilib, eng ehtimolli sonni aniqlashjarayonida biz npsonning Bernulli sxemasidamaxsus ahamiyatga ega ekanligiga ishonch hosil qilish imkoniga ega bo‘ldik. Bu shundan iborat bo‘ldiki, np songaeng yaqin bo‘lgan ikkita butun sonlardan biri (ba’zan ikkalasi,ba’zan o‘zi) eng ehtimollisonbo‘ldi.

Eslatma.*np* son yuqoridagiga nisbatan ham muhimroq bo‘lgan talqinga ega. Chunonchi, np ni ma’lum ma’noda n ta tajribalardagi muvaffaqiyatlarning o‘rtacha soni deb qarash mumkin.

Misol.

Ma’lum korxonaning ishlab chiqarishda yaroqsizlikka yo‘l qo‘yish ehtimoli 0,05 ga teng. 100 ta mahsulot orasidagi yaroqsiz mahsulotlarning o‘rtacha soni nimaga teng?

Yechish. Izlanayotgan son $np=100 \cdot 0{,}05=5$ ga teng bo‘ladi.

Polinomial sxema. Binomial sxemaning (Bernulli sxemasining) umumlashmasi bo‘lgan polinomial sxemani ko‘rib chiqamiz. Agar Bernulli sxemasida har bir tajribada faqat 2 ta hodisa A va $\bar{A}$ qaralgan bo‘lsa, polinomial sxemada har bir tajribada to‘la guruh hosil qiluvchi k ta hodisa qaraladi.

Tajriba shundan iborat bo‘ladiki, n ta erkli sinov o‘tkaziladi va ularning har birida to‘la guruh hosil qiladigan k ta $A_1, A_2, ..., A_k$

hodisaning faqat bittasi ro'y berishi mumkin, bunda bu hodisalarning ehtimolliklari ma'lum: $p_1=P(A_1)$, $p_2=P(A_2)$,...., $p_k=P(A_k)$.

n ta tajribada A_1 hodisa m_1 marta, A_2 hodisa m_2 marta, . . ., A_k hodisa m_k marta $(m_1+m_2+...+m_k=n)$ ro'y berish ehtimoli quyidagiga teng bo'ladi:

$$P_n(m_1, m_2, ..., m_k) = \frac{n!}{m_1!m_2!...m_k!}p_1^{m_1}p_2^{m_2}...p_k^{m_k}. \qquad (7)$$

Xususiy holda, bu formuladan k=2 bo'lganda Bernulli formulasi kelib chiqadi.

Amaliy mashg'ulot uchun yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

2.1.1-masala. Ikki teng kuchli shaxmatchi shaxmat o'ynashmoqda: to'rt partiyadan ikkitasini yutish ehtimoli ko'proqmi yoki olti partiyadan uchtasini yutish ehtimoli ko'proqmi (durang natijalar hisobga olinmaydi)?

Yechish. Teng kuchli shaxmatchilar o'ynashmoqda, shu sababli partiyani yutish ehtimoli p=1/2, demak, partiyani yutqish ehtimoli q=1/2 bo'ladi. Bernulli formulasiga ko'ra:

$$P_4(2) = C_4^2p^2q^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}.$$

$$P_6(3) = C_6^3p^3q^3 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}.$$

$P_4(2) > P_6(3)$ bo'lgani uchun olti partiyadan uchtasini yutishdan ko'ra to'rt partiyadan ikkitasini yutishning ehtimoli ko'proq.

2.1.2-masala. Agar bitta sinovda A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,4 ga teng bo'lsa, u holda to'rtta erkli sinovda A hodisaning kamida uch marta ro'y berish ehtimolini toping.

Yechish. Demak masala shartiga ko'ra p=0,4; q=1-0,4=0,6. Kamida uch marta ro'y berish ehtimolini Bernulli formulasi yordamida topamiz.

$$P_4(3) + P_4(4) = C_4^3p^3q + C_4^4p^4q^0 = 0{,}1792.$$

2.1.3-masala. Har bir otilgan o'qning nishonga tegish ehtimoli p=2/3. Otilgan 10 ta o'qdan 3 tasining nishonga tegish ehtimolini toping.

Yechish. n=10; k=3; p=2/3; q=1/3. U holda Bernulli formulasiga asosan

$$P_{10}(3) = C_{10}^3p^3q^7 = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^7 = 720\cdot\frac{8}{3^{10}} = 0{,}098.$$

Mustaqil ishlash uchun misollar

1. Tanga 7 marta tashlandi.«Gerb» tomoni
a) 2 marta; b) kamida 3 marta; c) ko'pi bilan 3 marta tushish ehtimollari topilsin.
2. O'yin kubigi 50 marta tashlanganda 2 ochko tushishining eng ehtimolli sonini toping.
3. Turli masofadan bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda nishonga 4 ta o'q uzildi. Har bir o'qning nishonga tegish ehtimoli mos ravishda: p_1=0,4; p_2=0,7; p_3=0,5; p_4=0,6 bo'lsa, birortasining ham nishonga tegmaslik, bittasining, ikkitasining, uchtasining va to'rttasining ham nishonga tegish ehtimollari topilsin.
4. Nishon beshta zonadan iborat.Har bir zonaga o'qning tegish ehtimollari p_1=0,3; p_2=0,2; p_3=0,15; p_4=0,4; p_5=0,25 bo'lsin. Otilgan 13ta o'qdan 3tasi birinchi, 4tasi ikkinchi, 2tasi uchinchi, 1tasi to'rtinchi, qolgan 3tasi esa beshinchi zonaga tegishehtimollari topilsin.
5. Avtomat stanokda standart detal tayyorlash ehtimoli 0,9 ga teng. Avtomat stanokda tayyorlangan 6 ta detallar orasidan standartlarining engehtimolli sonini vabu sonning ehtimolini hisoblang.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Erkli sinovlar ketma-ketligini ta'riflang.
2. Berunulli formulasi nima uchun xizmat qiladi?
3. Bernulli formulasini keltirib chiqaring.
4. Eng ehtimolli son ta'rifini bering va hisoblash formulasini keltiring.
5. Erkli sinovlar ketma-ketligining polinomial sxemasi nima?

2.2-§. Muavr-Laplasning limit teoremalari. Puasson teoremasi

Reja

1. Muavr-Laplasning lokal teoremasi.
2. Muavr-laplasning integral teoremasi.
3. Puasson teoremasi

n та erkli sinovda A hodisaning k marta ro'y berish ehtimolini hisoblashga imkon beruvchi Bernulli formulasini keltirib chiqarish uchun har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimolini o'zgarmas deb faraz qilganmiz. Agar n ning katta qiymatlarida $P_n(k)$ ehtimollarni hisoblashda Bernulli formulasidan foydalansak, hisoblashda juda qiyin bo'lgan arifmetik amallarni bajarishimizga to'g'ri keladi. Masalan, biror korxonada yaroqsiz mahsulot chiqarish ehtimoli 0,25 ga teng bo'lib, tayyor mahsulotdan 500 tasi tekshirilsin. Tekshirilgan mahsulotlar orasida 25 tasining yaroqsiz bo'lish ehtimolini topilshi talab qilinsin. Bu holda har bir mahsulotning tekshirilishini bitta tajriba sifatida qarab, har birida A hodisaning (tekshirilgan bitta mahsulotning yaroqsiz deb topilishi) ro'y berish ehtimoli 0,25 ga teng bo'lgan 500 ta erkli tajriba o'tkazilyapti deb hisoblashimiz mumkin, u holda Bernulli formulasiga asosan:

$$P_{500}(25)=C_{500}^{25}\cdot 0{,}25^{25}\cdot 0{,}75^{475}.$$

Bu misoldan ko'rinib turibdiki, n ning katta qiymatlarida $P_n(k)$ ehtimollarni hisoblashni osonlashtirish uchun boshqa asimptotik formulalardan foydalanish zaruriyati tug'iladi. Bu formulalar ehtimollar nazariyasida limit teoremalari deb ataluvchu teoremalarda keltiriladi.

Muavr-Laplasning lokal teoremasi. Agar har birtajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli p $(0<p<1)$ o'zgarmas bo'lsa, u holda n ta erkli tajribada A hodisaning k marta ro'y berish ehtimoli $P_n(k)$ uchun,

$$\lim_{n\to\infty}\left(P_n(k)-\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)\right)=0 \qquad (1)$$

tenglik bajariladi, bu yerda $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Bu teoremani Muavr 1730 yilda p=1/2 uchun, so'ngra Laplas 1783 yilda $p\epsilon(0;1)$ uchun isbotlagan. Biz esa bu teorema xulosasini isbotsiz qabul qilamiz.

Maxsus jadvallarda $\varphi(x)$ funksiyaning faqat x argumentining musbat qiymatlariga mos qiymatlari keltirilgan. $\varphi(x)$funksiya juft, ya'ni $\varphi(-x)=\varphi(x)$ bo'lganligi uchun bu jadvallardan x ning manfiy qiymatlarida ham foydalaniladi.

Shunday qilib, n ta erkli sinashda A hodisaning rosa k marta ro'y berish ehtimoli taqriban quyidagiga teng:

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) \qquad (2)$$

n ning katta qiymatlarida (2) ning aniqligi oshib boradi.

Misollar.

1. Agar har birtajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,2 ga teng bo'lsa, 400 tatajribada A hodisaning 80 marta ro'y berish ehtimolini toping.

Yechish. $n=400,\ k=80,\ p=0{,}2,\ q=0{,}8.$

$P_{400}(80)\approx\frac{1}{\sqrt{400\cdot0{,}2\cdot0{,}8}}\varphi(x)\approx\frac{1}{8}\varphi(x)$, $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{80-400\cdot0{,}2}{8}=0$

jadvaldan $\varphi(0)=0{,}3989$.

U holda: $P_{400}(80)\approx\frac{0{,}3989}{8}\approx 0{,}04986$.

2. Merganning o'qni nishonga tekkizish ehtimoli: p=0,75. Mergan otgan 10 ta o'qdan 8 tasining nishonga tegish ehtimolini toping.

Yechish. $n=10,\ k=8,\ p=0{,}75,\ q=0{,}25$

(2) formuladanfoydalansak:

$P_{10}(8)\approx\frac{1}{\sqrt{10\cdot0{,}75\cdot0{,}25}}\varphi(x)\approx 0{,}7301\varphi(x)$, $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{8-10\cdot0{,}75}{\sqrt{10\cdot0{,}75\cdot0{,}25}}\approx 0{,}36$

jadvaldan $\varphi(0{,}36)=0{,}3789$.

U holda $P_{10}(8)=0{,}7301\cdot 0{,}3789\approx 0{,}273$.

Endi bumasalani Bernulli formulasidan foydalanib yechimini topamiz va boshqa natijaga: $P_{10}(8)=0{,}282$ ga kelamiz.

Javoblar orasidagi kattafarqni n ning qiymati kichikligi bilan tushuntiriladi.

Ma'lumki, har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli p o'zgarmas bo'lsa, u holda n (kichik n larda) ta erkli tajribada A

hodisaning kamida k_1 marta va ko‘pi bilan k_2 marta ro‘y berish ehtimoli Bernulli formulasiga asosan quyidagiga teng:

$$P_n(k_1,k_2) = P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

n ning katta qiymatlarida esa $P_n(k_1,k_2)$ ehtimolni hisoblash uchun quyidagi teoremadan foydalanamiz.

Muavr-Laplasning integral teoremasi. Agar har bir tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimoli p $(0<p<1)$ o‘zgarmas bo‘lsa, u holda n ta erkli tajribada A hodisaning kamida k_1 marta va ko‘pi bilan k_2 marta ro‘y berish ehtimoli $P_n(k_1,k_2)$ taqriban quyidagi aniq integralga teng.

$$P_n(k_1,k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x'}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \Phi(x'') - \Phi(x') \qquad (3)$$

bu yerda

$$x' = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}, x'' = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}}dy.$$

Laplas funksiyasi deb ataluvchi $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}}dy$integralning qiymatlari uchunmaxsusjadval tuzilgan. Jadvalda integralning $0\le x\le 5$ kesmaga mos bo‘lgan qiymatlari berilgan, chunki $x>5$ lar uchun$\Phi(x)$=0,5 deb olish mumkin. $\Phi(x)$ funksiya toq, ya’ni $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ bo‘lgani uchun jadvaldan $x<0$ qiymatlat uchun ham foydalanish mumkin.

Misol. 3. Detalni texniknazorat bo‘limi (TNB) tekshirmagan bo‘lish ehtimoli p=0,2 .Tasodifan olingan 400ta detaldan kamida 70 ta ko‘pi bilan 100ta detalni TNB tekshirmagan bo‘lish ehtimolini toping.

Yechish. $p=0,2;\ q=0,8;\ n=400;\ k_1=70;\ k_2=100;$ u holda

$$x' = \frac{70-400\cdot0,2}{\sqrt{400\cdot0,2\cdot0,8}} = -1,25, \quad x'' = \frac{100-400\cdot0,2}{\sqrt{400\cdot0,2\cdot0,8}} = 2,5.$$

(3) formulaga asosan,

$$P_{400}(70;100) \approx \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25)$$

Jadvaldan $\Phi(2,5) = 0,4938;\ \Phi(1,25) = 0,3944$.

U holda $P_{400}(70;100) \approx 0,4938 + 0,3944 = 0,8882$.

Puasson teoremasi. Agar n ta erkli sinovlar ketma-ketligida Ahodisaning k marta ro‘y berishida, k fiksirlangan, n va p esao‘zgaruvchan bo‘lib, n va p lar mosravishda cheksizlikkava

nolgashunday intilsaki, np= 1 miqdor chegaralangan bo‘lib qolaversa: $P_n(k)$ehtimollik uchun

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad (4)$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Bunda $\lambda=np$.

Misol. 4. Qo‘shma korxona iste’molchiga 5000 sifatli mahsulot jo‘natdi. Mahsulotning yo‘lda shikastlanish ehtimoli 0,001ga teng bo‘lsa, yo‘lda ikki yoki undan ortiq mahsulotning shikastlanish ehtimolini toping.

Yechish. Shikastlangan mahsulotlar sonini k desak, izlanayotgan ehtimol P_{5000} $(k\ge 2)$ bo‘lib, u quyidagiga teng bo‘ladi:

P_{5000} $(k\ge 2)$=$P_{5000}(2)$+ $P_{5000}(3)$+…+ $P_{5000}(5000)$=1-($P_{5000}(0)$+ $P_{5000}(1)$).

Bizning holda sinashlar soni katta va hodisa ro‘y berish ehtimoli 0 ga yaqin bo‘lganligi uchun Puasson teoremasidan foydalanamiz.

$\lambda=np$=5000*0,001=5 ekanligini e’tiborga olsak:

$$P_{5000}(0) = \frac{5^0\cdot e^{-5}}{0!} = e^{-5};\ P_{5000}(1) = \frac{5^1\cdot e^{-5}}{1!} = 5e^{-5}$$

U holda P_{5000} $(k\ge 2) = 1-e^{-5}-5e^{-5} = 1-6e^{-5} \approx 0,9596$.

Amaliy mashg’ulot uchun yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

1-masala. Bitta o’q uzilganda nishonga tegish ehtimoli 0,8 ga teng. 100 ta o’q uzilganda rosa 75 ta o’qning nishonga tegish ehtimolini toping.

Yechish. n=100; k=75; p=0,8; q=0,2. U holda

$$\frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{75-100\cdot0,8}{\sqrt{100\cdot0,8\cdot0,2}} = -1,25.$$

Jadvaldan $\varphi(-1,25) = 0,1826$ ekanlini topamiz. Demak,

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) = \frac{0.1826}{4} = 0,0456.$$

2-masala. Agar biror hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,4 ga teng bo'lsa, bu hodisaning 100 ta sinovdan

a) Rosa 50 marta ro'y berish ehtimolini;

b) Kamida 30 marta, ko'pi bilan 45 marta ro'y berish ehtimolini toping.

Yechish. a) Shartga ko'ra n=100; p=0,4; q=0,6. Sinovlar soni n kata bo'lganligi uchun, masalani local teoremaga ko'ra yechamiz:

$$\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{50-100\cdot 0{,}4}{\sqrt{100\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}}=\frac{10}{\sqrt{24}}\approx 2{,}04.$$

Jadvaldan $\varphi(2{,}04)=0{,}0498$ ekanlini topamiz. Topilganlarni formulaga qo'yib, izlanayotgan ehtimolni topamiz:

$$P_{100}(50)\approx\frac{1}{\sqrt{100\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}}\,\varphi(2{,}04)=\frac{0{,}0498}{\sqrt{24}}=0.0102.$$

b) Laplasning integral teoremasini qo'llaymiz. n=100; $k_1=30; k_2=45$; p=0,4 va q=0,6 ekanligiga asosan

$$x^{'}=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{30-100\cdot 0{,}4}{\sqrt{100\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}}=\frac{-10}{\sqrt{24}}\approx -2{,}04$$

$$x^{''}=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{45-100\cdot 0{,}4}{\sqrt{100\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}}=\frac{5}{\sqrt{24}}\approx 1{,}02$$

$\Phi(x)$ ning qiymatlarjadvalidan

$$\Phi(-2{,}04)=-\Phi(2{,}04)=-0{,}4793,\ \ \Phi(1{,}02)=0{,}3461.$$

Topilganlarni fornulaga qo'yib, talab qilingan ehtimollikni topamiz.

$P_{100}(30;45)=\ \Phi(1{,}02)-\Phi(-2{,}04)$ =0,3461+0,4793=0,8254.

3-masala. Telefon stansiyasi 400 abonentga xizmat ko'rsatadi. Agar har bir abonent uchun uning bir soat ichida stansiyaga qo'ng'iroq qilish ehtimoli 0,01 ga teng bo'lsa, quyidagi hodisalarning ehtimolini toping:

a) Bir soat davomida 5 abonent stansiyaga qo'ng'iroq qiladi;

b) Bir soat davomida 4 tadan ko'p bo'lmagan abonent qo'ng'iroq qiladi.

Yechish. p=0,01 juda kichik, n=400 esa kata bo'lgani uchun $\lambda=400\cdot 0{,}01=4$ da Puassonning taqribiy formulasidan foydalanamiz:

a) $P_{400}(5)\approx\frac{4^5}{5!}e^{-4}\approx 0{,}1563.$

b) $P_{400}(0\le k\le 4)$=$P_{400}(0)+P_{400}(1)+P_{400}(2)+P_{400}(3)+P_{400}(4)$=

= 0,018316+0,073263+0,146525+0,195367+0,195367=0,63.

Mustaqil ishlash uchun misollar

1. Urug'lik bug'doyning 0,06% i begona o'tlar urug'idan iborat. Tavakkaliga olingan 10000 dona urug'dan 7 tasi; 10 tasi begona o'tlar urug'i bo'lishini ehtimolini toping.
2. Kuzatilayotgan hodisaning bitta tajribada ro'y berish ehtimoli 0,3ga teng. 100 tatajriba o'tkazilganda bu hodisaning nisbiy chastotasi 0,2 va 0,4 oraliqda o'zgarish ehtimolini toping.
3. 500 sahifali kitobni nashr qilishda bosmaxona 50 ta xatoga yo'l qo'ygan. Tavakkaliga olingan sahifada xato bo'lish ehtimoli topilsin.
4. Agar har tajribada hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,2 ga teng bo'lsa 600 ta tajribada bu hodisa 130 marta ro'y berish ehtimolini toping.
5. Tuman soliq inspeksiyasining ma'lumotlariga ko'ra, tumandagi mavjud kichik korxonalarning o'rtacha 40% i soliqlarni o'z vaqtida to'lamaydi. Agar tumanda 300 ta kichik korxona bo'lsa, soliqlarni o'z vaqtida to'lamaganlari soni 150 tadan ko'p bo'lishlik ehtimoli qanday?

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Muavr-Laplasning lokal teoremasini ta'riflang.

2. Muavr-Laplasning integral teoremasini tushuntiring.
3. Puasson teoremasi qanday hollarda qo'llaniladi?
4. Lokal va integral teoremalarning amaliy ahamiyati nimadan iborat?

Tavsiya etiladiganmustaqilta'lim va referat mavzulari

1. Umumlashgan Bernulli sxemasi.
2. Umumlashgan lokal va integral teoremalar.
3. Stiltes integrali.

7-§.Tasodifiy miqdorlar va ularning turlari. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni. Amalda ko'p uchraydigan diskret taqsimot qonunlari

Reja

1. Tasodifiy miqdorlar.
2. Taqsimot qonuni.
3. Binomial taqsimot qonuni.
4. Puasson taqsimot qonuni.
5. Geometrik taqsimot qonuni.
6. Gipergeometrik taqsimot qonuni.

Tasodifiy miqdorlar. Tasodifiy miqdor tushunchasi ehtimollar nazariyasi fanining asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi. Tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari bilan biz oldindan tanishmiz. Masalan, tajriba o'yin kubigi tashlanishidan iborat bo'lsin. Bunda, $\Omega=\{\omega_i\}$, ($i=\overline{1,6}$) to'plamda 6 ta elementar hodisa bo'ladi. Ochkolar soni tasodifiy miqdor bo'lsa, 1, 2, 3, 4, 5, 6 sonlari esa uning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari bo'ladi.

1-ta'rif. Tasodifiy miqdor deb, tajriba natijasida mumkin bo'lgan, oldindan noma'lum va tasodifiy sabablarga bog'liq bo'lgan qiymatlardan bittasi va faqat bittasini tayin ehtimol bilan qabul qiladigan kattalikka aytiladi.

Tasodifiy miqdorlar, odatda, lotin alfavitining bosh harflari X, Y, Z,... bilan, ularning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari esa mos ravishda alfavitning kichik harflari $x, y, z,...$ bilan belgilanadi.

Masalan, X: $x_1, x_2, ..., x_n, ...$

Tasodifiy miqdorlar ikki turga ajratib o'rganiladi: a) diskret tasodifiy miqdorlar; b) uzluksiz tasodifiy miqdorlar.

Bu ikki tushuncha haqida ma'lumot berishdan oldin to'plam va uning elementlarihaqidaba'zi birma'lumotlarni berib o'tamiz.

2-ta'rif. Agar to'plam elementlarining sonini biror bir son bilan ifodalash mumkin bo'lsa, u holda bu to'plam chekli to'plam deb ataladi.

3-ta'rif. Agar to'plam elementlarining soni cheksiz bo'lib uning elementlarini nomerlash (natural sonlar to'plami bilan o'zaro bir qiymatli akslantirish) mumkin bo'lsa, u holda bu to'plam sanoqli to'plam deb ataladi.

4-ta'rif. Agar to'plam elementlarining soni cheksiz bo'lib uning elementlarini nomerlash (natural sonlar to'plami bilan o'zaro bir qiymatli akslantirish) mumkin bo'lmasa, u holda bu to'plam kontiniuum quvvatli to'plam deb ataladi. (Kontiniuum quvvatli to'plam uning elementlarini [0;1] kesmadagihaqiqiy sonlar to'plami bilan o'zaro bir qiymatli akslantirish orqaliham aniqlanadi.)

Diskret tasodifiy miqdorlarning mumkin bo'lgan qiymatlari ayrim ajralgan bo'lib, uning mumkin bo'lgan qiymatlarining soni yo chekli, yoki sanoqli bo'ladi.

Misol.

1. X -tasodifiy miqdor 100 ta buyumdan iborat guruhdagi yaroqsiz buyumlar soni. Bu miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari: $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2, ..., x_{101}=100$

Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlarining soni har doim kontiniuum quvvatga ega bo'ladi. Masalan, «**Kalashnikov**» avtomatidan otilgan o'qning eng uzoqqa uchish masofasi 2500 m bo'lsin. U holda undan otilgan qandaydir o'qning borib tushgan masofasini X tasodifiy miqdor deb qarasak uning qabul qiladigan qiymatlari [0; 2500] kesmadagi ixtiyoriy nuqta bo'lishi mumkin.

Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlarning aniq ta'rifi keyinchalik beriladi.

Biz hozirfaqat diskrettasodifiy miqdorlarva ularningba'zi bir xarakteristikalari bilantanishib chiqamiz.

Taqsimot qonuni. Shunday qilib, diskrettasodifiy miqdornitavsiflash uchun, eng avvalo, uningbarcha mumkin bo'lgan qiymatlarini ko'rsatish lozim. Ammo, X tasodifiy miqdorningfaqat mumkin bo'lgan qiymatlari: $x_1, x_2, \ldots$ larni bilish uning xususiyatlarini ta'riflashga yetarli emas, chunkitasodifiy miqdor o'zininghar bir qiymatinihar xil ehtimollik bilanqabul qilishi mumkin. Shusababli, diskrettasodifiy miqdorni to'liq aniqlash uchun $x_1, x_2, \ldots$ qiymatlardantashqari $\{X=x_1\}$, $\{X=x_2\}, \ldots$ hodisalarning ehtimollariniham, ya'ni$p_1=P(X=x_1)$, $p_2=P(X=x_2), \ldots$ Larniham ko'rsatish lozim.

5-ta'rif. Diskettasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari va ularning ehtimollari orasidagi moslikni tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deb ataladi.

Diskrettasodifiy miqdortaqsimot qonunini ifodalash usullarivashakllari turlichabo'lishi mumkin.

X diskrettasodifiy miqdor taqsimot qonuniberilishining eng soddashaklijadval bo'lib, bunda miqdorningbarcha mumkin bo'lgan qiymatlari yozilganva ularga mosehtimolliklar ko'rsatilgan bo'ladi:

$$X: x_1\ x_2\ \ldots\ x_n \ldots$$
$$P: p_1\ p_2\ \ldots\ p_n \ldots$$

$x_1, x_2, \ldots x_n$ qiymatlar, odatda, ortib borish, yoki kamayib borish tartibida yoziladi.

Bundan tashqari, $\{X=x_i\}$ hodisalarning ixtiyoriy ikkitasi birgalikdamasligi va $\{X=x_i\}$ hodisalar to'plami to'la guruh tashkil etganligi sababli

$$p_1+p_2+\ldots+p_n+\ldots=\sum_i p_i = 1$$

tenglikhar doim o'rinli bo'ladi. Ba'zan diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni grafik usulda-taqsimot ko'pburchagi yordamida ham beriladi.

Taqsimot ko'pburchagini hosil qilish uchun, abssissalar o'qida tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari, ordinatalar o'qida esaularga mos ehtimollar qo'yiladi, keyin esa (x_1, p_1), $(x_2, p_2), \ldots$ nuqtalarni kesmalar bilan tutashtiriladi.Taqsimot qonuni formula(analitik) usulidahamberiladi.

Misol. 2.Tanga 5martatashlandi. «Gerb» tomonning tushish soni X tasodifiy miqdor bo'lsin. X tasodifiy miqdorning mumkin

bo'lgan qiymatlari 0, 1, 2, 3, 4, 5 sonlardan iborat bo'ladi.Tasodifiy miqdorningbu qiymatlarniqabul qilish ehtimollari Bernulli formulasi yordamidahisoblanadi.Masalan, $P(X=3)=C_5^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32}$ vahakozo.Uholda

X	0	1	2	3	4	5
p	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

ko'rinishdagijadvalnihosilqilamiz.

Diskrettasodifiymiqdorlarning amalda ko'puchraydigantaqsimotqonunlari. Diskrettasodifiymiqdorlarning amalda ko'puchraydiganquyidagitaqsimotqonunlaribilantanishibchiqamiz.

1. **Binomialtaqsimotqonuni.**$n$ta erklitajriba o'tkazilyotganbo'lsin. Ularningharbirida Ahodisa bir xil$p$ehtimolbilanyuzbersin.$n$ta tajribada Ahodisaningyuzberishlarsonidaniborat$X$tasodifiymiqdorniqaraymiz. Butasodifiymiqdorga mosjadval

$$X:\ 0\ 1\ \ 2\ \ldots\ n$$
$$P:\ P_n(0)\ P_n(1)\ P_n(2) \ldots P_n(n)$$

ko'rinishda bo'lib, bunda

$$P_n(k)=C_n^k\, p^k q^{n-k} \qquad (k=0,1,2,\ldots,n).(1)$$

Bu jadvalda $P_n(k)$ $(k=0,1,2,\ldots,n)$ ehtimollik binomial formuladan foydalanib hisoblanganlig isababli yuqoridagi jadval bilan xarakterlanadigan taqsimot qonuni *binomial taqsimot qonuni* deb ataladi. (1) formula esa binomial taqsimotning analitik ifodasi deyiladi.

Misol. 3. Do'konga kirgan har bir xaridorning xarid qilish ehtimoli 0,25 ga teng bo'lsa, do'kondagi 4 ta xaridorning xarid qilishini X tasodifiy miqdor deb qarab uning taqsimot qonunini tuzing.

Yechish. X tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari: 0, 1, 2, 3, 4. $P_n(k)$ ehtimollarni Bernulli formulasi yordamida hisoblaymiz:

$$P_4(0)=C_4^0 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256},\ P_4(1)=C_4^1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{108}{256}$$

$$P_4(2)=C_4^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{54}{256},\ P_4(3)=C_4^3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{12}{256},$$

$$P_4(4)=C_4^4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{256};$$

Olingan ma'lumotlarni jadvalga joylashtirib

X:	0	1	2	3	4
p:	$\frac{81}{256}$	$\frac{108}{256}$	$\frac{54}{256}$	$\frac{12}{256}$	$\frac{1}{256}$

taqsimot qonunini hosil qilamiz.

