МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА
им. М. УЛУГБЕКА

Э.Р.Гайнуллина, К.Т. Мирталжиева

НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Ташкент
Университет
2008

Это учебное пособие предназначено для студентов-бакалавров обучающихся по направлению А 440300 – Астрономия. Настоящий курс составлен в соответствии с учебным планом и распределен на 42 параграфа. Эти параграфы объединены в следующие главы: основные понятия теории притяжения (параграфы 1 - 12), задача двух тел (параграфы 1 – 11), ограниченная круговая задача трех тел (параграфы 1 – 5), задача n тел (параграфы 1 – 14). А также здесь имеется список используемой литературы.

Составители: к.ф.-м.н., и.о. доцент Гайнуллина Э.Р.
к.ф.-м.н., и.о. доцент Миртаджиева К.Т.,

Рецензенты:
- директор Астрономического института АН РУз, к. ф.-м.н. С.П.Ильясов
- доцент кафедры Астрономии НУУз, к. ф.-м.н. А.Т.Мирзаев

Оглавление

Введение

Предмет и задачи небесной механики

Небесная механика – раздел астрономии, в котором на основе законов и принципов механики изучается движение в пространстве различных естественных и искусственных небесных тел. Небесная механика как строго обоснованная наука возникла после открытия И.Ньютоном закона всемирного тяготения. На этот закон, а также на три закона механики опирается в своих исследованиях небесная механика. Небесная механика использует аналитические, качественные и численные математические методы исследования и решения уравнений движения небесных тел. Аналитические методы позволяют находить решение задач в виде формул. Качественные методы дают возможность узнать свойства решений, не находя сами решения. Численные методы дают решения в виде таблиц, содержащих координаты небесных тел.

К числу объектов исследования небесной механики относятся планеты, спутники, кометы, малые планеты, звезды, космические станции.

Небесная механика исследует движения больших планет солнечной системы относительно Солнца, движения спутников планет, малых планет и комет, движения звёзд в звёздных системах, искусственных небесных тел. Математически эти проблемы сводятся к решению 3-х основных задач небесной механики.

А) *Задача двух тел* – в ней требуется определить движение в пространстве 2-х небесных тел, взаимно притягивающих друг друга в соответствии с законом всемирного тяготения. Эта задача решена полностью. Орбиты небесных тел относительно их центра масс могут быть только эллиптической, параболической и гиперболической формы.

Наиболее подходящая система, к которой применима задача 2-х тел, это система «Солнце - планета». Ещё в начале XVII века И.Кеплер открыл 3 закона движения планет, которые являются частным случаем (эллиптическим) решения задачи 2-х тел.

Б) Так как движение планет происходит под влиянием не только Солнца, но и других планет, то для более точного описания движения планет используется *задача 3-х и большего числа тел*. Эта задача не может быть решена в точном виде. Но созданы многочисленные приближённые методы её решения. В задачах 2-х и 3-х тел небесные тела считаются материальными точками.

В) При изучении движения естественных и искусственных спутников, обращающихся на относительно небольших расстояниях от планет, нельзя считать планету материальной точкой, а следует учитывать её форму, вращение вокруг оси, сопротивление атмосферы. Это - *задача о движении материальной точки в поле притяжения центрального тела, имеющего форму, отличную от шара.*

Эти задачи небесной механики называются прямыми задачами. К обратным задачам относят определение сил, действующих на космические объекты и их массу по известному их движению.

Глава I. Основные понятия теории притяжения

§ 1. Закон всемирного тяготения притяжения Ньютона

Формулировку закона всемирного тяготения впервые дал в 1687г. И.Ньютон в своём труде "Математические начала натуральной философии":

Всякие две материальные частицы взаимно притягиваются с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними

$$F = f\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

где F – сила притяжения, m_1 и m_2 – массы обеих частиц, r – расстояние между ними, f – постоянная всемирного тяготения.

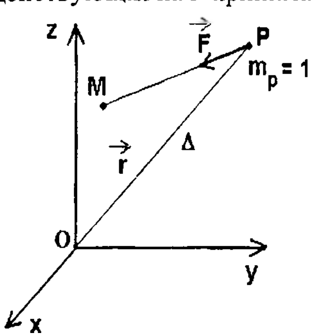
В системе СГС f=6,670·10^{-8}, а в основных астрономических единицах (среднее расстояние Земли от Солнца, масса Солнца, средние солнечные сутки)

$$f - 0{,}000295912.$$

В астрономии вместо f часто употребляется другая величина, называемая постоянной Гаусса f=k^2; которая в основных астрономических единицах равна

$$k = 0{,}01720209895.$$

Пусть точка M – центр притяжения, а точка P – притягиваемая, с массой, равной единице. В этом случае сила всемирного притяжения, действующая на P принимает вид



$$F = f\frac{m}{\Delta^2}$$

Рассмотрим некоторую систему прямоугольных декартовых координат с началом в произвольной точку пространства O и с неизменным направлением осей. Обозначим координаты притягиваемой точки P через x,y,z, а координаты точки M через x$'$,y$'$,z$'$. Тогда

$$\Delta = \sqrt{(x = x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

Направляющие косинусы α, β, γ силы притяжения определяются формулами

$$\alpha = \frac{x'-x}{\Delta}, \quad \beta = \frac{y'-y}{\Delta}, \quad \gamma = \frac{z'-z}{\Delta}.$$

Обозначая составляющие силы притяжения по осям координат (или проекции этой силы на координатные оси) соответственно через F_x, F_y, F_z будем иметь:

$$\begin{cases} F_x = \alpha F = fm\dfrac{x'-x}{\Delta^3} \\ F_y = \beta F = fm\dfrac{y'-y}{\Delta^3} \\ F_z = \gamma F = fm\dfrac{z'-z}{\Delta^3} \end{cases} \tag{1.1}$$

причем $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$; $\alpha = \dfrac{F_x}{F}$, $\beta = \dfrac{F_y}{F}$, $\gamma = \dfrac{F_z}{F}$.

Зная величины в (1.1), можно найти проекцию силы притяжения на любое заданное напраление. Действительно, пусть дано направление L, то есть в системе Oxyz заданы его направляющие косинусы

$$\alpha' = cos(L, x); \quad \beta' = cos(L, y); \quad \gamma' = cos(L, z).$$

Обозначая через F_L проекцию силы F на направление L, имеем

$$F_L = \alpha' \cdot F_x + \beta' \cdot F_y + \gamma' \cdot F_z.$$

В частности, проекцию силы притяжения F на направление радиуса-вектора r этой точки вычислим следующим образом:

$$F_r = \frac{1}{r}\left(xF_x + yF_y + zF_z\right),$$

$$\alpha' = \frac{x}{r}, \quad \beta' = \frac{y}{r}, \quad \gamma' = \frac{z}{r}; \quad \left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right).$$

§ 2. Силовая функция

Величины в (1.1), которые мы можем рассмотреть как функции координат точки P, являются частными производными от некоторой фукнции координат этой точки Введем функцию:

$$U(x, y, z) = U(P) = f\frac{m}{\Delta}. \qquad (1.2)$$

Дифференцируя (1.2) частным образом, например, по x, получим

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{fm}{\Delta^2}\cdot\frac{\partial \Delta}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial x} = -\frac{x'-x}{\Delta}.$$

Поэтому

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (1.3)$$

Таким образом, функция U однозначно определяет не только составляющие силы притяжения, действующие на точки P единичной массы, но и всё силовое поле, возбуждаемое притягивающей точечной массой m. Поэтому U називается *силовой функцией* массы m или *функцией сил*, или *потенциалом* точечной массы m.

Свойства силовой функции:

1) Функция $U(P)$ конечна, однозначна и непрерывна во всём пространстве, за исключением точки M, где U обращается в бесконечность.
2) Когда точка P неограниченно удаляется от точки M, функция U, оставаясь положительной, безгранично убывает, притом так, что
$$\lim_{\Delta\to\infty}(\Delta\cdot U) = \lim_{r\to\infty}(r\cdot U) = fm$$
3) Все частные производные любого порядка от функции U по координатам точки P (и по любому другому направлению) также функции конечные, однозначные и непрерывные во всем пространстве, кроме точки M.
4) Когда точка P стремится к бесконечности, то любая частная производная функции U имеет своим пределом нуль, причём в частности:
$$\lim_{r\to\infty}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \lim_{r\to\infty}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \lim_{r\to\infty}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial z}\right) = -fm.$$

5) Во всём пространстве, кроме точки M, функция U удовлетворяет уравнению

$$\nabla U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \qquad (1.4)$$

которое *называют уравнением Лапласа*, ∇ – оператор Лапласа.

Уравнение $U(x,y,z)=const$ определяет поверхность, называемой *поверхностью уровня* (или *изопотенциальной поверхностью*). В случае точечной массы m это есть сфера с центром в точки M.

Если же рассматривать точки М и Р как равноправные, то введем функцию

$$U = f\frac{m_1 m_2}{\Delta}, \qquad (1.5)$$

где

$$\Delta = \overline{MP} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

$$F_{x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1} = fm_1 m_2 \frac{x_2 - x_1}{\Delta^3} \text{ и т.д.}$$

$$F_{x_2} = \frac{\partial U}{\partial x_2} = fm_1 m_2 \frac{x_1 - x_2}{\Delta^3} \text{ и.тд.}$$

Функция U, определяемая формулой (1.5) называется *силовой функцией взаимного притяжения двух точечных масс.* Она всегда положительна, крнечна, непрерывна и однозначна везде, кроме точек М и Р. Если эти точки стремятся к одной и той же точке пространства, то функция U неограниченно возрастает. Если же $\Delta \to \infty$, то $U \to 0$, причем

$$\lim_{\Delta\to\infty}(\Delta \cdot U) = \lim_{\Delta\to\infty}\left|\Delta^2 \frac{\partial U}{\partial x_1}\right| = \cdots = fm_1 m_2$$

§ 3. Силовая функция системы материальных точек

Рассмотрим теперь систему. состоящую из конечного числа n материальных точек M_1, M_2, . . ., M_n , которые будем считать притягивающими центрами. Пусть m_i, x_i', y_i', z_i' - масса и координаты в той же системе Oxyz точки M_i $(i = \overline{1,n})$. Пусть P(x,y,z) есть материальная точка единичной массы m=1, не совпадающая ни с одной из точек M_i и

$$\Delta_i = \sqrt{(x - x_i')^2 + (y - y_i')^2 + (z - z_i')^2}.$$

Точка M_i притягивает точку Р с силой, проекции которой на координатные оси F_{xi}, F_{yi}, F_{zi}

$$fm_i \frac{x_i' - x}{\Delta_i^3}; \quad fm_i \frac{y_i' - y}{\Delta_i^3}; \quad fm_i \frac{z_i' - z}{\Delta_i^3}.$$

Проекции равнодействующей всех сил притяжения, действующих на точку Р, определятся формулами

$$\begin{cases} F_x = \sum\limits_{i=1}^{n} F_{x_i} = f\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{m_i(x_i'-x)}{\Delta_i^3} \\ F_y = \sum\limits_{i=1}^{n} F_{y_i} = f\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{m_i(y_i'-y)}{\Delta_i^3} \\ F_z = \sum\limits_{i=1}^{n} F_{z_i} = f\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{m_i(z_i'-z)}{\Delta_i^3} \end{cases} \qquad (1.6)$$

іроекция этой равнодействующей на любое произвольно заданное аправление L будет равна

$$F_L = \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha' F_{x_i} + \beta' F_{y_i} + \gamma' F_{z_i}\right)$$

иловая функция системы n точечных масс:

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i\ , \quad U_i = \frac{fm_i}{\Delta_i}\ , \qquad (1.6')$$

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}; \quad F_L = \frac{\partial U}{\partial L}.$$

Силовая функция системы материальных точек M_i (1.6') бладает свойствами, аналогичными свойствам силовой функции дного притягивающего центра. Нужно только иметь в виду, что зойства 1) и 3) остаются в силе всюду, кроме точек M_i . Свойство 2) охраняется, но теперь

$$\lim_{r\to\infty}(rU) = f\sum_{i=1}^{n} m_i\ .$$

Точно также в свойстве 4) имеем

$$\lim_{r\to\infty}(r^2U) = \cdots = -f\sum_{i=1}^{n} m_i\ .$$

войство 5) также сохраняется, так как $\nabla U = 0$.

Пусть теперь у ная имеется система свободных материальных очек $M_i(x_i,y_i,z_i)$ (i=1,2,...), взаимно притягивающихся по закону ьютона. Составляющие равнодействующей сил притяжения, ействующих на M_i, определятся формулами:

$$\left.\begin{aligned}F_{x_i} &= f\sum_{j=1}^{n}{}' m_i m_j \frac{x_j - x_i}{\Delta_{ij}^3}\\ F_{y_i} &= f\sum_{j=1}^{n}{}' m_i m_j \frac{y_j - y_i}{\Delta_{ij}^3}\\ F_{z_i} &= f\sum_{j=1}^{n}{}' m_i m_j \frac{z_j - z_i}{\Delta_{ij}^3}\end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

где $\Delta_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$ - взаимное расстояние между точками M_i и M_j; Σ' означает, что при суммировании должен быть пропущен член, для которого j=i, то есть $\sum\limits_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n}$.

Силовая функция системы свободных материальных точек:

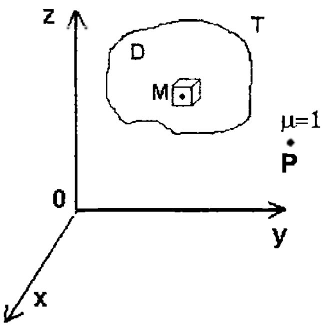
$$U = \frac{1}{2} f \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} \tag{1.7'}$$

Она отличается от силовой функции системы притягивающих центров. Функция (1.6') зависит только от трёх координат точки P, а координаты притягивающих центров рассматривается как константы. Функция (1.7') содержит $3n$ координат, которые все являются независимыми переменными.

§ 4. Притяжение материальной точки материальным телом

Рассмотрим некоторое материальное тело *T*, занимающее определенную область пространства *D*. Введём некоторую декартовую систему координат.

Пусть точка *M(x', y', z')* – какая-либо точка, принадлежащая области *D* или её границе и составляющая, таким образом, часть тела. Пусть точка *P(x, y, z)* – любая точка пространства, в которой помещена материальная точка единичной массы.



Обозначим через $\delta(x',y',z')$ пространственную плотность материи тела в точке М. Когда тело однородно, то $\delta = const.$

Разобъем область D на элементарные объсмы. Обозначим элементарный объем с точкой M через dV. Если этот объем заполнен однородной материей с плотностью $\delta(x',y',z')$, то его массу $dm = \delta dV$ назовём элементом массы тела T.

Если элементарные области вляются параллелепипедами, то $dV = dx'dy'dz'$.

Элемент массы можно рассматривать как материальную точку, омещенную в точке M и обладающую массой dm. Эта материальная очка притягивает материальную точку P с единичной массы с силой F, проекции которой на координатные оси будут соответственно:

$$F_x' = f\,\frac{x'-x}{\Delta^3}\,dm; \quad F_y' = f\,\frac{y'-y}{\Delta^3}\,dm; \quad F_z' = \frac{z'-z}{\Delta^3}\,dm.$$

Проекции равнодействующей всех сил, действующих на точку P, удут суммами большого числа слагаемых подобного же вида. Переходя к пределу, предполагая, что число элементарных бластей неограниченно возрастает, а dV любой области стремится к улю, перейдем от конечных сумм к определённым интегралам, зятым по всей области D.

Обозначим проекции силы притяжения тела T на точку P через $F_x(x,y,z)$, $F_y(x,y,z)$, $F_z(x,y,z)$, будем иметь:

$$F_x(x,y,z) = f\iiint\limits_{(D)} \frac{\delta(x',y',z')\cdot(x'-x)}{\Delta^3}dV \text{, и т.д.}$$

ли $\quad F_x = f\int\limits_{(D)} \frac{x'-x}{\Delta^3}\,dm.$

Для вычисления $\int\limits_{(D)}$ надо знать форму тела T и его положение в истеме $Oxyz$.

Рассмотрим теперь функцию от координат точки P

$$U(x,y,z) = f\iiint\limits_{(D)}\frac{\delta(x',y',z')dV}{\Delta} = f\int\limits_{(D)}\frac{dm}{\Delta} \qquad (1.8)$$

Пусть:

- область D конечна;
- функция $\delta(M)$ непрерывна всюду в области D;
- точка P не принадлежит D.

Тогда подинтегральная функция в (1.8) непрерывна всюду в области интегрирования и интеграл является собственным. Тогда этот интеграл можно дифференцировать по параметру (соответствующей координате точки P, которая входит в расстояние $\Delta=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$).

Применяя правило дифференцирования интеграла, имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = f\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(D)}\frac{dm}{\Delta} = f\int\limits_{(D)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\Delta}\right)dm = f\int\limits_{(D)}\frac{x'-x}{\Delta^3} = F_x$$

так что:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

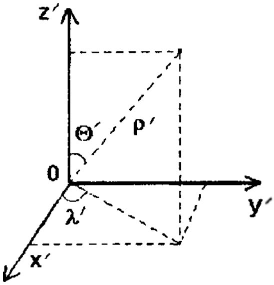
Эти формулы справедливы и для случая, когда точка P не принадлежит области D. А функция U является силовой функцией тела T.

Выражение силовой функции, так же как и составляющих силы притяжения, зависит от формы тела, о его внутреннего строения, а также от положения тела относительно избранной системы координат. В декартовой системе координат:

$$\delta=\delta(x',y',z'), \quad dV = dx'dy'dz', \quad \Delta=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2};$$

$$U = f\iiint\limits_{(D)}\frac{\delta(x',y',z')\cdot dx'dy'dz'}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}.$$

В сферической системе координат $(\rho', \theta', \lambda')$:



$$\begin{cases} x' = \rho' \cdot \sin\theta' \cdot \cos\lambda' \\ y' = \rho' \cdot \sin\theta' \cdot \sin\lambda'; \\ z' = \rho' \cdot \cos\theta' \end{cases}$$

$$\delta(\rho', \theta', \lambda')$$

$$\Delta(\rho', \theta', \lambda', x, y, z)$$

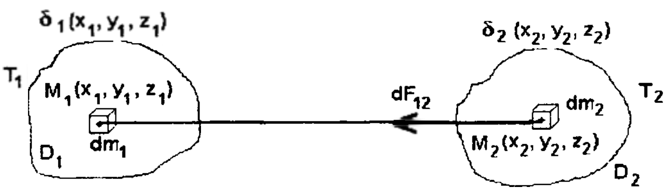
$$dV = \rho'^2 \cdot \sin\theta' \, d\rho' \, d\theta' \, d\lambda'$$

$$U = f \iiint\limits_{(D)} \frac{\delta(\rho', \theta', \lambda') \cdot \rho'^2 \cdot \sin\theta' \, d\rho' \, d\theta' \, d\lambda'}{\Delta}.$$

§ 5. Силовая функция взаимного притяжения двух материальных тел

Элементарная масса dm_1 притягивает dm_2 с силой $d\vec{F}_{12}$. Проекция $d\vec{F}_{12}$ на ось x:

$$dF_{12} = f \frac{dm_1 \cdot dm_2 \cdot (x_1 - x_2)}{\Delta^3}.$$



Суммируя силы, с которыми любой элемент dm_{i1} тела T_1 притягивает dm_2, получим силу, с которой тело T_1 притягивает dm_2:

$$dF_{x1} = \int\limits_{(D_1)} f \frac{(x_1 - x_2) dm_2 dm_1}{\Delta^3}$$

Интегрируя функцию dF_{x1} по области D_2, найдем силу, с которой тело T_1 притягивает тело T_2:

$$F_{X1} = \int\limits_{(D_2)} dF_{x1} = \int\limits_{(D_2)}\int\limits_{(D_1)} f\frac{(x_1 - x_2)dm_1dm_2}{\Delta^3}$$

$$F_{Y1} = \int\limits_{(D_2)} dF_{y1} = \int\limits_{(D_2)}\int\limits_{(D_1)} f\frac{(y_1 - y_2)dm_1dm_2}{\Delta^3}$$

$$F_{Z1} = \int\limits_{(D_2)} dF_{z1} = \int\limits_{(D_2)}\int\limits_{(D_1)} f\frac{(z_1 - z_2)dm_1dm_2}{\Delta^3}$$

Введем функцию $U = f\int\limits_{(D_2)}\int\limits_{(D_1)}\frac{dm_1dm_2}{\Delta}$ – силовую функцию взаимного притяжения тел T_1 и T_2. Для нее выполняются соотношения:

$$F_{x1} = \frac{\partial U}{\partial x_1}, \qquad F_{y1} = \frac{\partial U}{\partial y_1}, \qquad F_{z1} = \frac{\partial U}{\partial z_1},$$

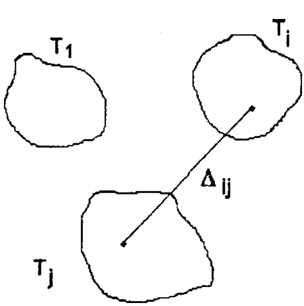
$$F_{x2} = \frac{\partial U}{\partial x_2}, \qquad F_{y2} = \frac{\partial U}{\partial y_2}, \qquad F_{z2} = \frac{\partial U}{\partial z_2},$$

В координатной форме:

$$U = f\int\limits_{(D_2)}\int\limits_{(D_1)}\frac{\delta_1(x_1, y_1, z_1)\cdot\delta(x_2, y_2, z_2)dV_1dV_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}$$

§ 6. Силовая функция *n* тел

Силовая функция системы материальных тел равена сумма силовых функций притяжения каждой пары тел. Пусть $\vec{F}_{ij}$ – сила, с которой тело T_i притягивает тело T_j; $\vec{F}_i$ – сила, с которой все тела притягивают тело T_i.



$$\vec{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\vec{F}_{ij}.$$

Силовая функция притяжения тел T_i и T_j:

$$U_{ij} = f\int\limits_{(D_j)}\int\limits_{(D_i)}\frac{\delta_i\delta_j dV_i dV_j}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}}$$

Суммируя все такие функции, получаем:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} U_{i\,j}$$

Коэффициент ½ появляется потому, что $U_{1\,2} = U_{2\,1}$.

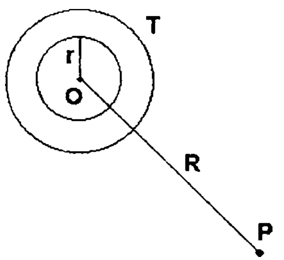
В случае, когда $\Delta \to \infty$, силовая функция 2-х материальных тел равна в пределе силовой функции 2-х материальных точек: $\lim\limits_{\Delta\to\infty} \Delta\cdot U = f\cdot m_1\cdot m_2$.

Силовую функцию можно разложить в ряд по сферическим функциям.

§ 7. Силовая функция однородного шара

Пусть у нас имеется однородный шар T радиуса a с центром в точке O.

(а) Пусть точка P находится вне шара, т.е. $R > a$.



Тогда $$U = \frac{4\pi f\delta}{R}\int_0^a r^2 dr = f\frac{m}{R};$$

где m – масса всего шара, т.е. $m = \frac{4}{3}\pi a^3\delta$.

(б) Пусть точка P находится внутри шара T, т.е. $0 \le R < a$.

$$U = 4\pi f\delta\left\{\frac{1}{R}\int_0^R r^2 dr + \int_R^a r dr\right\} = \frac{fm}{2a^3}\left(3a^2 - R^2\right)$$

- Однородный шар притягивает внешнюю точку P так, как будто бы вся масса шара сконцентрирована в его центре.
- Точка P внутри шара притягивается к его центру с силой, прямо пропорциональной расстоянию до центра (закон Гука).
- Оператор Лапласа для U, когда точка P находится внутри шара, равен:

$$\Delta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi f\delta.$$

Это уравнение называется уравнением Пуассона.

