Махмудова Д.М., Дўсмуродова Г.Х.,
Эшмаматов И.А., Абдуқодирова П.Т.

АЛГЕБРА ВА СОНЛАР НАЗАРИЯСИ

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ТОШКЕНТ ВИЛОЯТИ
ЧИРЧИҚ ДАВЛАТ ПЕДАГОГИКА ИНСТИТУТИ

Махмудова Д.М., Дўсмуродова Г.Х.,
Эшмаматов И.А., Абдуқодирова П.Т.

АЛГЕБРА ВА СОНЛАР НАЗАРИЯСИ

Ўқув қўлланма

Тошкент - 2020

Махмудова Д.М., Дўсмуродова Г.Х., Эшмаматов И.А.,
Абдуқодирова П.Т. “Алгебра ва сонлар назарияси”. Ўқув қўлланма.
–Т.: “Университет”, 2020, 168-бет.

УЎК: 511.2(075.8)
КБК: 22.132я73
А 45

Ушбу ўқув қўлланмада “Алгебра ва сонлар назарияси” курсининг асосий тушунча ва тасдиқлари, масалалари келтирилган бўлиб, математик мазмуни тадбиклари кўрсатилган. Талабалар мавзулар бўйича мустақил ечиши учун топшириқлар ва уларнинг ечиш усуллари ҳам берилган. Ўқув қўлланма олий таълим муассасаларининг математика ўқитиш методикаси талабалари ва профессор - ўқитувчилари учун мўлжалланган.

Учебник содержит основные понятия, утверждения, задачи курса «Алгебра и теория чисел» и прикладное математическое содержание. Также даны задания для самостоятельного решения учащимися по темам и методам их решения. Учебник предназначен для студентов и преподавателей методики преподавания математики в высших учебных заведениях.

The textbook contains basic concepts, statements, tasks of the course "Algebra and number theory" and applied mathematical content. Also given tasks for independent solution by students on topics and methods of solving them. The textbook is intended for students and teachers of methods of teaching mathematics in higher education.

Тақризчилар: ф.-м.ф.д., проф А.А.Жалилов
ф.-м.ф.д. Э.М. Махкамов

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги Чирчиқ давлат педагогика институти кенгашининг 2020 йил 03 мартдаги 13 - сонли қарорига асосан 5110100 – Математика ўқитиш методикаси таълим йўналишлари бўйича таҳсил олаётган талабалар ва профессор ўқитувчилари учун ўқув қўлланма сифатида нашр қилишга тавсия этилган.

ISBN: 978-9943-6555-1-5

> *Математикани билиш – фақат стандарт масалаларнигина эмас, балки фикр эркинлиги, соғлом мантиқ, оригиналлик, яратувчанликни талаб қиладиган масалаларни еча билишдир.*
>
> *Д. Пойа*

СЎЗ БОШИ

Ватанимиз мустақиллиги таълим тизимидаги улкан ўзгаришлар иқтидорли ўқувчилар, талабаларга бўлган муносабатни ҳам тубдан ўзгартирди. Республикамизнинг ривожланган мамлакатлар даражасида тараққий этиши жамият аъзолари, айниқса, ёшларнинг эркин фикрлай олиш даражаси, мустақил ижодий фаолиятлари натижалари билан белгиланади.

Талабаларнинг математик билимларни ўзлаштириши, малака ҳосил қилиши ва кўникмага эга бўлиши, фанга бўлган қизиқишини рағбатлантириш ва математикавий маданиятни шакллантиришда мустақил фикрлаш қобилиятини фаоллаштириш масаласи алоҳида аҳамият касб этади.

Мазкур масалаларни ҳал қилишда рақамлар билан ишлаш усулларини ўзлаштириш, айниқса, фикрдаги ҳисоб-китоблар математика қонунларини яхшироқ тушунишга ёрдам беради. Шу билан бирга, концентрациялаш қобилиятини оширади, хотирани мустаҳкамлайди, бир вақтнинг ўзида бир нечта ғояларни хотирада ушлаб туриш малакасини ривожлантиради. Бундай ҳисоблаш усулларини ўрганадиган киши, бир нечта фикрлаш тузилмалари билан бир вақтнинг ўзида ишлашни ўрганади.

Ушбу ўқув қўлланма математиканинг муҳим қисмларидан бўлган туб ва мураккаб сонлар, таққосламалар назарияси ва Диофант тенгламаларини ечишнинг бир неча усулларини ўрганишга, таҳлил қилишга бағишланган. Унда Эратосфен ғалвири, Мерсен туб сонлари, Евклид алгоритми, Эйлер функцияси, Лежандр символи, Диофант тенгламалари ёритилган. Талабаларнинг ақлий фаолиятини мустаҳкамлаб, машғулот жараёнида вақтдан ютишига ёрдам берадиган, тезкор ҳисоблаш имкониятини берувчи усуллар ўрганилган.

Ўқув қўлланма уч бобдан иборат. **Биринчи бобда** туб ва мураккаб сонлар, туб сонлар тўпламининг чексизлиги, Эратосфен ғалвири, бўлиниш муносабати, энг катта умумий бўлувчи ва энг кичик умумий каррали, Евклид алгоритми, чекли занжир касрлар ва муносиб касрлар хоссалари, систематик сонлар ва улар устида амаллар ҳамда туб сонлар тарихи баён қилинган. **Иккинчи бобда** бутун сонлар халқасида таққосламалар, унинг хоссалари ва чегирмалар, синф ҳалқаси, Эйлер функцияси, Эйлер ва Ферма теоремаси, биринчи даражали таққосламалар ва биринчи даражали таққосламалар системаси мисоллар ёрдамида тушунтирилган. **Учинчи бобда** Диофант тенгламалари, биринчи даражали икки номаълумли Диофант тенгламаларининг бутун рационал ечимларини топиш усуллари, аниқмас тенгламаларнинг умумий ечими, тенгламани ечишни соддалаштириш, Лежандр символи ва унинг хоссалари, туб модул бўйича юқори даражали таққосламалар, иккинчи ва учинчи тартибли Диофант тенгламалари, соннинг кўрсаткичи, туб модул бўйича индекслар, икки ҳадли таққосламалар, иккинчи тартибли аниқмас тенгламалар кенг ёритилган. Ҳар бир мавзу мисоллар билан баён қилинган ва мустақил ишлаш учун машқлар берилган.

Ўйлаймизки, ўқув қўлланма ўз ўқувчиларини топади, бошқа мавжуд ўқув адабиётлари каторида кизиқарли математика ва олимпиада масалалари курси бўйича уларга билимларини оширишга кўмак беради.

Ушбу ўқув қўлланмадан педагогика олий таълим муассасалари талабалари ва профессор - ўқитувчилари фойдаланишлари мумкин.

Муаллифлар

I БОБ

БУТУН СОНЛАР ҲАЛҚАСИДА БЎЛИНИШ МУНОСАБАТИ

1.1-§. Туб ва мураккаб сонлар. Туб сонлар тўпламининг чексизлиги. Эратосфен ғалвири

Санаш учун 1, 2, ... натурал сонлар ишлатилади. $N=\{1,2,...\}$ тўплам эса *натурал сонлар тўплами* дейилади. Агар a ва b натурал сонлар учун шундай q натурал сон топилиб, $a=b\cdot q$ шарт бажарилса, у ҳолда a натурал сон b натурал сонга *бўлинади,* деймиз.

Натурал сон туб сон дейилади, у иккита турли натурал бўлувчига (бир ва ўзи) эга бўлса мураккаб сон дейилади, агар унинг бўлувчилар сони иккитадан кўп бўлса.

Бир сон на туб, на мураккаб сонга тегишли эмас. Туб сонлар (ва уларнинг натурал даражалари) ўзаро тубдир. Мураккаб соннинг бирдан фарқли натурал бўлувчиси $\sqrt{a}$ дан катта эмас. Бу шартдан фойдаланиб a соннинг туб бўлувчиларини фақат $\sqrt{a}$ дан катта бўлмаган туб сонлар орасидан излаш кераклиги келиб чиқади.

Яна бир оддий усул - туб сонлар жадвалларидан фойдаланиш. Сўнгги 200 йил ичида кўплаб туб сонли жадваллар тузилган ва нашр этилган. Уларнинг энг кенг доираси Д.Ҳ. Леҳмера 1000000 гача бўлган оддий сонларни ўз ичига олади.

Учинчи қизиқарли усул: а сондан катта бўлмаган туб сонлар жадвалини тузиш учун Эратосфен ғалвири деб аталувчи усул мавжуд. Бу усул бўйича сонлар қаторида биринчи топилган p_1 туб сонга каррали бўлган сонларни ўчириш, сўнг иккинчи p_2 туб сонни топиб, унга каррали сонларни ўчириш ва ҳоказо. Бу жараённи $\sqrt{a}$ дан катта бўлмаган туб сонгача давом эттириб, 1 дан a гача сонлар қаторида ўчирилмай қолган сонлар a дан катта туб сонларни ҳосил қилади.

Масалан: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 –туб сонлар, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15 – мураккаб сонлар.

Таъриф. 1 дан фарқли умумий бўлувчиларга эга бўлмаган иккита натурал сон *ўзаро туб* сонлар дейилади.

Теорема. *a - бирдан фарқли натурал сон бўлсин. У ҳолда унинг бирдан катта энг кичик натурал бўлувчиси туб сондир.*

Исбот. Ҳақиқаттан ҳам, агар $a \vdots m$ бўлиб, m мураккаб сон бўлса, m нинг p бўлувчиси бўлиб, $p < m$ ва $p \neq 1$. У ҳолда $a \vdots m$ ва $m \vdots p$ шартлардан $a \vdots p$ муносабат келиб чиқади. Бу эса m – бирдан катта энг кичик натурал бўлувчи, деган шартга зид. Демак, m - туб сон.

Хулоса. Бу теоремадан, агар a мураккаб сон бўлса, a нинг албатта битта $\sqrt{a}$ дан катта бўлмаган туб бўлувчиси бор бўлиши келиб чиқади. Ҳақиқатдан ҳам, a мураккаб сон, p эса унинг бирдан катта энг кичик туб бўлувчиси бўлсин. У ҳолда шундай q сон топилиб, $a = pq \geq p^2$ ёки $p \leq \sqrt{a}$ келиб чиқади.

Демак, бирдан катта a натурал сон туб сон бўлиши учун $p \leq \sqrt{a}$ туб сонларнинг бирортасига ҳам бўлинмаслиги етарли. Масалан, 101 туб сон бўлиши ёки бўлмаслигини аниқлаш учун уни $\sqrt{101}$ дан кичик бўлган 2,3,5,7 туб сонларга бўлиб кўрамиз, 101 бу сонларнинг бирортасига ҳам бўлинмайди, шунинг учун 101 туб сон экан.

Агар с = 91 бўлса, туб сон бўлиши ёки бўлмаслигини аниқлашда $\sqrt{c} = 9,...$; 91 га бўлинишини текшириш учун 2, 3, 5, 7 сонларга бўлиб кўрамиз, биз $91 = 7 \cdot 13$ эканлигини топамиз. Демак, 91 мураккаб сон экан.

Мисол. 397, 401, 403, 409, 677 сонларидан бири мураккаб сон бўлишини кўрсатинг.

Арифметиканинг асосий теоремаси

Теорема. *Ҳар қандай натурал сон бирга тенг, туб сон ёки кўпайтувчилари тартибигача аниқликда ягона усулда туб сонлар кўпайтмасига ёйилади.*

Исбот. Математик индукция методи билан исбот қиламиз.

1-босқич. Индукция базиси n=1 бўлсин. У ҳолда теорема исбот бўлди.

2-босқич. Ҳар қандай $1 \leq k < n$ учун теорема тўғри бўлсин. Яъни, k = 1 га, туб сон ёки кўпайтувчилари тартибигача ягона усулда туб сонлар кўпайтмасига ёйилади.

3-босқич. Агар n туб сон бўлса, исбот тамом. Агар n мураккаб сон бўлса, у ҳолда $1 < a < n$ ва $1 < b < n$ шартларни қаноатлантирадиган шундай натурал сонлар мавжуд бўлиб, $n = a \cdot b$ индукция фаразига кўра a, b лар туб сонлар ёки кўпайтувчилари тартибигача аниқликда ягона усулда туб сонлар кўпайтмасига ёйилади. Агар a, b лар туб сонлар бўлса, исбот тугайди.

Акс ҳолда,

$$a = p_1, p_2, \dots p_k, \ b = p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_m.$$

Энди бу ёйилма ягона эканлигини исбот қиламиз.

Фараз қилайлик, $n = q_1, \dots, q_s$ тенглик n нинг бошқа ёйилмаси бўлсин. Бундан, $n = p_1, p_2, \dots p_m = q_1, \dots, q_s$ келиб чиқади. Бу тенгликнинг иккала томонини p_1 га бўлайлик. У ҳолда, p_1 ва $q_1, \dots, q_s$ лар туб сонлар бўлганлиги учун $q_1, \dots, q_s$ лардан бири p_1 га тенг. Аниқлик учун $p_1 = q_1$ бўлсин. У ҳолда, $p_2, \dots p_m = q_2, \dots, q_s$. Бу ёйилмалар n дан кичик сонларнинг ёйилмалари бўлганлиги учун, индукция фаразига кўра, кўпайтувчилари тартибигача ягона. n натурал сонни туб кўпайтувчиларга ёйганимизда, p_1 туб сон ёйилмада α_1 марта, p_2 туб сон α_2 марта ва ҳоказо, p_m туб сон α_m марта учрасин. У ҳолда $n = p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots p_m^{\alpha_m}$ ифода n натурал соннинг *каноник ёйилмаси* дейилади. Каноник ёйилмада туб кўпайтувчиларни ўсиш тартибида жойлаштирсак, ёйилма ягона бўлиши аниқ.

1-масала. Туб сонлар айирмаси шаклида ёзиладиган барча тоқ сонларни топинг.

Ечиш. Туб сонлардан биттаси, албатта, жуфт бўлиши керак, шунинг учун $N = p - 2$, бу ерда p – жуфт бўлмаган туб сон.

2- масала. $N = 3n + 2 (m = 1, 2, \dots)$ соннинг квадратини натурал сон квадрати ва туб сон йиғиндиси шаклида ёзиш мумкин эмаслигини исботланг.

Ечиш. Агар $N^2 = n^2 + p$ бўлса, у ҳолда $p = (N - n)(N + n)$, бундан $N - n = 1, N + n = p$ демак, $2N = 1 + p$ ёки $p = 2N - 1 = 6m + 3$, бу эса мумкин эмас.

3-масала. Маълумки, p, p+10, p+14 сонлар туб. p ни топинг.

Ечиш. p, p+10, p+14 сонлардан камида биттаси 3 га бўлинади. Демак, p=3.

4-масала. 127 туб ёки мураккаб сон эканлигини аниқланг.

Ечиш. $\sqrt{127}$ дан ошмайдиган 2, 3, 5, 7, 11 туб сонлар 127 ини бўлувчилари

эмас, демак, бу сон туб сондир.

5-масала. Агар туб p, q сонлар учун $x^2 - px + q = 0$ квадрат тенглама иккита турли бутун ечимга эга бўлса, p, q лар топилсин.

Ечиш. Тенгламанинг ечимлари $x_1 < x_2$ шартни қаноатлантирсин. Виет формулаларига кўра, $p = x_1 + x_2$, $q = x_1 x_2$.

q–туб сон бўлгани учун охирги тенгликдан $x_1 = 1$ бўлади ва бундан $q = x_2$, $p = 1 + x_2$ – иккита кетма – кет туб сон эканлиги келиб чиқади. Бу эса фақат q=2, p=3 бўлгандагина ўринли.

6-масала. 2320 ва 2350 сонлари орасида жойлашган барча туб сонларни топинг.

Ечиш. Ечимни соддалаштириш мақсадида 2321 дан 2349 гача бўлган сонлар қаторида жуфт, 0 ва 5 билан тугалланадиган сонларни ёзмаслик мумкин, чунки бу сонлар туб эмас. Демак: 2321, 2323, 2327, 2329, 2331, 2333, 2337, 2339, 2341, 2343, 2347, 2349.

Бу сонлар қаторидан 3 га бўлинадиганларни ўчирамиз (3 га бўлиниш аломатидан фойдаланамиз). Бу сонлар: 2331, 2337, 2343, 2349

Қолган сонлар: 2321, 2323, 2327, 2329, 2333, 2339, 2341, 2347.

Бу қаторда 5 га каррали сон бўлмаганлиги сабабли 7 га каррали сонларни ўчирамиз. Бу қуйидагича амалга оширилади. Қатордаги биринчи сонни 7 га

бўламиз:

$$2321 = 7 \cdot 331 + 4.$$

Қолдиқ 4 дан (7 гача 3 етишмайди) 7 га каррали сон натурал сонлар қаторидаги 2321 дан кейинги учинчи сонлиги келиб чиқади, яъни 2324 ва шу 2324 дан кейинги барча 7 чи сонлар бўлади. Яъни: 2331, 2338, 2345. 11 га каррали сон 2321.

Бундан кейин келадиган 11 га каррали сонлар 2332, 2343 сонлар ўчирилган. 13 га каррали сонларни топамиз: қолган сонлардан биринчи сон 2323 ни 13 га бўламиз:

$$2323 = 13 \cdot 178 + 9.$$

Демак, 13 га каррали сон натурал сонлар қаторида 2323 дан тўртта кейин келган (9+4=13) бўлади, яъни 2327. Бу сонни ўчирамиз. 13 га бўлинадиган кейинги сон 2340, бу сон ўчирилган. $\sqrt{2350} < 49$ бўлганлиги сабабли бу жараённи то 47 туб сонгача давом эттириш

керак. 2329 – 17 га каррали, 2323 – 23 га каррали сонлар. Қолган 2333, 2339, 2341, 2347 сонлар туб сонлар бўлади.

7-масала. Ихтиёрий олтита кетма-кет натурал сонлар учун улардан фақат биттасининг бўлувчиси бўладиган туб сон топилишини исботланг.

Ечиш. Кетма–кет бўлган, n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5 сонларни оламиз. Агар n сони 5 га бўлинмаса, n+1, n+2, n+3, n+4 сонларидан фақат биттаси бешга бўлинади. Агар n сони 5 га бўлинса, n+5 ҳам 5 га бўлинади.

У ҳолда, 5 га бўлинмайдиган n+1, n+2, n+3, n+4 сонлардан иккитаси 2 га бўлинмайди. Шу иккита тоқ сонлардан бири, албатта, 3 га бўлинмайди. Демак, 2 га, 3 га ва 5 га бўлинмаган шу сон 5 дан каттароқ туб сонга бўлинади.

n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5 сонлари орасида шу туб сонга бўлинадиган сон ягона.

8-масала. $p_1, p_2, \dots, p_n$ туб сонлар учун $b = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ сони туб сон бўладими?

Ечиш. $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$. Йўқ, туб сон бўлмайди. Яъни мураккаб сон.

9-масала. $2^{18} + 3^{18}$ йиғиндини туб кўпайтувчиларга ажратинг.

Ечиш.

$2^{18} + 3^{18} = (2^2 + 3^2)(2^4 - 2^2 3^2 + 3^4)(2^{12} - 2^6 \cdot 3^6 + 3^{12}) =$

$= 13 \cdot 61(2^{12} - 2^6 \cdot 3^6 + 3^{12}) = 13 \cdot 61 \cdot 488881 = 13 \cdot 61 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 181.$

10-масала. Қуйидагиларни исботланг:

а) Агар а сон p туб сонга бўлинмаса, у ҳолда a, p сонлар ўзаро туб бўлади.

b) Агар бир нечта сон кўпайтмаси p туб сонга бўлинса, у ҳолда уни ташкил қилган кўпайтувчилардан камида биттаси p га бўлинади.

Ечиш. а) Тескарисини фараз қиламиз, яъни a сон берилган p туб сонга бўлинмасдан, у билан 1 дан фарқли умумий бўлувчига эга бўлсин.

p сон туб бўлганлиги боис бу умумий бўлувчи фақат p бўла олади, яъни a сон p туб сонга бўлинар экан. Зиддиятга эга бўлди.

b) Агар бир нечта сонларнинг кўпайтмаси p туб сонга бўлиниб, кўпайтувчилар барчаси p га бўлинмаса: (а) хоссага кўра улар p туб сони билан ўзаро туб бўлади. Демак, берилган кўпайтма ҳам p туб сони билан ўзаро туб. Бу эса зиддиятга олиб келди.

11-масала. 3, 5 ва 7 сонлар ягона уч эгизак сонлар (яъни айирмаси 2 га тенг бўлган арифметик прогрессия ташкил этувчи 3 та туб сон) ташкил этишини исботланг.

Ечиш. p, $p+2$ ва $p+4$ ($p>3$) сонларни кўрамиз. $p=3q+1$ $(q=2,4,...)$ бўлса, $p+2$ – сон мураккаб сон бўлади (3 га бўлинади). Агар $p=q+2(q=1,2,...)$ бўлса, $p+4$ мураккаб сон бўлади.

12-масала. $p>3$ туб сон учун $24 \mid p^2-1$ муносабатни исботланг.

Ечиш. $p-1, p+1$ кетма – кет жуфт сонлардан биттаси 4 га биттаси 3 га бўлинади. Демак, $p^2-1=(p-1)(p+1)$ сон 24 га бўлинади.

13-масала. $3n+2(n=1,2,)$ кўринишдаги энг катта туб сон мавжуд эмаслигини исботланг.

Ечиш. $K=2\cdot3\cdot5\cdot...\cdot p+2$ кўринишдаги сонни қараймиз, бу ерда $p=3n+2$ кўринишдаги сон (K сони ҳам шу кўринишдаги сон). K нинг каноник ёйилмасида p дан катта туб сонлар мавжуд ва булар орасида $3n+2$ кўринишдаги туб сон мавжуд. $3n+1$ кўринишдаги туб сонлар кўпайтмаси яна шу шаклга эга бўлганлиги сабабли у K га тенг бўла олмайди. Демак, p қандай бўлишидан қатъи назар, $3n+2$ кўринишдаги p дан катта туб сон мавжуд.

14-масала. Қандай натурал n сонлар учун $3n$-4, $4n$-5, $5n$-3 кўринишдаги учта сонлар барчаси туб бўлади?

Ечиш. Бу сонлар ($3n$-4)+($4n$-5)+($5n$-3)=$12n$-12=12(n-1) – жуфт бўлгани учун улардан камида биттаси, албатта, жуфт, яъни 2 га тенг бўлади. Аммо, $4n$-5 тоқ бўлганлиги сабабли, қуйидаги ҳолларни қарашимиз етарли:

$$3n-4=2 \Leftrightarrow n=2 \text{ ёки } 5n-3=2 \Leftrightarrow n=1$$

Агар n=1 бўлса, $4n$-5=–1.

Агар n=2 бўлса, $4n$-5=3, $5n$-3=7. Демак, n=2.

15-масала. $n>2$ сондан катта бўлмаган барча туб сонлар кўпайтмаси n дан катта бўлишини исботланг.

Ечиш. p – туб сон $p\leq n$ шартни қаноатлантирувчи энг катта туб сон бўлсин.

$N=2\cdot3\cdot5\cdot...\cdot p-1$ соннинг каноник ёйилмаси фақат n дан катта туб сонлардан иборат. Демак, $N>n$ ва бундан $N=2\cdot3\cdot5\cdot...\cdot p>n$.

16-масала. $27195^8-10887^8+10152^8$ сони 26460 га бўлинишини исботланг.

Ечиш. $26460=2^2\cdot3^3\cdot5\cdot7^2$ каноник ёйилмани ҳосил қиламиз.

$A=27195^8-10887^8+10152^8$ сонини $27195^8-(10887^8-10152^8)$

кўринишда ёзамиз. Бу сон $5\cdot7^2$ га бўлинади. Ҳақиқатдан ҳам

$27195=3\cdot5\cdot7^2\cdot37$,$10887^8-10152^8$ айирма эса $10887-10152=735=3\cdot5\cdot7^2$ га бўлинади.

Бошқа тарафдан, $A=(27195^8-10887^8)+10152^8$ кўринишдан A сони $2^2\cdot3^3$ га бўлиниши келиб чиқади, чунки $27195^8-10887^8$ сон $27195-10887=16308=2^2\cdot3^3$ 151 га бўлинади, 10152 сон эса $10152=2^3\cdot3^3\cdot47$ каноник ёйилмага эга. Шундай қилиб, натижада A сони $5\cdot7^2$ га ва $2^2\cdot3^3$сонига бўлинишини ҳосил қилдик. Демак, у $26460=2^2\cdot3^3\cdot5\cdot7^2$ сонига ҳам бўлинади.

17-масала. Шундай 50 та натурал сонлар топилсинки, улардан ҳеч бири бошқасига бўлинмайди, аммо ихтиёрий иккитасининг кўпайтмаси қолган 48 та сонлардан барчасига бўлинади.

Ечиш. $p_1,...,p_{50}$ — туб сонлар бўлсин.

$A_1=p_1^2\cdot p_2...p_{50}, A_2=p_1\cdot p_2^2\cdot p_3\cdot...\cdot p_{50},...,A_{50}=p_1\cdot...p_{49}\cdot p_{50}^2$ сонлар масала шартини қаноатлантиришини кўрсатамиз.

Ҳақиқаттан ҳам, агар $i\neq j$ бўлса, $A_i/A_j=p_i/p_j$ сон бутун бўлмайди. Бундан ташқари, $A_\mathrm{i}A_\mathrm{j}=(p_1\cdot...\cdot p_{50})^2p_\mathrm{i}\cdot p_\mathrm{j}$ сон $A_1,...,A_{50}$ сонларнинг барчасига бўлинади.

18-масала. p ва $8p^2+1$ – туб сонлар бўлса, $8p^2+2p+1$ туб сон бўлишини исботланг.

Ечиш. p ва $8p^2+1$ – туб сонлар бўлганлиги сабабли $p=3$ бўлиши керак, чунки $p=3k+1$ёки $3k+2$ бўлганда $8p^2+1$ туб бўлмайди. Демак, $8p^2+2p+1=79$ – бу туб сон.

19-масала. Геометрик прогрессияда биринчи, ўнинчи ва ўттизинчи ҳадлар натурал сонлар бўлса, унинг йигирманчи ҳади ҳам натурал сон бўлишини исботланг.

Ечиш. $a_1, a_2, \ldots, a_n$, – берилган геометрик прогрессия, q–унинг махражи бўлсин. Масала шартига кўра, a_1, $a_{10} = a_1q^9$ ва $a_{30} = a_1q^{29}$ сонлар натурал сонлар бўлади. Шунинг учун q^9 ва q^{29}– мусбат рационал сонлар. Демак, $q^2 = q^{29}/(q^9)^3$ ва $q = q^9/(q^2)^4$ сонлар хам рационал сонлар бўлади. $q = m / n$ бўлсин, бу ерда m ва n натурал ўзаро туб сонлар.

$$a_{30} = a_1m^{29}/n^{29}$$

натурал сон, m^{29} ва n^{29} ўзаро туб бўлгани учун a_1 сон n^{29} га бўлингани келиб чиқади. Демак, $a_{20} = a_1q^{19} = a_1m^{19}/n^{19}$ сон натурал сон бўлади.

20-масала. Қайси натурал n сон учун $n^5 + n^4 + 1$ сон туб бўлади?

Ечиш. n=1 бўлса, $n^5 + n^4 + 1 = 3$ – туб сон.

$$n^5 + n^4 + 1 = n^5 + n^4 + n^3 - n^3 - n^2 - n + n^2 + n + 1 =$$
$$= n^3(n^2 + n + 1) - n(n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 1) =$$
$$= (n^3 - n + 1)(n^2 + n + 1)$$

муносабатлар ўринли.

Маълумки, $n > 1$ бўлганда $n^3 - n + 1 > 1, n^2 + n + 1 > 1$ бўлади. Демак, бу ҳолда $n^5 + n^4 + 1$ сон бирдан катта натурал сонлар кўпайтмасига ёйилади, яъни у туб эмас. Демак, n=1.

21-масала. $a^4 + 4b^4$ сон туб сон бўладиган барча натурал a, b сонлар топилсин.

Ечиш.

$$a^4 + 4b^4 = a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2 =$$
$$= (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$$
$$= [(a + b)^2 + b^2][(a - b)^2 + b^2]$$

Равшанки, $(a + b)^2 + b^2 > 1$. Демак, $a^4 + 4b^4$ сон туб сон бўлиши учун

$$(a + b)^2 + b^2 = 1$$

тенглик бажарилиши зарур ва етарли.

Бу тенглик фақат a=b=1 бўлганда бажарилади. Бу сонлар эса масала шартини қаноатлантиради.

Изох. Адабиётларда $a^4 + 4b^4 = [(a + b)^2 + b^2][(a - b)^2 + b^2]$ айният Софи Жермен[1] айнияти деб юритилади[1].

---

[1] Софи Жермен-француз математиги, файласуф ва механик.

22-масала. $2^n - 1$ ва $2^n + 1, (n > 2)$ сонлар бир вақтда туб сонлар бўла олмаслигини исботланг.

Ечиш. $2^n = 3q + 1$ ёки $2^n = 3q + 2$ кўринишга эга. Биринчи ҳолда $2^n - 1 = 3q$ – мураккаб сон, чунки $n > 2$ да $q > 1$ бўлиши керак. Иккинчи ҳолда $2^n + 1 = 3q + 3$– яна мураккаб сон.

23-масала. Агар p туб сон ва $0<k<p$ бўлса, у ҳолда,

$$C_p^k = \frac{1 \cdot 2 \cdots (p-1)p}{1 \cdot 2 \cdots (k-1)k \cdot 1 \cdot 2 \cdots (p-k-1)(p-k)}$$

биномиал коэффициент p туб сонга бўлинади.

Ечиш. Биномиал коэффициент бутун сон бўлгани боис, уни $1 \cdot 2 \cdots (p-1)p$ сурати махражига бўлинади. $0 < k < p$ бўлгани учун

$$1 \cdot 2 \cdots (k-1)k \cdot 1 \cdot 2 \cdots (p-k-1)(p-k) = k!\,(p-k)!$$

сони p сон билан ўзаро туб сон. Шунинг учун $1 \cdot 2 \cdots (p-1)p$ суратнинг фақат

$1 \cdot 2 \cdots (p-1)p$ кўпайтувчиси махражга бўлинади.

24-масала. Мураккаб a сонининг 1 дан фарқли энг кичик бўлувчиси $\sqrt{a}$ сонидан катта бўлмаган туб сон бўлишини исботланг.

Ечиш. Натурал сонларнинг тўплами қуйидан чегараганлигидан a сонининг 1 дан фаркли энг кичик бўлувчиси мавжуд бўлиши келиб чиқади ва биз уни b орқали белгилаймиз.

Дастлаб, b сонини туб сон бўлишини исботлаймиз. Агар биз уни мураккаб сон деб фараз қилсак, у ўзидан кичик бўлган натурал бўлувчига эга бўлганлиги келиб чиқади ва бу бўлувчи а сонини ҳам бўлади. Бундай бўлиши мумкин эмас. Демак, b сони туб сон бўлади. a=bq тенгликдан q бўлинма a сонини натурал бўлувчиси эканлиги келиб чиқади. Демак, b сонини таърифига кўра $q \geq b$ тенгсизлик бажарилади. Шу тенгсизликдан фойдаланиб, $a = bq \geq bb = b^2$ га эга бўламиз.

Изох. Бу масала a сонидан катта бўлмаган туб сонларни топишда *Эратосфен ғалвири*[2] деб аталадиган оддий усулдан фойдаланишга имкон беради. Унинг моҳияти билан танишамиз.

---

[2] Эратосфен (м.а. 276-194 йиллар.) – кадимий юнонлик олим. Кубни иккилаш масаласини ечишга доир махсус курилма
(мезолябий)ни кашф килган.

1, 2, 3, …, a сонлар ичида 2, 3, 5, 7, …, туб сонлари ва уларга бўлинадиган сонлари кетма–кет ўчирилади. Бунда:

а) p туб сонига бўлинадиган сонларни ўчиришни p^2 дан бошлаш керак;

б) ўчириш жараёнини $\sqrt{a}$ сонидан катта бўлмаган туб сонлар учун ўтказиш етарли.

Натижада a сонидан катта бўлмаган туб сонлар ўчирилмай қолади.

25-масала. p – туб сон бўлсин.

а) p дан кичик ва у билан ўзаро туб бўлган натурал сонлар нечта?

б) p^2 дан кичик ва у билан ўзаро туб бўлган натурал сонлар нечта?

Ечиш. а) Барча p дан кичик натурал сонлар у билан ўзаро туб бўлади.

Уларнинг сони эса p–1 га тенг.

б) Барча p^2 дан кичик ва p га каррали бўлмаган натурал сонлар p^2 билан ўзаро туб бўлади.

p^2 дан кичик ва p га каррали сонлар $p, 2p, \ldots, (p-1)p$ кўринишга эга. Уларнинг сони p–1 га тенг. Демак, p^2 дан кичик ва у билан ўзаро туб бўлган сонлар

$$(p^2-1)-(p-1)=p^2-p$$

та бўлади. а) p–1; б) p^2–p.

26-масала. (Евклид теоремаси)[3]. Туб сонлар чексиз кўпдир.

Ечиш. Тескарисини фараз қиламиз, яъни фақат n та туб сонлар мавжуд бўлсин. $b=p_1p_2\ldots p_n+1$ сонини олайлик. У барча $p_1, p_2, \ldots, p_n$ туб сонлардан катта бўлгани учун мураккаб сон бўлади. Демак, унинг 1 дан фарқли энг кичик p натурал бўлувчиси туб сон бўлиб, у $p_1, p_2, \ldots, p_n$ лардан бирортаси билан устма-уст тушади, яъни b ва $p_1, p_2, \ldots, p_n$ сонлар b га бир вақтда бўлинади.

Демак, $1=p_1p_2\ldots p_n-b$ сони p га бўлинади. Зиддият.

Изох. 2006 йилда $2^{32582657}-1$ –сони туб сон бўлиши текширилди. Бу сон ҳозиргача энг катта маълум бўлган туб сон бўлиб, у ўнли позицион системада 9808358 та рақамдан иборат.

---

[3] Евклид (м.а. 356-300 йиллар.) – қадимий юнонлик олим. Геометрия фанининг асосчиларидан бири.

27-масала. $e_1=2,\ e_n=e_1e_2\ldots e_{n-1}+1\ (n\geq 2)$ тенгликлар ёрдамида аниқланган кетма – кетлик фақат туб сонлардан иборат бўладими?

Ечиш. Йўқ, $e_5=1807=13\cdot 139$.

28-масала. Ихтиёрий натурал n учун n та кетма-кет мураккаб сонлар мавжудлигини кўрсатинг.

Ечиш. $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+1)+2$ сон 2 га, $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+1)+2$,..., $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+1)+n+1$ сон n+1 га бўлингани учун, бу сонлар масала шартини қаноатлантиради.

29-масала. 3, 7, 11, ... чексиз арифметик прогрессияда туб сонлар чексиз кўп бўлишини кўрсатинг.

Ечиш. Тескарисини фараз қиламиз, яъни берилган прогрессияда фақат n та $p_1=3, p_2=7, \ldots, p_n$ туб сонлар мавжуд бўлсин.

$b=4p_2\ldots p_n+3$ сонини олайлик. У барча $p_1, p_2, \ldots, p_n$ туб сонлардан ҳеч кайсисига бўлинмасдан, 4k+3 кўринишдаги p натурал бўлувчига эга. Зиддиятликка келдик.

30-масала. 1001001001 соннинг 10000 дан катта бўлмаган туб бўлувчиларидан энг каттасини топинг.

Ечиш. $1001001001=1001\cdot 10^6+1001=1001\cdot(10^6+1)=7\cdot 11\cdot 13\cdot(10^6+1)=7\cdot 11\cdot 13\cdot(10^2+1)\cdot(10^4-10^2+1)=7\cdot 11\cdot 13\cdot 101\cdot 9901$

Жавоб. 9901

1.2-§. Бўлиниш муносабати. Натурал сон, натурал бўлувчиларининг сони ва йиғиндиси

$(Z,+,\cdot)$ - бутун сонлар ҳалқаси, $a,b\in Z$.