Puasson taqsimot qonuni. n ta erklita jriba o'tkazilyotgan bo'lsin. Ularninghar birida A hodisa bir xil p ehtimol bilan yuz bersin. n ta tajribada A hodisaning yuz berishlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorni qaraymiz. Agar X tasodifiy miqdorga mos jadval

X: 0 1 2 …. k …

p: $p_0 p_1 p_2$ … p_k …

ko'rinishda bo'lib, X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan $\{x_k\}$ (k=0,1,2,...) qiymatlarining ehtimollari

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad (k=0,1,2,...),\quad \lambda=np=const \qquad (2)$$

formula bilan hisoblansa, X tasodifiy miqdor Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan deyiladi. (2) formula Puasson taqsimotining analitik ko'rinishi deyiladi.

Misol. 4. Qo'shma korxona iste'molchiga 3000 mingta sifatli mahsulot jo'natdi. Mahsulotning yo'lda shikastlanish ehtimoli 0,001ga teng bo'lsa, yo'lda shikastlangan mahsulotlar sonini X tasodifiy miqdor deb qarab uning taqsimot qonunini tuzing.

Yechish. Shartga asosan, $\lambda=np$=3000*0,001= 3, X:0,1,2,3,…3000. U holda (2) formula yordamida X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzamiz.

X: 0 1 …. 3000

p: $p_{3000}(0) p_{3000}(1) \ldots p_{3000}(3000)$

Geometrik taqsimot qonuni. Erkli tajribalar o'tkazilyotgan bo'lsin. Ularning har birida A hodisa bir xil p ehtimol bilan yuz bersin. A hodisa yuz berishi bilan tajriba to'xtatiladi. X tasodifiy miqdor A hodisaning birinchi ro'y berishigacha bo'lgan tajribalar soni bo'lsin. Agar (k-1)-tajribagacha A hodisa ro'y bermasdan k -tajribada ro'y bersa, bu murakkab hodisaningehtimoli

$$P(X=k)=q^{k-1}p \qquad (3)$$

formula bilan aniqlanadi. (3) formulada k=1 , 2, ... deb qarab

X: 0 1 2 …. k …

p: $p\,pq\,pq^2$ … pq^{k-1} …

jadvalni hosil qilamiz. Bu taqsimot qonuni geometrik taqsimot qonuni deb ataladi va (3) formula uning analitik ko'rinishi bo'ladi.

Misol. 5. X –kubikni tashlashda birinchi marta «6» ochko tushguncha o'tkaziladigan tajribalar soni bo'lsin. Ravshanki, bu holda X -diskret tasodifiy miqdor bo'lib, p=1/6 parametrli geometrik taqsimot qonuniga bo'ysinadi. Ya'ni

X: 1 2 3 …. k…

p: $\frac{1}{6}\ \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}\ \cdots\ \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}\cdots$

Gipergeometrik taqsimot qonuni. Ma'lumki, N ta detalning ichida M ta standart detal bo'lganda tasodifiy ravishda olingan n ta detalning orasida k ta standart detal bo'lishining ehtimoli

$$P_n(k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \qquad (4)$$

formula yordamida topiladi.

Agar X tasodifiy miqdorning

X: 0 1 2 …. k …

p: $P_n(0) P_n(1) P_n(2)$ … $P_n(k)$…

taqsimot qonunida $P_n(k)$ ehtimollar (4) formula yordamida hisoblansa, X tasodifiy miqdor gipergeometrik taqsimot qonuniga bo'ysinadi deyiladi va (4) formulani gipergeometrik taqsimotning analitik ko'rinishi deb qabul qilingan.

Amaliy mashg'ulot uchun yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

Misol. 6. Qutida 7 ta shar bo'lib ularning 4 tasi qora. Tasodifiy ravishda 3 ta shar olingan. Agar X tasodifiy miqdor olingan sharlar orasidagi oq sharlar sonidan iborat bo'lsa, uning taqsimot qonunini tuzing.

Yechish. X tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari: 0, 1, 2, 3. Bu qiymatlarniqabul qilish ehtimollarini (4)dan foydalanib hisoblaymiz:

$$P_3(0)=\frac{C_3^0 \cdot C_4^3}{C_7^3}=\frac{4}{35},\quad P_3(1)=\frac{C_3^1 \cdot C_4^2}{C_7^3}=\frac{18}{35},$$
$$P_3(2)=\frac{C_3^2 \cdot C_4^1}{C_7^3}=\frac{12}{35},\quad P_3(3)=\frac{C_3^3 \cdot C_4^0}{C_7^3}=\frac{1}{35}.$$

U holda quyidagi taqsimot qonuni hosil bo‘ladi:

$$X:\ 0\quad 1\quad 2\quad 3$$
$$p: \frac{4}{35}\ \frac{18}{35}\ \frac{12}{35}\ \frac{1}{35}$$

1-masala. Talabaning imtihon biletidagi savollarning har biriga javob berish ehtimoli 0,7 ga teng. Imtihon biletidagi 4 ta savolga bergan javoblari sonining taqsimot qonunini tuzing.

Yechish. X tasodifiy miqdor orqali talabaning javoblari sonini belgilasak, uning qabul qiladigan qiymatlari 0, 1, 2, 3, 4, 5 sonlardan iborat bo‘ladi. Ko’rinib turibdiki, n=4; p=0,7; q=0,3. Tasodifiy miqdorning bu qiymatlarni qabul qilish ehtimollari Bernulli formulasi yordamida hisoblanadi.

$$P_1 = P_4(0)=C_4^0(0,7)^0(0,3)^4=0,0051$$
$$P_2 = P_4(1)=C_4^1(0,7)^1(0,3)^3=0,0756$$
$$P_3 = P_4(2)=C_4^2(0,7)^2(0,3)^2=0,2646$$
$$P_4 = P_4(3)=C_4^3(0,7)^3(0,3)^1=0,4116$$
$$P_5 = P_4(4)=C_4^4(0,7)^4(0,3)^0=0,2401$$

U holda X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo’ladi:

X	0	1	2	3	4
P	0,0081	0,0756	0,2646	0,4116	0,2401

Tekshirish: 0,0081+0,0759+0,2646+0,4116+0,2401=1.

2-masala. Qurilma bir-biridan erkli ishlaydigan uchta elementdan iborat. Har bir elementning bitta tajribada ishdan chiqish ehtimoli 0,1 ga teng. Bitta tajribada ishdan chiqqan elementlar sonining taqsimot qonunini tuzing.

Yechish. X diskret tasodifiy miqdor orqali bitta tajribada ishdan chiqqan elementlar sonini belgilasak, uning qabul qiladigan qiymatlari 0, 1, 2, 3, 4, 5 sonlardan iborat bo‘ladi.

Bundan tashqari n=3; p=0,1; q=0,9 ekanligini hisobga olsak,

$$P_1 = P_3(0)=C_3^0(0,1)^0(0,9)^3=0,729$$
$$P_2 = P_3(1)=C_3^1(0,1)^1(0,9)^2=0,243$$
$$P_3 = P_3(2)=C_3^2(0,1)^2(0,9)^1=0,027$$
$$P_4 = P_3(3)=C_3^3(0,1)^3(0,9)^0=0,001.$$

U holda X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo‘ladi:

X	0	1	2	3
P	0,726	0,243	0,027	0,001

Mustaqil ishlash uchun misollar

1. Har o‘q uzishda o‘qning nishonga tegish ehtimol 0,8 ga teng bo‘lsa, otilgan 5 ta o‘qdan nishonga tekkanlari sonining taqsimot qonunini tuzing va taqsimot ko‘p burchagini chizing.
2. Qutida 10 ta sharbo‘libularning 6 tasiqora. Tasodifiy ravishda 5 ta shar olingan. Agar X tasodifiy miqdor olingan sharlar orasidagi oq sharlar sonidan iborat bo‘lsa, uning taqsimot qonunini tuzing.
3. Qutida 1000 ta detal bo‘lib har bir detalning yaroqsiz chiqish ehtimoli 0,003 ga teng. Olingan detallar uchun yaroqsizlarining taqsimot qonunini tuzing.
4. Qutida 11ta sharbo‘libularning 4 tasiqora. Tasodifiy ravishda 5 ta shar olingan. Agar X tasodifiy miqdor olingan sharlar orasidagi oq

sharlar sonidan iborat bo'lsa, uning taqsimot qonunini tuzing va taqsimot ko'p burchagini chizing.

5. Bankdan kredit olgan mijozlarning o'rtacha 20 % i kreditni o'z vaqtida qaytarmaydi. Berilgan 4 ta kreditdan o'z vaqtida qaytarilganlar sonidan iborat tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Tasodifiy miqdor ta'rifini bering.
2. Tasodifiy miqdorlarning qanday turlari bor?
3. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deb nimaga aytiladi?
4. Taqsimot qonuniqanday shakllarda berilishi mumkin?
5. Diskret tasodifiy miqdorlarning amalda ko'p uchraydigan taqsimot qonunlarini keltiring.

Tavsiya etiladigan mustaqil ta'lim va referat mavzulari

1. Styudent taqsimoti.
2. Gamma taqsimoti.
3. Koshi taqsimoti.
4. Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar.

3.2-§. Diskret tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari

Reja

1. Matematik kutilma va uning xossalari.
2. Dispersiya va uning xossalari.

Ma'lumki, X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni X miqdorni to'liq tavsiflab beradi. Ammo ko'pincha taqsimot qonuni noma'lum bo'lib, uni aniqlash katta qiyinchiliklar tug'diradi va biz kam ma'lumot bilan chegaralanishimizga to'g'ri keladi. Ba'zida esa tasodifiy miqdorni umumlashtiruvchi sonlarni qo'llash foydalidir. Bu sonlar tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari deb ataladi va

ularning vazifasi tasodifiy miqdorning eng muhim xususiyatlarini qisqa shaklda ifodalashdir.

Matematik kutilma va uning xossalari. Tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalaridan biri ***matematik kutilma*** deb ataladi. Matematik kutilma tasodifiy miqdorning o'rta qiymatiga taxminan tengdir. Juda ko'p masalalarning yechimini matematik kutilmani bilish orqali hal etish mumkin. Masalan, viloyatlarni taqqoslovchi ko'rsatkichlardan biri ularda yetishtirilgan hosilning o'rtachasi, ya'ni matematik kutilmasidir.

1-ta'rif. X diskret tasodifiy miqdor qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlarining mos ehtimollariga ko'paytmalari yig'indisiga uning matematik kutilmasi deb aytiladi.

X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni:

$$X:\ x_1\ x_2\ \dots\ x_n$$
$$p:\ p_1\ p_2\ \dots\ p_n$$

berilgan bo'lsin. U holda uning $M(X)$ -matematik kutilmasi

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i \quad (1)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari soni cheksiz, ya'ni X tasodifiy miqdor

$$X:\ x_1\ x_2\ \dots\ x_n\ \dots$$
$$p:\ p_1\ p_2\ \dots\ p_n\ \dots$$

taqsimotga ega bo'lsa, u holda uning matematik kutilmasi

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} x_ip_i \quad (2)$$

formula bilan aniqlanadi. Bunda oxirgi qator absolyut yaqinlashadi deb faraz qilinadi. Aks holda, bu tasodifiy miqdor matematik kutilmaga ega bo'lmaydi.

Misollar.

1.Taqsimot qonuni

$$X:\ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6$$
$$p:\ \tfrac{1}{6}\ \tfrac{1}{6}\ \tfrac{1}{6}\ \tfrac{1}{6}\ \tfrac{1}{6}\ \tfrac{1}{6}$$

ko'rinishda bo'lgan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

Yechish. (1) formuladan foydalanamiz:

$$M(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = 3{,}5$$

2. Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

Yechish. Ma'lumki, Puasson qonuni quyidagi jadval bilan aniqlanadi:

$$X:\ 0 \quad 1 \quad 2 \ \dots .\ k \dots$$
$$p:\ e^{-\lambda}\ \lambda e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}\ \dots\ \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\ \dots$$

U holda

$$M(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda.$$

Shunday qilib, Puasson taqsimotini xarakterlovchi parametr λ X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini bildirar ekan.

3. Agar A hodisaning ro'y berish ehtimoli p bo'lsa, bitta tajribada A hodisa ro'y berish sonlarining matematik kutilmasini toping.

Yechish. Bitta tajribada A hodisaning ro'y berishi sonlarini X tasodifiy miqdor desak, u faqat ikkita qiymat qabul qilishi mumkin: $x_1=1$ (A hodisa ro'y berdi), bunda $P(X=x_1)=p$; $x_2=0$ (A hodisa ro'y bermadi), bunda $P(X=x_2)=q$.. U holda:$M(X)=p$.

Xtasodifiy miqdor ustida $n$marta sinov o'tkazilib, uningnatijalari quyidagichabo'lsin:

$$X:\ x_1\ x_2\ \dots\ x_{k\dots}$$
$$n:\ n_1\ n_2\ \dots\ n_{k\dots}$$

Yuqoridagi satr X miqdorning kuzatilgan qiymatlarini, pastki satr esa bu qiymatlarning chastotalarini bildiradi, ya'ni x_i $(i=\overline{1,k})$ qiymatni X miqdor n_i marta qabul qilgan.

$\bar{X}$ orqali kuzatilgan barcha qiymatlarning o'rta arifmetigini belgilaylik, u holda

$$\bar{X}=\frac{x_1n_1+x_2n_2+\dots+x_kn_k}{n}.$$

Demak, $\bar{X}=M(X)$, ya'ni X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi uning kuzatiladigan qiymatlari o'rta arifmetigiga taqriban teng.

Matematik kutilma quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. O'zgarmas miqdorning matematik kutilmasi o'zgarmasning o'ziga teng:

$$M(C)=C.$$

Isbot. C o'zgarmas miqdorni yagona C qiymatni 1ga teng ehtimol bilan qabul qiladigan tasodifiy miqdor deb qarash mumkin. Shuning uchun, $M(C)=C\cdot 1=C$.

1-eslatma. X diskrettasodifiy miqdorning o'zgarmas Ckattalikka ko'paytmasiniquyidagicha aniqlaymiz:

$$X:\ x_1,x_2,\ \dots\ x_n \Rightarrow CX:\ Cx_1,Cx_2,\ \dots\ Cx_n.$$

2-xossa. O'zgarmas ko'paytuvchini matematik kutilma belgisi ostidan chiqarish mumkin:

$$M(CX)=CM(X).$$

Isbot. X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

$$X:\ x_1\ x_2\ \dots\ x_n$$
$$p:\ p_1\ p_2\ \dots\ p_n$$

ko'rinishda bo'lsin. U holda 1-eslatmaga asosan,

$$CX:\ Cx_1\ Cx_2\ \dots\ Cx_n$$
$$p:\ p_1\ p_2\ \dots\ p_n$$

Bundan CX tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini hisoblaymiz

$$M(CX)=Cx_1p_1+Cx_2p_2+\dots+Cx_np_n=CM(X).$$

3-xossa. Chekli sondagitasodifiy miqdorlar yig'indisining matematik kutilmasi ularningmatematikkutilmalari yig'indisiga teng:

$$M(X_1+X_2+\dots+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+\dots+M(X_n)$$

4-xossa. Chekli sondagi bog'liqmas tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilmasi ular matematik kutilmalarining ko'paytmasiga teng:

$$M(X_1X_2\dots X_n)=M(X_1)M(X_2)\dots M(X_n).$$

3-xossadan va 3-misoldan foydalanib quyidagi teoremani isbotlash mumkin.

1-teorema. n ta bog'liqmas tajribalarda A hodisa ro'y berishining matematik kutilmasi: $M(X)=np$.

Matematik kutilmalarining tengligi tasodifiy miqdorlarning qabul qiladigan qiymatlari bir xil deb xulosa chiqarishga imkon bermaydi.

Masalan,

$$X:\ -0{,}5 0\quad 0{,}5 \qquad Y:\ -200\quad 20$$
$$p:\ 0{,}3 0{,}4 0{,}3 \qquad p:\ 0{,}3 0{,}4 0{,}3$$

tasodifiy miqdorlarda $M(X)=M(Y)=0$, ammo ularning mumkin bo'lgan qiymatlari turlichadir. Shu sababli tasodifiy miqdorning tarqoqligini aniqlovchi ikkinchi sonli xarakteristika-*dispersiya* tushunchasini kiritamiz.

Dispersiya tushunchasini kiritishdan oldin tasodifiy miqdorning matematik kutilmasidan chetlanishi tushunchasini kiritib olamiz.

2-ta'rif. Tasodifiy miqdor va uning matematik kutilmasi orasidagi farqni uning chetlanishi deb ataymiz va $X\text{-}M(X)$ ko'rinishda belgilaymiz.

Tasodifiy miqdor chetlanishining muhim xossasini ko'rsatuvchi quyidagi teoremani keltiramiz (teoremani mustaqil isbotlang) .

2-teorema. Tasodifiy miqdor chetlanishining matematik kutilmasi nolga teng:

$$M(X\text{-}M(X))=0.$$

Dispersiya va uning xossalari. Amaliyotda tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlarini uning o'rtachasi atrofida joylashish tarqoqligini baholash zarurati tez-tez uchrab turadi. Masalan, merganlik darajasini baholashda. Shu sababli, dispersiya tushunchasi kiritiladi, chunki tasodifiy miqdor chetlanishi qiymatlar tarqoqligini baholay olmasligi 2-teoremadan ko'rinib turibdi.

3-ta'rif. X tasodifiy miqdorning $D(X)$-dispersiyasi deb, uning chetlanishi kvadratining matematik kutilmasiga aytiladi:

$$D(X)= M(X\text{-}M(X))^2 \quad (3)$$

Diskret tasodifiy miqdor uchun bu formula ushbu ko'rinishni oladi:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i - M(X))^2 p_i \quad (4)$$

4-ta'rif.X tasodifiy miqdorning $\sigma(X)$ -o'rtacha kvadratik chetlanishi deb, dispersiyadan olingan arifmetik kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)} \quad (5)$$

Dispersiyaning o'lchamligi tasodifiy miqdor o'lchamligining kvadratiga tengdir. O'rtacha kvadratik chetlanishniki esa tasodifiy miqdor o'lchami bilan bir xil bo'ladi.

Agar X biror bir qimmatbaho qog'ozning daromadliligi bo'lsa, $M(X)$ ning o'rtacha daromadliligini, $D(X)$ esa riskini ifodalaydi.

Misol. Agar A hodisaning ro'y berish ehtimoli p gateng bo'lsa, u holda A hodisaning bitta sinovda ro'y berish soniningmatematik kutilmasi, dispersiyasi vao'rtachakvadratik chetlanishinitoping.

Yechish. Butasodifiy miqdorningtaqsimot qonuni quyidagichabo'ladi:

X:	0	1
p:	q	p

U holda

$$M(X)=0\cdot q+1\cdot p = p,$$

$$D(X)=(0-p)^2\cdot q + (1-p)^2\cdot p = qp^2 + pq^2(p+q) = pq.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{pq}$$

Dispersiyani hisoblash uchun quyidagi formuladan foydalanish qulayroqdir:

$$D(X)=M(X^2)\text{-}M^2(X)$$

Tasodifiy miqdor dispersiyasi quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. O'zgarmas miqdorning dispersiyasi nolga teng:

$$D(C)=0$$

Isbot.C o'zgarmas miqdorni C qiymatini 1 ehtimol bilan qabul qiladi deb qarash mumkin. U holda

$$M(C)=0 \text{ va } D(C)=(C\text{-}C)^2\cdot 1 = 0$$

2-xossa. O'zgarmas ko'paytuvchini dispersiya belgisidan tashqariga kvadratiga oshirib chiqarish mumkin:

$$D(CX)=C^2D(X).$$

3-xossa.

Cheklisondagio'zarobog'liqmastasodifiymiqdorlaryig'indisiningdispersiyasiulardispersiyalariningyig'indisiga teng:

$$D(X_1+X_2+...+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+...+D(X_n)$$

Natija.Bog'liqmasikkitatasodifiymiqdorlar ayirmasiningdispersiyasiulardispersiyalariningyig'indisiga teng.

$$D(X_1\text{-}X_2)=D(X_1)+D(X_2)$$

Ushbunatija ikkitadanortiqtasodifiymiqdorlaruchunhamo'rinliekanliginiisbotlashqiyin emas.

Misol.Quyidagitaqsimotqonunibilanberilgan$X$diskrettasodifiymiqdorningmatematikkutilmasi, dispersiyasiva o'rtachakvadratchetlanishinihisoblang.

X:	-2	1	3	6
p:	$0{,}4$	$0{,}2$	$0{,}1$	$0{,}3$

Yechish.

$$M(X)=-2\cdot 0{,}4+1\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}1+6\cdot 0{,}3=1{,}5,$$

$$D(X)=M(X-M(X))^2=$$

$$=(-2-1{,}5)^2\cdot 0{,}4+(1-1{,}5)^2\cdot 0{,}2+(3-1{,}5)^2\cdot 0{,}1+(6-1{,}5)^2\cdot 0{,}3=11{,}25$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{11{,}25}\approx 3{,}36$$

Biz dispersiyani ta'rif bo'yicha hisobladik. Endi $D(X)=M(X^2)-M^2(X)$ formula bo'yicha hisoblaylik. Buning uchun dastlab X^2 tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzib olamiz.

X^2:	4	1	9	36
p:	0,4	0,2	0,1	0,3

$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=4\cdot 0{,}4+1\cdot 0{,}2+9\cdot 0{,}1+36\cdot 0{,}3-1{,}5^2=13{,}5-2{,}25=11{,}25$

Endi tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'lanish darajasini aniqlashga yordam beruvchi ba'zi bir tushunchalarni kiritamiz.

5-ta'rif. X va Y tasodifiy miqdorlarning korrelyatsiya momenti (yokikovariatsiyasi)deb, quyidagi songa aytiladi:

$$K_{xy}=M[(X-M(X)(Y-M(Y))].$$

X va Y tasodifiy miqdorlar diskret bo'lsa, u holda bu formula quyidagi ko'rinishini oladi:

$$K_{xy}=\sum_{i,j}(x_i-M(X))(y_j-M(Y))p_{ij},$$

Bunda $p_{ij}=P(X=x_i;Y=y_j)$.

Korrelyatsiya momenti ifodasinimatematik kutilma xossalari asosidaquyidagicha almashtirilish mumkin;

$$M[(X-M(X)(Y-M(Y))]=M[XY-XM(Y)-YM(X)+M(X)M(Y)=$$

$$=M(XY)-M(X)M(Y)-M(Y)M(X)+M(X)M(Y)=M(XY)-M(X)M(Y).$$

3-teorema. Agar tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq bo'lmasa, u holda korrelyatsiya momenti nolga teng bo'ladi.

6-ta'rif. X va Y tasodifiy miqdorlarning korrelyatsiya koeffitsienti deb

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} \quad (6)$$

tenglik bilan aniqlanadigan kattalikka aytiladi.

Korrelyatsiya momenti uchun quyidagi

$$|K_{xy}|\le\sqrt{D_xD_y}$$

tengsizlik o'rinli bo'lishini ko'rsatish mumkin,chunki $|r_{xy}|\le 1$

Agar X va Y tasodifiy miqdorlar bog'liqmas bo'lsa, u holda ularning korrelyatsiya koeffitsienti nolga tengligini ko'rsatish qiyin emas.

Amaliy mashg'ulot uchun yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

1-masala. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

X	-0,4	6	10
P	0,2	0,3	0,5

Yechish. $M(X)=-0{,}4\cdot 0{,}2+6\cdot 0{,}3+10\cdot 0{,}5=6.$

2-masala. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi, dispersiyasi hamda o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

X	0	1	2	3	4
P	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

Yechish. $M(X)=0\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}08+4\cdot 0{,}02=1{,}32.$

X^2 tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo'ladi:

X^2	0	1	4	9	16
P	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

$$M(X^2)=0\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}4+4\cdot 0{,}3+9\cdot 0{,}08+16\cdot 0{,}02=2.64.$$

U holda: $D(X)=M(X^2)-M^2(X)=2{,}64-(1{,}32)^2=2{,}64-1{,}7424=1{,}8976.$

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{1{,}8976}=1{,}3775.$

3-masala. X va Y tasodifiy miqdorlar erkli. Agar $D(X)=5,\ D(Y)=6$ ekanligi ma'lum bo'lsa, $Z=3X+2Y$ tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Yechish.

$$D(Z)=D(3X+2Y)=9D(X)+4D(Y)=9\cdot 5+4\cdot 6=69.$$

Mustaqil ishlash uchun misollar

1. Qutida 11 ta shar bo'lib ularning 4 tasiqora.Tasodifiy ravishda 5 ta shar olingan. Agar X tasodifiy miqdor olingan sharlar orasidagi oq sharlar sonidan iborat bo'lsa, uning taqsimot qonunini tuzing va uning sonli xarakteristikalarini aniqlang.

2. Omborga 2000 ta mahsulot olib kelindi. Bu mahsulotlarning yo'lda yaroqsiz holga kelish ehtimoli 0,05 ga teng. X tasodifiy miqdorni ombordagi mahsulotlarning yaroqsizlari deb qarab, uning taqsimot qonunini tuzing va matematik kutilmasini aniqlang.

3.Tanga 3 marta tashlandi. X tasodifiy miqdorni tanganing «gerb» tomoni tushishlar soni deb qarab uning taqsimot qonunini tuzing va dispersiyasini aniqlang.

4. Ikki mergan nishonga qarata navbat bilan o'q uzmoqda. Ularning nishonga o'qni tekkizish ehtimollari mos ravishda: 0,75 va 0,9. Har bir merganda ikkitadan o'q bo'lib, o'q nishonga tegishi bilan otishni to'xtatadilar. Agar X tasodifiy miqdor otilgan o'qlar sonidan iborat bo'lsa uning taqsimot qonunini tuzing va matematik kutilmasini aniqlang.

5. Uchta qimmatbaho qog'ozdan daromad olish ehtimollari mos ravishda 0.6 ; 0.7 va 0.8 ga teng. Daromad olinadigan qimmatbaho qog'ozlar sonining taqsimot qonunini tuzing va matematik kutilishini toping.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Tasodifiy miqdor matematik kutilmasi va dispersiyasi ta'riflarini ayting.
2. Matematik kutilma va dispersiya tasodifiy miqdorning qaysi jihatlarini xarakterlaydi?
3. Matematik kutilmava dispersiyaning xossalarini keltiring.
4. Kovariatsiya nima?

Tavsiya etiladigan mustaqil ta'lim va referat mavzulari

1. Bir xil taqsimlangan o'zaro erkli tasodifiy miqdorlar.
2. Boshlang'ich va markaziy momentlar.
3. Asosiy diskret taqsimotlarning sonli xarakteristikalari.

3.3-§. Tasodifiy miqdorlarning taqsimot va zichlik funksiyalari

Reja

1. Taqsimot funksiyasi va uning xossalari.
2. Zichlik funksiyasi va uning xossalari

Taqsimot funksiyasi va uning xossalari. Ma'lumki diskret tasodifiy miqdorlarninig berilish usullaridan biri taqsimot qonunini, ya'ni u qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar ro'yxati va bu qiymatlarni qabul qilish ehtimollari ko'rsatilgan jadvalni tuzishdan iborat edi. Diskret tasodifiy miqdorlarning bu ko'rinishdagi berilish usullarini uzluksiz tasodifiy miqdorlaruchun qo'llab bo'lmaydi. Chunki uzluksiz tasodifiy miqdorlarning qabulqilishi mumkin bo'lgan qiymatlar ro'yxatinituzish mumkin emas. Shu sababliuzluksiz tasodifiy miqdorlarni ta'riflash uchun taqsimot funksiyasi tushunchasi kiritiladi.

1-ta'rif. X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deb, uning x (x –ixtiyoriy haqiqiy son)dan kichik qiymatlarni qabul qilish ehtimolini aniqlovchi

$$F(x)=P(X<x) \qquad (1)$$

Funksiyaga aytiladi.

Ba'zan $F(x)$-funksiyani integral taqsimot funksiyasi deb ham ataladi.

Endi butaqsimot funksiyasidan foydalanib uzluksizva diskret tasodifiy miqdorlarning qat'iy ta'rifini berish mumkin.

2-ta'rif. Agartasodifiy miqdorning $F(x)$-taqsimot funksiyasi uzluksizva differentsiallanuvchi bo'lsa,tasodifiy miqdor uzluksiz tasodifiy miqdordeyiladi.

3-ta'rif. Agartasodifiy miqdorning $F(x)$ -taqsimot funksiyasi chekli yokisanoqli sondagi I tur uzulishlarga ega bo'lsa,tasodifiy miqdordiskret tasodifiy miqdor deyiladi.

Taqsimotfunksiya quyidagi xossalarga ega.

1-xossa.Taqsimotfunksiyaning qiymatlari [0;1] kesmagategishli:

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

Isbot: Bu xossaning isbotitaqsimot funksiyani ehtimol sifatidata'riflanishdan, ya'ni $F(x)=P(X< x)$ ekanligidan kelib chiqadi.

2-xossa.Taqsimot funksiyasikamaymaydigan funksiyadir, ya'ni$x_1< x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$.