§ 8. Некоторые сферические функции. Полином Лежандра. Присоединённые функции Лежандра

Полином Лежандра $P_n(x)$ является решением уравнения Лежандра

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right]+n(n+1)y=0, \qquad n=0,\,1,\,\ldots,\,\infty$$

I. Функция $P_n(x)$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\alpha^n=\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}=P_0(x)+P_1(x)\cdot\alpha+P_2(x)\cdot\alpha^2+\ldots$$

II. Для $P_n(x)$ выполняется формула Родрига:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^n\left[\left(x^2-1\right)^n\right]}{dx^n},$$

$$n=0:P_0(x)=1 \qquad n=2:P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$n=1:P_1(x)=x \qquad n=3:P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

III. Выполняется рекурентное соотношение:

$$n\,P_n(x)-(2n-1)\,x\,P_{n-1}(x)+(n-1)\,P_{n-2}(x)=0$$

Свойства полинома $P_n(x)$:

(1)$P_n(-x)=(-1)^n\,P_n(x)$;

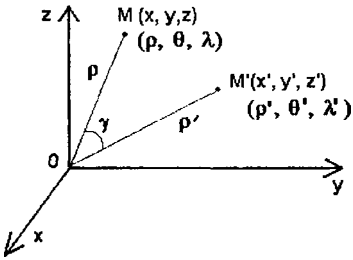
(2)На интервале (- 1, 1) $P_n(x)$ имеет ровно n простых корней;

(3)если $|x|<1$, то $|P_n(x)|<1$;

(4) $P_n(x)\underset{n\to\infty}{\to}0; \quad |x|<1.$

Присоединенные функции Лежандра:

$$P_n^{(k)}(x)=(1-x^2)^{k/2}\frac{d^k}{dx^k}\left(P_n(x)\right)$$



<u>Теорема сложения для полинома $P_n(x)$</u>

Так как

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\lambda \\ y = \rho\sin\theta\sin\lambda \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

и из сферической тригонометрии:

$$\cos\gamma = \cos\theta\cdot\cos\theta' + \sin\theta\cdot\sin\theta'\cdot\cos(\lambda - \lambda'),$$

то имеет место формула:

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{k=0}^{n}\frac{2}{\delta_k}\cdot\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\cdot P_n^{(k)}(\cos\theta)\cdot P_n^{(k)}(\cos\theta')\cdot\cos k(\lambda-\lambda')$$

где $\delta_k = \begin{cases} 2, & k=0 \\ 1, & k\neq 0 \end{cases}$.

Сферическая функция

Сферическая функция n – го порядка является линейной комбинацией выражений

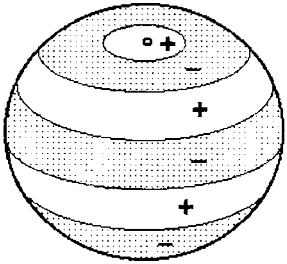
$$\begin{matrix} \sin^k\theta\dfrac{d^kP_n(\mu)}{d\mu^k}\cos k\lambda \\ \sin^k\theta\dfrac{d^kP_n(\mu)}{d\mu^k}\sin k\lambda \end{matrix}:$$

$$J_n(\theta,\lambda) = \sum_{k=0}^{n}P_n^{(k)}(\cos\theta)\cdot\left[A_{nk}\cdot\cos k\lambda + B_{nk}\cdot\sin k\lambda\right] =$$

$$= \sum_{0}^{n}\left[A_{nk}\cos k\lambda + B_{nk}\sin k\lambda\right]\sin^k\theta\frac{d^kP_n(\cos\theta)}{(d\cos\theta)^k}$$

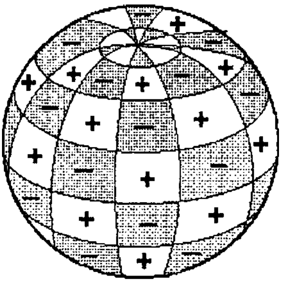
Здесь $A_{nk}, B_{nk} = const.$

Как меняется знак сферической гармоники при перемещении точки (θ,λ) по поверхности сферы?



1) **k = 0**: Имеем только одну гармонику, равную $P_n(\cos\theta)$. $P_n(\cos\theta)$ обращается в 0, меняя знак на n параллелях $\theta = \theta_h$ $(h=\overline{1,n})$.

Это так называемая *зональная* гармоника

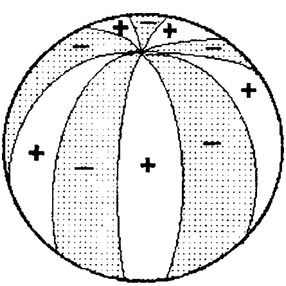


n=9 k=6

2) Если **0 < k < n**, то соответствующая гармоника будет обращаться в 0 на 2k меридианах, определяемых уравнением: $\cos(k\lambda)=0$ или $\sin(k\lambda)=0$, и на $n-k$ параллелях, соответствующих корням уравнения $\dfrac{d^k P_n(\mu)}{d\mu^k}=0$

или $\dfrac{d^{n+k}(\mu^2-1)^n}{d\mu^{n+k}}=0$, лежащим между - 1 и +1.

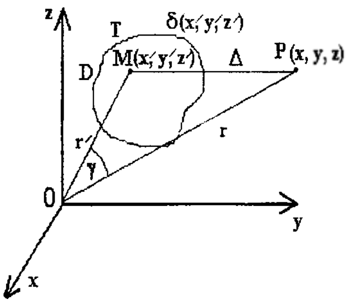
Это - *тессеральные* гармоники.



n = k = 5

3). **k = n**; обращение гармоники в 0 и перемена ее знака происходит на $2n$ меридианах – *секториальные* гармоники.

§ 9. Разложение силовой функции объемного тела в ряд по сферическим функциям



Напомним, что силовая функция материального тела

$$U = f\int\limits_{(D)} \frac{dm}{\Delta}.$$

Наряду с декартовой системой координат будем рассматривать и сферические координаты (ρ, θ, λ).

$$\Delta = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2r\cdot r'\cdot\cos\gamma};$$

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OP}\right|} = \frac{x\cdot x' + y\cdot y' + z\cdot z'}{r\cdot r'}$$

В сферической системе координат:

$$\cos\gamma = \cos\theta\cdot\cos\theta' + \sin\theta\cdot\sin\theta'\cdot\cos(\lambda - \lambda').$$

Рассмотрим случай $\underline{r > r'}$.

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\gamma}} =$$

$$= \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\gamma)\cdot\left(\frac{r'}{r}\right)^n$$

$$\left(\alpha = \frac{r'}{r};\quad x = \cos\gamma\right)$$

Подставляя это в выражение для U, будем иметь:

$$U = f\int\limits_{(D)} \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\gamma)\cdot\left(\frac{r'}{r}\right)^n dm = f\cdot\frac{1}{r^{n+1}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{(D)} (r')^n\cdot P_n(\cos\gamma)dm$$

Подставляем выражение для $P_n(\cos\gamma)$ из теоремы сложения и интегрируем по θ', λ', r'. Обозначим сферическую функцию по переменным θ и λ как $Y_n(\theta,\lambda) = \int\limits_D (r')^n\cdot P_n(\cos\gamma)dm$. Подсчитаем коэффициенты A_{nk} и B_{nk} в этом случае. Так как

$Cos(k(\lambda-\lambda'))=cos(k\lambda)\cdot cos(k\lambda')+sin(k\lambda)\ sin(k\lambda')$, то

$$Y_n(\theta,\lambda)=\int_D (r')^n\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{\delta_k}\cdot\frac{(n-k)!}{(n+k)!}P_n^{(k)}(\cos\theta)P_n^{(k)}(\cos\theta')\cdot(\cos k\lambda\cos k\lambda'+\sin k\lambda\cdot\sin k\lambda')\right]dm=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}P_n^{(k)}(\cos\theta)\cdot(A_{nk}\cdot\cos k\lambda+B_{nk}\sin k\lambda)$$

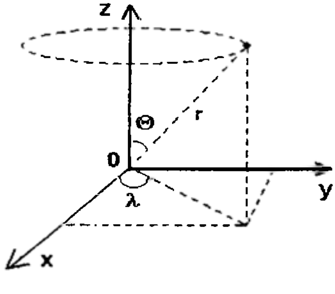
Соответственно

$$\begin{cases} A_{nk}=\dfrac{2}{\delta_k}\cdot\dfrac{(n-k)!}{(n+k)!}\displaystyle\int_D (r')^n P_n^{(k)}(\cos\theta')\cdot\cos k\lambda'\,dm \\ B_{nk}=\dfrac{2}{\delta_k}\cdot\dfrac{(n-k)!}{(n+k)!}\displaystyle\int_D (r')^n P_n^{(k)}(\cos\theta')\cdot\sin k\lambda'\,dm \end{cases}$$

Подставим эту функцию $Y_n(\theta,\lambda)$ в U:

$$U=f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}P_n^{(k)}\cdot(\cos\theta)\cdot(A_{nk}\cos k\lambda+B_{nk}\sin k\lambda)$$

§ 10. Случай симметрии гравитационного поля



1) В случае *сферической* симметрии: $\delta=\delta(r)$, можем записать, что $U=f\dfrac{m}{r}$.

2) *Осевая* симметрия.

В общем случае $\delta=\delta(r,\theta,\lambda)$. Если OZ – ось симметрии, тогда $\delta=\delta(r,\theta)$.

$$A_{nk}=\frac{2}{\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\int_D (r')^n P_n^{(k)}(\cos\theta')\cdot\cos k\lambda'\,dm,$$

Учитывая, что $dm=\delta\cdot dV$, а

$$\int\limits_D dV = \int\limits_0^{r(\theta)}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} dr'\,d\theta'\,d\lambda'\cdot(r')^2\sin\theta' = \int\limits_0^{r(\theta)}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}(r')^2\sin\theta'\,dr'\,d\theta'\,d\lambda',$$

получаем

$$A_{nk} = \frac{2}{\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\int\limits_0^{r(\theta)}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}(r')^2 P_n^{(k)}(\cos\theta')\cdot\cos k\lambda'\cdot(r')^n\sin\theta'\cdot$$

$$\cdot\,\delta(r',\theta')\,dr'\,d\theta'\,d\lambda' = \frac{2}{\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\int\limits_0^{2\pi}\cos k\lambda'\,d\lambda'\int\limits_0^{r(\theta)}\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\cdot\delta(r',\theta')\,dr'\,d\theta'.$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\cos k\lambda'\,d\lambda' = 0 \quad (k\neq 0)\\ \displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\cos k\lambda'\,d\lambda' = 2\pi \quad (k=0)\end{array}\right. \Rightarrow \quad \begin{array}{l}A_{nk} = 0 \quad (k\neq 0)\\ B_{nk} = 0 \quad (k\neq 0)\end{array}$$

Окончательно получаем

$$U = f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\cdot P_n^{(0)}(\cos\theta)\cdot A_{n0}, \text{ причём } P_n^{(0)} \equiv P_n.$$

§ 11. Запись гравитационного потенциала Земли

Поместим начало системы координат в центр тяжести Земли, и запишем потенциал в виде:

$$U = f\frac{m}{r}\left\{1 - \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}\tau_n\left(\frac{r_0}{r}\right)^n\cdot P_n(\cos\theta)}_{(a)} + \right.$$

$$\left. + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n\cdot P_n^{(k)}(\cos\theta)\left[C_{nk}\cos k\lambda + S_{nk}\sin k\lambda\right]}_{(б)}\right\}$$

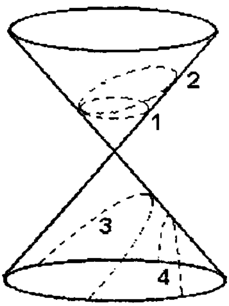
где r_0 – экваториальный радиус Земли, а m – масса Земли; а также:

$$\tau_n = -\frac{A_{n0}}{mr_0^n}; \quad C_{nk} = \frac{A_{nk}}{mr_0^n}; \quad S_{nk} = \frac{B_{nk}}{mr_0^n}.$$

Первая сумма в выражении для потенциала, обозначенная буквой (а) представляет собой зональные гармоники, а вторая сумма (б) – тессеральные гармоники.

Учитывая, что $f{\cdot}m = 3{,}986013{\cdot}10^{5}$ $км^3/сек^2$, $r_0 = 6378{,}160$ km, имеем $\tau_2 = 1{,}086{\cdot}10^{-3}$. Остальные $\tau_n,\ A_{nk},\ B_{nk}$ ~10^{-6}.

§ 12. Геометрические свойства конических сечений.



При пересечении конуса плоскостями с разными углами наклона можем получить следующие *конические сечения*:

1 - окружность

2 – эллипс

3 – парабола

4 – гипербола (показана на рисунке лишь одна ветвь).

Уравнение конического сечения (в полярных координатах с началом в фокусе):

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}$$

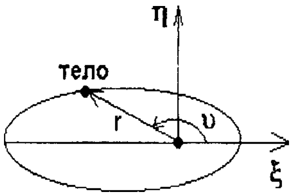
e < 1 – эллипс

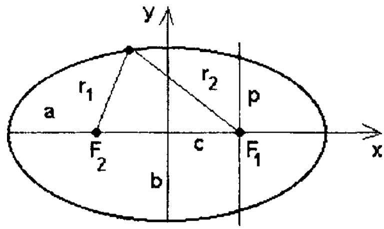
e = 1 – парабола

e > 1 – гипербола

Эллипс

Эллипс - геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух фиксированных точек (фокусов F_1 и F_2) есть величина постоянная : $r_1+r_2=2a$.





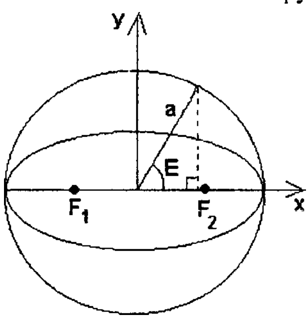
Уравнение эллипса

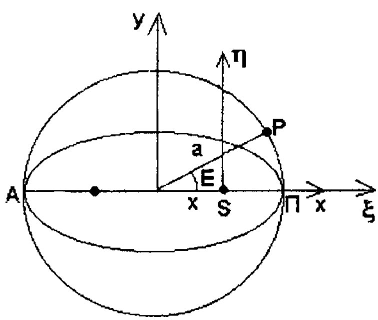
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1.9)$$

На правом рисунке:
с – фокальное расстояние , с = a e; а – *большая полуось*; е – *эксцентриситет* , $e < 1$; р – фокальный параметр, $p=a(1-e^2)$; v– *истинная аномалия*.
Нами используется орбитальная неподвижная система координат (ξ, η):

$$\begin{cases} \xi = r\cos v \\ \eta = r\sin v \end{cases} \qquad (1.9')$$

Опишем около эллипса окружность с R=a.





Угол Е носит название *эксцентрической аномалии.*

$$\begin{cases} x = a\cos E \\ y = b\sin E \end{cases}, \quad \begin{cases} \xi = x - c = a\cos E - ae = a(\cos E - e) \\ \eta = y = b\sin E = a\sqrt{1-e^2}\cdot\sin E \end{cases}.$$

Тогда с учетом (1.9) $r = a(1 - e\cos E)$, и таким образом имеем

$$r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\cdot\sin E \qquad (1.10)$$

$$r\cos v = a(\cos E - e) \qquad (1.11)$$

$$r = a(1 - e\cos E) \qquad (1.12)$$

Комбинирование (1.12) с (1.11) даст:

$$\begin{cases} r(1-\cos v) = a(1+e)(1-\cos E) \\ r(1+\cos v) = a(1-e)(1+\cos E) \end{cases}.$$

Простые преобразования приводят к выражениям

$$\begin{cases} \sqrt{r}\sin\dfrac{v}{2} = \sqrt{a(1+e)}\cdot\sin\dfrac{E}{2} \\ \sqrt{r}\cos\dfrac{v}{2} = \sqrt{a(1-e)}\cdot\cos\dfrac{E}{2} \end{cases}.$$

Поделив в последнем выражении первое уравнение на второе, получим

$$tg\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cdot tg\frac{E}{2}.$$

Исключая же Е из выражений (1.10) – (1.12), получаем:

$$r = \frac{p}{1+e\cos v}.$$

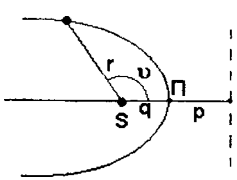
Уравнение Кеплера записывается следующим образом:

$$E - e\sin E = \frac{2\pi}{P}(t-T) = \mu(t-T),$$

где Р - *период обращения* тела, Т – момент прихождения через перигелий П, μ – *среднее суточное движение*, $\mu(t-T)$ - угол, описываеммый телом с момента нахождения в перигелии и называемый *средней аномалией* М=μ (t-T).

Движение по параболе

В случае параболы $a = \infty$, $e = 1$.



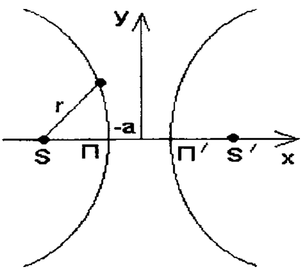
$$r = \frac{p}{1+\cos v} = \frac{p}{2\cos^2\dfrac{v}{2}} = \frac{q}{\cos^2\dfrac{v}{2}}$$

q – перигелийное расстояние, $q = \frac{p}{2}$.

$$\frac{\sqrt{2}}{k\sqrt{1+m}}\left(tg\frac{v}{2}+\frac{1}{3}tg^3\frac{v}{2}\right)=\frac{t-T}{q^{3/2}},$$

где m – масса тела, k – постоянная гравитации.

Движение по гиперболе



У гиперболы $e>1$ и из формулы $p=a(1-e^2)$ следует, что $a<0$, то есть большая ось лежит от фокуса по другую сторону кривой и заключена между вершинами обеих ветвей гиперболы.

Тело при движении описывает только одну из ветвей - ту, которая обращена вогнутостью к Солнцу.

Из уравнения $r=\frac{p}{1+e\cos v}$ видно, что $v=\arccos\left(-\frac{1}{e}\right)$ для $r\to\infty$, b-мнимая, и из (9') следует, что $sinE$ – мнимая величина.

Вводим аргумент H и используем гиперболические функции: $H=iE$; $shH=i\,sinE$; $chH=cosE$. Тогда вместо уравнения Кеплера имеем:

$$e\,sh\,H-H=\frac{k\sqrt{1+m}}{|a|^{3/2}}(t-T)=n(t-T)=N$$

По аналогии с эллипсом, назовем n - средним суточным движением, N- средней аномалией для гиперболы. Уравнения движения:

$$\begin{cases}\xi=r\cos v=x-ae=a\cos E-ae=|a|(e-ch\,H)\\ \eta=r\sin v=y=b\sin E=a\sqrt{1-e^2}\cdot\sin E=|a|\sqrt{e^2-1}\,sh\,H\end{cases}$$

$$q=|a|(e-1).$$

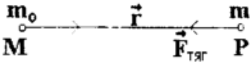
Глава II. Задача двух тел

§1. Уравнение барицентрического движения

Задача одного неподвижного центра

точка M - неподвижна, точка P- свободна

Уравнение движения точки P:

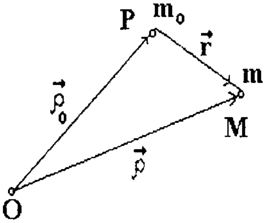


$$\vec{ma} \equiv m\frac{d^2\vec{r}}{dt} = \vec{F} = -f\frac{m_0 m}{r^3}\cdot\vec{r}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt} = -f\frac{m_0}{r^3}\cdot\vec{r} \qquad (2.1)$$

Задача двух свободных точек

$$\vec{r} = \vec{\rho} - \vec{\rho}_0$$



$$\begin{cases} m_0\dfrac{d^2\vec{\rho}_0}{dt^2} = f\dfrac{mm_0}{r^3}\cdot\vec{r} \\ m\dfrac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} = -f\dfrac{mm_0}{r^3}\cdot\vec{r} \end{cases} \qquad (2.2)$$

- уравнения абсолютного движения задачи 2-х тел.

(2.2) – система дифференциальных уравнений 12-го порядка (т.е.6 скалярных уравнений 2-го порядка).

Приведем уравнения (2.2) к виду (2.1).

Сложим уравнения в (2.2):

$$m_0\frac{d^2\vec{\rho}_0}{dt^2} + m\frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} = 0$$

интегрируя, получаем:

$$m_0\frac{d\vec{\rho}_0}{dt} + m\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\alpha} \qquad (2.3)$$

$\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ -векторные const.

интегрируем (3) :

$$m_0\vec{\rho}_0 + m\vec{\rho} = \vec{\alpha}t + \vec{\beta} \qquad (2.4)$$

(2.3) и (2.4) – «первые интегралы» системы (2.2).

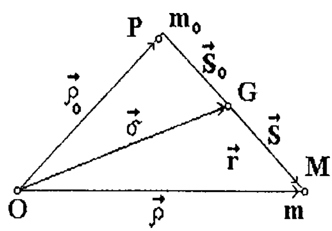
В уравнениях (2.2): первое разделим на m_0, второе на m и вычтем первое уравнение из второго:

$$\frac{d^2(\vec{\rho} - \vec{\rho}_0)}{dt^2} = -f\frac{(m_0 + m)}{r^3}\cdot\vec{r}$$, или получаем:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -f(m_0 + m)\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (2.5)$$

-уравнение (2.5) относительного движения задачи двух тел.

Решая (2.5), можем найти $\vec{r}(t)$, затем, используя (2.3) и (2.4) найдем $\vec{\rho}$ и $\vec{\rho}_0$.



G – центр масс.

$$(m_0 + m)\cdot\vec{\sigma} = m_0\vec{\rho}_0 + m\vec{\rho} \tag{2.6}$$

отсюда можно найти $\vec{\sigma}$.

$$\begin{cases} \vec{\rho}_0 = \vec{\sigma} + \vec{S}_0 \\ \vec{\rho} = \vec{\sigma} + \vec{S}_0 \end{cases} \tag{2.7}$$

$\vec{S} = \vec{GM}, \vec{r} - \vec{PM}, \vec{S}_0 = \vec{GP}$

(2.7) →(2.6):

$$(m_0 + m)\vec{\sigma} = m_0(\vec{\sigma} + \vec{S}_0) + m(\vec{\sigma} + \vec{S})$$

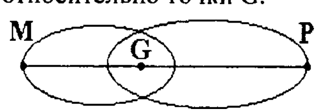
$$m_0\vec{\sigma} + m\vec{\sigma} = m_0\vec{\sigma} + m_0\vec{S}_0 + m\vec{\sigma} + m\vec{S} \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} m_0\vec{S}_0 + m\vec{S} = 0 \\ \text{т.к.}\ \vec{r} = \vec{S} - \vec{S}_0 \Rightarrow \quad \vec{S} = \vec{r} + \vec{S}_0 \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{cases} (m_0 + m)\vec{S}_0 = -m\vec{r} \\ (m_0 + m)\vec{S} = m_0\vec{r} \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} \vec{S}_0 = -\dfrac{m}{m_0 + m}\cdot\vec{r} \\ \vec{S} = \dfrac{m_0}{m_0 + m}\cdot\vec{r} \end{cases} \tag{2.9}$$

Движение точки P относительно G подобно движению точки M относительно точки G.



Подставляя (2.9) в уравнение относительного движения, получим уравнения

барицентрического движения:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 \vec{S}_0}{dt^2} = -f\dfrac{m^3}{(m_0+m)^2}\cdot\dfrac{\vec{S}_0}{S_0^3} \\ \dfrac{d^2 \vec{S}}{dt^2} = -f\dfrac{m_0^{\ 3}}{(m_0+m)^2}\cdot\dfrac{\vec{S}}{S^3} \end{cases} \qquad (2.10)$$

Все рассмотренные уравнения движения можно объединить в уравнение:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\aleph^2 \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (2.11)$$

где $\aleph$ соответственно: $\aleph^2 = f m_0$, $\aleph^2 = f(m_0+m)$, или $\aleph^2 = f\dfrac{m^3}{(m_0+m)^2}$.

Удобно (2.11) еще раз преобразовать: ($\tau = \aleph t$):

$$\frac{d^2 \vec{r}}{d\tau^2} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (2.12)$$

В проекциях на декаратовую систему координат ($\vec{r}\,(x,y,z)$):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r^3}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{r^3}; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{z}{r^3}; \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

§2. Первые интегралы уравнений относительного движения

1) Интеграл площадей.

Умножим (2.11) векторно на $\vec{r}$:

$$\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{\aleph^2(\vec{r}\times\vec{r})}{r^3} = 0 \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left[\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right] = \vec{c} = const \qquad (2.13)$$

Введем $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$. Тогда $\left[\vec{r}\times\vec{v}\right] = \vec{c}$

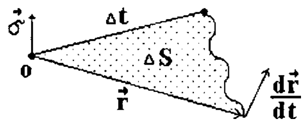
Введем систему координат:

$\vec{r}(x,y,z),\ \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \vec{v}(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$

$$\vec{r}\times\dot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \tag{2.14}$$

– интеграл площадей в скалярном виде.

$$\begin{cases} y\dot{z} - z\dot{y} = C_1 \\ z\dot{x} - x\dot{z} = C_2 \\ x\dot{y} - y\dot{x} = C_3 \end{cases}$$



$\vec{r}\times\dfrac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{\sigma}$ $\qquad \vec{\sigma}$ - секторная скорость.

$\vec{v}\perp\vec{\sigma}\perp\vec{r} \qquad |\vec{\sigma}| = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$

Секторная скорость остается постоянной.

Умножим (2.13) скалярно на $\vec{r}$:

$0 = \left(\vec{r}\times\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right)\cdot\vec{r} = \vec{c}\cdot\vec{r} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{c}\cdot\vec{r} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{r}\perp\vec{c}$

$c_1x+c_2y+c_3z=0$ - уравнение плоскости, - $\vec{c}$ и проходящей в постоянной плоскости, проходщей через начало координат (или притягивающий центр).

2) первый интеграл энергии.