Маълумки, a сони b сонига бўлинади, агар шундай c сони ($c\in Z$), топилса, бунда $a=b\cdot c$ бўлса. Бўлинишга нисбатан хоссалари:

1)$\forall(a\in Z)a\vdots a,$ *чунки* $a=a\cdot 1$

2)$a:b\wedge b:c\Rightarrow a:c,$

3)$a\vdots b\wedge b\vdots c\Rightarrow(a\pm b)\vdots c$

4)$a\vdots b\wedge b\not\vdots c\Rightarrow(a\pm b)\not\vdots c$

5)$a\vdots c,$ *то*$\forall(b\in Z)(ab)\vdots c$

6)$a\vdots b\Rightarrow(-a)\vdots b\wedge a\vdots(-b)\wedge(-a)\vdots(-b)$

7)$\forall(a\in Z)a\neq 0, a\not\vdots 0$

8)$a\neq 0\wedge a\vdots b\Rightarrow|a|\geq|b|$

Таъриф. *a* бутун сонни *b* га ($b \neq 0$) колдикли бўлиш деб, шундай бутун $b \cdot q \le a < b(q+1)$ ва $0 \le a - b \cdot q < b$ $q, r \in Z$ сонга айтиладики, қуйидаги тенглик бажарилади:

$$a = bq + r, 0 \le r < |b|.$$

Қуйидаги теорема муҳим аҳамиятга эга.

1 - Теорема. $a, b \in Z, b \neq 0$ қандай бўлишидан қатъи назар, *a* ни *b* га доимо бир қийматли қолдиқли бўлиши мумкин.

Исбот. $a)$ $b \in Z$, $b > 0$. *b* каррали сонларни ўсиш тартибида жойлаштириб чиқамиз: $\ldots, b(-2), b(-1), b0, b1, b2, \ldots$

$bq \in Z$, бўлсин. Энг катта бутун сон, *a* дан устун бўлмасин. У ҳолда, $r = r_1$. $b \cdot q \le a < b(q+1)$ ва $0 \le a - b \cdot q < b$. $y = a - b \cdot q$ орқали белгилаймиз, унда:

$a = b \cdot q + r, \quad 0 \le r < b.$

b) $b \in Z, b < 0$ хоссасини кўриб чиқамиз. У ҳолда, -b>0. а) хоссасига мувофиқ, шундай $q, r \in Z$ мавжуд, $a = (-b) \cdot q + r, \quad 0 \le r < -b$ ёки $a = b \cdot (-q) + r, 0 \le r < -b$.

Ягоналиги. q, r, q_1, r_1 бутун сонлар бўлсин, бунда $a = b \cdot q + r$ ва

$$a = b \cdot q_1 + r_1, 0 \le r < |b| \text{ è } 0 \le r_1 < |b|.$$

Бу нисбатлардан:

$$b(q - q_1) = r_1 - r, 0 \le |r_1 - r| < |b| \Rightarrow |b|q - q_1| = |r_1 - r| \qquad (1.1)$$

га эга бўламиз.

Агар $q \neq q_1$ деб фараз қилинса, $(1.1) \Rightarrow |r_1 - r| \ge |b|$ бўлганлиги сабабли қарама-қарши фикрга келдик. Демак, $q \neq q_1$. У ҳолда, (1.1) дан келиб чиқади, $r = r_1$.

Изоҳ. Шуни айтиш жоизки, охирги *g)* хосса бўлиниш билан боғлиқ мулоҳазаларни бутун сонлар учун эмас, балки натурал сонлар учун юритишга имкон яратади.

2 га каррали бутун сонлар (яъни, $2k$ $, k \in Z$, кўринишдаги сонлар) *жуфт*, 2 га каррали бўлмаган бутун сонлар (яъни, $2k+1$, $k \in Z$, кўринишдаги сонлар) эса *тоқ* сонлар, деб юритилади.

Бунда қуйидагилар ўринли:

а) Иккита тоқ сонларнинг йиғиндиси ва айирмаси жуфт, кўпайтмаси эса тоқ сон бўлади.

б) Иккита жуфт сонларнинг йиғиндиси, айирмаси ва кўпайтмаси жуфт сон бўлади.

1-масала. *a* сонни 13 га бўлганда тўлиқмас бўлинма 17 га тенг бўлса, *a* нинг энг катта қийматини топинг.

Ечиш. Масала шартига кўра, $a = 13 \cdot 17 + r$, $0 \le r < 13$. Демак, $r = 12$ бўлганда *a* энг катта қийматга эришади, яъни $13 \cdot 17 + 12 = 233$.

2-масала. а) $a+1$ сон 3 га бўлинса, $4+7a$ сон ҳам 3 га бўлинишини исботланг:

b) $2+a$ ва $35-b$ сонлар 11 га бўлинса, $a \div b$ сон ҳам 11 га бўлинишини исботланг.

Ечиш.

a) $4 + 7a = 4(a + 1) + 3a$ бўлгани учун $4+7a$ сон 3 га бўлинади.

b) $a + b = (2 + a) - (35 - b) + 33$ бўлгани учун $a+b$ сон 11 га бўлинади.

3-масала. Бўлинувчи 371, тўлиқмас бўлинма 14 га тенг бўлса, бўлувчи ва унга мос қолдикларни топинг.

Ечиш. Масала шартига кўра, $371 = b \cdot 14 + r$, $0 \le r < b$, бундан $14b < 371$, $b \le 26$. Бошқа томондан $15b > 371$, бундан $b > 24$. Демак, $b=25; 26$ ва $r = 21; 7$ бўлади.

4-масала. Ихтиёрий *m* ва *n* бутун сонлар $mn(m+n)$ сони жуфт сон бўлишини исботланг.

Ечиш. Агар *m* ва *n* сонлардан бирортаси жуфт бўлса, у ҳолда $mn(m + n)$ сони жуфт сон бўлиши маълум. Шунинг учун *m* ва *n* сонлар иккаласи ҳам тоқ, бўлади деб фараз киламиз. У ҳолда, иккита тоқ сонларнинг $m+n$ йиғиндиси жуфт сон бўлганлиги сабабли $mn(m + n)$ сони жуфт бўлади.

5-масала. *a* сонни *b* сонга бўлганда бўлинма *q* ва нолмас колдиқ *r* га тенг. *a* ни қандай натурал *n* сонга кўпайтирганда бўлинма *n* марта ортади?

Ечиш. $an = bqn + rn$ дан $rn < b$ ва $a < \frac{b}{r}$.

6-масала. Берилган еттита сондан ихтиёрий олтитасининг йиғиндиси 5 га бўлинади. Бу сонлар ҳар бири 5 га бўлинишини исботланг.

Ечиш. Берилган сонларни a, b, c, d, e, f, g орқали, уларнинг йиғиндисини эса k орқали белгилаймиз. Масаланинг шартига кўра $k-a$, $k-b$, $k-c$, $k-d$, $k-e$, $k-f$, $k-g$ айирмалар барчаси 5 га бўлинади. Уларни қўшиб,

$$7k-(a+b+c+d+e+f+g)=6k$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан $6m$ сони 5 га бўлиниши келиб чиқади. Бу эса k сони 5 га бўлинганда бажарилади.

Шундай қилиб, k ва k–a сонлар 5 га бўлинади, демак, a=k-(k-a) сон ҳам 5 га бўлинади.

Худди шундай, қолган b, c, d, e, f ва g сонлар 5 га бўлиниши исботланади.

7-масала. Учта кетма - кет натурал сонлардан биттаси 3 га бўлинишини исботланг.

Ечиш. Натурал сонни $3m$, $3m + 1$, $3m + 2$ сонларнинг биттаси шаклида ифодалаш мумкин. Агар $n = 3m$ бўлса, у ҳолда $3|n$; агар $n = 3m + 1$ бўлса, у ҳолда $3|n + 2$; агар $n = 3m + 2$ бўлса, у ҳолда $3|n+1$.

8-масала. а) 3 та кетма–кет натурал сонларнинг кўпайтмаси 6 га бўлинишини исботланг.

b) 5 та кетма – кет натурал сонларнинг кўпайтмаси 120 га бўлинишини исботланг.

Ечиш. а) Берилган сонлардан камида биттаси жуфт сон бўлгани учун кўпайтма 2 га бўлинади. Худди шундай, берилган сонлардан камида биттаси 3 га каррали бўлгани учун кўпайтма 3 га бўлинади. Демак, кўпайтма 6=2·3 га бўлинади.

b) Берилган сонлардан камида биттаси 5 га, камида биттаси 3 га, камида иккитаси 2 га бўлиниши аниқ.

Бундан ташқари, 2 га бўлинадиган сонлардан камида биттаси 4 га бўлингани учун кўпайтма 5·3·2·4=120 га бўлинади.

9-масала. Агар беш хонали сон 41 га бўлинса, шу сонни ташкил қилган рақамларни айланма алмаштириш ёрдамида ҳосил бўлган ҳар қандай соннинг 41 га бўлинишини исботланг.

Ечиш. Беш хонали сон $N=10^4a+10^3b+10^2c+10d+e$ бўлсин ва у 41 га бўлинсин. Рақамларни айланма алмаштиришдан (чапга бир ракамга) қуйидаги сонни ҳосил киламиз:

$$N_1=10^4b+10^3c+10^2d+10d+a=10\left(10^4a+10^3b+10^2c+10d+e\right)-10^5a+a=10N-99999a.$$

$41|N$ ва $41|99999$ дан $41|N_1$ келиб чиқади.

10-масала. Ихтиёрий натурал k сон учун $7+7^2+\cdots+7^{4k}$ йиғинди, 400 га бўлинишини исботланг.

Ечиш. Берилган йиғиндини қуйидагича ёзамиз:

$$(7+7^2+7^3+7^4)+(7^5+7^6+7^7+7^8)+\cdots$$
$$+(7^{4k-3}+7^{4k-2}+7^{4k-1}+7^{4k})=$$
$$=(7+7^2+7^3+7^4)\cdot(1+7^4+7^8+\cdots+7^{4k-4})$$
$$=7\cdot400\cdot(1+7^4+7^8+\cdots+7^{4k-4})$$

Бундан, $7+7^2+\cdots+7^{4k}$ йиғинди 400 га бўлиниши келиб чиқади.

11-масала. $2^{2^n}+1(n=2,3,...)$ кўринишдаги барча сонлар 7 рақам билан тугашини исботланг.

Ечиш. $2^{2^2}+1=17$. Агар $2^{2^n}+1=10q+7$, бўлса, у ҳолда

$$2^{2^{n+1}}+1=\left(2^{2^n}\right)^2+1=(10q+6)^2+1=(10Q+6)+1=10Q+7.$$

12-масала. 7·11·13=1001 ни билган ҳолда 7, 11, 13 га умумий бўлиниш аломатини келтириб чикаринг. Бу аломатни 368312 га қўлланг.

Ечиш. $N = 1000q + r = 1001q + r - q$ дан N сон 7, 11 ва 13 га бўлиниши учун шу сондан унинг 1000 га бўлинганида ҳосил бўлган қолдиқдан айирмаси 7, 11 ёки 13 га бўлиниши зарур ва етарлиги келиб чиқади, яъни $7\cdot11\cdot13\ /(1-q)$. Агар $N = 368312$ бўлса, юкорида келтирилган айирма $368-312=56$.

56 фақат 7 га бўлинганлиги сабабли 368312 / 7 га бўлинади, лекин 11 ва 13 га бўлинмайди.

13-масала. $1^{2009}+2^{2009}+\cdots+16^{2009}$ натурал сон 17 га бўлинишини кўрсатинг.

Ечиш. Ихтиёрий $k=1,2,\ \ldots,\ 16$ учун

$$(17-k)^{2009}=17A-k^{2009}$$

тенглик ўринли, бу ерда A – натурал сон.

Демак, $k^{2009}+(17-k)^{2009}$ сони 17 га бўлинади.

$$1^{2009}+2^{2009}+\cdots+16^{2009}=(1^{2009}+16^{2009})+(2^{2009}+15^{2009})+\cdots$$
бўлгани учун берилган йиғинди ҳам 17 га бўлинади.

14-масала. Тўртта кетма-кет жойлашган бутун сонлар кўпайтмасига бир қўшилганда тўлиқ квадрат ҳосил бўлишини исботланг.

Ечиш. $m-1$, m, $m+1$, $m+2$ – тўртта кетма-кет келадиган бутун сонлар бўлсин. У ҳолда
$(m-1)m(m+1)(m+2)+1=(m-1)(m+2)(m^2+m)+1=(m^2+m-1)^2$.

15-масала. Барча натурал n сони ва m>2 тоқ сони учун $k=m^n$ сонни қараймиз. $1^k+2^k+\cdots+(m-1)^k$ сонини m га бўлинишини исботланг.

Ечиш. Маълумки, $k=m^n$ кўринишдаги сон тоқ бўлади.

Демак, барча натурал $i=1,2,\ldots,\frac{m-1}{2}$ – сонлар учун
$$i^k+(m-i)^k=m(i^{k-1}-i^{k-2}(m-i)+\cdots+(m-i)^{k-1})$$
тенгликларни ҳосил қиламиз.

Бу тенгликларни барчасини қўшиб чиқсак,
$$1^k+2^k+\cdots+(m-1)^k$$
сони m га бўлинишини ҳосил қиламиз.

16-масала. $11^{10}-1$ сонни 100 га бўлинишини исботланг.

Ечиш. Ньютон биномини қўллаймиз:
$(1+10)^{10}=1+C_{10}^1\cdot10+C_{10}^2\cdot10^2+C_{10}^3\cdot10^3+\ldots+10^{10}$.

Бундан
$(1+10)^{10}-1=10\cdot10+C_{10}^2\cdot10^2+C_{10}^3\cdot10^3+\ldots+10^{10}$ ҳар бир қўшилувчи 100 га бўлинади.

17-масала. x, y – бутун сонлар бўлсин. $2x+3y$ сони 17 га бўлиниши учун $9x+5y$ сони 17 га бўлиниши зарур ва етарли бўлишини исботланг.

Ечиш. Қуйидагиларга эгамиз:
$$17|(2x+3y)\Rightarrow17|\big(13(2x+3y)\big)\Rightarrow17|(26x+39y)\Rightarrow17|(9x+5y)$$

Демак, $2x+3y$ сони 17 га бўлинса, $9x+5y$ сони ҳам 17 га бўлинади.

Бошқа тарафдан
$$17|(9x+5y)\Rightarrow17|\big(4(9x+5y)\big)\Rightarrow17|(36x+20y)\Rightarrow17|(2x+3y)$$

Демак, $9x+5y$ сони 17 га бўлинса, $2x+3y$ сони ҳам 17 га бўлинади.

18-масала. Ҳар бир бутун n учун n^5-n сон 5 га бўлиниши исботланг.

Ечиш. $n^5-n=n(n^2-1)(n^2+1)$. Бутун сонни 5 га бўлганда қолдиқлар 0, 1, 2,
3, 4 бўлади ва бундан бутун сон $5к$, $5к+1$, $5к+2$, $5к+3$, $5к+4$, кўринишдан бирига тенг бўлиши келиб чиқади.

Агар $n=5к$ бўлса, n сон 5 га бўлинади; агар $n=5к+2$ ёки $n=5к+3$ бўлса, (n^2+1) сон 5 га бўлинади; агар $n=5к+1$ ёки $n=5к+4$ бўлса, (n^2-1) 5 га бўлинади.

19-масала. Барча бутун n сонлар учун қуйидагиларни исботланг:

а) n^5-5n^3+4n сони 120 га бўлинади;

b) n^2+3n+5 сони 121 га бўлинмайди.

Ечиш.

а) $n^5-5n^3+4n=n(n^2-1)(n^2-4)=n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$ бўлгани учун у 5 та кетма-кет натурал n-2, n-1, n, n+1, n+2 сонларнинг кўпайтмаси бўлади. Бундай сонлар эса $5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$ сонига бўлинади (текширинг).

б) $n^2+3n+5=(n+7)(n-4)+33$ тенглик бажарилишини кўрсатиш қийин эмас.

Агар $11|n^2+3n+5$ бўлса, у ҳолда $11|(n+7)(n-4)$, яъни $11\,|\,n+7$ ёки $11\,|\,n-4$ - бўлади.
$$(n+7)-(n-4)=11$$
бўлгани учун $121\,|(n+7)(n-4)$ бўлади. Аммо 33 сони 121 га бўлинмагани учун бу ҳолда n^2+3n+5 сони 121 га бўлинмайди.

Агар n^2+3n+5 сони 11 га бўлинмаса, у ҳолда n^2+3n+5 сони 121 га бўлинмайди.

20-масала. Рақамлар йиғиндиси бир хил бўлган икки сон айирмаси 9 га бўлинишини исботланг.

Ечиш. $N_1=\overline{a_n\ldots a_1a_0}$ ва $N_1=\overline{b_m\ldots b_1b_0}$ бўлсин.

$N_1=9Q_1+\sum_{i=0}^{n}a_i$ ва $N_2=9Q_2+\sum_{i=0}^{m}b_j$ дан шартга кўра,

$\sum a_i=\sum b_j$, демак, $N_1-N_2=9(Q_1-Q_2)$.

21-масала. Кетма-кет келган тўртта рақам бирин-кетин ёзилган бўлиб, дастлабки иккита рақам ўрни алмаштирилгандан сўнг тўла квадрат бўлган тўрт хонали сон ҳосил қилинган. Шу сонни топинг.

Ечиш. Масала шартига кўра,

$N^2 = 1000(x + 1) + 100x + 10(x + 2) + (x + 3) = 11(101x + 93)$.

Бундан $N = 11 \cdot k$ ва N тўла квадрат бўлганлигидан $11k^2 = 101x + 93$, яъни

$k^2 = \frac{101x+93}{11} = 9x + 8 + \frac{2x+5}{11}$. Бу ерда x = 3 келиб чиқади. Демак, $N = 11(101 \cdot 3 + 93) = 4356 = 66^2$.

1.3- §. Энг катта умумий бўлувчи ва Энг кичик умумий каррали. Евклид алгоритми

Таъриф. $a, b \in Z, a \nmid b \quad \delta \in Z$. бутун сонларнинг умумий бўлувчиси $a_1, a_2, \ldots a_n$, агар $a_i : \delta (i = \overline{1,n})$. $d \in Z$, $a_1, a_2, \ldots a_n$ бутун сонларнинг ЭКУБ и деб аталади агар:

а) d –шу сонларнинг умумий бўлувчиси бўлса;

б) d шу сонларнинг ҳар қандай умумий бўлувчисига бўлинади.

Таърифдан кўриниб турибдики, бутун сонларнинг ЭКУБи аниқ белгисигача аниқланган. $a_1, a_2, \ldots a_n$ бутун сонлар ЭКУБининг фақат мусбат қийматини кўриб чиқамиз ва уни $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ ёки ЭКУБ $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ деб белгилаймиз.

Лемма. Агар $a = b\,q + r$ бўлса, у ҳолда ЭКУБ(a, b) = ЭКУБ(b, r).

Икки бутун соннинг ЭКУБини топиш масаласини ечамиз.

$a, b \in Z, a \nmid b$ бўлсин. a ни b га қолдиқли бўламиз: $a = b\,q_0 + r_1$, $0 < r_1 < |b|$.

Энди b ни $r_1 : b = r_1\,q_0 + r_2$, $0 < r_2 < |b|$ га бўламиз ва ҳоказо.

Бу кетма-кет бўлиш жараёнини нолли қолдиқ ҳосил қилмагунча давом эттирамиз. Чунки $r_1 > r_2 > r_3 \ldots$ $a, b(a \nmid b, b \nmid a)$ натурал сонларининг кетма-кетлиги туғалланмас бўлиши мумкин эмас, зеро $n \in N$, шундай

натурал сон борки, у $r_{k-1} : r_n$. Натижада тенглик занжирини ҳосил қиламиз:

$$\left[\begin{array}{ll} a = bq_0 + r_1, & 0 < r < |b| \\ b = r_1 q_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 = r_2 q_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2 \\ r_{n-2} r_{n-1} q_{n-1} + r_n, 0 < r_n < r_{n-1} & \\ r_{n-1} = r_n q_n, r_{n+1} = 0 & \end{array}\right. \qquad (1.2)$$

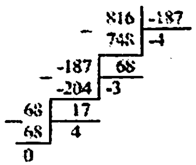
(1.2) тенгликдан $(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \ldots = (r_n, 0) = r_n$ ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, қуйидаги теоремага келамиз.

1 - Теорема. $a, b(a \nmid b, b \nmid a)$ бутун сонларнинг ЭКУБ и a, b бутун сонлар учун Евклид алгоритмида охирги нолли бўлмаган қолдиққа тенг.

Мисол. 816,-187 бутун сонларнинг энг катта умумий бўлувчисини топиш.

Ечиш. 816,-187 бутун сонларга Евклид алгоритмини қўллаймиз:



кўриниб турибдики, $816 = -187 \cdot (-4) + 68, -187 = 68 \cdot (-3) + 17, 68 = 17 \cdot 4$,

Нолдан фарқли қолдиқ 17 га тенг. Хусусан, (816,-187)=17.

2 - Теорема. $\exists (x, y \in Z), ax + by = d \; a_i \in Z \left(i = \overline{1,n}\right)$.бўлсин. Агар, $(a_1, a_2) = d_1, (a_3, d_1) = d_2, (a_4, d_2) = d_3, \ldots, (a_n, d_{n-2}) = d_{n-1}, токи (a_1, a_2, \ldots, a_n) = d_{n-1}$.

Бутун сонлар ЭКУБи қуйидаги хоссаларга эга:

1) катталигига кўра энг катта мусбат умумиий бўлувчи $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ шу сонларнинг ЭКУБи ҳисобланади;

2) $a, b \in Z, m \in N$, бўлсин, у ҳолда $(am, bm) = m(a, b)$;

3) агар $a \vdots m \wedge b \vdots m$, бўлса, у ҳолда, $\left(\frac{a}{m},\frac{b}{m}\right)=\frac{(a,b)}{m}$

4) агар $d=(a,b)$, бўлса, у ҳолда, $\exists(x,y\in Z),ax+by=d$.

Ўзаро туб бутун сонлар. Энг кичик умумий каррали бутун сонлар

Таъриф. $a_1,a_2,...,a_n$ бутун сонлар ўзаро туб деб аталади, агар ЭКУБ $(a_1,a_2,...,a_n)=1$ бўлса.

Ўзаро туб сонларнинг хоссалари

1. $a,b\in Z$ ўзаро туб сон ҳисобланади $\Leftrightarrow\exists(x,y\in Z)ax+by=1$.

Исбот. *а*) Шартга кўра, $(a,b)=1$. ЭКУБнинг 4-хоссасига кўра, $\exists(x,y\in Z)ax+by=1$.

б) Шартга кўра, $ax+by=1,(x,y\in Z)$. $(a,b)=d$ бўлсин.
$ax+by=1\Rightarrow 1\vdots d, d\in N\wedge 1\vdots d\Rightarrow d=1$. Бундан кўринадики, *a* ва *b* ўзаро бутун туб сонлар.

Хулоса. Агар ЭКУБ $(a,b)=1\Rightarrow a\vdots a_1, b\vdots b_1\Rightarrow(a_1,b_1)=1$.

Энг кичик умумий каррали бутун сонлар

Таъриф. *a* ва *b* сонларининг мусбат умумий карралилари ичида энг кичиги шу сонларнинг энг кичик умумий карралиси дейилади ва у $[a,b]$ орқали белгиланади.

$k\in Z$ бутун сон $a_1,a_2,...,a_n$ умумий каррали бутун сон деб аталади, агар $k\vdots a_i\left(i=\overline{1,k}\right)$ бўлса.

$m\in Z$ бутун сон $a_1,a_2,...,a_n$ энг кичик умумий каррали сон деб аталади, агар қуйидаги шартлар бажарилса:

а) *m* - умумий каррали бутун сон $a_1,a_2,...,a_n$;

б) ҳар қандай умумий каррали бутун сон *m* га бўлинади.

Бутун сонларнинг ЭКУБини фақат мусбат қийматини кўриб чиқамиз ва ЭКУК$(a_1,a_2,...,a_n)$ ёки $[a_1,a_2,...,a_n]$ белгилаймиз.

1 - Теорема. $\forall(a,b\in N),[a,b]=\frac{a\cdot b}{(a,b)}$.

1-хулоса $\forall(a,b\in Z),a\neq 0;b\neq 0.$учун шу сонларнинг ЭКУБи мавжуд.

2-хулоса $(a,b\in Z)$ энг кичик мусбат умумий каррали сони шу бутун сонларнинг ЭКУБи ҳисобланади.

Бутун сонларнинг ЭКУКи хоссалари

2) $a,b\in Z,m\in N$бўлса, у ҳолда $[am,bm]=m[a,b]$;

3) агар $a\vdots m\wedge b\vdots m$ бўлса, у ҳолда $\left[\frac{a}{m},\frac{b}{m}\right]=\frac{[a,b]}{m}$;

4) агар $d=(a,b)$ бўлса, у ҳолда $\exists(x,y\in Z),ax+by=d$.

Хоссалар

а) *p* туб сон бўлса, ихтиёрий натурал *m* сон учун (*p*, *m*)=*p*(*p*, *m*)=1 бўлади;

b) *d*=(*m*, *n*), $m=dm',n=dn'$ бўлса , у ҳолда $(m',n')=1$ бўлади;

c) *d*=(*m*, *n*), $m=d'm',n=d'n'$ ва $(m',n')=1$ бўлса, $d=d'$ бўлади;

д) агар $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ ва $n=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k}$ бўлса (бу ерда p_1, p_2, ..., p_k–туб сонлар, α_i, $\beta_i\geq 0$), у ҳолда $(m,n)=p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)}p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)}...p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}$ тенглик ўринли;

е) *a* ва *b* сонларининг энг катта умумий бўлувчиси шу сонларнинг барча умумий бўлувчиларига бўлинади.

1-масала. Иккита кетма-кет жуфт сонларнинг ЭКУБи 2 га, тоқ сонларнинг
ЭКУБи эса 1 га тенглигини исботланг.

Ечиш. $(2n, 2n+2)=2(n, n+1)=2$
$2n+3=(2n+1)\cdot 1+2$
$2n+1=2\cdot n+1$
$2=1\cdot 2$, бундан $(2n+1, 2n+3)=1$.

2-масала. (*Қолдиқли бўлиш ҳақида теорема*) *a* ва *b* ($b\neq 0$) бутун сонлар бўлса, у ҳолда $a=bq+r$ тенгликни қаноатлантирувчи ягона *q* ва *r* $(0\leq r<|b|)$ бутун сонлар мавжуд.

Ечиш. $[x]$ орқали $x \in R$ сонининг *бутун қисмини*, яъни x дан катта бўлмаган энг катта бутун сонни белгилаймиз.

$\{x\} = x - [x]$ тенглик билан $x \in R$ сонининг *каср қисми* аниқланади.

Бутун қисм ва каср қисм таърифларидан бевосита

$$\frac{a}{|b|} = \left[\frac{a}{|b|}\right] + \left\{\frac{a}{|b|}\right\}$$

тенглик келиб чиқади. Демак, $a = \left[\frac{a}{|b|}\right]|b| + \left\{\frac{a}{|b|}\right\}|b| = bq + r$

бу ерда

$$q = \left[\frac{a}{|b|}\right] sgnb, r = a - bq = \left\{\frac{a}{|b|}\right\}|b|.$$

Бундан $bq + r$ ва $0 \leq r < |b|$.

Агар $a = bq_1 + r_1$ тенглик бажарилса ($0 \leq r_l < |b|$), у ҳолда

$$b(q - q_1) = r_1 - r$$

бўлади. $0 \leq r, r_1 < |b|$ тенгсизликлардан

$$|b||q - q_1| = |r_1 - r| < |b|$$

тенгсизлик келиб чиқади, бундан $|q - q_1| < 1$. q, q_1 сонлар бутун бўлгани учун $q = q_1, r_1 = r$ га эга бўламиз.

Изоҳ. Юқоридаги q сон тўлиқсиз бўлинма, r сон эса a ни b га бўлинганда ҳосил бўлган қолдиқ деб юритилади.

Натижа. a сонининг бирор бўлувчисига мос бўлган бўлинма ягонадир.

3-масала. $(a, b) = 1$ дан $(a + b, a - b)$ 1 ёки 2 га тенглиги келиб чиқишини исботланг.

Ечиш. $(a + b, a - b) = d$ бўлсин, у ҳолда $d|2a$ ва $d|2b$. $(2a, 2b) = 2(a,b) = 2$ бўлганлиги сабабли $d|2$.

Демак, $d = 1$ ёки 2.

4-масала. Агар a сони b сонидан кичик бўлмасдан, $a=bq+r$ $(0 \leq p<b)$ бўлса, у ҳолда $(a,b)=(b,r)$ бўлади.

Ечиш. $D(a,b)$ орқали a ва b сонларнинг умумий бўлувчилари тўпламини белгилаймиз. $a = bq + r$ $(0 \leq r < b)$ ва $s \in D(a,b)$ бўлсин. Демак, $r=a-bq$ сони s сонига бўлинади, яъни $s \in D(b,r)$. Аксинча, $s \in D(b, r)$ бўлса, у ҳолда $a = bq + r$ сони s га бўлинади, яъни $s \in D(a,b)$. Демак, a сони b сонидан катта бўлмасдан, $a=bq + r$ $(0 \leq r< b)$ бўлса, у ҳолда, $D(a,b)$, $D(b,r)$ тўпламлар устма-уст тушади. Бундан уларнинг энг катта элементлари ўзаро тенг бўлиши келиб чиқади, яъни $(a,b),(b,r)$.

5-масала. Агар $u_1v_2 - u_2v_1 = 1$ бўлса, $(a,b) = (u_1a + v_1b, u_2a + v_2b)$ ни исботланг.

Ечиш. $(a, b) = d$ ва $(u_1a + v_1b, u_2a + v_2b) = d_1$ бўлсин. $d_1|(u_1a + v_1b), d_1|(u_2a + v_2b)$ ва $u_1v_2 - u_2v_1 = 1$ дан $d_1|a, d_1|b$ келиб чиқади, демак, $d_1|d, d_1|a, d_1|b$ дан $d_1|d$ келиб чиқади. Шундай қилиб, $d_1 = d$.

6-масала. $p > 3$ туб сон 6 га бўлинганда ҳосил бўлган қолдиқ 1 ёки 5 га тенг бўлишини исботланг.

Ечиш. $p > 3$ сон 6 га бўлинганда 2 ва 4 қолдиқлар ҳосил бўла олмайди, акс ҳолда p сон жуфт бўлар эди. $p > 3$ сон 6 га бўлинганда 3 қолдиқ ҳам ҳосил бўла олмайди, акс ҳолда p сон 3 га бўлинар эди. Демак, $p > 3$ туб сон 6 га бўлинганда ҳосил бўлган қолдиқ ёки 1 га ёки 5 га тенг бўлиши мумкин.

Натижа. $p > 3$ туб сон $6n \pm 1$ кўринишга эга.

7-масала. $3 = (51, 21)$ ни $51x + 21y$ шаклда ифодаланг.

Ечиш. $51 = 21 \cdot 2 + 9$, $21 = 9 \cdot 2 + 3$. Бундан

$$3 = 21 - 2 \cdot 9 = 21 - 2(51 - 21 \cdot 2) = 21 \cdot 5 - 51 \cdot 2.$$

8-масала. $p > 3$ туб соннинг квадрати 12 га бўлинганда ҳосил бўлган қолдиқ 1 га тенг бўлишини исботланг.

Ечиш. Олдинги масаланинг натижасига кўра $p = 6n \pm 1$ кўринишга, унинг квадрати эса $36n^2 \pm 12n + 1$ кўринишга эга. a ва b сонларнинг иккаласини ҳам бўладиган сон шу сонларнинг умумий бўлувчиси дейилади. $D(a, b)$ орқали a ва b сонларнинг умумий бўлувчилари тўпламини белгилаймиз. Маълумки, барча a ва b учун $D(a, b)$ тўплам юқоридан чегараланган. Шунинг учун a ва b сонларининг умумий бўлувчилари ичида энг каттаси мавжуд бўлиб, шу сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси дейилади ва (a, b) орқали белгиланади.

9-масала. 1428 ва 2765 сонларининг энг катта умумий бўлувчиси ва энг кичик умумий карралисини Евклид алгоритмидан фойдаланиб топайлик:

$$1428=2765 \cdot 0+1428;$$
$$2765=1428 \cdot 1+1337;$$
$$1428=1337 \cdot 1+91;$$

$$1337=91\cdot 14+63;$$
$$91=63\cdot 1+28;$$
$$63=28\cdot 2+7;$$
$$28=7\cdot 4+0;$$

Демак, $(1428, 2765)=7$.

Бу сонларнинг умумий карралисини топиш учун эса $[a,b]\cdot(a,b)=a\cdot b$ формуладан фойдаланамиз.

$$[1428,2765]=\frac{1428\cdot 2765}{7}=395\cdot 1428=564060.$$

10-масала. ab ва $m=[a,b]$ сонларнинг ЭКУБини топинг.

Ечиш. $(ab, m)=(dm, m)=m(d,1)=m$, бу ерда $d=(a,b)$.

11-масала. $(2n+13, n+7)$ ни топинг.

Ечиш. $(2n+13, n+7)=(n+7, n+6)=(n+6, 1)=1$.

12-масала. Учта кетма-кет натурал сонларнинг ЕКУБ ва ЕКУКини топинг.

Ечиш. $(n, n+1, n+2)=((n, n+1), n+2)=(1, n+2)=1$.

$$[n,n+1,n+2]=\left[[n,n+1],n+2\right]=\left[n(n+1),n+2\right]=$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{\left(n(n+1),n+2\right)}=\frac{n(n+1)(n+2)}{(n,n+2)},(n,n+2)n$$

нинг жуфт-тоқлигига қараб 2 ёки 1 бўлади.

Демак, агар n тоқ бўлса, $[n, n+1, n+2]=n(n+1)(n+2)$ ва агар n жуфт бўлса, $[n,n+1,n+2]=\frac{n,(n+1)(n+2)}{2}$.

13-масала. (160, 72) ни 160 ва 72 сонлар оркали чизикли ифодасини топинг.

Ечиш. $160=72\cdot 2+16$, $72=16\cdot 4+8$, $16=8\cdot 2$.

Иккинчи тенгликдан $8=72-16\cdot 4$, биринчи тенгликдан эса $16=160-72\cdot 2$ келиб чикади. Шу тенгликларга кўра:

$$8=72-16\cdot 4=72-(160-72\cdot 2)\cdot 4=(-4)\cdot 160+9\cdot 72.$$

Демак, $(160, 72)=8=(-4)\cdot 160+9\cdot 72$.

Маълумки, ўзаро туб a,b сонлар учун $(a,b)=1$ тенглик бажарилади. Айрим адабиётларда бу тенглик ўзаро туб сонлар таърифи сифатида қабул қилинган.

Қуйидаги хоссага эгамиз:

Хосса. a,b сонлари ўзаро туб сон бўлиши учун $am+bn=1$ шарт зарур ва етарли, бу ерда m ва n бутун сонлар.

14-масала. Иккита соннинг ЭКУБи шу сонлар айирмасидан катта бўлиши мумкинми?

Ечиш. $a>b$ ва $(a, b)=d$ бўлсин. Бундан $a=dx$, $b=dy$ ва $x-y>0$ бўлади. Агар $d>a-b=d(x-y)$ бўлса, $1>x-y$ ва $0<x-y<1$ ни ҳосил қиламиз. Бу тенгсизлик ўринли эмас, чунки x ва y – бутун сонлар.

Демак, $(a, b)\le a-b$ $(a>b)$ бўлади.