Isbot:Faraz qilamiz $x_1< x_2$bo'lsin,u holda $(X< x_2)$oraliqni quyidagichayozib olish mumkin

$(X< x_2)=(X< x_1) + (x_1 \leq X < x_2)$. Bunda $(X< x_1), (x_1 \leq X < x2$ tasodifiy hodisalar birgalikda emasligidan quyidagi tenglikni yozish mumkin

$$P(X< x_2)=P(X< x_1) + P(x_1 \leq X < x_2).$$

Endi taqsimot funksiyaning ta'rifidan foydalansak

$$F(x_2)-F(x_1)=P(x_1 \leq X < x_2) \qquad (2)$$

tenglikni hosil qilamiz.

3-xossa. Agar tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari $(a;b)$ intervalga tegishli bo'lsa, u holda

$$\lim_{x\to a-0} F(x) = 0, \lim_{x\to b+0} F(x) = 1, \qquad (4)$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Misollar.

1. X tasodifiy miqdor

$$F(x)=\begin{cases} 0, \ agar\ x \leq -1, \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}, agar -1 < x \leq 3, \\ 1, agar\ x > 3 \end{cases}$$

taqsimot funksiya bilan berilgan bo'lsin. Sinash natijasida X tasodifiy miqdor (0; 2) intervalga tegishli qiymatlarni qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish.

$$P(0< X < 2) = F(2) - F(0) = \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Misol.

2. X diskret tasodifiy miqdor quyidagi

X:	*1*	*4*	*8*
p:	*0,3*	*0,1*	*0,6*

taqsimot qonuni bilan berilgan bo'lsin. Uning taqsimot funksiyasini toping.

Yechish.

$$F(x)=\begin{cases} 0, agar\ x \leq 1, \\ 0{,}3, agar\ 1 < x \leq 4, \\ 0{,}4, agar\ 4 < x \leq 8 \\ 1, agar\ x > 8. \end{cases}$$

Zichlik funksiyasi va uning xossalari. Yuqorida uzluksiz tasodifiy miqdorlarni taqsimot funksiyalari yordamida aniqlagan edik. Ammo uzluksiz tasodifiy miqdorlarni faqat taqsimot funksiyasi yordamida emas, balki boshqa funksiyalar bilan ham aniqlash mumkin. Buning uchun zichlik (differensial) funksiyasi tushunchasini kiritishimiz kerak bo'ladi.

3-ta'rif. Tasodifiy miqdorning zichlik (differensial) funksiyasi deb, taqsimot funksiyasidan olingan birinchi tartibli hosilaga aytiladi va quyidagicha aniqlanadi

$$F'(x)=f(x). \qquad (6)$$

Uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun zichlik funksiyasi muhim ahamiyatga ega bo'lib, bu funksiya yordamida uzluksiztasodifiy miqdorlarning barcha xarakteristikalarini aniqlash mumkin. Bu yerda ularning ba'zilarini keltirib o'tamiz.

1-teorema. X uzluksiz tasodifiy miqdorning $(a;b)$ intervalga tegishli qiymatlarni qabul qilishi ehtimoli zichlik funksiyasidan a dan b gacha olingan aniq integral bilan aniqlanadi:

$$P(a< X < b) = \int_a^b f(x)dx (7)$$

Isbot. Malumki, $P(a\leq X < b) = F(b) - F(a)$.

Agar bu yerda Nyuton-Leybnits formulasi va zichlik funksiyasining ta'rifi (6) ifodadan foydalansak, quyidagini hosil qilamiz

$$P(a< X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Bundan tashqari, X tasodifiy miqdorning $f(x)$ zichlik funksiyasi ma'lum bo'lsa uning $F(x)$ taqsimot funksiyasini topish uchun quyidagi aniqmas integraldan foydalaniladi

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \quad (8)$$

Tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. $f(x)$-zichlik funksiyasi nomanfiy funksiyadir, ya'ni $f(x) \geq 0$.

Isbot. Bu xossa $f(x)$ zichlik funksiyasikamaymaydigan $F(x)$ taqsimot funksiyaninghosilasi ekanligidan kelib chiqadi.

2-xossa. Agar tasodifiy miqdor butun sonlar o'qida aniqlangan bo'lsa quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \quad (9)$$

Isbot. Nyuton-Leybnits formulasi va zichlik funksiyasining ta'rifiga asosan;

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x) = 1 - 0 = 1.$$

1-eslatma. Agar X tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari $(a;b)$ oraliqdan iborat bo'lsa, u holda yuqoridagi formula

$$\int_a^b f(x)dx = 1 \quad (10)$$

ko'rinishini oladi. Bu formula geometrik nuqtai nazardanOx o'q,$f(x)$ funksiya, $x=a$ va $x=b$to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi 1gatengligini bildiradi.

2-eslatma. Zichlik funksiyasi faqat uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchunmavjud.

Amaliy mashg'ulot uchun yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

masalalar

1-masala. X –diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan.

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Uning taqsimot funksiyasini toping.

Yechish. Ko'rinib turibdiki, $x\in(-\infty;-2]$ uchun $X < x$ hodisa mumkin bo'lmagan hodisa bo'ladi, ya'ni $F(x) = 0$.

Endi $x\in(-2;-1]$bo'lsin. U holda, $F(x) = P(X < x)$=$P(X = -1)$=0,1.

Agar $x\in(-1;0]$bo'lsa,

$F(x) = P(X < x)$=$P(X = -1) + P(X = 0)$=0,1+0,2=0,3.

Xuddi shuningdek, $x\in(0;1]$bo'lsa, $F(x)$ =0,1+0,2+0,2=0,5.

Agar $x\in(1;2]$ bo'lsa, $F(x)$ =0,1+0,2+0,2+0,4=0,9.

Agar $x > 2$ bo'lsa, $F(x) = P(X < x)$=1 bo'ladi. Chunki ixtiyoriy $x > 2$ uchun $X < x$ hodisa muqarrar hodisa bo'ladi.

Shunday qilib, $F(x)$ taqsimot funksiyaning analitik ifodasini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$F(x)=\begin{cases} 0, agar\ x \leq -2, \\ 0{,}1, agar -2 < x \leq -1, \\ 0{,}3, agar -1 < x \leq 0 \\ 0{,}5, agar\ 0 < x \leq 1 \\ 0{,}9, agar\ 1 < x \leq 2 \\ 1, agar\ x > 2. \end{cases}$$

2-masala. X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot funksiya bilan berilgan:

$$F(x)=\begin{cases} 0, agar\ x \le -1\ bo'lsa, \\ \frac{3}{4}x+\frac{3}{4}, agar -1 < x \le \frac{1}{3}\ bo'lsa, \\ 1, agar\ x > \frac{1}{3}\ bo'lsa \end{cases}$$

Sinov natijasida X tasodifiy miqdorning $(0;\frac{1}{3})$ intervalda yotgan qiymatini qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish. Taqsimot funksiya quyidagi xossaga ega:

$$P(a< X < b) = F(b) - F(a)$$

Bu formulaga a=0, b=1/3 ni qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P(0< X < \tfrac{1}{3}) = F(\tfrac{1}{3}) - F(0)=[\tfrac{3}{4}x+\tfrac{3}{4}]_{x=\frac{1}{3}} - [\tfrac{3}{4}x+\tfrac{3}{4}]_{x=0}=\tfrac{1}{4}.$$

3-masala. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x)=\begin{cases} 0, agar\ x \le 0\ bo'lsa, \\ cosx, agar\ 0 < x \le \frac{\pi}{2}\ bo'lsa, \\ 0, agar\ x > \frac{\pi}{2}\ bo'lsa \end{cases}$$

$F(x)$ taqsimot funksiyani toping.

Yechish. $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ formuladan foydalanamiz. Agar $x \le 0\ bo'lsa$, $f(x)$=0, demak $F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$.

Agar $0 < x \le \frac{\pi}{2}\ bo'lsa$, $F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} costdt = sinx$.

Agar $x > \frac{\pi}{2}\ bo'lsa$, $F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} costdt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} 0dt = 1$.

Demak, izlanayotgan taqsimot funksiya quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$F(x)=\begin{cases} 0, agar\ x \le 0\ bo'lsa, \\ sinx, agar\ 0 < x \le \frac{\pi}{2}\ bo'lsa, \\ 1, agar\ x > \frac{\pi}{2}\ bo'lsa \end{cases}$$

Mustaqil ishlash uchun misollar

1. Xuzluksiztasodifiymiqdorningzichlikfunksiyasiberilgan.

$$f(x)=\begin{cases} 0, agar\ x \le \frac{\pi}{6} \\ 3sin3x, agar\ \frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{3}, \\ 0, agar\ x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Uning $F(x)$ taqsimot funksiyasini toping.

2. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi (0;1) intervalda $f(x)=arcctgx$ kabi aniqlangan. Bu intervaldan tashqarida $f(x)=0$. C o'zgarmas parametrni toping.

3. X uzluksiz tasodifiy miqdor

$$f(x)=\begin{cases} 0, agar\ x < 0, \\ 2e^{-2x}, agar\ x \ge 0. \end{cases}$$

qonun bo'yicha taqsimlangan. Sinov natijasida X tasodifiy miqdorning (0,3;1) oraliqqa tushishi ehtimolini toping.

4. Mumkin bo'lgan qiymatlari (1;4) oraliqda yotuvchi X–uzluksiz tasodifiy miqdor x=4 nuqtada maksimumga erishadigan F(x)=ax^2+bx+c taqsimot funksiyasiga ega. Noma'lum a,b,c parametrlarni toping va $P(2<x<3)$ ehtimolni hisoblang.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Taqsimotfunksiyava zichlik funksiyasi ta'riflarini keltiring.
2. Diskret tasodifiy miqdor uchun taqsimot funksiya, zichlik funksiyasi tushunchalari o'rinlimi?
3. Taqsimotfunksiya xossalarini keltiring.
4. Zichlik funksiya xossalarini keltiring.

Tavsiya etiladigan mustaqil ta'lim va referat mavzulari

1. Aniq va aniqmas integral.

2. Xos va xosmas integral.
3. Funksiyaning uzilish nuqtalari va ularning turlari.
4. Uzluksiz funksiya va uning xossalari.

10-§. Uzluksiz tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari.Amalda ko‘p uchraydigan uzluksiz taqsimot funksiyalari

Reja

1. Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasi
2. Tekis taqsimot qonuni.
3. Normal taqsimot qonuni.
4. Ko‘rsatkichli taqsimot.

Diskret tasodifiy miqdorlar kabi uzluksiz tasodifiy miqdorlarda ham matematik kutilma va dispersiya tushunchalari kattaahamiyatga ega. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun bu tushunchalar quyidagicha kiritiladi.

1-ta’rif. Mumkin bo‘lgan qiymatlari $(a;b)$ intervalga tegishli bo‘lgan X uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb,

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx \quad (1)$$

tenglik bilan aniqlanuvchi kattalikka aytiladi.

Agar$X$uzluksiz tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlar Ox o‘qqa tegishli bo‘lsa, u holda matematik kutilma formulasi quyidagi ko‘rinishni oladi

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad (2)$$

Bu holatda xosmas integral absolyut yaqinlashuvchi, ya’ni

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx$$

integralning qiymati mavjud deb faraz qilinadi.

2-ta’rif. Uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb uning chetlanishi kvadratining matematik kutilmasiga aytiladi.

Agar tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari $(a;b)$ intervalga tegishli bo‘lsa, u holda uning dispersiyasi uchun

$$D(X)=\int_a^b (x-M(X))^2 f(x)dx \quad (3)$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Agar tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari Ox o‘qqa tegishli bo‘lsa, u holda uning dispersiyasi uchun

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} (x-M(X))^2 f(x)dx \quad (4)$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasini hisoblash uchun (3) va (4) formuladan foydalanish ba’zan noqulay hisoblanadi, shu sababli dispersiyani hisoblash uchun (3) formulaning qulay ko‘rinishini keltirib chiqaramiz.

$$D(X)=\int_a^b (x-M(X))^2 f(x)dx=\int_a^b x^2 f(x)dx -$$
$$2abxMXfxdx+$$
$$+\int_a^b M^2(X)f(x)dx = M(X^2) -$$
$$2M(X)\int_a^b xf(x)dx + M^2(X)\int_a^b f(x)dx =$$
$$= M(X^2) - M^2(X).$$

(4) formulaga ham bu ko‘rinishdagi formulani keltirib chiqarish mumkin. Shunday qilib, ko‘p hollarda dispersiyani hisoblashuchun

$$D(X)= M(X^2)-M^2(X) \quad (5)$$

formuladan foydalaniladi.

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)} \quad (6)$$

formula bilan aniqlanuvchi kattalik uzluksiz tasodifiy miqdorning o‘rtacha kvadratik chetlanishi deyiladi.

1-eslatma. Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi va dispersiyasi uchun ham diskret tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi va dispersiyalariniki kabi xossalar o‘rinli bo‘ladi.

Misol.

1. Ushbu

$$F(x)=\begin{cases} 0, agar\ x \le 0, \\ x, agar\ 0 < x \le 1, \\ 1, agar\ x > 1 \end{cases}$$

taqsimot funksiyasi bilan berilgan$X$ tasodifiy miqdorningmatematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

Yechish:Ma'lumki

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, agar\ x < 0, \\ 1, agar\ 0 < x < 1, \\ 1, agar\ x > 1 \end{cases}$$

(1) formuladan foydalanib X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini topamiz:

$$M(X)=\int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \frac{1}{2}.$$

(5) formuladan foydalanib X tasodifiy miqdorning dispersiyasini topamiz:

$$D(X)=\int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}.$$

Endi uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun amalda ko'p uchraydigan ba'zi taqsimot va zichlik funksiyalarni hamda bu funksiyalarning xossalarini ko'rib chiqamiz.

1. Tekis taqsimot qonuni.

3-ta'rif. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases} 0, agar\ x \le a, \\ \frac{1}{b-a}, agar\ a < x \le b, \\ 0, agar\ x > b \end{cases}$$

ko'rinishda bo'lsa bu tasodifiy miqdor *(a ,b)* oraliqda tekis taqsimot qonuniga bo'ysinadi deyiladi.

$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ formuladan foydalanib bu tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini topamiz.

1) Agar $x\le a$ bo'lsa,u holda $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0.$

2) Agar $a < x \le b$ bo'lsa,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_a^x \frac{dt}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}.$$

3) Agar $x > b$ bo'lsa,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int_a^b f(t)dt + \int_b^x f(t)dt = 0 + \frac{b-a}{b-a} + 0 = 1.$$

Demak,

$$F(x)=\begin{cases} 0, agar\ x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a}, agar\ a < x \le b, \\ 0, agar\ x > b \end{cases} \qquad (8)$$

Odatda, (7) zichlik funksiyasi bilan berilgan uzluksiz tasodifiy miqdorni *(a ,b)* oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.

*(a ,b)*oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi uchun

$$M(X)=\frac{a+b}{2},$$

dispersiyasi uchun esa

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

2. Normal taqsimot qonuni.

4-ta'rif. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (9)$$

ko'rinishda bo'lsa bu tasodifiy miqdor normal taqsimot qonuniga bo'ysinadi deyiladi.

Bu egri chiziq normal egri chiziq (Gauss egri chizig'i) deb ataladi.

Differensial hisoblash metodlaridan foydalanib $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ funksiyani tekshirsak u quyidagi xossalarga ega bo'ladi.

1. Funksiya butun sonlar o'qida aniqlangan.
2. x ning barcha qiymatlarida funksiya grafigi Ox o'qidan yuqorida yotadi.
3. Ox o'q funksiya grafigining gorizontal asimptotasi hisoblanadi.
4. $x=a$ nuqtada funksiya maksimumga erishadi va $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$qiymatni qabul qiladi.
5. $x=a$ chiziqqa nisbatan funksiya grafigi simmetrik joylashgan.
6. $\left(a - \sigma, \frac{1}{\sigma e\sqrt{2\pi}}\right)$ va $\left(a + \sigma, \frac{1}{\sigma e\sqrt{2\pi}}\right)$ nuqtalar funksiya grafigining burilish nuqtalari hisoblanadi.

(9) formulada ko'rinib turibdiki, normal taqsimot qonuniga bo'ysinuvchi uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi ikki: a va σ (σ-sigma) parametrlar bilan aniqlanadi. Demak, normal taqsimot qonuniga bo'ysinuvchi uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini aniqlash uchun shu ikkita parametrning qiymatlarini bilish kifoya ekan. Bu parametrlarning ehtimoliy ma'nosi quyidagichadir: a parametr normal taqsimot qonuniga bo'ysinuvchi tasodifiy miqdorning matematik kutilmasiga, σ -uning o'rtacha kvadratik chetlanishiga teng.

Darhaqiqat, (9) formula bilan aniqlanuvchi tasodifiy miqdorning aniqlanish sohasi (-∞ ;∞) bo'lganligi sababli (2) formulaga asosan:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Bu integralni hisoblash uchun yangi $z=\frac{x-a}{\sigma}$ o'zgaruvchi kiritamiz.

Bundan $x=z\sigma+a \Rightarrow dx=\sigma dz$, u holda

$$M(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \sigma ze^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=0+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = a.$$

Shunday qilib,$M(X)=a$, ya'ni normal taqsimotning matematik kutilmasi$a$parametrga teng.Xuddishunga o'xshash, $D(X)=\sigma^2$ekanligini ko'rsatish mumkin.

2-eslatma. Umumiy normal taqsimot qonuni deb, a va σ parametrlarning qiymatlari ixtiyoriy bo'lgan normal taqsimot qonunigaaytiladi.

Normalangan normaltaqsimot qonuni deb, a =0 va σ=1 parametrli normaltaqsimot qonuniga aytiladi.Harqanday umumiy normaltaqsimot qonunini normalangantaqsimot qonuniga keltirish mumkin. Masalan, X tasodifiy miqdor$a$ va σ parametrli normal taqsimot qonuniga bo'ysinuvchitasodifiy miqdor bo'lsa, u holda $Z=\frac{X-a}{\sigma}$almashtirish bilan uni normalangantaqsimot qonunigakeltirish mumkin bo'ladi, chunki $M(Z)=0$, $\sigma(Z)=1$. Normalangan taqsimotning zichlik funksiyasi

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (10)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bu funksiyaning qiymatlarjadvali ehtimollarnazariyasiga oid ko'plab adabiyotlarda keltirilgan (1-ilovaga qarang).

3-eslatma. Umumiy normal taqsimot funksiyasi deb,

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}}dy \quad (11)$$

funksiyaga, normalangantaqsimot funksiyasi deb esa,

$$F_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}dy \quad (12)$$

funksiyaga aytiladi.

3. Ko'rsatkichli taqsimot.

*5-ta'rif.*Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases} 0, agar\ x \le 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, agar\ x > 0. \end{cases} \quad (13)$$

ko'rinishda bo'lsa bu tasodifiy miqdor ko'rsatkichli taqsimot qonuniga bo'ysinadi deyiladi. (bu yerda λ>0-o'zgarmas musbat son).

Ko'rsatkichli taqsimot qonuniga bo'ysinuvchi tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini topamiz: (x > 0)

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0 + \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Demak,

$$F(x)=\begin{cases} 0, agar\ x \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, agar\ x > 0. \end{cases} \quad (14)$$

Ko'rsatkichli taqsimotning matematik kutilishi, dispersiya va o'rtacha kvadratik chetlanishlari mos ravishda quyidagicha bo'ladi:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}, \quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Amaliy mashg'ulot uchun yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

1-masala. Ko'rsatkichli (eksponensial) taqsimot qonuni bilan taqsimlangan: $F(x)=\begin{cases} 0, agar\ x \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, agar\ x > 0 \end{cases}$

X uzluksiz tasodifiy miqdorning:

a) Zichlik funksiyasini;

b) Matematik kutilmasini;

c) Dispersiyasini toping.

Yechish.

a) Ta'rifga asosan

$$f(x)=F'(x) = \begin{cases} 0, agar\ x \le 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, agar\ x > 0, \lambda > 0 \end{cases}$$

b) Matematik kutilma ta'rifiga asosan:

$M(x)=\lambda\int_0^{\infty} xe^{\lambda x}\,dx = \begin{Bmatrix} x = u,\ du = dx \\ v = \int e^{-\lambda x}\,dx = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} \end{Bmatrix} = \lambda\left[-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}I_0^{\infty} +\right.$

$+1\lambda 0\infty e{-}\lambda xdx{=}0\infty e{-}\lambda xdx{=}1\lambda e0{=}1\lambda.$

c) Dispersiyaning ta'rifiga asosan:

$D(x)=\lambda\int_0^{\infty} x^2e^{\lambda x}\,dx - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 =$

$x2=u,$ $du=2xdxv=e-\lambda xdx=-1\lambda e-\lambda x=$

$\lambda\left[-\frac{x^2}{\lambda}e^{-\lambda x}I_0^{\infty} + +\frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx\right] - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$

2-masala. Ushbu taqsimot funksiya bilan berilgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

$$F(x)=\begin{cases} 0, agar\ x \le 0\ bo'lsa, \\ x^2, agar\ 0 < x \le 1\ bo'lsa, \\ 1, agar\ x > 1\ bo'lsa. \end{cases}$$

Yechish. Zichlik funksiyani topamiz.

$$f(x)=F'(x) = \begin{cases} 0, agar\ x \le 0\ bo'lsa, \\ 2x, agar\ 0 < x \le 1\ bo'lsa \\ 0, agar\ x > 1\ bo'lsa. \end{cases}$$

Matematik kutilmasini topamiz: $M(x)=\int_0^1 2x^2dx = \frac{2}{3}.$

Dispersiyasini topamiz: $D(x)=2\int_0^1 x^3dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{5}{18}.$

Mustaqil ishlash uchun misollar

1. Uzluksiztasodifiymiqdorningzichlikfunksiyasiquyidagichaberilgan:

$f(x)=a\cdot cosx, agar\ x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\ bo'lsa,$

$f(x)=0, agar\ x \notin \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\ bo'lsa.$

Noma'lum a parametrni toping

2. X uzluksiz tasodifiy miqdor

$$f(x)=\begin{cases} 0, agar\ x < 0, \\ 2e^{-2x}, agar\ x \ge 0 \end{cases}$$

qonun bo'yicha taqsimlangan. Sinov natijasida X tasodifiy miqdorning (3;7) oraliqqa tushishi ehtimolini toping.

3. X tasodifi miqdor $a=0,\ \sigma=2$ parametrli normal taqsimot qonuniga bo'ysinsin. X tasodifiy miqdorning (2; 3) - oraliqqa tushish ehtimolini aniqlang.

4. X-uzluksiz tasodifiy miqdor (1; 5) oraliqda tekis taqsimot qonuni bilan berilgan bo'lsa, uning matematik kutilishi va dispersiyasini toping.

5. Quyidagicha funksiya berilgan:

$$f(x)=\begin{cases} 0, agar\ x \le 0, \\ ce^{-x}, agar\ x > 0 \end{cases}$$

Noma'lum c parametrlarning qanday qiymatida bu funksiya biror X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi bo'ladi?

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Taqsimot funksiya va zichlik funksiyasi ta'riflarini keltiring.
2. Diskret tasodifiy miqdor uchun taqsimot funksiya, zichlik funksiyasi tushunchalari o'rinlimi?
3. Taqsimot funksiya xossalarini keltiring.
4. Zichlik funksiya xossalari keltiring.
5. Amalda ko'p uchraydigan uzluksiz taqsimotlarga misollar keltiring.
6. Normal taqsimot qonuni parametrlarining ehtimoliy ma'nosini ayting.

Tavsiya etiladigan mustaqil ta'lim va referat mavzulari

1. Normal taqsimot parametrlarining normal egri chiziq shakliga ta'siri.
2. Bitta tasodifiy argument funksiyasi va uning taqsimoti.
3. χ^2- «xi kvadrat» taqsimoti.
4. F-Fisher-Snedekor taqsimoti.
5. Styudent taqsimoti.

4.1-§. Katta sonlar qonuni. Katta sonlar qonunining amaliyahamiyati. Markaziy limit teoremasi haqida tushuncha

Reja

1. Katta sonlar qonuni
2. Chebishev teoremasi
3. Bemulli teoremasi
4. Markaziy limit teoremasi haqida tushuncha

Ma'lumki, tajriba natijasidatasodifiy miqdor mumkin bo'lgan qiymatlarning qaysi birini qabulqilishini oldindan aytib bo'lmaydi, chunki bu juda ko'p tasodifiy faktorlargabog'liq, bu faktorlarning esahammasini hisobga olib bo'lmaydi. Ammo bir tomondan shuni ham ta'kidlash kerakki, keng qamrovli shartlar ostida ko'p sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisi deyarli tasodifiylik xarakterini yo'qotar ekan. Amaliyot uchun juda ko'p tasodifiy sabablarning birgalikdagi ta'siri tasodifga deyarli bog'liq bo'lmaydigan natijaga olib keladigan shartlarni bilish juda muhimdir, chunki bu hodisalarning qanday rivojlanishini oldindan ko'ra bilishga imkon beradi. Bunday shartlar umumiy nomi «Katta sonlar qonuni» deb ataluvchi teoremalardakeltiriladi. Bular qatoriga Chebishev va Bernulli teoremalari mansub bo'lib, Chebishev teoremasi katta sonlar qonunining eng umumiy, Bernulli teoremasi esa sodda holi hisoblanadi.

Dastlab quyidagi ta'rifni keltiramiz.

1-ta'rif.Agar $X_1, X_2,...,X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi mos ravishda$M(X_1), M(X_2),...,M(X_n)$ matematik kutilishlargaegabo'lib,ixtiyoriy ε>0 son uchun $n\to\infty$ da

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}+\frac{M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)\to 1(1)$$

munosabat bajarilsa, berilgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligikattasonlar qonuniga bo'ysinadi deyiladi.

Katta sonlar qonuniga oid teoremalarni isbotlashda Chebishev tengsizligidan foydalaniladi. Biz bu tengsizlikniisbotsiz keltiramiz.

Chebishev tengsizligi. Ixtiyoriy ε>0 son uchun

$$P(|X-M(X)|\geq\varepsilon)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}\text{yoki } P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}(2)$$

Praktika uchun Chebishev tengsizligining ahamiyati cheklangan bo'lib, u ba'zan trivial baho beradi. Chebishev tengsizligining nazariy ahamiyati juda kattadir.

1-teorema.(Chebishev teoremasi) Agar $X_1, X_2,...,X_n$juft-jufti bilan erklitasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, ularning dispersiyalari yuqoridan tekis chegaralangan (ya'ni $D(X_i)\leq C,\ i=1,2,...$) bo'lsa, u holda musbat ε sonharqanchakichik bo'lgandaham

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}+\frac{M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)=1$$

(3) munosabat bajariladi.

Shunday qilib, Chebishev teoremasi quyidagicha da'vo qiladi: agar dispersiyalari tekis chegaralangan ko'p sondagi tasodifiy miqdorlar qaralayotgan bo'lsa, u holda bu tasodifiy miqdorlar arifmetik o'rtacha qiymatining ularning matematik kutilmalari arifmetik o'rtacha qiymatidan chetlanishining absolyut qiymati istalgan musbat kichik sondan ham kichik bo'lishidan iborat hodisani deyarli muqarrar deb hisoblash mumkin.

Isbot. Chebishev tengsizligini

$$\bar{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$$

tasodifiy miqdorga nisbatan qo'llaymiz:

$$P(|\bar{X} - M(\bar{X})| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(\bar{X})}{\varepsilon^2} \qquad (4)$$

Matematik kutilma va dispersiyaning xossalaridan foydalanib va teorema shartlariga ko'ra quyidagilarni hosil qilamiz.

$$M(\bar{X}) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i),$$

$$D(\bar{X}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) \leq \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n}.$$

Bu ifodalarni (4) tengsizlikka qo'yib:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} D(X_i)}{n^2\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2},$$

hamda ixtiyoriy hodisaning ehtimoli 1dan kattaemasligini hisobga olib,

$$1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} \leq P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) \leq 1$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu munosabatdan n→ ∞ da teorema tasdig'i kelib chiqadi:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Chebishev teoremasida biz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmalarihar xil debfaraz qilgan edik. Amaliyotda esatasodifiy miqdorlar ko'pincha bir xil$a=M(X_i)$matematik kutilmagava$D(X_i)=\sigma^2$dispersiyaga ega bo'ladi. U holda:

$$M(\bar{X}) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \frac{1}{n}na = a.$$

2-teorema. Agar $X_1, X_2,\dots,X_n$tasodifiy miqdorlar juft-jufti bilan erkli bo'lib, bir xil$a$ matematik kutilmagavaσ^2 chekli dispersiyagaegabo'lsa, uholda ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ sonuchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad (5)$$

Faraz qilamiz,$n$ta erkli sinash o'tkazilayotgan bo'lib, ularning har birida Ahodisaning ro'y berish ehtimoli p ga teng bo'lsin. U holda hodisa ro'y berishining nisbiy chastotasi qanday bo'lishini oldindan ko'ra bilish mumkinmi? Bu savolga Yakov Bernulli tomonidan isbotlangan quyidagi teorema ijobiy javob beradi.