Умножим (2.11) на $\dot{\vec{r}}$:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\cdot\dot{\vec{r}} = -\frac{\aleph^2\cdot(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})}{r^3}, \text{ или}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{\aleph^2}{r^3}\left(\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right).$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right) = -\frac{\aleph^2}{r^3}\cdot r\cdot\dot{r} = -\frac{\aleph^2\cdot\dot{r}}{r^2} = \aleph^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = \aleph^2\cdot\frac{1}{r} + C\text{, или}$$

$$v^2 - \frac{2\aleph^2}{r} = h,$$

h=2C-постоянная энергии.

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{1}{\aleph^2}\cdot v^2, \qquad a = \frac{\aleph^2}{h} = \frac{\aleph^2}{2C}$$

Введем декартовую систему координат (ξ,η,ζ) и полярную систему координат (r,u). $(\xi,\ \eta\ )$ – в полярности движения).

Для движущейся точки: $\xi = 0,\quad \dot{\xi} = 0,\quad \begin{cases}\xi = r\cos u\\ \eta = r\sin u\end{cases}$

$$\vec{r}\times\dot{\vec{r}} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \xi & \eta & 0\\ \dot{\xi} & \dot{\eta} & 0\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\ \xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi}\end{pmatrix} = \vec{c},\qquad c = \xi\cdot\dot{\eta} - \eta\cdot\dot{\xi}$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2$$

$$\dot{\xi} = \dot{r}\cos u + r(-\sin u)\cdot\dot{u}$$

$$\dot{\eta} = \dot{r}\sin u + r\cdot\cos u\cdot\dot{u}$$

$$\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi} = r^2\dot{u}\left(\sin^2 u + \cos^2 u\right) \quad\Rightarrow\quad r^2\dot{u} = \vec{r}\times\dot{\vec{r}}$$

§3. Интеграл Лапласа

(2.11) умножаем векторно на $\vec{c}$:

$$\frac{d\vec{v}}{dt}\times\vec{c} = -\frac{\aleph^2}{r^3}\left(\vec{r}\times\vec{c}\right)$$

$$\vec{r}\times\vec{c}=\vec{r}\times\left(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\right)=\vec{r}\cdot\left(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}\right)-\dot{\vec{r}}\cdot\left(\vec{r}\right)^2=r\cdot\dot{r}\cdot\vec{r}-r^2\cdot\dot{\vec{r}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\times\vec{c}\right)=-\frac{\aleph^2}{r^3}\,r\left(\dot{r}\,\vec{r}-r\,\dot{\vec{r}}\right)=-\frac{\aleph^2}{r^2}\left(\dot{r}\,\vec{r}-r\cdot\dot{\vec{r}}\right)=$$

$$=\frac{\aleph^2}{r^2}\left(r\cdot\dot{\vec{r}}-\vec{r}\cdot\dot{r}\right)-\aleph^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right).$$

Интегрируем и получаем:

$$\left[\vec{v}\times\vec{c}\right]=\aleph^2\cdot\frac{\vec{r}}{r}+\vec{\nu} \qquad (2.15)$$

Введем вектор $\vec{e}$: $\aleph^2\,\vec{e}+\vec{\nu}$

$$\frac{1}{\aleph^2}\left(\vec{v}\times\vec{c}\right)-\frac{\vec{r}}{r}=\vec{e} \qquad (2.16)$$

(2.15) или (2.16) – интеграл Лапласа; $\vec{e}$ – вектор Лапласа.

$\vec{e}\cdot\vec{c}=0$, $\quad \vec{e}\ \subset$ в платены орбиты

Умножим скалярно интеграл Лапласа на $\vec{r}$.

$$\vec{r}\cdot\left(\frac{1}{\aleph^2}\left(\vec{v}\times\vec{c}\right)-\frac{\vec{r}}{r}\right)=\vec{r}\cdot\vec{e} \qquad \frac{1}{\aleph^2}\left(\left(\vec{v}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{r}\right)-\frac{\left(\vec{r}\cdot\vec{r}\right)}{r}=\left(\vec{e}\cdot\vec{r}\right)$$

Потому что

$$\left|\begin{array}{l}\left(\vec{v}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{r}=\left(\vec{r}\times\vec{v}\right)\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{c}=c^2,\\ \dfrac{\left(\vec{r}\cdot\vec{r}\right)}{r}=r,\\ \left(\vec{e}\cdot\vec{r}\right)=\left|\vec{e}\right|\cdot r\cdot\cos\left(\widehat{\vec{e},\vec{r}}\right)\end{array}\right.$$

, из этого

$$\frac{c^2}{\aleph^2}-r=\left|\vec{e}\right|r\cos\left(\widehat{\vec{e},\vec{r}}\right) \quad\Rightarrow\quad r=\frac{c^2/\aleph^2}{1+\left|\vec{e}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{e}\cdot\vec{r}}\right)}$$

$r = \frac{\rho}{1 + e\cos\upsilon}$. Сравним это с $p = \frac{c^2}{\aleph^2}$, $\left|\vec{e}\right| = e$; $\cos\left(\widehat{\vec{e}, \vec{r}}\right) = \cos\upsilon$.

По координатам точки в плоскости орбиты можно вычислить координаты точки в произвольной системе координат.

§4. Вычисление прямоугольных координат

В плоскости орбиты имеем систему координат $OX_1Y_1Z_1$. Начало в притягивающем центре.

OK – линия узлов (по ней плоскость орбиты пересекает плоскость XY.

$\vec{OY_1}$ – в плоскости орбиты, а $\vec{OX_1} = \vec{Ok}$. Ω – долгота восходящего узла; i – наклон орбиты, ω – аргумент перицентра; v – истинная аномалия.

В плоскости X_1Y_1 можно ввести полярные координаты (r, u):

$$\begin{cases} x_1 = r \cdot \cos u \\ y_1 = r \cdot \sin u\,; \qquad v = u - \omega \\ z_1 = 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

$0 < i < \frac{\pi}{2}$ – прямое движение (от x_1 в сторону y_1);

$\frac{\pi}{2} < i < \pi$ – обратное движение.

Чтобы перейти от системы координат XYZ к $X_1Y_1Z_1$ необходимо совершить два поворота:

1) поворот около оси OZ на угол Ω: $(x, y, z) \to (x_1, y_0, z)$.
2) поворот около оси OX_1 на угол i: $(x_1, y_0, z) \to (x_1, y_1, z_1)$.

$$\begin{cases} x = x_1\cos\Omega - y_0\sin\Omega \\ y = x_1\sin\Omega + y_0\cos\Omega \\ z = z \end{cases}$$

Эту систему можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_0 \\ z \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

где

$$M_1 = \begin{Vmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Затем: $\begin{cases} x_1 = x_1 \\ y_0 = \cos i \cdot y_1 - \sin i \cdot z_1 \\ z = \sin i \cdot y_1 + \cos i \cdot z_1 \end{cases}$;

Или
$$\left.\begin{aligned} &\begin{pmatrix} x_1 \\ y_0 \\ z \end{pmatrix} = M_2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \\ &M_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{Vmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad (2.19)$$

Подставляя (2.19) в (2.18), получим:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M_1 \cdot M_2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}; \qquad (2.20)$$

где $M = M_1 \cdot M_2 = \begin{Vmatrix} \cos\Omega & -\cos i \cdot \sin\Omega & \sin i \cdot \sin\Omega \\ \sin\Omega & \cos i \cdot \cos\Omega & -\sin i \cdot \cos\Omega \\ 0 & \sin i & \cos i \end{Vmatrix}$

Пусть $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ – единичные векторы системы XYZ,
$(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ - единичные векторы системы $X_1Y_1Z_1$.

Между ними будет соотношение $\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix}$.

Отсюда следует, что:

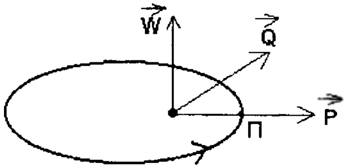
$\begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$. M – ортогональная матрица и $M^{-1} = M^T$.

Векторная постоянная интеграла площадей $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{k}_1$.
$$\vec{k}_1 = \begin{pmatrix} \sin i \cdot \sin\Omega \\ -\sin i \cdot \cos\Omega \\ \cos i \end{pmatrix}; \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot \sin i \cdot \sin\Omega \\ -c \cdot \sin i \cdot \cos\Omega \\ c \cdot \cos i \end{pmatrix} \quad \rightarrow \qquad (2.21)$$

Отсюда можно получить i и Ω по известной постоянной $\vec{c}$.
В (2.20) подставляем (2.17). Тогда:
$$\begin{cases} x = r(\cos u \cdot \cos\Omega - \sin u \cdot \sin\Omega \cdot \cos i) \\ y = r(\cos u \cdot \sin\Omega + \sin u \cdot \cos\Omega \cdot \cos i) \\ z = r \cdot \sin u \cdot \sin i \end{cases} \qquad (2.22)$$

Кроме Кеплеровых элементов орбиты (a, e, i, Ω, ω, T) можно ввести векторные элементы орбиты – 3 единичных вектора $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{W}$. (правая система)

$$\begin{cases} \vec{P} \ \textit{направлен в перицентр,} \\ \vec{Q} \perp \vec{P} \ \textit{и направлен в сторону движения (в плоскости движения)} \\ \vec{W} \ – \ \textit{перпендикулярно к плоскости движения} \end{cases}$$



Направив $\vec{r}$ в перицентр и считая его длину равну единицу, то $u = \omega$. Подставляя это в (2.22), получим (P_x, P_y, P_z). Для получения (Q_x, Q_y, Q_z): $u = \omega + \frac{\pi}{2}$.

А $\vec{W} \| \vec{c}$, т.е. $\vec{W} = \vec{k}_1 \rightarrow (W_x, W_y, W_z)$.

§5. Вычисление эфемерид

Эфемерида – таблица геоцентрических положений небесного тела для равноотстоящих моментов времени и позволяющая достаточно удобно находить его положение в любой момент времени. В таблицах помещают α и δ.

Существуют:

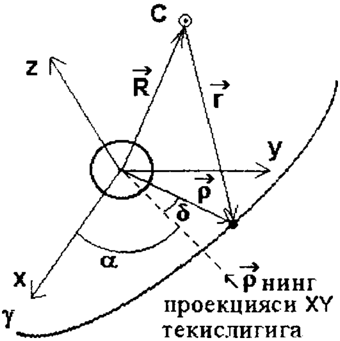
1) поисковые эфемериды (точность ~1’) для предварительного определения положения небесного тела для проведения наблюдений;
2) эфемериды для сравнения группы близких между собой наблюдений с теорией (точность: $\Delta\alpha \sim 0^s,01$; $\Delta\delta \sim 0'',01$).

Движение небесного тела описывается решением задачи 2ˣ тел. Его орбита – коническое сечение. Исходными данными для определения эфемерид являются элементы орбиты, и соответствующие моменты времени t_i.

Вычисление эфемерид в неподвижной экваториальной системе координат

$$\vec{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\delta\cdot\cos\alpha \\ \rho\cos\delta\cdot\sin\alpha \\ \rho\sin\delta \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

$$\vec{\rho} = \vec{R}_{\odot} + \vec{r} \tag{2.24}$$



$R_{☉}$ – из таблиц.

$\vec{r}$ вычисляется по элементам орбиты.

Введем 3 системы координат:

1) геоцентрическую экваториальную (x', y', z')
2) эклиптическую (x, y, z)
3) орбитальную (ξ, η, $\zeta = 0$)

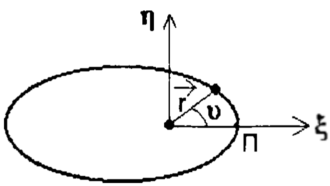
$\vec{R}_{☉} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Тогда (2.24) можно переписать в скалярной форме:

$$\left.\begin{aligned} \rho_x &= x' + X \\ \rho_y &= y' + Y \\ \rho_z &= z' + Z \end{aligned}\right\} \qquad (2.25)$$

Определение эфемерид осуществляется в 3 этапа:

1) вычисление орбитальных координат небесного тела (ξ, η или r, v);
2) вычисление прямоугольных геоцентрических координат вектора $\vec{r}$;
3) вычисление $\vec{\rho}$, α и δ.

§6. Вычисление орбитальных координат



а) случай эллиптического движения

$$M = n(t - t_0) + M_0 = n(t - T)$$

$$E - e\sin E = M \quad \Rightarrow \quad E = M + e\sin E$$

$$n = \frac{\aleph}{a^{3/2}}$$

затем $\begin{cases} \xi = a(\cos E - e) \\ \eta = a\sqrt{1 - e^2}\sin E \end{cases}$ или $\begin{cases} r = a(1 - e\cos E) \\ tg\dfrac{v}{2} = \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}} \cdot tg\dfrac{E}{2} \end{cases}$

б) для гиперболического движения: - аналогичные вычисления.

в) параболическое движение: $e = 1$.

Из уравнения $\sigma+\frac{1}{3}\sigma^3=\frac{\aleph}{\sqrt{2}}q^{-3/2}(t-T)$, где $q=\frac{\rho}{2}$, находим σ и

$$\begin{cases}\xi=q(1-\sigma^2)\\ \eta=2q\sigma\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}r=q(1+\sigma^2)\\ tg\frac{v}{2}=\sigma\end{cases}$$

Вычисление прямоугольных геоцентрических координат

Ориентация орбиты определяется параметрами i, Ω, ω.

Будем считать, что углы отнесены к эклиптической системе координат: т.е. основная плоскость – плоскость эклиптики, основное направление – на точку Υ; назовем эти параметры эклиптическими элементами i', Ω', ω'.

$$\begin{cases}x=r\cdot(\cos u\cdot\cos\Omega-\sin u\cdot\sin\Omega\cdot\cos i)\\ y=r\cdot(\cos u\cdot\sin\Omega+\sin u\cdot\cos\Omega\cdot\cos i)\,,\\ z=r\cdot\sin u\cdot\sin i\end{cases} \tag{2.26}$$

– гелиоцентрические координаты, где $u=v+\omega$.

$$\begin{cases}x'=x\\ y'=y\cos\varepsilon-z\sin\varepsilon\,,\\ z'=y\sin\varepsilon+z\cos\varepsilon\end{cases}$$ ε – угол наклона экватора к эклиптике.

В другой форме: $\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\bar{\bar{x}}(\varepsilon)\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, где $\bar{\bar{x}}(\varepsilon)=\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&\cos\varepsilon&-\sin\varepsilon\\ 0&\sin\varepsilon&\cos\varepsilon\end{pmatrix}$.

По (3) вычисляем ρ_x, ρ_y, ρ_z. x, y, z – из астрономических ежегодников. Тогда

$$\begin{cases}tg\alpha=\dfrac{\rho_y}{\rho_x}\\ tg\delta=\dfrac{\rho_z}{\sqrt{\rho_x^2+\rho_y^2}}\end{cases}$$

§7. Разложение координат эллиптического движения в ряды

Разложение координат по степеням времени

- используется при решении задач об определении орбит по наблюдениям.

Уравнение движения в координатной форме:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{\aleph^2 \cdot x}{r^3} \\ \ddot{y} = -\dfrac{\aleph^2 \cdot y}{r^3} \\ \ddot{z} = -\dfrac{\aleph^2 \cdot z}{r^3} \end{cases} \tag{2.27}$$

Введем новую переменную:

$$\tau = \aleph\,(t - t_0) \tag{2.28}$$

Моменту t_0 соответствует $\tau = 0$. $\aleph^2 = (m_{\odot} + m)\cdot f$

$$\frac{dx}{d\tau} = x'. \qquad \text{Тогда} \qquad \begin{cases} x'' = -x \cdot u \\ y'' = -y \cdot u\,; \\ z'' = -z \cdot u \end{cases} \qquad u = \frac{1}{r^3} \tag{2.29}$$

Решение ищем в виде ряда:

$$x = x_0 + x_0^I \cdot \tau + \frac{1}{2!} x_0^{II} \cdot \tau^2 + \frac{1}{3!} x_0^{III} \cdot \tau^3 + \frac{1}{4!} x_0^{IV} \cdot \tau^4 + \cdots\cdots \tag{2.30}$$

$x^{II} = -\,ux$

$x^{III} = -\,u'x - ux'$

$x^{IV} = -\,u''x - u'x' - u'x' - ux'' = -\,u''x - 2u'x' - u^2x = -\,(u'' - u^2)x - 2u'x'$,

т.е. все производные можно выразить через x и x'.

Разложение (2.30) получено для какого – то момента $t_0(\tau = 0)$. Производные тоже запишем для t_0 и подставим в (2.30), соберем члены, содержащие x_0 и x'_0:

$$x = x_0 + x_0^I \cdot \tau - \frac{1}{2!} u_0 x_0 \tau^2 + \frac{1}{3!}\left(-u_0^I x_0 - u_0 x_0^I\right)\tau^3 + \frac{1}{4!}\left(-\left(u_0^{II} - u_0^2\right)x_0 - 2u_0^I x_0^I\right)\tau^4 + \cdots\cdots$$

т.е., запишем:

$$\begin{cases} x = x_0 \cdot F(\tau) + x_0^I \cdot G(\tau) \\ y = y_0 \cdot F(\tau) + y_0^I \cdot G(\tau) \\ z = z_0 \cdot F(\tau) + z_0^I \cdot G(\tau) \end{cases} \tag{2.31}$$

где

$$\begin{cases} F(\tau) = 1 - \dfrac{1}{2} u_0 \tau^2 - \dfrac{1}{6} u_0^I \tau^3 - \dfrac{1}{24}\left(u_0^{II} - u_0^2\right)\tau^4 + \cdots\cdots \\ G(\tau) = \tau - \dfrac{1}{6} u_0 \tau^3 - \dfrac{1}{12} u_0^I \tau^4 + \cdots\cdots \end{cases} \tag{2.32}$$

Система (2.31) – разложение координат в ряд по степеням времени. В векторной форме:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \cdot F(\tau) + \vec{r}_0^{\,I} \cdot G(\tau) \tag{2.33}$$

т.е. $\vec{r}$ лежит в плоскости, образованной векторами $\vec{r}_0$ и $\vec{r}_0^{\,I}$.

$F(\tau)$ и $G(\tau)$ можно представить в конечном виде, выразив их через E. На практике в (6) обычно применяют лишь первые 3 члена. Область сходимости ряда (4) зависит от значения e:

для тел ☉ системы:

e	0	0,1	0,2	0,3	0,4
R	∞	502	329	231	163

R – радиус сходимости в сутках.

Разложение в ряды Фурье

Компоненты радиус - вектора можно разложить в тригонометрические ряды по v, E, M.

В общем виде разложение в ряд Фурье:

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cdot \cos kz + b_k \cdot \sin kz\right)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(z) \cdot \cos kz dz$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(z) \cdot \sin kz dz$$

Этот ряд сходится на $0 < z < 2\pi$ не абсолютно. А если $f(z)$ – периодичность с периодом 2π, то ряд сходится для любого z и представляет собой функцию на всей вещественной оси. Свойства:

1) функция четная: $b_k = 0$, $f(-z) = f(z)$
2) функция нечетная: $a_k = 0$, $f(-z) = -f(z)$.

а) Выразим ξ, η, r через E:

$$\begin{cases} \xi = a(\cos E - e) \\ \eta = a\sqrt{1-e^2} \cdot \sin E \\ r = a(1 - e\cos E) \end{cases}$$

– рядов здесь не получится.

б) Выразим ξ, η, r через v:

$$\begin{cases} \xi = r \cdot \cos v \\ \eta = r \cdot \sin v \\ r = \dfrac{p}{1 + e\cos v} \end{cases}$$

– можно разложить в ряд по cos, используя бином Ньютона.

$$r = p(1 + e \cdot cosv)^{-1} = p\left(1 + (-1) \cdot ecosv + \frac{(-1)(-2)}{2}(ecosv)^2 + \cdots\cdots\right)$$

$$cos^2 v = \frac{1}{2}(1 + cos2v)$$

$$cos^3 v = \cdots\cdots \qquad \Rightarrow$$

и т.д.

$$r = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \cos kv \quad – \text{ ряд Фурье.}$$

Подставляя это в ξ и η, получим также ряды Фурье.

в) Выразим ξ, η, r через M.

Из уравнения Кеплера: $E - M = e \sin E$.

$E - M$ – нечетная функция от M с периодом 2π.

Тогда $E - M = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin kM$. Этот ряд сходится для $e < 1$.

$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}(E - M) \cdot \sin kMdM$. Перейдем от интегрирования по dM к функции по dE.

Проинтегрируем b_k по частям. $(E - M) \cdot \sin kM$ – функция четная, и

$$\frac{\pi}{2} b_k = \int\limits_0^{\pi}(E - M)\sin kM \cdot dM = -\frac{1}{k}(E - M)\cos kM \Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi}\frac{1}{k}(dE - dM)\cos kM$$

$E - M = 0$ когда $M = 0$; π, тогда первый член равен нулю.

$$\frac{\pi}{2} b_k = \frac{1}{k}\int\limits_0^{\pi}\cos kMdE + \frac{1}{k}\int\limits_0^{\pi}\cos kMdM = \frac{1}{k}\int\limits_0^{\pi}\cos kMdE$$

Подставляем сюда M из уравнения Кеплера:

$$\frac{\pi}{2} b_k = \frac{1}{k}\int\limits_0^{\pi}\cos(kE - ke\sin E)dE$$

Введем функцию Бесселя:

$$I_k(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos(k\varphi - x\sin\varphi)d\varphi \; – \text{ функция Бесселя } k^{\text{го}} \text{ порядка.}$$

Функция Бесселя в виде ряда:

$$I_k(x) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!(k+l)!}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{k+2l}$$

Тогда $b_k = \frac{2}{k} \cdot I_k(ke)$. Подставляем в $E - M = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin kM$. Тогда

$$E = M + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2I_k(ke)}{k} \cdot \sin kM \tag{2.34}$$

– ряд Фурье по M.

Разложение по степеням е

В (8) можно собрать члены с одинаковыми степенями e.

Т.к. $I_k(ke) = \sum_{l=0}^{\infty} C_{kl} \left(\frac{ke}{2}\right)^{k+2l}$, то

$$E = M + \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos M, \sin M) e^k \tag{2.35}$$

Если (8) сходится для любого M, $0 < e < 1$, то (9) сходится для любогоM, если $0 < e < e^*$; Для $e^* < e < 1$ ряд сходится не для всех M.
$e^* = 0{,}667$ – предел Лапласа.

§8. Определение элементов орбит по положению и скорости в начальный момент

Орбита определяется по 6 элементами: a, e, i, ω, Ω, $M_0(vT)$. В качестве начальных условий имеем $\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0$.

1) определение δ, полуоси a. Используется функция энергии.

$$\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0); \quad \dot{\vec{r}}_0(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);$$

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}; \qquad v_0^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2;$$

Вычисляем $r \cdot \dot{r} = \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}_0 = x_0 \cdot \dot{x}_0 + y_0 \cdot \dot{y}_0 + z_0 \cdot \dot{z}_0$.

a находим из $\frac{1}{a} = \frac{2}{r_0} - \aleph^{-2} v_0^2$ (2.36).

Тогда можно и $n = \frac{\aleph}{a^{3/2}}$.

1) Определение e, E_0.

$$r = a(1 - e\cos E) \quad \Rightarrow \quad e\cos E_0 = 1 - \frac{r_0}{a} \tag{2.37}$$

$$\dot{r} = ae\sin E \cdot \dot{E}$$

$$E - e\sin E = n(t - T); \qquad (1 - e\cos E)\dot{E} = n \quad \Rightarrow$$

$$\dot{E} = \frac{n}{1 - e\cos E} = \frac{a \cdot n}{r}$$

$$\dot{r} = ae\sin E \cdot \frac{a \cdot n}{r}; \qquad e\sin E = \frac{r \cdot \dot{r}}{a^2 \cdot n}$$

$$e\sin E_0 = \frac{r_0 \cdot \dot{r}_0}{a^2 \cdot n} \tag{2.38}$$

Из (2.37) и (2.38) находим e и E_0. Из уравнения Кеплера находим $M_0 = E_0 - e\sin E_0$.

2) <u>Определение</u> i, Ω.

Известно, что $\vec{c} = \vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}}_0$.