15-масала. a ва b натурал сонлар учун маълумки, a^2+b^2 сон ab га бўлинади. $a=b$ тенгликни исботланг:

Ечиш. $d=(a,b), a=du, b=dv$.

d^2 га қисқартириб, u^2+v^2 сони uv га бўлинишини ҳосил қиламиз. Аммо, $(u^2+v^2, uv)=1$, чунки u ва v ўзаро туб. Демак,

$$uv=1.$$

Бундан $u=v=1$, $a=b=d$ эканлиги келиб чиқади.

16-масала.

$\begin{cases}x+y=150\\(x,y)=30\end{cases}$ системанинг натурал ечимларини топинг.

Ечиш. $(x, y)=30$ қуйидаги системага тенг кучли.

$$\begin{cases}x=30u\\y=30v\\(u,v)=1.\end{cases}$$

Бундан берилган системанинг биринчи тенгламаси $u+v=5$ кўринишга келади ва $u=1,2,3,4$ қийматлар қабул қилади. Демак, $x=30, 60, 90,120$ га тенг бўлиши мумкин. $y=150-x$ дан $y=120, 90, 60, 30$.

17-масала. $m\ge n$ бўлсин. Қуйидагиларни исботланг:

$$(a^m-1, a^n-1)=a^{(m,n)}-1(a>1);$$

Ечиш. Маълумки, $(a^n, a^n-1)=1$. Демак,

$$(a^m-1, a^n-1)=(a^m-a^n, a^n-1)=(a^n(a^{m-n}-1), a^n-1)$$
$$=(a^{m-n}-1, a^n-1).$$

Шунинг учун a^m-1, a^n-1 сонлар учун Евклид алгоритми m,n даражалар учун ҳам Евклид алгоритмига ўтади ҳамда (m,n) ва 0 да тугалланади.

18-масала. Натурал сонлардан ташкил топган a_i кетма–кетлик учун $i \neq j$ ларда $(a_i, a_j) = (i, j)$ тенглик бажарилади. Барча i лар учун $a_i = i$ бўлишини исботланг.

Ечиш. Ҳар бир a_i учун $(a_i, a_{2i}) = (i, 2i) = i$ га бўлинганлиги боис $a_i \geq i$ бўлади.

Фараз киламиз, бирор i учун $a_i > i$ тенгсизлик бажарилсин. У ҳолда,

$$(a_{a_i}, a_i) = (a_i, i) = i.$$

Бошқа томондан a_{a_i} сон a_i га бўлинганлиги учун $(a_{a_i}, a_i) = a_i > i$. Зиддият.

19-масала. Маълумки, ўзаро тенг бўлмаган натурал a, b сонлар учун $a\,b\,|a^2 + ab + b^2$ муносабат ўринли. $|a - b| > \sqrt[3]{ab}$ тенгсизликни исботланг.

Ечиш. $g = (a, b)$ деб олсак, $a = x\,g$, $b = y\,g$ тенгликларга эга бўламиз, бу ерда x, y – ўзаро туб бўлган сонлар. Бундан

$$\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} = \frac{xy(x+y)g}{x^2+xy+y^2} \in Z$$

муносабатларга эга бўламиз.

$$(x^2 + xy + y^2, x) = (y^2, x) = 1, (x^2 + xy + y^2, y) = (x^2, y)$$
$$= 1, (x + y, y) = 1$$

тенгликлардан

$$(x^2 + xy + y^2, x + y) = (y^2, x + y) = 1$$

тенгликни хосил киламиз.

Шунинг учун энг катта умумий бўлувчининг хоссаларидан $x^2 + xy + y^2|\,g$ муносабатга эга бўламиз. Бундан $g \geq x^2 + xy + y^2$. Демак,

$$|a - b|^3 = |g(x - y)|^3 g = g^2|x - y|^3 g \geq g^2 \cdot 1 \cdot (x^2 + xy + y^2) > g^2xy = ab$$

20-масала (1–ХМО). Барча натурал n сонлар учун $\frac{21n+4}{14n+3}$ каср қискармас каср бўлишини кўрсатинг.

Ечиш. $3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 1$ бўлгани учун $21n + 4$ ва $14n + 3$ сонлар ўзаро туб сонлар, яъни $\frac{21n+4}{14n+3}$ каср қисқармас бўлади.

21-масала. a, b, c бутун сонлар берилган бўлсин. Шундай ўзаро туб k, l сонлар топиладики $a\,k + b\,l$ сон c га бўлинади. Исботланг.

Ечиш. $|a| + |b|$ бўйича индукцияни қўллаб исботлаймиз. $a = 0$ ёки $b = 0$ бўлса натижа осонлигича келиб чиқади. k ва l сонларнинг ишорасини ўзгартиб, $a > 0$ ва $b > 0$ деб олишимиз мумкин.

Бу ҳолда $|a| + |b| > |a - b| + |b|$. Индукция фаразига кўра, шундай ўзаро туб k' ва l' сонлар топиладики, улар учун $(a - b)k' + bl'$ сон c сонига бўлинади. Бундан $ak' + b(l' - k')$ сон c сонига бўлиниши келиб чиқади.

k' ва l' ўзаро туб бўлгани учун $k = k'$ ва $l = l' - k'$ ўзаро тублиги келиб чиқади.

22-масала. Барча m, n бутун сонлар учун $[m, n] \cdot (m, n) = |mn|$ тенгликни исботланг.

Ечиш. $[a, b] = [|a|, |b|]$ бўлгани учун фақат натурал m, n сонлар учун исботлаймиз.

$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ ва $n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$ бўлсин (бу ерда n=1, 2 , ..., n , nk – туб сонлар, $\alpha_i, \beta_i \geq 0$), у ҳолда

$$(m, n) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \dots p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)} \quad \text{ва} \quad [m, n]$$
$$= p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)} \dots p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}$$

тенгликлар ўринли. Бундан

$$(m, n)$$
$$= p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)} \dots p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)} p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)} =$$
$$= p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)+\max(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2,\beta_2)} \dots p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)+\max(\alpha_k,\beta_k)} =$$

$p_1^{\alpha_1+\beta_1} p_2^{\alpha_2+\beta_2} \dots p_k^{\alpha_k+\beta_k} = mn$ келиб чиқади.

1.4-§. Чекли занжир касрлар, муносиб касрлар хоссалари

Икки номаълумли чизиқли тенгламалар. a ва b натурал сонлар учун Евклид алгоритми қуйидагича бўлсин:

$$a = bq_1 + r_1 \quad 0 \leq r_1 < b;$$
$$b = r_1q_1 + r_2, 0 \leq r_2 < r_1;$$
$$r_1 = r_2q_2 + r_3, 0 \leq r_3 < r_2;$$

....

$$r_{n-2}=r_{n-1}q_{n-1}+r_n, 0\le r_n<r_{n-1};$$

$$r_{n-1}=r_nq_n+r_{n-1};r_{n+1}=0;$$

Ҳар бир тенгликни бўлувчиларга бўлиб чиқамиз:

$$\frac{a}{b}=q_0+\frac{r_1}{b_1}; \qquad (1.3)$$

$$\frac{b}{r_1}=q_1+\frac{r_2}{r_1}; \qquad (1.4)$$

$$\frac{r_1}{r_2}=q_2+\frac{r_3}{r_2};$$

....

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}=q_{n-1}+\frac{r_n}{r_{n-1}}(n+1).$$

Натижада тенгликлар ҳосил бўлади.

У ҳолда, $\frac{a}{b}=q_0+\frac{1}{\frac{b}{r_1}}$; (1.3) тенгликка (1.4) тенгликдаги $\frac{b}{r_1}$ қийматини қўйсак,

$$\frac{a}{b}=q_0+\frac{1}{\frac{b}{r_1}}=q_0+\frac{1}{q_1+\frac{r_2}{r_1}}=q_0+\frac{1}{q_1+\frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}$$

$$\frac{a}{b}=q_0+\frac{1}{q_1+\frac{1}{q_2+\frac{r_2}{r_1}}}=q_0+\frac{1}{q_1+\frac{1}{q_2+\frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}}$$

ифодага эга бўламиз. Бу жараённи давом эттирсак,

$$\frac{a}{b}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3}+\cfrac{}{\ddots\cfrac{1}{q_n}}}}$$

тенглик келиб чиқади.

Бу ифода $\frac{a}{b}$ рационал соннинг *занжир касрга ёйилмаси* дейилади. “Занжир каср ” “узлуксиз каср ” деб ҳам аталади.

Занжир касрлар $[q_0,q_1,...q_n]$ кўринишида белгиланади.

1-мисол. $\frac{120}{31}=3+\frac{27}{31}=3+\frac{1}{\frac{31}{27}}=3+\frac{1}{1+\frac{4}{27}}=3+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{27}{4}}}=3+\frac{1}{1+\frac{1}{6+\frac{3}{4}}}$

ёки $\frac{120}{31}=[3,1,6,4]$.

$\frac{a}{b}=[q_0,q_1,...,q_n]$ занжир каср берилган бўлсин. У ҳолда $[q_0,q_1,...,q_n],k\le n$ занжир каср k- муносиб каср дейилади ва $\frac{P_k}{Q_k}$ кўринишда белгиланади. $\frac{P_n}{Q_n}=\frac{a}{b}$ бўлиши аён.

Муносиб касрлар қуйидаги хоссаларга эга. Агар $k\ge 2$ бўлса,

1. $P_k=P_{k-1}\cdot q_k+P_{k-2}, Q_k=Q_{k-1}\cdot q_k+Q_{k-2}$;

2. $\frac{P_0}{Q_0}<\frac{P_2}{Q_2}...<\frac{a}{b}=\frac{P_r}{Q_n}<...<\frac{P_5}{Q_5}<\frac{P_3}{Q_3}<\frac{P_1}{Q_1}$;

3. $\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}=\frac{(-1)^{k-1}}{Q_k\cdot Q_{k-1}}$;

4. $P_k\cdot Q_{k-1}-Q_k\cdot P_{k-1}=(-1)^{k-1}$.

Бу хоссаларнинг исботи бевосита таърифдан математик индукция методини қўллаш ёрдамида ҳосил қилиниши мумкин.

Масалан 1– хоссанинг исботини кўриб чиқайлик:

$\frac{P_0}{Q_0}=\frac{q_0}{1},\frac{P_1}{Q_1}=q_0+\frac{1}{q_1}=\frac{q_0q_1+1}{q_1}$; бўлгани учун $P_0=q_0,Q_0=1;P_1=q_0\cdot q_1+1,Q_1=q_1$ бўлиши равшан. У ҳолда, *k=2* учун

$$\frac{P_2}{Q_2}=q_0+\frac{1}{\frac{q_1q_2+1}{q_2}}=q_0+\frac{q_2}{q_1q_2+1}=\frac{q_0q_1q_2+q_0+q_2}{q_1q_2+1}=\frac{(q_0q_1+1)q_2+q_0}{q_1q_2+1}=\frac{P_1\cdot q_2+P_0}{Q_1\cdot q_2+Q_0}$$

Бундан $P_2=P_1\cdot q_2+P_0;Q_2=Q_1\cdot q_2+Q_0$ ҳосил бўлади.

Фараз қилайлик, k натурал сон учун 1-хосса тўғри бўлсин. 1-хоссани *k+1* учун исбот қиламиз. Яъни, $\frac{P_k}{Q_k}=\frac{P_{k-1}\cdot q_k+P_{k-2}}{Q_{k-1}\cdot q_k+Q_{k-2}}$; бўлсин. $\frac{P_k}{Q_k}$ муносиб касрдан $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ муносиб касрни ҳосил қилиш учун q_k ни $q_k+\frac{1}{q_{k+1}}$ билан алмаштириш кифоя.

Шунинг учун

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}=\frac{P_{k-1}(q_k+\frac{1}{q_{k+1}})+P_{k-2}}{Q_{k-1}(q_k+\frac{1}{q_{k-1}})+Q_{k-2}}=\frac{P_{k-1}q_kq_{k-1}+P_{k-1}+q_{k+1}}{Q_{k-1}q_kq_{k-1}+Q_{k-1}+Q_{k-2}\cdot q_{k+1}}=$$

$$=\frac{(P_{k-1}q_k+P_{k-2})q_{k+1}+P_{k-1}}{(Q_{k-1}q_k+Q_{k-2})q_{k+1}+Q_{k-1}}=\frac{P_k\cdot q_{k+1}+P_{k-1}}{Q_k\cdot q_{k+1}+Q_{k-1}};$$

Демак, $P_{k+1}=P_kq_{k+1}+P_{k-1};Q_{k+1}=Q_kq_{k+1}+Q_{k-1}$.

Қолган хоссаларни мустақил исбот қилиб кўринг.

4 - хоссадан $(P_k,Q_k)=1$, яъни, муносиб касрнинг сурат ва махражи ўзаро туб сон бўлиши келиб чиқади. Чунки $P_kQ_{k-1}-Q_kP_{k-1}=(-1)^{k-1}$ сон P_k ва Q_k сонларнинг энг катта умумий бўлувчисига бўлинади.

Демак, $\frac{a}{b}$ каср қисқартирилмаган бўлса, у ҳолда $\frac{a}{b}$ ни занжир касрга ёйиб қискартириш мумкин.

2-мисол. $\frac{1341}{2013}$ касрни занжир касрга ёйилик:

$$1341=2013\cdot0+1341$$
$$2013=1341\cdot1+672$$
$$1341=672\cdot1+669$$
$$672=669\cdot1+3$$
$$669=3\cdot223$$

У ҳолда

$$\frac{1341}{2013}=[0,1,1,1,3]=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{223}}}}=\frac{447}{671}$$

Агар $(a,b)=1$ бўлса, яъни $\frac{a}{b}$ каср қискармас каср бўлса, у холда $P_k\cdot Q_{k-1}-Q_k\cdot P_{k-1}=(-1)^{k-1}$ тенгликдан $P_n\cdot Q_{n-1}-Q_n\cdot P_{n-1}=(-1)^{n-1}$ ёки $a\cdot Q_{n-1}-b\cdot P_{n-1}=(-1)^{n-1}$ ҳосил бўлади. Бундан $a\cdot|Q_{n-1}\cdot(-1)^{n-1}|-b\cdot|P_{n-1}\cdot(-1)^{n-1}|=1$ тенгликка эга бўламиз. Уни c га кўпайтирсак, $a\cdot|c\cdot Q_{n-1}\cdot(-1)^{n-1}|-b\cdot|c\cdot P_{n-1}\cdot(-1)^{n-1}|=c$ тенглик ҳосил бўлади. Демак, $(a,b)=1$ бўлганда

$$ax-by=c \tag{1.5}$$

тенгламанинг ечимларидан бири

$$\begin{cases}x_0=c\cdot Q_{n-1}\cdot(-1)^{n-1}\\ y_0=c\cdot P_{n-1}\cdot(-1)^{n-1}\end{cases} \tag{1.6}$$

ҳосил бўлади. (1.6) тенгламанинг умумий ечими

$$\begin{cases}x=x_0+b\cdot m\\ y\ =y_0+a\cdot m\end{cases} \tag{1.7}$$

формула билан ҳисобланади.

3-мисол. $25x-16y=9$ тўпламни бутун сонлар тўпламида ечинг.

$$\frac{25}{16}=1+\frac{9}{16}=1+\frac{1}{\frac{16}{9}}=1+\frac{1}{1+\frac{7}{9}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{9}{7}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{2}{7}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{7}{2}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\frac{1}{2}}}}$$

$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}=\frac{11}{7}$. Демак, $\frac{P_1}{Q_1}=\frac{11}{7}$. Топилган қийматларни (1.7) формулага қўйиб,

$$\begin{cases}x=9\cdot Q_1\cdot(-1)^3+16m,\\ y\ =9\cdot P_1\cdot(-1)^3-25m,\end{cases} m\in Z$$

Қийматларни бундан $\begin{cases}x=9\cdot7+16m=-63+16m\\ y\ =-9\cdot11+25m=-99+25m\end{cases} m\in Z$

Умумий ечимни топамиз. Хусусий ечим сифатида $\begin{cases}x=-63\\ y\ =-99\end{cases}$ ни олиш мумкин.

Текшириш: $25\cdot(-63)-16\cdot(-99)=-1575+1584=9$

4-масала. Битта қутичада пашшалар билан чумолилар бор. Уларнинг оёқлари сони 76 та. Пашшанинг 8 тадан оёғи, чумолининг эса 6 тадан оёғи бор бўлса, қутичада нечта пашша ва чумоли бор?

Ечиш. Фараз қилайлик, қутичада х дона пашша ва у дона чумоли бор. Масала шартига кўра, 8х + 6у = 76 ёки 4х-(-3у)=38. Бундан $\frac{4}{3}=1+\frac{1}{3}$.

Демак, $\begin{cases}x=38+3m\\ y\ =-38-4m\end{cases} m\in Z$

Лекин масала шартига кўра, к > 0, y > 0 . Топилган ечимларнинг мусбатларини олишимиз керак. Яъни, $\begin{cases} 38+3m\geq 0 \\ -38-4m\geq 0 \end{cases} m \in Z$ Бундан $-\frac{38}{3} \leq m \leq -\frac{19}{2}$, ундан эса $-12\frac{2}{3} \leq m \leq -9\frac{1}{2}$ келиб чиқади. Агар, m=-10, бўлса, x=8; y=2; агар m=-11, бўлса, x=5; y=6; агар m=-12 бўлса, x=2; y=10 бўлади. Демак, масала ечими қуйидагилардан иборат:

$$1)\begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases} \quad 3)\begin{cases} x=2 \\ y=10 \end{cases}$$

Иррационал сонларни занжир каср кўринишида ифодалаш

Агар α иррационал сон берилган бўлса, унинг бутун қисмини ажратиб, қуйидагича ёзиб олишимиз мумкин: $\alpha=[\alpha]+\{\alpha\}$. Бу ерда $[\alpha]$ - берилган α иррационал соннинг бутун қисми, $\{\alpha\}$ - берилган α иррационал соннинг каср қисми бўлиб, албатта, $[\alpha]\geq 1, 0<\{\alpha\}<1, [\alpha]$ни $\frac{1}{\alpha_1}, (\alpha_1>1)$ кўринишда ёзиб олсак, $\alpha=q_0+\frac{1}{\alpha_1}$ ҳосил бўлади.

Энди α_1 учун юқоридаги жараённи такрорлаб, α_1 ни $\alpha_1=q_1+\frac{1}{\alpha_2}$ кўринишида ёзиб оламиз ва ҳоказо:

$$\alpha_1=q_1+\frac{1}{\alpha_2}, q_1=[\alpha_1], \alpha_2>1;$$

$$\alpha_2=q_2+\frac{1}{\alpha_3}, q_2=[\alpha_2], \alpha_3>1.$$

Бу жараённи n марта такрорласак, $\alpha=[q_0,q_1,\ldots,q_{n-1},\alpha_n]$занжир каср ҳосил бўлади. Бу жараённи чексиз давом эттирсак, $\alpha=[q_0,q_1,\ldots,q_{n-1},q_n,\ldots]$ чексиз занжир каср ҳосил бўлади.

Агар α квадрат иррационаллик бўлса, яъни шундай a,b,c лар мавжуд бўлиб, $\alpha=\frac{a+\sqrt{b}}{c}$ кўринишда ёзиш мумкин бўлса, у ҳолда α ни чексиз даврий занжир каср сифатида ифода қилиш мумкин.

Мисол. $\sqrt{2}$ ни чексиз даврий занжир касрга ёйинг.

Ечиш:

$$\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}=\ldots=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\ldots}}}$$

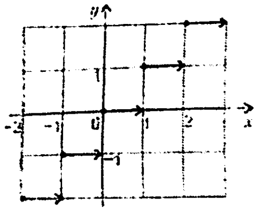
Демак, $\sqrt{2}=[1,(2)]$

1.5-§. Сонлар назариясида муҳим функциялар

Таъриф. $x \in P$ соннинг $[x]$ *бутун қисми* деб, x дан катта бўлмаган энг катта бутун сонга айтилади.

Масалан, $[-1{,}5]=-2, [-1]=-1, [0]=0, [1{,}5]=1, [\pi]=3$.

Умуман олганда, таърифга биноан, $[x]=k$ тенглик қуйидагини билдиради: k сон $k \leq x < k+1$ шартни қаноатлантирадиган бутун сондир.



1.1-расм

$y=[x]$ функциянинг графиги зинасимон кўринишга эга (1.1-расм).

$\{x\}=x-[x]$ тенглик билан $x \in R$ соннинг *каср қисми* аниқланади.

Масалан,

$$\{-0{,}3\}=0.7; \left\{-\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}; \{\sqrt{2}\}=\sqrt{2}-1; \{-2\sqrt{5}\}=2-\sqrt{2}; \{1\}=0$$

x соннинг бутун қисми, яъни $[x]$ қўш тенгсизлик билан $[x]\leq x \leq [x]+1$ ёки $x-1<[x]\leq x$ ёки $x=[x]+\alpha, 0\leq\alpha\leq 1$ тенглик билан аниқланади ва антъйе функция дейилади.

Агар x_1 ва x_2 сонлардан бирортаси бутун бўлса,

$$[x_1+x_2]=[x_1]+[x_2]$$

ўринли бўлади.

$\left[\frac{x}{m}\right]=\left[\frac{[x]}{m}\right]$ ўринли бўлади.

$m!$ кўпайтманинг каноник ёйилмасига p туб сон

$$\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{m}{p^s}\right]$$

даражада келади, бу ерда S сон $p^s \le m < p^{s+1}$ тенгсизликдан аникланади.

Хоссалари:

1) $[x] \le x$; 2) $[x+a]=[x]+a$; 3) $[x+y] \ge [x]+[y]$

бу ерда a ихтиёрий бутун , x, y – ихтиёрий сонлар.

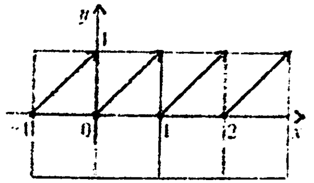
4) $\{x\}=x$ тенглик $0 \le x < 1$ бўлгандагина бажарилади;

5) $\{x\}=\{y\}$ тенглик $x\text{-}y=n$ (бу ерда n-бутун сон) бўлгандагина бажарилади;

6) Ихтиёрий x учун $\{x+1\}=\{x\}$ бўлади.

Шундай қилиб, $y=\{x\}$ функция энг кичик даври 1 га тенг бўлган даврий

функциядир. Унинг графиги (1.2-расм) келтирилган.



1.2-расм

Натурал соннинг бўлувчилар сони ва улар йиғиндиси

Ихтиёрий натурал a сон учун $\tau(a)$ ва $S(a)$ функциялар мос равишда a соннинг натурал бўлувчилари сони ва уларнинг йиғиндисини ифодалайди. Бу функциялар учун қуйидаги формулалар ўринли:

$$r(a)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)=\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i+1)$$

$$S(a)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\ldots\frac{p_n^{\alpha_n+1}-1}{p_n-1}=\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}$$

бу ерда: $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}=\prod_{i=1}^{n}p_i^{\alpha_i}$ - a соннинг каноник ёйилмаси.

Бу функциялар мултипликатив, яъни агар $(a,b)=1$ лар учун $\tau(ab)=\tau(a)\,\tau(b)$ ва $S(ab)=S(a)S(b)$ ўринли.

Эйлер функцияси.

$\varphi(a)$ – *Эйлер* функцияси a соннинг барча натурал қийматларида аникланган

бўлиб, a дан катта бўлмаган ва у билан ўзаро туб бўлган сонлар сонини билдиради.

$\varphi(1)=1$ деб қабул қилинган. Эйлер функцияси:

$$\varphi(a)=a\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_n}\right)=\left(p_1^{\alpha_1}-p_1^{\alpha_1-1}\right)\left(p_2^{\alpha_2}-p_2^{\alpha_2-1}\right)\ldots\left(p_n^{\alpha_n}-p_n^{\alpha_n-1}\right)$$

формула ёрдамида ҳисобланади, бу ерда $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}$ – соннинг каноник ёйилмаси.

Хусусан, $\varphi(p^a)=p^a-p^{a-1}, \varphi(p)=p-1$.

Эйлер функцияси мултипликатив, яъни ўзаро туб $a,b,\ldots,k$ сонлар учун $\varphi(ab\ldots k)=\varphi(a)\varphi(b)\ldots\varphi(k)$ шарт бажарилади.

Мёбиус функцияси

Барча натурал сонлар учун аникланган

$$\mu(a)=\begin{cases}1, & агар \qquad a=1\\ (-1)^k, & агар \quad a=p_1p_2\ldots p_k, \quad p_i=p_j, \quad i\ne j\\ 0, & агар \quad a\ туб \quad сон \quad квадратига \quad бўлинса\end{cases}$$

кўринишдаги функцияга *Мёбиус функцияси* деб аталади.

Бу функция мултипликативдир, яъни агар $(a,b)=1$ бўлса, $\mu(a,b)=\mu(a)\mu(b)$.

Агар $\theta(a)$ – ихтиёрий мултипликатив функция бўлса, у ҳолда

$$\sum_{d|a}\mu(d)\theta(d)=\begin{cases}1, & агар \quad a=1\\ \prod_{p/a}(1-\theta(p)), & агар \quad a\ne 1.\end{cases}$$

Агар бу формулада $\theta(a)\equiv1$ ва $\theta(a)=\frac{1}{a}$ деб олсак, қуйидаги формулаларни ҳосил киламиз:

$$\sum_{d|a}\mu(d)=\begin{cases}1, & агар \quad a=1\\ 0, & агар \quad a\ne 1\end{cases}$$

$$\sum_{d|a}\frac{\mu(d)}{d}=\begin{cases}1, & агар \quad a=1\\ \prod\limits_{p/a}\left(1-\frac{1}{p}\right), & агар \quad a>1.\end{cases}$$

Агар бутун a лар учун $f(a)$ – функция бир қийматли бўлиб,

$F(a)=\sum\limits_{d|a}f(d)\ \ (d>0)$

ўринли бўлса, у ҳолда

$f(a)=\sum\limits_{d|a}\mu(d)F\left(\frac{a}{d}\right)$

тенглик ўринлидир (Мёбиуснинг тескарилаш формуласи)

1-масала. 2002 соннинг бўлувчилар сони ва уларнинг йиғиндисини топинг.

Ечиш. $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, бундан

$$\tau(2002) = (1+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 16$$

$$S(2002)=\frac{2^{1+1}-1}{2-1}\cdot\frac{7^{1+1}-1}{7-1}\cdot\frac{11^{1-1}-1}{11-1}\cdot\frac{13^{1+1}-1}{13-1}=3\cdot8\cdot12\cdot14=4032.$$

2-масала. 2002 соннинг барча бўлувчиларини топинг.

Ечиш. 2002=2·7·11·13 - каноник ёйилмасидан фойдаланамиз: (1+2)(1+7)(1+11)(1+13)=1+2+7+11+13+14+22+26+77+91+143+154+18 2+286+ +1001+2001-2002 нинг барча бўлувчилари йиғиндиси, демак, ҳар бир қўшилувчи изланаётган бўлинмаларни беради.

3-масала. $3-2\cos\frac{90\pi}{181}$ соннинг бутун қисмини топинг.

Ечиш. $a\in Z$ ва x каср сон учун $[a-x] = a + [-x]$ формула ўринли. Бу формулани қўллаб

$$\left[3-2\cos\frac{90\pi}{181}\right]=3+\left[-2\cos\frac{90\pi}{181}\right]=3+(-1)=2$$

ни ҳосил қиламиз.

4-масала. $x^2-10[x]+9=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Фараз қилайлик, $[x] = k$ бўлсин. $k \geq 0$ эканлиги тушунарли.

$x \geq k$ бўлганлиги учун $x \geq 0$. Натижада $x^2-10[x]+9 \leq 0$ тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Бундан $1 \leq x \leq 9$ келиб чиқади, бундан $1 \leq k \leq 9$. x^2+9 сон 10 га бўлинувчи бутун сондир. Текширишлар шуни кўрсатадики, $1; \sqrt{61}; \sqrt{71}$ сонлар тенгламани қаноатлантиради.

5-масала. 180 дан катга бўлмаган ва 5, 7, 11 ларга бўлинмайдиган сонлар сонини топинг.

Ечиш. $n = 180$ ва $p_1 = 5, p_2 = 7, p_3 = 11$ лар учун

$$B(180;5,7,11)=[180]-\left[\frac{180}{5}\right]-\left[\frac{180}{7}\right]-\left[\frac{180}{11}\right]+\left[\frac{180}{5\cdot7}\right]+\left[\frac{180}{5\cdot11}\right]+\left[\frac{180}{7\cdot11}\right]-\left[\frac{180}{5\cdot7\cdot11}\right]=$$
$$=180-36-25-16+5+3+2-0=113.$$

6-масала . $\left[\frac{2x+1}{3}\right] = [x]$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Фараз қилайлик, $[x] = k$. У ҳолда

$$\begin{cases}k\leq\frac{2x+1}{3}<k+1\\ k\leq x<x+1\end{cases}$$

тенг кучли системани ёзамиз:

$$\begin{cases}\frac{3k-1}{2}\leq x<\frac{3k+2}{2}\\ k\leq x<x+1\end{cases}$$

Бундан k қуйидаги тенгсизликни қаноатлантириши келиб чиқади:

$$\frac{3k-1}{2}<k+1, \quad k<\frac{3k+2}{2}.$$

Яъни, $-2<k<3$.

Шундай қилиб, k-1; 0; 1; 2 қийматларга эга бўлиши мумкин. Ушбу қийматларни кетма-кет (1) системага қўйиб, ҳосил бўлган тенгсизликларни ечиб, қуйидаги жавобни топамиз.

Демак, $-1 \leq x < -\frac{1}{2}; 0 \leq x < 2; \quad \frac{5}{2} \leq x < 3$

7-масала. $(2m)!!$ нинг каноник ёйилмасига p туб сон нечанчи даражада киришини аниқланг.

Ечиш. $(2m)!! = m!\,2m$ бўлганлиги сабабли $p = 2$ га тенг бўлса,

$$m+\sum_{t=1}^{k}\left[\frac{m}{2^t}\right], 2^k\leq m<2^{k+1}.$$

$p > 2$ бўлса,

$$\sum_{t=1}^{s}\left[\frac{m}{p^t}\right], p^s\leq m<p^{s+1}$$

га тенг бўлади.

8-масала. $\left[\frac{x+y}{n}\right]$ ни $\left[\frac{x}{n}\right]+\left[\frac{y}{n}\right]$ ёки $\left[\frac{x}{n}\right]+\left[\frac{y}{n}\right]+1$ га тенглигини исботланг.

Ечиш. $\frac{x+y}{n}=\left[\frac{x}{n}\right]+\alpha+\left[\frac{y}{n}\right]+\beta$

бўлиб, бу ерда: $0 \le \alpha <1$, $0 \le \beta <1$. Демак,
$0 \le \alpha+\beta<2$ бўлганлиги сабабли $[\alpha+\beta]$ 0 ёки 1 га тенг бўлади.

9-масала. Барча натурал бўлувчилари кўпайтмаси 5832 га тенг бўлган натурал сонни топинг.

Ечиш. $\sqrt{a^{\tau(a)}}=5832=2^3\cdot 3^6$, бундан $a=2^x\cdot 3^y$ ва

$$\begin{cases} x(1+x)(1+y)=6 \\ y(1+x)(1+y)=12. \end{cases}$$

Бу системанинг ечими: $x=1$, $y=2$. Демак, $a=18$.

10-масала. Қуйидаги кетма-кетликни кўрамиз

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots$$

(Кетма-кетликда битта бир, иккита икки, учта уч, тўртта тўрт, бешта беш ва ҳоказо). Қайси сон

а) 2002–; б) n – инчи ўринда туради?

Ечиш. Фараз қилайлик, $x_n = k$; $k-$ n–ҳад. Берилган кетма-кетликда k сони биринчи пайдо бўлгунга қадар

$$1+2+3+\cdots+k-1=\frac{k(k-1)}{2}$$

сон кетма-кетлиги ёзилади. Охирги k сон $\frac{k(k+1)}{2}$ - ўринда туради. Шунинг учун

$$\frac{k(k-1)}{2}<n\le\frac{k(k+1)}{2}.$$

Бундан

$$k^2-k<2n\le k^2+k$$

келиб чиқади.

Охирги ҳосил бўлган тенгсизликнинг ўнг ва чап қисмига $\frac{1}{4}$ ни қўшиб қуйидагиларга эга бўламиз:

$$k^2-k+\frac{1}{4}<2n<k^2+k+\frac{1}{4}$$

$$\left(k-\frac{1}{2}\right)^2<2n<\left(k+\frac{1}{2}\right)^2$$

У ҳолда,

$$k-\frac{1}{2}<\sqrt{2n}<k+\frac{1}{2}$$

Бундан

$$k<\sqrt{2n}+\frac{1}{2}<k+1.$$

Натижада,

$$x_n=\left[\sqrt{2n}+\frac{1}{2}\right].$$

Берилган кетма-кетликнинг n-ҳадини ҳисоблаш формуласини ҳосил қилдик. Хусусан, $x_{2002}=63$

11-масала. 3 ва 4 га бўлинадиган ва 14 та бўлувчига эга бўлган сонни топинг.

Ечиш. Мисол шартига кўра, $\tau(a)=14=2\cdot 7=(1+1)(6+1)$, демак, $a=p_1^{a_1}p_2^{a_2}$, яъни $a=2^{a_1}\cdot 3^{a_2}$, бу ерда $a_1\ge 2, a_2\ge 1$. Демак, а = $2^6\cdot 3=192$.

12-масала. 100! сон иккининг қайси даражасига бўлинади?

Ечиш. 1, 2, …, 100 сонлар орасида қуйидагилар мавжуд:

$\frac{100}{2}=50$ та жуфт сон,

$\frac{100}{4}=25$та 4 га каррали сон.

$\left[\frac{100}{8}\right]=12$ та 8 га каррали сон.

$\left[\frac{100}{16}\right]=6$та 16 га каррали сон.

$\left[\frac{100}{32}\right]=3$та 32 га каррали сон.

$\left[\frac{100}{64}\right]=1$та 64 га каррали сон.

Бундан $100!=1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdot 100$ кўпайтмада жами $50+25+12+6+3+1=97$ та 2 сони қатнашади, яъни: 100! сон 2^{97} га бўлинади ва 2^{98} га бўлинмайди. Демак, жавоб 97.

13-масала. φ (12 · 5 · 1956) ни ҳисобланг.

Ечиш. Ўзаро туб кўпайтувчиларни аниқлаш учун кўпайтманинг каноник ёйилмасини топамиз:
$12\cdot 5\cdot 1956=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 2^2\cdot 3\cdot 163=2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 163$. Бундан
$\varphi(12\cdot 5\cdot 1956)=\varphi(2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 163)=(2^4-2^3)(3^2-3)(5-1)(163-1)=$
$=8\cdot 6\cdot 4\cdot 162=31104$.

14 – масала (Гаусс масаласи).

$$\sum_{d|x}\varphi(d)=x$$

айниятни исботланг:

Ечиш. $x=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}$. Мультипликатив функциялар учун асосий айниятга кўра,

$$\sum_{d|x}\varphi(d)=\left(1+\varphi(p_1)+\varphi(p_1^2)+\cdots+\varphi\left(p_1^{a_1}\right)\dots=\right.$$

$$=\left\{1+(p_1-1)+(p_1^2-p_1)+\cdots+\left(p_1^{a_1}-p_1^{a_1-1}\right)\right\}\dots=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}$$
$$=x$$

Айният исботланди.

15-масала. $\varphi\left(3^x\cdot5^y\right)=600$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $600=2^3\cdot3\cdot5^2$ дан $\varphi\left(3^x\cdot5^y\right)=2^3\cdot3\cdot5^2$. Бошқа томондан

$\varphi\left(3^x5^y\right)=\left(3^x-3^{x-1}\right)\left(5^y-5^{y-1}\right)$.

Демак, $3^{x-1}\cdot2\cdot5^{y-1}\cdot4=2^3\cdot3\cdot5^2$ ёки $3^{x-1}5^{y-1}=3\cdot5^2$ ва $x=2,\ y=3$.

16-масала. Агар x>0 ва n натурал сон бўлса, у ҳолда

$\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$ бўлишини исботланг.

Ечиш. Равшанки, $(\alpha;\beta)$ ораликда $[\beta]-[\alpha]$ та бутун сонлар жойлашган.