3-teorema. (Bernulli teoremasi) Agar$n$ ta erkli sinashning har birida$A$ hodisaning ro'y berish ehtimoli po'zgarmas va sinashlar soni yetarlicha katta bo'lsa, u holda hodisa ro'y berishi nisbiy chastotasining p ehtimoldan chetlanishining absolyut qiymati ixtiyoriy kichik musbat sondan ham kichik bo'lish ehtimoli birga yaqinlashadi:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad (6)$$

Isbot.A hodisa ro'y berishlarining chastotasi μ_n ni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\mu_n = X_1+X_2+\dots+X_n.$$

BundaX_i- A hodisaning i- sinashdagi ro'y berishlar sonini ifodalovchi tasodifiy miqdor. $X_1, X_2,\dots,X_n$ tasodifiy miqdorlar erkli bo'lib, bir xil taqsimot qonuniga egadir. Ya'ni

$$X_1{:}\ 0\ \ 1 \qquad X_2{:}\ 0\ \ 1\ \dots\dots,\ X_n{:}\ 0\ \ 1$$
$$p{:}\ q\ \ p \qquad p{:}\ q\ \ p\ \dots\dots,\ p{:}\ q\ \ p$$

Bu tasodifiy miqdorlar uchun

$$M(X_1)=M(X_2)=\dots=M(X_n)=p, \quad D(X_i)=pq\leq \frac{1}{4}$$

ekanligini ko'rsatish mumkin. U holda

$$M(\mu_n) = M(X_1+X_2+\dots+X_n) = M(X_1)+M(X_2)+\dots+M(X_n)=np$$

va $M\left(\frac{\mu_n}{n}\right) = p$ekanligini hisobga olsak:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum X_i - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Qaralayotgan holda Chebishev teoremasining barcha shartlari bajariladi. Bernulli teoremasi sinashlar soni yetarlicha katta bo'lganda nisbiy chastota nima uchun turg'unlik xossasiga ega bo'lishini tushuntiradi va ehtimolning statistik ta'rifini asoslaydi.

Eslatma. Bernulli teoremasidan$\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n}=p$ xulosani chiqarish mumkin emas. Teorema yetarlicha ko'p sondagi tajribalarda nisbiy chastota har bir tarjribada hodisa ro'y berishining o'zgarmas ehtimoliga faqat ehtimol bo'yicha yaqinlashishi haqidadir. $\frac{k}{n}$ ning p ga ehtimol bo'yicha yaqinlashishi analizdagi oddiy yaqinlashishdanfarq qiladi. Bu farqni to'g'ri tushunish uchun ehtimol bo'yicha yaqinlashishta'rifini beramiz.

2-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $|x_n - x_0| < \varepsilon$ tengsizlikning bajarilish ehtimolligi $n\to\infty$ da birga intilsa, u holda $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ketma-ketlik x_0 ga ehtimol bo'yicha yaqinlashadi deyiladi.

Chebishev teoremasining (yoki katta sonlar qonunining) mohiyati quyidagicha: ayrim olingan erkli tasodifiy miqdorlar o'z matematik kutilmalaridan katta farq qiladigan qiymatlarni qabul qilsada, yetarlicha katta sondagi tasodifiy miqdorlarning arifmetik o'rtacha qiymati katta ehtimollik bilan tayin o'zgarmas songa, chunonchi $\frac{1}{n}\sum M(X_i)$ songa yaqin qiymatlarni qabul qiladi.

Boshqacha qilib aytganda, ayrim tasodifiy miqdorlar anchagina sochilgan bo'lishi mumkin, lekin ularning arifmetik o'rtachaqiymatlarining tarqoqligi kam bo'ladi.

Shunday qilib,har birtasodifiy miqdor mumkin bo'lgan qiymatlaridanqaysi biriniqabul qilishini aniq ayta olmasakham ularning arifmetik o'rtachasiqanday qiymat qabul qilishini oldindan ko'ra bilish mumkin.

Katta sonlar qonuniga ko'ra, yetarlicha ko'p sondagi erkli (dispersiyasi tekis chegaralangan)tasodifiy miqdorlarning arifmetik o'rtacha qiymatlaritasodifiylikxarakterini yo'qotadi. Bu esaquyidagicha izohlanadi:har bir miqdorning o'zmatematik kutilmasidan chetlanishi musbat ham,manfiy ham bo'lishi mumkin, ammo arifmetik o'rtachada ular o'zaro yo'qolib ketadi.

Chebishev teoremasining amaliy ahamiyatiga doir quyidagi misolni keltiramiz.

Odatda, biror fizik kattalikni o'lchash bir necha marta amalga oshiriladi va ularning arifmetik o'rtacha qiymati izlanayotgan o'lcham

sifatida qabul qilinadi. Qanday shartlarda bu usulni to'g'ri deb hisoblash mumkin?-degan savolga Chebishev teoremasi javob beradi.

Haqiqatan ham, har bir o'lchash natijalarini $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar sifatida qarab, bu tasodifiy miqdorlarga Chebishev teoremasini qo'llamoqchi bo'lsak, quyidagilar bajarilishi kerak:

1) ular juft-jufti bilan erkli;
2) bir xil matematik kutilmaga ega;
3) dispersiyalari tekis chegaralangan.

Agar har bir o'lchashning natijasi qolganlariga bog'liq bo'lmasa, birinchi shart bajariladi.

Agar o'lchashlar sistematik (bir xil ishorali) xatolarsiz bajarilsa, ikkinchi talab bajariladi. Bu holda hamma tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmalari bir xil bo'lib, u haqiqiy o'lchamga tengbo'ladi.

Agar o'lchash asbobi aniqlikni ta'minlay olsa, uchinichi talab ham bajariladi. Bunda ayrim o'lchashlarning natijalari har xil bo'lsada, ularning tarqoqligi chegaralangan bo'ladi.

Agar yuqorida ko'rsatilgan hamma talablar bajarilgan bo'lsa, u holda o'lchash natijalariga Chebishev teoremasini qo'llashga haqlimiz. Bunda yetarlicha ko'p sonda o'lchashlar o'tkazilsa, u holda ularning arifmetik o'rtacha qiymati o'lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatidan istalgancha kam farq qiladi.

Statistikada qo'llanadigan tanlanma usul Chebishev teoremasiga asoslangan, bu usulning mohiyati shundan iboratki, unda uncha katta bo'lmagan tasodifiy tanlanmaga asoslanib,barcha tekshirilayotgan ob'ektlar to'plami to'g'risida mulohaza qilinadi.

Misollar.

1. $X_1, X_2, \dots, X_n$– erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagicha taqsimot qonuniga ega.

X_n:	$-a$	a
p:	$\frac{n+1}{2n+1}$	$\frac{n}{2n+1}$

Berilgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun Chebishev teoremasi o'rinlimi?

Yechish. Chebishev teoremasi shartlarini tekshiramiz:

$$M(X_n)=-a\frac{n+1}{2n+1}+a\frac{n}{2n+1}=-\frac{a}{2n+1}, D(X)<a^2$$

Demak, dispersiyalari a^2bilan tekis chegaralangan bu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun Chebishev teoremasi o'rinli.

2. X - diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot bilan berilgan.

X:	*0,1*	*0,4*	*0,6*
p:	*0,2*	*0,3*	*0,5*

Chebishev tengsizligidan foydalanib, $P(|X - M(X)| < \sqrt{0{,}4})$ ehtimolni baholang.

Yechish.

$M(X)$=0,1·0,2+0,4· 0,3 + 0,6 · 0,5 = 0,44,

$D(X)=0{,}1^2\cdot 0{,}2 + 0{,}4^2\cdot 0{,}3 + 0{,}6^2\cdot 0{,}5 - 0{,}44^2 = 0{,}0364.$

Demak,

$$P(|X - 0{,}44| < \sqrt{0{,}4}) \geq 1 - \frac{0{,}0364}{0{,}4} = 0{,}909.$$

Markaziy limit teoremasi haqida tushuncha. Ma'lumki, normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar amaliyotda keng tarqalgan. Buni nima bilan asoslash mumkin. Bunga rus matematigi A.M. Lyapunov teoremasining quyidagi natijasi javob beradi:

Agar X tasodifiy miqdor juda ko'p sondagi o'zaro bog'liqmas tasodifiy miqdorlarning yig'indisidan iborat bo'lib, har bir hadning yig'indiga ta'siri e'tiborga olinmaydigan darajada juda kam bo'lsa, u holda X ning taqsimoti normal taqsimotga yaqin bo'ladi.

Masalan,tajriba qandaydir fizik kattalikni o'lchashdan iborat bo'lsin.Har qanday o'lchash bukattalikning taxminiy qiymatini beradi, o'lchashnatijasiga ta'sir etuvchitasodifiy faktorlar esa juda ko'p.Har bir faktor o'lchash natijasiga e'tiborga olinmaydigan darajada bo'lsa ham juda kam ta'sir ko'rsatadivaxatolikni hosil qiladi. Ammo, bu faktorlarning soni juda ko'p bo'lganligi sababli xatoliklarning umumiy yig'indisisezilarlidarajada xatolikni hosil qiladi.

Buxatoliklar yig'indisini judakatta sondagi o'zaro bog'liqmas tasodifiy miqdorlar yig'indisi debqarab, bu yig'indiningtaqsimoti normal taqsimotga yaqinekanligihaqidaxulosa qilishimizmumkin.

Faraz qilamiz $X_1, X_2,\dots,X_n$– o'zaro bog'liqmastasodifiymiqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lib, ularningmatematik kutilmalari $M(X_k)=a_k$va dispersiyalari $D(X_k)=b_k^2$chekli bo'lsin.

Quyidagichabelgilash kiritamiz:

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n,\ \ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,\ \ B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Normalangan yig'indining taqsimot funksiyasini quyidagicha belgilaymiz

$$F_n(x) = P\left(\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right).$$

Agar normalangan yig'indining taqsimot funksiyasi x ning har qanday qiymatida n→ ∞ *da* normal taqsimotga intilsa, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz. \quad (7)$$

bo'lsa, $X_1, X_2,\dots,X_n$ ketma-ketlik uchun markaziy limit teoremasi o'rinli bo'ladi.

Amaliy mashg'ulot uchun yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

1-masala. $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlarketma-ketligi berilgan bo'lib, X_n tasodifiy miqdor $-n$, *0*, *n* qiymatlarni mos ravishda $\frac{1}{n^2}, 1 - \frac{2}{n^2}, \frac{1}{n^2}$(n> 1) ehtimollar bilan qabul qiladi. Shu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun kata sonlar qonuni o'rinli bo'ladimi?

Yechish. Chebishev teoremasidan foydalanamiz.

$$M(X_n) = -n\cdot\frac{1}{n^2} + 0\cdot 1 - \frac{2}{n^2} + n\cdot\frac{1}{n^2} = 0.$$

$$D(X_n) = M(X_n^2) - [M(X_n)]^2 = n^2\cdot\frac{1}{n^2} + 0^2\cdot\left(1 - \frac{2}{n^2}\right) + n^2\cdot\frac{1}{n^2} = 2.$$

Ko'rinib turibdiki, hamma tasodifiy miqdorlarning dispersiyalari bir xil. U holda yagona son bilan chegaralangan bo'ladi. Chebishev teoremasining shartlari bajarilganligi sababli bu ketma-ketlikka kata sonlar qonunini tadbiq qilsa bo'ladi.

2-masala. *A* hodisaning har bir sinovda ro'y berish ehtimoli ½ ga teng. Agar 100 ta erkli sinov o'tkaziladigan bo'lsa, *A* hodisaning ro'y berishlari soni 40 dan 60 gacha bo'lgan oraliqda yotish ehtimolini Chebishev tengsizligidan foydalanib baholang.

Yechish. *X*-tasodifiy miqdor qaralayotgan *A* hodisaning 100 ta erkli sinovda ro'y berishi sonining matematik kutilmasini va dispersiyasini topamiz:

$$M(X) = n \cdot p = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50.$$

$$D(X) = n \cdot p \cdot q = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25.$$

Hodisa ro'y berishining berilgan soni bilan $M(X) = 50$ matematik kutilmasi orasidagi maksimal ayirmasini topamiz:

$$\varepsilon = 60 - 50 = 10$$

Ushbu shakldagi Chebishev tengsizligidan foydalanamiz:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Bunga $(X) = 50, D(X) = 25,\ \varepsilon = 10$ ni qo'yib quyidagini hosil qilamiz:

$$P(|X - 50| < 10) \geq 1 - \frac{25}{10^2} = 0{,}75.$$

Mustaqil ishlash uchun masalalar

1. Agar *D(X)*=0, 002 bo'lsa, Chebishev tengsizligidan foydalanib $|X - M(X)| < 0{,}2$ tengsizlikning bajarilishini ehtimol bo'yicha baholang.
2. Agar $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 0{,}9$; *D(X)*=0,04bo'lsa, Chebishev tengsizligidan foydalanib ε ni toping.
3. Depozitga qo'yilgan mablag'ning muddatidan oldin talab qilinishi ehtimoli 0,08 ga teng. Depozitga mablag' qo'ygan 1000 ta mijozdan kamida 70 tasi va ko'pi bilan 90 tasi o'z mablag'larini muddatdan oldin talab qilishlari ehtimolini Chebishev tengsizligidan foydalanib baholang.

Ehtimollar nazariyasi kursiga doir misollar

1. Ixtiyoriyikkiqo'shniraqamlariharxilbo'lgannechtato'rtxonalis onhosilqilishmumkin?
2. Musobaqaning 10 ta ishtirokchisiga 3 ta yutuqni necha xil usul bilan taqsimlash mumkin.
3. Ma'lum uchta kitob yonma-yon turadigan qilib, 7 ta kitobni tokchaga necha xil usul bilan taxlash mumkin.
4. Birinchi talabada 7 xil, ikkinchisida 16 xildagi kitoblar bor bo'lsa, kitobga kitobni necha xil usul bilan almashtirishlari mumkin. 2 ta kitobga 2 ta kitobnichi?
5. 3,3,5,5,8 raqamlaridan nechta besh xonali son hosil qilish mumkin.
6. 9 qavatli bino liftiga 4 kishi kirdi. Ularning har biri bir-biriga bo'gliqsiz ravishda ixtiyoriy qavatda chiqishlari mumkin. Ular : a) turli qavatlarda; b) bitta qavatda: c) 5-qavatda chiqishlari ehtimolliklarini toping.
7. Imtihon biletlariga kiruvchi 60 savoldan talaba 50 tasini biladi. Tavakkaliga tanlangan 3 ta savoldan: a) hammasini; b) ikkitasini bilishi ehtimolligini toping.
8. Idishda 5 ta ko'k, 4 ta qizil va 3 ta yashil shar bor. Tavakkaliga olingan 3 ta sharning: a) bir xil rangda; b) har xil rangda; c) 2 tasi k o'k va 1 tasi yashil rangda bo'lishi ehtimolligini hisoblang.

9. R radiusli doiraga teng tomonli uchburchak ichki chizilgan. Doiraga tavakkaliga tashlangan nuqtaning uchburchakka tushishi ehtimolligini toping.

10. [0,5] kesmadan tavakkaliga bitta nuqta tanlanadi. Shu nuqtadan kesmaning o_ng oxirigacha bo_lgan masofa 1.6 birlikdan oshmasligi ehtimolligini toping.

11. Asbob ikki mikrosxemadan iborat. Birinchi mikrosxemaning 10 yil ichida ishdan chiqishi ehtimolligi 0.07, ikkinchisiniki-0.10. Bitta mikrosxema ishdan chiqgani ma'lum bo'lsa, bu mikrosxema birinchisi ekanligi ehtimolligini toping.

12. Talaba imtihon 40 ta biletlarining faqat 30 tasiga javob bera oladi. Talabaga imtihonga birinchi bo'lib kirishi foydalimi, yoki ikkinchi?

13. Zavod ishlab chiqargan mahsulotning 90% i sifat talablariga javob beradi. Tekshruvchi mahsulotni 0.96 ehtimollik bilan sifatli, 0.06 ehtimollik bilan sifatsiz deb topadi. Tavakkaliga olingan mahsulotning sifatli deb topilishi ehtimolligini toping.

14. Oilada 3 ta farzand bor. Agar o'g'il bola tug'ilishi ehtimolligi 0.51, qiz bola tug'lishi ehtimolligi 0.49 ga teng bo'lsa, a) bolalarning hammasi o'g'illar, b) 1 tasi o'g'il va 2 tasi qiz bo'lishi ehtimolliklarini hisoblang.

15. Shoshqol tosh 10 marta tashlanganda: a) 6 raqami bir marta tushishi ehtimolligini; b) 6 raqami kamida bir marta tushish ehtimolligini; c) 6 raqami tushishi soni ehtimolligi maksimal qiymatga erishadigan miqdorni toping.

16. Ehtimollar nazariyasi fanidan ma'ruza darsida 84 ta talaba ishtirok etmoqda. Shu talabalarning ikkitasini tu g'ilgan kuni shu kuni bo'lishi ehtimolligini toping.

17. Mahsulotning sifatsiz bo'lishi ehtimolligi 0.02 ga teng. 200 ta mahsulotning ichida sifatsizlari bittadan ko'p bo'lmasligi ehtimolligini toping.

18. A hodisaning ro'y berish ehtimolligi 0.6 ga teng. 100 ta bog'liqsiz tajribada A hodisaning 70 marta ro'y berishi ehtimolligini toping.

19. Shunday m sonini topingki, 0.95 ehtimollik bilan 800 ta yangi tug'ilgan chaqaloqlardan kamida m tasi qizlar deb aytish mumkin bo'lsin. Qiz bola tug'ilishi ehtimolligini 0.485 deb hisoblang.

20. Detalning nostandart bo'lishi ehtimolligi 0.1 ga teng. Tavakkaliga olingan 400 ta detal ichida nostandart detallar bo'lishi nisbiy chastotasining p=0.1 ehtimollikdan chetlashishi absolut qiymati 0.03 dan katta bo'lmasligi ehtimolligini toping.

21. Birinchi talabaning imtihonni topshira olishi ehtimolligi 0.6, ikkinchisiniki esa 0.9. Quyidagi hollar uchun imtihonni topshira olgan talabalar soni X t.m.ning taqsimot qonunini toping: a) Imtihonni qayta topshirish mumkin emas; b) imtihonni bir marta qayta topshirish mumkin.

22. A hodisaning ro'y berishi ehtimolligi 0.7 ga teng. Bog'liqsiz uchta tajribada A hodisaning ro'y berishlari soni X t.m.ning taqsimot qonunini toping.

23. Ikki ovchi bir nishonga qarata оэq uzishmoqda. Birinchi ovchining nishonga tekkazishi ehtimolligi 0.6, ikkinchisiniki esa 0.8 bo'lsa, nishonga tekkan o'qlar soni X t.m.ning taqsimot qununini toping va taqsimot funksiyasini tuzing.

24. Taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \begin{cases} 0, agar\ x < 0, \\ 0{,}2, agar\ 0 \le x < 1, \\ 0{,}6, agar\ 1 \le x < 2, \\ 1, agar\ x \ge 2 \end{cases}$$

bo'lgan X t.m.ning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari va ularga mos ehtimolliklarini toping

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Katta sonlar qonunini ta'riflang.
2. Bernulli teoremasini va uning amaliy ahamiyatini ayting.
3. Katta sonlar qonunining mohiyati nimada?
4. Katta sonlar qonunining amaliy ahamiyatiga doir misollar keltiring.
5. Chebishev tengsizligini keltiring.
6. Markaziy limit teoremasini tushuntiring.

Tavsiya etiladigan mustaqil ta'lim va referat mavzulari

1. Kuchaytirilgan katta sonlar qonuni.
2. Tasodifiy miqdorlarning yaqinlashish turlari.

3.Bir xil taqsimlangan bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar uchun marakaziy limit teorema.

5.1-§. Matematik statistikaning vazifalari. Statistik taqsimot. Empirik taqsimot funksiyasi.Poligon va gistogramma

Reja

1. Matematik statistikaning asosiy vazifalari va masalalari
2. Statistik taqsimot, Empirik taqsimot funksiyasi.
3. Poligon va gistoramma

Matematik statistikaning asosiy vazifalari va masalalari

Matematik statistikaning birinchi vazifasi – statistik ma'lumotlarni to'plash va (agar ma'lumotlar juda ko'p bo'lsa) gruppalash usullarini ko'rsatish.

Matematik statistikaning ikkinchi vazifasi – statistik ma'lumotlarni tahlil qilish metodlarini tadqiqot masalalariga muvofiq holda ishlab chiqish.

Matematik statistika yuqoridagi vazifalarni bajarish mobaynida shug'ullanadigan ba'zi masalalarni keltirib o'tamiz:

1) tasodifiy hodisa ro'y berishi ehtimolining noma'lum qiymatini baholash;

2) noma'lum taqsimot funksiyani baholash;

3) ko'rinishi ma'lum bo'lgan taqsimot funksiyasining noma'lum parametrlarini baholash;

4) tasodifiy miqdorning bir yoki bir necha tasodifiy miqdorlarga bog'liqligini va bog'liqlik darajasini aniqlash;

5) statistik gipotezalarni tekshirish.

Shunday qilib, matematik statistikaning vazifasi ilmiy va nazariy xulosalar chiqarish maqsadida statistik ma'lumotlarni to'plash va ularni tahlil qilish metodlarini yaratishdan iboratdir.

Bir jinsli obyektlar to'plamini bu obyektlarni xarakterlovchi biror bir sifat yoki son belgisiga nisbatan o'rganish talab qilinsin. Masalan, agar obyekt biror xil detallar partiyasi bo'lsa, u holda detalning sifat belgisi bo'lib, uning standartligi, sonbelgisi bo'lib esadetalning o'lchami xizmat qilishi mumkin.

Ba'zan tekshirish yalpi o'tkaziladi, ya'ni to'plamdagi obyektlarninghar birini o'rganilayotgan belgiga nisbatantekshiriladi.Lekin yalpi tekshirish amaliyotda nisbatan kam qo'llaniladi. Masalan, to'plam juda ko'p obyektlarni o'z ichiga olgan bo'lsa, u holda yalpitekshirish o'tkazish maqsadga muvofiq emas. Bunday hollarda to'plamdan chekli sondagi obyektlar tasodifiy ravishda olinadi va ular o'rganiladi.

Tanlanma to'plam (bundankeyin ***tanlanma***) deb umumiy to'plamdan tasodifiy ravishda ajratib olingan obyektlar to'plamiga aytiladi.

Bosh to'plamdeb tanlanma ajratiladigan obyektlar to'plamiga aytiladi.

To'plam (bosh to'plam yoki tanlanma) hajmideb, bu to'plamdagi obyektlar soniga aytiladi. Masalan, 500 tadetaldantekshirish uchun 50 tadetal olingan bo'lsa, uholda bosh to'plam hajmi N=500, tanlanma hajmi esa n=50.

Bosh to'plamdan olingan tanlanma bo'yicha bosh to'plam haqida xulosa qilishga asoslangan usulga, ***tanlanma usul***deb ataladi.

Tanlanmani ajratib olish ikki xil yo'l bilan amalga oshirilishi mumkin: ob'ekt ajratib olinib uningustida kuzatish o'tkazilgandan so'ng, u boshto'plamga qaytarilishi yokiqaytarilmasligimumkin.

Takroriy tanlanmadeb, shunday tanlanmaga aytiladiki, bunda olingan ob'ekt tajribadan so'ng (keyingisini olishdan oldin) bosh to'plamga qaytariladi.

Takroriy bo'lmagan tanlanmada, ajratib olingan ob'ekt kuzatishdan so'ng bosh to'plamga qaytarilmaydi.

Odatda, qaytarilmaydigan tasodifiy tanlashdan foydalaniladi.

Tanlanmadagi ma'lumotlar bo'yicha bosh to'plamning bizni qiziqtirayotganbelgisi haqidayetarlicha ishonch bilan fikr yuritish uchun tanlanmaning obyektlari bosh to'plamni to'g'ri tasvirlashi zarur. Bu talab qisqacha bunday ta'riflanadi: tanlanma ***reprezentativ*** (vakolatli) bo'lishikerak. Odatda, tanlanmaningreprezentativligini ta'minlash uchun bosh to'plam har bir elementining tanlanmaga tushish ehtimoli tengdeb olinadi.

Amaliyotda tanlanma ajratib olishda turli usullardan foydalaniladi. Bu usullarni 2tipga ajratish mumkin:

1. Bosh to'plamni qism to'plamlarga ajratmasdan tanlanma olish, bunda: a) qaytarilmaydigan; b) qaytariladigan usullardan foydalaniladi.

2. Bosh to'plamni qism to'plamlarga ajratib so'ngra tanlanma olish, bunda bosh to'plam: a) tipik; b)mexanik; v)seriyalab qism to'plamlarga ajratiladi,so'ngra tanlanma ajratib olinadi.

Agar bosh to'plamdan obyektlar bittadan tasodifiy ravishda olinib tanlanma olinsa, bu ***oddiy tasodifiy*** tanlash deyiladi.

Tipik tanlashda bosh to'plamni uning «tipik» xususiyatlarini e'tiborga olgan holda qism to'plamlarga ajratiladi, so'ngra uning qism to'plamlaridan tanlanma ajratib olinadi.

Mexanik tanlash bosh to'plamni mexanik ravishda qism to'plamlarga ajratiladi, so'ngra uning qism to'plamlaridan tanlanma ajratib olinadi.

Seriyali tanlash bosh to'plamni qism to'plamlarga seriyalab ajratiladi, so'ngra uning qism to'plamlaridan tanlanma ajratib olinadi.

Odatda, tanlanma ajratib olishda yuqoridagi usullardan aralash foydalaniladi, ya'ni ko'rsatilgan usullardan birgalikda foydalaniladi. Masalan, bosh to'plamni ba'zan bir xil hajmli seriyalarga ajratiladi, keyin oddiy tasodifiy tanlash bilan ayrim obyektlar olinadi.

Bosh to'plamdan tanlanma olingan bo'lsin. Bunda tanlanmaning $x_i$qiymati n_i (i=1, 2, ...) marta kuzatilgan va $\sum_i n_i = n$ bo'lsin. Kuzatilgan $x_i$qiymatlar variantalar, variantalarning ortib yoki kamayib borish tartibida yozilganketma-ketligi esa ***variatsion qator*** deyiladi. Kuzatishlar soni- n_i chastotalar, ularning tanlanma hajmiga nisbati esa $W_i = \frac{n_i}{n}$-nisbiy chastotalar deyiladi.

Tanlanmaning statistik taqsimotideb, variantalar va ularga mos chastotalaryoki nisbiy chastotalar ro'yxatiga aytiladi:

$$x_i: \ x_1 x_2 \ .... x_k$$
$$n_i: \ n_1 n_2 \ .... n_k$$

Yoki

$$x_i: \ x_1 x_2 \ .... \ x_n$$
$$W_i: \ W_1 W_2 \ .... W_n \qquad (1)$$

Shunday qilib, taqsimot qonuni ehtimollar nazariyasida tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari va ularning ehtimollari orasidagi moslikni, matematik statistikada esa kuzatilgan variantalar va ularning chastotalari yokinisbiy chastotalari orasidagimoslikni bildiradi.

Misol.

1. Hajmi 40 bo'lgan tanlanmaningchastotalari taqsimoti:

$$x_i: \ 2 \ \ 6 \ \ 12$$
$$n_i: \ 6 \ 20 \ 14$$

berilgan. Nisbiy chastotalar taqsimotini yozing.

Yechish. Nisbiy chastotalarni topamiz. Buning uchun chastotalarni tanlanma hajmiga bo'lamiz.

$$W_1 = \frac{6}{40} = 0{,}15; \ \ W_2 = \frac{20}{40} = 0{,}5; \ \ W_3 = \frac{14}{40} = 0{,}35$$

U holda, nisbiy chastotalar taqsimoti:

$$x_i: \ \ 2 \ \ \ 6 \ \ \ 12$$
$$W_i: \ 0{,}15 \ 0{,}5 \ 0{,}35$$

Empirik taqsimot funksiya. Faraz qilamiz,X–son belgining statistik taqsimoti ma'lum bo'lsin. Quyidagi belgilashlar kiritamiz:n_x-X belgining x dan kichik qiymatlari kuzatilgan kuzatishlar soni;n -umumiy kuzatishlar soni.

Ma'lumki,$X<x$ hodisaning nisbiy chastotasi: $\frac{n_x}{n}$. Agar xo'zgaradigan bo'lsa, u holda, nisbiy chastota ham o'zgaradi.Demak,$\frac{n_x}{n}$nisbiy chastota x ning funksiyasidir.

1-ta'rif. Taqsimotning empirik funksiyasi (tanlanmaning taqsimot funksiyasi)deb har bir$x$ qiymat uchun $X<x$ hodisaning nisbiy chastotasini aniqlaydigan $F_n^*(x)$funksiyaga aytiladi.

Demak, ta'rifga ko'ra

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n} \qquad (2)$$

Bu yerda n_x- x dan kichik variantalar soni, n – tanlanma hajmi.

Misol

2. Tanlanmaning quyidagi taqsimoti:

$$x_i: \ 2 \ \ 6 \ \ 10$$
$$n_i: \ 12 \ 18 \ 30$$

bo'yicha uning empirik funksiyasini tuzing.