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c\cdot\sin i\cdot\sin\Omega \\ -c\cdot\sin i\cdot\cos\Omega \\ c\cdot\cos i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0\dot{z}_0 - z_0\dot{y}_0 \\ z_0\dot{x}_0 - x_0\dot{z}_0 \\ x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда можем найти i и Ω.

$$\begin{cases} -tg\Omega = \dfrac{c_x}{c_y} \\ tgi = \dfrac{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}}{c_z} \end{cases}.$$

3) <u>Определение</u> ω.

$$\omega = u_0 - v_0$$

$$\begin{cases} \xi_0 = r_0\cos v_0 = a(\cos E_0 - e) \\ \eta_0 = r_0\sin v_0 = a\sqrt{1-e^2}\sin E_0 \end{cases} \to v_0.$$

$$r_0 = a(1 - e\cos E_0)$$

Для u используем:

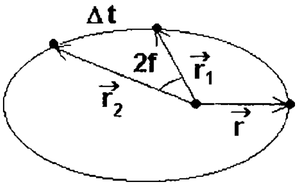
$$\begin{cases} x = r(\cos u\cdot\cos\Omega - \sin u\cdot\sin\Omega\cdot\cos i) \\ y = r(\cos u\cdot\sin\Omega - \sin u\cdot\cos\Omega\cdot\cos i) \\ z = r\cdot\sin u\cdot\sin i \end{cases}$$

$1.\cdot\cos\Omega + 2.\cdot\sin\Omega$:

$$x\cos\Omega + y\sin\Omega = r\cos u(\cos^2\Omega + \sin^2\Omega) = r\cos u \quad \to$$

$$\begin{cases} r\cos u = x\cos\Omega + y\sin\Omega \\ r\sin u = \dfrac{z}{\sin i} \end{cases}$$

§9. Определение элементов орбит по двум положениям



Точка (тело) движется по законам задачи $2^{-х}$ тел. Нам известно ее положение в 2 момента времени $\ddot{\vec{r}} = \frac{-\aleph^2 \cdot \vec{r}}{r^3}$.

$$\vec{r}_1(t_1) = \{x_1, y_1, z_1\}$$
$$\vec{r}_2(t_2) = \{x_2, y_2, z_2\}.$$

1) определение фокального параметра;
2) определение остальных элементов орбиты по p, r_1, r_2.

I. Определение p.

Гаусс свел задачу определения p к решению $2^х$ трансцендентных уравнений, решаюшихся методом последовательных приближений. Вместо p Гаусс определяет η, связанный с p простым соотношением.

$$\eta = \frac{(r_1, r_2)}{[r_1, r_2]}.$$

(r_1, r_2) – площадь сектора, а $[r_1, r_2]$ – площадь треугольника, образованные радиус – векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$.

$\eta = \frac{\sigma \cdot (t_2 - t_1)}{\frac{1}{2} \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \sin^2 f}$. σ – секторная скорость:

$$\sigma = \frac{c}{2} = \frac{\aleph\sqrt{p}}{2}. \qquad \Rightarrow \eta = \frac{\aleph\sqrt{p}(t_2 - t_1)}{r_1 \cdot r_2 \cdot \sin^2 f}$$

(Справочное руководство по небесной механике и астродинамике):

$$p = B^2 \cdot \left(\frac{\eta}{\tau}\right)^2, \qquad \tau = k \cdot (t_2 - t_1), \qquad k = 1, 2.$$

$$B^2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2.$$

II. Имеем p, $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$. $v_2 - v_1 < 90°$ – единственное решение

Для определения угла $2f$: $\begin{cases} (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) = r_1 \cdot r_2 \cdot \cos 2f \\ [\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2] = r_1 \cdot r_2 \cdot \sin 2f \end{cases}$

Для определения e и v:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v} \quad \Rightarrow \quad e\cos v = \frac{p}{r} - 1.$$ Для t_1 и t_2:

$$\begin{cases} e\cos v_1 = \dfrac{p}{r_1} - 1 \equiv q_1 \\ e\cos v_2 = \dfrac{p}{r_2} - 1 \equiv q_2 \end{cases} \qquad (2.39).$$

В (2.39) подставляем $v_2 = v_1 + 2f$ и расписываем $\cos(v_1 + 2f)$:

$$e\cos v_1 \cdot \cos 2f - e\sin v_1 \cdot \sin 2f = q_2 \quad \Rightarrow$$

$$e\sin v_1 = \frac{q_1 \cos 2f - q_2}{\sin 2f} = q_1 ctg 2f - \frac{q_2}{\sin 2f}. \qquad (2.40)$$

Таким образом., имеем $\begin{cases} e\cos v_1 = q_1 \\ e\sin v_1 = \dfrac{q_1 \cos 2f - q_2}{\sin 2f} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = \cdots\cdots \\ v_1 = \cdots\cdots \\ v_2 = v_1 + 2f \end{cases}$

E_1 и E_2 из: $\quad tg\dfrac{v_k}{2} = \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}} \cdot tg\dfrac{E_k}{2}$.

M_1 и M_2 из: $\quad M_k = E_k - e\sin E_k$.

n из: $\quad \begin{cases} M_1 = n(t_1 - T) \\ M_2 = n(t_2 - T) \end{cases} \Rightarrow \quad n = \dfrac{M_2 - M_1}{t_2 - t_1}$

a из: $\quad n = \dfrac{\aleph}{a^{3/2}}$.

$M_0 = M_1 + n\,(t_0 - t_1)$

i и Ω: $\quad \vec{c} \parallel \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$.

В координатной форме:

$$\begin{cases} y_1 z_2 - y_2 z_1 = |\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| \cdot \sin i \cdot \sin\Omega \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 = |\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| \cdot (-\sin i \cdot \cos\Omega) \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 = |\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| \cdot \cos i \end{cases} \Rightarrow \quad i, \Omega \qquad (2.41)$$

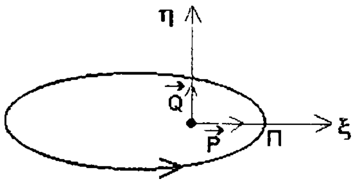
$$\begin{cases} \sin i \cdot \sin\Omega \\ -\sin i \cdot \cos\Omega \\ \cos i \end{cases}$$

– направляющие косинусы для $\vec{c}$.

$$|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| = r_1 \cdot r_2 \cdot \sin 2f$$

ω: $$\begin{cases} r_1 \cos u_1 = x_1 \cos\Omega + y_1 \sin\Omega \\ r_1 \sin u_1 = \dfrac{z_1}{\sin i} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} u_1 = \cdots\cdots \\ \omega = u_1 - v_1 \end{matrix} \qquad (2.42)$$

Для определения $\vec{P}, \vec{Q}$:



$\vec{Q} \perp \vec{P}$

$\vec{Q} \subset$ *в плоскости орбиты*

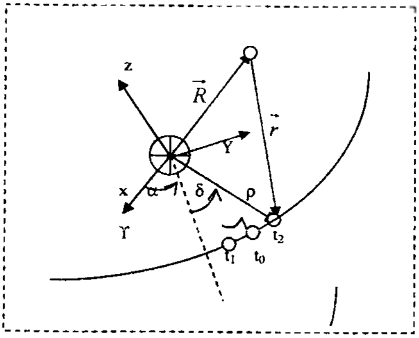
$$\begin{pmatrix} \vec{r}_1 = (\xi_1, \eta_1) \\ \vec{r}_2 = (\xi_2, \eta_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \xi_1 \vec{P} + \eta_1 \vec{Q} \\ \vec{r}_2 = \xi_2 \vec{P} + \eta_2 \vec{Q} \end{cases} \tag{2.43}$$

т.к. $\begin{cases} \xi = a(\cos E - e) = r_1 \cos v_1 \\ \eta = a\sqrt{1-e^2}\sin E = r_1 \sin v_1 \end{cases}$.

Из (2.43): $\begin{cases} \vec{P} = \dfrac{\eta_2 \cdot \vec{r}_1 - \eta_1 \cdot \vec{r}_2}{\xi_1 \cdot \eta_2 - \xi_2 \cdot \eta_1} \\ \vec{Q} = \dfrac{\xi_1 \cdot \vec{r}_2 - \xi_2 \cdot \vec{r}_1}{\xi_1 \cdot \eta_2 - \xi_2 \cdot \eta_1} \end{cases}$

§10. Определение орбиты по трём наблюдениям: метод Гаусса



$\rho(\alpha, \delta)$

Проводятся наблюдения в моменты , t_0, t_1, t_2 и для них определяют α_i, δ_i (i=0, 1, 2).

Постановка задачи:

Дано:

$\alpha_0, \delta_0; \alpha_1, \delta_1; \alpha_2, \delta_2; t_1; t_0; t_2$.

Найти: элементы орбиты

$a, e, i, \omega, \Omega, M_0$ (или T)

В геоцентрической экваториальной системе $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \vec{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix};$

$\vec{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos\delta \cos\alpha \\ \rho\cos\delta\sin\alpha \\ \rho \cdot \sin\delta \end{pmatrix}$ – вектор наклонной дальности.

$|\vec{\rho}|$ – наклонная дальность.

Из рисунка видно, что $\vec{\rho} = \vec{R} + \vec{r}$ (2.44)

Записываем (2.44) в координатной форме для 3ˣ моментов t_i:

$$\begin{cases} \rho_i \cos\delta_i \cos\alpha_i = X_i + x_i \\ \rho_i \cos\delta_i \sin\alpha_i = Y_i + y_i \\ \rho_i \sin\delta_i = Z_i + z_i \end{cases} \qquad (2.45)$$

(в x_i, y_i, z_i содержатся элементы орбиты).
В (2.45) известны: X_i, Y_i, Z_i; α_i, δ_i.
Неизвестными являются: ρ_i; a; e; . . . .; T.
Записывая (2.45) для трёх моментов времени, получим 9 уравнений с 9 неизвестными (6 элементов орбиты и 3 ρ_i).
Введём обозначения:

$$\begin{cases} \cos\delta_i \cdot \cos\alpha_i = \lambda_i \\ \cos\delta_i \cdot \sin\alpha_i = \mu_i \\ \sin\delta_i = \nu_i \end{cases} \qquad (2.46)$$

Тогда (2.45) принимает вид:

$$\begin{cases} x_i = \rho_i\lambda_i - X_i \\ y_i = \rho_i\mu_i - Y_i \\ z_i = \rho_i\nu_i - Z_i \end{cases} \qquad (2.47)$$

I этап: Определение ρ_0, ρ_1, ρ_2.
II этап: Определение элементов орбиты.

I этап

Будем считать, что $t_1 < t_0 < t_2$. t_0 – средний момент времени. Метод Гаусса предполагает разложение координат в ряды по степеням t. Для момента t, достаточно близкого к t_0:

$$\begin{cases} x = x_0 \cdot F(\theta) + \dot{x}_0 G(\theta) \\ y = y_0 \cdot F(\theta) + \dot{y}_0 G(\theta) \\ z = z_0 \cdot F(\theta) + \dot{z}_0 G(\theta) \end{cases} \qquad (2.48)$$

$\theta = \aleph(t - t_0)$.

Введём обозначения: $\tau_1 = \aleph(t_2 - t_0)$; $\tau_2 = \aleph(t_0 - t_1)$; $\tau = \tau_1 + \tau_2 = \aleph(t_2 - t_1)$;
$F_1 = F(-\tau_2)$; $F_2 = F(\tau_1)$; $G_1 = G(-\tau_2)$; $G_2 = G(\tau_1)$.

Запишем (2.48) для моментов t_1 и t_2:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 F_1 + \dot{x}_0 G_1 \\ y_1 = y_0 F_1 + \dot{y}_0 G_1 \\ z_1 = z_0 F_1 + \dot{z}_0 G_1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_2 = x_0 F_2 + \dot{x}_0 G_2 \\ y_2 = y_0 F_2 + \dot{y}_0 G_2 \\ z_2 = z_0 F_2 + \dot{z}_0 G_2 \end{cases} \qquad (2.49)$$

Исключаем здесь $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$:

$$G_2 x_1 - G_1 x_2 = x_0 (F_1 G_2 - F_2 G_1).$$

Делим это на $(F_1 G_2 - F_2 G_1)$ и записываем в виде:

$$\begin{cases} n_1 x_1 - x_0 + n_2 x_2 = 0 \\ n_1 y_1 - y_0 + n_2 y_2 = 0 \\ n_1 z_1 - z_0 + n_2 z_2 = 0 \end{cases} \tag{2.50}$$

где

$$\begin{cases} n_1 = \dfrac{G_2}{F_1 G_2 - F_2 G_1}; \\ n_2 = -\dfrac{G_1}{F_1 G_2 - F_2 G_1}; \end{cases} \tag{2.51}$$

Нужно выразить n_1 и n_2 через τ_i:

$$\begin{cases} F_1 = F(-\tau_2) = 1 - \dfrac{1}{2} u \cdot \tau_2^2 + \dfrac{1}{6} u' \tau_2^3 + \ldots. \\ G_1 = G(-\tau_2) = -\tau_2 + \dfrac{1}{6} u \cdot \tau_2^3 - \dfrac{1}{12} u' \tau_2^3 + \ldots. \\ F_2 = F(\tau_1) = \ldots\ldots \\ G_2 = G(\tau_1) = \ldots\ldots \end{cases} \tag{2.52}$$

где $u = \dfrac{1}{r^3}; \quad u' = -\dfrac{3r'}{r^4}$

(2.52')

$$F_1 G_2 - F_2 G_1 = \tau - \frac{1}{6} u \tau^3 + \frac{1}{12} u' (\tau_2 - \tau_1) \tau^3 + \ldots. \qquad (\tau = \tau_1 + \tau_2).$$

Для (2.51) получили:

$$\begin{cases} n_1 = \dfrac{\tau_1}{\tau} \left[1 + \dfrac{u}{6} (\tau^2 - \tau_1^2) + \dfrac{u'}{12} \cdot \tau_2 (\tau \tau_2 - \tau_1^2) + \ldots. \right] \\ n_2 = \dfrac{\tau_2}{\tau} \left[1 + \dfrac{u}{6} (\tau^2 - \tau_2^2) + \dfrac{u'}{12} \cdot \tau_1 (\tau \tau_1 - \tau_2^2) + \ldots. \right] \end{cases}$$

Преобразовывая, учитывая (2.52'), получим:

$$\begin{cases} n_1 = n_1^0 + \dfrac{C_1}{\tau_0^3} \\ n_2 = n_2^0 + \dfrac{C_2}{\tau_0^3} \end{cases} \tag{2.53}$$

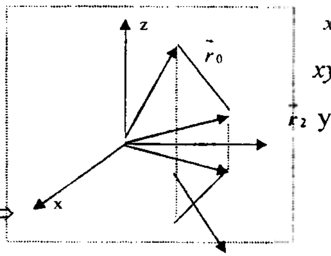
где

$$\begin{cases} n_1^0 = \dfrac{\tau_1}{\tau}; C_1 = \dfrac{1}{6} \tau_1 \tau_2 (1 + n_1^0) + \dfrac{\tau'}{4\tau} \tau_1 \tau_2 \cdot \dfrac{(\tau \tau_2 - \tau_1^2)}{\tau} + \ldots \\ n_2^0 = \dfrac{\tau_2}{\tau}; C_2 = \dfrac{1}{6} \tau_1 \tau_2 (1 + n_2^0) + \dfrac{\tau'}{4\tau} \tau_1 \tau_2 \cdot \dfrac{(\tau \tau_1 - \tau_2^2)}{\tau} + \ldots \end{cases} \tag{2.54}$$

геометрический смысл n_1 и n_2 из (2.50).

Из (2.50) вычислим n_1 и n_2:

$$\begin{cases} n_1 = \dfrac{x_0 y_2 - x_2 y_0}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \\ n_2 = \dfrac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \end{cases} \tag{2.55}$$



$x_0 y_2 - x_2 y_0 = S^{xy}_{\vec{r}_0 \vec{r}_2}$ - проекция на плоскость xy площади Δ-ка, построенного на $\vec{r}_0$ и $\vec{r}_2$.

$$n_1 = \frac{S^{xy}_{r_0, r_2}}{S^{xy}_{r_1, r_2}}; \quad n_2 = \frac{S^{xy}_{r_0, r_1}}{S^{xy}_{r_1, r_2}}.$$

$\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ - лежат в одной плоскости

$$\Rightarrow \frac{S^{xy}_{r_0, r_2}}{[r_0, r_2]} = \frac{S^{xy}_{r_0, r_1}}{[r_0, r_1]} = \frac{S^{xy}_{r_1, r_2}}{[r_1, r_2]} = \frac{\text{ïðîåêöèÿ } S}{S}. \tag{2.56}$$

Учитывая (2.56), запишем (2.55) в виде:

$$\begin{cases} n_1 = \dfrac{[r_0, r_2]}{[r_1, r_2]} \\ n_2 = \dfrac{[r_0, r_1]}{[r_1, r_2]} \end{cases} \tag{2.57}$$

(2.57) подставим в (2.50):

$$\begin{cases} \rho_1 n_1 \lambda_1 - \rho_0 \lambda_0 + \rho_2 n_2 \lambda_2 = n_1 X_1 - X_0 + n_2 X_2 \\ \rho_1 n_1 \mu_1 - \rho_0 \mu_0 + \rho_2 n_2 \mu_2 = n_1 Y_1 - Y_0 + n_2 Y_2 \\ \rho_1 n_1 \nu_1 - \rho_0 \nu_0 + \rho_2 n_2 \nu_2 = n_1 Z_1 - Z_0 + n_2 Z_2 \end{cases} \tag{2.58}$$

Будем считать, что n_1 и n_2 нам известны. Разрешим (2.58) относительно ρ_0.

$$Д\rho_0 = Д'$$

$$Д = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_0 & \mu_2 \\ \nu_1 & \nu_0 & \nu_2 \end{vmatrix}; \quad Д' = \begin{vmatrix} \lambda_1 & X_0 - n_1 X_1 - n_2 X_2 & \lambda_2 \\ \mu_1 & Y_0 - n_1 Y_1 - n_2 Y_2 & \mu_2 \\ \nu_1 & Z_0 - n_1 Z_1 - n_2 Z_2 & \nu_2 \end{vmatrix}. \tag{2.59}$$

Можно записать соотношение:

$$Д\rho_0 = U_0 - n_1 U_1 - n_2 U_2, \tag{2.59'}$$

где

$$U_i = \begin{vmatrix} \lambda_1 & X_i & \lambda_2 \\ \mu_1 & Y_i & \mu_2 \\ \nu_1 & Z_i & \nu_2 \end{vmatrix}, \quad i = 0, 1, 2.$$

(2.53) подставим в (2.59'):

$$Д\rho_0 = U_0 - n_1^0 U_1 - n_2^0 U_2 - \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{r_0^3}.$$

Обозначим:

$$\begin{cases} P = \dfrac{U_0 - n_1^0 U_1 - n_2^0 U_2}{Д} \\ Q = \dfrac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{Д} \end{cases} \tag{2.60}$$

$$\rho_0 = P - Q \cdot r_0^{-3} \tag{2.61}$$

- уравнение с 2 неизвестными

P можно вычислить точно, а Q – приближённо.

Считая малыми τ_1 и τ_2 в C_1 и C_2, ограничимся первыми членами:

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{6}\tau_1\tau_2(1 + n_1^0) \\ C_2 = \dfrac{1}{6}\tau_1\tau_2(1 + n_2^0) \end{cases}$$

Необходимо ещё одно уравнение с ρ_0 и r :

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \ .$$

Подставляем x_0, y_0, z_0 из (4):

$$\begin{gathered} r_0^2 = (\rho_0\lambda_0 - X_0)^2 + (\rho_0\mu_0 - Y_0)^2 + (\rho_0\nu_0 - Z_0)^2 = \rho_0^2 + R^2 + 2C\rho_0, \\ C = -\lambda_0 X_0 - \mu_0 Y_0 - \nu_0 Z_0; \\ r_0^2 = \rho_0^2 + 2C\rho_0 + R^2. \end{gathered} \tag{2.62}$$

(2.61) и (2.62) - <u>уравнения Лагранжа</u>.

Из них находим: r_0, ρ_0. Затем из (2.58) находим ρ_1 и ρ_2 и I этап заканчивается.

II этап

Так как ρ_0, ρ_1, ρ_2 и $\vec{\rho}_0, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2$ известны, по (1) найдём $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_0$. Берём $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, и по ним определяем орбиту.

На этом решение не кончается, т.к. из – за Q получили лишь приближенное решение и его надо уточнить.

Уточнение геоцентрических расстояний

$$n_1 = \frac{[r_0, r_2]}{[r_1, r_2]} = \frac{[r_0, r_2]\cdot(r_0, r_2)\cdot(r_1, r_2)}{\underbrace{[r_1, r_2]\cdot(r_0, r_2)\cdot(r_1, r_2)}_{S\ сектора}}$$

$$\eta_1 = \frac{(r_0, r_2)}{[r_0, r_2]}; \quad \eta_2 = \frac{(r_0, r_1)}{[r_0, r_1]}; \quad \eta = \frac{(r_1, r_2)}{[r_1, r_2]}.$$

$$\begin{cases} n_1 = \dfrac{\eta}{\eta_1}\cdot\dfrac{(r_0, r_2)}{(r_1, r_2)} = \dfrac{\eta}{\eta_1}\cdot\dfrac{\tau_1}{\tau} = \dfrac{\eta}{\eta_1}\cdot n_1^0 \\ n_2 = \dfrac{\eta}{\eta_2}\cdot n_2^0 \end{cases} \tag{2.63}$$

По ранее найденным приближенным значениям ρ_i, r_i находим η, η_1, η_2, а (2.63) дают уточнённые значения n_1 и n_2. Из (2.58) определяем новые ρ_0, ρ_1, ρ_2; по ним новые r_0, r_1, r_2 и т.д.

§11. Решение уравнений Лагранжа

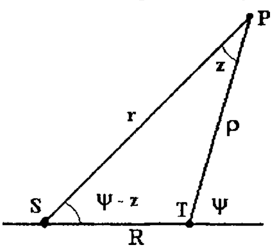
$$\begin{cases} \rho_0 = P - \dfrac{Q}{r_0^3} \\ r_0^2 = \rho_0^2 + R^2 - 2C\rho_0 \end{cases}$$

- можно получить одно уравнение 8$^{\text{го}}$ порядка относительно r_0.

$$r_0^2 = \left(P - \frac{Q}{r_0^3}\right)^2 + R^2 - 2C\left(P - \frac{Q}{r_0^3}\right).$$

Это уравнение имеет 8 решений (действительные и комплексные). Из действительных решений выбираем то, которое нас устраивает. Гаусс предложил метод, основанный на геометрических построениях.

По теореме синусов:



$$\frac{r}{\sin\phi} = \frac{R}{\sin z} = \frac{\rho}{\sin(\phi - z)} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r = R\dfrac{\sin\phi}{\sin z} \\ \rho = \dfrac{R\sin(\phi - z)}{\sin z} \end{cases}.$$

Подставляем их в первое уравнение Лагранжа:

$$\frac{R\sin(\phi - z)}{\sin z} = P - \frac{Q}{R^3}\cdot\frac{\sin^3 z}{\sin^3\phi}.$$

Преобразовываем:

$$R\sin\phi\cos z - R\cos\phi\sin z = P\sin z - \frac{Q}{R^3}\cdot\frac{\sin^4 z}{\sin^3\phi},$$

$$R\sin\phi\cos z - (R\cos\phi + P)\sin z = -\frac{Q}{R^3\sin^3\phi}\cdot\sin^4 z.$$

ϕ *и* R известны. Представим в виде:

$$\begin{cases} R\sin\phi = \mu\sin q \\ R\cos\phi + P = \mu\cos q \end{cases},$$

q - какой – то угол.

$$\mu \cdot \sin(q - z) = -\frac{Q}{R^3 \sin^3 \phi} \cdot \sin^4 z .$$
$$\sin(z - q) = m \sin^4 z , \tag{2.64}$$
$$m = \frac{Q}{\mu \cdot R^3 \cdot \sin^3 \phi} .$$

(2.64) решается методом последовательных приближений. Обычно берут $z_0 = 0$, подставляется в правую часть, из левой находим z_1: $\sin(z_1 - q) = m \sin^4 z_0 \quad \to \quad z_1 = q$. Затем $\sin(z_2 - q) = m \sin^4 z_1 \quad \to \quad z_2 = \ldots\ldots$ и т.д.. Пока 2 последовательных значения не будут достаточно близки.

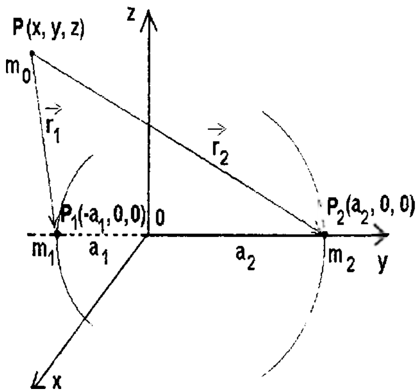
Глава 3. Ограниченная круговая задача трёх тел

Частные случаи задачи 3^x тел:

1) Эйлеровый случай – все тела всегда находятся на одной прямой. Массы тел произвольные.
2) Случай Лагранжа – тела произвольных масс всегда находятся в вершинах равностороннего треугольника.
3) Случай двойной задачи 2^x тел – масса одного тела m_1 произвольна, массы двух других тел <<1.
4) Ограниченная задача 3^x тел – массы двух тел m_1 и m_2 произвольны, масса третьего тела m_3 <<1.
   А) круговая,
   Б) эллиптическая.

§1. Уравнения движения ограниченной круговой задачи трёх тел

Необходимо определить движение точки P с массой m_0 относительно точек P_1 с m_1 и P_2 с m_2.



Пусть 1) $m_0 << 1$, 2) движение точек P_1 и P_2 происходят по круговым орбитам относительно центра инерции.