Ҳақиқаттан ҳам, агар m бутун сон $\alpha<m<\beta$ тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда $[\alpha]+1\le m<[\beta]$. Худди шундай, $(\alpha;\beta)$ оралиқда $\left[\frac{\beta}{x}\right]-\left[\frac{\alpha}{x}\right]$ – та берилган $x>0$ га каррали сонлар жойлашган.

x дан кичик ва n га бўлинадиган натурал сонларни кўрамиз. Бундай сонлар жами $\left[\frac{x}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]-\left[\frac{0}{n}\right]$ та. Аммо $[x]$ дан катта бўлмаган ва n га бўлинадиган сонлар ҳам $\left[\frac{x}{n}\right]$ та. Тенглик исботланди.

17-масала. μ (2002) ни ҳисобланг.

Ечиш. $2002=2\cdot7\cdot11\cdot13$ дан μ $(2002)=(-1)^4=1$ келиб чиқади.

18-масала. n - натурал, x - ҳақиқий сонлар учун

$$[nx]=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]$$

тенгликни исботланг:

Ечиш. n сонини фиксирлаб,

$$f(x)=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]-[nx]$$

функцияни караймиз. У ҳолда,

$$f\left(x+\frac{1}{n}\right)=\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]+[x+1]-[nx+1].$$

Ихтиёрий бутун k учун $[x+k]=[x]$ формулани кўллаб барча ҳақиқий x қийматларида

$$f\left(x+\frac{1}{n}\right)=f(x)$$

тенглик бажарилишини ҳосил қиламиз.

Демак, $y=f(x)$ функция даврий функция бўлади ва у $x\in\left[0,\frac{1}{n}\right)$ оралиқда айнан нолга тенг бўлишини текшириш қийин эмас.

Бундан $y=f(x)$ функция барча ҳақиқий x кийматларида нолга тенг бўлиши келиб чиқади.

19-масала. $\sum_{d|a}\frac{\mu(d)}{d}=\prod_{p|a}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ формула тўғрилигини a =12 учун текширинг.

Ечиш. 12 нинг бўлувчилари: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Бундан

$$\sum_{d|a}\frac{\mu(d)}{d}=\frac{\mu(1)}{1}+\frac{\mu(2)}{2}+\frac{\mu(3)}{3}+\frac{\mu(4)}{4}+\frac{\mu(6)}{6}+\frac{\mu(12)}{12}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+0+\frac{1}{6}+0=\frac{1}{3}$$

$$\prod_{p|12}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

20-масала. а) $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right]$; $\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right\}>\underbrace{0{,}9\dots9}_{1001}$

сонлар тоқ эканлигини исботланг.

Ечиш. $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}$ ифодада қавсни очиб $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}=A+B\sqrt{3}$ ни ҳосил қиламиз, бу ерда A ва B – натурал сонлар. Бундан

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^{2002}=A-B\sqrt{3}=\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}}.$$

Бу ҳолда

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{2002}=2A$$

бўлади.

Бундан

$$(2+\sqrt{3})^{2002} = 2A - 1 + 1 - (2-\sqrt{3})^{2002}$$

келиб чиқади.

Натижада, $\left[(2+\sqrt{3})^{2002}\right] = 2\text{A} - 1$ - тоқ сон, яъни

$$\left\{(2+\sqrt{3})^{2002}\right\} = 1 - (2-\sqrt{3})^{2002}$$

келиб чиқади.

Ҳосил бўлган тенгликнинг ўнг қисмини баҳолаймиз:

$$(2-\sqrt{3})^{2002} = \frac{1}{(2+\sqrt{3})^{2002}} = \frac{1}{(7+2\sqrt{3})^{1001}} < \frac{1}{10^{1001}}.$$

Шунинг учун $\left\{(2+\sqrt{3})^{2002}\right\} > \underbrace{0{,}9\ldots9}_{1001}$

1.6-§.Туб сонлар тарихидан

Қадимги грек математиги Эратосфен дунёда биринчилардан бўлиб, ернинг ўлчамини аниқлади, “параллел” ва “меридиан” тушунчаларини киритди. Пифагор эса “ер шар шаклида” деган фаразни ўртага ташлади: “Табиатда ҳамма нарса мукаммал, шунинг учун ҳам ер мукаммал кўринишда бўлиши даркор. Геометрик жисмлардан энг мукаммали шардир. Демак, ер шар шаклида бўлиши керак”. Лекин ернинг шар шаклида эканлигини исбот қилиш ва унинг радиусини ўлчаш фақат Эратосфенгагина насиб қилди. У биринчи бўлиб, ер юзи харитасини тузиб чиқди. Ўша пайтда маълум бўлган Европа, Осиё, Ливия, Арабистон, Ариана, Ҳиндистонларгина унинг харитасидан жой олган (А. М. Куприн. Слово о карте. –М.: Изд. “Недра”, 1987).

Туб сонларни ўрганиш тарихи 2000 йилдан бери копрок даврни уз ичига олади. Эрамиздан аввалги III асрда яшаган .юнон олими Евклид туб сонлар .2,3,5,7 ... чексиз куп билан ишлаш исботлаган. Бунда у туба сонлар сони чеклита, деб $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$ сонини олади. Бу сон $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ларнинг бирортасига ҳам бўлинмайди. Демак, N туб сон ёки $p_1, p_2, \ldots, p_k$ лардан бошқа бирорта p_{k+1} туб бўлувчига эга. Бу эса туб сонлар сони чеклита дайилганига зиддир, яъни туб сонларнинг сони чексиз кўп. Ушбу исбот Евклиднинг “Бошланғичлар” асарининг IX китобидаги 20-теоремасида келтирилган бўлиб, ҳозиргача мажуд

исботларнинг энг соддаси хисобланади. Натурал сонлар каторида туб сонлар соннинг чексиз кўплигининг бошка исботлари билан кизикувчилар Л. Эйлер ва Г. Поя исботлари билан танишишлари мумкин.

Туб сонларни қуйидагича тасаввур қилишимиз мумкин. Кўз олдингизга хонадан чиқиб, самога қараб чўзилиб кетган электр симини келтиринг. Бу симнинг ҳар бир метрига биттадан лампочка осилган бўлиб, бу лампочкалар кетма - кет натурал сонлар билан ракамланган бўлсин. Сим токка уланганда фақат туб рақамли лампочкалар ёнсин.

Энди тармоқ бўйлаб фазога саёҳат қилайлик. Кўз олдимизда қуйидаги ҳодисалар намоён бўлади:

1-лампочка ўчиқ, 2- , 3- лампочка ёниқ! Бунақаси бошқа учрамайди!

3 ва 5; 5 ва 7; 11 ва 13; 17 ва 19; 29 ва 31; 41 ва 43; 71 ва 73; 101 ва103 сонлар эгизак сонлар дейилади.

Биринчи юзта натурал сонлар билан рақамланган лампочкалардан 75 таси ўчиқ ва 25 таси ёриқлигини кўрамиз.

Биринчи мингталикда 832 та ва 168 та.

Биринчи миллионталикда эса 921502 та ва 78468 та мос равишда ўчиқ ва нур сочувчи чироқларни кўрасиз.

Тасаввур қиламиз. Орқада ҳам, олдинда ҳам зим-зиё қоронғулик. Лекин нур сўнмайди, чунки Евклид теоремасига асосан, олдинда чексиз кўп нур сочувчи чироқлар учрайди.

Агар бизнинг учиш тезлигимиз, ҳатто, 300000 км/с, яъни ёруғлик тезлигига тенг бўлса ҳам нур сочувчи чироқлар кўринмайди. Лекин биламизки, П. Л. Чебишев теоремасига асосан, қанча масофа босиб ўтган бўлсак, яъни шунча масофадан сўнг яна нур сочувчи чироқ кўринади, деб ўзимизга таскин бера оламиз.

Маълумки, туб сонларга оид масалаларни ҳал қилиш жараёнида буюк математикларнинг меҳнатлари натижасида математиканинг асосий соҳаси – “Сонлар назарияси” вужудга келди. Шуниси қизиқки, сонлар назарияси муаммолари қанчалик мураккаб бўлмасин, масаланинг мазмуни, ҳатто мактаб ёки лицей ўқувчилар учун ҳам тушунарли.

Туб сонлар жуда қадимдан маълум бўлсада, унга математикларнинг қизиқиши ҳанузгача сўнгани йўқ. Бунинг иккита асосий сабаб бор: биринчиси туб сонлар жуда содда ва табиий аникланган, иккинчидан бу сонлар билан ифодаланадиган баази математик хоссаларини умумий ҳолда исботлаш жуда кийин ҳозирча исботлаш йўли йўқ. Масалан, Бундан 263 йил илгари Л. Эйлер ва Х. Голдбахлар томонидан кўриб чиқилган гипотеза ҳозиргача ўз исботини топмади. Бу гипотеза Голдбахнинг бинар проблемаси деб аталиб, у қуйидагича: иккидан катта булган ҳар қандай жуфт сонни иккита туб соннинг йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкин. Бу гипотезанинг тўғрилигини дастлабки бир неча жуфт сонлар учун текшириб кўриш осон (масалан: 4=2 + 2, 6=3 +3, 8=3 +5, 10=3 +7, 12=5+7 ва ҳоказо) замонавий компьютерлардан фойдаланиб, анча катта сонлар учун ҳам текшириб кўрилган), лекин уни умумий ҳолда исботлаш ҳозир ҳам муаммолигича қолмоқда.

Х.Голдбах муаммоси. 1742 йили Санкт-Петербург академиясининг аъзоси Х. Голдбах Л. Эйлерга ёзган хатида қуйидаги фаразни баён қилди: Бешдан катта бўлган ҳар қандай натурал сон кўпи билан 3 та туб сон йиғиндиси сифатида ифода қилинади.

16=3+2+11, 12=7+3+2, 13=7+3+3, 11=7+2+2 ва ҳоказо.

Кинбор 1000 гача, Обри 2000 гача, Миле 9000 гача Х. Голдбах гипотезаси тўғри бўлишини текширганлар.

Х.Голдбах муаммосидан яна иккита фараз (гипотеза) келиб чиқади:

- ҳар қандай 4 дан кичик бўлмаган жуфт сон иккита туб сон йиғиндисига тенг;
- ҳар қандай 7 дан кичик бўлмаган тоқ сон учта туб сон йиғиндисига тенг.

Л. Эйлер Х. Голдбах муаммосини ҳал қилгани йўқ, лекин у бу муаммони ҳал қилиш учун ҳар қандай 4 дан кичик бўлмаган жуфт сон иккита туб сон йиғиндисига тенглигини исбот қилиш етарли бўлишини кўрсатди.

Агар $2m - p_1 + p_2$ бўлса,

$$2n+1=2n+3-2=2(n-1)+3=p_1^1+p_2^1+3.$$

Лекин, 200 йил мобайнида Х. Голдбах муаммосини ҳеч ким ҳал кила олгани йўқ. Фақатгина 1937 йили академик И. М. Виноградов ҳар қандай 7 дан катта тоқ соннинг 3 та туб сон йиғиндисига тенглигини исбот қилди. Бу теоремадан ҳар қандай 10 дан кичик бўлмаган жуфт сон 4 та туб соннинг йиғиндисига тенглиги келиб чиқади. Ҳақиқатдан,

$$2n-1=p_1+p_2+p_3 \text{ ёки } 2n=p_1^1+p_2^1+p_3+1=p_1^1+p_2^1+p_3+1=p_1^1+p_2^1+p_3+3-2.$$

$$\text{ёки } 2n+2=p_1^1+p_2^1+p_3+3.$$

Шундай қилиб, ҳозиргача Х. Голдбах муаммоси тўлиқ ҳал қилингани йўқ.

Шунингдек, юқоридаги $N=p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k+1$ туб (мураккаб сонлар) сони (берилган $k\geq 2$ учун) чексиз кўп деган муаммо ҳам очиқ қолмоқда. Шу каби ўхшаш турли муаммоларни ҳал қилиш жараёнида сонлар назарияси фан сифатида шаклланди.

Ўрта асрларда сонлар назариясининг гуллаб - яшнаши буюк француз математиги П. Ферма (XVII асрда яшаган) номи билан боғлиқ. Лекин, у ўз кашфиётларининг ёзма баёнини қолдирмаган.

Сонлар назарияси энг аввал фан сифатида Леонард Эйлернинг (1707- 1783) илмий ишларида шаклланди. Л. Эйлернинг фаолияти ақлни лол қолдирадиган даражада бой. Л. Эйлер 1735 йили бир кўзи, 1766 йили иккинчи кўзи ҳам кўрмай қолишига қарамай, умрининг охирги йилларида унинг илмий фаоллиги камаймади, аксинча, ошиб борган. Унинг илмий ишлари 72 жилдлик асарлар тўпламида жамланган бўлиб, уларнинг юздан ортиғи сонлар назариясига бағишланган. П. Ферманинг деярли барча исботсиз теоремалари Л. Эйлер томонидан тўлиқ исбот қилиниб, улар асосида кўпгина математик қонуниятлар кашф қилинди.

У ҳақда “Бошқалар учун нафас олиш жараёни қандай кечса, Эйлер учун ҳисоблаш жараёни шундай табиий жараён” ёки “Юраги уришдан тўхтаганда ҳам мияси ҳисоблашдан тўхтамаган математик”, дейишади.

Туб сонлар билан боғлиқ бўлган бундай гипотезаларни кўплаб келтириш мумкин.

Малумки, туб сонлар натурал сонлар каторида текис тақсимланмаган. Масалан, (1,100) ораликдаги натурал сонларнинг

25% ва туб сон бўлса, (101,200) оралиқда 21%, (201,300) оралиқда 16%, (1,1000) оралиқда эса 16,8% туб сонлар бор. Шунинг учун ҳам туб сонлар тақсимотини ўзида ифодаловчи функцияни излаш табиий ҳол бўлиб кўринар эди. x нинг барча табиий қийматларида фақат хар хил туб сонга тенг қиймат қабул қилувчи $f(x)$ бутун Л. Эйлер ва бошқа олимлар томонидан бундай кўпҳадлар топилди, лекин кейинчалик маълум бўлдики, уларнинг бирортаси хам аргументнинг барча табиий қийматларида турли туб қиймат қабул қилмас экан. Масалан:

$f(x)=x^2+x+17$ кўпҳад $x=0,1,2.3....15$ бўлганда;

$f(x)=2x^2+29$ кўпҳад $x=0,1,2,3,...,28$ бўлганда;

$f(x)=x^2+x+41$ кўпҳад $x=0,1,2,3,....39$ бўлганда;

$f(x)=x^2-79x+1601$ кўпҳад $x=0,1,2,3,...,79$ бўлган

қийматларда турли туб сонларга тенг қийматлар қабул қилади, лекин бошқа баъзи қийматларида эса мураккаб сонга тенг қиймат қабул қилар экан. Кейинчалик ушбу теорема исботланди.

Л. Эйлер туб сонларга оид изланишларида x=1, 2,..., 40 бўлганида туб сон бўладиган $p(x)=x^2-x+41$ кўринишдаги полиномни кашф қилди. $p(x)$ кўпҳаднинг биринчи 2398 та натурал сонлар орасидаги қийматларидан тенг ярмиси туб сонлар бўлишини исбот қилди. Шунингдек, $q(x)=x^2+x+72491$ кўпҳад орқали ифода қилинадиган 5000 та туб сонларни аниқлади.

Бундан ташқари, барча қийматлари туб сонлардан иборат n даражали кўпҳад мавжуд эмаслигини исботлаб, Л. Эйлер ўз ишлари билан аддидтив сонлар назариясига асос солди. Сонлар назариясида кўпгина қонуниятларнинг исботи Л. Эйлер номи билан боғлиқ. Лекин, ҳозирги кунда хам ўз ечимини топмаган муаммолар жуда кўп.

Эгизак туб сонлар, яъни 3 ва 5; 5 ва 7; 11 ва 13;...; 239 ва 241 сонлар жуфтлиги чексиз кўпми ёки чеклими?

$2^n+1;\ 2^n-1; n^2+1.$ кўринишдаги туб сонлар чексиз кўпми?

Мерсен туб сонлари

Ҳозиргача жуфт мукаммал сонларнинг сони чексиз кўпми ёки улар чекли сондами? деган савол очиқ қолиб келмода. Чунки, 2^k-1 кўринишдаги туб сонлар сонининг чексиз эканлиги исботланмаган. Бундай кўринишда сонлар туб бўлишишининг зарурий шарти унинг даража кўрсатгичи k нинг туб бўлишидир.

Ҳақиқатпан ҳам, $k=k_1k_2$ - мураккаб сон бўлса, у ҳолда $(2^{k_1})^{k_2}-1$ ни тривиал бўлмаган (яъни, ўзидан ва 1 дан фарқли) кўпайтувчиларга ажратиш мумкин. Улардан бири 2^k-1 га тенг бўлади. Лекин бу шарт етарли шарт эмас, яъни туб бўлса, 2^k-1 сон барча k лар учун туб сон булавермайди. Масалан, k=11 бўлганда 2^{11}-1 =2047= 23·89 мураккаб сон.

Ихтиёрий p туб сон учун $M_p=2^p-1$ кўринишидаги туб сонлар мукаммал сонлар муаммоси билан жиддий шуғулланган француз монахи Мерсен шарафига *Мерсен туб сонлари* деб аталади.

Юқоридаги формулага асосан:

$$M_2=3; M_3=7; M_5=31; M_7=127; M_{11}=2047=23\cdot 89$$

бўлишини ҳисоблаб топиш қийин эмас. Демак, 2^p-1 кўринишдаги сонларнинг ҳаммаси ҳам туб сон эмас экан.

Л. Эйлергача Мерсен туб сонлари M_p га мос (p=2,3,5,7,13,17,19) келувчи 7 мукаммал сон маълум бўлган.

1756 йили Л. Эйлер M_{31} туб сон бўлишини исбот қилди. Бир асрдан кўпроқ давр мобайнида M_{31} энг катта Мерсен туб сони бўлиб қолди.

1883 йилда рус математиклари И. М. Первушин (1827-1900) $M_{61}=2^{61}-1$ соннинг туб эканлигини исботлади.

Француз математиги Лукас 1876 йили $M_{127}=170141183460469231731687303715884105727$ сон Мерсеннинг туб сони бўлишини исботлади.

Сўнгра Д. Х. Лемар ЭҲМ орқали P=521, P=607, P=1279, P=2203, P=2281 туб сонлар учун ҳам М. Мерсеннинг туб сонлари бўлишини кўрсатди.

Кейинчалик Ризел (1958), P=3217, Гурвис (1962) P=4253, P=4423, Гиллелс (1964) P=9689, P=9941, P=11213 сонлар учун М. Мерсен туб сонлари бўлишини аниқладилар.

Лукас топган М ни 39 та рақамдан ташқил топганлигини кўрган эдик, ҳозирда энг катта Мерсен туб сони 3376 рақамдан иборат бўлиб, бу сон Американинг Иллинойс университети математиклари томонидан ҳисоблаб топилган. Улар топган сонлари билан жуда ҳам фахрланадилар, математика факультетидан юбориладиган ҳар бир хат солинган конверт устига шу сонни ёзиб қўядиган бўлдилар.

$M_{11213}=2^{11213}-1$ сонида 3375 та рақам бўлиб, унинг туб эканлиги 1963 йилда исботланган. Бу исоблаш асосида француз математиги Е. Люк томонидан 1878 йилда топилган критерия ётади. У қуйидагидан иборат: , бунда (туб сон) нинг туб сон бўлиши учун ушбу рекурент кетма-кетлик $c_1=4, c_2=4^2-2=14, \ldots, c_k=c_{k-1}^2-2$ нинг $|p-1|-$ ҳадини M_p га бўлиниши, яъни $c_{p-1}\equiv 0\left(\bmod M_p\right)$ бўлиши зарур ва етарлидир.

Мисол. $M_7=2^7-1=127$ га Люк критериясини қўллаймиз. У ҳолда 127 модули бўйича қуйидаги муносабатларга эга бўламиз:

$$c_1=4, c_2=4^2-2=14. c_3=14^2-2=194\equiv 67, c_4=194^2-2\equiv 67^2-2\equiv 42, c_5=42^2-2\equiv -16,$$
$$c_6=16^2-2=254\equiv 0(\bmod 27).$$

Демак, теорема шарти бажарилади ва биз $M_7=2^7-1=127$ ни туб сон дея оламиз.

Табиий савол туғилади, M_M-Мерсен сони бўладими?

Масалан, $M_{M_2}=2^3-1=7-$туб сон; $M_{M_3}=2^7-1=127-$туб сон $M_{M_5}=2^{31}-1-$ туб сон (Эйлер исбот қилган);

$M_{M_7}=M_{127}-$туб сон (Лукас исбот қилган).

Ферма туб сонлари

Ажойиб математик П. Ферма

$$F_n=2^{2^n}+1 \qquad (1.8)$$

кўринишидаги барча сонлар туб сонлар бўлишини тўлиқ ишонч билан айтган. (1.8) формула билан ифодаланадиган сонлар *Ферма сонлари* деб аталади.

$$F_0=2^{2^0}+1=3; F_1=2^{2^1}+1=5; F_2=2^{2^2}+1=17; F_3=2^{2^3}+1=257; F_4=2^{2^4}+1=65537;$$
$$F_5=2^{2^5}+1=65536\cdot 65536+1=641\cdot 6700417.$$

F_5 мураккаб сон бўлишини Эйлер кўрсатган.

F_n формула билан ифодаланадиган кейинги мураккаб сон $F_{12}=2^{4096}+1$
1883 йили рус руҳонийси Первушин томонидан аниқланди.

Энди F_5 мураккаб сон эканлигининг исботини келтирамиз:

$$641=625+16=5^4+2^4\rightarrow 5^4\equiv -2^4(\bmod 641), (2)$$
$$641=5\cdot 128+1=5\cdot 2^7+1\rightarrow 5\cdot 2^7\equiv -1(\bmod 641). (3)$$

(2) таққосламанинг иккита тарафини 2^{28} га кўпайтирамиз:

$$5^4\cdot 2^{28}\equiv -2^{32}(\bmod 641)$$

(3) нинг иккала тарафини 4-даражага оширамиз:

$5 \cdot 2^{28}\equiv 1(\bmod 641)$. ҳосил бўлса, охирги 2 та таққосламаларни бир-биридан айирсак, $2^{32}+1\equiv 0(\bmod 641)$ ҳосил бўлади. Демак, $2^{32}+1\vdots 641$.

1.7-§. Систематик сонлар ва улар устида амаллар

Рақамни номлаш ва ёзишнинг ҳар қандай усули сонлар системаси деб аталади.

Барча сонлар системаси икки синфга бўлинади: позитцион ва нопозитцион. Сонларни ёзишда ишлатиладиган белгиларга рақамлар дейилади. Позитцион саноқ системасида берилган сонниннг қиймати сонни тасвирловчи рақамларнинг эгаллаган ўрнига боғлиқ бўлади. Мисол сифатида, 0, 1, 2, 3,. . . , 9 араб рақамларидан ташкил топган ўнлик саноқ системани қараш мумкин, улар сондаги тутган ўринларга қараб турли қийматни акс эттиради.

Нопозитцион саноқ системаларида белгининг қиймати унинг эгаллаган ўрнига боғлиқ эмас. Мисол сифатида рим рақамлари саноқ системасини келтириш мумкин. Масалан, XX сонида X рақами, қаерда жойлашганига қарамасдан ўнлик саноқ системасидаги 10 қийматини англатади.

Нопозитцион рим саноқ системаси 7 та белгидан иборат: I-1, V-5, X-10, L-50, C-100, D-500, V-1000. Бу саноқ системада сонларни ёзишда қуйидаги қоидаларга амал қилиш керак:

1. Агар кичик белги катта белги олдида турса, айирув амали бажарилади.
2. Агар катта белги кичик белги олдида турса, қўшув амали бажарилади.

Масалан: CLV-155, CM-900.

Позитцион санок системаси

$M=\{0,1,2,...,q-1\}, q\in N, q\geq 2$ бўлсин. $a\in N$ сонни куйидагича ифодалаймиз:

$$a=a_sq^s+a_{s-1}q^{s-1}+...=a_1q+a_c \qquad (1.9)$$

Бунда, $a_i\in M\left(i=\overline{1,s}\right), a_0\neq 0$, q- асосга кўра санок системасининг a сони дейилади. $a\in N$ сонининг қискача кўриниши $a=\left(a_0a_{s-1}..a_0\right)_q$

Масалан, $589_{12}=5\cdot 12^2+8\cdot 12+9.$

Теорема. q асосга кўра, $\forall(a\in N)$санок системаси (1.9) кўринишда бўлиб, бир кийматлиги аникланган.

Исбот. (1.9) ни математик индукция методи ёрдамида исботлаймиз.

a) $a\in N, a<q$ бўлсин. У ҳолда (1.9) дан $a=a$ келиб чиқади.

b) $a\in N, a\geq q$ бўлсин. Фараз килайлик, $\forall(m\in N), 1\leq m<a$ (1) каноатлантира олсин.

a ни q га қолдикли бўламиз: $a=bq+a_0(a_0\in M)$, бунда $b<a$, у холда фаразимизга индуктив ёндашиб, b ни қуйидагича тасвирлай оламиз:

$$b=a_sq^{s-1}+a_{s-1}q^{s-2}+...+a_2q+a_1, a_i\in M, a_s\neq 0\left(i=\overline{1,s}\right). \qquad (1.10)$$

(1.10) га кўра, $a=bq+a_0(a_0\in M)$, тенгликдан:

$$a=a_sq^s+a_{s-1}q^{s-1}+...+a_1q+a_0.$$

Математик индукция принципи ёрдамида (1.9) га эга бўлдик.

Ягоналиги. $\forall(a\in N)$ сон учун (1.9) нинг ўринли эканлигини математик индукция методи ёрдамида исботлаймиз.

a) $a\in N, a<q$ бўлсин. У ҳолда (1.9) дан $a=a$ келиб чиқади ва ягона.

b) $a\in N, a\geq q$ бўлсин. Фараз килайлик, $\forall(m\in N), 1\leq m<a$ (1.9)ни қаноатлантиради ва ягона.

$\forall(a\in N)$ бўлсин. (1.9) дан фарқлирок q асосга кўра куйидаги кўринишга келтира олишимиз мумкин:

$$a=b_sq^s+b_{s-1}q^{s-1}+...+b_1q+b_0 \qquad (1.11)$$

(1.9) ва (1.11) дан:

$$a=(a_sq^{s-1}+a_{s-1}q^{s-2}+...+a_1)q+a_0=(b_sq^{s-1}+b_{s-1}q^{s-2}+...+b_1)q+b_0.$$

Бу тенгликдан, колдиқли бўлиш теоремасига кўра:

$$a_0=b_0, b=a_sq^{s-1}+a_{s-1}q^{s-2}+...+a_1=b_sq^{s-1}+b_{s-1}q^{s-2}+...+b_1$$

$b<a$ дан индукция фаразимизга кўра $b)t=s, a_s=b_s, ..., a_1=b_1$.

Шундай қилиб, $\forall(a\in N)$ учун (1.9) тенглик ягонадир.

Систематик сонлар устида амаллар

Ҳар хил сонлар системасида қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш амаллари 10 асосли саноқ системаси қоидасига кўра бажарилади.

Мисоллар:

1. **Қўшиш, айириш.**

$$\begin{array}{r} 5768_9 \\ +\;\; \\ 6832_9 \\ \hline 13711_9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7632_9 \\ -\;\; \\ 6858_9 \\ \hline 663_9 \end{array}$$

2. **Кўпайтириш, бўлиш.**

$$\begin{array}{r} 465_8 \\ 76_8 \\ \hline 3476 \\ 4163 \\ \hline 45326_8 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 30=3\cdot 8+6 \\ 39=4\cdot 8+7 \\ 28=3\cdot 8+4 \\ 35=4\cdot 8+3 \\ 46=5\cdot 8+6 \\ 33=4\cdot 8+1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 33102_8 & 457_8 \\ \cline{2-2} -\;2753 & 56_8 \\ \hline 3432 & \\ 3432 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 35=4\cdot 8+3 \\ 29=3\cdot 8+5 \\ 23=2\cdot 8+7 \\ 42=5\cdot 8+2 \\ 35=4\cdot 8+3 \\ 28=3\cdot 8+4 \end{array}$$

Бир санок системасидан бошқа санок системасига ўтиш

$\forall(a\in N)$ p асосга кўра, саноқ системаси бўлсин. a сонини q асосга кўра санок системасида ёзиш талаб қилинсин.

Фараз қилайлик, a сонини q асосга кўра саноқ системасида

$$a=a_kq^k+a_{k-1}q^{k-1}+...+a_1q+a_0.$$

$a_0, a_1, ..., a_k$ сонларни топиш зарур. Бу p асосга кўра саноқ системаси учун a ни q га қолдиқли бўламиз: $a=b_0q+a_0$.

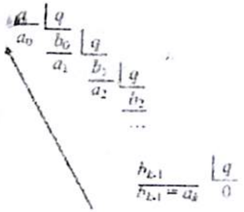
Худди шу саноқ системасида b_0 ни q га қолдиқли бўламиз.

$$b_0=b_1q+a_1.$$

Ва худди шундай давом эттирамиз. Бу жараён кетма-кет бажарилиб, ноль бўлинмага айлангунича давом этади:

$$b_{k-2}=b_{k-1}q+a_{k-1}, b_{k-1}=0\cdot q+b_{k-1}, b_{k-1}=a_k.$$

p асосга кўра саноқ системаси учун a ни q га қолдиқли бўлиш қуйидаги схема ёрдамида бажарилади:



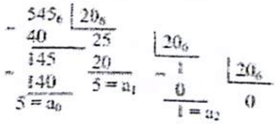
Стрелка тартиб йўналишини кўрсатади.

Агар $q < p$, у ҳолда a ни q га бўлгандаги $a_0, a_1, ..., a_k$ колдиқлар кетма-кетлиги p асосга кўра санок системасининг ҳеч бўлмаганда бир рақамидан иборат бўлади. Бу рақамлар q асосга кўра, санок системасидаги a сонининг рақамлари бўлади.

Агарда, $p \geq q$ дан катта ёки тенг бўлса, у ҳолда q ва баъзи $a_0, a_1, ..., a_k$ колдиқлар p асосга кўра санок системасининг ҳеч бўлмаганда бир рақамидан иборат бўлади. Бу рақамлар q асосга кўра санок системаси ёрдамида ёзилиши зарур.

Масала. 545_6 сонини 12 асосли санок системаси кўринишда ёзинг.

12 сонини санок системасида 6 асосга кўра ёзиб оламиз: $12 = 2 \cdot 6 + 0 = (20)_6$.



Демак, $545_6 = 155_{12}$.

II БОБ. ТАҚҚОСЛАМАЛАР НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

2.1-§. Бутун сонлар халқасида таққосламалар, уларнинг хоссалари, чегирмалар синфи халқаси

Бизда a, b, бутун сонлар ҳамда $m > 1$ натурал сон берилган бўлсин. Агар a-b айирма m га қолдиқсиз бўлинса, у ҳолда a бутун сон b бутун сон билан m модул бўйича таққосланади ва қуйидагича белгиланади:

$$a \equiv b (\operatorname{mod} m). \tag{2.1}$$

Таърифга кўра, а ва б бутун сонлар учун $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$ муносабатнинг ўринлилиги $(a-b) \vdots m$ ни, яъни $a - b = mq$, $q \in Z$ ни билдиради.

Бутун сонларнинг м модуль бўйича таққосланиш муносабати бутун сонлар тўпламида эквивалентлик муносабати бўлишини текшириш қийин эмас. Бу муносабат бўйича эквивалентлик синфлари м модуль бўйича чегирмалар синфлари ёки чегирма синфлар дейилади.

Масалан:

$4Z = \{..., -16, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, ...\}$

$4Z + 1 = \{..., -15, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, 17, ...\}$

$4Z + 2 = \{..., -14, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, 18, ...\}$

$4Z + 3 = \{..., -13, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, 19, ...\}$

Кейинги ўринларда қуйидаги теоремани исботлаймиз.

1-Теорема. Иккита а ва b бутун сонлар m модул бўйича таққосланишлари учун уларни m га бўлганда бир хил қолдиқ чиқиши зарур ва етарли.

Исбот. $a \equiv b(\operatorname{mod} m)$ бўлсин. У ҳолда, $a - b = mq, q \in Z$. Демак, $a = mq + b$. Агар $b = mq' + r, 0 \leq r < m$ бўлса, $a = m(q + q') + r, 0 \leq r < m$. Яъни, a ва b бутун сонларни m га бўлсак, бир хил қолдиқ қолар экан. Аксинча, агар $f = mq_1 + r, 0 \leq r < m$ ва $b = mq_2 + r$ бўлса, у ҳолда $a - b = m(q_1 - q_2)$ ёки $a \equiv b(\operatorname{mod} m)$ бўлади.

Таққосламанинг асосий хоссалари. Қуйида таққосламанинг бевосита таққослама таърифидан келиб чиқадиган асосий хоссаларини келтирамиз. Бу хоссаларнинг барчасида a, b, c, d лар ихтиёрий бутун сонлар, m эса 1 дан катта натурал сон деб ҳисоблаймиз.

1^0. $a \equiv a(\bmod m)$

2°. Агар $a \equiv b(\bmod m)$ бўлса, у холда $b \equiv a(\bmod m)$ бўлади.

3°. Агар $a \equiv b(\bmod m)$ва $b \equiv c(\bmod m)$ бўлса, у ҳолда $a \equiv c(\bmod m)$ бўлади.

4°. Таққосламаларни ҳадма-ҳад қўшиш ва ҳадма-ҳад кўпайтириш мумкин, агар $a \equiv b(\bmod m)$ ва $c \equiv d(\bmod m)$ бўлса, у ҳолда $a+c \equiv b+d(\bmod m)$ ва $ac \equiv bd(\bmod m)$ бўлади.

5°. Таққосламанинг иккала тарафини ҳам ихтиёрий сонга кўпайтириш мумкин. Яъни, $a \equiv b(\bmod m)$бўлса, у холда$ac \equiv bc(\bmod m)$ бўлади.

6°. Агар $a \equiv b(\bmod m)$ бўлса, у ҳолда $a^n \equiv b^n(\bmod m)$ бўлади. Бу ерда n ихтиёрий натурал сон.

7° Таққосламанинг ихтиёрий қисмига модулга каррали сонни қўшиш мумкин:

$a \equiv b(\bmod m)$ ва $k,\ l\ \in\ Z$ $\Rightarrow$ a+km≡ $s(mod\, m)$ ва $a \equiv s + lm(mod\, m)$

8° $x \equiv u(mod\, m_l)$ ва $x \equiv u(mod\, m_2) \Leftrightarrow x \equiv u(mod[m_l, m_2])$

9° $x \equiv u(mod\, m)$ ва $a_k \in Z(k = 0,1, \dots, n)$ бўлса, у ҳолда $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \equiv a_0u^n + a_1u^{n-1} + \cdots + a_{n-1}u + a_n(mod\, m)$.

10° $x \equiv u(mod\, m)$ ва $a_k \equiv b_k(mod\, m)$, $(k = 0,1, \dots, n)$ бўлса, у ҳолда

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \equiv$
$\equiv b_0u^n + b_1u^{n-1} + \cdots + b_{n-1}u + b_n(mod\, m)$

11° $(a, p) = 1$ бўлсин. $ax \equiv ay(mod\, p) \Rightarrow x \equiv y(mod\, p)$

12° Агар $a \equiv b(mod\, d), a \equiv b(mod\, c), (d, c) = 1$ бўлса, у ҳолда $a \equiv b(mod\, dc)$.

13° Агар $a \equiv b(mod\, d)$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий $c \in Z$ учун $ac \equiv bc(mod\, d)$.

14° Агар $ac \equiv bc(mod\, d)$ ва $(c, d) = 1$ бўлса, у ҳолда $a \equiv b(mod\, d)$.