Yechish. Tanlanma hajmini topamiz. $n = 12+18+30=60$

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, agar \ \ x \le 2 \ bo'lsa \\ 0{,}2, agar \ 2 < x \le 6 \ bo'lsa \\ 0{,}5 \ agar \ 6 < x \le 10 \ bo'lsa \\ 1, agar \ x > 10 \ bo'lsa \end{cases}$$

Bosh to'plamning $F(x)$ - taqsimot funksiyasi nazariy taqsimot funksiyasi deb ataladi. Empirik funksiya $F_n^*(x)X<x$ hodisaning nisbiy

chastotasini, nazariy taqsimot funksiya $F(x)$ esa $X<x$ hodisaning ro'y berish ehtimolini aniqlaydi. $F_n^*(x)$ funksiya uchun $F(x)$ funksiyaning barcha xossalari o'rinli. Ya'ni:

1) $F_n^*(x) \epsilon\ [0; 1]$;

2) $F_n^*(x)$-kamaymaydigan funksiya;

3) agar x_1 -eng kichik varianta bo'lsa, u holda $x \le x_1$ qiymatlar uchun $F_n^*(x) = 0$; agar x_k -eng katta varianta bo'lsa, u holda $x > x_k$ qiymatlar uchun $F_n^*(x)=1$.

Shunday qilib, tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasi bosh to'plam nazariy taqsimotfunksiyasini baholash uchun xizmat qiladi.

Haqiqatan ham, Bernulli teoremasiga asosan,

$$\lim_{n\to\infty} P(|F(x) - F_n^*(x)| < \varepsilon) = 1.$$

Demak, tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasidan bosh to'plam nazariy (integral) funksiyasining taxminiy ko'rinishi sifatida foydalanish mumkin.

Ko'rgazmalilik uchun statistik taqsimotning turli grafiklari chiziladi, masalan, poligon va gistogramma.

Chastotalar poligonini yasash uchun Dekart koordinatalar sistemasida kesmalari $(x_i; n_i)$ (i= 1 , 2, ...) nuqtalarnitutashtiruvchi siniq chiziq hosil qilish kerak.***Nisbiy chastotalar poligonini*** yasash uchun esa Dekart koordinatalar sistemasida kesmalari $(x_i; W_i)$ (i=1 , 2, ...) nuqtalarnitutashtiruvchi siniqchiziq hosil qilish kerak bo'ladi. Chastotalar va nisbiy chastotalar poligonini diskret tasodifiy miqdorlarning grafik usulda berilishi deb ham tushunish mumkin.

Agar kuzatilayotganbelgi uzluksiz bo'lsa , u holda uni grafik usulda tasvirlash uchun gistogramma yasash maqsadga muvofiqdir, buning uchun belgining kuzatiladigan qiymatlarini o'z ichiga olgan intervalni uzunligi o'zgarmas- h bo'lgan bir nechta qismiy intervallarga bo'linadi va har bir i -qismiy interval uchun n_i - ya'ni i-intervaldagi variantalar chastotalarining yig'indisi topiladi . So'ngra, Dekart koordinatalar sistemasida ***chastotalar gistogrammasi***, asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{n_i}{h}$ nisbatlarga (chastota zichligi) teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat pog'onaviy figura, yoki ***nisbiy chastotalar gistogrammasi*** asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{W_i}{h}$nisbatga (nisbiychastota zichligi)teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat pog'onaviy figurayasaladi.

Amaliy mashg'ulot uchun yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

1-masala. Hajmi 30 do'lgan tanlanmaning chastotalari taqsimoti berilgan.

x_i:	2	8	16
n_i:	10	15	5

Nisbiy chastotalar taqsimotini toping.

Yechish. Nisbiy chstotalarini topamiz. Buning uchun chastotalarni tanlanma hajmiga bo'lamiz.

$$W_1 = \frac{10}{30} = \frac{1}{3},\quad W_2 = \frac{15}{30} = \frac{1}{2},\quad W_3 = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

U holda nisbiy chastotalar taqsimoti

x_i:	2	8	16
W_i:	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

2-masala. Quyidagi taqsimot qatori bilan berilgan tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasini tuzing.

x_i:	1	4	6
n_i:	10	15	25

Yechish. $n=n_1+n_2+n_3=10+15+25=50$

$$W_1 = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} = 0{,}2,\quad W_2 = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 0{,}3,\quad W_3 = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

U holda nisbiy chastotalar taqsimoti

x_i:	1	4	6
W_i:	0,2	0,3	0,5

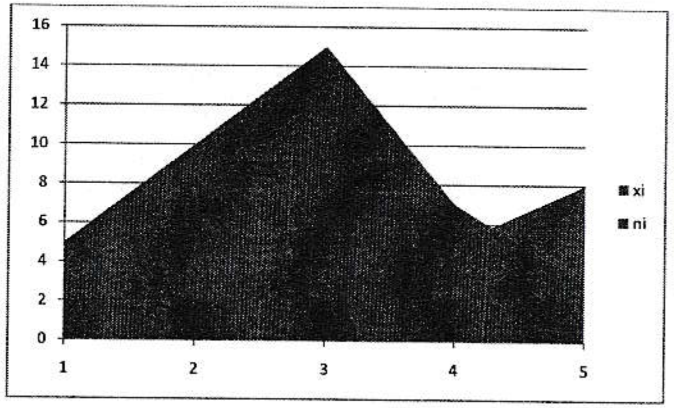
Empirik taqsimot funksiyasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, agar\ x \le 1\ bo'lsa \\ 0{,}2\ agar\ 1 < x \le 4\ bo'lsa \\ 0{,}5\ agar\ 4 < x \le 6\ bo'lsa \\ 1\ agar\ x > 6\ bo'lsa. \end{cases}$$

3-masala. Berilgan tanlanma taqsimoti bo'yicha chastotalar va nisbiy chastotalar poligonlarini chizing.

x_i	1	2	4	5	8
n_i	5	10	15	7	3

Yechish. n=5+10+15+7+3=40 tanlanma hajmi. Chastotalar poligoni quyidagi ko'rinishda bo'ladi.



Nisbiy chstotalarini topamiz.

$$W_1=\frac{5}{40},\quad W_2=\frac{10}{40},\quad W_3=\frac{15}{40},\quad W_4=\frac{7}{40},\quad W_5=\frac{3}{40}$$

U holda, nisbiy chastotalar poligoni quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

x_i	1	2	4	5	8
W_i	$\frac{5}{40}$	$\frac{10}{40}$	$\frac{15}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{3}{40}$

Mustaqil ishlash uchun misollar

1) Quyidagi tanlanma berilgan: 2, 1, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 2, 2, 3.

a) variatsion qatorni tuzing;

b)chastotalar jadvalini tuzing;

v) nisbiy chastotalar poligonini chizing.

2) Korxona ishchilaridan tavakkaliga 20 tasi tanlanib, ularning tarif razryadlari xaqida quyidagi ma'lumotlar olingan: 1, 2, 4, 6, 3, 4, 4, 2, 6, 3, 5, 3, 3, 1, 5, 4,2, 5, 4, 3.

Shu ma'lumotlarga asoslangan holda:

a) tanlanmaning statistik taqsimotini tuzing va chastotalar poligonini yasang;

b) empirik taqsimot funksiyani tuzing.

3) Tanlanmaning

x_i	4	5	7	12
n_i	5	2	3	10

chastotalar taqsimoti ko'rinishida berilgan. Nisbiy chastotalar taqsimotini toping.

4) Chastotalar poligonini yasang.

x_i	15	20	25	30	10
n_i	10	15	30	20	25

5) Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo'yicha chastotalar gistogrammasini yasang.

Inter vallar ro'y xati	Qis miy inter vallar	Qismiy intervallardagi variantalar chastotalarining yig'indisi
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	2-5	6
2	5-8	10

3	8-11	4
4	11-14	5
		$n=\sum n_i = 25$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Matematik statistikaning vazifalarini ayting.
2. Tanlanma olishning qanday usullari bor?
3. Tanlanmaning reprezentativligi nimadan iborat?
4. Tanlanmaning statistik taqsimoti ta'rifini bering.
5. Empirik taqsimot funksiya ta'rifini keltiring.
6. Poligon va gistogrammaqanday quriladi?

5.2-§. Taqsimot parametrlarining statistik baholari.Baholarga qo'yiladigan talablar

Reja

1. Taqsimot parametrlarining statistik baholari.
2. Variatsion qatorning ba'zi xarakteristikalari.

Ma'lumki, matematik statistika masalaridanbiritanlanma asosida bosh to'plam taqsimot funksiyasining noma'lum parametrlari uchun statistik baholar qurishdan ibora edi. Bu masala qanday hal qilinishini ko'rib chiqamiz.

Faraz qilaylik, bosh to'plamning son belgisini o'rganish talab qilinayotgan va belgining taqsimot funksiyasi nazariy mulohazalar asosida aniqlangan bo'lsin.Bu taqsimotni aniqlaydigan noma'lum parametrlarni baholash masalasini ko'rib chiqaylik. Masalan, bosh belgi, to'g'rirog'i o'rganilayotgan belgi bosh to'plamda normal taqsimlanganligi oldindan ma'lum bo'lsa, u holda matematik kutilmani va o'rtacha kvadratik chetlanishni baholash, ya'ni taqribiy hisoblash zarur, chunki bu ikki parametr normal taqsimotni to'liq aniqlaydi. Agar belgi Puasson taqsimotiga ega deyishga asos bo'lsa, u holda bu

taqsimotni aniqlaydigan $\lambda > 0$ parametrni baholash, ya'ni taqribiy hisoblash zarur.

Odatda, tadqiqotchi ixtiyorida tanlanma asosida olingan ma'lumotlar,masalan, tanlanma sonbelgisini$n$ marta kuzatish natijasida olingan$x_1, x_2, \dots x_n$qiymatlar bo'ladi. Demak, baholanayotganbelgining bahosixuddishu ma'lumotlar orqali ifodalanishikerak.

Tanlanmadagi$x_1, x_2, \dots x_n$qiymatlarni erkli $X_1, X_2, \dots X_n$-tasodifiy miqdorlardeb qarab, nazariy taqsimot noma'lum parametriningstatistik bahosini topish uchun kuzatilayotgan tasodifiy miqdorlar orqali shunday funksiya topishkerakki, u baholanayotgan parametrning taqribiyqiymatinibersin. Masalan, normal taqsimotning matematik kutilishinibaholash uchun ushbu

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

funksiya xizmat qiladi.

Shunday qilib, nazariy taqsimot noma'lum parametrning statistikbahosi deb kuzatilgan tasodifiy miqdorlardan tuzilgan funksiyaga aytiladi.Statistik baho baholanayotgan parametrning yaxshi bahosi bo'lishi uchun u ma'lum bir talablarni qanoatlantirishi lozim. Quyida mana shu talablarni ko'rib chiqamiz.

Bosh to'plam$F(x)$-nazariy taqsimot funksiyasining θ parametri noma'lum bo'lib uning statistik bahosi θ^* bo'lsin. Bosh to'plamdan olingan $n$hajmli tanlanma bo'yicha θ_1^*baho topamiz. Tajribani takrorlaymiz, ya'ni bosh to'plamdan yana$n$hajmli tanlanma olib θ_2^* bahoni topamiz. Tajribani ko'p marta takrorlab, $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_n^*$sonlar ketma-ketliginini hosil qilamiz, umuman olganda, $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_n^*$sonlar har xil bo'ladi. U holdaθ^*bahoni tasodifiy miqdor, $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_n^*$sonlarni esa uning mumkin bo'lgan qiymatlari sifatida qarash mumkin.

θ^*tasodifiy miqdorning $M(\theta^*)$-matematik kutilmasini hisoblaymiz. $M(\theta^*)$vaθnoma'lum parametr qiymatlarini taqqoslasak ular orasida:

1) $M(\theta^*) < \theta$
2) $M(\theta^*) = \theta$
3) $M(\theta^*) > \theta$

munosabatlardan biri albatta o'rinli bo'ladi. Matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga teng bo'lmagan statistik bahoni ishlatish sistematik xatolarga olib keladi. Shu sababli,θ^*bahoning matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga teng bo'lishini talab qilish tabiiy holdir.

Demak, $M(\theta^*)=\theta$talabga rioya qilish sistematik xatolardan saqlaydi.

1-ta'rif. Agar bosh to'plamdan ixtiyoriy hajmli tanlanma olinganda ham θ^*bahoning matematik kutilmasi baholanayotgan θ parametrga teng, ya'ni $M(\theta^*)=\theta$bo'lsa, u holda θ^* baho ***siljimagan baho*** deb ataladi, aks holda θ^* siljigan baho deyiladi.

2-ta'rif. Agar θ^*baho vaθnoma'lum parametrlar uchun $\lim_{n\to\infty} M(\theta^*) = \theta$munosabat o'rinli bo'lsa, u holda θ^* baho ***asimptotik siljimagan baho*** deb ataladi.

Ammo shuni ham ta'kidlash keraki, siljimagan baho har doim ham baholanayotgan parametrga yaxshi yaqinlashadi deb hisoblash xato bo'ladi. Darhaqiqat, θ^*ning mumkin bo'lgan qiymatlari uning o'rtacha qiymati atrofida ancha tarqoq joylashgan, ya'ni$D(\theta^*)$-dispersiya anchagina katta bo'lishi mumkin. U holda$l$ -tanlanmadagi ma'lumotlar bo'yicha topilgan θ_l^* -baho $\overline{\theta^*}$ -o'rtacha qiymatdan va demak baholanayotgan θparametrdan ancha uzoqlashgan bo'lishi mumkin.

θ_l^*ni θning taqribiy qiymati sifatida qabul qilib, katta xatoga yo'l qo'ygan bo'lar edik. Shu sababli, statistik baholarga effektivlik talabi qo'yiladi.

3-ta'rif. Agar $\theta_l^* \epsilon \theta^*$bahoning dispersiyasi eng kichik bo'lsa,u holda θ_l^****effektivbaho*** deb ataladi.

Umuman olganda, effektiv baho mavjud bo'lmasligi ham mumkin.

Juda katta hajmli (n yetarlicha katta bo'lganida) tanlanmalar qaralganda statistik baholarga asoslilik talabi qo'yiladi.

4-ta'rif. Asosli baho deb baholanayotgan parametrga $n\to\infty$ da ehtimol bo'yicha yaqinlashadigan θ^* bahoga aytiladi, ya'ni $\lim_{n\to\infty} P(|\theta^* - \theta| > \varepsilon) == 0$, bu yerda ε>0–yetarlidarajada kichik son.

Agar bahoning dispersiyasi $n\to\infty$ da nolga intilsa, u holda bundaybaho asosli hambo'ladi.

Agar N hajmli bosh to'plamning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, \dots, x_N$-qiymatlari turli bo'lsa, $\overline{x_B}$***-bosh to'plam o'rtachasi***

$$\overline{x_B} = \frac{x_1+x_2+\dots+x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad (1)$$

formula bilan topiladi; agar N hajmli bosh to'plamning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, \dots, x_k$-qiymatlari mos ravishda $N_1, N_2, \dots, N_k$ chastotalarga ega bo'lib, $N_1 + N_2 + \dots + N_k = N$ bo'lsa:

$$\overline{x_B} = \frac{x_1N_1+x_2N_2+\dots+x_kN_k}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i N_i \qquad (2)$$

Bosh to'plamning kuzatilayotgan X belgisini tasodifiy miqdor sifatida qarasak, uning matematik kutilmasi uchun $M(X)=\overline{x_B}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Agar n hajmli tanlanmaning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, \dots, x_n$-qiymatlari turli bo'lsa, $\overline{x_T}$***-tanlanma o'rtacha***

$$\overline{x_T} = \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (3)$$

formula bilan topiladi; agar n hajmli tanlanmaning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, \dots, x_k$-qiymatlari mos ravishda $n_1, n_2, \dots, n_k$ chastotalarga ega bo'lib, $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ bo'lsa:

$$\overline{x_T} = \frac{x_1n_1+x_2n_2+\dots+x_kn_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i \qquad (4)$$

Boshto'plam o'rtachasi-$M(X)$ ningstatistik bahosi sifatida

$$\overline{x_T} = \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ yoki}$$

$$\overline{x_T} = \frac{x_1n_1 + x_2n_2 + \dots + x_kn_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i$$

tanlanma o'rtacha qabul qilinadi. $\overline{x_T}$siljimagan baho ekanligiga, ya'ni $M(\overline{x_T}) = M(X)$ekanligiga ishonch hosil qilamiz. $\overline{x_T}$ni tasodifiy miqdor, $x_1, x_2, \dots, x_n$-variantalarni erkli, bir xil taqsimlangan $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar sifatida qaraymiz. Bu miqdorlar birxil taqsimlanganligi uchun ular bir xil son xarakteristikalarga, jumladan, bir xil matematik kutilmaga ega: $a=M(X_i)$. Bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar arifmetik o'rtacha qiymatining matematik kutilmasi ulardanbittasining matematik kutilmasiga teng, ya'ni

$$M(\overline{X_T}) = M(\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}) = \frac{nM(X_1)}{n} = M(X_1) = a.$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ miqdorlarning har biri va bosh to'plamning X belgisi (uni ham tasodifiy miqdor sifatida qaraymiz) bir xil taqsimotga ega ekanligini e'tiborga oladigan bo'lsak, bu miqdorlarning va bosh to'plamning sonli xarakteristikalari bir xil degan xulosaga kelamiz. Shunday qilib, $M(\overline{X_T}) = a = M(X)$. U holda $\overline{x_T}$bosh to'plam matematik kutilmasi uchun siljimagan baho ekan.

Ma'lumki, katta sonlar qonuniga (Chebishev teoremasi) asosan ixtiyoriy kichik $\varepsilon > 0$ son uchun

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{x_T} - M(\overline{x_T})| < \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} P(|\overline{x_T} - a| < \varepsilon) = 1,$$

ya'ni n ortishi bilan $\overline{x_T}$-tanlanma o'rtachasi bosh to'plam matematik kutilmasiga ehtimol bo'yicha yaqinlashadi. Bundan esa, $\overline{x_T}$ baho a uchun asosli baho bo'lishi kelib chiqadi.

Agar bosh to'plamdan ancha katta hajmli bir nechta tanlanmalar olinib har birining tanlanma o'rtachalari topiladigan bo'lsa, ular o'zaro taqriban teng bo'ladi. Bu tanlanma o'rtachaning turg'unlik xossasi deyiladi.

Misol.

1. Tanlanmaning

$$\begin{array}{llll} x_i: & 4 & 8 & 11 \\ n_i: & 5 & 10 & 5 \end{array}$$

statistik taqsimoti bo'yicha bosh to'plam matematik kutilmasining siljimagan bahosini toping.

Yechish.

(4) formuladan foydalanamiz. U holda

$$\overline{x_T} = \frac{4\cdot 5 + 8\cdot 10 + 11\cdot 5}{20} = \frac{155}{20} = 7{,}75.$$

Agar N hajmli bosh to'plamning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, \dots, x_N$-qiymatlari turli bo'lsa, ***bosh to'plam dispersiyasi***

$$D_B = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x_B})^2 \tag{5}$$

formula bilan topiladi; agar N hajmli bosh to'plamning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, \dots, x_k$-qiymatlari mos ravishda $N_1, N_2, \dots, N_k$ chastotalarga ega bo'lib, $N_1 + N_2 + \dots + N_k = N$ bo'lsa:

$$D_B = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} N_i(x_i - \overline{x_B})^2 \tag{6}$$

Bosh to'plam o'rtacha kvadratik chetlanishi

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} \tag{7}$$

formula bilan aniqlanadi.

Agar n hajmli tanlanmaning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, \dots, x_n$-qiymatlari turli bo'lsa, ***tanlanma dispersiyasi***

$$D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_T})^2 \tag{8}$$

formula bilan topiladi; agar n hajmli tanlanmaning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, \dots, x_k$-qiymatlari mos ravishda $n_1, n_2, \dots, n_k$ chastotalarga ega bo'lib, $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ bo'lsa:

$$D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i - \overline{x_T})^2. \tag{9}$$

Misol.

2. Tanlanmaning

$$\begin{array}{llll} x_i: & 4 & 8 & 11 \\ n_i: & 5 & 10 & 5 \end{array}$$

statistik taqsimoti bo'yicha uning dispersiyasini toping.

Yechish.

(4) formuladan foydalansak: $\overline{x_T} = 7{,}75$. Dispersiyani hisoblash uchun (9) formuladan foydalanamiz .U holda

$$D_T = \frac{5\cdot(4-7{,}75)^2 + 10\cdot(8-7{,}75)^2 + 5\cdot(11-7{,}75)^2}{20} = \frac{70{,}3125 + 0{,}625 + 70{,}3125}{20} = 7{,}0625.$$

Dispersiyani hisoblashda (5), (6), (8), (9) formulalar noqulay, shu sababli, dispersiya va matematik kutilmalarning xossalaridan foydalanib, dispersiyani hisoblash uchun qulay bo'lgan quyidagi formuladan foydalanish mumkin:

$$D = \overline{x^2} - (\bar{x})^2, \bar{x} = \frac{\sum_i n_i x_i}{n}, \overline{x^2} = \frac{\sum_i n_i x_i^2}{n} \tag{10}$$

Bosh to'plam dispersiyasi uchun baho sifatida qaralayotgan tanlanma dispersiya $D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_T})^2$ qanday baho bo'lishini ko'rib chiqamiz. Qulaylik uchun m=M(X), $\sigma_1^2 = D_B$ belgilashlar kiritib olamiz.

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_T})^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m - (\overline{x_T} - m))^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 -$$

$$-\frac{2}{n}(x_i - m)^2 \sum_{i=1}^{n}(\overline{x_T} - m) + \frac{n}{n}(\overline{x_T} - m)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 -$$

$$-(\overline{x_T} - m)(\overline{x_T} - m)n + (\overline{x_T} - m)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 -$$

xT−m2.

Agar $M(\overline{x_T} - m)^2 = D(\overline{x_T}) = \frac{1}{n}\sigma_1^2$ belgilashni e'tiborga olsak,

$$M(\sigma^2) = \frac{1}{n}M\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2\right) - M(x_i - m)^2 = \sigma_1^2 - \frac{1}{n}\sigma_1^2$$
$$= \frac{n-1}{n}\sigma_1^2.$$

Demak, tanlanma dispersiya-D_T bosh to‘plam dispersiyasi D_B uchun siljimagan baho bo‘lolmas ekan, shu sababli bosh to‘plam dispersiyasi uchun siljimagan statistik baho sifatida

$$s^2 = \frac{n-1}{n}D_T \qquad (11)$$

-«tuzatilgan» dispersiya olinadi.

Bosh to‘plam o‘rtacha kvadratik chetlanishining bahosi sifatida $s=\sqrt{\frac{n-1}{n}D_T}$- «tuzatilgan» o‘rtacha kvadratik chetlanish olinadi.

1-eslatma. $D_T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i - \overline{x_T})^2$ va $s^2 = \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i - \overline{x_T})^2$ formulalar maxrajlari bilan farqlanadi. U holda *n* ning katta qiymatlarida tanlanma dispersiyasi va «tuzatilgan» dispersiyalarning farqi juda kam bo‘ladi. Shu sababli, «tuzatilgan» dispersiyadan n <30 hajmli tanlanmalarda foydalanish tavsiya etiladi.

2-eslatma. Agar tanlanmaning variatsion qatorida x_i-variantalarning qiymatlari katta sonlardan iborat bo‘lsa, u holda x_i variantadan $u_i = \frac{x_i - c_1}{c_2}$-shartli variantaga o‘tish orqali u_i-variantalari kichik sonlardan iborat yangi variatsion qator hosil qilinadi, so‘ngrayangi tanlanma uchun $\overline{u_T}$ va $D_T(u)$lar topiladi. Oldingi tanlanmaning $\overline{x_T}, D_T(x)$ xarakteristikalarini topish uchun$\overline{x_T} = c_2\overline{u_T}+c_1$ va $D_T(x) = c_2^2 D_T(u)$formulalardan foydalaniladi.

Variatsion qatorning ba’zi xarakteristikalari. Matematik statistika va uning tatbiqlarida variatsion qatorning tanlanma o‘rtachasi va tanlanma dispersiyasidan tashqari boshqa xarakteristikalari ham ishlatiladi. Shulardanba’zilarinikeltiramiz.

Eng katta chastotaga ega bo‘lgan varianta ***moda*** deb ataladi va M_0kabibelgilanadi.

Mediana deb, variatsion qator variantalarini son jihatidantengikki qismga ajratadigan variantaga aytiladi va$M_e$kabibelgilanadi. Variantalar sonining juft yoki toqligiga qarab, mediana quyidagicha aniqlanadi.

$$M_e = \begin{cases} x_{k+1}, agar\ n = 2k+1\ bo'lsa \\ \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}, agar\ n = 2k\ bo'lsa. \end{cases}$$

Variatsiya qulochi R deb eng katta va eng kichik variantalar ayirmasiga aytiladi: R=$x_{max} - x_{min}$.

Variatsiya qulochi variatsion qator tarqoqligining eng sodda xarakteristikasi bo‘lib xizmat qiladi.

Variatsion qator tarqoqligining yana bir xarakteristikasi sifatida ***o‘rtacha absolyut chetlanish***θham ishlatiladi.

$$\theta = \frac{\sum_i n_i|x_i - \overline{x_T}|}{n}$$

Variatsiya koeffitsienti*V* deb tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanishining tanlanma o‘rtachasiga nisbatini foizlardagi ifodasiga aytiladi:

$$V=\frac{\sigma_T}{\overline{x_T}} \cdot 100\%.$$

Variatsiya koeffitsienti ikkita yoki undan ortiq variatsion qatorlarning tarqoqliklarini taqqoslash uchun xizmat qiladi: variatsion qatorlardan variatsiya koeffitsienti katta bo‘lgani ko‘proq tarqoqlikka ega bo‘ladi.

Amaliy mashg’ulot uchun yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

Misol. Quyidagi

x_i: 1 3 6 16
n_i: 4 10 5 1

tanlanma uchun M_0, M_e, R, θ, V-xarakteristikalarni hisoblaymiz.$M_0 = M_e = 3$;*R*=15;

$$\overline{x_T} = \frac{4\cdot 1 + 10\cdot 3 + 5\cdot 6 + 1\cdot 16}{4+10+5+1} = \frac{80}{20} = 4;$$

$$\theta = \frac{4\cdot|1-4| + 10\cdot|3-4| + 5\cdot|6-4| + 1\cdot|16-4|}{20} = 2{,}2;$$

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{4\cdot(1-4)^2 + 10\cdot(3-4)^2 + 5\cdot(6-4)^2 + 1\cdot(16-4)^2}{20}}$$
$$= 3{,}24;$$

$$V = \frac{3{,}24}{4} \cdot 100\% = 80{,}1\%.$$

1-masala. Sterjenning uzunligi 5 marta o'lchanganda quyidagi natijalar olingan: 92, 94, 103, 105, 106.

a) Sterjen uzunligining tanlanma o'rta qiymatini toping.

b) Yo'l qo'yilgan xatolarning tanlanma dispersiyasini toping.

Yechish. a) Tanlanma o'rtacha $\overline{x_T}$ ni toppish uchun shartli variantalardan foydalanamiz, chunki dastlabki variantalar kata sonlardir.
$u_i = x_i - 92$

$$\overline{x_T} = 92 + \frac{0 + 2 + 11 + 13 + 14}{5} = 92 + 8 = 100.$$

b) Tanlanma dispersiyasini topamiz.

$$D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \overline{x_T})^2 =$$

$$= \frac{(92-100)^2+(94-100)^2+(103-100)^2+(105-100)^2+(106-100)^2}{5} = 34.$$

2-masala. Bosh to'plamdan n=60 hajmli tanlanma olingan.

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Bosh o'rtacha qiymatning siljimagan bahosini toping.

Yechish. Bosh o'rtacha qiymatning siljimagan bahosi tanlanma o'rtacha bo'ladi.

$$\overline{x_T} = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \frac{1 \cdot 8 + 3 \cdot 40 + 6 \cdot 10 + 26 \cdot 2}{60} = \frac{240}{60} = 4.$$

3-masala. Ushbun=10 hajmlitanlanmataqsimotibo'yichatanlanmao'rtachanivatanlanmadispersiyanitoping.

x_i	0,01	0,04	0,08
n_i	5	3	2

Yechish. $u_i = 100x_i$, h=1/100 shartli variantalarga o'tamiz. Natijada quyidagi taqsimotni hosil qilamiz.

x_i	1	4	8
n_i	5	3	2

$$\bar{u} = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{1}{10}(1 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 2) = 3{,}3; \overline{x_T} = \frac{\bar{u}}{100} = 0{,}033.$$

$$D_T^u = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} - \left[\frac{\sum n_i u_i}{n}\right]^2$$

$$= \frac{5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 8^2}{10} - \left[\frac{5 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 8}{10}\right]^2 = 7{,}21.$$

$$D_T^x = h^2 D_T^u = \frac{1}{100^2} \cdot 7{,}21 \approx 0{,}0007.$$

Mustaqil ishlash uchun misollar

1. Bosh to'plamdan n=50 hajmdagi tanlanma ajratilgan. Quyidagi

x_i	2	5	7	10
n_i	1 6	12	8	14

taqsimot bo'yicha bosh to'plam o'rtachasining siljimagan bahosini toping.