Точка O совпадает с центром инерции системы m_1 и m_2. m_1 и m_2 движутся в плоскости XOY.

Пусть для определенности $m_1 \geq m_2$ и система вращается с постоянной угловой скоростью n = *const* ($n > 0$).

Из законов Кеплера:

$$n = \aleph \cdot a^{-3/2}, \text{ где } \aleph = \sqrt{G(m_1 + m_2)}, \quad a = a_1 + a_2.$$

Силовая функция системы, нормированная на значение m_0:
$$U = G\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right).$$

Кинетическая энергия точки P равна:

$$T_P = \frac{m_0}{2}\left[(\dot{x} - ny)^2 + (\dot{y} + nx)^2 + \dot{z}^2\right],$$

где $(\dot{x} - ny)$, $(\dot{y} + nx)$ и $\dot{z}$ – компоненты абсолютной скорости точки P в декартовой системе координат. Уравнение Лагранжа в криволинейных координатах:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (3.1)$$

$$L = m_0\, U + T \qquad (3.2)$$

Подстановкой (3.2) в (3.1) получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = m_0 \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

В нашем случае $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$.

Последнее уравнение расписываем отдельно для x, y и z:

$$\text{для } x: \quad \frac{d}{dt}\left[m_0(\dot{x} - ny)\right] - m_0 n(\dot{y} + nx) = m_0 \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\text{для } y: \quad \frac{d}{dt}\left[m_0(\dot{y} + nx)\right] + m_0 n(\dot{x} - ny) = m_0 \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$\text{для } z: \quad \frac{d}{dt}\left[m_0\dot{z}\right] = m_0 \frac{\partial U}{\partial z}$$

Сокращая m_0 и дифференцируя по t, получим окончательно уравнения движения ограниченной круговой задачи 3^x тел:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x = \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} - 2n\dot{x} - n^2 y = \dfrac{\partial U}{\partial y} \\ \ddot{z} = \dfrac{\partial U}{\partial z} \end{cases} \tag{3.3}$$

§2. Интеграл Якоби

Есть интеграл движения, который является аналогом интеграла энергии.

Умножим уравнения (3.3) соответственно на $2\dot{x}$, $2\dot{y}$ и $2\dot{z}$ и сложим:

$$2(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) - 2n^2(x\dot{x} + y\dot{y}) = 2\left(\dot{x}\frac{\partial U}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial U}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - n^2\frac{d}{dt}\left(x^2 + y^2\right) = 2\frac{dU}{dt}$$

Интегрируя, получаем интеграл Якоби

$$\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - n^2\left(x^2 + y^2\right) + C = 2U$$

C – постоянная Якоби.

Запись интеграла Якоби в другом виде:

$$v^2 = 2\Omega - C \tag{3.4}$$

где v – скорость точки P относительно точек P_1 и P_2, а $\Omega \equiv U + \frac{n^2}{2}\left(x^2 + y^2\right)$. Тогда уравнения (3.3) примут вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \ddot{z} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial z} \end{cases} \tag{3.3'}$$

§3. Поверхность нулевых скоростей

Исследуем интеграл Якоби с целью определения области возможных движений точки P (m_0). Смысл имеет движение с $v^2 \geq 0$. Рассмотрим уравнение (3.4) и приравняем v^2 нулю.

$$2\,\Omega(x, y, z) - C = 0 \tag{3.5}$$

В результате получим поверхность в трехмерном пространстве, которая отделяет область возможных движений от области невозможных – поверхность нулевых скоростей.

Движение происходит в области $\begin{cases} v^2 > 0 \\ 2\Omega > C \end{cases}$

Поверхность зависит от значений постоянной C.

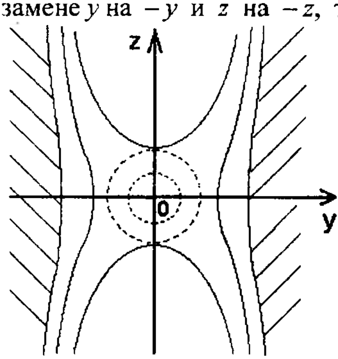
Примем следующую систему единиц: $G = 1$, $a = a_1 + a_2 = 1$.

Тогда уравнение (3.5) примет вид:

$$2\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) + (m_1 + m_2)(x^2 + y^2) = C \tag{3.6}$$

Для анализа формы поверхностей нулевых скоростей начнем со случая, когда C – большая величина: $C >> 1$

По осям y и z поверхность симметрична, т.к. если в r_1 и r_2 при замене y на $-y$ и z на $-z$, то выражение (3.6) не изменится.



1) Пусть $x^2 + y^2$ – большое. Тогда r_1 и $r_2 >> 1$, а следовательно $\frac{2m_1}{r_1}$ и $\frac{2m_2}{r_2} << 1$. Тогда $2\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) = \varepsilon << 1$.

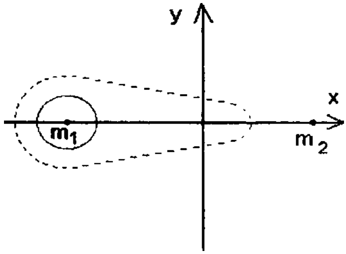
$(m_1 + m_2)\,(x^2 + y^2) = C - \varepsilon\,(x, y, z)$.

Для $\varepsilon = 0$ имеем цилиндр.

При $\varepsilon \neq 0$ поверхность назовем “квазицилиндр”.

При $z = 0$: $r_{1,2}$ – минимальны, а ε – максимально. Тогда имеем минимальное значение радиуса цилиндра в плоскости, т.к. $v^2 > 0$, $2\Omega > C$, то заштрихованная область – область возможных движений.

При некотором C анализ показывает, что вблизи XOY происходит разрыв поверхности.



2) $\frac{2m_1}{r_1} >> 1$ как и C. Тогда r_1 << 1. Движение точки с m_0 происходит в окрестности точки P_1 (m_1).

$x^2+y^2 << 1, \qquad \frac{2m_2}{r_2} << 1, \qquad (m_1+m_2)(x^2+y^2)+\frac{2m_2}{r_2} =$

Тогда $\frac{2m_1}{r_1} = C - \varepsilon_1(x, y, z)$, $r_1 = \frac{2m_1}{C - \varepsilon_1}$.

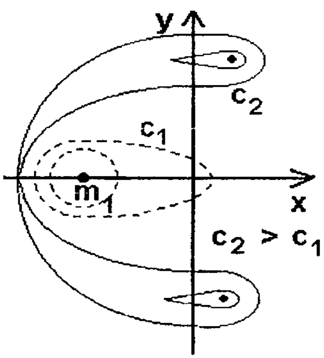
Для $\varepsilon_1 = 0$ справа – постоянная величина. Имеем сферу с центром в точке P_1.

$\varepsilon_1 \neq 0$. ε_1 возрастает, а r_1 увеличивается. С учетом ε_1 как функции от x, y, z имеем "квазисферу", напоминающую яйцо, вытянутое в сторону $x > 0$.

С уменьшением C, r_1 растет и наступает момент, когда "квазисфера" и "квазицилиндр" соприкасаются.

3). $\frac{2m_2}{r_2} >> 1; \qquad r_2 << 1; \qquad C >> 1; \qquad x^2+y^2 << 1; \qquad \frac{2m_1}{r_1} << 1$

Тогда $\frac{2m_2}{r_2} = C - \varepsilon_2(x, y, z)$; $r_2 = \frac{2m_2}{C - \varepsilon_2}$

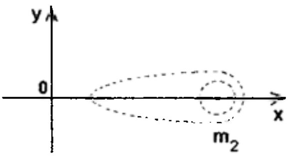


$\varepsilon_2 = 0$. Имеем окружность около m_2, но с меньшим радиусом при том же значении C (т.к. $m_2 < m_1$).

$\varepsilon_2 \neq 0$. С ростом ε_2, r_2 увеличивается, и имеем "квазисферу", но вытянутую в сторону уменьшения x.

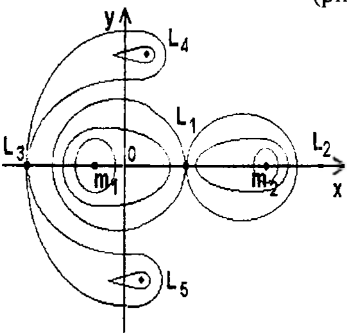
Существуют такие C, что 2 "квазисферы" сольются.

При уменьшении C происходит разрыв "восьмерки" (∞) и получаем



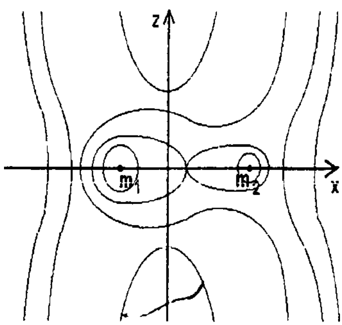
Для $\underline{v^2 > 0}$: $r_2 < \frac{2m_2}{C - \varepsilon_2}$, т.е. движение возможно внутри "квазисфер" и снаружи от "квазицилиндра".

В общем и частном случае получаем:
(рис)



При дальнейшем уменьшении C поверхность нулевых скоростей распадается на две поверхности, находящиеся вдали от XOY.

Существуют такие, уменьшающиеся C_i, при которых появляются "особые" точки L_1, L_2, L_3, L_4, L_5.



§4. Особые точки поверхности нулевых скоростей

Обычно особые точки связывают с экстремумами.

$$n^2\left(x^2 + y^2\right) + \frac{2m_1}{r_1} + \frac{2m_2}{r_2} - C = 0$$

Берем производные по x, y, z.

$$\begin{cases} 2n^2x - \dfrac{m_1\cdot 2\cdot(x+a_1)}{r_1^3} - \dfrac{2m_2(x-a_2)}{r_2^3} = 0 \\ n^2y - \dfrac{m_1y}{r_1^3} - \dfrac{m_2y}{r_2^3} = 0 \\ -\dfrac{m_1z}{r_1^3} - \dfrac{m_2z}{r_2^3} = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Из (7.3) видно, что: $-z\left(\dfrac{m_1}{r_1^3}+\dfrac{m_2}{r_2^3}\right)=0$.

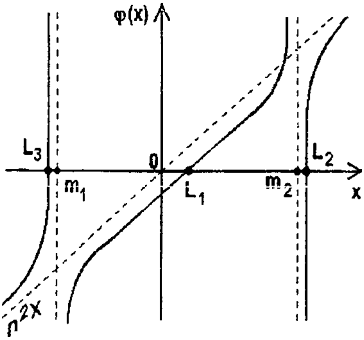
Т.к. m_1 и m_2 произвольные и $\neq 0$, a_1 и a_2 – произвольные, то $\dfrac{m_1}{r_1^3}+\dfrac{m_2}{r_2^3}\neq 0$.

Следовательно $\underline{z=0}$.

Учитывая $z = 0$ в (7.1) и (7.2) из них получаем:

$$y\left(n^2-\frac{m_1}{r_1^3}-\frac{m_2}{r_2^3}\right)=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} y=0, \\ \textit{или} \\ n^2-\dfrac{m_1}{r_1^3}-\dfrac{m_2}{r_2^3}=0 \end{array}\right.$$

Учитывая $z = 0$, $y = 0$, тогда $\varphi(x)=n^2x-\dfrac{m_1(x+a_1)}{|x+a_1|^3}-\dfrac{m_2(x-a_2)}{|x-a_2|^3}=0$. Решаем графическим методом



x	φ
$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$
$-a_1+\varepsilon$	$-1/\varepsilon^2=-\infty$
$-a_1-\varepsilon$	$+1/\varepsilon^2=+\infty$
$-a_2\pm\varepsilon$	$\pm\infty$

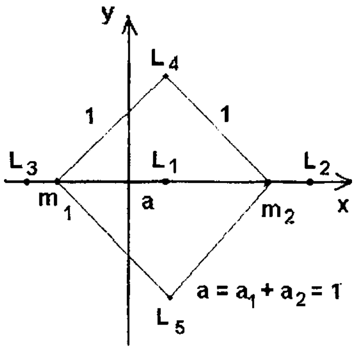
Т.о., получили три особые точки, координаты которых можно вычислить.

Теперь рассмотрим случай $n^2-\dfrac{m_1}{r_1^3}-\dfrac{m_2}{r_2^3}=0$.

Если $r_1 = r_2$, то $n^2-\dfrac{m_1+m_2}{r_1^3}=0$.

Систему уравнений перепишем следующим образом:

$$\begin{cases} x\left(n^2 - \dfrac{m_1}{r_1^3} - \dfrac{m_2}{r_2^3}\right) - \dfrac{m_1 a_1}{r_1^3} + \dfrac{m_2 a_2}{r_2^3} = 0 \\ y\left(n^2 - \dfrac{m_1}{r_1^3} - \dfrac{m_2}{r_2^3}\right) = 0 \\ -z\left(\dfrac{m_1}{r_1^3} + \dfrac{m_2}{r_2^3}\right) = 0 \end{cases}$$



(7.1): т.к. если $\left(n^2 - \dfrac{m_1}{r_1^3} - \dfrac{m_2}{r_2^3}\right) = 0$, то $\dfrac{m_1 \cdot a_1}{r_1^3} = \dfrac{m_2 \cdot a_2}{r_2^3}$.

т.к. точка 0 совпадает с центром инерции, то должно быть $m_1 a_1 = m_2 a_2$.

$n^2 - \dfrac{m_1 + m_2}{r_1^3} = 0$ и еще у нас было (перед (6), где переходили к системе единиц $G = 1$, $a_1 + a_2 = a = 1$)

$$n^2 = m_1 + m_2 \equiv \aleph^2$$

Тогда видно, что $r_1 = r_2 = 1$. Такой анализ впервые проведен Хиллом. Результаты применил к определению движения Луны в поле Солнце - Земля, определил теоретические значения минимального и максимального удаления Луны от Земли. Движение Луны устойчиво по Хиллу, если $r < r_{max} = 109{,}7\ R_\oplus$ и $r < r_{min} = 104{,}4\ R_\oplus$.

По наблюдениям: $57\ R_\oplus \le r \le 63{,}5\ R_\oplus \Rightarrow$ Движение Луны всегда внутри "квазисферы" и устойчиво по Хиллу.

§5. Небесно – механический смысл особых точек и *C*

Уравнения движения ограниченной задачи $3^х$ тел:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial y} \\ \ddot{z} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial z} \end{cases} \qquad v^2 = 0,\quad \dot{x} = \dot{y} = 0,\quad \frac{\partial\Omega}{\partial x} = \frac{\partial\Omega}{\partial y} = \frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0 \Rightarrow$$

Особые точки являются точками равновесия.

Анализ показывает, что L_1; L_2; L_3 – точки неустойчивого равновесия: в отсутствие внешних сил, тело, попадая в такие точки, может находится ∞ долго; но при малейшем возмущении тело покидает точки.

L_4; L_5 – точки устойчивого равновесия.

В точках L_4 и L_5 были найдены группы астероидов, которые находятся вблизи орбиты Юпитера. L_4 и L_5 – "точки либрации".
Существуют точные результаты по ограниченной эллиптической задаче 3^х тел.
По значению C находят новые (и не очень) кометы.

2 наблюдавшиеся в разное время кометы могут быть одной и той же, если их значения C тождественно равны друг другу.

Расчет C можно провести, используя формулу интеграла Якоби.
$m_{\odot} = 1$, в качестве 2-го тела – $m_{Юпитер}$ $\Rightarrow$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = n_2^2\left(x^2 + y^2\right) + 2G\left(\frac{1}{r} + \frac{m_2}{\rho}\right) - C$$

n_2 – средняя угловая скорость $v_{Юпитер}$ относительно Солнце
$\dot{x} \div \dot{z}$ – компоненты относительной v кометы, взятые относительно вращающейся СК m_2 - $m_{Юпит.}$.
ρ – расстояние Юпитера до кометы.
r – расстояние от Солнце до кометы.
На практике чаще пользуются критерием Тиссерана.
Если из наблюдения определить значения элементов орбиты кометы a, ℓ, i, то легко вычислить некую $const$: $\Gamma = \dfrac{C}{G}$.
Тиссеран от координат и скоростей перешел к элементам орбиты и получил:

$$\Gamma = \frac{C}{G} = \frac{1}{a} + 0{,}16860 \cdot \sqrt{p} \cdot \cos i + \delta, \qquad (\delta \approx O(\varepsilon))$$

Многие орбиты комет – гиперболические.

Глава 4. Задача *n* – тел

Задача n - тел - изучение движений конечного числа материальных точек под действием взаимного притяжения по закону Ньютона.
Пусть $m_0, m_1, \ldots, m_{n-1}$ – массы материальных точек.
Выберем неподвижный центр; относительно него координаты остальных точек:

$$\vec{\rho}_0, \ldots, \vec{\rho}_{n-1}.$$

Введём систему координат: $\vec{\rho}_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, $i = \overline{0, n-1}$. Расстояния между точками i и j:

$$r_{ij} = \sqrt{(\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2} \ .$$

Притяжение, которое испытывает точка i со стороны j:

$$|\vec{F}|_{ij} = \frac{f m_i m_j}{r_{ij}^2}. \qquad \vec{F}_{ij} \uparrow\uparrow (\vec{\rho}_j - \vec{\rho}_i). \qquad \vec{F}_{ij} = \frac{f m_i m_j}{r_{ij}^3}(\vec{\rho}_j - \vec{\rho}_i).$$

Уравнение движения:

2

$$m_i \frac{d^2 \vec{\rho}_i}{dt^2} = \sum_{j=0}^{n-1}{}^{(i)} \frac{f m_i m_j (\vec{\rho}_j - \vec{\rho}_i)}{r_{ij}^3}, \quad i = \overline{0, n-1} \ . \tag{4.1}$$

$\sum\limits_j^{(i)}$ означает, что $j \neq i$.

(4.1)– уравнения абсолютного движения задачи n – тел.
Запишем (4.1) в проекциях на оси координат.

$$\begin{cases} m_i \dfrac{d^2\xi_i}{dt^2} = \sum\limits_{j=0}^{n-1}{}^{(i)} \dfrac{f m_i m_j (\xi_j - \xi_i)}{r_{ij}^3} \\ m_i \dfrac{d^2\eta_i}{dt^2} = \sum\limits_{j=0}^{n-1}{}^{(i)} \dfrac{f m_i m_j (\eta_j - \eta_i)}{r_{ij}^3} \\ m_i \dfrac{d^2\zeta_i}{dt^2} = \sum\limits_{j=0}^{n-1}{}^{(i)} \dfrac{f m_i m_j (\zeta_j - \zeta_i)}{r_{ij}^3} \end{cases} \tag{4.2}$$

Введём функцию (силовая функция или потенциал):

$$U = f \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \tag{4.3}$$

Тогда:

$$\begin{cases} m_i \dfrac{d^2\xi_i}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial \xi_i} \\ m_i \dfrac{d^2\eta_i}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial \eta_i} \\ m_i \dfrac{d^2\zeta_i}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial \zeta_i} \end{cases} \tag{4.4}$$

§1. Первые интегралы

Наши n точки составляют замкнутую систему, а совокупность внутренних сил разбивается на пары сил, равных и противоположных. Следовательно сумма всех внутренних сил равна нулю, сумма моментов этих сил относительно неподвижной точки равна нулю.
Сложим уравнения (4.1):

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \dfrac{d^2 \vec{\rho}_i}{dt^2} = 0 \\ \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \dfrac{d^2 \vec{\rho}_i}{dt^2} \times \vec{\rho}_i = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \sum\limits_{j=0}^{n-1} {}^{(i)} \vec{F}_{ij} \times \vec{\rho}_i = 0 \end{cases}$$

– моменты сил относительно неподвижной точки.
Отсюда получаем:

$$\begin{cases} \sum m_i \dfrac{d \vec{\rho}_i}{dt} = \vec{a} = const \\ \sum m_i \vec{\rho}_i = \vec{a} t + \vec{b}, \quad \vec{b} = const \\ \sum m_i (\dfrac{d \vec{\rho}_i}{dt} \times \vec{\rho}_i) = \vec{c} = const \end{cases} \tag{4.5}$$

система (4.5) – 9 первых интегралов уравнения (4.1).
В координатной форме:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \dot{\xi}_i = a_\xi \\ \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \dot{\eta}_i = a_\eta \\ \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \dot{\zeta}_i = a_\zeta \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \xi_i = a_\xi t + b_\xi \\ \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \eta_i = a_\eta t + b_\eta \\ \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \zeta_i = a_\zeta t + b_\zeta \end{cases} \tag{4.6}$$

В механике это интегралы количества движения.

Пусть X, Y, Z – координаты центра масс системы n точек.

$$X = \frac{\sum m_i \xi_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \xi_i}{M} \qquad (M = \sum_{i=1}^{n} m_i \text{ - масса всех звезд системы})$$

Тогда

$$\begin{cases} M\dot{X} = a_\xi \\ M\dot{Y} = a_\eta \\ M\dot{Z} = a_\zeta \end{cases}, \qquad \begin{cases} MX = a_\xi t + b_\xi \\ MY = a_\eta t + b_\eta \\ MZ = a_\zeta t + b_\zeta \end{cases} \tag{4.7}$$

т.е. центр масс движется с постоянной скоростью в неизменнном направлении. (4.7) – *интеграл движения центра масс.*

Запишем последний интеграл в (4.5) в скалярной форме.

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i (\dot{\eta}_i \zeta_i - \eta_i \dot{\zeta}_i) = C_\xi \\ \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i (\dot{\zeta}_i \xi_i - \dot{\xi}_i \zeta_i) = C_\eta \\ \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i (\xi_i \dot{\eta}_i - \eta_i \dot{\xi}_i) = C_\zeta \end{cases} \tag{4.8}$$

- интегралы сохранения вращательного движения (импульсы) или интегралы площадей.

Переходим к другой системе координат:

$(\xi,\eta,\zeta)\to(\xi',\eta',\zeta')$, так, чтобы $O\zeta'\uparrow\uparrow\vec{C}$.

Тогда плоскость $O\xi'\eta'$ называется неизменяемой плоскостью по отношению к точке O (начало исходной системы координат).

Начало координат совместим с центром масс, тогда соответствующая плоскость называется барицентрической плоскостью (или плоскостью Лапласа).

Астрономы вводят астрономическую плоскость Лапласа, которая вычисляется соотношениями:

$$C_\xi=\sum m_i(\dot\eta_i\zeta_i-\eta_i\dot\zeta_i).$$

Её изменение идет медленнее, чем у плоскостей экватора и эклиптики.

Эта плоскость даёт информацию об истории развития Θ системы. Её положение относительно плоскости эклиптики и равноденствия 1950 г.:

$$\begin{cases}\delta=107^\circ13'\\ i=1^\circ39'\end{cases}$$

§2. Интеграл энергии

Берём (4.4), умножаем левые и правые части соответственно на $\dot\xi_i,\dot\eta_i,\dot\zeta_i$ и складываем.

$$\begin{cases}m_i\ddot\xi_i=\dfrac{\partial U}{\partial\xi_i}\Big|\cdot\dot\xi_i & +\\ m_i\ddot\eta_i=\dfrac{\partial U}{\partial\eta_i}\Big|\cdot\dot\eta_i & +\\ m_i\ddot\zeta_i=\dfrac{\partial U}{\partial\zeta_i}\Big|\cdot\dot\zeta_i\end{cases},$$

в результате получаем

$$\sum_{i=0}^{n-1}m_i(\ddot\xi_i\dot\xi_i+\ddot\eta_i\dot\eta_i+\ddot\zeta_i\dot\zeta_i)=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{\partial U}{\partial\xi_i}\cdot\dot\xi_i+\frac{\partial U}{\partial\eta_i}\cdot\dot\eta_i+\frac{\partial U}{\partial\zeta_i}\cdot\dot\zeta_i\right)=\frac{dU}{dt}\qquad(4.9)$$

$$U=U(\xi_i,\eta_i,\zeta_i).$$

Левая часть (4.9) равна $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}m_i(\dot\xi_i^2+\dot\eta_i^2+\dot\zeta_i^2)\right)=\dfrac{d(T)}{dt}$, T – кинетическая энергия n точек.

Т.о. $\dfrac{dT}{dt}=\dfrac{dU}{dt}$. Интегрируя:

$T - U = h$ – <u>интеграл энергии</u>. (4.10)

h – постоянная энергии.

При введении другой СК, вид интеграла не изменится, а изменится *const* h (вообще – то, это относится ко всем интегралам).

Если начало СК совпадает с центром масс, то соответствующая h называется барицентрической постоянной энергии. Т.о. получили 10 первых интегралов (9 первых интегралов уравнения (1) + интеграл энергии). С их помощью систему (4) (имеющую порядок 6^n) можно понизить до $6^n - 10$.

А используя то, что $U \neq U(t)$, а силы, действующие на систему, зависят от расстояния тел, можно понизить порядок ещё на 2.

Использование первых интегралов, например:

~ интеграл площадей – строим плоскость Лапласа и изучаем эволюцию Θ системы.