Юқоридаги хоссалардан, агар $a \equiv b(\bmod m)$ бўлса, у ҳолда коэффициентлари бутун сонлардан иборат $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ кўпҳад учун

$$f(a) \equiv f(b)(\bmod m) \tag{2.2}$$

бўлиши келиб чиқади.

Таққосламаларнинг хоссаларидан 2, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 13 га бўлиниш аломатларини келтириб чиқариш мумкин.

Масалан: 9 га бўлиниш аломатини кўриб чиқайлик. Бунинг учун ихтиёрий натурал сон n учун таққосламадан фойдаланамиз. У ҳолда (2.1) таққосламага асосан $a_0a_1 \ldots a_n = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + a_{n-1}10 + a_n \equiv a_0 + a_1 + \ldots + a_n(\bmod 9)$, яъни сон 9 га бўлиниши учун унинг рақамлари йиғиндиси 9 га бўлиниши зарур ва етарли экан.

Чегирмаларнинг тўлиқ системаси.

Берилган модул бўйича чегирма синфлар эквивалентлик синфлари сифатида шундай синфлар эга бўладиган барча хусусиятларга эга.

Хусусан, m модул бўйича исталган иккита чегирмалар синфлари устма-уст тушади, ёки бирорта ҳам умумий элементга эга бўлмайди. m модул бўйича барча чегирмалар синфлари бирлашмада Z тўпламни беради. Шунингдек, m модуль бўйича ҳар қандай чегирмалар синфи шу синфга кирувчи ихтиёрий a элемент орқали бир қийматли аниқланади, бу синф қуйидаги тўпламдан иборат:

$\{a + km \mid k \in Z\} = a + mZ.$

Бу тўпламни, яъни $a \equiv b(\bmod m)$ўринли бўладиган барча $a \in Z$ сонлар тўпламини $a(\bmod m)$ ёки $\bar{a}$ каби белгилаймиз.

Синфнинг ихтиёрий сони m модул бўйича чегирма дейилади (шу синфнинг бошқа сонларига нисбатан).

Ҳар бир синфдан ихтиёрий равишда биттадан олинган сонлар тўплами берилган m модул бўйича чегирмаларнинг *тўла синфи* дейилади.

Одатда, чегирмаларнинг тўла синфи сифатида берилган m бўйича энг кичик манфий бўлмаган чегирмалар, яъни 0, 1, 2, ..., m-1 система олинади. Баъзан берилган m модул бўйича чегирмалардан абсолют қиймати бўйича энг кичик мусбат бўлмаган чегирмаларнинг тўла системаси ҳам каралади:

-(m-1), -(m-2), ..., -2, -1, 0. m модул бўйича абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик чегирмаларнинг тўла синфи ҳам ишлатилади. Масалан, m=7 бўлганда бу система -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 чегирмалардан иборат бўлади;

m=8 бўлганда эса -3,-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 ёки –4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 чегирмалардан ташкил топади.

Чегирмаларнинг тўла системасидан олинган ва m модул билан ўзаро туб бўлган чегирмалар m модул бўйича чегирмаларнинг келтирилган системаси дейилади. Келтирилган системада чегирмалар сони $\varphi(m)$ Эйлер функцияси қийматига тенг.

Чегирмаларнинг тўла системасидаги каби келтирилган системанинг ҳам уч тури ишлатилади: *энг кичик мусбат чегирмаларнинг келтирилган системаси, абсолют қиймати бўйича энг кичик манфий чегирмаларнинг келтирилган системаси, абсолют қиймати бўйича энг кичик чегирмаларнинг келтирилган системаси.*

$x_1, x_2, ..., x_c$ бутун сонлар системаси $c=m$ ва $i\neq j$ да $x_i\equiv x_j(\text{mod}m)$ бўлганда фақат шу ҳолда m модул бўйича чегирмаларнинг тўла системасидан иборат бўлади. $(a,m)=1$ бўлганда $ax+b$ чизиқли форманинг қийматлари m модул бўйича чегирмаларнинг тўла системасидан иборат бўлиши учун x қабул қиладиган қийматлар ҳам чегирмаларнинг тўла системасидан иборат бўлиши зарур ва етарли.

$x_1, x_2, ..., x_c$ бутун сонлар системаси $c=\varphi(m)$ ва $i\neq j$, $(x_i,m)=1$ да $x_i\equiv x_j(\text{mod}m)$ бўлганда ва фақат шу ҳолда m модул бўйича чегирмаларнинг келтирилган системасидан иборат бўлади. $(a,m)=1$ бўлганда ax чизиқли форманинг қийматлари m модул бўйича чегирмаларнинг келтирилган системасидан иборат бўлиши учун x қабул қиладиган қийматлар ҳам чегирмаларнинг келтирилган системасидан иборат бўлиши зарур ва етарлидир.

1-масала. Ихтиёрий натурал n сон учун қуйидагиларни исботланг:

а) $n^2\equiv 0$ ёки $n^2\equiv 1(mod\,3)$

б) $n^2\equiv 0$ ёки $n^2\equiv \pm1(mod\,5)$

с) $n^2\equiv 0$ yoki $n^2\equiv 1$ yoki $n^2\equiv 4(mod\,8)$

д) $n^3\equiv 0$ yoki $n^3\equiv \pm1(mod\,9)$

е) $n^4\equiv 0$ yoki $n^4\equiv 1(mod\,16)$

Ечиш. а) Қуйидаги ҳолларни қараб ўтамиз: $n\equiv -1,0,1(mod\,3)$. Бу ҳолда $n^2\equiv 1,0,1(mod\,3)$

б) Қуйидаги ҳолларни қараб ўтамиз:

$n\equiv -2,-1,0,1,2(mod\,3)$. Бу ҳолда $n^2\equiv -1,1,0,1,-1(mod\,3)$.

Шунга ўхшатиб, с); д); е) лар ҳам текширилади.

2-Масала. Қуйидаги шартни қаноатлантирадиган m нинг қийматларини топинг:

$$20\equiv 8\ (\text{mod m}).$$

Ечиш. m нинг қийматлари (таққосламанинг маъноси ҳақидаги теоремага асосан) 20 – 8 = 12 нинг бўлувчиларидан иборат, яъни: 1; 2; 3; 4; 6; 12.

2.2-§. Эйлер функцияси. Эйлер ва Ферма теоремаси

m натурал сонга бўлинганида бир хил r қолдиқ қоладиган барча бутун сонлар тўплами m модул бўйича сонлар синфини ташкил қилади. Бу синфнинг ҳар бир сони умумий ҳолда $mk+r$, $k\in Z$ кўринишда ёзилади. Барча синфлар сони m га тенг.

Бутун номанфий сонлар тўпламида аниқланган $\varphi(m)$ функция Эйлер функцияси дейилади.

m>1 ва $(a,m)=1$ бўлганда қуйидаги таққослама ўринли: $a^{\varphi(m)}\equiv 1(\text{mod}\,m)$, бу ерда $\varphi(m)$–Эйлер функцияси (*Эйлер теоремаси*).

Масалан, $\varphi(1)=1, \varphi(2)=1, \varphi(3)=2, \varphi(5)=4, \varphi(12)=4.$

p туб сон ва $(a,p)=1$ бўлганда қуйидаги таққослама ўринли:

$a^{p-1}\equiv 1(\text{mod}\,p)$ (*Ферма теоремаси*[4]).

a бутун сонни ўзида сақлайдиган m бўйича чегирмалар синфини a(mod m) билан белгилаймиз. Демак, $a(\text{mod}m)$=$a+mZ$=$\{a+km;\ k\in Z\}$.

(Ферма теоремаси). p туб сон учун $a^p\equiv a(mod\,p)$ таққослама ўринли бўлади.

Исбот. a бўйича индукцияни қўллаймиз. a=1 да натижа равшан. Фараз қиламиз, p| a^p-a , у ҳолда Ньютон биноми формуласига кўра,

---

[4] Ферма Пер (1601-1655,) – франциялик адвокат ва математик. Аналитик геометрия асосчиси.

$$(a+1)^p-(a+1)=(a^p-a)+\sum_{k=1}^{p-1}C_p^ka^k$$

$p|\,C_p^k,\ \ k=1,2,\dots,p-1,$ муносабатдан (текширинг) ва индукция фаразига кўра, $p|(a+1)^p-(a+1)$. Демак, $(a+1)^p\equiv(a+1)(mod\,p)$.

Изох. Агар $(a,\ p)=1$ бўлса, у ҳолда Ферма теоремасидан қуйидаги муносабат келиб чиқади:

$$a^{p-1}\equiv 1(mod\,p)$$

Таққосламаларнинг хоссаларига кўра қуйидагига эгамиз:

$$c_i\equiv d_i(mod\,p), i=1,2,\dots,n\Rightarrow c_1c_2\dots c_n\equiv d_1d_2\dots d_n(mod\,p)$$

$(a,p)=1$ бўлсин. Қуйидаги сонларни киритамиз:

$$a,2a,3a,\dots,(p-1)a$$

бу кетма-кетликда иккита турли ҳадлари p модул бўйича таққосланмайди. Ҳақиқаттан ҳам,

$$ia\equiv ja(mod\,p)\Rightarrow i\equiv j(mod\,p)\Rightarrow j=i$$

Демак, $a,2a,3a,\dots,(p-1)a$ –сонлардан ҳар бири 1, 2, 3, ..., p–1 сонлардан фақат биттаси билан p модул бўйича таққосланади.

Бундан

$$a\cdot 2a\cdot 3a\cdots(p-1)a=a^{p-1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(p-1)$$
$$\equiv 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(p-1)(mod\,p)$$

$1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(p-1),p\equiv 1$ бўлгани учун $a^{p-1}\equiv 1(mod\,p)$ бўлади.

Z/mZ - билан m модул бўйича барча чегирмалар синфлари тўпламини белгилаймиз:

$$Z/mZ=\{0(\mathrm{mod}m), 1(\mathrm{mod}m), \dots, (m-1)(\mathrm{mod}m)\}.$$

Бу тўпламда қўшиш ва кўпайтириш амалларини қуйидаги тенгликлар орқали киритилади:

$$a(\mathrm{mod}m)+b(\mathrm{mod}m)=(a+b)(\mathrm{mod}m),$$
$$a(\mathrm{mod}m)\cdot b(\mathrm{mod}m)=ab(\mathrm{mod}m)$$

$(Z/mZ,\ +)$ – абел группасидан ҳамда Z группанинг mZ қисм группа бўйича фактор группасидан иборат бўлиб, m модул бўйича чегирмалар синфининг *аддитив группаси* дейилади.

$(Z/mZ,\ +)$ – бирлик элементли коммутатив халқадан иборат бўлиб, m модул бўйича чегирмалар *синфининг халқаси* дейилади.

Агар $(a,m)=1$ бўлса, $a(\mathrm{mod}m)$ синф m модул билан ўзаро туб бўлган *чегирмалар синфи* дейилади.

m модул билан ўзаро туб бўлган чегирмалар синфлари тўплами кўпайтиришга нисбатан абел группасини ташкил этади ва у m модул билан ўзаро туб бўлган чегирмалар синфларининг ***мультипликатив группаси*** дейилади.

Агар $ab\cdot 1(\mathrm{mod}m)$ бўлса, a чегирма b чегирмага m модул бўйича тескари дейилади.

1-масала. 10 модул бўйича чегирмалар тўла системасининг учта турини ёзинг.

Ечиш. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – 10 модул бўйича энг кичик манфий бўлмаган чегирмалар тўла системаси.

-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0 – 10 модул бўйича абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик манфий чегирмалар тўла системаси.

-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 ёки –5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 – 10 модул бўйича абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик чегирмалар тўла системаси.

2-масала. $2^{5n}-1$ нинг 31 га бўлинишини исботланг ($n\in N$).

Ечиш. $2^5-1=31$ бўлганлиги учун $2^5\equiv 1\ (mod\,31)$. Бу таққосламанинг иккала томонини (6-хоссага асосан) n даражага кўтариб, $2^{5n}\equiv 1\ (mod\ 31)$ ни хосил қиламиз, бу эса $31\ |\ (2^{5n}-1)$ ни англатади.

3-масала. 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6 сонлар системаси 7 модул бўйича чегирмаларнинг келтирилган системасини ташкил этишини кўрсатинг.

Ечиш. Берилган сонлардан энг кичик мусбат чегирмаларни тузамиз: 3, 2, 6, 4, 5, 1, чунки, $3^2\equiv 2(\mathrm{mod}7)$, $3^3\equiv 6(\mathrm{mod}7)$, $3^4\equiv 4(\mathrm{mod}7)$, $3^5\equiv 5(\mathrm{mod}7)$, $3^6\equiv 1(\mathrm{mod}7)$.

4-масала. 2^{100} сонининг охирги иккита рақамини топинг.

Ечиш. Берилган соннинг охирги икки рақами бу сонни 100 га бўлганда ҳосил

бўладиган қолдиқдан иборат. Демак, қуйидаги таққосламани қаноатлантирадиган x сонини топиш талаб қилинади:

$$2^{100}\equiv x\ (\mathrm{mod}\ 100).$$

Иккининг кичик даражаларидан бошлаб, 100 га бўлганда ҳосил бўладиган қолдиқларни кетма-кет ажратамиз:

$2^{100} = (2^{10})^{10} = (1024)^{10}; (1024)^{10} \equiv (24)^{10}$ (mod 100).

$(24)^{10} = (576)^5 \equiv 76^{\ 5} \equiv (76)^4 \cdot 76 = (5776)^2 \cdot 76 \equiv (76)^2 \cdot 76 = 5776 \cdot 76 \equiv 76^2 \equiv 5776 \equiv 76$(mod 100).

Шундай қилиб, 2^{100} сонининг охирги икки рақами 7 ва 6 дан иборат.

5-масала. 383^{175} ни 45 га бўлганда ҳосил бўладиган қолдиқни топинг.

Ечиш. 383≡23(mod45) бўлганлиги учун $383^{175} \equiv 23^{175}$(mod45). Энди $\varphi(45)=24$ ва (23,45)=1 дан Эйлер теоремасига кўра: $23^{24} \equiv 1$(mod45) ни ҳосил қиламиз. Демак, $23^{175} = 23^{24 \cdot 7+7} = (23^{24})^7 \cdot 23^7 \equiv 1^7 \cdot 23^7$(mod45). Шу таҳлитда давом этиб,

$23^7 = (23^2)^3 \cdot 23 \equiv 34^3 \cdot 23 = 34^2 \cdot 34 \cdot 23 \equiv 1156 \cdot 782 \equiv 31 \cdot 17 = 527 \equiv 32$(mod45) ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, $383^{175} \equiv 32$(mod45). Изланаётган қолдиқ 32 дан иборат.

6-масала. Агар p – туб сон бўлса, у ҳолда $C_{p-1}^k \equiv (-1)^k \pmod p$ таққосламани исботланг.

Ечиш. Маълумки, ихтиёрий p ва k сонлар учун $C_{p-1}^k + C_{p-1}^{k-1} \equiv C_p^k$ формула ўринли, к C_p^k - бутун сондан иборат бўлиб, p га бўлинади, чунки $k < p$, p эса туб сондан иборат, шунинг учун у махражнинг бирорта ҳам кўпайтувчиси билан қисқариб кетмайди. Шундай қилиб, $C_p^k \equiv 0 \pmod p$. У ҳолда $C_{p-1}^k \equiv (-1) C_{p-1}^{k-1} \pmod p$. Бу рекуррент муносабатни кетма-кет қўллаб, юқори кўрсаткични 1 гача камайтирамиз:

$$C_{p-1}^k \equiv (-1) C_{p-1}^{k-1} = (-1)^2 C_{p-1}^{k-2} = (-1)^3 C_{p-1}^{k-3} = \ldots = (-1)^{k-1}(p-1) = (-1)^k \pmod p.$$

7-масала. x нинг ҳар қандай бутун қийматида $x^7 \equiv x$(mod42) таққослама тўғрилигини кўрсатинг.

Ечиш. Ферма теоремасига кўра, $x^7 \equiv x$(mod7). Энди $x^7 \equiv x$(mod2 ва 3) эканлигини исбот қиламиз, бунинг учун 2 ва 3 модуллар бўйича чегирмаларнинг тўла системасини, яъни 0, 1, 2 сонларни синаш етарли.

8-масала. Агар a ва b - ихтиёрий бутун сонлар, p - туб сон бўлса, қуйидаги таққосламани исботланг:

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p.$$

Ечиш. Биномни ёйиш формуласидан:

$$(a+b)^p \equiv a^p + C_p^1 a^{p-1} b + C_p^2 a^{p-2} b^2 + \ldots + C_p^{p-k} a b^{p-1} + b^p.$$

Ўнг томонда иккинчи қўшилувчидан бошлаб, p-1 - қўшилувчигача барча қўшилувчилар p га бўлинади, чунки

$C_p^k = \dfrac{p(p-1)\ldots(p-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$, бу ерда $k < p$.

Демак, $C_p^k = 0 \pmod p, i = 1, 2, \ldots, (p-1)$.

Бу ерда $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$ келиб чиқади.

9-масала. Бутун соннинг 100-даражасини 125 га бўлганда ҳосил бўладиган қолдиқни топинг.

Ечиш. Агар (a,5)=1 бўлса, у ҳолда Эйлер теоремасига кўра:

$$a^{\varphi(125)} = a^{100} \equiv 1(\mathrm{mod}\,125).$$

Агарда (a,5) = 5 бўлса, у ҳолда $a^{100} \equiv 0$(mod125). Демак, (a,5) = 1 бўлса, у ҳолда изланаётган қолдиқ 1 га тенг. Агарда (a,5)=5 бўлса, у ҳолда a^{125} сони 125 га бўлинади.

10-масала. $2^{\varphi(m)-1}$ ни тоқ m сонига бўлинганида ҳосил бўладиган қолдиқни топинг.

Ечиш. $2^{\varphi(m)-1} \equiv r(\mathrm{mod}\,m)$, $0 \le r < m$ бўлсин. У ҳолда $2^{\varphi(m)} \equiv 2r \equiv 1(\mathrm{mod}\,m)$ ёки $r = \dfrac{1+mq}{2}$, бу ерда $q \in Z$. $0 \le r < m$ шартни q=1 да ягона $\dfrac{1+mq}{2}$ қиймат қаноатлантиради, бу ердан $r = \dfrac{1+m}{2}$ ни ҳосил қиламиз.

11-масала. 341 сони учун $2^{341} \equiv 2$(mod341) таққосламанинг ўринли эканлигини кўрсатинг.

Ечиш. 341 мураккаб сон, 341=11·31 $2^5 \equiv 1$(mod31) ва $2^{10} \equiv 1$(mod31) таққосламалар ўринли эканлигини осонгина текшириш мумкин.

Ферма теоремасига асосан $2^{10} \equiv 1$(mod11). 11 ва 13 сонлар ўзаро туб бўлганлиги учун бу ердан $2^{10} \equiv 1$(mod11·31) келиб чиқади, яъни $2^{10} \equiv 1$(mod341). Демак, $2^{340} \equiv 1$(mod341) ва $2^{341} \equiv 2$(mod341) таққосламалар ўринли.

12-масала. $ax \equiv 1(mod\ p)$ таққосламани қаноатлантирадиган барча x сонлар топилсин.

Ечиш. Ферма теоремасига кўра, бу сон $x \equiv a^{p-2}(mod\ p)$ таққослама билан аниқланади.

13-масала. p туб сон барча бутун a b, сонлар учун $ab^p - ba^p$ – сони бўлади.

Ечиш. Ферма теоремасига кўра,

$$b^p \equiv b(mod\, p), \qquad a^p \equiv a(mod\, p)$$

$$ab^p - ba^p \equiv ab - ab \equiv 0(mod\, p).$$

14-масала. $p\geq 7$ туб сон учун $p-1$ та рақамдан ташкил топган 11...1 сон p га қолдиқсиз бўлинишини исботланг:

Ечиш. (10, p)=1. Демак, Ферма теоремасига кўра

$$11\dots1 = \frac{10^{p-1}-1}{9} \equiv \frac{1-1}{9} \equiv 0(mod\, p).$$

15-масала. p туб сон учун $(a+b)^p \equiv (a^p+b^p)(mod\, p)$ таққослама ўринли бўлади.

Ечиш. Ферма теоремасига кўра,

$$a \equiv a^p(mod\, p), b \equiv b^p(mod\, p), (a+b)^p \equiv (a+b) \equiv a+b \equiv$$
$$(a^p+b^p)(mod\, p).$$

16-масала. (Эйлер теоремаси). Агар (a,m)=1 бўлса, у ҳолда

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1(mod\, m)$$

$n = \varphi(m)$ белгилаймиз.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ сонлар $\{1, 2, \dots, m\}$ тўплам ичида жойлашган ва m сони билан ўзаро туб бўлган ўзаро тенг бўлмаган сонларни ажратамиз. Маълумки, улар бир-бири билан m модул бўйича таққосланмайди.

Қуйидаги сонларни киритамиз:

$$ax_1, ax_2, \dots, ax_n$$

Бу кетма-кетликда ҳам иккита турли ҳадлари m модул бўйича таққосланмайди.

Ҳақиқаттан ҳам, $x_i \neq x_j$ ва $x_i a \equiv x_j a(mod\, m)$ бўлсин. У ҳолда (a,m)=1 бўлгани учун $x_i \equiv x_j(mod\, m)$ бўлади. Бу эса $x_1, x_2, \dots, x_n$ сонларнинг бир-бири билан m модул бўйича таққосланмаслигига зид.

$(a, m) = 1, (x_i, m) = 1$ бўлгани учун (a,m)=1 бўлади, яъни

$ax_i \equiv x_j(mod\, m)$. Бу таққосламаларни i=1, 2, ..., n бўйича кўпайтириб чиқсак

$$ax_1 \cdot ax_2 \cdot \dots \cdot ax_n = a^n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \equiv x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n(mod\, m)$$

ни ҳосил қиламиз. $(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n, m) = 1$ бўлгани учун $a^n \equiv 1(mod\, m)$ бўлади.

Изох. $\varphi(p) = p - 1$ бўлгани учун Ферма теоремаси Эйлер теоремасидан бевосита келиб чиқади.

17-масала. a бутун сон учун $a^{10} + 1$ сон 10 га бўлинади.

a ни топинг.

Ечиш. (a,10)=1, акс ҳолда $a^{10} + 1$ ва 10 сонлар ўзаро туб бўлади. $\varphi(10) = 4$ бўлгани учун, Эйлер теоремасига кўра,

$a^{10} + 1 \equiv 0(mod\, 10)$ таққослама $a^2 + 1 \equiv 0(mod\, 10)$ таққосламага тенг кучли. $a = \pm 1, a = \pm 3$ ҳолларни қараб чиқиб, $a \equiv \pm 3(mod\, 10)$ ечимни топамиз.Демак, $a \equiv \pm 3(mod\, 10)$.

18-масала. p>5- туб сон бўлса, $p^8 \equiv 1(mod\, 240)$ ни исботланг.

Ечиш. $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$. Ферма теоремасига кўра, $p^2 \equiv 1(mod\, 3)$ ва

$p^4 \equiv 1(mod\, 5) \cdot \varphi(2^4) = 2^3$ бўлгани боис, Эйлер теоремасига кўра

$$p^8 \equiv 1(mod\, 16)$$

Демак, $p^8 \equiv 1(mod\, m), m = 3,5,16$, яъни $p^8 \equiv 1(mod\, 240)$.

19-масала. $a = 128^{148} - 148^{129}$ сонини 13 га бўлгандаги қолдиқни топинг.

Ечиш. 2 хоссага кўра, $r_{13}(a) = r_{13}\left(r_{13}\left(128^{148}\right) - r_{13}\left(148^{129}\right)\right)$. Шунинг учун $r_{13}\left(128^{148}\right)$, $r_{13}\left(128^{129}\right)$ ни қолдиғини топамиз. Демак, $128 \equiv -2(\mathrm{mod}13)$.

Кетма-кет равишда

$128^2 \equiv (-2)^2(\mathrm{mod}13)$ *яъни* $128^2 \equiv 4(\mathrm{mod}13)$,

$128^4 \equiv 4^2(\mathrm{mod}13)$ *яъни* $128^4 \equiv 3(\mathrm{mod}13)$,

$128^8 \equiv 4 \cdot 3(\mathrm{mod}13)$ *яъни* $128^6 \equiv -1(\mathrm{mod}13)$,

$128^{12} \equiv (-1)^2(\mathrm{mod}13)$ *яъни* $128^{12} \equiv 1(\mathrm{mod}13)$,

топамиз.

Бундан $148 = 12 \cdot 12 + 4$, у ҳолда $128^{148} = \left(128^{12}\right)^{12} \cdot 128^4 \equiv 3(\mathrm{mod}13)$, шунинг учун $r_{13}\left(128^{148}\right) = 3$. Худди шундай, $r_{13}\left(148^{129}\right) = 5$. Натижада қуйидаги қолдиққа эга бўламиз.

$r_{13}(a) = r_{13}(3-5) = r_{13}(-2) = 11.$

2.3-§. Биринчи даражали таққосламалар ва уларни ечиш усуллари

n-даражали бир номаълумли таққослама деб қуйидаги кўринишдаги таққосламага айтилади:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n\equiv 0(\mathrm{mod}\,m),$$

Бу ерда: $a_0\equiv 0(\mathrm{mod}m)$, $a_i\in Z$, $i=0$, n, $n-1$ манфий бўлмаган бутун сон. *Таққосламани ечиш – уни қаноатлантирадиган х нинг барча қийматларини топиш демакдир.*

Агар берилган таққосламани бирор x=α киймат қаноатлантирса, у ҳолда бу таққосламани α билан *m* модул бўйича таққосланадиган барча сонлар ҳам қаноатлантиради: x≡α(mod*m*) ёки x=*mk*+α, яъни, *m* модул бўйича α тегишли бўлган чегирмалар синфининг барча чегирмалари қаноатлантиради. Ҳар бир синф битта ечимни ташкил этади.

Демак, таққосламани ечиш уни қаноатлантирадиган чегирмаларнинг барча синфларини топишдан иборат.

Ҳар бир синфдан биттадан олинган чегирмалар тўла системани ташкил этганлиги учун таққосламани қаноатлантирадиган сонлар синфини аниқлаш, чегирмаларнинг тўла системасидан уларга мос келадиган чегирмаларни топишдан иборат экан. Одатда, α сифатида берилган модул бўйича манфий бўлмаган энг кичик ёки абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик чегирмалар олинади. Шундай қилиб, тўла системанинг нечта чегирмаси берилган таққосламани қаноатлантирса, таққослама шунча ечимга эга бўлади.

Агар бир хил x номаълумли ва бир хил модулли иккита таққосламани x номаълумнинг бир хил қийматлари қаноатлантирса, бундай таққосламалар тенг кучли дейилади.

Берилган таққосламага тенг кучли таққосламалар қуйидаги алмаштиришлар натижасида ҳосил бўлади:

а) берилган таққосламанинг иккала томонига ҳам бир хил сонни қўшиш натижасида;

б) берилган таққосламанинг ихтиёрий бир қисми модулига каррали бўлган сонни қўшиш натижасида;

с) берилган таққосламанинг иккала томонини модул билан ўзаро туб бўлган сонга кўпайтириш (бўлиш) натижасида;

д) таққосламанинг иккала томони ва модулини бир хил сонга бўлиш натижасида.

1-масала. Қуйидаги таққосламаларни ечинг:

а) x^3-2x+6≡0(mod11);

б) x^4+2x^3+6≡0(mod8);

с) x^4-x^3-x^2+5x-2≡0(mod6).

Ечиш. а) 11 модул бўйича абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик чегирмаларнинг тўла системасидан иборат:

-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5

сонларни бевосита таккосламага қўйиб текшириш натижасида 5 сони таккосламани каноатлантиришини ҳосил қиламиз. Ечимни x≡5(mod11) кўринишда ёзамиз;

б) 8 модул бўйича чегирмаларнинг тўла системаси -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 да бирорта ҳам чегирма таққосламани қаноатлантирмайди, шунинг учун берилган таккослама ечимга эга эмас;

с) 6 модул бўйича чегирмаларнинг тўла системаси -2, -1, 0, 1, 2, 3 да фақат иккита сон таққосламани қаноатлантиради: -1 ва 2. Берилган таққослама иккита ечимга эга: x≡-1(mod6) ва x≡2(mod6).

Модулнинг бўлувчиси бўйича олинган таққослама берилган модул бўйича таққосламанинг натижасидан иборат бўлади.

2-масала. x^2-5x+6≡0(mod9) таққосламани ечинг.

Ечиш. Модулнинг бўлувчиси бўйича олинган таққосламани кўриб чиқамиз:

x^2-5x+6≡0(mod3), бу ердан x^2+x≡0(mod3) ёки x(x+1)≡0(mod3) кўпайтувчиларнинг ҳар бирини алоҳида ечиб x≡0;2(mod3) ни ҳосил қиламиз.

Ечимларни чегирмалар синфи орқали x=3*q*; 3*q*+2 шаклида ёзамиз. Энди x=3*q* ни берилган таққосламага қўямиз: $9q^2-15q+6\equiv 0$(mod9), бу ердан 3*q*≡3(mod9), яъни, *q*≡1(mod3) ёки *q*=1+3*t*. Бу ердан x=3+9*t* ёки x≡3(mod9) ечимни ҳосил қиламиз. x=3*q*+2 да берилган таққослама қуйидаги кўринишда бўлади:

$$9q^2+12q+4-15q-10+6\equiv 0(\mathrm{mod}9).$$

Бу таккосламани соддалаштиришлардан сўнг 3*q*≡0(mod9) ёки *q*≡0(mod3) ни ҳосил қиламиз. *q*=3*t* бўлганда бериладиган таққосламанинг иккинчи ечими

x=9*t*+2 ёки x≡2(mod9) ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, берилган таққослама иккита ечимга эга экан: x≡2;3(mod9).

3-масала. Тенг кучли таққосламага ўтиш билан қуйидаги таққосламани ечинг:

$$13x \equiv 5(\mathrm{mod}47).$$

Ечиш. Таққосламанинг ўнг томонига 47 ни қўшамиз: $13x \equiv 52(\mathrm{mod}47)$. Энди таққосламанинг иккала томонини 13 га қисқартириб, унинг ечимини ҳосил қиламиз: $x \equiv 4(\mathrm{mod}47)$.

*Биринчи даражали таққослама*нинг умумий кўриниши қуйидагича ёзилади:

$$ax \equiv b(\mathrm{mod}m).$$

Бу таққосламани ечишда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

а) Агар $(a,m)=1$ бўлса, у ҳолда таққослама фақат ягона ечимга эга.

б) Агар $(a,m)=d>1$ бўлса, b озод ҳад d га бўлинмаса, у ҳолда таққослама ечимга эга эмас.

с) Агар $(a,m)=d>1$ бўлиб, b озод ҳад d га бўлинса, у ҳолда таққослама d та ечимга эга бўлади, бу ечимлар қуйидаги формулалар билан топилади:

$$x_k \equiv \alpha + \frac{(k-1)m}{d}(\mathrm{mod}\, m), k = 1, 2, \ldots, d$$

бу ерда α - қуйидаги таққосламанинг ечимидан иборат:

$$\frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d}\left(\mathrm{mod}\frac{m}{d}\right).$$

$ax \equiv b(\mathrm{mod}m)$ таққосламани ечиш усулларини фақат $(a,m)=1$ бўлганда қараб чиқамиз, учинчи ҳолда таққослама d га қисқартирилгандан сўнг биринчи ҳолга келтирилади.

Биринчи даражали таққосламаларни ечишда қуйидаги учта усул қўлланилади:

а) ечим m модул бўйича энг кичик манфий бўлмаган ёки абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик чегирмаларнинг тўла системасидаги сонларни бевосита синаш усули билан топилади.

б) *Эйлер усули.* Ечим қуйидаги формула билан топилади:

$$x \equiv ba^{\varphi(m)-1}(\mathrm{mod}\, m),$$

бу ерда $\varphi(m)$–Эйлер функцияси;

с) чекли узлуксиз касрлар ёрдамида қуйидаги формула билан ечим топилади:

$$x \equiv (-1)^n bP_{n-1}(\mathrm{mod}\, m),$$

бу ерда $P_{s-1} - \frac{m}{a}$ касрни узлуксиз касрга ёйганда ҳосил бўладиган охиргисидан битта олдинги муносиб касрнинг суратидан иборат.

Баъзи ҳолларда таққосламаларнинг хоссаларига асосланган алмаштиришлар орқали берилган таққослама осон ечилади (3-мисолга қаранг).

4-масала. Қуйидаги таққосламани Эйлер усули билан ечинг:

$$9x \equiv 8(\mathrm{mod}34).$$

Ечиш. $(9,34)=1$ бўлганлиги учун берилган таққослама ягона ечимга эга бўлади. $\varphi(34)=16$ ни ҳисоблаб қуйидагиларга эга бўламиз:

$$x \equiv 8 \cdot 9^{15} \equiv 8 \cdot 3^{30} \equiv 8 \cdot 3^{14} \equiv 8 \cdot (2187)^2 \equiv 8 \cdot 11^2 \equiv 16(\mathrm{mod}34).$$

5-масала. Таққосламани узлуксиз касрлар орқали ечинг:

$$285x \equiv 177(\mathrm{mod}924).$$

Ечиш. $(285,924)=3$ ва $177=59 \cdot 3$ бўлганлиги учун берилган таққослама учта ечимга эга.

Таққосламанинг иккала томони ва модулини 3 га бўламиз:

$$95x \equiv 59(\mathrm{mod}308).$$

$\frac{308}{95}$ касрни узлуксиз касрга ёямиз: $\frac{308}{95}=(3, 4, 7, 1, 2)$. Муносиб касрлар жадвалини тузамиз:

2.1-жадвал

q_i		3	4	7	1	2
P_i	1	3	13	94	107	308

Шундай қилиб, $P_{n-1}=P_4=107$, демак, $x \equiv (-1)^4 \cdot 107 \cdot 59(\mathrm{mod}308)$, бу ердан натижа таққосламанинг ечими $x \equiv 153(\mathrm{mod}308)$ ни ҳосил қиламиз. Берилган таққосламанинг ечимлари қуйидагича тасвирланади:

$$x \equiv 153;\ 461;\ 769(\mathrm{mod}924).$$

Биринчи даражали таққосламаларни биринчи даражали икки номаълумли аниқмас тенгламаларини (диофант тенгламалари) ечишга тадбиқини қараб чиқамиз.

Қуйидаги аниқмас тенглама

$$ax+by=c; \ (a,\ b,\ c\in Z)$$

ни ечиш талаб қилинсин. Агар $(a,b)=1$ бўлса, у ҳолда берилган тенглама бутун ечимларга эга бўлиб, унинг умумий ечими қуйидагича ифодаланади:

$$x=x_1+bt,$$
$$y=y_1-at$$

ёки b манфий бўлганда қуйидагича ифодалаш қулай:

$$x=x_1-bt,$$
$$y=y_1+at.$$

Бу формулаларда x_1 ва y_1 лар x ва y ларнинг тенгламани қаноатлантирадиган қандайдир қийматларидан иборат ва $t\in Z$.

Агар $(a,b)=d>1$ ва c сони d га бўлинмаса, у ҳолда $ax+by=c$ тенглама бутун сондаги ечимларга эга эмас.

Биринчи даражали аниқмас тенгламалар назариясидан номаълумларнинг хусусий ечимларини топишнинг бир неча усуллари мавжуд.

Таққосламалар ёрдамида хусусий ечим қуйидагича топилади: $ax+by=c$ дан таққосламанинг маъноси ҳақидаги теоремага кўра $ax\equiv c(\mathrm{mod}\,b)$ бир номаълумли таққосламани ҳосил қиламиз, бу ерда b ўз ишораси билан олинади, таққосламани қаноатлантирадиган x нинг қиймати x_1 сифатида олинади, y_1 нинг қиймати эса бевосита берилган тенгламага x_1 ни қўйиб топилади.