2. Guruhdagi 40 ta talabaning yozma ishlari baholarining chastotalari jadvali berilgan.

x_i	2	3	4	5
n_i	3	8	25	4

Tanlanma o'rtacha va tanlanma dispertsiyasini toping.

3. n=26 hajmli tanlanma bo'yicha tanlanma dispersiyasining D_T=3 bahosi topilgan. Bosh to'plam dispersiyasining siljimagan bahosini toping.

4. n=10 hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma dipersiyasini toping.

x_i	102	104	108
n_i	2	3	5

5. Ushbu n=100 hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma dispersiyasini toping.

x_i	156	160	164	168	172	176	180
n_i	10	14	26	28	12	8	2

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Statistik baho ta'rifini bering.
2. Siljimagan, asosli va effektiv baholar ta'riflarini keltiring.
3. $\overline{x_T}$-bosh to'plam matematik kutilmasi uchun siljimagan va asosli baho bo'lishini tushuntiring.
4. D_T-tanlanma dispersiyasi bosh to'plam dispersiyasi uchun siljigan baho bo'lishini tushuntiring.
5. Variatsion qatorning xarakteristikalarini ta'riflang.

Tavsiya etiladigan mustaqil ta'lim va referat mavzulari

1. Baholashning momentlar usuli.
2. Haqiqatga maksimal o'xshashlik usuli.
3. Shartli variantalar.

5.3-§. Nuqtaviy va intervalli baholar. Ishonchli intervallar

Reja

1. Nuqtaviy baho
2. Intervalli baholar
3. Ishonchli intervallar

Faraz qilaylik, bosh to'plam X belgisining taqsimot funksiyasi $F(x,\theta)$ bo'lib, θ noma'lum parametr bo'lsin. Bosh to'plamdan olingan tanlanmaning kuzatilgan qiymatlari $x_1, x_2, ..., x_n$ bo'lsin.

1-ta'rif. Tanlanmadan tuzilgan ixtiyoriy $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaga ***statistika*** deyiladi.

Nuqtaviy baholashda taqsimot funksiyaning noma'lum θ parametri uchun shunday $L(x_1, x_2, ..., x_n)$statistika qidiriladiki, $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ ni θ parametr uchun taqribiy qiymatdeb olinadi. Bu holda $L(x_1, x_2, ..., x_n)$statistika θ parametrning bahosideyiladi.

2-ta'rif. Agar noma'lum parametr bitta $\tilde{\theta}$ son bilan baholansa, u holda bu baho nuqtaviy bahodeyiladi.

Biz yuqorida tanishgan statistik baholar: tanlanma o'rtacha, tanlanma «tuzatilgan» dispersiya, moda, mediana, variatsiya qulochi va boshqalar nuqtaviy baho hisoblanadi.

Tajribalar soni juda katta bo'lsa, nuqtaviy bahoning qiymati odatda, noma'lum parametrga yaqin bo'ladi. Ammo, kuzatishlar soni kam bo'lsa, $\tilde{\theta}$nuqtaviy baho vaθparametr orasidagi farqsezilarli darajada bo'lishi mumkin. Bunday hollarda θparametrni baholash uchun ***intervalli baholardan***foydalanish maqsadga muvofiq hisoblanadi.

3-ta'rif. Ikkita son (interval chetlari) bilan aniqlanadigan baho intervalli bahodeb ataladi.

Intervalli bahoda bahoning aniqliligi va ishonchliligi tushunchalarini kiritishimizkerak bo'ladi. Buni quyida ko'rib chiqamiz.

Tanlanma ma'lumotlari asosida topilgan $\tilde{\theta}$-statistik xarakteristika θ parametrning bahosi bo'lsin.θ ni o'zgarmas son deb faraz qilamiz. Ma'lumki, $\tilde{\theta}$ ning aniqligi yuqori bo'lgan sari $|\theta - \tilde{\theta}|$ ning qiymati kamayib boradi, ya'ni $|\theta - \tilde{\theta}| < \delta$ $(\delta > 0)$tengsizlikda δqancha kichik bo‘lsa, baho shuncha aniq bo‘ladi. Shu sababli, ***δbahoning aniqligi***deb ataladi.

Statistik usullar $\tilde{\theta}$ baho $|\theta-\tilde{\theta}|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantirishini qat’iy tasdiqlay olmaydi, balki butengsizlik bajarilishining qandaydir γ ehtimolligi haqida xulosa qila oladi.

$|\theta-\tilde{\theta}|<\delta$ tengsizlikning bajarilish ehtimoli γ θ parametrning $\tilde{\theta}$ baho bo‘yicha ***ishonchliligi (ishonchlilik ehtimoli)*** deyiladi. Bu yerda, $P(|\theta-\tilde{\theta}|<\delta)=\gamma$. Ko‘p hollarda, ishonchlilik oldindanberiladi. Masalan, 0,95; 0,99; 0,999 va hokazo.

$P(|\theta-\tilde{\theta}|<\delta)=\gamma$ehtimollikni quyidagicha yozib olamiz:

$$P(\tilde{\theta}-\delta<\theta<\tilde{\theta}+\delta)=\gamma \qquad (1)$$

Bu munosabatni quyidagicha tushunish kerak: $(\tilde{\theta}-\delta,\tilde{\theta}+\delta)$ interval θ noma’lum parametrni o‘z ichiga olish (qoplash) ehtimoli γ ga teng.

$(\tilde{\theta}-\delta,\tilde{\theta}+\delta)$ interval noma’lum parametrni berilgan γ ishonchlilik bilan qoplovchi ***ishonchlilik intervali*** deb ataladi.

1-eslatma. $(\tilde{\theta}-\delta,\tilde{\theta}+\delta)$ interval tasodifiy chetki nuqtalarga ega, chunki turlitanlanmalar uchun $\tilde{\theta}$ning qiymatlariturlicha bo‘ladi. Shu sababli, tanlanma o‘zgarsa$(\tilde{\theta}-\delta,\tilde{\theta}+\delta)$ intervalning chetki nuqtalari ham o‘zgaradi.

Ishonchlilik intervallarni topish qanday amalga oshirilishi bilan normal taqsimot qonuniga bo‘ysinuvchi tasodifiy miqdorlar misolida tanishib chiqamiz.

Bosh to‘plamning X belgisi normal taqsimlangan bo‘lsin. Ma’lumki, bu taqsimotni ikkita parametr: $a$va σaniqlaydi. Faraz qilamiz ulardan biri, σ-o‘rtacha kvadratik chetlanish, ma’lum ikkinchisi, a-matematik kutilma, noma’lum bo‘lsin. Bu taqsimotning matematik kutilmasi$a$uchun ishonch intervaliniγ ishonch bilan δ aniqlikda topamiz.

Tanlanma o‘rtachasi $\overline{x_T}$ ni $\overline{X_T}$ tasodifiy miqdor sifatida qaraymiz.X belgi normal taqsimlanganligi sababli tanlanma o‘rtacha ham normal taqsimlangan bo‘ladi. shu bilan birga, $\overline{X_T}$ning parametrlari quyidagicha:

$$M(\overline{X_T})=a;\ D(\overline{X_T})=\frac{\sigma^2}{n}.$$

$P(|\overline{X_T}-a|<\delta)=\gamma$munosabat o‘rinli bo‘lsin.U holda$P(|X-a<\delta==2\Phi\delta\sigma$ formuladan foydalanib, X ni XTbilan δ ni esa $\sigma XT=\sigma n$ bilan almashtirsak quyidagi munosabatni hosil qilamiz:

$$P(|\overline{X_T}-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)=2\Phi(t)(2)$$

bu yerda $t=\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$. Bundan $\delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ bo’ladi. U holda (2) quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$P\left(|\overline{X_T}-a|<\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(t), \text{ yoki}$$

$$P\left(\overline{X_T}-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{X_T}+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(t) \qquad (3)$$

Shunday qilib, ishonch intervali $\overline{X_T}$ ni $\overline{x_T}$ ga almashtirganimizdan so‘ng $(\overline{x_T}-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}};\overline{x_T}+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}})$ dan iborat bo’ladi. Bundan $(\overline{x_T}-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}};\overline{x_T}+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}})$ tasodifiy interval a parametrni $\gamma=2\Phi(t)$ ehtimol bilan $\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ aniqlikda qoplashikelib chiqadi.

(3) dan quyidagi xulosalarni chiqaramiz: tanlanma hajmining ortishi baholash aniqligi oshishiga olib keladi; agar γ ishonchlilik orttirilsa, t parametr ortadi va bu esa baholash aniqligi kamayishiga olib keladi.

Amaliy mashg’ulot uchun yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

1-masala. Bosh to’plamning normal taqsimlangan X belgisining noma’lum matematik kutilmasi a ni γ =0,95 ishonchlilik bilan baholash uchun ishonchli oraliqni toping. Bunda $\sigma=5$, tanlanma o’rtacha $\overline{x_T}=14$ va tanlanma hajmi n=25 berilgan.

Yechish. Jadvaldan (2-ilovaga qarang) foydalanib t ni topamiz, ya’ni

$2\Phi(t)=0{,}95\Rightarrow\Phi(t)=0{,}475\Rightarrow t=1{,}96$. Topilganlarni

$\overline{X_T}-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{X_T}+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ formulaga qo’yib,

$\left(14 - 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}};\quad 14 + 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}}\right)$ yoki (12,04; 15,96) ishonchli oraliqni topamiz.

2-masala. Bosh to'plamning X belgisi normal taqsimlangan. n=16 hajmli tanlanma bo'yicha tanlanma o'rtacha $\overline{x_T} = 20{,}2$ va tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanish s=0,8 topilgan. Noma'lum matematik kutlmani ishonchli oraliq yordamida γ =0,95 ishonchlilik bilan baholang.

Yechish. $t_{n-1,\gamma}$ ni jadvaldan topamiz. γ =0,95; n=16; $t_{n-1,\gamma} = 2{,}13$. Bu qiymatlarni $\overline{X_T} - t_{n-1,\gamma}\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{X_T} + t_{n-1,\gamma}\frac{s}{\sqrt{n}}$ formulaga qo'ysak, $(20{,}2-2{,}13\cdot\frac{0{,}8}{\sqrt{16}}; 20{,}2+2{,}13\cdot\frac{0{,}8}{\sqrt{16}})$ yoki (19,774; 20,626) hosil bo'ladi. Demak, noma'lum a parameter 0,95 ishonchlilik bilan (19,774; 20,626) oraliqda yotadi.

3-masala. Bosh to'plamning X belgisi normal taqsimlangan. n=16 hajmli tanlanma bo'yicha tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanish s=1 topilgan. Bosh to'plam o'rtacha kvadratik chetlanishi σ ni 0,95 ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchli oraliqni toping.

Yechish. Berilganlar γ =0,95 va n=16 bo'yicha jadvaldan q=0,44< 1 ekanligini topamiz. Topilganlarni $s(1-q) < \sigma < s(1+q)$ formulaga qo'yamiz va $1(1-0{,}44) < \sigma < 1(1+0{,}44)$ yoki $0{,}56 < \sigma < 1{,}44$ ishonchli oraliqni hosil qilamiz.

Misol.

1. X tasodifiy miqdor normal taqisimlangan bo'lib uning o'rtacha kvadratik chetlanishi σ =3. Tanlanma hajmi n=36 va bahoning ishonchliligi γ =0,95 bo'lsin. Noma'lum parametr a –matematik kutilmaning $\overline{x_T}$-tanlanma o'rtacha bo'yicha ishonchlilik intervallarini toping.

Yechish. Jadvaldan (2-ilovaga qarang) foydalanib t ni topamiz, ya'ni

$2\Phi(t) = 0{,}95 \Rightarrow \Phi(t) = 0{,}475 \Rightarrow t=1{,}96$.

Bahoning aniqligi: $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}96\cdot 3}{\sqrt{36}} = 0{,}98$. U holda ishonchlilik intervali: $(\overline{x_T} - 0{,}98; \overline{x_T} + 0{,}98)$.

Berilgan γ =0,95 ishonchlilikni quyidagicha tushunish kerak: agar yetarlicha ko'p sondagi tanlanmalar olingan bo'lsa, u holda ularning 95%i shunday ishonchli intervallarni aniqlaydiki, bu intervallar parametrni haqiqatan ham o'z ichiga oladi; 5 % hollardagina parametr interval chegarasidan tashqarida yotishi mumkin.

2-eslatma. Agar matematik kutilmani oldindan berilgan δ aniqlik va γ ishonchlilik bilan baholash talab qilinsa, u holda bu aniqlikni beradigan tanlanmaning minimal hajmi

$$n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2} \qquad (4)$$

formuladan topiladi.

Bosh to'plamning X belgisi normal taqsimlangan va uning a - matematik kutilmasini $\overline{x_T}$-tanlanma o'rtachasi orqali baholashda σ- o'rtacha kvadratik chetlanish noma'lum bo'lsin. U holda

$$\overline{x_T} - t(\gamma, n)\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_T} + t(\gamma, n)\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (5)$$

interval a uchun ishonch intervali bo'lib xizmat qiladi. Bu yerda s- «tuzatilgan» o'rtacha kvadratik chetlanish; $t(\gamma, n)$ esa berilgan n va γ bo'yicha maxsus jadvaldan topiladi. Bunday jadvallar ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaga oid adabiyotlarda beriladi (3-ilova).

Misol.

2. Bosh to'plamdan n=10 hajmli tanlanma olingan va quyidagi statistik taqsimot tuzilgan:

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Bosh to'plamning X belgisi normal taqsimlangan bo'lsa, uning a-matematik kutilmasi uchun $\overline{x_T}$ bo'yicha γ =0,95 ishonchlilik bilan ishonchli intervalni toping.

Yechish. Tanlanma o'rtachani va «tuzatilgan» o'rtacha kvadratik chetlanishni mos ravishda quyidagi formulalardan topamiz:

$$\overline{x_T} = \frac{\sum_{i=1}^{6} n_i x_i}{n}, s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} n_i (x_i - \overline{x_T})^2}{n-1}}$$

U holda: $\overline{x_T}$ =2, s=2,4. Jadvaldan (3 -ilova) γ =0,95 va n=10 larga mos $t(\gamma, n)$=2,26 ni topamiz. Topilganlarni (5) ifodaga qo'yib: 0,3<a<3,7 ishonchli intervalni hosil qilamiz. Bu interval noma'lum$a$ - matematik kutilmani γ =0,95ishonchlilik bilan qoplaydi.

Bosh to'plamning o'rganilatgan X sonbelgisi normal taqsimlangan bo'lsin. Uning σ-o'rtacha kvadratik chetlanishi uchun tanlanma ma'lumotlari bo'yicha γ ehtimol bilan ishonch intervali topish talab qilinsin.

Ma'lumki, tanlanmaning s^2-«tuzatilgan» dispersiyasi σ^2-bosh to'plam dispersiyasi uchun siljimagan bahodir. Shu sababli,σ-paremetrni s orqali baholaymiz. Buning uchun

$$P(|\sigma - s| < \delta)\gamma, yoki\ P(s - \delta < \sigma < s + \delta) = \gamma$$

munosabat bajarilishini talab qilamiz. Tayyor jadvaldan foydalanish uchun $s - \delta < \sigma < s + \delta$qo'sh tengsizlikniteng kuchli

$$s\left(1 - \frac{\delta}{s}\right) < \sigma < s\left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

tengsizlik bilan almashtiramiz. $q = \frac{\delta}{s}$ belgilashdan so'ng

$$s(1 - q) < \sigma < s(1 + q), \quad (q < 1) \qquad (6)$$

ishonch intervalini hosil qilamiz. Agar q>1 bo'lsa ishonch intervali quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$0 < \sigma < s(1 + q). \qquad (7)$$

bu yerda q, n va γ bo'yicha maxsus jadvaldan (4-ilov aga qarang) topiladi.

Misol.

3. Bosh to'plamning X son belgisi normal taqsimlangan va n=50 hajmli tanlanmaning «tuzatilgan» dispersiyasi: s=1,5 bo'lsin. σ-noma'lum parametrni γ =0,95 ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchlilik intervalini toping.

Yechish. Jadvaldan (4-ilova) n=50 va γ =0,95 qiymatlarga mos q=0,21 ni topamiz. Bu yerda q<1 bo'lgani uchun (6) tengsizlikdan foydalanib, 1,185<σ<1,815 ishonchlilik intervalini topamiz.

Mustaqil ishlash uchun misollar

1. Bosh to'plamning normal taqsimlangan X son belgisining noma'lum a-matematik kutilmasini γ =0,95 ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonch intervalini toping. Bunda o'rtacha kvadratik chetlanish σ =4, tanlanma o'rtacha $\overline{x_T}$=10,2 va tanlanma hajmi n=16 deb olinsin.

2. 10 ta erkli o'lchashlar natijasida sterjen uzunligi (mm) uchun quyidagi ma'lumotlar olingan: 23, 24, 23, 25, 25, 26, 26, 25, 24, 25. O'lchash xatoligini normal taqsimlangan deb faraz qilib, sterjen uzunligining matematik kutilmasi uchun γ =0,95 ishonchlilik bilan ishonch intervalini toping.

3. Bosh to'plamning normal taqsimlangan X belgisining a-matematik kutilmasini tanlanma o'rtacha bo'yicha γ =0,925 ishonchlilik va δ=0,2 aniqlik bilan baholash uchun tanlanmaning minimal hajmini toping. O'rtacha kvadratik chetlanishni σ = 1,5 deb oling.

4. Bosh to'plamdan n=12 hajmli tanlanma olingan:

x_i	-0,5	-0,4	-0,2	0	0,2	0,6	0,8	1	1,2	1,5
n_i										

Bosh to'plamning normal taqsimlangan X belgisining a-matematik kutilmasini γ = 0,95 ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonch oralig'ini toping.

5. Bosh to'plamning X-son belgisi normal taqsimlangan. n hajmli tanlanma bo'yicha «tuzatilgan» o'rtacha kvadratik chetlanishi s topilgan.

Bosh to'plam o'rtacha kvadratik chetlanishi σ ni γ =0,99 ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonch oralig'ini toping, bunda n=10, s=5,1.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Statistik baho ta'rifini bering.
2. Ishonchlilik ehtimoli va ishonchli interval tushunchalarini ta'riflang.

3. Normal taqsimlangan bosh to‘plam matematik kutilishi uchun ishonchli intervallarni keltiring.

4. Ishonchliintervallardaqatnashuvchi parametrlarni izohlang.

Tavsiya etiladigan mustaqil ta'lim va referat mavzulari

1. Binomial taqsimotda ehtimolning nisbiy chastota orqali bahosi.
2. Styudent taqsimoti.
3. Gamma funksiya va uning xossalari.
4. χ^2 (xi kvadrat) -taqsimoti.

6.1-§. Korrelyatsiya nazariyasi elementlari. Funksional, statistik va korrelyatsion bog‘lanishlar. Korrelyatsion jadval. Korrelyatsiyanazariyasining ikki asosiy masalasi

Reja

1.

Kundalik faoliyatimizdagi ko‘pgina amaliy masalalarda, tajribalarda o‘rganilayotgan Y belgining (tasodifiy miqdorning) bitta yoki bir nechta boshqa belgilarga (tasodifiy miqdorlarga) bog‘liqligini aniqlash va baholash talab qilinadi. Avvalam bor Y belgining bitta X tasodifiy miqdorga bog‘liqligini o‘rganamiz.

Ikki belgi funksional bog‘lanish bilan, yoki statistik bog‘lanish bilan bog‘langan, yoki umuman erkli bo‘lishi mumkin.

Misollar.

1. X diskret tasodifiy miqdorning taqsimoti quyidagicha:

X:	2	3
p:	0,6	0,4

$Y=X^2$ funksiyaning taqsimoti topilsin.

Yechish.

Y ning mumkin bo‘lgan qiymatlarini topamiz: $y_1 = 4,\quad y_2 = 9$. U holda Y ning taqsimoti:

Y:	4	9
p:	0,6	0,4

2. X uzluksiz tasodifiy miqdor normal taqsimlangan bo‘lib, $M(X) = a = 2$va $\sigma(X) = 0{,}5$bo‘lsa, $Y=3X+1$ chiziqli funksiyaning zichlik funksiyasini toping.

Yechish. Yning sonli xarakteristikalarini topamiz:

$$M(Y) = 3\cdot 2 + 1 = 7, \qquad \sigma(Y) = 3\cdot 0{,}5 = 1{,}5.$$

U holda Y ning zichlik funksiyasi: $g(y) = \frac{1}{1{,}5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-7)^2}{2\cdot(1{,}5)^2}}$.

Funksional bog‘lanishlar aniq va tabiiy fanlar: matematika, fizika, ximiya va shu kabilarda, ayniqsa, yaqqol kuzatiladi.

Masalan, termometrdagi simob ustunining balandligi X havo harorati Y haqida aniq va bir qiymatli ma'lumot beradi; aylana radiusi R va uning uzunligi C orasida $C=2\pi R$ -geometriyadan ma'lum bo‘lgan formula bilan aniqlangan funksional bog‘lanish mavjuddir.

Iqtisodiy jarayonlarda, umuman jamiyatning boshqa sohalarida tasodifiy belgilar orasida qat'iy funksional bog‘lanish kamdan-kam uchraydi. Buning asosiy sabablaridan biri belgilarga ta'sir etuvchi faktorlarning xilma-xilligi va tasodifiyligidir. Bu holatda belgilar orasidagi moslik statistik bog‘lanish bo‘lishi mumkin.

1-ta'rif. Agar miqdorlardan birining o‘zgarishi ikkinchi miqdor taqsimotining o‘zgarishiga olib kelsa, u holda bu ikki miqdor orasidagi bog‘lanishga statistik bog‘lanish deyiladi.

Masalan, agar $Y(Z_1, Z_2, V_1, V_2)\ va X(Z_1, Z_2, U_1, U_2)(Z_i, V_i, U_i)$-tasodifiy faktorlar) lar berilgan bo‘lsin. Bu holda Y va X lar orasidagi bog‘lanish statistik bog‘lanish deyiladi, chunki ularning har biri bog‘liq bo‘lgan tasodifiy faktorlar ichida umumiylari: Z_1, Z_2 va umumiy bo‘lmaganlari: V_i, U_i (i=1,2) bor.

Statistik bog‘lanishni matematik ifodalash murakkab, shu sababli uning xususiy hollaridan biri hisoblangan korrelyatsion bog‘lanish bilan tanishib chiqamiz.

2-ta'rif. Agar bir-biriga statistik bog‘lanishda bo‘lgan ikki miqdordan birining o‘zgarishi ikkinchi miqdor o‘rtacha qiymatining o‘zgarishiga olibkelsa, u holda bunday statistik bog‘lanish ***korrelyatsion bog‘lanish***deb ataladi.

Bir-biri bilan korrelyatsion bog‘lanishda bo‘lgan tasodifiy miqdorlarga misollarkeltiramiz .

1. Mehnatunumdorligi X va jami ishlab chiqarilgan mahsulot Y;
2. Yig‘ib olinganhosil miqdori Y va ishlatilgan o‘g‘itlar miqdori X;

3. Jamimahsulot miqdori X va korxonaning ish haqi fondi Y;

4. Sarflangan kapital mablag'lar X va shu mablag'lardanolingan sof foyda Y;

5. Korxonaningtexnika bilan qurollanganlik darajasi$X$vamehnat unumdorligi ko'rsatkichi Y.

Yuqoridagi ta'rifdan ko'rinib turibdiki, korrelyatsion bog'lanishni matematik ifodalash, ya'ni $y=f(x)$ ko'rinishda yozish, uchun ***shartlio'rtacha*** tushunchasini kiritishimiz kerak.

3-ta'rif. $X=x$ qiymatga moskeluvchi Y ning kuzatilgan qiymatlariningarifmetik o'rtachasini $\overline{y_x}$-shartli o'rtacha deb ataymiz.

Xuddi shunday usulda $\overline{x_y}$-shartli o'rtacha tushunchasi ham aniqlanadi.

4-ta'rif. $Y=y$ qiymatga mos keluvchi X ning kuzatilgan qiymatlarining arifmetik o'rtachasini $\overline{x_y}$-shartli o'rtacha deb ataymiz.

Misol.

3. X miqdorning $x_1 = 5$ qiymatiga Y miqdorning $y_1 = 6, y_2 = 7, y_3 = 8$ qiymatlari mos keladi. U holda:

$\overline{y_x} = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} = \frac{6+7+8}{3} = 7.$

Agar X va Y tasodifiy miqdorlar (belgilar) ustida kuzatishlar o'tkazilgan bo'lib, kuzatishlar natijalari mos ravishda $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ lardan iborat bo'lsa, X va Y orasidagi bog'lanishni (munosabatni)ushbu jadval ko'rinishida ifodalash mumkin.

X	x_1	x_2	......	x_n
Y	y_1	y_2	......	y_n

Agar yuqoridagi jadvalda x_i va y_i lar turli qiymatlarini qabul qilsa, u holda shartli o'rtacha tushunchasidan foydalanmaymiz.

Agar kuzatishlar soni ko'p, ya'ni x_i qiymat m_{x_i} marta, y_j qiymat m_{y_j} marta, (x_i, y_j) juftliklar $m_{x_i}m_{y_j}$ marta takrorlanishi mumkin bo'lsa, u holda yuqoridagi jadval o'rniga ***korrelyatsion jadval*** yoki ***korrelyatsion panjara*** deb ataluvchi jadval hosil bo'ladi. $m_{x_i}, m_{y_j}, m_{x_i}m_{y_j}$ lar mos ravishda x_i, y_j, (x_i, y_j)larning chastotalarideyiladi. $m_{x_i}m_{y_j} = m_{ij}$ belgilashkiritib quyidagi jadvalnihosilqilamiz.

Bu yerda

$$\sum_i m_{ij} = m_{y_j}, \sum_j m_{ij} = m_{x_i}, \sum_i m_{x_i} = \sum_j m_{y_j} = n$$

	y_1	y_2	...	y_l	m_x
x_1	m_{11}	m_{12}	...	m_{1l}	m_{x_1}
x_2	m_{21}	m_{22}	...	m_{2l}	m_{x_2}
	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_k	m_{k1}	m_{k2}		m_{kl}	m_{x_k}
m_y	m_{y_1}	m_{y_2}		m_{y_l}	n

Bu holatda shartli o'rtacha tushunchasidan foydalanishimiz zarur.

Korrelyatsion panjarada shartli o'rtacha topilishiga doir misol ko'rib chiqamiz.

Misol.

4. Berilgan jadvaldan foydalanib, tanlanma shartli o'rtacha-$\overline{y_x}$ ni toping.

Y \ X	3	4	6	7	8	n_y
8	5	3	-	-	-	8
12	3	4	5	4	2	18
15	-	3	3	6	2	14
n_x	8	10	8	10	4	$n=$ 30

Yechish. Hisoblashlarni quyidagi jadvalga joylashtiramiz:

Y \ X	3	4	6	7	8	n_y
8	5	3	-	-	-	8

12	3	4	5	4	2	18
15	-	3	3	6	2	14
n_x	8	10	8	10	4	$n=$ 30
$\overline{y_x}$	9,5	11,7	13,125	13,8	13,5	

Belgilar orasidagi korrelyatsion munosabatlar (bog‘lanishlar) to‘g‘ri, teskari, to‘g‘ri chiziqli va egri chiziqli bo‘lishi mumkin. Masalan, to‘g‘ri korrelyatsion bog‘lanishda belgilardan birining ortishi (kamayishi) boshqasining o‘rtachasi ortishiga (kamayishiga) olib keladi, teskari bog‘lanishda esa aksincha va hokazo.

Masalan, daraxtning yoshi X ortib borishi bilan daraxtdagi xalqalar soni Y ortib boradi, havoning harorati X pasayishi bilan nafas olish tezligi Y kamayadi va h.k.

Y ning X ga korrelyatsion bog‘liqligi deb, $\overline{y_x}$ shartli o‘rtachaning x ga funksional bog‘lanishiga aytiladi: $\overline{y_x} = f(x)$. Butenglama Y ning X ga ***regressiya tanlanmatenglamasi*** (ba’zida Y ning X ga regressiyatenglamasi), $f(x)$funksiya esa Y ning X ga tanlanma regressiyasi (ba’zidaregressiya funksiyasi)deb ataladi. Butenglama grafigi esa Y ning Xga regressiya tanlama chizig‘i (ba’zida Y ning X garegressiya chizig‘i)deyiladi.

Xning Y garegressiya tanlamatenglamasi varegressiya tanlama chizig‘i ham yuqoridagiga o‘xshash aniqlanadi: $\overline{x_y} = g(y)$.

Korrelyatsiya nazariyasi belgilar orasidagi bog‘lanishni o‘rganish jarayonida asosan quyidagi ikkimasalanihalqiladi.

Amaliy mashg’ulot uchun yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

1-masala. Belgilar orasidagi korrelyatsion bog‘lanish formasini aniqlash, ya’ni regressiya funksiyasining ko‘rinishini (chiziqli, chiziqsiz va h.k.) topish.

Agar $f(x)$va $g(y)$ regressiya funksiyalarining ikkalasi ham chiziqli bo‘lsa, u holda$X$ va Y belgilar orasidagi korrelyatsion bog‘lanish chiziqli, aks holda esa chiziqsiz deyiladi.

2-masala. Korrelyatsion bog‘lanish zichligini (kuchini) aniqlash.