~ другие → см. дальше.

§3. Движение Солнечной системы

Интегралы количества движения:

$$\begin{cases} \sum m_i \dot{\xi}_i = a_\xi \\ \sum m_i \dot{\eta}_i = a_\eta \\ \sum m_i \dot{\zeta}_i = a_\zeta \end{cases}$$

Их можно использовать для вычисления скорости движения Солнце относительно группы звезд, включающих само Солнце. Эту группу звезд будем считать замкнутой системой: т.е. возьмём звезду и силу тяготения других звезд группы наибольше сил тяготения со стороны всей оставшейся материи вне группы (т.е. пренебрегаем тяготением Вселенной).

$a_\xi = a_\eta = a_\zeta = 0$. Тогда

$$\begin{cases} \sum m_i \dot{\xi}_i = 0 \\ \sum m_i \dot{\eta}_i = 0 \\ \sum m_i \dot{\zeta}_i = 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

Солнце имеет индекс "0".

Введём координаты:
$$\begin{cases} x_i = \xi_i - \xi_0 \\ y_i = \eta_i - \eta_0 \\ z_i = \zeta_i - \zeta_0 \end{cases} \tag{4.12}$$

И подставим это в (4.11):
$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i (\dot{\xi}_0 + \dot{x}_i) = 0 \Rightarrow M\dot{\xi}_i = -\sum_{i=0}^{n-1} m_i \dot{x}_i \tag{4.13}$$

$M = \sum_{i=0}^{n-1} m_i$ – масса всей системы звезд.

Если знаем скорости звезд относительно Солнце, можем определить скорость Солнце относительно центра масс системы звезд.

Скорость Солнце относительно ближайшей группы звезд $\upsilon = 19.5 \frac{км}{c}$ в направлении на точку: $\begin{cases} \alpha = 270^\circ \\ \delta = 30^\circ \end{cases}$.

Вообще – то, эта задача аналитически не решается. Используемые методы:

А) аналитический (разложение в ряд);

Б) численный (для конкретных случаев).

§4. Планетная форма уравнений относительного движения ("первая форма")

Используется следующий выбор относительной системы координат:

Введём новую систему координат, начало которой совместим с точкой m_0, а оси направим параллельно осям неподвижной (старой) СК:

Новые координаты точек m_i обозначим x_i, y_i, z_i. Тогда имеем следующие соотношения:

$$\begin{cases} \xi_i = \xi_0 + x_i \\ \eta_i = \eta_0 + y_i \\ \zeta_i = \zeta_0 + z_i \end{cases} \tag{4.14}$$

Запишем уравнения абсолютного движения в новых координатах (уравнение (4.14) "задачи n – тел"):

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\xi_i}{dt^2} = \aleph^2 \sum\limits_{j=0}^{n-1}{}^{(i)} \dfrac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} m_j \\ \dfrac{d^2\eta_i}{dt^2} = \aleph^2 \sum\limits_{j=0}^{n-1}{}^{(i)} \dfrac{y_j - y_i}{r_{ij}^3} m_j \\ \dfrac{d^2\zeta_i}{dt^2} = \aleph^2 \sum\limits_{j=0}^{n-1}{}^{(i)} \dfrac{z_j - z_i}{r_{ij}^3} m_j \end{cases} \tag{4.15}$$

$$r_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}.$$

Из каждой суммы в (4.15) вынесем член с индексом j=0, ($x_{j=0}$=0).

$$\frac{d^2\xi_i}{dt^2} = -\aleph^2 \left[m_0 \frac{x_i}{r_{i0}^3} - \sum_{j=1}^{n-1}{}^{(i)} m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} \right] \tag{4.15'}$$

Выделим член с индексом $j = i$:

$$\frac{d^2\xi_0}{dt^2} = \aleph^2 m_i \frac{x_i}{r_{0i}^3} + \aleph^2 \sum_{j=1}^{n-1}{}^{(i)} \frac{x_j}{r_{0j}^3} m_j \qquad (4.15'')$$

Из (4.15’) вычтем (4.15’’):

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = -\aleph^2(m_i + m_0)\frac{x_i}{r_{0i}^3} + \aleph^2 \sum_{j=1}^{n-1} m_j \left[\frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} - \frac{x_j}{r_{0j}^3}\right] \qquad (4.16)$$

$$r_{0i} = r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}.$$

Аналогично можно получить и для других индексов i ($i = 1, \overline{n-1}$).

Введём функцию: $$R_i = \aleph^2 \sum_{j=1}^{n-1}{}^{(i)} m_j \left(\frac{1}{r_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3}\right) \qquad (4.17).$$

Тогда $$\frac{d^2x_i}{dt^2} = -\aleph^2(m_0 + m_i)\frac{x_i}{r_i^3} + \frac{\partial R_i}{\partial x_i} \qquad \left(i = 1, \overline{n-1}\right) \qquad (4.18).$$

(4.16) и (4.18) – планетная форма уравнений относительного движения задачи n – тел.

Когда все массы =0, кроме m_0 и m_i, то R_i=0 и уравнение принимает вид относительных уравнений движения задачи двух тел.

Кеплерова задача движения 2х тел обычно является невозмущенным движением, а всякое отклонение называется возмущением. $\Rightarrow$ R_i – возмущающая (пертурбационная) функция.

$\frac{\partial R_i}{\partial x_i}$ даёт возмущающее ускорение за счет действия на m_i всех точек (тел) системы, кроме m_0 и m_i.

Эту форму уравнений относительного движения удобно применять, когда $m_0 \gg m_i$ $\left(i = 1, \overline{n-1}\right)$. $R_i \sim \varepsilon$ (малая величина).

Допустим, что мы решили (4.18) и нашли относительные координаты x_i. Как найти абсолютные координаты?

Используя (4.14), интеграл движения центра масс можно записать:

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} m_i\right)\cdot \xi_0 + \sum_{i=1}^{n-1} m_i x_i = a_\xi t + b_\xi \qquad (4.19)$$

Можно найти ξ_0, а из (4.14) – остальные ξ_i, для η и ζ – аналогично.

Понижая порядок, из (4.15) получили (4.18), используя интеграл движения центра масс.

Система (4.18) имеет 4 первых интеграла.

Недостаток: для каждого уравнения существует своя возмущающая функция.

Звездная форма уравнений относительного движения

Здесь участвуст лишь одна возмущающая функция.

Введём системы координат:

1). Через точку m_0 проведём оси координат, параллельно осям неподвижной системы и координаты точки $m_1 = \{x_1,\ y_1,\ z_1\}$.

1) Через центр масс G_1 точек m_0 и m_1 проведём оси параллельно предыдущим, и положение точки m_2 относительно этой системы обозначим $\{x_2,\ y_2,\ z_2\}$.

2) Через центр масс G_2 точек m_0, m_1, m_2 проводим оси, параллельно предыдущим осям и координаты точки $m_3 = \{x_3,\ y_3,\ z_3\}$; и т.д.

Точка m_{i+1} имеет координаты $\{x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1}\}$ относительно G_i – центра масс точек

$m_0, \ldots, m_i$.

Обозначим: $\{X_i, Y_i, Z_i\}$ – координаты точки G_i.

Для их вычисления имеем соотношения:

$$M_iX_i = m_0\xi_0 + \ldots + m_i\xi_i$$
$$M_iY_i = m_0\eta_0 + \ldots + m_i\eta_i$$
$$M_iZ_i = m_0\zeta_0 + \ldots + m_i\zeta_i$$

где $M_i = \sum\limits_{j=0}^{i} m_j$.

Надо найти уравнения движения. Необходимо выразить x_i через ξ_i, и ξ_i через x_i. По определению:

$$x_i = \xi_i - X_{i-1} \tag{4.20}$$

$$M_{i-1}x_i = M_{i-1}\xi_i - (m_0\xi_0 + \ldots + m_{i-1}\xi_{i-1})$$

$$M_iX_i - M_{i-1}X_{i-1} = m_i\xi_i = (M_i - M_{i-1})\xi_i \tag{4.21}$$

$$M_i(\xi_{i+1} - x_{i+1}) - M_{i-1}(\xi_i - x_i) = (M_i - M_{i-1})\xi_i$$

т.к. из (4.20) $X_i = \xi_{i+1} - x_{i+1}$

получаем:

$$\xi_{i+1} - \xi_i = x_{i+1} - \frac{M_{i-1}}{M_i}x_i \tag{4.22}$$

Складываем почленно равенства (4.22) для последующих значений индексов. Распишем сначала:

$$\begin{aligned}
i=0:&\quad \xi_1-\xi_0=x_1\\
i=1:&\quad \xi_2-\xi_1=x_2-\frac{M_0}{M_1}x_1\\
i=2:&\quad \xi_3-\xi_2=x_3-\frac{M_1}{M_2}x_2\\
i=3:&\quad \xi_4-\xi_3=x_4-\frac{M_2}{M_3}x_3
\end{aligned}\tag{4.22'}$$

и т.д.

Теперь складываем:

$$\begin{aligned}
i=0:&\quad \xi_1-\xi_0=x_1\\
i=1:&\quad \xi_2-\xi_0=x_2+(1-\frac{M_0}{M_1})x_1=x_2+\frac{m_1}{M_1}x_1\\
i=2:&\quad \xi_3-\xi_0=x_3+\frac{m_1}{M_1}x_1+\frac{m_2}{M_2}x_2\\
&\quad и\quad т.д.\\
i:&\quad \xi_{m+1}-\xi_0=x_{m+1}+\frac{m_1}{M_1}x_1+\ldots+\frac{m_i}{M_i}x_i
\end{aligned}\tag{4.23}$$

(4.23) выражают старые координаты через новые. Теперь мы хотим получить дифференциальное уравнение измснения x_i.

Дифференцируем 2 раза (4.21):

$$M_{i-1}\cdot\frac{d^2x_i}{dt^2}=M_{i-1}\ddot{\xi}_i-\left(m_0\ddot{\xi}_0+\ldots+m_{i-1}\ddot{\xi}_{i-1}\right)\tag{4.23'}$$

Ранее было:

$m_i\ddot{\xi}_i=\frac{\partial U}{\partial\xi_i}$. Выразим $\ddot{\xi}_i=\frac{\partial U}{\partial\xi_i}\cdot\frac{1}{m_i}$.

Тогда (4.23'):

$$M_{i-1}\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{M_{i-1}}{m_i}\cdot\frac{\partial U}{\partial\xi_i}-\left(\frac{m_0}{m_0}\cdot\frac{\partial U}{\partial\xi_0}+\ldots+\frac{m_{i-1}}{m_{i-1}}\cdot\frac{\partial U}{\partial\xi_i}\right)\tag{4.24}$$

Выразим $\frac{\partial U}{\partial\xi_i}$ через $\frac{\partial U}{\partial x}$:

$$\frac{\partial U}{\partial\xi_0}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial U}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial\xi_0}=\frac{\partial U}{\partial x_1}\cdot(-1)+\frac{\partial U}{\partial x_2}\cdot\left(-\frac{m_0}{M_2}\right)+\ldots+\frac{\partial U}{\partial x_{n-1}}\left(-\frac{m_0}{M_{n-2}}\right).$$

Из (4.21): $M_0=m_0$

$$i=1:\qquad M_0x_1=M_0\xi_1-m_0\xi_0\qquad \frac{\partial x_1}{\partial\xi_0}=-1\quad и\quad т.д.$$

$$i=2:\qquad x_2=\xi_2-\frac{m_0}{M_1}\xi_0-\frac{m_1}{M_1}\xi_1$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial\xi_0}=-\frac{m_0}{M_1};\quad \frac{\partial x_i}{\partial\xi_0}=-\frac{m_0}{M_{i-1}}$$

или:

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial U}{\partial \xi_0} = -\dfrac{\partial U}{\partial x_1} - \dfrac{m_0}{M_0}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x_2} - \ldots - \dfrac{m_0}{M_{n-2}}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x_{n-1}} \\
\dfrac{\partial U}{\partial \xi_1} = \dfrac{\partial U}{\partial x_1} - \dfrac{m_1}{M_1}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x_2} - \ldots - \dfrac{m_1}{M_{n-2}}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x_{n-1}} \\
\dfrac{\partial U}{\partial \xi_2} = \underbrace{0}_{\text{ò.ê. } \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}=0 \ (i<k)} + \dfrac{\partial U}{\partial x_2} - \dfrac{m_2}{M_2}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x_2} - \ldots - \dfrac{m_2}{M_{n-2}}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x_{n-1}} \\
\text{___________/___________} \\
\text{___________/___________} \\
\dfrac{\partial U}{\partial \xi_{n-1}} = \dfrac{\partial U}{\partial x_{n-1}}
\end{array}\right. \tag{4.25}$$

Если сложим (4.25):

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{k=0}^{i-1}\dfrac{\partial U}{\partial \xi_k} = -\dfrac{M_{i-1}}{M_{i-1}}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x_i} - \dfrac{M_{i-1}}{M_i}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x_{i+1}} - \ldots - \dfrac{M_{i-1}}{M_{n-2}}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x_{n-1}} \\
\quad \text{Ìîæíî \quad ïîëó÷èòü \quad âûðàæåíèå :} \\
\dfrac{M_{i-1}}{m_i}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial \xi_i} = \dfrac{M_{i-1}}{m_i}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x_i} - \dfrac{M_{i-1}}{M_i}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x_{i+1}} - \ldots - \dfrac{M_{i-1}}{M_{n-2}}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x_{n-1}}
\end{array}\right\} \tag{4.26}$$

Вернёмся к (4.24): (4.26) подставим в (4.24) и получим то, что нам нужно.

(4.24) принимает вид:

$$M_{i-1}\ddot{x}_i = \frac{M_i}{m_i}\cdot\frac{\partial U}{\partial x_i},$$

или преобразуем:

$$\left.\begin{array}{l}
\mu_i \cdot \ddot{x}_i = \dfrac{\partial U}{\partial x_i} \\
\mu_i \cdot \ddot{y}_i = \dfrac{\partial U}{\partial y_i} \\
\mu_i \cdot \ddot{z}_i = \dfrac{\partial U}{\partial z_i}
\end{array}\right\} \tag{4.27}$$

- звездная форма уравнений относительного движения задачи n – тел.

Из них непосредственно можно получить канонические уравнения движения.

<u>Канонические уравнения вида:</u>

$$\left.\begin{array}{l}
\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\
\dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}
\end{array}\right\}; \qquad H = H(q, p, t); \tag{4.28}$$

переходим к новым переменным:

$$x_i = q_{3i-2}; \quad y_i = q_{3i-1}; \quad z_i = q_{3i};$$
$$p_{3i-2} = \mu_i \dot{x}_i; \quad p_{3i-1} = \mu_i \dot{y}_i; \quad p_{3i} = \mu_i \dot{z}_i;$$
$$H = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2\mu_i}\left(p_{3i-2}^2 + p_{3i-1}^2 + p_{3i}^2\right) - U.$$

Получаем уравнения в виде (4.28).

§5. Формула Лагранжа – Якоби

Уравнения абсолютного движения задачи n – тел:

$$\begin{cases} m_i \ddot{\xi}_i = \dfrac{\partial U}{\partial \xi_i} \\ m_i \ddot{\eta}_i = \dfrac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad i = \overline{1, n} \\ m_i \ddot{\zeta}_i = \dfrac{\partial U}{\partial \zeta_i} \end{cases} \tag{4.29}$$

$$U = \aleph^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad — \tag{4.30}$$

- однородная функция степени (-1) для ξ, η, ζ. $\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi_i} \xi_i + \frac{\partial U}{\partial \eta_i} \eta_i + \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \zeta_i \right) = -U \tag{4.31}$$

(по теореме Эйлера)

Умножим (4.29) соответственно на ξ_i, η_i, ζ_i. и почленно складываем и суммируем по i.

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\ddot{\xi}_i \xi_i + \ddot{\eta}_i \eta_i + \ddot{\zeta}_i \zeta_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi_i} \xi_i + \frac{\partial U}{\partial \eta_i} \eta_i + \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \zeta_i \right) = -U \tag{4.32}$$

Уравнение (4.29) имеет интеграл энергии:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2 \right) = U + h \tag{4.33}$$

(4.33) × 2 + (4.32):

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\ddot{\xi}_i \xi_i + \dot{\xi}_i^2 + \ddot{\eta}_i \eta_i + \dot{\eta}_i^2 + \ddot{\zeta}_i \zeta_i + \dot{\zeta}_i^2 \right) = U + 2h \tag{4.34}$$

Слева стоит полная производная:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\dot{\xi}_i \xi_i + \dot{\eta}_i \eta_i + \dot{\zeta}_i \zeta_i \right) \right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2 \right)}_{\text{обозначаем } \bar{j}} \right) \right) = \frac{1}{2} \frac{d^2 \bar{j}}{dt^2} = U + 2h \tag{4.35}$$

Момент инерции системы n тел относительно начала координат:

$$\bar{j} = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2\right) \tag{4.36}$$

Из (4.35) получаем $\frac{d^2\bar{j}}{dt^2} = 2U + 4h$ – формула Лагранжа – Якоби (4.37)

Теорема вириала

В механике вириалом называется:

$$I = -\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\xi_i F_\xi^i + \eta_i F_\eta^i + \zeta_i F_\zeta^i\right) \tag{4.38}$$

где $m_i F_\xi^2$ – компонента силы, действующей на i – ю точку по оси ξ.

Аналогично: $m_i F_\eta^i$; $m_i F_\zeta^i$.

$m_i F_\xi^i, \ldots,$ заменяем на $\frac{\partial U}{\partial \xi}$ и т.д. по теореме Эйлере: $I=U$ в нашем случае.

Введём обозначения:

$$W(t) = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{\xi}_i\xi_i + \dot{\eta}_i\eta_i + \dot{\zeta}_i\zeta_i\right) \tag{4.39}$$

Из (4.35): $$\frac{dW(t)}{dt} = U + 2h \tag{4.40}$$

Интегрируем (4.40) и делим на t:

$$\frac{1}{t}\left(W(t) - W(0)\right) = \frac{1}{t}\int_0^t U dt + 2h \cdot \frac{t}{t} \tag{4.41}$$

Обозначим $\widetilde{U} = \frac{1}{t}\int_0^t U dt$ – среднее значение функции U на $(0, t)$.

Тогда: $$\frac{1}{t}\left(W(t) - W(0)\right) = \widetilde{U} + 2h \tag{4.42}$$

Движение назывется устойчивым по Якоби, если координаты и скорости точек заключено в конечных интервалах. Если движение устойчиво, то левая часть (4.42), при достаточно больших t, стремится к 0. Тогда для достаточно больших t:

$$\widetilde{U} + 2h = 0 \tag{4.43}$$

Запишем интеграл энергии $T - U = h$ и усредним на $(0, t)$:

$$\widetilde{T} - \widetilde{U} = h \tag{4.44}$$

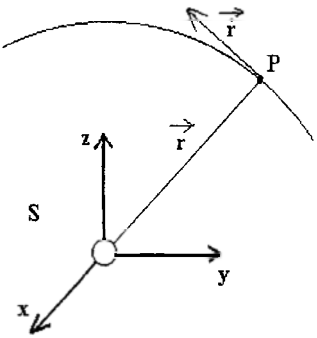
h из (4.44) $\rightarrow$ в (4.43): $\widetilde{U} = -2\widetilde{T} + 2\widetilde{U} \Rightarrow \widetilde{U} = 2\widetilde{T}$ – теорема вириала (4.45)

- среднее значение потенциальной энергии = удвоенному значению кинетической энергии.

§6. Оскулирующие элементы уравнения Эйлера

Определение оскулирующих элементов

Рассмотрим движение тела P с массой m относительно тела S с $m = 1$, и примем тело S за начало прямоугольной инерциальной системы координат. Обозначим $\aleph^2 = f(1+m)$.



Можем записать уравнение относительного движения тела P:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \aleph^2 \dfrac{x}{r^3} = 0 \\ \ddot{y} + \aleph^2 \dfrac{y}{r^3} = 0 \\ \ddot{z} + \aleph^2 \dfrac{z}{r^3} = 0 \end{cases} \qquad (4.46)$$

Если кроме силы притяжения действует еще сила $m\vec{F} = \{mF_x, mF_y, mF_z\}$, ($\vec{F}$ – *возмущающее ускорение*), то уравнения движения:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \aleph^2 \dfrac{x}{r^3} = F_x \\ \ddot{y} + \aleph^2 \dfrac{y}{r^3} = F_y \\ \ddot{z} + \aleph^2 \dfrac{z}{r^3} = F_z \end{cases} \qquad (4.47)$$

В небесной механике (4.46) называют "невозмущенными уравнениями", а соответствующее движение "невозмущенным движением"; а (4.47) – "возмущенными уравнениями" (" – движением").

Допустим, что общее решение (4.46) нам известно:

$$\begin{cases} x = f_1(t, e_1, e_2, \ldots, e_6) \\ y = f_2(t, e_1, e_2, \ldots, e_6) \\ z = f_3(t, e_1, e_2, \ldots, e_6) \end{cases} \qquad (4.48)$$

$e_1,\ldots,e_6$ – произвольные *const*; e_i называются "элементами орбиты" (в качестве каких можно брать, например, $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$; но как правило, берут a, e, i, Ω, ω, T).

Решение уравнений (4.47) также можно искать в виде (4.48), но тогда $e_i = e_i(t)$. Значение этих элементов в какое – то t дают нам "мгновенные элементы". А их совокупность определеяет "мгновенную орбиту" тела в момент t.

Значение элементов орбиты дает возможность вычислять координаты тела P для любого t по формулам Кеплеровского движения.

Подставляя (4.48) в (4.47) получаем 3 уравнения для определения шести e_i. e_i определяются неоднозначно.

Т.к. $e_i = const$, то
$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial f_1}{\partial t} \\ \dot{y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial t} \\ \dot{z} = \dfrac{\partial f_3}{\partial t} \end{cases} \quad (4.49)$$

Вычислим $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ из (3) в случае возмущенного движения, т.е. когда $e_i(t)$

$$\dot{x} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial f_1}{\partial e_i} \cdot \frac{de_i}{dt}.$$

Мы хотим, чтобы скорости также вычислялись по (4.49). $\Rightarrow$ на элементы орбиты надо наложить некоторые условия. Тогда должно быть:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{6} \dfrac{\partial f_1}{\partial e_i} \cdot \dfrac{de_i}{dt} = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{6} \dfrac{\partial f_2}{\partial e_i} \cdot \dfrac{de_i}{dt} = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{6} \dfrac{\partial f_3}{\partial e_i} \cdot \dfrac{de_i}{dt} = 0 \end{cases} \quad (4.50)$$

Если выполняется (4.50), то положения и скорости тела P можно вычислять по формулам Кеплеровского движения.

Оскулирующими элементами для момента t называются такие элементы $e_i(t)$ которые дают положение и скорость для этого момента по формулам невозмущенного движения.

Орбита определяемая оскулирующими элементами, называется оскулирующей орбитой для этого t, а само t называется моментом или эпохой оскуляции.

Если в качестве элементов орбиты возьмем a, e, i, Ω, ω, M_0, Имеют место соотношения:

$$\begin{cases} x = r(\cos u \cdot \cos\Omega - \sin u \cdot \sin\Omega \cdot \cos i) \\ y = r(\cos u \cdot \sin\Omega + \sin u \cdot \cos\Omega \cdot \cos i) \\ z = r(\sin u \cdot \sin i) \end{cases} \quad (4.48'')$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cdot \dfrac{x}{r} + r(-\sin u \cdot \cos\Omega - \cos u \cdot \sin\Omega \cdot \cos i)\dot{u} \\ \dot{y} = \dot{r} \cdot \dfrac{y}{r} + r(-\sin u \cdot \sin\Omega - \cos u \cdot \cos\Omega \cdot \cos i)\dot{u} \\ \dot{z} = \dot{r} \cdot \dfrac{z}{r} + r \cdot \cos u \cdot \sin i \cdot \dot{u} \end{cases} \tag{4.49''}$$

Необходима еще зависимость от t.

$$\begin{cases} n = \aleph a^{-3/2} \\ M = M_0 + n(t - t_0) \\ E - e\sin E = M \\ tg\dfrac{v}{2} = \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\, tg\dfrac{E}{2} \\ u = v + \omega \\ r = a(1 - e\cos E) \end{cases} \tag{4.51}$$

(4.48”), (4.49”), (4.51) позволяют определить положения и скорость по формулам невозмущенного движения.

§7. Вывод дифференциальных уравнений, описывающих изменение оскулирующих элементов

Можем взять соотношения (4.48) и (4.49) и подставить их в (4.47) и (4.50). Получим 6 уравнений, разрешимых относительно оскулирующих элементов и получим то, что надо. Но изберем другой путь.