6-масала. Қуйидаги тенгламани бутун сонларда ечимларини топинг:

$$39x-22y=10.$$

Ечиш. Тенгламадан қуйидаги таққослама келиб чиқади:

$$39x\equiv 10(\mathrm{mod}22).$$

Бу таққосламадаги коэффициентларни 22 модул бўйича энг кичик мусбат чегирмаларига келтирсак, $17x\equiv 10(\mathrm{mod}22)$ га тенг ва бу ердан $x_1=20$ ни ҳосил қиламиз. Бу қийматни берилган тенгламага қўйиб, $y_1=35$ ни топамиз. Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} x=20+22t \\ y=35+39t \end{cases}$$

7-масала. Туғилган куннинг 12 га кўпайтмаси ва ойнинг 31 га кўпайтмаларининг йиғиндиси 299 эканлиги маълум бўлса, туғилган кунни топинг.

Ечиш. x–сана, y–ойнинг рақами бўлсин. У ҳолда қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$12x+31y=299.$$

Бу ердан $12x\equiv 299(\mathrm{mod}31)$ ёки $12x\equiv 20(\mathrm{mod}31)$ таққослама келиб чиқади. Охирги таққосламани ечиб, $x_1=12$ ни топамиз. Топилган қийматни берилган тенгламага қўйиб, $y_1=5$ ни ҳосил қиламиз. Демак, туғилган кун 12 – май экан.

2.4-§. Таққосламалар системаси ва унинг ечими

Бир номаълумли ҳар хил модулли биринчи даражали таққосламалар системасининг умумий кўриниши қуйидагидан иборат:

$$\begin{cases} a_1x\equiv b_1(\mathrm{mod}\,m_1) \\ a_2x\equiv b_2(\mathrm{mod}\,m_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_nx\equiv b_n(\mathrm{mod}\,m_n) \end{cases} \tag{2.3}$$

Бу система ечимини топишнинг умумий усули қуйидагича:

Дастлаб системанинг биринчи таққосламасининг $x\equiv\alpha(\mathrm{mod}m_1)$ ечими топилади, бу ерда α–m_1 модул бўйича манфий бўлмаган энг кичик ёки абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик чегирмадан иборат, бу ечим сонлар синфи шаклида ёзиб олинади:

$$x=m_1t+\alpha \tag{2.4}$$

(Агар биринчи таққослама ечимга эга бўлмаса, берилган система ҳам ечимга эга бўлмайди).

Сўнгра x нинг (2) даги қиймати системанинг иккинчи таққосламасига қўйилиб,

$$a_2(m_1t+\alpha)\equiv b_2(\mathrm{mod}m_2\,) \tag{2.5}$$

таққослама ҳосил қилинади. (3) таққосламадан t нинг сонлар синфи шаклидаги

$$t=m_2t_1+\beta$$

кўриниши топилиб, у (2) тенгликка қўйилади, x нинг янги қиймати ҳисобланади. (Агар (3) таққослама ечимга эга бўлмаса, берилган система ҳам ечимга эга бўлмайди).

Натижада x нинг сонлар синфи шаклида ёзилган ва берилган системанинг дастлабки иккита таққосламасини каноатлантирадиган қиймати ҳосил бўлади. x нинг топилган қиймати учинчи таққосламага қўйилиб, ҳосил бўлган таққослама t_1 га нисбатан ечилади ва t_1 нинг сонлар синфи шаклида ёзилган қиймати x нинг ифодасига қўйилади, сўнгра x нинг бу қиймати тўртинчи таққосламага қўйилади, шу тарзда системанинг охирги таққосламасигача ечилади. *x нинг охирги қиймати берилган системанинг ечимидан иборат бўлади.*

Берилган системани ечишда даставвал ҳар бир таққосламани алоҳида ечиб, система қуйидаги кўринишга келтириб олинади:

$$\begin{cases} x \equiv \alpha_1 (\mathrm{mod}\, m_1) \\ x \equiv \alpha_2 (\mathrm{mod}\, m_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x \equiv \alpha_n (\mathrm{mod}\, m_n) \end{cases} \tag{2.6}$$

Сўнгра юқоридаги усул қўлланилади.

Агар (1) системанинг $a_ix\equiv b_i(\mathrm{mod}m_i)$, $(i=1,n)$ таққосламалари учун $(a_i,m_i)=d_i$ ва $d_i|b_i$ бўлса, у ҳолда ҳар бир i-таққосламанинг ҳадлари ва модулини d_i га қискартириб, (1) системага тенг кучли бўлган қуйидаги система ҳосил қилинади:

$$\begin{cases} \frac{a_1}{d_1}x \equiv \frac{b_1}{d_1}\left(\mathrm{mod}\,\frac{m_1}{d_1}\right) \\ \frac{a_2}{d_2}x \equiv \frac{b_2}{d_2}\left(\mathrm{mod}\,\frac{m_2}{d_2}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{a_n}{d_n}x \equiv \frac{b_n}{d_n}\left(\mathrm{mod}\,\frac{m_n}{d_n}\right) \end{cases} \tag{2.7}$$

Бу системанинг таккосламаларини x га нисбатан ечиб, (5) системанинг ечимини қуйидаги системанинг ечимига келтириш мумкин:

$$\begin{cases} x \equiv \alpha_1\left(\mathrm{mod}\,\frac{m_1}{d_1}\right) \\ x \equiv \alpha_2\left(\mathrm{mod}\,\frac{m_2}{d_2}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x \equiv \alpha_n\left(\mathrm{mod}\,\frac{m_n}{d_n}\right) \end{cases} \tag{2.8}$$

Агар (4) системада $m_1, m_2,..., m_n$ модуллар жуфт-жуфти билан ўзаро туб ва $i\neq j$ да $(m_i,m_j)=1$ бўлса, у ҳолда унинг ечимини қуйидаги формула билан ҳам топиш мумкин:

$$x_0 = \frac{M}{m_1}y_1\alpha_1 + \frac{M}{m_2}y_2\alpha_2 + \dots + \frac{M}{m_n}y_n\alpha_n \tag{2.9}$$

бу ерда $M=[m_1, m_2 ,..., m_n]$ ва $y_1, y_2 ,..., y_n$ лар

$$\frac{M}{m_i}y_i \equiv 1(\mathrm{mod}\, m_i), i=\overline{1,n}$$

таққосламаларнинг ечимларидан иборат. Системанинг ечими эса $x\equiv x_0(\mathrm{mod}\, M)$ таққосламадан иборат бўлади.

Агар $\frac{m_1}{d_1},\frac{m_2}{d_2},...,\frac{m_n}{d_n}$ модуллар жуфт-жуфти билан ўзаро туб бўлса, бу усул билан (6) системани ҳам ечиш мумкин.

1-масала. Қуйидаги таққосламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x \equiv 13(\mathrm{mod}16) \\ x \equiv 3(\mathrm{mod}10) \\ x \equiv 9(\mathrm{mod}14) \end{cases}$$

Ечиш. Биринчи таққосламадан: $x=16t+13$ ни ҳосил қиламиз. x нинг бу қийматини иккинчи таққосламага қўйиб ҳисоблаймиз:

$$16t+13\equiv3(\mathrm{mod}10), \text{ ёки } 16t+10\equiv0(\mathrm{mod}10),$$

Бу ердан $8t\equiv0(\mathrm{mod}5)$ ёки $16t\equiv0(\mathrm{mod}5)$ ни ҳосил қиламиз, демак, $t=5t_1$. $t=5t_1$ ни $x=16t+13$ ифодага қўямиз: $x=16\cdot5t_1+13=80t_1+13$. x нинг топилган қийматини учинчи таққосламага қўямиз:

$80t_1+13\equiv9(\mathrm{mod}14)$, ёки $80t_1\equiv-4(\mathrm{mod}14)$, бу ердан $80t_1\equiv10(\mathrm{mod}14)$, ёки $40t_1\equiv5(\mathrm{mod}7)$, ёки $8t\equiv1(\mathrm{mod}7)$, бу ердан $t_1\equiv1(\mathrm{mod}7)$, яъни, $t_1=7t_2+1$. $t_1=7t_2+1$ ни $x=80t_1+13$ ифодага қўйиб, $x=80\cdot(7t_2+1)+13=560t_2+93$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, $x\equiv93(\mathrm{mod}560)$.

Текшириш: 93–13 айирма 16 га бўлинади; 93–13 айирма 10 га бўлинади; 93–9 айирма 14 га бўлинади.

Эслатма. $16t\equiv0(\mathrm{mod}10)$ таққосламани ечишда $8t\equiv0(\mathrm{mod}5)$ таққосламани ҳосил қилдик, унинг ечими $t\equiv0(\mathrm{mod}5)$, ёки $t=5t_1$ берилган таққосламанинг $x=80t_1+13$ ечимига олиб келди. Аммо $16t\equiv0(\mathrm{mod}10)$ таққосламанинг иккинчи $t\equiv5(\mathrm{mod}10)$, $t=10t_1+5$ ечими ҳам мавжуд, чунки $d=(16,10)=2$. Бу ечимни $x=16t+13$ ифодага қўйиб, $x=16(10t_1+5)+13=160t_1+93$ ечимни ҳосил қиламиз. Лекин, $93\equiv13(\mathrm{mod}80)$ бўлганлиги учун, яъни 93 ва 13 сонлари 80 модул бўйича бир синфга тегишли бўлганлиги учун x нинг бу қийматига мос бўлган ечими қаралмайди.

Бу эслатмадан (1-мисол) агар системанинг бирор таққосламаси ёки t_1 га нисбатан бирор таққослама m модул бўйича d та ечимга эга бўлса, у ҳолда система ечимини топиш учун d та ечимга эга бўлган таққослама ечимини унга тенг кучли бўлган m/d модул бўйича таққослама ечими билан алмаштириш етарли.

2-масала. Таққосламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 7x\equiv 3(\mathrm{mod}\,11) \\ 15x\equiv 5(\mathrm{mod}\,35) \\ 3x\equiv 2(\mathrm{mod}\,5) \end{cases}$$

Ечиш. Системанинг ҳар бир таққосламасини алоҳида ечиб, бу системага тенг кучли бўлган қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x\equiv 2(\mathrm{mod}\,11) \\ x\equiv 5(\mathrm{mod}\,7) \\ x\equiv 4(\mathrm{mod}\,5) \end{cases}$$

Бу системанинг модуллари жуфт - жуфти билан ўзаро туб сонлардан иборат бўлганлиги учун унинг ечимини (7) формула билан топиш мумкин.

$$M=[11, 7, 5]=385,\ \frac{M}{m_1}=35, \frac{M}{m_2}=55, \frac{M}{m_3}=77$$

сонларни топиб, қуйидаги таққосламаларни тузамиз:

$$35u_1\equiv1(\mathrm{mod}11),\ 55u_2\equiv1(\mathrm{mod}7),\ 77u_3\equiv1(\mathrm{mod}5),$$

бу ердан $u_1=6$, $u_2=-1$, $u_3=3$ ларни топамиз. Энди (7) формуладан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x_0=35\cdot6\cdot2+55\cdot(-1)\cdot5+77\cdot3\cdot4=1069\equiv299(\mathrm{mod}385).$$

Шундай қилиб, $x\equiv299(\mathrm{mod}385)$.

3-масала. Таққосламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 5x\equiv 7(\mathrm{mod}\,9) \\ 4x\equiv 3(\mathrm{mod}\,7) \\ 3x\equiv 8(\mathrm{mod}\,12) \end{cases}$$

Ечиш. Берилган системанинг учинчи таққосламасида (3,12)=3, аммо 8 сони 3 га бўлинмайди, шунинг учун бу таққослама берилган система ҳам ечимга эга эмас.

4-масала. Таққосламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x\equiv 2(\mathrm{mod}\,3) \\ x\equiv 3(\mathrm{mod}\,2) \\ x\equiv -1(\mathrm{mod}\,6) \end{cases}$$

Ечиш. Системанинг дастлабки иккита таққосламаси $x\equiv-1(\mathrm{mod}3)$ ва

$x\equiv-1(\mathrm{mod}2)$ таққосламаларга тенг кучли, шунинг учун уларни учинчи таққосламанинг натижаси бўлганлиги учун ташлаб юборилса бўлади. Шундай қилиб, система учинчи таққосламасининг ечими системанинг ҳам ечими бўлади, яъни, $x\equiv-1\equiv5(\mathrm{mod}6)$.

5-масала. 2, 3, 4, 5, 6 ва 7 сонларига бўлинганида мос равишда 1, 2, 3, 4, 5 ва 0 қолдиқ ҳосил бўладиган сонни топинг.

Ечиш. Масала қуйидаги таққосламалар системасига келтирилади:

$$\begin{cases} x\equiv 1(\mathrm{mod}\,2) \\ x\equiv 2(\mathrm{mod}\,3) \\ x\equiv 3(\mathrm{mod}\,4) \\ x\equiv 4(\mathrm{mod}\,5) \\ x\equiv 5(\mathrm{mod}\,6) \\ x\equiv 0(\mathrm{mod}\,7) \end{cases}$$

$x\equiv1(\mathrm{mod}2)$ ёки $x\equiv3(\mathrm{mod}2)$ таққослама $x\equiv3(\mathrm{mod}4)$ таққосламанинг натижаси сифатида ташлаб юборилиши мумкин. Худди шундай $x\equiv2(\mathrm{mod}3)$ таққослама ҳам олинмайди.

Шундай қилиб, қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x\equiv 3(\mathrm{mod}\,4) \\ x\equiv 4(\mathrm{mod}\,5) \\ x\equiv 5(\mathrm{mod}\,6) \\ x\equiv 0(\mathrm{mod}\,7) \end{cases}$$

Бу системани ечиб, $x\equiv119(\mathrm{mod}420)$ ни ҳосил қиламиз.

6-масала. Қуйидаги таққослама ечимга эга бўладиган a нинг қийматларини топинг:

$$\begin{cases} x\equiv 5(\mathrm{mod}\,18) \\ x\equiv 8(\mathrm{mod}\,21) \\ x\equiv a(\mathrm{mod}\,35) \end{cases}$$

Ечиш. Биринчи таққосламадан $x=18t+5$ ни ҳосил қиламиз. x нинг бу қийматини иккинчи таққосламага қўйиб, t нинг қийматини топамиз:

$$18t+5\equiv8(\mathrm{mod}21),\ 18t\equiv3(\mathrm{mod}21) \text{ ёки } 6t\equiv1(\mathrm{mod}7),\ t\equiv6(\mathrm{mod}7).$$

$t\equiv-1(\mathrm{mod}7)$ ни олиш қулайроқ, бу ердан $t=7t_1-1$. Бу қийматни x нинг ифодасига қўйиб, $x=16\cdot(7t_1-1)=5=126t_1-13$. x нинг ҳосил қилинган қийматини системанинг учинчи таққосламасига қўямиз:

$$126t_1-13\equiv a(\mathrm{mod}35), \text{ яъни } 21t_1\equiv a=13(\mathrm{mod}35).$$

(21,35)=7 бўлганлиги учун охирги таққослама ечимга эга бўлиши учун $a+13\equiv0(\mathrm{mod}7)$ таққослама ечимга эга бўлиши керак, бу ердан $a\equiv1(\mathrm{mod}7)$.

Шундай қилиб, берилган система $a\equiv1(\mathrm{mod}7)$ бўлганда ечимга эга.

7-масала. Ўнлик саноқ системасида берилган $4x87y6$ сони 56 га бўлинади. Шу сонни топинг.

Ечиш. Масала шартидан қуйидаги таққосламаларни тузамиз:

$$\begin{cases}4x87y6\equiv0(\mathrm{mod}\,8)\\4x87y6\equiv0(\mathrm{mod}\,7)\end{cases}$$

Биринчи таққосламадан $7y6$ нинг 8 га бўлиниши ва 8 га бўлиниш аломатига асосан y=3 ва y=7 қийматларни ҳосил қиламиз. Бу қийматларни иккинчи таққосламага қўйиб,

$$4x8736\equiv0(\mathrm{mod}7)$$
$$4x8776\equiv0(\mathrm{mod}7)$$

таққосламаларни топамиз. Бу таққосламаларни қуйидаги кўринишда тасвирлаб оламиз:

$400000+10000x+8736\equiv0(\mathrm{mod}7)$ $\quad 4x\equiv1(\mathrm{mod}7)$

ёки $\quad 400000+10000x+8776\equiv0(\mathrm{mod}7)$ $\quad 4x\equiv3(\mathrm{mod}7)$.

Биринчи таққослама $x\equiv2(\mathrm{mod}7)$ ёки $x=7t+2$ ечимга эга. Бу ердан t=0 да x_1=2 ва t=1 да x_2=9 ни ҳосил қиламиз. t нинг бошқа қийматларига мос келувчи x нинг қийматлари ярамайди.

Иккинчи таққослама $x\equiv6(\mathrm{mod}7)$ ёки $x=7t+6$ ечимга эга. Бундан ягона қиймат x_3=6 ни ҳосил қиламиз. x нинг ҳосил қилинган қийматларини берилган соннинг ифодасига қўйиб, 428736, 498736, 468776 сонларни ҳосил қиламиз.

8-масала. Куйидаги таққосламани ўзаро туб модуллар бўйича таққосламалар системасига келтириб ечинг:

$$x^3+2x+3\equiv0(\mathrm{mod}15).$$

Ечиш. Берилган таққослама қуйидаги системага тенг кучли:

$$\begin{cases}x^3+2x+3\equiv0(\mathrm{mod}\,5)\\x^3+2x+3\equiv0(\mathrm{mod}\,3)\end{cases}$$

Бу системанинг иккинчи таққосламаси $(x-1)(x+1)\equiv0(\mathrm{mod}3)$ таққосламага тенг кучли ва у x нинг барча бутун қийматлари учун ўринли. Демак, берилган таққослама қуйидаги таққосламага тенг кучли бўлади.

$x^3+2x+3\equiv0(\mathrm{mod}5)$, бу ердан $x\equiv2;4(\mathrm{mod}5)$ ни ҳосил қиламиз. Берилган 15 модул бўйича қуйидаги ечимларни ҳосил қиламиз:

$x\equiv2;7;12;4;9;14(\mathrm{mod}15)$.

9-масала. Қуйидаги чизиқ қайси бутун нуқталардан ўтади:

$$15u=2x^3-5x^2+4x+11, \text{ бу ерда } -2<x<8\ ?$$

Ечиш. Чизиқ тенгламасидан $2x^3-5x^2+4x+11\equiv0(\mathrm{mod}15)$ таққосламага эга бўламиз. Бу таққослама эса қуйидаги системага тенг кучли

$$2x^3-5x^2+4x+11\equiv0(\mathrm{mod}5)$$
$$2x^3-5x^2+4x+11\equiv0(\mathrm{mod}3).$$

Биринчи таққослама $x\equiv2;4(\mathrm{mod}5)$ ечимларга, иккинчиси эса $x\equiv1;2(\mathrm{mod}3)$ ечимларга эга.

Энди, $\begin{cases}x\equiv2(\mathrm{mod}\,5)\\x\equiv1(\mathrm{mod}\,3)\end{cases}, \begin{cases}x\equiv2(\mathrm{mod}\,5)\\x\equiv2(\mathrm{mod}\,3)\end{cases}, \begin{cases}x\equiv4(\mathrm{mod}\,5)\\x\equiv1(\mathrm{mod}\,3)\end{cases}, \begin{cases}x\equiv4(\mathrm{mod}\,5)\\x\equiv2(\mathrm{mod}\,3)\end{cases}$

таққосламаларни ечиб, $x\equiv7;2;4;14(\mathrm{mod}15)$ ечимларни топамиз.

Шартда кўрсатилган оралиққа x нинг қуйидаги қийматлари тушади:

$$x=7;2;4;-1$$

y нинг мос қийматлари чизиқнинг берилган тенгламасидан топилади.

10-масала. Таққосламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases}9u\equiv15\\7x-3u\equiv1\end{cases}(\mathrm{mod}\,12),$$

Ечиш. Биринчи таққосламанинг иккала томони ва модулини 3 га қисқартириб, $3u\equiv5(\mathrm{mod}4)$, ёки $3u\equiv9(\mathrm{mod}4)$, ёки $u\equiv3(\mathrm{mod}4)$ ни ҳосил қиламиз. 12 модул бўйича $u\equiv3;7;11(\mathrm{mod}12)$ ечимлар келиб чиқади.

Бу ердан қуйидаги учта системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases}7x\equiv1+3u\\u\equiv3\end{cases}(\mathrm{mod}\,12), \begin{cases}7x\equiv1+3u\\u\equiv7\end{cases}(\mathrm{mod}\,12), \begin{cases}7x\equiv1+3u\\u\equiv11\end{cases}(\mathrm{mod}\,12)$$

Бу системаларни соддалаштириб,

$$\begin{cases}x\equiv10\\u\equiv3\end{cases}(\mathrm{mod}\,12),\ \begin{cases}x\equiv10\\u\equiv7\end{cases}(\mathrm{mod}\,12),\ \begin{cases}x\equiv10\\u\equiv11\end{cases}(\mathrm{mod}\,12),$$

ечимларни ҳосил қиламиз.

11-масала. Таққосламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases}x+2u\equiv3\\4x+u\equiv2\end{cases}(\mathrm{mod}\,5)$$

Ечиш. Иккинчи таққосламани 2 га кўпайтириб, ҳосил бўлган таққосламадан биринчи таққосламани ҳадма-ҳад айирамиз: $7x\equiv1(\mathrm{mod}5)$, бу ердан $x\equiv3(\mathrm{mod}5)$ ни ҳосил қиламиз. Биринчи таққосламани иккала томонини 4 га кўпайтириб, ҳосил қилинган таққосламадан иккинчисини айирамиз:

$$u\equiv0(\mathrm{mod}5).$$

Текшириш:

$\begin{cases}x\equiv3\\u\equiv2\end{cases}(\mathrm{mod}\,5)$ система берилган системанинг ечимидан иборат эканлигини кўрсатади.

III БОБ. ДИОФАНТ ТЕНГЛАМАЛАРИ

3.1-§. Биринчи даражали икки номаълумли Диофант тенгламаларининг бутун рационал ечимларини топиш усуллари.

Дастлабки эслатмалар.

Аникмас тенглама – Диофант тенгламаларидир. Биринчи даражали икки номаълумли аниқмас тенглама деб $ax+by+c=0$ кўринишдаги тенгламага айтилади, бунда x, y лар номаълум, a, b, c лар параметрлар (коэффициентлар). Кўпинча масаланинг шартлари шундай бўладики, фақат бутун сонлар билан ифодаланган қийматларгина, баъзан эса фақат бутун, шу билан бирга мусбат сонлар билан ифодаланган қийматларгина масалада қўйилган саволга тўғри жавоб бўла олади.

1-масала. 118 ни шундай икки бўлакка ажратиш керакки, улардан бири 11 га, иккинчиси 17 га қолдиқсиз бўлинсин.

Ечиш. Сонлардан бирини $11x$, иккинчисини $17y$ билан белгиласак, $11x+17y=118$ тенглама ҳосил бўлади.

Масалада 118 ни ажратишдан ҳосил бўладиган сонларнинг ишоралари тўғрисида ҳеч нарса айтилмагани учун манфий илдизлар ҳам масалага жавоб бўла олади дея оламиз. Чунончи, масаланинг шартларини (x=3 ва y=5 бўлганда) 33 ва 85 дан иборат сонлар қаноатлантиради, лекин x=20 ва y=-6 бўлганда 220 ва 102 дан иборат сонлар ҳам қаноатлантиради.

2-масала. Бирига 4 та, иккинчисига 7 та самовар сиғадиган икки хил яшик бор. 41 та самоварни жойлаш учун ҳар қайси хил яшикдан нечта олиш керак?

Ечиш: Кичик яшикларнинг сонини x билан, катталарининг сонини y билан белгилаб, ушбу тенгламани тузамиз:

$$4x+7y=41.$$

Масаланинг шартидан бунда фақат бутун ва шу билан бирга, мусбат илдизлар экани кўриниб турибди. Бу тенглама x=3, y=5 дан иборат фақат бир жуфтгина илдизга эга бўла олади.

Хуллас, аниқмас тенгламаларнинг бутун, сонлар ҳамда бутун ва мусбат бутун сонлар билан ифода қилинган илдизларини топишимиз зарур.

I_1 . Тенгламаларнинг илдизлари бутун сон бўлмаслик аломати.

Қуйидаги

$$ax+by+c=0$$

тенглама берилган бўлсин. Агар a, b, c коэффициентлардан баъзилари каср бўлса, барча коэффициентларни бир махражга келтириб, кейин махражни ташласак, у ҳолда барча коэффициентлар бутун бўлади. Сўнгра a, b, c ларнинг бирор умумий кўпайтувчиси бўлса, тенгламанинг иккала кисмини унга кисқартириш мумкин. Демак, a, b ва c коэффициентларни умумий кўпайтувчиси бўлмаган бутун сонлар деб, фараз қиламиз.

Энди бирорта бутун, лекин 1 га тенг бўлмаган умумий кўпайтувчига эга, деб фараз қиламиз. Масалан:

$$a=ma_1,\quad b=mb_1$$

Бу ҳолда, тенглама ушбу кўринишни олади:

$$a_1x+b_1y=\frac{c}{m}.$$

x ва y ларнинг қийматлари бутун бўлса, тенгламанинг чап қисми бутун, ўнг қисми эса каср сон бўлади, чунки юқоридаги фаразимизга мувофиқ, c сон m га бўлинмайди. Бундай тенгликнинг бўлиши мумкин эмас. Демак,

Аниқмас тенглама номаълумларининг коэффициентлари умумий кўпайтувчига эга бўлиб, озод ҳад унга эга бўлмаса, тенглама бутун илдизларга эга бўлмайди.

Шунинг учун бундан кейин барча муҳокамаларда a ва b ни ўзаро туб сон деб, фараз қиламиз.

I_2. Тенгламаларнинг илдизлари мусбат сон бўлмаслик аломати.

$ax+by=c$ тенгламада a ва b коэффициентлар мусбат, озод ҳад c манфий бўлсин. У ҳолда x ва y нинг ҳар қандай мусбат қийматларида тенгламанинг чап қисми мусбат, ўнг қисми эса манфийлигича қолади. Бундай тенглик бўлиши мумкин эмас. Агар a ва b коэффициентлар манфий, c мусбат бўлса, тенгламанинг барча ҳадларини 1 га кўпайтириб, у ҳолни ҳам олдинги ҳолга келтирамиз. Демак,

Аниқмас тенгламада номаълумлар коэффициентларининг ишоралари озод ҳад ишорасига қарама-қарши бўлса, тенглама мусбат илдизга эга бўлмайди.

Аниқмас (Диофант) тенглама илдизларининг умумий формуласи

Бирор усул билан (масалан, бевосита синаш йўли билан) $ax+by=c$ Диофант тенгламасининг бутун сонлар билан ифода қилинган бир жуфт илдизини топган бўлайлик. Бу илдизлар $x=\alpha$ ва $y=\beta$ бўлсин, уларни берилган тенгламага қўйиб, қуйидаги айниятни ҳосил қиламиз: $a\alpha+b\beta=c$. Бу айниятни берилган тенгламадан ҳадлаб айирсак, $a(x-a)+b(y-\beta)=0$ бўлиб, бундан $ax=a\alpha-b(y-\beta)$ ёки $x=\alpha-\frac{b(y-\beta)}{a}$ келиб чиқади. x нинг бутун сон бўлиши учун $\frac{b(y-\beta)}{a}$ ифода бутун сон бўлиши зарур ва етарли (чунки, α бутун сон). Бошқача айтганда, $b(y-\beta)$ ифоданинг a га қолдиқсиз бўлиниши зарур ва етарли. Лекин, фаразимизга биноан $(b,a)=1$, демак, $y-\beta$ айирманинг a га бутун бўлиниши зарур (ва етарли). $y-\beta$ ни a га бўлишдан чиққан бутун бўлинмани t билан белгилаб (у мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши мумкин), ушбуни ҳосил қиламиз:

$\frac{y-\beta}{a}=t$, бундан $y=\beta+at$ ни оламиз.

x ни ифодаловчи формулада $\frac{y-\beta}{a}$ каср ўрнига t ни қўйсак, $x=\alpha-bt$ ҳосил бўлади.

Хуллас, аниқмас тенгламанинг илдизлари учун қуйидаги формулаларни ҳосил қилдик:

$$x=\alpha-bt,\ y=\beta+at$$

Бу формулаларда t га ихтиёрий бутун мусбат ва манфий қийматлар бериб, аниқмас тенгламанинг чексиз кўп бутун илдизларини топамиз. Жумладан, $t=0$ бўлганда юқорида ўзимиз топган $x=\alpha$ ва $y=\beta$ илдизни топамиз.

Топилган формулаларга диққат қилиб қаралса, уларнинг қуйидаги қоидага кўра тузилганини кўришимиз мумкин:

1. Формулаларнинг биринчи ҳади берилган номаълумнинг топилган хусусий қиймати бўлади.

2. Формулаларнинг иккинчи ҳади берилган тенгламанинг коэффициентлари билан ихтиёрий бутун t соннинг кўпайтмасидир, бунда x ни ифодаловчи формула учун берилган тенгламадаги y ёнидаги коэффициент, y ни ифодаловчи формула учун эса x ёнидаги коэффициент олинади.

3. Коэффициентлардан бири тескари ишора билан олинади.

Коэффициентлардан қайси бирини тенгламада турган ишораси билан ва қайси бирини тескари ишора билан олишимизнинг ҳеч қандай фарқи йўқлигини кўриш қийин эмас. Ҳақиқаттан ҳам,

$$x=\alpha-bt,\ y=\beta+at \text{ ва } x=\alpha+bt,\ y=\beta-at$$

формулалар худди бир турли илдизларни беради, фақат биринчи формулалар t нинг мусбат қийматларида берган ечимларни иккинчи формулалар t нинг абсолют миқдор жиҳатидан уларга тенг бўлган манфий қийматларида беради.

1-масала. $3x+5y=26$ тенглама берилган. Бевосита ўрнига қўйиш билан $x=2$ ва $y=4$ қийматларнинг тенгламани қаноатлантиришига ишонч ҳосил қиламиз. У ҳолда қолган барча илдизлар ушбу формулалардан топилади:

$$x=2+5t,\ y=4-3t \text{ ёки } x=2-5t,\ y=4+3t\ .$$

Бу формулаларда t га ихтиёрий қийматлар бериб, тенгламанинг бутун сонлар билан ифодаланган турли илдизларини ҳосил қиламиз. Масалан, биринчи жуфт формулаларни олиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

3.1-жадвал

t	0	1	2	3	-1	-2	…
x	2	7	12	17	-3	-8	…
y	4	1	-2	-3	7	10	…

Агар иккинчи жуфт формулаларни олсак, у ҳолда t га кетма-кет 0, -1, - 2, -3, 1, 2, ... шунга ўхшаш қийматларни бериб, худди ўша илдизларни олган бўлар эдик. Шундай қилиб, аниқмас тенгламанинг бутун сонлар билан ифодаланган илдизларини топиш масаласи қандай бўлмасин, бир жуфт илдизни топишга келтирилади.

Ўрнига қўйиш усули

Аникмас тенгламанинг бир жуфт илдизини топиш учун қуйидаги усулдан фойдаланиш мумкин:

Масалан, $ax+by=c$ тенглама берилган бўлсин. Номаълумлардан бирини иккинчисига нисбатан аниклаймиз (коэффициенти кичик бўлганини танлаш яхширок). Масалан, $a<b$ бўлсин. У ҳолда, $x=\frac{c-by}{a}$. $c-by$ ифода a га қолдиқсиз бўлингунча y га кетма-кет 0, 1, 2, 3, … қийматлар бера бошлаймиз. $y=n$ бўлганда $c-bn$ ифода a га бутун бўлинади ва m бўлинмани беради, деб фараз киламиз. У ҳолда $x=m$ ва $y=n$ қийматлар берилган тенгламанинг бир жуфт илдизини беради. Қуйидагини оламиз: $\frac{c-bn}{a}=m$ ёки $c-bn=am$, $am+bn=c$. Охирги тенглик m ва n сонлар берилган тенгламани каноатлантиришини кўрсатади.

2-масала. Ушбу тенглама берилган: $7x-4y=2$. Бу тенгламадан y ни аниқлаймиз: $4y=7x-2$, $y=\frac{7x-2}{4}$. x га кетма-кет 0, 1, 2, 3, … қийматлар бериш билан $x=2$ бўлганда $7x-2$ ифода 4 га бўлиниб, бўлинмада 3 чикишига ишонч ҳосил қила оламиз. Демак, биз бир жуфт илдизни топдик: $x=2$, $y=3$. Илдизларнинг қолган жуфтлари умумий формуладан топилади: $x=2+4t$, $y=3+7t$ ёки $x=2-4t$, $y=3-7t$.

Эслатма. Сонлар назариясида агар a ва b ўзаро туб сонлар бўлса, 0, 1, 2, 3, …, $(a-1)$ сонлар орасида ҳар вақт шундай бир y сонни топиш керакки, унда $c-by$ ифода a га қолдиқсиз бўлиниши исбот қилинади. Шу сабабли кўп марта синашдан қутилиш учун a ва b коэффициентлардан кичигини бўлувчи қилиб олиш тавсия қилинади.

Аниқмас тенгламанинг хусусий шакли

Агар аниқмас тенгламада номаълумлардан бирининг коэффициенти 1 га тенг бўлса, у тенглама умумий шаклда осонлик билан ечилади. Масалан, x нинг коэффициенти 1 га тенг бўлсин. У ҳолда $x+by=c$ бўлиб, бундан x ни аниқлаймиз: $x=c-by$. Бунда y нинг бутун сон билан ифодаланган исталган қийматларига x нинг ҳам бутун сон билан ифодаланадиган қийматлари тўғри келади.

3-масала. $5x+y=18$ тенглама берилган. Бундан $y=18-5x$ келиб чиқади. x га ихтиёрий бутун қийматлар бериб, y учун мос келган бутун кийматларни топамиз:

3.2-жадвал

x	0	1	2	3	4	-1	-2	...
y	18	13	8	3	-2	23	28	...

3.2-§. Аникмас тенгламаларнинг умумий ечими

Исталган коэффициентли аниқмас тенгламани ечиш усулини мисол устида кўрсатамиз. Қуйидаги тенглама берилган бўлсин: $23x+53y=109$.