Y belgining X belgiga korrelyatsion bog‘lanishining zichligi $X=x$qiymatga mos$Y$ ning mumkin bo‘lgan qiymatlari $\overline{y_x}$-shartli o‘rtacha atrofida tarqoqligi darajasini baholaydi. Agar tarqoqlik katta bo‘lsa, Y belgi X belgiga kuchsiz bog‘langanligidan yoki ular orasida bog‘liqlik yo‘qligidan darakberadi. Aksincha, kichik tarqoqlikbelgilar orasidaancha kuchli (zich) bog‘liqlik borliginiko‘rsatadi.

Mustaqil ishlash uchun misollar

1. Berilgan jadvaldan foydalanib, tanlanma shartli o‘rtacha-$\overline{x_y}$ni toping.

Y \ X	4	4,5	5	5,5	6
8	5	3	-	-	-
10	2	4	5	4	3
13	-	1	1	2	2

2. Berilgan jadvaldan foydalanib, tanlanma shartli o‘rtacha-$\overline{y_x}$ ni toping.

Y \ X	3	3,5	4	4,5	5
7	5	3	-	-	-
9	2	3	5	3	1
13	-	1	1	2	2

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Belgilar orasida qanday bog‘lanishlar bo‘lishi mumkin?
2. Korrelyatsion bog‘lanish ta’rifini bering.
3. Korrelyatsion jadval qanday tuziladi?
4. Shartli o‘rtacha qiymat ta’rifini bering.
5. Regressiya tanlanma tenglamasi, regressiya funksiyasi va regressiya tanlanma chizig‘i ta’riflarini bering.
6. Korrelyatsiya nazariyasi ikki asosiy masalasini ayting.

Tavsiya etiladigan mustaqil ta'lim va referat mavzulari

1. Bitta tasodifiy argument funksiyasi va uning taqsimoti.
2. Ikki tasodifiy argument funksiyasi.
3. Shartli matematik kutilma.
4. Bog'liq va bog'liqmas tasodifiy miqdorlar.

6.2-§. To'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasi. Eng kichik kvadratlar usuli

Ma'lumki, korrelyatsiion bog'langan X va Y belgilarning regressiya tanlanma tenglamasi $\overline{y_x} = f(x)$, yoki $\overline{x_y} = g(y)$ ko'rinishda yozilib, agar $f(x)$ va $g(y)$ regressiya funksiyalarining ikkalasi ham chiziqli bo'lsa, u holda X va Y belgilar orasidagi korrelyatsion bog'lanish chiziqli deb ataladi. Biz mana shu chiziqli korrelyatsion bog'lanishni atroflicha o'rganib chiqamiz.

Buning uchun (X,Y) juftlikning son belgilari sistemasini o'rganamiz. Bunda ikki: 1) ma'lumotlar gruppalanmagan; 2) ma'lumotlar gruppalangan hollarni alohida-alohida qarashimiz kerak bo'ladi.

1) Bosh to'plam ustida o'tkazilgan n ta erkli tajriba natijasida olingan ma'lumotlardan $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ sonlar juftligi ketma-ketligini hosil qilingan bo'lib, bu ma'lumotlarni gruppalash shart bo'lmasin, ya'ni X belgining turli x qiymatlari va ularga mos Y belgining y qiymatlari bir martadan kuzatilgan bo'lsin. Bunday holatda shartli o'rtacha tushunchasidan foydalanish shart emas. Shuning uchun izlanayotgan

$$\overline{y_x} = kx + b \tag{1}$$

tanlanma regressiya to'g'ri chizig'I tenglamasini quyidagicha yozishimiz mumkin

$$y = kx + b \tag{2}$$

Bu tenglamadagi burchak koeffitsientni ρ_{yx} bilan belgilab, uni Y ning X ga tanlanma regressiya koeffitsienti deb ataymiz. Shunday qilib, Y ning X ga to'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini

$$Y = \rho_{yx} x + b \tag{3}$$

ko'rinishda izlaymiz.

Bu tenglamadagi noma'lum ρ_{yx} va b koeffitsientlarni shunday tanlashimiz kerakki, natijada kuzatish ma'lumotlari bo'yicha topilgan $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ nuqtalarni xOy tekislikka joylashtirganimizda bu nuqtalar mumkin qadar (3) to'g'ri chiziqqa yaqin atrofda yotsin. Bunday talabni bajarishdan oldin $Y_i - y_i$ $(i = 1,2,\dots,n)$ ifoda bilan aniqlanadigan chetlanish tushunchasini kiritib olamiz, bu erda Y_i-(3) tenglamadan kuzatilgan x_i qiymatga moskeluvchi ordinata; y_i esa x_i ga mos kuzatilgan ordinata. Noma'lum ρ_{yx} va b koeffitsientlarni shunday tanlaymizki, chetlanishlar kvadratlarining yig'indisi eng kichik, ya'ni $min \sum_{i=1}^{n}(Y_i - y_i)^2$, bo'lsin (noma'lum ρ_{yx} va b koeffitsientlarni topishning bu usuli eng kichik kvadratlar usuli deb ataladi).

Har bir chetlanish noma'lum ρ_{yx} va b koeffitsientlarga bog'liq bo'lgani uchun chetlanishlari kvadratlari yig'indisining funksiyasi F ham bu koeffitsientlarga bog'liq bo'ladi:

$$F(\rho_{yx}, b) = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(\rho_{yx} x_i + b - y_i)^2.$$

Bu funksiyaning minimumini topish uchun noma'lum parametrlar bo'yicha F ning xususiy hosilalarini hisoblab nolga tenglashtiramiz (hozircha ρ_{yx} o'rniga ρ yozib turamiz):

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = 2\sum_{i=1}^{n}(\rho + b - y_i)x_i = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}(\rho + b - y_i) = 0.$$

Elementar almashtirishlarni bajarib ρ va b ga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{cases} \rho \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \rho \sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \tag{4}$$

Bu sistemani yechib izlanayotgan parametrlarni topamiz (ixchamlik uchun i indekslarni tushirib qoldiramiz):

$$\rho_{yx} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}, \qquad b = \frac{n\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \quad (5)$$

Xuddi shu usulda X ning Y garegressiya to'g'ri chiziqli tanlanma tenglamasini topish mumkin.

$$\overline{x_y} = \rho_{xy} y + c \qquad (6)$$

Misol.

1. Hajmi n=5 bo'lgan tanlanmaning

x_i	1	1,5	3	4,5	5
y_i	1,2 5	1,4	1,5	1,7 5	2,2 5

taqsimoti bo'yicha Y ning X ga regressiya to'g'ri chiziqli tanlanma tenglamasini toping.

Yechish. Ma'lumotlar asosida quyidagi jadvalni tuzamiz:

x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
1	1,25	1	1,25
1,5	1,4	2,25	2,1
3	1,5	9	4,5
4,5	1,75	20,25	4,875
5	2,25	25	11,25
$\sum_i = 15$	$\sum_i = 8{,}15$	$\sum_i = 57{,}5$	$\sum_i = 26{,}975$

Jadvaldagi hisoblangan qiymatlarni (5) formulaga qo'ysak:

$$\rho_{yx} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{5 \cdot 26{,}975 - 15 \cdot 8{,}15}{5 \cdot 57{,}5 - 15^2} = 0{,}202,$$

$$b = \frac{n\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{5 \cdot 57{,}5 \cdot 8{,}15 - 15 \cdot 26{,}975}{5 \cdot 57{,}5 - 15^2}$$

U holda regressiya tanlanma tenglamasi: $y_x = 0{,}202x + 1{,}024$.

2) Faraz qilaylik, kuzatish natijasida olingan ma'lumotlar ko'p sonli (kamida 50 ta kuzatish o'tkazilishi kerak), ya'ni gruppalanadigan bo'lib$X$ belgining $x$qiymatiga va mos Y belgining y qiymati bir necha

martadan kuzatilgan bo'lsin, ya'ni ma'lumotlar ichida takrorlanadiganlariham borva ular korrelyatsion jadval ko'rinishidaberilgan deylik.

Quyidagi (soddalik uchun$i$ indekslarni tushirib qoldiramiz):

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x \Rightarrow \sum x = n\bar{x}, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum y \Rightarrow \sum y = n\bar{y},$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum x^2 \Rightarrow \sum x^2 = n\overline{x^2},$$

$\sum xy = n_{xy} xy$ ((x,y) juftlik n_{xy}martakuzatilishi hisobga olingan) ayniyatlardan foydalanib, (4) tenglamalar sistemasini quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{cases} (n\overline{x^2})\rho_{yx} + (n\bar{x})b = \sum n_{xy} xy, \\ (\bar{x})\rho_{yx} + b = \bar{y}. \end{cases} \qquad (7)$$

Bu sistemani ρ_{yx} va b ga nisbatan yechib, izlanayotgan regressiya tanlanma tenglamasini topamiz:

$$\overline{y_x} = \rho_{yx} + b. \qquad (8)$$

Ammo (7 sistemaning yechimini topishdagi ba'zi bir hisoblashlarni yengillashtirish maqsadida (8) tenglamani $\bar{y}$ uchun ham yozib:

$$\bar{y} = \rho_{yx} + b. \qquad (9)$$

chunki $(\bar{x}, \bar{y})$ nuqta ham (8) tenglamaning yechimi bo'ladi, (8) va (9) tenglamalardan tenglamalar sistemasi hosil qilamiz va yangi sistemadan

$$\overline{y_x} - \bar{y} = \rho_{yx}(x - \bar{x}) \qquad (10)$$

regressiya tanlanma tenglamasini hosil qilamiz.

(7) sistemadan regressiya koeffitsientini topamiz:

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\left(\overline{x^2} - (\bar{x})^2\right)} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x^2}$$ (ma'lumotlar gruppalanmasa $n_{xy} = 1$).

1-eslatma. Agar (x_i, y_i) ma'lumotlarda katta sonlar qatnashsa x_i, y_i variantalardan mos ravishda $u_i = \frac{x_i - c_1}{h_1}$, $v_j = \frac{y_j - c_2}{h_2}$shartli variantalarga o'tib hisoblashlarni anchayengillashtirish mumkin.

Amaliy mashg'ulot uchun yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

Mustaqil ishlash uchun misollar

1. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida Yning Xga to‘g‘ri chiziql iregressiya tanlanma tenglamasini tuzing.

X	10	2	7	5
Y	8	2	6	4

2. Bir oylik ish haqi fondining- Y ishlab chiqarilgan jami mahsulot hajmi-X ga bog‘liqligini o‘rganish maqsadida 10 ta korxona bo‘yicha quyidagi ma’lumotlar olingan. Y ning X ga to‘g‘ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini toping.

Korxonalar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X (mln.so’m)	500	570	600	650	700	720	800	860	900	920
Y (mln.so’m)	110	120	130	135	140	145	150	154	160	164

3. Quyidagi berilgan ma’lumotlar bo‘yicha 1 *ga* yerdan olingan hosil miqdori-Y ning sarflangan o‘g‘it miqdori-X ga bog‘liqligi ifodalovchi to‘g‘ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini toping.

$X(s)$	6	7	7,5	8	9	9,5	10
$Y(s)$	25	27	26	30	32	35	38

4. Shahardagi 10 ta oziq-ovqat magazini bo‘yicha bir oylik tovar ayirboshlash hajmi-X va shu davr mobaynidagi muomala xarajatlari-Y

hajmi o‘rganilgan. X ning Y ga bog‘liqligi ifodalovchi to‘g‘ri chiziqli regressiya tanlanmatenglamasini toping.

X (mln.so’m)	200	300	320	410	304	500	540	600	650	700
Y (mln.so’m)	20	27	30	36	38	44	50	56	58	60

5. Quyidagi ma’lumotlar bo‘yicha arpa boshog‘idagi donlar soni-Y ning boshoqning uzunligi-X ga bog‘liqligini ifodalovchi to‘g‘ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini tuzing.

X	6	6,8	7	8	8,5	9	10	11	12	13	14	15
Y	11	14	16	20	22	24	24	28	28	30	31	33

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Eng kichik kvadratlar usulining mohiyatini tushuntiring.
2. Belgilar orasidagi to‘g‘ri chiziqliregressiya tanlanma tenglamalarini keltiring.
3. To‘g‘ri chiziqli regressiya tanlama tenglamasidagi parametrlarni izohlang.

6.3-§. Korrelyatsion bog‘lanish zichligi.Tanlanma korrelyatsiyakoeffitsienti va tanlanma korrelyatsion nisbat

Ma’lumki, korrelyatsiya nazariyasining asosiy masalalaridan biri korrelyatsion bog‘lanish zichligini (kuchini)aniqlashdir.

Y belgining X belgiga korrelyatsion bog‘lanish zichligi Yning$X=x$ ga mos qiymatlarining $\overline{y_x}$ shartli o‘rtacha qiymat atrofida tarqoqligi bo‘yicha baholanadi. Agar tarqoqlik katta bo‘lsa, u holda Y ning$X$ ga kuchsiz bog‘langanligini yoki umuman bog‘lanmaganligini bildiradi.

Tarqoqlikning kamligi esa ular orasida ancha kuchli bog'lanish borligini ko'rsatadi.

Y va$X$ belgilar orasidagi korrelyatsion bog'lanish zichligini xarakterlovchi kattaliklar: korrelyatsiya tanlanma koeffitsienti va tanlanma korrelyatsion nisbatlar bilan tanishib chiqamiz. Bu ikki kattalikning vazifalari bir-biriga o'xshasa ham turli shakldagi masalalarni hal qiladi. Shu sababli,buikki kattalikni alohida-alohida o'rganamiz.

Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti belgilar orasidagi chiziqli bog'lanish zichligini aniqlabberadi. Uning formulasinikeltirib chiqarish uchun Y ning $X$to'g'ri chiziqli regressiya tanlanmatenglamasini

$$\overline{y_x} - \bar{y} = \rho_{yx}(x - \bar{x}) \qquad (1)$$

parametri ρ_{yx} ning

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x^2} \qquad (2)$$

ifodasi ko'rinishini o'zgartiramiz. Buning uchun (2) tenglikning ikkala tomonini ham $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ nisbatga ko'paytiramiz. U holda:$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x^2}$ (agar ma'lumotlar gruppalanmasa: n_{xy} =1).

Hosil bo'lgan tenglikning o'ng tomonini r_T bilan belgilaymiz va uni tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti deb ataymiz:

$$r_T = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x\sigma_y} \text{ (ma'lumotlar gruppalanmasa),} \qquad (3)$$

$$r_T = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x\sigma_y} \text{(ma'lumotlar gruppalansa),} \qquad (4)$$

Bu yerda x, y lar mos ravishda X va Y belgilarning kuzatilgan qiymatlari; n_{xy}-kuzatilgan (x,y) juftlikning chastotasi; n-tanlanma hajmi; $\bar{x}$, $\bar{y}$-mos tanlanma o'rtachalar; σ_x, σ_y- tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanishlardir.

r_T-tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti bosh to'plam r-korrelyatsiya koeffitsientining bahosi hisoblanadi, shuning uchun$Y$ va Xkattaliklarning sonbelgilari orasidagi chiziqli bog'liqligining o'lchovi hisoblanadi.

Agar tanlanmayetarlicha katta hajmga ega va reprezentativ bo'lsa, u holdabelgilar orasidagi zichlik haqida tanlanma ma'lumotlari bo'yicha olingan xulosa ma'lum darajada bosh to'plamga ham tarqatilishi

mumkin. Masalan, normal qonun bo'yicha taqsimlangan bosh to'plam korrelyatsiya koeffitsientini baholash uchun $(n \geq 50)$

$$r_T - 3\frac{1 - r_T^2}{\sqrt{n}} \leq r_B \leq r_T + 3\frac{1 - r_T^2}{\sqrt{n}}$$

formuladan foydalanish mumkin.

Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti uchun quyidagi xossalar o'rinli:

1-xossa. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsientining absolyut qiymati birdan ortmaydi, ya'ni $|r_T| \leq 1$, yoki -1$\leq r_T \leq 1$.

2-xossa. Tanlanma korrelyatsiyakoeffitsientining absolyut qiymati ortsa,belgilar orasidagi chiziqlikorrelyatsion bog'lanish zichligi ortadi.

3-xossa. Agar $|r_T|$=1 bo'lsa, u holda kuzatilayotganbelgilar chiziqli funksional bog'langanbo'ladi.

4-xossa. Agar $|r_T| = 0$ bo'lib,regressiya tanlanma chiziqlari to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lsa, u holda X va$Y$ belgilar orasidagi bog'lanish chiziqli korrelyatsion bog'lanish bo'lmaydi.

1-eslatma. Agar $|r_T| = 0$bo'lsa, u holda o'rganilayotganbelgilar chiziqsiz korrelyatsion bog'lanishda (masalan, parabolik, ko'rsatkichli va h.k.)va hattoki,funksional bog'lanishdabo'lishi mumkin.

Yuqorida keltirilgan xossalardan tanlanma korrelyatsiya koeffitsientining ma'nos ikelib chiqadi: tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti tanlanmada son belgilar orasidagi chiziqli korrelyatsion bog'lanish zichligini xarakterlaydi: $|r_T|$ kattalik 1 ga qancha yaqin bo'lsa, chiziqli korrelyatsion bog'lanish shuncha kuchli; $|r_T|$ kattalik 0 ga qancha yaqin bo'lsa,chiziqli korrelyatsion bog'lanish shuncha kuchsiz.

2-eslatma. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsientining ishorasi regressiya koeffitsientlarining ishoralari bilan bir xil bo'ladi, bu quyidagi formulalardankelib chiqadi:

$$\rho_{yx} = r_T\frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \qquad \rho_{xy} = r_T\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \qquad (5)$$

3-eslatma. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti tanlanma regressiya koeffitsientlarining geometrik o'rtacha qiymatiga teng:

$$r_T = \mp\sqrt{\rho_{yx}\rho_{xy}}$$

Ildiz oldidagi ishora regressiya koeffitsientlari ishoralari bilan bir xil qilib olinishi lozim.

Misol.

1. Cho'chqa bolasining og'irligi Y (kg) va yoshi X (haftalarda) orasidagi bog'lanish quyidagi jadval bilan berilgan.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	1,3	2,5	3,9	5,2	5,3	7,5	9,0	10,8	13,1

Shu ma'lumotlar bo'yicha tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini toping.

Yechish. $r_T = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x\sigma_y}$ formulada zarur hisoblashlarni bajarsak, r_T =98, ekanligini topamiz. Bundan esa cho'chqa bolasining og'irligi va yoshi orasidagi bog'lanish kuchli, degan xulosaga kelamiz.

4-eslatma. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini hisoblashni soddalashtirish uchun shartli variantaga o'tish mumkin (bunda r_T ning qiymati o'zgarmaydi).

Kuzatilayotgan (yoki biz o'rganmoqchi bo'lgan) X va Y belgilar orasidagi chiziqli korrelyatsion bog'lanish zichligini baholash uchun r_T-korrelyatsiya tanlanma koeffitsienti xizmat qilsa, chiziqsiz yoki umuman korrelyatsiya tanlanma koeffitsienti xizmat qilsa, chiziqsiz yoki umuman ixtiyoriy ko'rinishdagi korrelyatsion bog'lanishning zichligini qanday baholash mumkin degan savol bo'lishi tabiiydir. Umumiy holda korrelyatsion bog'lanishning zichligini aniqlash uchun tanlanma korrelyatsionnisbatdeb ataluvchi xarakteristika ishlatiladi. Bu xarakteristika bilan tanishib chiqishdan oldin tanlanma korrelyatsion nisbatni kiritish bilanbog'liq bo'lgan ba'zi tushunchalarnikeltirib o'tamiz.

1-ta'rif. Bosh to'plamning biror bir gruppasigategishli belgilarning arifmetik o'rtachasi gruppa o'rtachasideb ataladi.

Gruppa o'rtachasini ba'zi hollarda shartli o'rtachadeb ham yuritish mumkin. Yuqorida foydalanilgan shartli o'rtacha tushunchasida bu holat yuzbergan.

Gruppa o'rtachasi va gruppalar hajmi ma'lum bo'lsa umumiy to'plam o'rtachasini (bosh to'plam o'rtachasi) topish mumkin.

Misol.

2. Ikki gruppadan tashkil topgan to'plam o'rtachasi topilsin:

Gruppa	birinchi		ikkinchi	
Belgining qiymatlari	1	6	1	5
Chastota	10	15	20	30
Hajm	10+15=25		20+30=50	

Yechish. Gruppa o'rtachalarini topamiz:

$$\overline{x_1} = \frac{10\cdot 1 + 15\cdot 6}{25} = 4, \quad \overline{x_2} = \frac{20\cdot 1 + 30\cdot 5}{50} = 3{,}4.$$

Gruppa o'rtachalari bo'yicha umumiy o'rtachani topamiz:

$\bar{x} = \frac{25\cdot 4 + 50\cdot 3{,}4}{25+50} = 3{,}6.$

2-ta'rif. Gruppaga tegishli belgilarning gruppa o'rtachasiga nisbatan dispersiyasi gruppa dispersiyasi deb ataladi:

$$D_{gr}(X_j) = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{x_j})^2}{N_j} \qquad (6)$$

bu yerda $n_i - x_i$ qiymatning chastotasi; j-gruppa nomeri; $\overline{x_j}$-j gruppaning gruppa o'rtachasi; $N_j = \sum n_i$-j gruppa hajmi.

Misol.

3. Ikki gruppadan tashkil topgan to'plamning gruppa dispersiyasi topilsin:

Gruppa	birinchi		ikkinchi	
Belgining qiymatlari	1	6	1	5
Chastota	10	15	20	30
Hajm	10+15=25		20+30=50	

Yechish. 2-misoldan ma'lumki, $\overline{x_1} = 4$, $\overline{x_2} = 3{,}4$. Endi gruppa dispersiyalarini topamiz:

$$D_{gr}(X_1) = \frac{10\cdot(1-4)^2 + 15\cdot(6-4)^2}{25} = 6,$$

$$D_{gr}(X_2) = \frac{20\cdot(1-3{,}4)^2 + 30\cdot(5-3{,}4)^2}{50} = 3{,}84.$$

3-ta'rif. Gruppa dispersiyalarining gruppalar hajmi bo'yicha olingan arifmetik o'rtachasi gruppalar ichki dispersiyasi deb ataladi:

$$\overline{D_{gr}} = \frac{\sum N_j D_{gr}(X_j)}{n},$$

bu yerda, N_j - j gruppa hajmi; $n = \sum N_j$ -umumiy to'plam hajmi.

Masalan, 3-misolda gruppalar ichki dispersiyasini topsak:

$$\overline{D_{gr}} = \frac{25 \cdot 6 + 50 \cdot 3{,}84}{75} = 4{,}56.$$

4-ta'rif. Gruppa o'rtachalarining umumiy to'plam o'rtachasiga (bosh to'plam o'rtachasi) nisbatan dispersiyasi gruppalararo dispersiya deb ataladi:

$$D_{gr}(\overline{X_j}) = \frac{\sum N_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2}{n},$$

bu yerda $\bar{x}_j$-j gruppaning gruppa o'rtachasi; N_j-j gruppa hajmi; $\bar{x}$-umumiy o'rtacha; $n = \sum N_j$-umumiy to'plam hajmi.

Masalan, 3-misolda gruppalararo dispersiyanitopsak:

$$D_{gr}(\overline{X_j}) = \frac{25 \cdot (4 - 3{,}6)^2 + 50 \cdot (3{,}4 - 3{,}6)^2}{75} = \frac{4 + 2}{75} = 0{,}08.$$

Endi bu tushunchalardan foydalanib tanlanma korrelyatsion nisbat tushunchasini aniqlaymiz.

5-ta'rif. Y ning X ga tanlanma korrelyatsion nisbati deb,

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\overline{y_x}}}{\sigma_y} \qquad (6)$$

nisbat bilan aniqlanuvchi kattalikka aytiladi.

Bu yerda $\sigma_{\overline{y_x}} = \sqrt{\frac{\sum n_x (\overline{y_x} - \bar{y})^2}{n}}$ –shartli yoki gruppalararo o'rtacha kvadratik chetlanish; $\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum n_y (y - \bar{y})^2}{n}}$ –-o'rtacha kvadratik chetlanish; n-tanlanma hajmi; n_x-X belgining x qiymati chastotasi; n_y- Y belgining y qiymati chastotasi; $\bar{y}$- Y belgining umumiy o'rtachasi; $\overline{y_x}$- Y belgining X=x ga mos shartli o'rtachasi.

X ning Y ga tanlanma korrelyatsion nisbati ham shu kabi aniqlanadi:

$$\eta_{xy} = \frac{\sigma_{\overline{x_y}}}{\sigma_x} \qquad (7)$$

Misol.

2. n=50 hajmli quyidagi korrelyatsion jadval bo'yicha Ybelgining Xbelgiga korrelyatsion nisbati η_{yx}ni toping.

Y \ X	10	20	30	n_y
12	4	28	6	38
25	6	-	6	12
n_x	10	28	12	n=50
$\overline{y_x}$	21	15	20	

Yechish. $\bar{y}$-umumiy o'rtachani topamiz:

$$\bar{y} = \frac{\sum n_i y_i}{n} = \frac{38 \cdot 15 + 12 \cdot 25}{50} = \frac{870}{50} = 17{,}4.$$

σ_y -o'rtacha kvadratik chetlanishni topamiz:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum n_y (y - \bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{38 \cdot (15 - 17{,}4)^2 + 12 \cdot (25 - 17{,}4)^2}{50}} = 4{,}27$$

$\sigma_{\overline{y_x}}$-shartli o'rtachaning o'rtacha kvadratik chetlanishni (yoki gruppalararo o'rtacha kvadratik chetlanish) topamiz:

$$\sigma_{\overline{y_x}} = \sqrt{\frac{\sum n_x (\overline{y_x} - \bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{10(21-17{,}4)^2 + 28(15-17{,}4)^2 + 12(20-17{,}4)^2}{50}} = 2{,}73$$

Topilganlarni (6) formulaga qo'ysak: $\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\overline{y_x}}}{\sigma_y} = \frac{2{,}73}{4{,}27} = 0{,}64.$

Tanlanma korrelyatsion nisbat uchun quyidagi xossalar o'rinli. η_{yx} va η_{xy} kattaliklar uchun aniqlangan xossalar bir xil bo'lganligi sababli tanlanma korrelyatsion nisbat xossalarini η kattalik uchun sanab o'tamiz.

1-xossa. Tanlama korrelyatsion nisbat quyidagi qo'sh tengsizlikni qanoatlantiradi:

$$0 \le \eta \le 1.$$

2-xossa. Agar η=1 bo'lsa, belgilar funksional bog'lanishda bo'ladi.

3-xossa. Tanlanma korrelyatsion nisbat tanlanma korrelyatsiya koeffitsientining absolyut qiymatidan kichik emas: $\eta \ge |r_T|$.

4-xossa. Agar $\eta = |r_T|$ bo'lsa, belgilar orasida chiziqli bog'lanish bo'ladi.

5-xossa. Agar η=0 bo'lsa, belgilar korrelyatsion bog'lanishda bo'lmaydi.

Tanlanma korrelyatsion nisbatning afzalligi uning istalgan korrelyatsion bog'lanish, shu jumladan, chiziqli bog'lanish zichligining ham o'lchovibo'lib xizmat qilishidadir. Shu bilan birga, tanlanma korrelyatsion nisbat kamchilikka ham ega: u bog'lanish shakli haqida hech qanday ma'lumot bermaydi.

Amaliy mashg'ulot uchun yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

Mustaqil ishlash uchun misollar

1.Berilganjadvalbo'yicha$X$va$Y$tasodifiymiqdorlarningtanlanmakorrelyatsiyakoeffitsientitopilsin.

X	-1	3	4	0	2	3	1	4
Y	2	0	1	-1	1	1	2	0

2. n=50 hajmli quyidagi korrelyatsion jadval bo'yicha Y belgining X belgiga tanlanma korrelyatsion nisbati η_{yx} ni toping.

Y \ X	2	3	5	n_y
25	20	-	-	20
45	-	30	1	31
110	-	31	48	49
n_x	20	31	49	n=50

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Korrelyatsion bog'liqlik zichligi qanday baholanadi?
2. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti xossalarini keltiring.
3. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti va regressiya tanlanma koeffitsienti orasida qanday munosabat bor?

4. Tanlanma korrelyatsion nisbat nima uchun xizmat qiladi? Uning xossalarini keltiring.

Tavsiya etiladigan mustaqil ta'lim va referat mavzulari

1. Shartli variant va uning tatbiqlari.
2. Gruppa, gruppalar ichki, gruppalararo va umumiy dispersiyalar va ular orasida bog'lanish.

18-§. Egri chiziqli va to'plamiy korrelyatsiya

Agar X va Y belgilar orasidagi korrelyatsion bog'lanish o'rganilayotgan bo'lib, $\overline{y_x} = f(x)$ yoki $\overline{x_y} = g(y)$ regressiya grafiklari egri chiziq bilan tasvirlanadiganbo'lsa u holda korrelyatsiya ***egri chiziqli***deyiladi.