Обозначим: $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ — координаты и скорости при возмущенном движении, а $x', y', z', \dot{x}', \dot{y}', \dot{z}'$ – координаты и скорости фиктивной точки, движущейся по оскулирующей орбите. Тогда эти координаты удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{dx'}{dt} = \dot{x}'; \quad \frac{d\dot{x}'}{dt} = -\aleph^2 \frac{x'}{(r')^3} \tag{4.52}$$

В момент оскуляции выполняется:

$$x = x', \ldots\ldots, \dot{z} = \dot{z}', \quad r = r' \tag{4.53}$$

На основании (4.53) и (4.47) можно записать:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt}; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} \\ \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}'}{dt} + F_x; \quad \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{d\dot{y}'}{dt} + F_y; \quad \frac{d\dot{z}}{dt} = \frac{d\dot{z}'}{dt} + F_z \end{aligned}\right\} \tag{4.54}$$

Запишем первый интеграл уравнений невозмущенного движения (4.52) в виде:

$$\Psi(e_1, e_2, \ldots, e_6, x', \ldots, \dot{z}', t) = 0 \tag{4.55}$$

Тот же интеграл выполняется и для возмущенного движения:

$$\Psi(e_1, e_2, \ldots, e_6, x, \ldots, \dot z, t) = 0 \tag{4.56}$$

Продифференцируем (4.55) и (4.56) по t.

(*а*) $$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial x'}\cdot\frac{dx'}{dt} + \ldots + \frac{\partial\Psi}{\partial \dot z'}\cdot\frac{d\dot z'}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial t} = 0$$

(*б*) $$\frac{d\Psi}{dt} = \sum_{i=1}^{6}\frac{\partial\Psi}{\partial e_i}\cdot\frac{de_i}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \ldots + \frac{\partial\Psi}{\partial \dot z}\cdot\frac{d\dot z}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial t} = 0$$

Из (*б*) вычитаем (*а*), и учитываем (4.54):

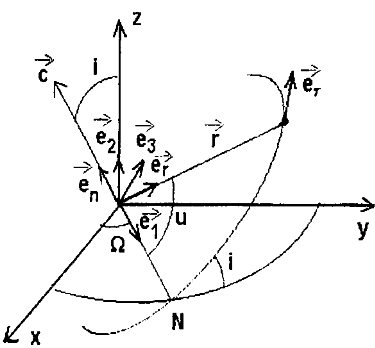
$$\sum_{i=1}^{6}\frac{\partial\Psi}{\partial e_i}\cdot\frac{de_i}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial \dot x}\cdot F_x + \frac{\partial\Psi}{\partial \dot y}\cdot F_y + \frac{\partial\Psi}{\partial \dot z}\cdot F_z = 0 \tag{4.57}$$

В векторном виде: $\Psi(e_1, \ldots, e_6, \vec r, \dot{\vec r}, t) = 0$

$$\sum_{i=1}^{6}\frac{\partial\Psi}{\partial e_i}\cdot\frac{de_i}{dt} - \frac{\partial\Psi}{\partial \dot{\vec r}}\cdot\vec F = 0 \tag{4.58}$$

Переход от (4.56) к (4.57) называется основной операцией. Для получения этих уравнений достаточно 6 первых интегралов. Координаты и скорости $x, y, z, \dot x, \dot y, \dot z$ могут быть исключены из (4.47), (4.48) с помощью соотношений (4.48) и (4.49). В качестве элементов орбиты возьмем a, e, i, Ω, ω, M_0, и получим для них дифференциальные уравнения.

<u>*p, Ω, i*</u>



$$\vec r \times \dot{\vec r} = \vec c \tag{4.59}$$

$\vec c \perp$ к орбите. $\vec e_\tau \perp \vec e_r$. $\vec c = \aleph\sqrt{p}\,\vec e_n$. $\vec e_3 \subset$ в плоскости орбиты и $\vec e_3 \perp \vec e_n$, $\vec e_3 \perp \vec e_1$.

Тогда:

$$\aleph\sqrt{p}\,\vec e_n = \vec r \times \dot{\vec r} \tag{4.59'}$$

У нас было (основная операция): $\{\Psi(e_i, \vec r, \dot{\vec r}, t) = 0\}$

$$\sum\frac{\partial\Psi}{\partial e_i}\cdot\frac{de_i}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial \dot{\vec r}}\cdot\vec F = 0$$

Вычислим первый член. Дифференцируем (1'):

$$\aleph\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt p}\cdot\vec e_n\cdot\frac{dp}{dt} + \aleph\sqrt{p}\cdot\frac{d\vec e_n}{dt} = \vec r\times\vec F \tag{4.60}$$

$\dfrac{d\vec e_n}{dt} = \vec\beta\times\vec e_n$; $\vec\beta$ – вектор угловой скорости, описывающий вращение $\vec e_n$ изменяющийся за счет изменения углов Ω и i.

$$\vec{\beta} = \frac{di}{dt}\cdot\vec{e}_1 + \frac{d\Omega}{dt}\cdot\vec{e}_2$$

$$\frac{d\vec{e}_n}{dt} = \frac{di}{dt}\vec{e}_1\times\vec{e}_n + \frac{d\Omega}{dt}\vec{e}_2\times\vec{e}_n = -\frac{di}{dt}\vec{e}_3 + \frac{d\Omega}{dt}\vec{e}_1\cdot\sin i \tag{4.61}$$

$\vec{F}$ представим в виде: $\vec{F} = S\cdot\vec{e}_r + T\cdot\vec{e}_\tau + W\cdot\vec{e}_n$

$$\vec{r}\times\vec{F} = r\cdot\vec{e}_r\times\left(S\cdot\vec{e}_r + T\cdot\vec{e}_\tau + W\cdot\vec{e}_n\right) = r\cdot T\cdot\vec{e}_n - r\cdot W\cdot\vec{e}_\tau \tag{4.62}$$

(4.61) и (4.62) → в (4.60).

$$\aleph\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{p}}\cdot\frac{dp}{dt}\vec{e}_n + \aleph\sqrt{p}\left(-\frac{di}{dt}\vec{e}_3 + \frac{d\Omega}{dt}\sin i\cdot\vec{e}_1\right) = r\cdot T\,\vec{e}_n - r\cdot W\,\vec{e}_\tau \tag{4.63}$$

Проектируем это на:

$\vec{e}_n$, получим $\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{2\sqrt{p}rT}{\aleph} = 2prT'$, где $T' = \dfrac{T}{\aleph\sqrt{p}}$;

$\vec{e}_1$: $\dfrac{d\Omega}{dt}\sin i = -\dfrac{rW}{\aleph\sqrt{p}}(-\sin u) = r\sin u\,W'$, $W' = \dfrac{W}{\aleph\sqrt{p}}$;

$\vec{e}_3$: $\dfrac{di}{dt} = r\cdot\cos u\cdot W'$.

Итого:
$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = 2prT' \\ \dfrac{d\Omega}{dt}\sin i = r\cdot\sin u\cdot W' \\ \dfrac{di}{dt} = r\cdot\cos u\cdot W' \end{cases} \tag{4.64}$$

<u>*a, e*</u>

Интеграл энергии $\aleph^2\left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{1}{a}\right) = \left(\dot{\vec{r}}\right)^2$. Применяем основную операцию:

$$\aleph^2\frac{1}{a^2}\cdot\frac{da}{dt} = 2\dot{\vec{r}}\cdot\vec{F} \qquad \dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\cdot\dot{\upsilon}\cdot\vec{e}_\tau$$

$$\aleph^2\frac{1}{a^2}\cdot\frac{da}{dt} = 2\cdot\dot{r}\,S + 2\,r\,\dot{v}\,T\,,$$

$$\dot{r} = \frac{\aleph\,\ell\sin v}{\sqrt{p}};\quad \dot{v} = \frac{\aleph\sqrt{p}}{r^2}.$$

$$\frac{da}{dt} = 2a^2 e\sin v\cdot S' + 2a^2 p\cdot r^{-1}\cdot T' \tag{4.65}$$

$$p = a(1-e^2),$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{da}{dt}\left(1-e^2\right) - 2ae\frac{de}{dt} \quad\Rightarrow\quad \frac{de}{dt} = \frac{1}{2ae}\left(\left(1-e^2\right) - \frac{dp}{dt}\right) \tag{4.66}$$

(4.64), (4.65) → (4.66), учитывая $r = a\,(1 - e\cos E)$ и $\dfrac{p}{r} = 1 + e\cos v$:

$$\frac{de}{dt}\; p\sin v\, S' + p\,(\cos v + \cos E)\, T' \qquad (4.67)$$

$$\underline{\omega}$$

$$r\cdot\cos u = x\cdot\cos\Omega + y\sin\Omega \qquad (4.68)$$

Применяем основную операцию. Но сначала:

$$u = v + \omega\,; \qquad v = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) \;\rightarrow\; \frac{\aleph}{\sqrt{p}}\sin v\cdot e = \dot{r} = \frac{\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}}{r} \qquad (4.69)$$

($\dot{r}$ – это проекция скорости на $\vec{r}$, а не модуль скорости)

Обозначим $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ производную от истинной аномалии по t, взятую через посредство оскулирующих элементов:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \left(\frac{dv}{dt}\right) = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum\frac{\partial v}{\partial e_i}\frac{de_i}{dt}.$$

Вот теперь применим к (4.68) основную операцию.

$$-r\sin u\left(\frac{d\omega}{dt} + \left(\frac{dv}{dt}\right)\right) = \left(-x\sin\Omega + y\cos\Omega\right)\frac{d\Omega}{dt} \qquad (4.70)$$

Воспользуемся:

$r\sin u = \dfrac{(y\cos\Omega - x\sin\Omega)}{\cos i}$ (из вычисления прямоугольных координат задачи 2^{x} тел)

Тогда (4.70) $\rightarrow$ $\dfrac{d\omega}{dt} = -\left(\dfrac{dv}{dt}\right) - \cos i\,\dfrac{d\Omega}{dt}$ (4.71)

Из (4.69): $\dot{r}\cdot ctg\, v = \dfrac{\aleph}{\sqrt{p}}\, e\cos v$. $\quad r = \dfrac{p}{1 + e\cos v} \Rightarrow e\cos v = \dfrac{p}{r} - 1$. Тогда

$\dot{r}\; ctg\, v = \dfrac{\aleph\sqrt{p}}{r} - \dfrac{\aleph}{\sqrt{p}}$ умножим на r.

$$r\cdot\dot{r}\; ctg\, v = \aleph\sqrt{p} - \frac{\aleph}{\sqrt{p}}\cdot r \qquad (4.72)$$

Применим основную операцию. (слева будет $\dfrac{d}{d\dot{r}}$)

$$\vec{r}\cdot\vec{F}\cdot ctg\, v - \frac{r\cdot\dot{r}}{\sin^2 v}\cdot\left(\frac{dv}{dt}\right) = \left(\frac{1}{2}\aleph\cdot\frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{r}\aleph\cdot\frac{1}{p^{3/2}}\, r\right)\frac{dp}{dt} = \frac{\aleph}{2\sqrt{p}}\left(1 + \frac{r}{p}\right)\cdot\frac{dp}{dt} \qquad (4.73)$$

$$\vec{r}\cdot\vec{F} = r\cdot S, \quad \frac{dp}{dt} = 2\,p\,r\,T'.$$

$$\frac{\dot{r}}{\sin^2 v} = \frac{\aleph}{\sqrt{p}}\cdot\frac{e\sin v}{\sin^2 v} = \frac{\aleph\, e}{\sqrt{p}\sin v}.$$

$$r \cdot S \cdot ctg\, v - r\,\frac{\aleph}{\sqrt{p}} \cdot e\left(\frac{dv}{dt}\right)\sin^{-1} v = \frac{\aleph}{2\sqrt{p}}\left(1+\frac{r}{p}\right)\cdot 2\; p\, r\, T'.$$

$$e\left(\frac{dv}{dt}\right) = p\cos v \cdot \frac{S}{\aleph\sqrt{p}} - (p+r)\sin v\, T'.$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{e}\left[-p\cdot\cos v\cdot S' + (p+r)\cdot\sin v\, T'\right] - \cos i\,\frac{d\Omega}{dt} \qquad (4.74)$$

$\underline{M_0}$

$$\begin{cases} M = E - e\sin E \\ r = a\,(1 - e\cos E) \end{cases}$$

Применяем основную операцию:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dM}{dt}\right) = \left(\dfrac{dE}{dt}\right)(1 - e\cos E) - \sin E\cdot\dfrac{de}{dt} \\ \dfrac{r}{a}\cdot\dfrac{da}{dt} = a\cos E\,\dfrac{de}{dt} - e\sin e\left(\dfrac{dE}{dt}\right) \end{cases}$$

Исключая $\left(\dfrac{dE}{dt}\right)$, получим: $\dfrac{e}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\left(\dfrac{dM}{dt}\right) = ctg\, v\,\dfrac{de}{dt} - \dfrac{r}{a^2\cdot\sin v}\cdot\dfrac{da}{dt}$.

Подставляя $\dfrac{de}{dt}$ и $\dfrac{da}{dt}$:

$$\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\left(\frac{dM}{dt}\right) = (p\cdot\cos v - 2\,e\,r)\,S' + \frac{p}{\sin v}\left(\cos^2 v + \cos v\cdot\cos E - 2\right)T' \qquad (4.75)$$

Преобразовывая, исключим $\cos v\cos E$. Рассмотрим:

$$\begin{cases} r = a\,(1 - e\cos E) \\ \dfrac{p}{r} = 1 + e\cos v \end{cases} \rightarrow \text{перемножим} \;\Rightarrow\; p = a\,(1 - e\cos E)\,(1 - e\cos v).$$

$$\cos E = \frac{e+\cos v}{1+e\cos v}; \qquad \cos E\cdot\cos v = \frac{e\cos v + 1 - \sin^2 v}{1 + e\cos v} = 1 - \frac{p}{r}\sin^2 v.$$

Подставим в (4.75):

$$\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{dM}{dt}\right) = (p\cos v - 2\,e\,r)\,S' - (r+p)\sin v\, T' \qquad (4.76)$$

$$\left(\frac{dM}{dt}\right) = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\left[(p\cos v - 2\,e\,r)\,S' - (r+p)\sin v\, T'\right]$$

$$M = M_0 + n\,(t - t_0) \qquad (4.77)$$

Дифференцируем по t:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dM_0}{dt} + \frac{dn}{dt}(t - t_0) + n \qquad (4.78)$$

Теперь дифференцируем посредством оскулирующих элементов:

$$\left(\frac{M}{dt}\right) = \frac{dM_0}{dt} + \frac{dn}{dt}(t - t_0) \qquad (4.79)$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dt} = \left(\frac{dM}{dt}\right) + n \qquad (4.80)$$

Интегрируем (4.80) $\int\limits_{t_0}^{t}$:

$$M(t) = M(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t}\left(\frac{dM}{dt}\right)dt + \int\limits_{t_0}^{t} ndt \qquad (4.81)$$

$n = f(t)$ для возмущенного движения.

Вводим новый элемент (в качестве 6-го элемента орбиты):

$$\overline{M}_0 = M(t_0) + \int\limits_{t}^{t}\left(\frac{dM}{dt}\right)dt \qquad (4.82)$$

Тогда (4.81): $$M(t) = M_0 + \int\limits_{t_0}^{t} ndt \qquad (4.83)$$

Тогда: $$\frac{d\overline{M}_0}{dt} = \left(\frac{dM}{dt}\right) = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\left[(p \cdot \cos v - 2\,e\,r)\,S' - (r + p)\sin v\,T'\right] \qquad (4.84)$$

Таким образом, получили уравнения для определения оскулирующих элементов a, e, i, Ω, ω, M_0,: (4.64), (4.65), (4.67), (4.74), (4.84) $\rightarrow$ полная система дифференциальных уравнений для определения оскулирующихэлементов в возмущенном движении.

После того, как система решена, средняя аномаоия вычисляется:

$$M = \overline{M}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} n\,dt, \quad n = \frac{\aleph}{a^{3/2}}.$$

Элементы, удобные при малых i и ℓ

Малые i и e дают особенности (в знаменателе). Вводят в этих случаях следующие оскулирующие элементы.

Введем долготу перицентра: $\pi = \Omega + \omega$ (4.85)

Можно подсчитать: $e\dfrac{d\pi}{dt} = \ldots\ldots$

Введем среднюю долготу: $$\lambda = \pi + M = \Omega + \omega + M \qquad (4.86)$$

$$\lambda = \pi + \overline{M}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} ndt = \varepsilon + \int\limits_{t_0}^{t} ndt \qquad (4.87)$$

$\varepsilon = \pi + \overline{M}_0 \rightarrow$ средняя долгота эпохи.

Этими двумя уравнениями ($\dfrac{d\varepsilon}{dt}$ и $\dfrac{d\pi}{dt}$) заменяют уравнения для ω и M_0 (исключая особенности с малым i).

Особенности, связанные с e : вместо e и π вводят h и k с помощью

$$h = e\sin\pi; \qquad k = e\cos\pi \qquad (4.88)$$

Уравнения Лагранжа для оскулирующих элементов

Выводятся для случая, когда возмущающее ускорение $\bar{F}$ имеет потенциал R:

$$F_x = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial R}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Уравнение Лагранжа: в правой части вместо T' и т.д. стоят $\frac{\partial R}{\partial e_i}$

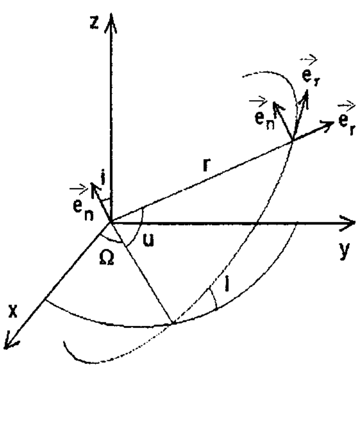
Нужно выразить $T' = T'\left(\frac{\partial R}{\partial e_i}\right)$ и т.д.

Пусть $R = R\,(x, y, z)$

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{\partial R}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial a}, \text{ и т.п.}$$

$$T = \frac{T}{\aleph\sqrt{p}}, \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{\aleph\sqrt{p}}\cdot\frac{\partial R}{\partial a} = F_x'\cdot\frac{\partial x}{\partial a} + F_y'\cdot\frac{\partial y}{\partial a} + F_z'\cdot\frac{\partial z}{\partial a}.$$



Нам еще нужна зависимость: $\begin{pmatrix} F_x' \\ F_y' \\ F_z' \end{pmatrix} = \bar{M}\begin{pmatrix} S' \\ T' \\ W' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

нужно преобразование от XYZ к e_r, e_n, e_τ

$$\vec{e}_\tau \perp \vec{e}_r$$

Запишем формулы вычисления прямоугольных координат:

$$\begin{cases} x = r\left(\cos u\cdot\cos\Omega - \sin u\cdot\sin\Omega\cdot\cos i\right) \\ y = r\left(\cos u\cdot\sin\Omega + \sin u\cdot\cos\Omega\cdot\cos i\right) \\ z = r\cdot\sin u\cdot\sin i \end{cases} \tag{4.89}$$

$$u = v + \omega$$

$a, e, i, \Omega, \omega, \bar{M}_0$ – наши оскулирующие элементы.

Производные от x, y, z по i, Ω, ω находятся обычным дифференцированием (4.89).

Теперь выразим r, u через a, e, $\bar{M}_0$:

$$\begin{cases} r = a(1 - e\cos E) \\ E - e\sin E = \overline{M}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} n\,dt \\ tg\dfrac{v}{2} = \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}} \cdot tg\dfrac{E}{2} \end{cases} \qquad (4.90)$$

причем $E = E(\overline{M}_0, e, t)$.

При вычислении $\dfrac{\partial}{\partial a}$ не нужно учитывать зависимость n=n(a), т.к. эта зависимость вошла в оскулирующий элемент $\overline{M}_0$.

Дифференцируем (4.90) по e:

$$\frac{\partial E}{\partial e} - \sin E - e \cdot \cos E \cdot \frac{\partial E}{\partial e} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial e} = \frac{\sin E}{1 - e\cos E}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \overline{M}_0} - e\cos E \frac{\partial E}{\partial \overline{M}_0} = 1; \qquad \frac{\partial E}{\partial \overline{M}_0} = \frac{1}{1 - e\cos E}$$

$$\frac{\partial r}{\partial a} = 1 - e\cos E = \frac{r}{a}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial r}{\partial e} = -a\cos E + ae\sin E \cdot \frac{\partial E}{\partial e} = -a\frac{\cos E - e}{1 - e\cos E} = -a\cos\vartheta$$

т.к.имеет место: $\cos\vartheta = \dfrac{\cos E - e}{1 - e\cos E}$, то

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1 - e\cos E} \qquad (4.91)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial \overline{M}_0} = ae\sin E \dfrac{\partial E}{\partial \overline{M}_0} = ae\dfrac{\sin E}{1 - e\cos E} = \dfrac{ae}{\sqrt{1-e^2}}\sin\vartheta \\ \dfrac{\partial \vartheta}{\partial e} = (\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{\rho})a\sin\vartheta \\ \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \overline{M}_0} = \dfrac{a\sqrt{1-e^2}}{r^2} \end{cases} \qquad (4.92)$$

В конце концов, получаем:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial R}{\partial a} = n \cdot a^2\sqrt{1-e^2} \cdot S' \\
\dfrac{\partial R}{\partial e} = \dfrac{na^2}{\sqrt{1-e^2}}\left[-\rho\cdot\cos\vartheta\cdot S' + (r+\rho)\cdot\sin\vartheta T'\right] \\
\dfrac{\partial R}{\partial i} = na^2\sqrt{1-e^2}\cdot r\cdot\sin u\cdot W' \\
\dfrac{\partial R}{\partial \Omega} = na^2\sqrt{1-e^2}(\cos i\cdot r\cdot T' - \sin i\cdot r\cdot\cos u\cdot W') \\
\dfrac{\partial R}{\partial \omega} = na^2\sqrt{1-e^2}\cdot r\cdot T' \\
\dfrac{\partial R}{\partial M_0} = na^3(e\sin\vartheta\cdot S' + \rho r^{-1}\cdot T')
\end{cases}
\tag{4.93}
$$

Отсюда теперь нужны T', S', и W как функции от $\dfrac{\partial R}{\partial e_i}$.

Это делается не в лоб, а берутся уравнения Эйлера и подбираются комбинации.

$\sin i\dfrac{d\Omega}{dt} = r\cdot\sin u\cdot W'$ т.о., сравнивая

$\dfrac{d\Omega}{dt} = \dfrac{1}{\sin i}\cdot\underbrace{r\cdot\sin u\cdot W'}_{=\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\partial R}{\partial i}}$, уравнения Эйлера и уравнения (4.93),

$r\sin u\cdot W' = \dfrac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}}\dfrac{\partial R}{\partial i}$ получаем уравнения

Лагранжа

$$
\begin{cases}
\dfrac{da}{dt} = \dfrac{2}{na}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial M_0} \\
\dfrac{de}{dt} = \dfrac{1-e^2}{en\cdot a^2}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial M_0} - \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{en\cdot a^2}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial\omega} \\
\dfrac{di}{dt} = \dfrac{ctgi}{na^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial\omega} - \dfrac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial\Omega} \\
\dfrac{d\Omega}{dt} = \dfrac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial i} \\
\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial e} - \dfrac{ctgi}{na^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial i} \\
\dfrac{d\overline{M_0}}{dt} = -\dfrac{2}{na}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial a} - \dfrac{1-e^2}{ena^2}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial e}
\end{cases}
\tag{4.94}
$$

Интегралные уравнения Лагранжа, и получив оскулирующие элементы, по формулам Кеплеровского движения, получаем $\vec{r}$ и $\vec{\vartheta}$.

Свойства:

1) время входит через производные от R
2) элементы орбиты разбиты на 2 группы; a,e,i, $\overline{\Omega,\omega,M_0}$

Дифференциюшие уравнения для элементов одной группы содержат только частные производные от R по элементам другой группы.

§8. Канонические элементы

Специальным образом выбранные оскулирующие элементы. Теория канонических уравнений. Пусть движение механических системы описывается канонические уровнями.

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial \rho i}, \quad \dot{\rho} i = -\frac{\partial H}{\partial qi}, \quad (i = \overline{1,n}) \tag{4.95}$$

Запишем дифференциальное уравнения Якоби в частных производных.

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H(t, q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial qn}) = 0 \tag{4.96}$$

(W – неизвестная функция). Получается из H=H(t,q,p) заменой $\rho i = \dfrac{\partial W}{\partial qi}$

Если $W=W(t,q_1,\ldots,q_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)+\alpha_{n+1}$ является полным интегралом уравнения (4.96), где $\overline{\alpha_1,\alpha_{n+1}}$ -некоторые произвольные const, то решение (общее) (4.95) дается 2п первыми интегралами вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial qi} &= \rho i \\ & \qquad (i = \overline{1,n}) \\ \frac{\partial W}{\partial \alpha i} &= \beta i \end{aligned} \tag{4.97}$$

Это позволяет выразить

$$\begin{aligned} qi &= qi(t, \alpha_i, \beta_i) \\ \rho_i &= \rho_i(t, \alpha_i, \beta_i) \end{aligned} \tag{4.98}$$

Метод вариаций произвольых постоянных

Считаем, что, кроме всех сил, действуют дополнительные возмущающие силы с потенциалом R. Тогда уравнения движения примут вид:

$$\dot{q} = \frac{\partial(H - R)}{\partial \rho i}, \qquad \dot{\rho} i = \frac{\partial(H - R)}{\partial qi} \tag{4.99}$$

H – гамильтониан исходной системы.