Бу тенгламадан коэффициенти кичик бўлган номаълумни, яъни x ни топамиз: $x=\frac{109-53y}{23}$; бундан бутун қисмини ажратамиз: $x=4-2y+\frac{17-7y}{23}$; y бутун бўлганда x нинг бутун бўлиши учун $\frac{17-7y}{23}$ ифоданинг қандай бўлса ҳам бутун сон бўлиши зарур ва етарли. Бу сонни t билан белгилаб, ушбу $\frac{17-7y}{23}$ ёки $17-7y=23t$; $23t+7y=17$ ларни топамиз. Агар y ва t учун $\frac{17-7y}{23}=t$ тенгламани ёки шунинг ўзидан иборат бўлган $23t+7y=17$ тенгламани қаноатлантирадиган бутун қийматлар топсак, шу билан x учун тўғри келадиган бутун қийматларни топган бўламиз ва масала ечилган бўлади. Хуллас, берилган тенгламани ечишда янада соддарок, коэффициентлари берилган тенгламанинг коэффициентларига қараганда кичик бўлган иккинчи бир тенглама ечишга келтирилади. Янги тенгламада ҳам шундай киламиз. Унда y ни аниқлаймиз: $y=\frac{17-23t}{7}=2-3t+\frac{3-2t}{7}$. y нинг бутун сон бўлиши учун $\frac{3-2t}{7}$ ифода бутун сон бўлиши зарур ва етарли. Бу сонни t_1 дейлик: $\frac{3-2t}{7}=t_1$ ёки $7t_1+2t=3$. t ва t_1 нинг қийматлари охирги тенгламани қаноатлантирувчи бутун сон бўлганда

x ва y учун берилган тенгламани қаноатлантирадиган бутун қийматлар оламиз. Демак, масаламиз коэффициентлари янада кичик бўлган охирги тенгламани ечишга келтирилади. Бунинг билан ҳам олдингидай иш кўрамиз:

$$t=\frac{3-7t_1}{2}=1-3t_1+\frac{1-t_1}{2}\ ;\ \frac{1-t_1}{2}$$

ифодани t_2 билан белгиласак $(t\in Z)$, $\frac{1-t_1}{2}=t_2$ ёки $2t_2+t_1=1$ келиб чиқади. Номаълумлардан бирининг (t_1 нинг) коэффициенти 1 га тенг бўлган тенглама ҳосил бўлди. Бундай тенгламаларни ечишни биламиз, уни ечиб, ушбуни топамиз: $t_1=1-2t_2$. Бу тенгламада t_2 га ихтиёрий бутун қийматлар бериб, t_1 учун бутун кийматлар ҳосил киламиз. t_1 ва t_2 нинг топилган бутун қийматларини t учун чиқарилган $t=1-3t_1+\frac{1-t_1}{2}=1-3t_1+t_2$ ифодага қўйиб, t нинг мос келган бутун қийматларини топамиз. t ва t_1 га мос келган жуфт қийматни юқоридаги y нинг ифодасига қўйиб,

$$y=2-3t+\frac{3-2t}{7}=3-2t+t_1$$

ни топамиз. Нихоят, y ва t учун топилган қийматларни x учун бўлган $x=4-2y+\frac{17-7y}{23}=4-2y+t$ ифодага қўйиб, x учун мос келган бутун қийматларни ҳосил қиламиз. Аммо, x ва y ни тўғридан-тўғри t_2 га нисбатан ифода қилиш ҳам мумкин. Бунинг учун t ни ифодаловчи тенгламадаги t_1 ўрнига унинг t_2 орқали белгиланган ифодасини қўямиз: $t=1-3t_1+t_2=1-3(1-2t_2)+t_2$ ёки $t=-2+7t_2$. Энди y учун бўлган ифодага t ва t_1 ўрнига уларнинг t_2 орқали белгиланган ифодасини қўямиз: $y=2-3t+t_1=2-3(-2+7t_2)+(1-2t_2)$ ёки $y=9-23t_2$. Ниҳоят, y ва t нинг топилган қийматларини x учун бўлган ифодага қўйсак,

$$x=4-2y+t=4-2(9-23t_2)+(-2+7t_2)\ \text{ёки}\ x=-16+53t_2$$

келиб чиқади. Шундай қилиб, x ва y учун қуйидаги формулаларни ҳосил қилдик:

$$x=-16+53t_2\ ,\ y=9-23t_2\ .$$

Бу формулаларда t_2 учун ихтиёрий бутун мусбат ва манфий кийматлар бериб, тенгламанинг чексиз кўп илдизларини ҳосил киламиз, улардан бир нечтаси 3.3-жадвалда келтирилди:

3.3-жадвал

t_2	0	1	2	-1	-2
x	-16	37	90	-69	-122
y	9	-14	-37	32	55

Берилган ва ундан кейинги тенгламаларнинг коэффициентлари устида қилинган ишларга диққат билан қараб, шундай кетма-кетликни кўриш мумкин:

1. Берилган тенгламанинг катта коэффициенти 53 ни кичик коэффициенти 23 га бўлдик; бўлинма 2 ва қолдик 7 чикди.

2. Берилган тенгламанинг кичик коэффициенти 23 ни қолдиқ 7 га бўлдик; бўлинмада 3 ва иккинчи колдиқ 2 чиқди.

3. Биринчи қолдиқ 7 ни иккинчи қолдиқ 2 га бўлдик; бўлинмада 3 ва учинчи қолдиқ 1 чиқди.

Бошқача айтганда, берилган тенглама коэффициентларининг энг катта умумий бўлувчисини топмоқчи бўлгандек иш кўрдик. Бундан ушбу натижани оламиз:

Агар аниқмас тенгламада номаълумларнинг коэффициентлари ўзаро туб сонлар бўлса, ҳамма вақт тенгламанинг бутун илдизларини топиш мумкин.

3.3-§. Тенгламани ечишни соддалаштириш

Баъзан аниқмас тенгламани тезроқ ечишга олиб келувчи соддалаштиришдан фойдаланиш мумкин.

1. Номаълумларнинг коэффициентларидан бири ва озод ҳад умумий кўпайтувчига эга бўлганда тегишли равишда янги номаълум танлаб, тенгламанинг иккала томонини ўша кўпайтувчига қисқартириш мумкин.

1-масала. $6x-5y=21$ тенглама берилган. Коэффициент 6 ва озод ҳад 21 умумий 3 кўпайтувчига эга. Демак, $5y$ ҳад ҳам 3 га бўлиниши керак. 5 нинг ўзи 3 га бўлинмагани учун y номаълум 3 га бўлиниши керак. $y=3t$ деб фараз қилиб (t- бутун сон), қуйидаги тенгламани оламиз:

$6x-15t=21$ ёки 3 га қисқартирилгандан сўнг $2x-5t=7$ бўлади. Бу тенгламани ечамиз: $x=\frac{7+5t}{2}=3+2t+\frac{1+t}{2}=3+2t+t_1$, бунда $\frac{1+t}{2}=t_1$ бўлиб, натижада $2t_1-t=1$ ёки с келиб чиқади. Топилган қийматларни x ва y ларни ифодаловчи тенгликларга қўйсак,

$$x=3+2(-1+2t_1)+t_1=1+5t_1,$$
$$y=3(-1+2t_1)=-3+6t_1$$

ҳосил бўлади.

2-масала. $9x+14y=105$ тенглама берилган. $y=3t$ деб фараз қилиб, тенгламанинг ҳар икки томонини 3 га қисқартирсак: $9x+14\cdot 3t=105$ дан $3x-14t=35$ ни оламиз. Бу тенгламада $x=7t_1$ десак, $3\cdot 7t_1+14y=35$ бўлиб, буни 7 га қисқартирсак, $3t_1+2t=5$ бўлади. Бу охирги тенгламани ечамиз:

$$t=\frac{5-3t_1}{2}=2-t_1+\frac{1-t_1}{2}=2-t_1+t_2,$$ бунда $\frac{1-t_1}{2}=t_2$ бўлиб, натижада $2t_2+t_1=1$ ёки $t_1=1-2t_2$ келиб чиқади. Кетма-кет орқага қайтиб, ўрнига қўйишларни бажарсак, қуйидагиларни топамиз:

$$t=2-(1-2t_2)+t_2=1+3t_2;$$
$$x=7t_1=7(1-2t_2)=7-14t_2;$$
$$y=3t=3(1+3t_2)=3+9t_2.$$

2. Агар бутун сонга тенгланувчи ифоданинг суратидаги ҳадлар умумий кўпайтувчига эга бўлса, тенгламани ечишни соддалаштириш мумкин.

3-масала. $12x+17y=41$ тенглама берилган. Буни x га нисбатан ечамиз:

$$x=\frac{41-17y}{12}=3-y+\frac{5-5y}{12}=3-y+5\cdot\frac{1-y}{12}$$

$5\cdot\frac{1-y}{12}$ нинг бутун сон бўлиши учун $\frac{1-y}{12}$ нинг бутун сон бўлиши зарур ва етарли. Бу ифодани t бутун десак ва унга тенгласак, $\frac{1-y}{12}=t$; $1-y=12t$, $y=1-12t$ бўлиб, натижада $x=3-(1-12t)+5t=2+17t$ бўлади.

3. Агар бутун қисмни ажратиб чиқаришда қолдиқ бўлувчининг ярмидан катта бўлса, манфий қолдиқ киритиш қулай.

4-масала. $11x-20y=49$ тенглама берилган. Бундан $x=\frac{49+20y}{11}=4+2y+\frac{5-2y}{11}=4+2y+t$; $\frac{5-2y}{11}=t$; $5-2y=11t$; $11t+2y=5$;

$$y=\frac{5-11t}{2}=2-5t+\frac{1-t}{2}=2-5t+t_1$$ га тенг.

Бу тенгликдан $1-t=2t_1$, ниҳоят $t=1-2t_1$ бўлади. Орқага қайтиб, ўрнига қўйишларни бажарсак,

$$y=2-5(1-2t_1)\ +t_1=-3+11t_1$$
$$x=4+2(-3+11t_1)+(1-2t_1)=-1+20t_1$$

Берилган тенгламани одатдаги усул билан ечганимизда x учун ушбуни олган бўлар эдик: $x=4+y+\frac{5+9y}{11}$ ва ундан кейинги тенглама қуйидагича бўлар эди: $\frac{5+9y}{11}=t$; $11t-9y=5$. Бу тенглама манфий қолдиқ киритиш ёрдамида олинган $11t+2y=5$ тенгламага қараганда мураккаброқдир.

5-масала. $15x+28y=59$ тенглама берилган. Тенгламани манфий қолдиқлар киритиб, x га нисбатан ечамиз:

$$x=\frac{59-28y}{15}=4-2y+\frac{-1+2y}{15}=4-2y+t;\ \frac{-1+2y}{15}=t;\ -1+2y=15t;\ 2y-15t=1.$$
$$y=\frac{1+15t}{2}=7t+\frac{1+t}{2}=7t+t_1;\ \frac{1+t}{2}=t_1;\ 1+t=2t_1;\ t=-1+2t_1.$$

Ўринларига қўйсак, натижада

$$y=7(-1+2t_1)\ +t_1=-7+15t_1;$$
$$x=4-2(-7+15t_1)\ +(-1+2t_1)=17-28t_1$$ келиб чиқади.

Бу параграфдаги мисолларда келтирилган тенгламаларни одатдаги йўл билан ечиб кўриб, кўрсатилган соддалаштиришни тадбиқ қилмаганда уларнинг ҳар бирини ечиш учун кўп иш бажариш талаб қилинганлигини кўриш жуда осон.

Мусбат ечимлар

Юқорида айтилганидек кўпгина аниқмас тенгламанинг топилган илдизларидан айни замонда x ва y учун фақат мусбат қийматлар берадиганларини олиш керак. x нинг қандай қийматларида x ва y учун бутун ва мусбат қийматлар олишни бирданига аниқлаш мумкин. Ҳақиқаттан, қуйидаги формулаларни олайлик:

$$x=\alpha+bt,\ \ y=\beta-at$$

x ва y нинг мусбат бўлиши учун t га фақат шундай қийматлар олиш зарур, у қийматларда $\alpha+bt>0,\ \ \beta-at>0$ бўлсин. a ни мусбат сон деб ҳисоблаймиз. У вақтда турлича ҳоллар бўлиши мумкин.

1. Иккала тенгсизлик ҳам бир хил маънода. Бу ҳол b манфий сон бўлгандагина содир бўлади. Тенгсизликларнинг хоссаларидан фойдаланиб, қуйидагиларни топамиз:

$$bt>-\alpha;\ at<\beta;\ t<-\frac{a}{b};\ t<\frac{\beta}{a}.$$

Бу ҳолда тенглама саноқсиз кўп бутун мусбат илдизларга эга бўлади. Масалан, қуйидаги тенгсизликни олайлик:

$$t<\frac{7}{2};\ \ t<-1\frac{3}{5}$$

$-1\frac{3}{5}$ дан кичик ҳар қандай сон иккала тенгсизликни қаноатлантириши очиқ кўриниб туради. Демак, t учун -1 дан кичик бўлган ҳар қандай бутун сонни олиш мумкин экан.

Бошқа бир ҳолни қарайлик: $t>\frac{7}{15};\ t>3\frac{1}{3}$. t учун $3\frac{1}{3}$ дан катта ҳар қандай бутун сонни олганда x ва y учун бутун ва мусбат қийматлар чиқиши очиқ кўриниб турибди.

6-масала. $3x-5y=11$ тенглама берилган. Бу тенгламани ечамиз:

$$x=\frac{11+5y}{3}=4+2y-\frac{1+y}{3}=4+2y-t;$$

$$\frac{1+y}{3}=t;\ \ 1+y=3t;$$

$$y=-1+3t;$$

$$x=4+2(-1+3t)-t=2+5t.$$

Мусбат илдизларини излаймиз:

$$-1+3t>0;\ \ 2+5t>0;\ \ \text{ёки}\ \ t>\frac{1}{3};\ \ t>-\frac{2}{5};$$

t учун $\frac{1}{3}$ дан катта исталган бутун сон олсак, x ва y нинг берилган тенгламани қаноатлантирувчи саноқсиз кўп жуфт мусбат бутун қийматларини топамиз.

7-масала. $8x-3y=-13$ тенглама берилган. Тенгламани ечамиз:

$$y=\frac{13+8y}{3}=4+3x+\frac{1-x}{3}=4+3x+t;$$

$$\frac{1-x}{3}=t;\ \ 1-x=3t;\ x=1-3t;\ \ y=7-8t.$$

Мусбат илдизларини қидирамиз:

$$1-3t>0;\ 7-8t>0;\ \text{ёки}\ \ t<\frac{1}{3};\ \ t<\frac{7}{8}.$$

t нинг $\frac{1}{3}$ дан кичик ҳар бир бутун (яъни 0, 1, 2,...) қиймати x ва y учун бутун ва мусбат қийматларни беради.

2. Тенгсизликлар қарама-қарши маънода бўлиб, бири иккинчисига зид.

Масалан, қуйидаги тенгсизликни олайлик:

$$t<\frac{7}{8};\ t>-1\frac{1}{3}.$$

t нинг айни вақтда иккала тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматлари йўқ экани очиқ кўриниб турибди. Бу ҳолда тенглама мусбат илдизларга эга бўла олмайди.

8-масала. $4x+5y=-7$. Бу тенгламани ечайлик.

$$x=\frac{-7-5y}{4}=-2-y+\frac{1-y}{4};$$

$$\frac{1-y}{4}=t;\ y=1-4t;$$

$$x=-3+5t.$$

Бундан $-3+5t>0$; $1-4t>0$ ёки $t>\frac{3}{5};\ \ t<\frac{1}{4}$. Бу тенгсизликлар бир-бирига зид, тенгламанинг мусбат илдизлари йўқ.

3. Тенгсизликлар қарама-қарши маънода бўлиб, бир-бирига зид эмас.

Масалан, қуйидаги тенгсизликлар чиққан бўлсин:

$$t>4\frac{1}{7};\ t<7\frac{3}{4}.$$

t нинг $4\frac{1}{7}$ билан $7\frac{3}{4}$ орасидаги барча бутун қийматлари, яъни 5, 6 ва 7 сонлар x ва y учун мусбат илдизлар бўлади. Шундай қилиб, бу ҳолда:

t учун топилган чегаралар орасида қанча бутун сон бўлса, тенгламанинг шунча бутун мусбат илдизи топилади.

Хусусий ҳолда бу ерда ҳам тенгламанинг бутун мусбат илдизлари бўлмаслиги мумкин. Бу ҳол t учун топилган чегаралар орасида ҳеч бир бутун сон бўлмаганда содир бўлади. Масалан, қуйидаги тенгсизликлар чиққан бўлсин:

$$t>1\frac{1}{4};\ t<1\frac{7}{8}.$$

Тенгсизликлар бир-бирига зид эмас, лекин $1\frac{1}{4}$ билан $1\frac{7}{8}$ орасида ҳеч бир бутун сон топилмайди. Демак, тенгламанинг бутун мусбат илдизлари йўқ.

9-масала. $3x+7y=55$. Тенгламани ечамиз:

$$x=\frac{55-7y}{3}=18-2y+\frac{1-y}{3};$$

$$\frac{1-y}{3}=t;\ y=1-3t;$$

$$x=16+7t.$$

Бундан $1-3t>0;\ 16+7t>0$ ёки $t<\frac{1}{3};\ t>-2\frac{2}{7}$. t учун фақат ушбу қийматларни олиш мумкин: $0,\ -1,\ -2$. Тенгламанинг учта илдизини ҳосил қиламиз:

3.4-жадвал

t	0	-1	-2
x	16	9	2
y	1	4	7

10-масала. $5x+4y=3$. Тенгламани ечиб, қуйидагини оламиз:

$$x=1+4t;$$

$$y=2-5t.$$

Бундан $t>\frac{1}{4};\ t<\frac{2}{5}$. Тенгсизликлар бир-бирига зид эмас, лекин $\frac{1}{4}$ билан $\frac{2}{5}$ орасида бутун сонлар йўқ. Демак, тенгламанинг бутун мусбат ечимлари йўқ.

3.4-§. Лежандр символи ва унинг хоссалари. Туб модул бўйича юқори даражали таққосламалар. Иккинчи ва учинчи тартибли Диофант тенгламалари

m - натурал сон, $a_0,a_1,a_2\in Z, a_2\neq 0$ бўлсин. $a_0x^2+a_1x+a_0\equiv 0(\mathrm{mod}\, m)$ квадратик таққослашни қараймиз, x ўзгарувчига нисбатан тўлиқ квадрат ёрдамида, Эйлер теоремасини қўллаш орқали ажратиб ва қолдикли бўлиш ҳақидаги хитой теоремасига асосан, таққосламани куйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$x^2\equiv a(\mathrm{mod}\, m)$$

бунда, $a\in Z$.

Бундан кейин квадратик таққосламани $x^2\equiv a(\mathrm{mod}\, m)$, деб қараб кетамиз. Маълумки, ҳамма a лар учун, m таққосламага нисбатан ечимга эга бўла олмайди.

1-Изох. a =3 ва m = 4 учун, $x^2\equiv a(\mathrm{mod}\, m)$, квадратик таққослашда ечимлар йўқ, уларни бирма-бир кўриш билан текшириш осон.

Таъриф. Агар таққосламанинг ечими бўлса, у ҳолда a – m модулга нисбатан *квадратик чегирма* дейилади, акс ҳолда a сони m модулга кўра *квадрат чегирмасиз* дейилади.

1-Теорема. p > 2 туб сон учун $\frac{p-1}{2}$ га тенг квадратик чегирмалар сони ва $\frac{p-1}{2}$ та квадратик чегирмасизлар сони мавжуд.

Исбот. Шуни таъкидлаймизки, бунда $x^2\equiv(p-x)^2(\mathrm{mod}\, p)$. Яъни, квадрат чегирмалар сони $\frac{p-1}{2}$ тадан ошмайди. $1^2,\ldots,\left(\frac{p-1}{2}\right)$ сонлар орасида p модулга кўра таққосламалар йўқ эканлигини кўрсатамиз, у ҳолда $x^2=y^2(\mathrm{mod}\, p)$ бўлсин. У ҳолда $(x-y)(x+y)|p$ кўринишда келтирсак, бундай бўлиши мумкин эмас, чунки $x\neq y\text{ва}x+y<p$. Шундай қилиб, биз $\frac{p-1}{2}$ та квадратик чегирмани топдик.

Таъриф. *Лежандр белгиси* $\left(\frac{a}{p}\right)$- *a* бутун сон ва *p* туб сонлар учун қуйидагича $\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}0,\\1,\\-1,\end{cases}$ (0 га тенг агар *a, p* га бўлинса, 1 га тенг агар *a, p* модулга кўра квадратик чегирмали бўлса, -1 га тенг , агар *a, p* га кўра квадрат чегирмасиз бўлса) аниқланади.

Лежандр белгисининг асосий хоссаларини келтирамиз: Айтайлик, $a,b\in Z,(a,p)=1,(b,p)=1$, *q*-тоқ, туб сон $(p,q)=1$.

$\bullet a\equiv b(\bmod p)\Rightarrow\left(\frac{a}{p}\right)=\left(\frac{b}{p}\right)$

$\bullet\left(\frac{a}{p}\right)\equiv a^{(p-1)/2}(\bmod p)$

$\bullet\left(\frac{2}{p}\right)\equiv(-1)^{(p^2-1)/8}$

$\bullet\left(\frac{-1}{p}\right)\equiv(-1)^{(p-1)/2}$

$\bullet\left(\frac{q}{p}\right)\equiv(-1)^{\frac{(p-1)}{2}\frac{(q-1)}{2}}\left(\frac{p}{q}\right)$

Таъриф. *n*-тоқ натурал сон бўлиб, 1 дан катта бўлсин ва $n=p_1...p_k$- *n* сонини туб кўпайтувчиларга ажратмаси (ҳар хил бўлиши шарт эмас). Ихтиёрий *a* бутун сон учун, *(a,n)=1*, Якоби символи $\left(\frac{a}{n}\right)$ Лежандр символи орқали қуйидаги формула ёрдамида аниқланади.

$$\left(\frac{a}{n}\right)=\left(\frac{a}{p_1}\right)...\left(\frac{a}{p_k}\right)$$

Масалан. Оқилона таққослашни ўрганинг.

$$x^2\equiv 983(\bmod 1103).$$

Биламизки, 1101 - туб сон. Лежандр символини ҳисоблаймиз. Квадратлараро ўзаро келишув қонунидан фойдаланиб,

$$\left(\frac{983}{1103}\right)=-\left(\frac{1103}{983}\right)=-\left(\frac{120}{983}\right)=-\left(\frac{2}{983}\right)^3\left(\frac{3}{983}\right)\left(\frac{5}{983}\right)=$$

$$\left(\frac{983}{3}\right)\left(\frac{983}{5}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{5}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2=1$$

Шундай қилиб, $x^2\equiv 983(\bmod 1103)$таққослама ҳал қилиниши мумкин.

Диофант томонидан қилинган ишларни тушуниш учун алгебраик геометрия ва аникмас тенгламалар назариясидан баъзи маълумотларни билиш керак. Ҳозирги кунда аникмас тенгламаларни ечиш масаласи қуйидагича ифода этилади: фараз қилайлик, *n* та номаълумли *m* та кўпхад берилган бўлсин $(m<n)$: $f_1(x_1,x_2,...x_n),f_2(x_1,x_2,...x_n),...,f_m(x_1,x_2,...x_n)$ бу кўпҳадлар *K* майдондан олинган коэффициентлар билан таъминланган.

$$\left.\begin{array}{l}f_1(x_1,x_2,...x_n)=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ f_m(x_1,x_2,...x_n)=0\end{array}\right\} \qquad (3.1)$$

системанинг барча ечимларининг $M(K)$ тўпламини топиш ва унинг алгебраик тузилишини аниқлаш талаб этилади. Шу билан бирга $(x_1^0,x_2^0,...x_n^0)$ ечим рационал дейилади, агар барча $x_i^0\in K$ бўлса.

$M(K)$ тўпламнинг K майдонга боғлиқлиги маълум. $x^2+y^2=3$ тенглама Q рационал сонлар майдонида биронта илдизга эга эмас, лекин $Q(\sqrt{3})$ майдонда, яъни $a+b\sqrt{3}\ (a,b\in Q)$ кўринишдаги сонлар майдонида чексиз кўп ечимга эга.

Сонлар назарияси учун муҳим бўлган ҳоллар:

1) Қачон $K=Q$ рационал сонлар майдони;

2) P туб модулга кўра K чегирмалар майдони.

Диофант ана шулардан биринчисига қараган. Бундан кейин биз ҳам $K=Q$ деб ҳисоблаймиз.

Қуйида биз фақат Диофантнинг шундай тенгламаларини қараймизки, уларни икки номаълумли битта тенгламага, яъни $m=1$, $n=2$ ҳолга келтириш мумкин:

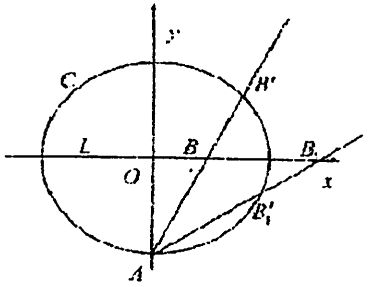
$$f(x,y)=0. \qquad (3.2)$$

Бу тенглама R^2 текисликда Г алгебраик эгри чизиқни аниқлайди. (3.2) тенгламанинг рационал ечимини Г эгри чизиқнинг рационал нуктаси деб атаймиз. Биз кўпроқ геометрик тилга мурожаат қиламиз, Диофантнинг ўзи бундай қилмаган. (3.2) га тартиб бўйича қандайдир синфлаштиришни берамиз. (3.2) эгри чизиқнинг тартиби деганда, $f(x,y)$кўпҳаддаги ҳадларнинг максимал тартиби (бунда x ва y ларнинг даражалари йиғиндиси) тушунилади. Бу тушунчанинг геометрик маъноси эса тўғри чизиқнинг n-тартибли эгри чизиқ билан роппа-роса n та нуқтада кесишиши тушунилади. Бунда кесишган нуқталарнинг карралилари, комплекслари ва “чексиз узоқлашганлар”и қаралади.

Масалан, $x^2+y^2=1$ айлана ва $x+y=2$ тўғри чизиқни 2 та комплекс нуқтада, $x^2-y^2=1$ гипербола ва $y=x$ тўғри чизиқ 2 та чексиз узоқлашган нуқталарда, худди шу гипербола $x=1$ тўғри чизиқ билан эса 2 каррали битта умумий нуқтада кесишади.

Лекин Диофант таҳлили мақсадлари учун (бу терминни ҳозир Диофант геометрияси дейишади) тартиб бўйича классификациялаш қўполга ўхшайди. Буни мисолда тушунтириш қулай. Айтайлик, C: $x^2+y^2=1$ айлана ва ҳар қандай рационал коэффициентли $L: y=0$ тўғри чизиқ берилган бўлсин. Бу айлана ва тўғри чизиқнинг рационал нуқтасини бир қийматли мосликка қўйиш мумкин. Буни қуйидагича аниқлаймиз:

C айлананинг B' нуқталарини L тўғри чизиқнинг B нуқталари билан $C\cap L$ ва $(AB)\cap L$ каби кесишган жойларидаги нуқталарига мос қўйилади (3.1-расм).



3.1-расм.

Бундай ҳолда L тўғри чизиқ C айлананинг тартиблари турлича бўлсада, уларнинг Диофант таҳлили ажралмас бўлиб, уларнинг рационал ечимлари тўплами эквивалентдир.

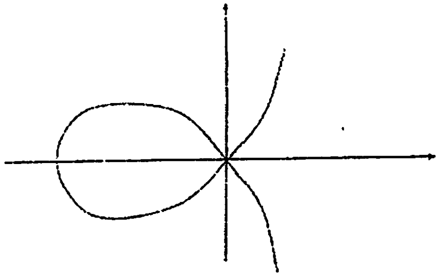
Алгебраик эгри чизиқларни жинс бўйича классификациялаш анча нозик бўлиб, буни XIX асрда Абел ва Риман киритган. Бу классификациялаш Г эгри чизиқнинг махсус нуқталари сонини ҳисобга олади.

Айтайлик, Г эгри чизиқнинг (3.2) тенгламадан иборат $f(x,y)$ кўпҳад рационал сонлар майдонида келтирилмайдиган ва Г эгри чизиқнинг $P(x_0,y_0)$ нуқтасида унга ўтказилган уринманинг тенгламаси $y-y_0=k(x-x_0)$ бўлсин, у ҳолда $k=\frac{f_x'(x_0,y_0)}{f_y'(x_0,y_0)}$ Агар $P(x_0,y_0)$ нуқтада f_x' ёки f_y' нолдан фарқли, масалан, $f_x'(x_0,y_0)=0$ ва $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$ бўлса, $k=\infty$ бўлиб, уринма эса $P(x_0,y_0)$ нуқтада вертикал бўлади.

Агар $P(x_0,y_0)$ нуқтада ҳар иккала хусусий ҳосилалар нолга тенг бўлса, яъни $f_x'(x_0,y_0)=0$ ва $f_y'(x_0,y_0)=0$ бўлса, $P(x_0,y_0)$ нуқта махсус нуқта дейилади.

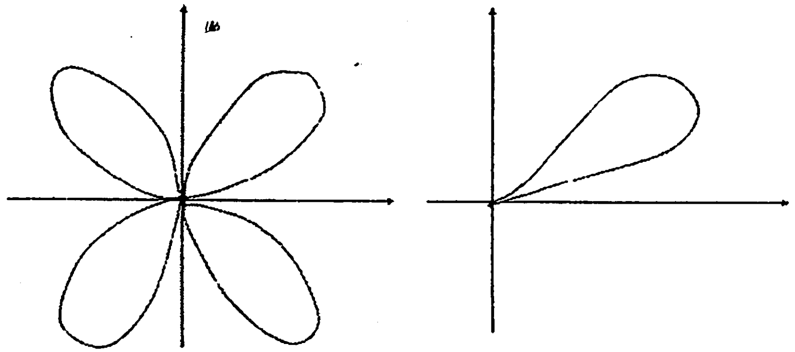
Масалан, $y^2=x^2+x^3$ эгри чизиқда (0,0) нуқта махсус, чунки бу нуқтада $f_x'=-2x-3x^2$ ва $f_x'=2y$ лар нолга айланади.

Энг содда махсус нуқта каррали нуқта бўлиб, унда f_{xx}'', f_{xy}'' ва f_{yy}'' ҳосилалардан камида биттаси нолдан фарқли. 3.2-расмда каррали нуқта тасвирланган бўлиб, бу нуқтадан иккита турлича уринмалар ўтган.



3.2-расм.

Бундан ҳам мураккаброқ бўлган махсус нуқта 3.3-расмда тасвирланган.



3.3-расм.

Алгебраик эгри чизиқда чекли сондаги махсус нуқталар бўлиши мумкин. Айтайлик,

$$f(x,y)=0 \qquad (*)$$

эгри чизиқ тенгламаси бўлиб, бунда $f(x,y)$ кўпҳад Q рационал сонлар майдонида келтирилмайдиган бўлсин. Махсус нуқталарнинг координаталари $f_x'(x,y)=0,\quad f_y'(x,y)=0$ тенгламаларни ҳамда $(*)$ тенгламани қаноатлантириши керак. Лекин бу учала алгебраик тенгламалар системаси фақат чекли сондаги ечимларга эга бўлиши мумкин. Каррали махсус нуқталардан бошқа ҳеч қандай махсус нуқталари бўлмаган бундай алгебраик эгри чизиқларнинг жинсини аниқлаймиз. Умумий ҳолда, яъни ихтиёрий алгебраик эгри чизиқ учун жинс анча мураккаб аниқланади.

Айтайлик, Г ясси эгри чизиқнинг каррали нуқталари сони $d(d\geq 0)$ га тенг бўлсин, у ҳолда Г нинг жинси ушбу $P=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-d$ формула билан аниқланувчи P бутун сонга айтилади, бунда n сон Г эгри чизиқ тартиби; $P\geq 0$ ни кўрсатиш мумкин.

Агар Г тўғри чизиқ ёки иккинчи тартибли эгри чизиқ бўлса, келтирилган формуладан кўринадики, $P=0$ яъни, бу эгри чизиқлар (3.2 - , 3.3-расмлар жинсга эга эгри чизиқлар)дир. Учинчи тартибли эгри чизиқлар махсус нуқтага эга бўлиши бўлмаслигига боғлиқ бўлиб, 0 ёки 1 жинсга эга. Масалан, 1 жинсли “Ферма эгри чизиғи”дир:

$x^3+y^3=1$. Бироқ жинс бўйича классификациялаш эгри чизиқнинг арифметик хоссаларини тан олмайди.

Масалан, $x^2+y^2=1$ ва $x^2+y^2=3$ эгри чизиқлар 0 жинсга эга, шу билан бирга, улардан биринчисида чексиз кўп рационал нуқталар бўлиб, иккинчисида биронта ҳам йўқ.

(2) тенгламани ечишда кўпинча

$$x=\varphi(u,v,),\qquad y=\psi(u,v) \qquad (3.3)$$

ўзгарувчиларни алмаштирамиз; бу ерда $\varphi(u,v)$ ва $\psi(u,v)$ икки кўпҳад нисбатларидан иборат рационал функциялардир. (3.3) ни (3.2) тенгламага қўйсак,

$$G(u,v)=0 \qquad (3.4)$$

ни оламиз. Бу тенглама Г' эгри чизиқни ифода этади.

Айтайлик, Г ва Г' нинг нуқталари ўзаро бир қийматли бўлиб, бирининг нуқталарини бошқасининг нуқталарига ўтказиб қуйидаги икки шарт бажарилсин: 1) φ ва ψ лар рационал коэффициентларга эга бўлсин; 2) (3.3) тенглама тескариланувчи, яъни улардан ўз навбатида

$$u=\varphi_1(x,y,),\qquad v=\psi_1(x,y) \qquad (3.3')$$

ларни топиш мумкин бўлсин, бунда φ_1 ва ψ_1 лар рационал коэффициентли рационал функциялардир.

Агар Г ва Г' эгри чизиқлар орасида (3.3) ва (3.3') формулалар ёрдамида рационал коэффициентлар билан ўзаро мослик ўрнатиш мумкин бўлса, эгри чизиқлар эквивалент бирационаллар дейилади, бу алмаштиришнинг ўзини эса бирационал дейилади. Масалан, агар $\varphi(u,v)$ ва $\psi(u,v)$ лар ушбу кўринишли чизиқли, яъни

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(u,v)=au+bv+c, \\ y=\psi(u,v)=a_1u+b_1v+c_1 \end{array}\right\}$$

функциялар бўлса, u,v ларни x,y ларнинг чизиқли рационал коэффициентли рационал функциялари орқали ифодалаш мумкин, яъни алмаштириш бирационал бўлади, бунда $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\neq 0$.

Мураккаброқ мисол кўрамиз. Айтайлик, L эгри чизиқ ўз тенгламаси билан берилган бўлсин:

$$y^2 = x^4 - x^3 + 2x - 2 = (x-1)(x^3+2) \qquad (**)$$

Буни $v^2 = \varphi_3(u)$ $(\varphi_3(u)$-учинчи даражали кўпҳад кўринишли L' эгри чизиққа бирационал алмаштириш мумкин. Бунинг учун (**) тенгламанинг ҳар икки томонини $(x-1)^4$ га бўлиб, $x-1=\frac{1}{u}$, $\frac{y}{(x-1)^2}=v$ деймиз. У ҳолда (**) тенглама ушбу тенгламага алмашади:

$$v^2 = 3u^3 + 3u^2 + 3u + 1$$

Шунинг билан x ва y лар u, v орқали рационал ифода этилади:

$$x=\frac{1+u}{u},\ y=\frac{v}{u^2} \text{ ва аксинча, } u=\frac{1}{x-1},\ v=\frac{y}{(x-1)^2},$$

яъни, L ва L' эгри чизиқлар бирационал эквивалентдир.

Иккита бирационал эквивалент эгри чизиқларнинг M ва M' рационал нуқталар тўпламларини нуқталарнинг чекли тўпламигача бир қийматли мослигини ўрнатиш мумкин.

Диофант таҳлили нуқтаи назаридан иккита бирационал эквивалент эгри чизиқлар ўзаро тенг ҳуқуқли. Шу билан бирга, Г эгри чизиқ тартиби Г эгри чизиқ тартибидан фарқли.

Агар Г учинчи тартибли эгри чизиқ бўлса, у энг камида битта рационал нуқтага эга бўлиб, унинг бирационал алмаштиришлар орқали ҳосил қилинган тенгламасини

$$y^2 = x^3 + ax^2 + b \qquad (3.5)$$

кўринишга келтириш мумкин, бунда a ва b лар рационал сонлар.

Фан тарихчиларининг Диофант методига берган баҳолари.

Келгуси параграфларда иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг рационал нуқталарини аниқлашда Диофантнинг умумий методларга эга бўлганини ўрганамиз. Пуанкаре ана шу методларни 0 жинсли барча эгри чизиқлар учун қўллаш мумкинлигини кўрсатди. Диофант, шунингдек, учинчи тартибли эгри чизиқларда рационал нуқталарни аниқлаш учун умумий методларни топган, аммо бу методлар иккинчи тартибли эгри чизиқларга тадбик этилган методдан кескин фарқ қилади. Пуанкаре ишларидан кўринадики, Диофантнинг бу методлари 1 жинсли ҳар қандай эгри чизиқларга рационал нуқталарни топиш учун қўлланилиши мумкин.

Алгебраик эгри чизиқларнинг рационал нуқталарини топиш учун бошқа ҳеч қандай умумий методлар ҳозиргача мавжуд эмас.