Egri chiziqli korrelyatsiya nazariyasida ham chiziqli korrelyatsiya nazariyasi kabi masalalar, ya'ni korrelyatsion bog'lanish shakli va zichligini aniqlash bilan shug'ullaniladi. Egri chiziqli korrelyatsiyada Yning Xgaregressiya funksiyalari ko'rinishiga quyidagilar misol bo'lishi mumkin:

$\overline{y_x} = ax^2 + bx + c$(ikkinchi tartibli parabolik korrelyatsiya);

$\overline{y_x} = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (uchinchi tartibli parabolik korrelyatsiya);

$\overline{y_x} = \frac{a}{x} + b$(giperbolik korrelyatsiya);

$\overline{y_x} = ae^{bx}$ (ko'rsatkichli korrelyatsiya) va h.k.

Regressiya funksiyasining ko'rinishini aniqlash uchunDekart koordinatalar sistemasida $(x;\overline{y_x})$ nuqtalarning o'rni topiladi va ularning joylashishiga qarab regressiya funksiyasining taxminiy ko'rinishi haqida gipoteza qilinadi; o'rganilayotgan masalaning mohiyatidankelib chiqqan holda oxirgi xulosa qabulqilinadi.

Belgilar orasidagi korrelyatsion bog'lanishni ifodalovchiregressiya funksiyalarining noma'lum parametrlarni aniqlash yoki statistik baholash masalalari hammuhim hisoblanadi.

Regressiya funksiyasining noma'lum parametrlari eng kichik kvadratlar usuli yordamida baholanishi mumkin. Egri chiziqli korrelyatsiya zichligini baholashdatanlanma korrelyatsion nisbatdanfoydalanamiz.

Egri chiziqli korrelyatsiyaning sodda hollaridan biri ikkinchi tartibli parabolik korrelyatsiya deb hisoblaymiz va bu ko'rinishdagi korrelyatsiyaning noma'lum parametrlarini tanlanma ma'lumotlari yordamida baholaymiz. Aniqlik uchun Y ning X ga regressiya tanlanma tenglamasini qaraymiz. Bundaregressiya tanlanmatenglamasi

$$\overline{y_x} = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

ko'rinishda bo'lib, a, b, c noma'lum parametrlarni tanlanma ma'lumotlari bo'yicha toppish kerak bo'ladi. Noma'lum koeffitsientlarni

$$v_i = y_i - (ax_i^2 + bx_i + c), i = 1,2,3 \dots, n$$

chetlanishlar kvadratlarining yig'indisi eng kichik bo'ladigan qilib, tanlaymiz. Shu maqsadda, quyidagi funksiyani kiritamiz:

$$F(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\right)^2$$

Bu funksiyani ekstremumga tekshirib va tegishli almashtirishlardan so'ng quyidagi sistemani hosil qilamiz.

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} n_{x_i}x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} n_{x_i}x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} n_{x_i}x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} n_{x_i}x_i^2\overline{y_{x_i}}, \\ a\sum_{i=1}^{n} n_{x_i}x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} n_{x_i}x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} n_{x_i}x_i = \sum_{i=1}^{n} n_{x_i}x_i\overline{y_{x_i}}, \\ a\sum_{i=1}^{n} n_{x_i}x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} n_{x_i}x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} n_{x_i}\overline{y_{x_i}} \end{cases} \qquad (2)$$

Kuzatish natijalari-(x_i, y_i) juftliklardan foydalanib a, b, c larga nisbatan tenglamalar sistemasi hosil qilamiz va undan a, b, c noma'lum parametrlar topiladi.

Misol.

1. Korrelyatsiya jadvali ma'lumotlari asosida $\overline{y_x} = ax^2 + bx + c$ ko'rinishdagi Y ning X ga regressiya tanlama tenglamasini toping.

Y \ X	1	1,1	1,2	n_y
6	8	2	-	10
7	-	30	-	30
7,5	-	1	9	10
n_x	8	33	9	n=50

Yechish. Korrelyatsion jadval ma'lumotlari asosida quyidagt jadvalni tuzamiz.

x	n_x	$\overline{y_x}$	$n_x x$	$n_x x^2$	$n_x x^3$	$n_x x^4$	$n_x \overline{y_x}$
1	8	6	8	8	8	8	48
1,1	33	6,73	36,93	39,93	43,93	48,32	222,09
1,2	9	7,5	10,8	12,96	15,55	18,66	67,50
Σ	50	-	55,1	60,89	67,48	74,98	337,59

Bu jadvalning $\sum$ qatoridagi sonlarni (2) ga qo'yib quyidagi tenglamalar sistemasinihosil qilamiz:

$$\begin{cases} 74,98a + 67,48b + 60,89c = 413,93, \\ 67,48a + 60,89b + 55,10c = 373,30, \\ 60,89a + 55,10b + 50c = 337,59. \end{cases}$$

Bu sistemadan a=1,94, b=2,98, c=1,10 yechimlarni topamiz. U holda regressiya tenglamasi $\overline{y_x} = 1,94x^2 + 2,98x + 1,10$ ko'rinishda bo'ladi. Tekshirish uchun tenglama bo'yicha hisoblangan $\overline{y_x}$ ning qiymatlari bilan jadval bo'yicha topilgan $\overline{y_x}$ ning qiymatlarini taqqoslash mumkin.

Yuqorida keltirilgan boshqa turdaga egri chiziqli regressiya tenglamalarining koeffitsiyetlarini topishda ham eng kichik kvadratlar usulidan foydalanish mumkin, ammo ba'zi hollarda oldin ma'lum bir almashtirishlarni amalga oshirish zarur. Masalan, $y = ax^b (a > 0, b > 0$ regressiya tenglamasidagi noma'lum a,b koeffitsiyentlarni topishda avvalam bor bu tenglamani$lny=lna+blnx$ ko'rinishda yozib olamiz, so'ngra $u=lnx$, $z=lny$belgilashlar yordamida$z=ub+lna$ chiziqli funksiyani hosil qilamiz.

Ba'zi amaliy masalalarda ikkita emas, balki ikkitadan ko'proq belgilar orasidagi bog'lanishni o'rganish zaruriyati tug'iladi. Bu holda belgilar orasidagi korrelyatsion bog'lanish to'plamiy (ko'plik) korrelyatsiyadeb ataladi.

To'plamiy korrelyatsiyaning eng sodda holi bo'lgan uchtabelgi orasidagi chiziqli korrelyatsiyani qaraymiz. Bu holda X , Y va$Z$belgilarorasidagi korrelyatsion munosabat

$$z=ax+by+c \qquad (3)$$

tenglama ko'rinishida ifodalanadi. Bunda quyidagi:

1. Kuzatish ma'lumotlari bo'yicha regressiyaning a,b,c koeffitsientlarni topish, ya'ni $z=ax+by+c$ tanlanma tenglamani topish;

2. Z belgi bilan ikkala Y va Z belgilar orasidagi bog'lanish zichligini baholash;

3. Y fiksirlanganda (o'zgarmaganda) Z va X orasidagi, X fiksirlanganda Z va Y bog'lanish zichligini topish masalalarini hal qilish zarur.

Birinchi masala eng kichik kvadratlar usuli bilan hal qilinadi. Analitik geometriyadan ma'lumki, (3) chiziqli bog'lanish tenglamasini:

$$z-\bar{z}=a(x-\bar{x})+b(y-\bar{y}) \tag{4}$$

ko'rinishda yozib olish mumkin. Bu ko'rinishda esa 1-masalani hal qilish osonroq..

Ba'zi elementar hisoblashlardan so'ng a va b koeffitsientlar uchun quyidagi formulalarni topamiz:

$$a=\frac{r_{xz}-r_{yz}r_{xy}\sigma_z}{1-r_{xy}^2\sigma_x}, \qquad b=\frac{r_{yz}-r_{yz}r_{zx}\sigma_z}{1-r_{xy}^2\sigma_y} \tag{5}$$

Bunda r_{xz}, r_{yz}, r_{xy} mos ravishda X va Z , Y va Z , X va Y belgilar orasidagi korrelyatsiya koeffitsientlari; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$- o'rtacha kvadratik chetlanishlar.

Z belgining X va Y belgilar bilan bog'liqliq zichligi quyidagi:

$$R=\sqrt{\frac{r_{xz}^2-2r_{xy}r_{xz}r_{yz}+r_{yz}^2}{1-r_{xy}^2}}, \qquad 0\le R\le 1 \tag{6}$$

umumiy tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti bilan baholanadi.

Shuningdek, Y fiksirlanganda (o'zgarmaganda) Z va X orasidagi, X fiksirlanganda Z va Y bog'lanish zichligi mos ravishda:

$$r_{xz(y)}=\frac{r_{xz}-r_{xy}r_{yz}}{\sqrt{(1-r_{xy}^2)(1-r_{yz}^2)}}, \tag{7}$$

$$r_{yz(x)}=\frac{r_{yz}-r_{xy}r_{xz}}{\sqrt{(1-r_{xy}^2)(1-r_{xz}^2)}}, \tag{8}$$

xususiy tanlanma korrelyatsiya koeffitsientlari bilan baholanadi.

Tabiatda turli-tuman jarayonlarni o'rganishda, tasodifiy jarayonlarning o'zaro bog'liqlik qonunlarini ochishda, hamda umuman prognozlash masalalarida korrelyatsion va regression analizning xulosalari katta ahamiyatga egadir. Xususan, iqtisodiy jarayonlarni tadqiq etishda turli iqtisodiy ko'rsatkichlarning bir-biriga bog'liqligini aniqlash va shu asosda muhim xulosalar chiqarishda korrelyatsiya nazariyasining elementlari muvaffaqiyatlitatbiq etibkelinmoqda.

Amaliy mashg'ulot uchun yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

Mustaqil ishlash uchun misollar

1. Jadvaldagi ma'lumotlar asosida $\overline{y_x}=ax^2+bx+c$regressiya tanlanma tenglamasini toping.

Y \ X	0	4	6	7	10	n_y
7	19	1	1	-	-	21
13	2	14	-	-	-	16
40	-	3	22	2	-	27
80	-	-	-	15	-	15
200	-	-	-	-	21	21
n_x	21	18	23	17	21	n=100

2. Jadvalda keltirilgan ma'lumotlar asosida $\overline{x_y}=ay^2+by+c$ regressiya tanlanma tenglamasini va η_{yx} tanlanma korrelyatsion nisbatni aniqlang.

Y \ X	6	30	50	n_y

1	15	-	-	15
2	1	14	-	15
3	-	2	18	20
4	16	16	18	50
n_x	32	32	36	n=100

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Egri chiziqli korrelyatsiya nima?
2. Egri chiziqli korrelyatsiyadagi regressiya funksiyalariga misollar keltiring.
3. To'plamiy korrelyatsiyani tushuntiring.
4. Tanlanma to'lamiy korrelyatsiya koeffitsienti va xususiy korrelyatsiya koeffitsientlari nimani xarakterlaydi?

6.5- §. Statistik gipotezalar. Statistik kriteriy

Reja

Amaliyotda, texnikada va iqtisodiyotda ko'pincha tasodifiylik bilan bog'liq bo'lgan biror faktni aniqlashtirish uchun statistik usul bilan tekshirish mumkin bo'lgan gipotezalarga tayanib ish ko'riladi.

Ma'lumki, har qanday ilmiy asoslangan farazni gipoteza deb aytishimiz mumkin, ammo har qanday gipotezani stastistik gipoteza deb ayta olmaymiz, chunki uning alohida ajralib turadigan xususiyatlari bor, bu xususiyatlarni alohida ta'kidlash uchun biz quyidagi ta'rifni keltiramiz.

1-ta'rif*. *Statistik gipoteza deb, kuzatilayotgan tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni, yoki agar tasodifiy miqdor bo'ysinadigan taqsimot qonunning ko'rinishi ma'lum bo'lsa, u holda bu taqsimot qonunning noma'lum parametrlari haqidagi gipotezaga aytiladi.

Masalan, quyidagi gipotezalar statistik gipotezalarga misol bo'la oladi:

1. Bir xil ishlab chiqarish sharoitlarida bir xil ishni bajarayotgan ishchilarning mehnat unumdorligi normal taqsimot qonun bo'yicha taqsimlangan;

2. Parallel ishlayotgan stanoklarda tayyorlanayotgan bir xil turdagi detallarning o'rtacha o'lchamlari bir-biriga teng;

3. Normal taqsimot qonuniga bo'ysinuvchi ikki to'plamning dispersiyalari o'zaro teng;

1-gipotezada taqsimotning ko'rinishi haqida, 2 va 3-gipotezalarda esa parametrlarhaqida faraz qilingan.

«Ertaga yomg'ir yog'adi», «Bu yil mo'l hosil olamiz» kabi gipotezalar statistik gipotezalar bo'la olmaydi, chunki ularda na taqsimot qonunining ko'rinishi haqida, na uning parametrlari haqidaso'zboradi.

Oldinga surilgan gipoteza tanlanma natijalarga asoslanib tekshiriladi va natijada yoki qabul qilinishi yoki rad qilinishi mumkin.

Asosiy (yoki nolinchi) gipoteza deb ilgari surilgan H_0-gipotezaga, konkurent (yoki alternativ) gipoteza deb, asosiy gipotezaga zid bo'lgan H_1-gipotezaga aytiladi.

Masalan, «X tasodifiy miqdor Puasson taqsimot qonuniga bo'ysunadi» gipotezasi surilganbo'lsin.

Bu holda:

$$H_0: P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} (\lambda > 0, k = 0,1,2,3, \dots);$$

$$H_1: P(X=k) \neq \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Faqat bitta da'voni o'z ichiga olgan gipoteza ***oddiy gipoteza***; bittadan ortiq sondagi da'volarni o'z ichiga olgan gipoteza esa ***murakkab gipoteza*** deyiladi.

Masalan, agar X tasodifiy miqdor ko'rsatkichli taqsimot:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & agar\ x < 0\ bo'lsa \\ 1 - e^{-\lambda x}, & agar\ x \geq 0\ bo'lsa \end{cases}$$

qonuniga bo'ysinib, uning λ parametri noma'lum bo'lsin. U holda $H_0: \lambda = 2{,}5$ gipoteza oddi gipoteza; $H_1: \lambda > 2{,}5$ gipoteza esa murakkab gipotezadir.

Ilgari surilgan gipoteza to'g'ri yoki noto'g'ri bo'lishi mumkin, shu sababli uni tekshirib ko'riladi va so'ngra xulosa chiqariladi. Gipotezani tekshirish natijasida ikki turdagi xatolikka yo'l qo'yilishi mumkin.

Agar to‘g‘ri gipoteza rad etilsa, qilingan xatolikni I tur xatolik, agar noto‘g‘ri gipoteza qabul qilinsa qilingan xatolik II tur xatolik deb ataladi. Bu xatoliklarni jadvalda quyidagicha tasvirlash mumkin.

H_0-gipoteza	to‘g‘ri	noto‘g‘ri
Rad qilindi	I tur xatolik	To‘g‘ri qaror
Qabul qilindi	To‘g‘ri qaror	II tur xatolik

Amaliyotda I va II tur xatoliklarning oqibatlari har xil bo‘lishi mumkin. Masalan, agar samolyotga «uchishga ruxsat berilsin» degan to‘g‘ri qaror rad etilgan bo‘lsa, u holda bu I tur xatolik bo‘lib, bunday xatolik moddiy zararga olib kelishi mumkin; agar samolyotning nosozligiga qaramasdan «uchishga ruxsat berilsin» degan noto‘g‘ri qaror qabul qilinsa, u holda bu II tur xatolik bo‘lib, bunday xatolik halokatga olib kelishi mumkin.

Albatta, I tur xatolik II tur xatolikga qaraganda og‘irroq oqibatlarga olib keladigan misollar ham keltirish mumkin.

To‘g‘ri qarorni ikki holda qabul qilish mumkin:

1) agar ilgari surilgan gipoteza haqiqatan ham to‘g‘ri bo‘lsa, gipoteza qabul qilinadi;

2) agar ilgari surilgan gipoteza haqiqatan ham noto‘g‘ri bo‘lsa, gipoteza qabul qilinmaydi.

I tur xatolikka yo‘l qo‘yish ehtimoli α bilanbelgilanadi; u **muhimlilik (qiymatdorlik) darajasi** deb ataladi. Ko‘p hollarda $\alpha=0,05$; $\alpha=0,01$ deb olinadi.

Biz ma’lum taqsimot qonuniga bo‘ysinuvchi belgining noma’lum parametrlari haqida ilgari surilgan gipoteza statistik usulda qanday tekshirilishini ko‘rib chiqamiz.

Asosiy gipoteza ilgari surilgandan so‘ng, uning to‘g‘ri yoki noto‘g‘ri ekanligini tekshirib ko‘rish kerak bo‘ladi. Shu maqsadda maxsus tanlangan, aniq, yoki taxiniy taqsimoti ma’lum bo‘lgan tasodifiy miqdor ishlatiladi. Bu tasodifiy miqdorni Kbilanbelgilaymiz.

2-ta’rif. Statistik kriteriy (yoki oddiygina kriteriy) deb, asosiy gipotezani tekshirish uchun xizmat qiladigan$K$-tasodifiy miqdorga aytiladi.

Masalan, agar normal taqsimot qonuniga ega$X$ va Ybosh to‘plamlarning dispersiyalari tengligi haqidagi gipotezatekshirilayotgan bo‘lsa, u holda$K$ kriteriy sifatida «tuzatilgan» tanlanma dispersiyalar nisbati olinadi:

$$F = \frac{S_x^2}{S_y^2} \qquad (1)$$

Turli tajribalarda dispersiyalar har xil, oldindan ma’lum bo‘lmagan qiymatlar qabul qilganligi uchun$F$ tasodifiy miqdor bo‘lib, u Fisher-Snedekor qonunibo‘yicha taqsimlangan.

Gipotezanitekshirish uchun kriteriyga kirgan miqdorlarning xususiy qiymatlari tanlanma bo‘yicha hisoblanadi va shunday qilib kriteriyning kuzatiladigan(xususiy) qiymati hosil qilinadi.

K_{kuzat} - kuzatiladigan qiymat deb, statistik kriteriyning tanlanma bo‘yicha hisoblangan qiymatiga aytiladi. Masalan, ikkita tanlanma asosida topilgandispersiyalar: $S_1^2 = 20$va $S_2^2 = 5$bo‘lsa, uholda

$$K_{kuzat} = F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{20}{5} = 4.$$

Tanlangan K kriteriyning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlari to‘plami kesishmaydigan ikkita qism to‘plamlarga ajratiladi:

$K = K^- \cup K^+$, $K^- \cap K^+ = \emptyset$.

Ulardan biri H_0-asosiy gipoteza rad qilinadigan, ikkinchisi esa asosiy gipoteza qabulqilinadigan qiymatlarini o‘z ichiga oladi.

3-ta’rif. Kritik soha deb, kriteriyning H_0-asosiy gipotezani rad qiladigan qiymatlar to‘plamiga aytiladi.

4-ta’rif. Gipotezaning qabul qilinish sohasi deb, kriteriyning asosiy gipotezani qabul qiladigan qiymatlar to‘plamiga aytiladi.

Statistik gipotezalarni tekshirishning asosiy printsiplari E.Neyman, K.Pirson va boshqa matematiklar tomonidan ishlab chiqilgan bo‘lib, bu printsipni quyidagicha ta’riflash mumkin: agar kriteriyning kuzatiladigan qiymati kritik sohaga tegishli bo‘lsa, asosiy gipoteza rad qilinadi, agar kriteriyning kuzatilayotgan qiymati gipotezaning qabul qilinish sohasigategishlibo‘lsa, asosiy gipotezaqabul qilinadi.

Kriteriy bir o‘lchovli tasodifiy miqdor bo‘lgani uchun uning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlari to‘plami biror intervaldan iborat bo‘ladi. Shu sababli, kritik soha va gipotezaning qabul qilinish sohasi ham intervaldan iborat bo‘ladi, demak, ularni ajratib turuvchi nuqtalar to‘g‘risida gapirish mumkin.

5-ta'rif. Kritik nuqtalar deb, kritik sohani gipotezaning qabul qilinish sohasidan ajratib turuvchi nuqtalarga aytiladi.

Agar kritik soha $K > k_{kr}$ tengsizlik bilan aniqlansa, u holda uni ***o‘ng tomonli*** kritik soha, tengsizlik aksincha bo‘lsa ***chap tomonli*** kritik soha deyiladi. Agar kritik soha K< $k_{kr}^{'}$, $K > k_{kr}^{''}$ tengsizliklar bilan aniqlansa, u holda uniikki tomonli kritik sohadeyiladi.

Chap tomonli va ikki tomonli kritik sohalarni aniqlash o‘ng tomonli kritik sohani topishga o‘xshash bo‘lganligi sababli biz faqat o‘ngtomonli kritik sohani topish bilantanishib chiqamiz.

Kritik sohani topish uchun kritik nuqtani aniqlash yetarli. Bu nuqtani aniqlash uchun esa α ning qiymatiberilishi kerak. So‘ngra, quyidagi talabga asoslanib, k_{kr} nuqta topiladi: H_0-asosiy gipoteza o‘rinli bo‘lishi shartida tanlangan K kriteriyning k_{kr} nuqtadan katta bo‘lishi ehtimoli α-muhimlilik darajasiga teng bo‘lsin:

$$P(K > k_{kr}) = \alpha \qquad (2)$$

Har bir kriteriy uchun (2) shartni qanoatlantiruvchi kritik nuqtalarni topish jadvallari mavjud.

Kritik nuqta topilgandan so‘ng, $x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlanma ma'lumotlari bo‘yicha kriteriyning kuzatiladigan qiymati topiladi. Bunda agar $K > k_{kr}$ bo‘lsa, u holda H_0 asosiy gipoteza rad qilinadi; agar $K < k_{kr}$ bo‘lsa, u holda gipotezani rad qilishga asos yo‘q deyiladi.

1-eslatma. H_0 gipoteza qabul qilingan bo‘lsin. Shu bilan bu gipoteza isbotlandi deyish xato bo‘ladi. Aslida «kuzatish natijalari H_0 gipotezaga mos keladi va demak, uni rad qilishga asos yo‘q» deyish to‘g‘riroq bo‘ladi.

Amalda gipotezani katta ishonch bilan qabul qilish uchun boshqa statistik usullar bilan tekshiriladi yoki tanlanma hajmi orttirilib tajriba takrorlanadi. Gipotezani qabul qilishdan ko‘ra ko‘proq uni rad qilishga harakat qilinadi. Haqiqatan, ma'lumki biror umumiy da'voni rad qilish bu uchun bu da'voga zid bo‘lgan bitta misolni keltirish kifoya. Shu sababli ***kriteriy quvvati*** tushunchasi kritiladi.

6-ta'rif. Konkurent gipoteza to‘g‘ri bo‘lganda kriteriyning kritik sohada bo‘lish ehtimoli kriteriy quvvati deb ataladi.

Agar II tur xatolikka yo‘l qo‘yish ehtimoli β bo‘lsa, u holda kriteriy quvvati 1- β gateng bo‘ladi. Bundan ko‘rinadiki, quvvat qancha katta bo‘lsa II tur xatolikka yo‘l qo‘yish ehtimoli shuncha kam bo‘ladi. Yuqoridagi ta'riflardan ko‘rinib turibdiki, α ning kamayishi βning o‘sishiga olibkeladi va aksincha. Masalan, $\alpha = 0$ bo‘lsa, u holda barcha gipotezalar qabul qilinadi, jumladan, noto‘g‘rilari ham. Shu sababli, ikkala parametrni bir paytda kamaytirib bo‘lmaydi. I tur va II tur xatoliklarni kamaytirishning yagona yo‘li tanlanma hajmini oshirishdir.

Statistik gipotezani tekshirish qanday amalga oshirilishini quyidagi misolda ko‘rib chiqamiz.

Normal taqsimlangan ikki bosh to‘plamning dispersiyalarni taqqoslash. Dispersiyalar haqidagi gipotezalar, ayniqsa texnikada muhim ahamiyatga ega, chunki tarqoqlik xarakteristikasi bo‘lgan dispersiya mashina va uskunalarning, o‘lchov asboblarining, texnologik protseslarning aniqligini baholashda juda muhim ko‘rsatkich hisoblanadi.

Normal taqsimlangan bosh to‘plam dispersiyalarining tengligi haqida gipoteza ilgari surilsa kriteriy sifatida $F = \frac{S_x^2}{S_y^2}$ kattalik olinishni aytib o‘tgan edik. Bunda F tasodifiy miqdor bo‘ysinadigan Fisher-Snedekor taqsimotining erkinlik darajalari quyidagicha aniqlanadi: $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$, bu yerda n_1-hisoblanganda qiymati katta bo‘lgan «tuzatilgan» dispersiyaga mos tanlanmaning hajmi, n_2-hisoblanganda qiymati kichik bo‘lgan «tuzatilgan» dispersiyaga mos tanlanmaning hajmi. Kritik nuqta $k_{kr} = F_{kr}(\alpha;\ k_1;\ k_2)$tenglik bilan jadvaldan aniqlanadi.

Amaliy mashg'ulot uchun yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

Misol. Normal taqsimlangan$X$ va Y bosh to‘plamlardan olingan $n_1 = 11$va $n_2 = 14$ hajmli ikkita erkli tanlanma bo‘yicha «tuzatilgan»dispersiyalar: $S_x^2 = 0{,}76, S_x^2 = 0{,}38$topilgan. $\alpha = 0{,}05$ muhimlilik darajasida quyidagi gipotezani tekshiring:

$$H_0\colon D(X) = D(Y);\ H_1\colon D(X) > D(Y).$$

Yechish. Gipotezani tekshirish uchun $F = \frac{S_x^2}{S_y^2}$ kriteriyni tanlaymiz. U holda $K_{kuzat} = \frac{0,76}{0,38} = 2.$

Fisher-Snedekor taqsimotining kritik nuqtalar jadvalidan $\alpha = 0,05$, $k_1 = n_1 - 1 = 10$, $k_2 = n_2 - 1 = 13$ bo'yicha $k_{kr} = F_{kr}(0,05; 10,13)$=2,67 kritik nuqtani topamiz. 2<2,67, ya'ni $K_{kuzat} < k_{kr}$ bo'lgani uchun gipotezani rad qilishga asos yo'q.

Mustaqil ishlash uchun misollar

Normal taqsimlangan X va Y bosh to'plamlardan hajmlari mos ravishda n_1 va n_2 bo'lgan ikkita erkli tanlanma ajratib olingan va ularning «tuzatilgan» dispersiyalari: S_x^2 va S_y^2 topilgan. α muhimlilik darajasida H_0: $D(X) = D(Y)$ asosiy gipotezani tekshiring, bunda H_1: $D(X) > D(Y)$.

a) $n_1 = 10, n_2 = 15, S_x^2 = 3,6, S_y^2 = 2,4, \alpha = 0,05;$
b) $n_1 = 13, n_2 = 18, S_x^2 = 3,6, S_y^2 = 4,8, \alpha = 0,01;$
c) $n_1 = 16, n_2 = 12, S_x^2 = 0,72, S_y^2 = 2,4, \alpha = 0,05;$
d) $n_1 = 14, n_2 = 10, S_x^2 = 1,6, S_y^2 = 2,4, \alpha = 0,01.$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Statistik gipoteza ta'rifini bering. Misollar keltiring.
2. Statistik gipotezalarning turlarini ayting.
3. Birinchi va ikkinchi tur xatoliklar nimalardan iborat?
4. Statistik kriteriy nima?
5. Muhimlik darajasi va kriteriy quvvatini tushuntiring.
6. Kritik soha va kritik nuqta tushunchalarini ayting.

Tavsiya etiladigan mustaqil ta'lim va referat mavzulari

1.Chap tomonli va ikki tomonli kritik sohalarni topish.
2.Kriteriy quvvatini topishga doir misollar.
3.Dispersiyalari ma'lum bo'lgan ikki bosh to'plamning o'rta qiymatlarini taqqoslash.
4.Dispersiyalari noma'lum bo'lgan ikki bosh to'plamning o'rta qiymatlarini taqqoslash.

FOYDALANILGANADABIYOTLAR

1. Гмурман В.Е. Терия верятностей и математическая статистика. Учебное посбие. М.: Высшая шкла, 2008.
2. Кремер Н.Ш. Терия вероятностей и математическая статистика. -Ì.: ЮНИТИ, 2001.
3. Mamurov E.N., Adirov T.X. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. T.: «Iqtisod -Moliya», 2007.
4. Гмурман В.Е. Рукводство к решению задач по «Теории вероятностей и математический статистике». Учебное пособие. 11-издание. М.: 2008.
5. Abdushukurov A.A. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika.Toshkent 2010 y.
6. XashimovA,MamurovE, AdirovT.X. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. T.: «Iqtisod -Moliya»,2012 й.

D.M.Maxmudova, B.R.Xanimqulov

B.Z.Usminov, Z.Bozorov

EHTIMOLLAR NAZARIYASI

O'QUV QO'LLANMA

Muharrir:	X. Taxirov
Tehnik muharrir:	S. Melikuziva
Musahhih:	M. Yunusova
Sahifalovchi:	A.Ziyamuhamedov

Nashriyot litsenziya № 2044, 25.08.2020 й

Bichimi 60x84 $^{1}/_{16}$. "Times new roman" garniturasi, kegli 14.

Offset bosma usulida bosildi. Shartli bosma tabog'i. Adadi 100 dona. Buyurtma № 973562

Yangi chirchiq book MCHJda chop etildi.