Пусть мы интеграли систему при R=0 и решением является (4.98). Допустим: R≠0 и рассмотрим (4.98)как замену переменных: $\rho_i, q_i \to \beta_i$

α_i и подставляем в (4.99). Получим уравнение в переменных α и β .Уравнения (4.99) принимают вид:

$$\frac{d\alpha i}{dt}=\frac{\partial R}{\partial \beta i};\qquad \frac{d\beta i}{dt}=\frac{\partial R}{\partial \alpha i} \tag{4.100}$$

Получение (4.100) называется метод вариации произв.постоянных $\Rightarrow$ у нас это уравнения для оскулирующих элементов α и β .

Например: $\alpha_1=\frac{x^2}{2a},\quad \alpha_2=x\sqrt{\rho}\cos i,\quad \alpha_3=x\sqrt{\rho}$

$\beta_1=T\quad,\quad \beta_2=\Omega,\qquad \beta_3=\omega=\pi-\Omega$

§9. Канонические элементы Делоне и Пуанкаре

В виду громоздкати уровнений Лагранжа для оскулирующих элементов имеет смысл ввести новые элементы, в которых эти уровнения имеют вид канонических уровнений.

По смыслу можно разделять элементы на 2 группы:

I. a,e,i

II.M,W

Причем производные по t от элементов I пропорциональны производным от R по элементом II.

$$\begin{cases} \dot a=\dfrac{2\sqrt{a}}{x}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial M} \\ \dot e=\dfrac{1-e^2}{xe\sqrt{a}}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial M}-\dfrac{1-e^2}{xe\sqrt{a}}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial \omega} \\ \dot i=\dfrac{\mathrm{ctg}\, i}{x\sqrt{\rho}}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial \omega}-\dfrac{1}{x\sin i\sqrt{\rho}}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial \Omega} \end{cases} \tag{4.101}$$

Лучше ввести: $\left.\begin{matrix} L_1,L_2,L_3 \\ \partial_1,\partial_2,\partial_3 \end{matrix}\right\}: \begin{cases} \dfrac{dL}{dt}=\dfrac{\partial R}{\partial \partial} \\ \dfrac{\partial\partial}{dt}=-\dfrac{\partial R}{\partial L} \end{cases}$

Пусть L=L(a,e,i), а $\partial=\partial(M,\omega,\Omega)$

$$\frac{dL_1}{dt}=\frac{\partial L_1}{\partial a}\cdot\dot a+\frac{\partial L_1}{\partial e}\cdot\dot e+\frac{\partial L_1}{\partial i}\cdot\dot i=\frac{\partial R}{\partial M}$$

Подставляем $(\dot a,\dot e,\dot i)$ из (4.101):

$$\frac{\partial L_1}{\partial a}\left(\frac{2\sqrt{a}}{x}\cdot\frac{\partial R}{\partial M}\right)+\frac{\partial L_1}{\partial e}\left(\frac{1-e^2}{xe\sqrt{a}}\cdot\frac{\partial R}{\partial M}-\ldots\right)+\frac{\partial L_1}{\partial i}(-\cdot\cdot-)=\frac{\partial R}{\partial M}$$

Делоне считал, что $L_1=L_1(a)$. Тогда получаем:

$$\frac{\partial L_1}{\partial a}\left(\frac{2\sqrt{a}}{x}\cdot\frac{\partial R}{\partial M}\right)=\frac{\partial R}{\partial M}\Rightarrow\frac{\partial L_1}{\partial a}=\frac{x}{2\sqrt{a}}\Rightarrow$$

$L_1 x\sqrt{a}+f_1$

(частный случай $f_1=0$).

Далее:

$$\frac{\partial L_2}{\partial t}=\frac{\partial L_2}{\partial a}\cdot\dot{a}+\frac{\partial L_2}{\partial e}\cdot\dot{e}+\frac{\partial L_2}{\partial i}\cdot\dot{i}=\frac{\partial R}{\partial \omega}$$

Действуя аналогично, получаем с учетом (4.101) уравнение для L_2
Теперь полагаем, что $L_2=L_2(a,e)$.

$$\frac{\partial L_2}{\partial a}\left(\frac{2\sqrt{a}}{x}\cdot\frac{\partial R}{\partial M}\right)+\frac{\partial L_2}{\partial e}\left(\frac{1-e^2}{xe\sqrt{a}}\cdot\frac{\partial R}{\partial M}-\frac{\sqrt{1-e^2}}{xe\sqrt{a}}\cdot\frac{\partial R}{\partial \omega}\right)=\frac{\partial R}{\partial \omega}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial L_2}{\partial e}=-\left[\frac{\sqrt{1-e^2}}{ex\sqrt{a}}\right]^{-1}\\ \frac{2\sqrt{a}}{x}\cdot\frac{\partial L_2}{\partial a}+\frac{1-e^2}{xe\sqrt{a}}\cdot\frac{\partial L_2}{\partial e}=0\end{gathered}\qquad(4.102)$$

из верхнего уравнения (4.102) $L_2=x\sqrt{a}\cdot\sqrt{1-e^2}+f_2(a)$ $\rightarrow$ в нижнее уравнение (4.102) $\frac{\partial f_2}{\partial a}=0\rightarrow f_2=\mathrm{const}$ и т.д. для L_3

§10. Разложение пертурбационной функции в ряд

Разложение по степеням взаимной наклонности

При изучении возмущающего движения пертурбационную функцию всегда представлять в виде ∞ ряда. Нам известно, что движение планет относительно солнца определяются 12-ю уровнениями (если рассматриваем 2 планеты).

Элементы орбита: a,e,i,Ω,ω,M_0

Для $\forall$ элементы есть уравнение, например: $\frac{da}{dt}=\frac{2}{na}\cdot\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$

$$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\partial R}{\partial i}$$ и т.д.

$$\left.\begin{aligned}R&=K^2\cdot m'\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{x\cdot x'+y\cdot y'+z\cdot z'}{r'^3}\right)\\ R'&=k^2 m\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{x\cdot x'+y\cdot y'+z\cdot z'}{r^3}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(4.103)$$

$\{x,y,z\}$ – координаты планеты.

$\vec{r}$ - радиус-вектор планеты.

Δ - расстояние м/у планетами.

$$R = k^2 \cdot m' \cdot R_{0,1}$$

$$R' = k^2 \cdot m \cdot R_{1,0}$$

Необходимо получить аналитические выражения для R и R, чтобы дифференцующие уравнения, могли быть про $\int$ - ны в общем виде.

Разложим $\frac{1}{\Delta}$

$$x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z' = r \cdot r' \cos H$$

$$\Delta^{-1} = (r^2 + r'^2 - 2r \cdot r' \cos H)^{-1/2} \qquad (4.104)$$

$$H = \left(\widehat{\vec{r}, \ \vec{r}'}\right)$$

-проекции на гелиоцентрическую небесную сферу орбит планет.

$$N \overset{\cup}{\cdot} N_0 = N, \quad N' \overset{\cup}{} N_0 = N',$$

Обозначим $\qquad NN' = \Omega' - \Omega$

$$\grave{E}\c{c} \quad \Delta NN_0N'$$

Образованного тремя узлами, получим:

$$\begin{cases} \sin Y \cdot \sin N = \sin i \cdot \sin(\Omega' - \Omega) \\ \sin Y \cdot \cos N = \cos i' \cdot \sin i - \sin i' \cdot \sin i \cdot \cos(\Omega' - \Omega) \\ \cos Y = \cos i' + \sin i' \cdot \sin i \cdot \cos(\Omega' - \Omega) \\ \sin Y \cdot \sin N' = \sin i \cdot \sin(\Omega' - \Omega) \\ \sin Y \cdot \cos N' = -\cos i' \cdot \sin i + \sin i' \cdot \cos i \cdot \cos(\Omega' - \Omega) \end{cases} \qquad (4.105)$$

Можно отсюда найти $\hat{Y}$ и вспомогательные величины N и N'.

Полагая: $\left.\begin{matrix} \tau = \Omega + N \\ \tau' = \Omega' + N' \end{matrix}\right\} \qquad (4.106)$

Будем иметь: $\left.\begin{matrix} w = \tau + W \\ w' = \tau' + W' \end{matrix}\right\} \qquad (4.107)$

где w, w'- долготы рассматриваемых планетов их орбитах.

W, W' –долготы планет, отсчит-е от т.N_0.

$$\begin{aligned}&\Delta N_0 P\cdot P^{/} : \cos H = \cos W \cos W^{/} + \sin W\cdot \sin W^{/}\cdot \cos Y\\ &\text{или}\qquad \cos H = \cos(W^{/} - W) - 2\delta^2 \sin W\cdot \sin W^{/}\end{aligned}\tag{4.108}$$

где $\delta = \sin\frac{Y}{2}$

(4.108)→в (4.104),и запишем разложение в виде:

$$\Delta^{-1} = \Delta_0^{-1}\cdot(1+\beta)^{-1/2}\tag{4.109}$$

$$\text{где}\quad \Delta_0^{-1} = \left[r^2 + r^{/2} - 2r\cdot r\cdot\cos(W^{/} - W)\right]^{-1/2}\tag{4.110}$$

$$a\beta = \left\{1 + \frac{4\delta^2\cdot r\cdot r^{/}\cdot\sin W\cdot\sin W^{/}}{r^2 + r^{/2} - 2r\cdot r^{/}\cos(W - W^{/})}\right\}\tag{4.111}$$

Если $|\beta|<1$ (для больших планет солнца системы.), формула бинома Ньютона дает нам следующие выражение:

$$\left.\begin{aligned}\Delta^{-1} &= \Delta_0^{-1} - r\cdot r^{/}\cdot\Delta_0^{-3}\cdot 2\delta^2\cdot\sin W\cdot\sin W^{/} +\\ &+ r^2\cdot r^{/2}\cdot\Delta_0^{-5}\cdot 6\delta^4\cdot\sin^2 W\cdot\sin^2 W^{/} -\\ &- r^3\cdot r^{/3}\cdot\Delta_0^{-7}\cdot 20\delta^2\cdot\sin^3 W\cdot\sin^3 W^{/}\ldots\end{aligned}\right\}\tag{4.112}$$

Для больших планет членов достаточно. Но нас ещё интересуют вторые части пертурбационных функции:

$$R_1 = \frac{r\cos H}{r^{/2}}\quad\text{и}\quad R_1^{/} = \frac{r^{/}\cdot\cos H}{r^2}.\tag{4.113}$$

Если вспомнить (4.108), то

$$\left.\begin{aligned}r^{/}\cdot R_1 &= \frac{r}{r^{/}}\left[\cos(W^{/} - W) - \delta^2\cdot\cos(W^{/} - W) + \delta^2\cdot\cos(W^{/} - W)\right]\\ r^{/}\cdot R^{/}_1 &= \left(\frac{r}{r^{/}}\right)^2\cdot\left[(1-\delta^2)\cos(W - W^{/}) + \delta^2\cos(W^{/} + W)\right]\end{aligned}\right\}\tag{4.114}$$

Чтобы от разложение пертубационных функции в (4.112) и (4.114) перейти к окончат. виду, необходимо выразить координаты планет через элементы орбиты.

Если исключить R,то для $\forall$ пары остальных больших планет $|\beta|<0{,}04$ и можно полезоваться разложением. Т.о., всех этих случаях, ряд (4.112) сходится очень быстро.

Для R и $\overset{\uparrow\uparrow\uparrow}{O}$, $|\beta|<1$ не соблюдается и ряд (4.112)-расходится.

Для R и $\odot^{\nearrow}$ ряд (4.112) сходится, но очень медленно. В таких случаях пользуются другими методами разложения R в ряд.

§11. Случай круговых орбит

Рассматриваем сначала ту часть разложения R, к-я не зависит от е-в планетных орбит. Если $e=e^{/}=0$, то $r=a$, $W=\lambda$,

$r^{/}=a$, $W^{/} = \lambda^{/}$,

Где λ и λ' - ср.долготы в орбите обозначим

$$L=\lambda-\tau,\ L'=\lambda'-\tau' \qquad (4.115)$$

Тогда наше разложение

$$\Delta^{-1}=\Delta_0^{1}-r\cdot r'\Delta_0^{-3}\cdot 2\delta\sin W\sin W'+r^2\cdot r'^2\cdot\Delta_0^{-5}\cdot 6\delta^2\sin^2 W\sin W'+\ldots$$

примет вид: $\Delta^{-1}=I-II+III-IV+\ldots$ (4.116)

$$\left.\begin{aligned} I&=\Delta_0^{-1}=\left[a^2+a'^2-2aa'\cos(L-L')\right]^{1/2}\\ II&=aa'\Delta_0^{-3}\cdot 2\delta^2\sin L\sin L'\\ III&=a^2\cdot a'^2\cdot\Delta_0^{-5}\cdot 6\delta^4\sin^2 L\sin L'\end{aligned}\right\} \qquad (4.117)$$

и т.д.

Рассмотрим отношение: $\alpha=\dfrac{a}{a'}<1\Rightarrow$

$$(aa')^{\frac{n-1}{2}}\Delta_0^{-n}-a'^{-1}\cdot\alpha^{\frac{n-1}{2}}\cdot(1-2\alpha\cos S+\alpha^2)^{-\frac{n}{2}};\quad n=1,3,5,7,\ldots$$

$$S=L-L'$$

$0<\alpha<1$

$$(1+2\alpha\cos S+\alpha^2)^{\frac{-n}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n^{(i)}\cos iS,$$

b_n^i - коэффициенты Лапласа.

$$a'\Delta^{-1}=\frac{1}{2}\sum a'Ai\cos(iL'-iL)+\delta\sum a'Bi\cos\left[(i+1)L'-(i-1)L\right]$$

Тогда: $\sum R=k^2\cdot m'(\Delta^{-1}-R_1)$

$$a'R_1=\alpha(1-\sigma^2)\cos(L'-L)+\alpha\sigma^2\cos(L'+L)$$

$$a'R'_1=\alpha^{-2}(1-\sigma^2)\cos(L'-L)+\alpha^{-2}\sigma^2\cos(L'+L)$$

§12. Аналитические методы нахождения возмущенных координат

Уравнение движения в цилиндров координатах

В работах Эйлера впервые были даны методы для прямого получения возмущающих координат. В данным Лаплас развил эти методы, а именно, разработал метод интегральная уравнения движения в цил.координатах.

Пусть дана планета Рс массой m, и координатами $\{x,y,z\}$.

Цилиндровая координата $\{\rho,\vartheta,z\}$.

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\vartheta \\ y = \rho \cdot \sin\vartheta \\ r^2 = \rho^2 + z^2 \end{cases} \quad ,T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\vartheta}^2 + \dot{z}^2).$$

Уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial qk} = Q_k$$

Пусть T_1, T_2 , T_3 - компоненты ускорения т.Р. Тогда

$$Q_1 = mT_1 \qquad q_1 = \rho$$

$$Q_2 = m\rho T_2 \qquad q_2 = \vartheta$$

$$Q_3 = mT_3 \qquad q_3 = z$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}; \quad \frac{\partial L}{\partial \rho} = m\rho\dot{\vartheta}^2; \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = m\rho^2\dot{\vartheta}; \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\rho}) - m\rho\dot{\vartheta}^2 = mT_1 \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \ddot{\rho} - \rho\dot{\vartheta}^2 = T_1 \\ \dfrac{d}{dt}(\rho^2\dot{\vartheta}^2) = \rho T_2 \\ \ddot{z} = T_3 \end{array}\right\} \qquad (4.118)$$

Когда есть потенциальные поле, то (4.118):

$$\left.\begin{array}{r} \ddot{\rho} - \rho\dot{\vartheta}^2 = \dfrac{\partial U}{\partial \rho} \\ \dfrac{d}{dt}(\rho^2\dot{\vartheta}) = \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} \\ \ddot{z} = \dfrac{\partial U}{\partial z} \end{array}\right\} \qquad (4.119)$$

Нам часто приходится учитывать возмущения от других планет.

$$U = k_1^2 \cdot r^{-1} + R$$

$$k_1^2 = k^2(1 + m)$$

$$r^2 = \rho^2 + z^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = -\frac{k_1^2\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{\partial R}{\partial \rho},$$

$$\left.\begin{array}{r} \ddot{\rho} - \rho\dot{\vartheta}^2 + k_1^2\rho \cdot r^{-3} = \dfrac{\partial R}{\partial \rho} \\ \dfrac{d}{dt}(\rho^2 \cdot \dot{\vartheta}) = \dfrac{\partial R}{\partial \vartheta} \\ \ddot{z} + k_1^2 z \cdot r^{-3} = \dfrac{\partial R}{\partial z} \end{array}\right\} \qquad (4.120)$$

В случае R=0 (невозмущенные движение), движение будет происходить в неподвижными планети, проходящей через солнца, тогда в ней (SXY) z=0,ρ=r.
Тогда решение (4.120):

$$\left.\begin{array}{c} E - e\sin E = k_1 \cdot a^{-3/2} \cdot (t - t_0) \\ tg\frac{1}{2}(\vartheta - \vartheta_0) = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2} \cdot tg\frac{1}{2}E \\ r = \frac{a(1+e^2)}{1+e\cos(\vartheta - \vartheta_0)} \end{array}\right\} \qquad (4.121)$$

a,e,υ_0 и t_0- const интегарльная.

§13. Метод Лапласа

1) Плоскость XY - плоскость оскулирующей орбиты в момент t, что дает ρ=r,z=0
2) Долготу V заменяют долготой для определенного момента t_{t0} :W

Т.о.,для радиус-вектора r, и w в плоскости оскулирующей орбиты уравнение движения имеет вид:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{dW}{dt}\right)^2 + k_1^2 \cdot r^{-2} = \frac{\partial R}{\partial r} \\ \frac{d}{dt}(r^2 \cdot \dot{w}) = \frac{\partial R}{\partial W} \end{array}\right\} \qquad (4.122\ а,б)$$

$(4.122a) \cdot 2 \cdot \frac{dr}{dt} + (4.122б) \cdot \frac{dW}{dt}$ и интегрируем:

$$\int 2\frac{d^2r}{dt^2}\cdot\frac{dr}{dt} - 2r\left(\frac{dW}{dt}\right)^2\frac{dr}{dt} + 2\frac{dr}{dt}k_1^2 r^{-2} + \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{dW}{dt}\right)\frac{dW}{dt} = \int 2\frac{dr}{dt}\frac{dR}{dr} + \frac{dW}{dt}\cdot\frac{\partial R}{\partial W}.$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \int\left(2 - r\left(\frac{dW}{dt}\right)^2\cdot\frac{dr}{dt} + r^2\frac{d^2W}{dt^2}\cdot\frac{dW}{dt}\right) + \int 2\frac{dr}{dt}k_1^2 r^{-2} = \int(-"-).$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{dW}{dt}\right)^2 - 2k_1^2 r^{-1} = 2\int d'R + 2C \qquad (4.123)$$

(4.122a)·r+(4.123):

$$r\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right) + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r^2\left(\frac{dW}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{dW}{dt}\right)^2 + k_1^2 r^{-1} - 2k_1^2 r^{-1} = r\frac{\partial R}{\partial r} + 2\int d'R + 2C$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt}(r^2)\quad k_1^2 r^{-1} = r\frac{\partial R}{\partial r} + 2\int d'R + 2C \tag{4.124}$$

(4.124) и (4.122б) – наши основные уравнения.
Дальше берем так:

$$\left.\begin{aligned} r &= r_0 + \delta r \\ W &= W_0 + \delta W \end{aligned}\right\}$$

(r_0 ,W_0 - для невозмущ.движения)

$$\frac{d^2(r_0\delta r)}{dt^2} + k_1^2 r_0^{-3}(r_0\delta_r) = r_0\frac{\partial R}{\partial r_0} + 2\int d'R + G_2 \tag{4.125}$$

$$2r_0^2\frac{dW_0}{dt}\cdot\frac{d}{dt}(\delta w) + \frac{d^2 r_0}{dt^2} - \delta r - r_0\frac{d^2}{dt^2}(\delta r) + \frac{3k_1^2}{r_0^3}r_0\delta r = -r_0\frac{\partial R}{\partial r_0} + H_2 \tag{4.126}$$

G_2,H_2 - члены высших порядков.
Если R=0, то:

$$r_0^2\frac{dW_0}{dt} = k_1\sqrt{a(1-e^2)}$$

$$e = \sin\varphi,\quad k_1 = na^{3/2} \Rightarrow r_0^2\frac{dW_0}{dt} = na^2\cos\varphi.$$

$$\alpha^2 n\cos\varphi\frac{d}{dt}(\delta w) = \frac{d}{dt}\left((r_0\frac{d(\delta r)}{dt} + \delta\cdot r\cdot\frac{dr_0}{dt}\right) - э\int d'R - 2r\frac{\partial R}{\partial r_0} + T_2$$

- это уравнение Лаплас и интеграл для нехождения долготы в орбите.
Когда ищем только возмущение 1 порядка $\rightarrow T_2=0$

§14. Классификация возмущений.

Известно, что координаты каждой планеты является периодичными функциями.С соответствует средней аномалией M,M', которое имеют T=2π.

Тогда R и R тоже является периодичными функциями. Если орбиты планет не пересекаются и $\Delta\neq 0$, то R и R' можно разложить в двойной ряд Фурье:

$$\left.\begin{aligned} R &= \sum N'_{jj}\cos(jM + j'M' + B'_{jj}) \\ R' &= \sum N'_{jj}\cos(jM + j'M' + B'_{jj}) \end{aligned}\right\} \tag{4.127}$$

j,j'-целые числа, которое принимают значения ($-\infty$, $+\infty$).
Коэффициенты N и N' можно разложить по целым и положительным степеням e.

$\upsilon = \sin^2 \frac{I}{2}$; I – угол между плоскостями орбит.

Тогда каждую R,R$'$ можно представить в виде $\sum$ из 5 рядов.

$$\left.\begin{array}{c} Ae^{\alpha} \cdot e'^{\alpha'} \cdot V\beta \cdot \cos(jM + j'M' + B'_{jj} \\ \alpha, \alpha', \beta = 0,1,2,\ldots \\ j, j' = 0, \pm 1; \pm 2, \ldots \end{array}\right\} \qquad (4.128)$$

Здесь A зависит от a и a$'$. B зависит от i,Ω,π ; Ω$'$,π$'$

Учитывая , что M=nt+E-π, приходим к выводу, что правые части можно

Переписать: $Ae^{\alpha} \cdot e'^{\alpha'} \cdot V \cdot \cos D$, где

$$D = j(nt+E) + j'(n't+E') + C \;\} \qquad (4.129)$$

Представив т.о. правые части уравнений, можем перейти к вычислительную возможностей различным порядков.

$A=a_0+\delta_1 \cdot a$. Сюда подставим (4.129), получим следующий вид:

при $j\, n_0 + j'\, n'_0 \neq 0$, то

$$A_0 e_0^{\alpha} e_0'^{\alpha'} \cdot aV_0^{\beta} \frac{\cos D}{\gamma n_0 + j' n'_0} \qquad (4.130)$$

если $jn_0 + j'n'_0 = 0$, то $tA_0 e_0^{\alpha} e_0'^{\alpha'} \cdot V^{\beta} \cdot \cos(jE_0 + j'E'_0 + C_0)$ (4.131)

Это первый порядок. Второй и дальше порядки:

$$t^{P} A_0 e_0^{\alpha} e_0'^{\alpha'} V_0^{\beta} \frac{\cos(\chi t + jE_0 + j'E'_0 + C_0}{\chi^{q} \chi_1^{q1} \ldots}$$

где $æ=jn_0+j'\, n'_0$

если P=0 , то возмущение называются периодическим.

Если P≥1, æ=0 , то возмущение называются вековым.

Если P≥1, æ≠0 , то возмущение называются смешанным.

(n-P) - « ранг возмущения»

$\left(n - \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}q\right)$ - «класс возмущения»

n – порядок возмущения.

Литература

1. Г.Н.Дубошин. “Небесная механика. Основные задачи и методы”, М., Наука, 1968.
2. “Справочник по небесной механике и астродинамике”,
3. М.Б.Балк, В.Г.Демин, А.Л.Куницин. “Сборник задач по небесной механике и космодинамике”, М., Наука, 1972.
4. М.Ф.Субботин. “Курс небесной механики”, Л., Гостехиздат.
5. А.Д.Дубяго. “Определение орбит”, М., Л., Гостехиздат

Подписано к печати 07.02.2008. 6 п.л.
Формат 60x84 1/8. Тираж 100 экз. Заказ 201.
Отпечатано в типографии Национального университета
Узбекистана им.М.Улугбека