Математика тарихида Диофантнинг метод ва ғояларидан Виет ва П. Фермадан то Л. Эйлергача бўлган тадқиқотчи математиклар қандай фойдаланганини қисқача шарҳлаймиз. Кўпгина фан тарихчилари математикларга қарама-қарши ўлароқ ҳозиргача Диофант ижодини, унинг илмий меросини баҳолай олмадилар (очиғи баҳоламадилар). Улар Диофант тенгламасининг битта хусусий ечимини топиш билан чегараланиши, турлича масалалар (тенгламалар)ни ечишга турлича сунъий усулларни қўллаган деб чиқишди, масалан, Г.Ганкель ёзади: "...ҳозирги математик Диофантнинг 100 та масаласини ечишни ўрганиб олгач, 101-масаласини ечишда қийналади ... у қувониш ўрнига кўрмай қолади". Г. Ганкелнинг китобида Пуанкаре ишлари ёзилган бўлиб, унда мазкур гаплар (баҳолар берилган) ёзилган эди. Лекин О.Беккер ва И.Гоффманларнинг 1951 йилда нашр қилинган "Математика тарихи" номли китобининг 90-бетида ушбу жумлалар ёзилган: "Диофант ҳеч қандай умумий методни бермайди, лекин ҳар бир янги масала учун янги кутилмаган сунъий усул қўллайдики, булар шарқона усулларни эслатади". Ана шундай мулоҳазани Ван-дер-Варден ўзининг "Уйғониш илми" китобида ҳам келтиради: "Одатда, у (яъни, Диофант) битта масала ечими бутун сонни берадими ёки каср сонни берадими, унга масалани ечишга алоҳида усулни қўллайди. Масалаларнинг биридан бошқасига ўтишда ечиш усулларини ўзгартириб боради. Ҳеч бир икки хил масалани бир хил усулда ечмаган". Айниқса, 2-тартибли аниқмас тенгламаларни ечишда ҳийлакорлик билан квадрат тенгламаларни рационал илдиз берадиган турларга келтириб, уларга мос хилма-хил усулларни топа олган. Г.Цейтен Диофантга анча тўғри баҳо берган: "Умуман айтганда, Диофант масала учун умумий ечимни изламай биргина ечимни топишга ҳаракат қилган; унинг масалалар ечишдаги қўллаган хусусий, сунъий, хилма-хил усуллари унинг ечимларни излашдаги ижодкорлигидан даракдир". ("История математики в древности и среднего века", Гонти, 1938, стр. 167-168). Г.Цейтен 2-тартибли аниқмас тенгламаларнинг рационал ечимларини топишдаги хусусий усулларини атрофлича таҳлил қилади, лекин учинчи тартибли аниқмас тенгламаларни ечишда Диофант қўллаган усулларни кўрмайди, топа олмайди.

3.5-§. Соннинг кўрсаткичи. Туб модул бўйича индекслар. Икки ҳадли таққосламалар. Иккинчи тартибли аниқмас тенгламалар

Диофантгача ушбу кўринишдаги тенгламалар қаралган:

$$x^2+y^2=z^2$$

ва булардан биринчиси қадимги Вавилонияда ўрганилган. Бу тенгламани ечишдаги формулалар Пифагорчилар томонидан топилган:

$$x^2=k^2-1,\ y=2k,\ z=k^2+1.$$

Юқоридаги икки тенгламадан иккинчиси Евклиднинг “Негизлар”ида $a=2$ учун рационл сонларда эмас, балки бутун сонлардаги ечимлари тўлиқ келтирилган. a нинг ихтиёрий квадрат бўлмаган ҳоли учун бу тенгламанинг ечимини Архимед билган (у Эратосфенга барчага маълум бўлган “буқалар ҳақидаги масала”ни қўйган). Диофант ўзининг “Арифметика II” китобида турлича 2-тартибли аниқмас тенгламалар ҳақида фикр билдириб ушбу теоремани беради:

Иккита ўзгарувчили иккинчи тартибли аниқмас тенглама биронта ҳам рационал ечимга эга эмас ёки ечимлар параметрининг рационал функциялари сифатида ифода этилган чексиз кўп $x=\varphi(k,)$ $y=\psi(k)$ ечимларга эга, бунда φ, ψ лар рационал функциялар.

Буни кўрсатиш (тушунтириш) учун “Арифметика II” китобининг 8-масаласини келтирамиз. “Берилган квадратни иккита квадратга бўлинг. Айтайлик, 16 ни иккита квадратга бўлиш таклиф қилинган бўлсин. Улардан биринчисини x^2 десак, бошқаси $16-x^2$ бўлиб, $16-x^2=y^2$ бўлиши керак. Ана шу квадратланувчи сон $2x-4$ бўлиб, квадрати $4x^2+16-16x$ бўлади, бу $16-x^2$ га тенг бўлиши лозим. Ҳар икки томонга манфий сонларни қўшиб, ўхшаш ҳадларни ихчамлаймиз, у ҳолда $5x^2=16x$ ва $x=\frac{16}{5}$ келиб чиқади. Бири $\frac{256}{25}$, иккинчиси $\frac{144}{25}$, буларнинг йиғиндиси $\frac{400}{25}=16$ ва булардан ҳар бири квадрат бўлади”.

Энди Диофант методини “соф кўринишда” ажратишга ҳаракат қиламиз.

Фараз қилайлик,

$$x^2+y^2=a^2 \tag{3.6}$$

тенглама берилган бўлсин.

Бу ўз вақтида маркази координаталар бошида бўлган айланани ифода этади. Бу тенгламанинг рационал ечимларидан бири $(0,-a)$ бўлади. Диофант

$$\left.\begin{array}{l} x=x, \\ y=kx-a \end{array}\right\} \tag{3.7}$$

ўрнига қўйиш қилади. Ихтиёрий k учун $k=2$ ни олади ва $kx-2$ нинг квадрати ҳақида гапириб, (3.7) нинг геометрик талқини $(0,-a)$ нуқтадан $y=kx-a$ $(2.7')$ тўғри чизиқнинг ўтишидир. Бу тўғри чизиқ (3.6) айланани яна бир нуқтада кесади, унинг координаталари k га боғлиқ рационал функциялардир. Ҳақиқатдан, $x^2+(kx-a)^2=a^2$ ва

$$x=\frac{2ak}{k^2+1},\ y=kx-a=a\frac{k^2-1}{k^2+1}.$$

Хуллас, k нинг ҳар бир рационал қийматига (3.6) эгри чизиқнинг фақат битта рационал нуқтаси мос келади ва аксинча. Унинг исталган нуқтаси билан $(0,-a)$ нуқтани туташтирсак, рационал бурчак коэффициентли тўғри чизиқни оламиз. Диофант методининг моҳиятини “Арифметика II” китобининг 9-масаласини ечишда яққол кўрамиз, у қуйидагича ифодаланади:

“Иккита квадратлар йиғиндиси бўлмиш берилган сони бошқа иккита квадратларга алмаштирилсин.” Диофант 13 сонини беради, у $4+9$ га тенг. Хуллас, битта ечим $(2,3)$ эканлиги маълум. Бошқа ечимларни топиш учун биринчи сонни $x=t+2$, иккинчисини $y=2t-3$ билан белгилайди, яъни у тўғри чизиқни $(2,-3)$ нуқтадан ўтади.

Диофант методининг мутлақо умумийлигини кўриш қийин эмас.

Агар эгри чизиқ камида битта рационал нуқтага эга бўлса, иккинчи тартибли эгри чизиқнинг барча рационал нуқталарини топишга имконият беради. Иккита ўзгарувчига боғлик 2-тартибли

$$f_2(x,y)=0 \tag{3.8}$$

тенглама берилган ва у (a,b) рационал ечимга эга бўлсин. Диофант изидан бориб, $\left.\begin{matrix} x=a+t, \\ y=b+kt \end{matrix}\right\}$ ўрнига қўйишларни қиламиз ва ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$f_2(a+t,b+kt)=f_2(a,b)+tA(a,b)+ktB(a,b)+t^2C(a,b,k)=0.$$

Лекин, $f_2(a,b)=0$ шунинг учун

$$t=\frac{A(a,b)+kB(a,b)}{C(a,b,k)}.$$

Хуллас, ҳар бир рационал k учун битта ва фақат битта рационал ечим топамиз. Агар берилган тенглама

$$y^2=a^2x^2+bx+c \tag{3.9}$$

кўринишга эга бўлса, Диофант $y=ax+m$ деб тенглама кўринишини ўзгартиради ва $x=\dfrac{c-m^2}{2am-b}$ бўлади.

Аналитик геометрияда R^2 текисликнинг ҳар бир элементи $(x,y)\in R^2$, проектив текислик эса P^2 бўлиб, унинг элементи $(u,v,z)\in P^2$ лардан ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли. $(u,v,z)\in P^2$ ва $(u_1,v_1,z_1)\in P^2$ ларни бир хил деймиз, агар $u_1=ku,\ v_1=kv,\ z_1=kz$ $(k,\notin 0)$ бўлса. Шундай қилиб, чексиз кўп учликлар биттагина нуқтани ифода этади. $\forall(u,v,z)\in P^2$ берилган бўлиб, агар $z\neq 0$ бўлса, у ҳолда $\left(\dfrac{u}{z},\dfrac{v}{z},1\right)$ нуқта ҳам ўша нуқтани аниқлайди. Бу нуқта билан $(x,y)\in R^2$ орасида бир қийматли мослик ўрнатамиз: $x=\dfrac{u}{z},\ y=\dfrac{v}{z}$. Агар $z=0$ бўлса, у ҳолда $(u,v,0)$ нуқта R^2 текисликнинг бирорта нуқтасига жавоб бермайди. Бундай нуқтани чексиз узоқлашган ёки хосмас нуқта деб атаймиз. Барча шундай нуқталар чексиз узоқлашган $z=0$ тўғри чизиқда ётади. Аффин координаталарида ёзилган $f(x,y)=0$ тенгламадан бир жинсли координаталардаги тенгламага ўтиш учун $x=\dfrac{u}{z},\ y=\dfrac{v}{z}$, деймиз. Умумий махражга келтириб, мос ўрнига қўйишларни бажариб, $\Phi(u,v,z)=0$ тенгламани оламиз. $\Phi(u,v,z)$ ифода (u,v,z) га нисбатан кўпҳад. Масалан, $x^2-y^2=1$ гипербола тенгламаси бир жинсли координаталарда $u^2-v^2=z^2$ кўринишни олади. Бу эгри чизиқнинг чексиз узоқлашган нуқтасини топиш учун $z=0$ деймиз (бошқача айтганда чексиз узоқлашган тўғри чизиқ билан унинг кесишган нуқтасини топамиз). У ҳолда $v=\pm u$, яъни $(1,1,0)$ ва $(1,-1,0)$ нуқталарни топамиз. Уларнинг ҳар иккаласи ҳам рационл координаталарга эга. Бундай нуқталарни чексиз узоқлашган рационал нуқталар деймиз. Диофант ўрнига қўйишларига қайтайлик. (3.9) тенглама бир жинсли координаталарда

$$v^2=a^2u^2+buz+cz^2 \tag{3.9'}$$

каби ёзилади. $(1,a,0)$ ва $(1,-a,0)$ нуқталар унинг чексиз узоқлашган рационал нуқталари бўлади. Улардан биринчиси орқали тўғри чизиқ ўтказамиз. Бир жинсли координаталардаги тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси $Au+Bv+Cz=0$ кўринишга эга. Лекин бизнинг нуқта шу тўғри чизиқда ётади, яъни, $A\cdot 1+B\cdot a+C\cdot 0=0$. Демак, $A=ka,\ B=-k,\ C=km$ ўрнига қўйишларни қилиш мумкин, бу ерда $m-$ихтиёрий. Шундай қилиб, изланган тўғри чизиқ тенгламаси $au-v+mz=0$ бўлади ёки бундан яна аффин координаталарига ўтсак, $y=ax+b$ ни оламиз. Бу эса Диофант томонидан бажарилган ўрнига қўйишлар бўлган. У ўзининг "Арифметика III" китобининг 19-масаласида: "Берилган квадратни иккита квадратга чексиз сондаги усуллар билан ажратиш мумкин" дейди. Яна "Арифметика IV" китобида 19-масалани қуйидагича ифодалайди: "Учта сондан исталган иккитасининг кўпайтмаси бир билан биргаликда квадратни берадиган умумий (ёки аниқмас) ифодани топинг": Диофант бу ифодаларни ушбу $x+2,x$ ва $4x+4$ кўринишда топади ва ёзади: "Шундай қилиб, муаммо умумий (ёки ноаниқ кўринишдаги) ифода ёрдамида ҳал бўлди, бинобарин, улардан ихтиёрий иккитасининг кўпайтмаси бир билан биргаликда x қандай танланмасин, квадратдан иборат бўлади, чунки умумий (ёки ноаниқ кўринишдаги) ифодани топиш – шундай формулани бериш деганики, x қандай танланмасин, уни ўрнига қўйгандан сўнг (масала) шартлари қаноатлантирилади".

$y^2 = a^2x^2 + bx + c$ аниқмас тенгламани ечиш учун Диофант методлари “Эйлер ўрнига қўйишлари” билан устма-уст тушади (математик анализни ўқиган ҳар бир олий ўкув юрти талабасига Эйлер ўрнига қўйишлари таниш). У ерда ҳам, бу ерда ҳам x ва y лар битта параметрга боғлиқ рационал функциялар билан ифода этилади; бу ўрнига қўйишлар $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ интегрални ҳисоблашда бажарилади. Бу ерда $y = \sqrt{ax + t}$ ёки $y = tx + \sqrt{c}$ дейиш мумкин.

3.6-§. Учинчи тартибли аниқмас тенгламалар

Диофант “Арифметика IV” китобида учинчи ва тўртинчи тартибли аниқмас тенгламаларни тадқиқ қилади. Бу ерда иш анча-мунча мураккаб: агар учинчи тартибли эгри чизик рационал нуқталарга эга бўлса, уларнинг координаталари битта параметрли рационал функциялар билан ифодаланиши мумкин эмас. Лекин, кубик эгри чизиқнинг битта ёки иккита рационал нуқтасини билган ҳолда унинг яна битта учинчи рационал нуқтасини топиш мумкин. Ҳар қандай тўғри чизиқ учинчи тартибли эгри чизиқни учта нуқтада кесади. Уларнинг координаталарини, масалан, Г эгри чизиқ тенгламаси

$$f_3(x, y) = 0 \tag{3.10}$$

дан y ни чиқариш билан ҳосил қилинган учинчи даражали тенгламадан топиш мумкин. Агар бу натижавий тенгламанинг илдизларидан иккитаси рационал бўлса, учинчи илдизи ҳам рационал бўлади (буни кубик тенглама илдизларининг йиғиндиси x^2 олдидаги коэффициентни тескари ишора билан олинганини x^3 олдидаги коэффициентга бўлинганига тенг эканлигини эътиборга олсак, агар тенглама коэффициентлари рационал бўлиб, унинг иккита илдизи рационал бўлса, учинчи илдизнинг рационал бўлиши маълум). Бу эслатма, масалан, ушбу иккита тасдиққа асосланади:

1) Агар P нуқта эгри чизиқнинг рационал нуқтаси бўлса, Г эгри чизиққа P нуктадан k бурчак коэффициенти рационал бўлган уринма ўтказилади. У Γ билан кесишиб, яна битта рационал нуктани ҳосил қилади (Уринма тенгламасини эгри чизиқ тенгламаси билан биргаликда ечиб, каррали рационал илдизга эга бўлган натижавий кубик тенгламани оламиз, демак, учинчи илдиз ҳам рационал бўлади).

2) Агар Γ эгри чизиқнинг P_1, P_2 нуқталари рационал бўлса, бу нуқталардан P_1P_2 тўғри чизиқни ўтказиб, Γ билан кесишадиган учинчи рационал нуқта изланади.

Бу усулларни Диофантнинг уринма ва кесувчи методлари деб атаймиз. Ана шу методлар тадбиқига доир унинг “Арифметика IV” китобидан олинган 24-масаласини қараймиз: “Берилган сон шундай иккита сонга ажратилсинки, уларнинг кўпайтмаси томонсиз кубга тенг бўлсин.

Айтайлик, 6 сони берилган бўлсин. Биринчи сонни x десак, иккинчиси $6-x$ бўлади. Бирининг иккинчисига кўпайтмасини томонсиз кубга тенглашиб қоляпти, аммо у $6x-x^2$ бўлади; бу томонсиз кубга тенг бўлиши керак. Мен кубни қандайдир коэффициентли x-1 дан ҳосил қиламан; айтайлик, $2x-1$ бўлсин, унинг куби минус томони $8x^3+4x-12x^2$ га тенг. Бу $6x-x^2$ га тенг.

Агар иккала қисмдаги x нинг коэффициентлари тенг бўлганда эди, у ҳолда x^3 ва x^2 лик тенг ҳадлар қолар эди; бунда x рационал бўлади. Аммо $4x$ сон $3 \cdot 2x$ нинг $2x$ га ошиғи билан қўшимчаси сифатида олинади; $3 \cdot 2x - 2x$ бизга $2 \cdot 2x$ ни беради; бироқ, фаразимизга кўра 6 бўлиши керак. Хуллас, иш x олдидаги коэффициентнинг 2 га кўпайтмаси 6 ни берадиган сонни излашга келади. Бу эса 3 бўлади.

Бинобарин, мен $6x-x^2$ нинг куб минус томонга тенг бўлишини истар эканман, у ҳолда кубнинг томонини $3x-1$ деб оламан; бу куб минус томон

$$27x^3 + 6x - 27x^2 = 6x - x^2$$

ва $x = \frac{26}{27}$ бўлади.

Формулалар бўйича биринчиси = $\frac{26}{27}$, иккинчиси = $\frac{366}{26}$ бўлади”.

Энди Диофант методини соф ҳолда ажратишга ҳаракат қиламиз. Айтайлик, a сон берилган бўлсин. Изланган сонлардан бирини x билан, иккинчисини $a-x$ билан белгилаймиз. Шартга асосан,

$$x(a-x) = y^3 - y \tag{3.11}$$

бўлади. Рационал ечимлардан бири $(0,-1)$ бўлади. Диофант йўлидан бориб, бу нуқта орқали

$$y = kx - 1 \qquad (*)$$

тўғри чизиқни ўтказамиз (Диофант дастлаб $k = 2$ ни олади) ва унинг (3.11) эгри чизиқ билан кесишиш нуктасини топамиз:

$$ax - x^2 = k^3x^3 - 3k^2x^2 + 2kx$$

x рационал бўлиши учун $2k = a$, яъни

$$k = \frac{a}{2} \qquad (**)$$

дейиш етарли, буни эса Диофант қўллаган. Шундан кейин

$$x = \frac{3k^2 - 1}{k^3} = 2 \cdot \frac{3a^2 - 4}{a^3}$$

ни топамиз.

$(**)$ шарт $(*)$ тўғри чизиқ учун нимани билдиришини кўрамиз. Буни аниқлаштириш учун икки ўзгарувчили учинчи тартибли ихтиёрий (3.10) тенгламага Диофант методини қўллаймиз. Бу тенглама (a,b) рационал ечимга эга, яъни $f_3(a,b) = 0$. $P(a,b)$ нукта орқали

$$y - b = k(x - a) \qquad (3.12)$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} x &= a + t, \\ y &= b + kt \end{aligned}\right\} \qquad (3.13)$$

тўғри чизиқни ўтказамиз. У ҳолда,

$f_3(a+t, b+kt) = f_3(a,b) + tA(a,b) + ktB(a,b) + t^2C(a,b,k) + t^3D(a,b,k) = 0$. Аммо $f_3(a,b)$ ва агар

$$A(a,b) + kB(a,b) = 0 \qquad (3.14)$$

десак, у ҳолда

$$k = -\frac{A(a,b)}{B(a,b)} = -\frac{\frac{\partial f_3}{\partial x}}{\frac{\partial f_3}{\partial y}}(P)$$

ни оламиз, яъни (2.12) тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти шундай танланиши керакки, у (2.10) эгри чизиққа $P(a,b)$ нуқтада уринсин. Шундай қилиб, бу ерда Диофантнинг уринмалар методидан фойдаланилади.

Худди шу методни қўллаб, Диофантнинг “Арифметика VI” китобидан олинган 18-масалани ечди, шунингдек, Диофантнинг ўзи тасдиқлаши бўйича бизгача етиб келмаган унинг “Поризмлар” номли китобида қаралган

$$x^3 + y^3 = a^3 - b^3$$

масалани ҳам ечди.

Йўл-йўлакай Диофант уринманинг k бурчак коэффициентини аникловчи соф алгебраик усулни олди, бу ерда $k - \frac{dy}{dx}$ ёки

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f_3}{\partial x}}{\frac{\partial f_3}{\partial y}}$$

ҳосилага тенг. Лимитга ўтишни талаб этмайдиган, яъни соф алгебраик усул билан ёритиладиган бу усул ҳосилани таърифлашнинг тарихий жараёнида катта роль ўйнади, асосан Ферма ва Декартда, ҳозирги даврда эса алгебраик геометрияда кенг қўлланилади.

Энди IV китобининг кесувчи методи қўлланилган 26-масаласига ўтамиз. “Шундай иккита сон топингки, уларнинг кўпайтмаси улардан ҳар бири билан олинганда кубни берсин”.

Фараз қилайлик, биринчи сон кубга тенг коэффициент билан, 8 x, иккинчиси эса $x^2 - 1$ бўлсин. Битта шарт бажарилади, чунки кўпайтмага биринчисини қўшиш кубни беради.

Шу кўпайтмага иккинчисини қўшганда ҳам кубни берадиган ҳолни аниқлаш қолди, ҳолос. Аммо, иккинчисини қўшиш $8x^3 + x^2 - 8x - 1 = куб$ ни беради. $2x - 1$ дан куб ҳосил қиламиз, бу ушбуни беради: $x = \frac{14}{13}$. Яна формула бўйича: биринчиси $\frac{112}{13}$, иккинчиси эса $\frac{27}{169}$”.

Диофант изидан бориб, биринчи номаълумни a^3x, иккинчисини $x^2 - 1$ билан белгилаймиз. У ҳолда, масаланинг биринчи шарти бажарилади, иккинчиси эса,

$$a^3x^3 + x^2 - a^3x - 1 = y^3 \qquad (3.15)$$

ни беради. Диофант алмаштиришлар бажариб, $x = \frac{a^3 + 3a}{1 + 3a^2}$ ни олади.

Бу ерда қўлланилган метод устида бироз тўхталиб ўтамиз. (3.15) тенгламанинг рационал ечимларидан бири $(0,-1)$ бўлади. Бу нукта орқали $y=kx-1$ тўғри чизиқ ўтказамиз ва у (3.15) билан кесишиш нуқтасини топамиз:

$$\left(a^3-k^3\cdot x^3\right)+\left(1+3k^2\cdot x^2\right)-\left(q^3-3k\cdot x\right)$$

Диофант олдинги ҳолда қилинганидек, x олдидаги коэффициентни эмас, балки x^3 олдидаги коэффициентни нолга тенглайди ва натижада

$$a^3-k^3=0,\ k=a \text{ бўлади.}$$

Бундай тенглаштириш геометрик нуктаи - назардан нимани билдиради? Бу саволни геометрик талқинда тушунтириш учун $x=\frac{u}{z}$, $y=\frac{v}{z}$ деб, бир жинсли координаталарда (2.15) тенгламани қуйидагича ёзамиз:

$$a^3u^3+u^2z-a^3uz^2-z^3=y^3 \qquad (3.15)$$

Бу ерда эгри чизиқнинг иккита рационал нуқтага эгалигини кўрамиз: $P_1(0,-1,1)$ ва $P_2(1,a,0)$; буларни туташтирувчи тўғри чизиқ $v=au>z$ дан иборат. У эса (3.15) билан кесишиб, учинчи рационал нуқтани ҳосил қилади. Шундай қилиб, бу ерда Диофант берилган рационал нуқталардан бири чекли, иккинчиси эса чексиз узоқлашган ёки махсус бўлган ҳол учун кесувчи методини қўллайди. Диофант ўзининг уринма ва кесувчи методларини бошқа ("Арифметика IV, V, VI" китобларидан олинган) масалаларни ечишда ҳам қўллайди.

МИСОЛЛАР

3.1. Тенглама ифодаларини барча мумкин бўлган ўзгарувчилар қийматига тўлиқ алмаштириш усули

1. $49x+51y=602$. Барча натурал ечимларини топинг.

Ечиш:

$$x=\frac{602-51y}{49}\geq 1, 602-51y\geq 49$$

$$51y\leq 553, 1\leq\frac{1043}{51}$$

Бу оралиқдан $x=5, y=7$ ечимларга келамиз.

Жавоб: (5;7)

2. Тенгламанинг натурал ечимларини топинг.

$x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1=y^2-12.$

Ечиш: $x>5$ да тенгламанинг чап томони 5·2, яъни ноль билан тугайди. Ўнг томони ноль билан тугаши мумкин эмас. Қуйидаги жадвални киритамиз.

3.5-жадвал

у нинг охирги рақами	y^2 нинг охирги рақами	y^2-12 нинг охирги рақами
0	0	8
1	1	9
2	4	2
3	9	7
4	6	4
5	5	3
6	6	4
7	9	7
8	4	2
9	1	9

Демак, $x\geq 5$ тенглама ечимга эга эмас. Энди қолган ҳолларда ўрганиб чиқамиз.

$x=4$: да $24=y^2-12$; $y=6$

$x=3$: да $6=y^2-12$; ечимга эга эмас.

$x=2$: да $2=y^2-12$; ечимга эга эмас.

$x=1$: да $1=y^2-12$; ечимга эга эмас.

Жавоб: (4;6).

3. Тенгламанинг бутун ечимини топинг. $x^2+1=3y$.

Ечиш: 1). Тенгламанинг ўнг томони 3 га бўлинади.

2). Чап томонини 3 га бўлганда қандай қолдиқ қолишини кўрамиз. Бутун сонларнинг қолдиқли бўлиш теоремасига асосан, бутун сон 3 га бўлинганда, қолдиқ 1 ёки 2 қолади.

Агар $x=3k$ бўлса, у ҳолда тенгламанинг ўнг томони 3 га бўлинмайди.

Агар $x=3k+1$ бўлса, у ҳолда тенгламанинг чап томони 3 га бўлинмайди.

Агар $x=3k+2$ бўлса, у ҳолда тенгламанинг чап томони 3 га бўлинмайди.

Демак, тенглама ечимга эга эмас.

Жавоб: ечимга эга эмас.

3.2. Кўпайтувчиларга ажратиш усули

1. Тенгламанинг барча бутун ечимларини топинг.

$$x^2-4x-y^2+6=0.$$

Ечиш: Тенгламанинг чап томонини x ва y га нисбатан квадратлар кўринишига келтирамиз.

$$(x^2-4x+4)-4-(y^2-2y+1)+1+6=0 \Leftrightarrow (x-2)^2-(y-1)^2=-3$$

$$(x-y-1)(x-2+y-1)=-3 \Leftrightarrow (x-y-1)(x+y-3)=-3.$$

-3 сонини бир неча хил кўринишдаги кўпайтиришлар усули билан ёзиш мумкин.

-3=3·(-1)=-3·1=-1·3=1·(-3).

$x^2-4x-y^2+6=0.$ тенгламани тўртта система кўринишда ёзиб, бутун ечимларини топамиз.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y-1=3\\x+y-3=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x-y-1=-3\\x+y-3=1\end{cases}\\ \begin{cases}x-y-1=-1\\x+y-3=3\end{cases}\\ \begin{cases}x-y-1=1\\x+y-3=-3\end{cases}\end{array}\right.$$

Бу системани ечимидан (3;-1), (1;3), (3;3), (1;-1) чиқади.

Жавоб: (3;-1), (1;3), (3;3), (1;-1).

2. $1+x+x^2+x^3=2^y$ тенгламанинг натурал ечимларини топинг.

Ечиш: Кўпҳадни кўпайтма кўринишга келтирамиз.

$$(1+x)\left(1+x^2\right)=2^y,$$

$$\begin{cases}1+x=2^m\\1+x^2=2^{y-m}\end{cases}\begin{cases}x=2^m-1\\x^2=2^{n-m}-1\end{cases}$$

$$x^2=2^{2m}-2^{m+1}+1=2^{n-m}-1,$$

$$2^{n-m}+2^{m+1}-2^{2m}=2.$$

1-ҳол. $m=0$ бўлсин. У ҳолда $2^y+2-1=2; 2^y=1; y=0, x=0.$ натурал ечими йўқ.

$$m>0; 2^{n-m-1}+2^m-2^{2m-1}=1$$

2-ҳол. $2^{y-m-1}\left(1+2^{2m-y+1}-2^{3m-y}\right)=1,$ $\begin{cases}m=1\\y=2\end{cases}, x=2^m-1=1.$

$$\begin{cases}2^{y-m-1}=1\\1+2^{2m-y+1}-2^{3m-y}=1\end{cases}, \begin{cases}y-m-1=0\\2m-y+1=3m-y\end{cases},$$

Жавоб: (1;2)

3. (Белорусс математика олимпиадаси, Гомель ш., 2012 йй) Барча (n,m) бутун сонларни топинг.

$$n^2+n+1=\left(m^2+m-3\right)\left(m^2-m+5\right).$$

Ечиш: $n^2+n+1=\left(m^2+m-3\right)\left(m^2-m+5\right)=m^4+m^2+8m-15.$

Ушбу тенгламадан $n^2+n-\left(m^4+m^2+8m-16\right)=0.$ n га нисбатан квадрат тенгламани ечиб,

$D=4m^4+4m^2+32-63=\left(2m^2+2\right)^2-4(m-1)^2-59<\left(2m^2+2\right)^2$ барча $m>2$ натурал сонлар учун.

$$D=4m^4+4m^2+32-63=\left(2m^2+1\right)^2+32(m-2)>\left(2m^2+1\right)^2$$

$n^2+n-\left(m^4+m^2+8m-16\right)=0$ тенгламанинг натурал ечимлари $m=1$, $m=2$.

$m=1$ бўлса, $n^2+n+6=0$, бундан $n=-2$ ёки $n=-3$.

$m=2$ бўлса, $n^2+n-20=0$, бундан $n=-5$ ёки $n=4$.

Жавоб: (4;2)

3.3. Бир ўзгарувчининг бошқа ўзгарувчига ифодалаш ва касрнинг бутун қисмини ажратиб кўрсатишга асосланган усул

1. $x+xy-y-2=0$. Тенгламанинг бутун ечимини топинг.

Ечиш: y ни x орқали ифодалаймиз.

$$y(x-1)=2-x^2,$$

$$y=\frac{2-x^2}{x-1}=-\frac{x^2-2}{x-1}=-\frac{\left(x^2-1\right)-1}{x-1}=-\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}+\frac{1}{x-1}=$$

$$=-(x+1)+\frac{1}{x-1}, (x\neq 1).$$

x,y бутун сонлар, у ҳолда $\frac{1}{x-1}$ бутун сон бўлиши шарт. Яъни x-1 = ±1.

$$1)\begin{cases} x-1=-1 \\ y=-x-1-1; \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ x=-2; \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} x-1=1 \\ y=-x-1+1; \end{cases} \begin{cases} x=2 \\ y=-2; \end{cases}$$

Жавоб: (0;-2), (2;-2)

2. Тенгламанинг бутун ечимларини топинг:

$$3x+2y=7.$$

Ечиш: $2(x+y)=7-x$, кўринишда ёзиб, 7-x, 2 га каррали, яъни 7-x=2k, $k \in Z$. Демак, x=7-2k , дастлабки тенгламадан y=3k-7 ни топиб оламиз. Бундан келиб чиқадики, ҳамма жуфтликлар (7-2k;3k-7), $k \in Z$ дан иборат.

Жавоб: (7-2k;3k-7).

2. (Сиртқи физика-математика олимпиадаси Москва ш.)

Тенгламалар системасининг бутун ечимларини топинг:

$$\begin{cases} x^2+y-z=0 \\ x+y^2-z^2+6=0. \end{cases}$$

Ечиш: Системани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз.

$$\begin{cases} x^2+y=z \\ x+y^2+6=z^2. \end{cases}$$

У холда, $(x^2+y^2)=y^2+x+6$ ёки $x(x^3+2xy-1)=6$. Бундан x 6 га бўлинади, x=±1;±2;±3;±6. Бизга қуйидаги қийматлар мос тушади. x=±1;2;3;-6.

Агар x=-1, y =2, z=3; x=1, y=3, z=4; x=2, y=-1, z=3; x=3, y=-4, z=5; x=-6, y=-18, z=18

Жавоб: (1;3;4), (-1;2;3), (3;-4;5), (-6;-18;18).

3.4. Тўлиқ квадратни ажратиб кўрсатишга асосланган усул

1. Тенгламанинг барча бутун ечимларини топинг:

$$x^2-6xy+13y^2=29.$$

Ечиш: Тенгламанинг чап томонини тўлиқ квадратга кўтарамиз.

$$x^2-6xy+13y^2=(x^2-6xy+9y^2)+4y^2=(x-3y)^2+(2)^2=29.$$

Демак, $(2y)^2 \le 29$.

$y=0;\pm1;\pm2$.

1. $y=0.(x-0)^2=29$. Бутун ечимга эга эмас.
2. y=-1; (x+3)^2+4=29; (x+3)^2=25; x+3=5 ёки x+3=-5;
   x=2 ёки x=-8.
3. y=1; (x+3)^2+4=29; (x-3)^2=25; x-3=5 ёки x-3=-5;
   x=8 ёки x=-2.
4. y=-2; (x+6)^2+16=29; (x+6)^2=13;
   Бутун ечимга эга эмас.
5. y=2; (x-6)^2+16=29; (x-6)^2=13. Бутун ечими йўк.

Жавоб: (2;-1), (-8;-1), (8;1), (-2;1).

3.5. Икки ўзгарувчили тенгламани бир ўзгарувчига нисбатан квадратга кўтариб ечиш усули

1. $5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2=0$. тенгламанинг бутун ечимини топинг.

Ечиш: x га нисбатан квадрат тенгламани қараймиз.

$$5x^2+8(y-2)x+5y^2+2y+2=0.$$

$$D=(8y-2)^2-4\cdot5(5y^2+2y+2)=64y^2-32y+4=-100y^2-40y-40=$$

$$=-36(y^2+2y+1)=-36(y+1)^2.$$

Тенглама ечимга эга бўлиши учун, D=0.

$$-36(y+1)^2=0.$$

y=-1 бўлса, у холда x=1.

Жавоб: (1;-1)

3.6. Тенглама ифодасини баҳолашга асосланган усул

1. (Ўқувчилар учун Белорусс математика олимпиадаси, охирги тур, Гомель ш., 2011 йй). Тенгламанинг учлик натурал (x,y,z) ечимларини топинг:

$$3^x+7^y=4^z.$$

Ечиш: z=0, тенглама бутун ечимга эга эмас. z=1 бўлса, y=0, x=1. z=2 бўлса, y=1, x=2.

z≥3 бўлсин. У ҳолда, $(3^x+7^y)\vdots8$.x-жуфт дейлик. 3^x-ни 8 га бўлсак 3 қолдиқ колади. 7^y ни 8 га бўлганда 1 ёки 7 қолдиқ колади, у ҳолда 3^x+7^y , 8 га бўлинмайди. $x=2a$ манфий бўлмаган a учун, у ҳолда

$7^y=4^z-3^x=(2^z-3^a)(2^z+3^a)$. (2^z-3^a) *ва* (2^z+3^a) 7 сонининг даражасидир. $(2^z+3^a)>1$, у ҳолда $(2^z+3^a)\vdots 7$. Демак, $((2^z-3^a)+(2^z+3^a))\vdots 7$, $(2\cdot 2^z)\vdots 7$, мумкин эмас. Шунинг учун, $(2^z-3^a)=1$, яъни $2^z-1=3^a$. z=2c учун, c манфий бўлмаган бутун сон. У ҳолда, $4^c-3^a=1$. a=1 бўлганда, c=1 ни топамиз ва қуйидаги ечимларга эга бўламиз. x=1, z=2, y=1. Агар, a>1, у ҳолда $4^c=3^a+1$ ни 9 га бўлганда 1 қолдиқ қолади. Шундай қилиб, $3^a=4^c-1$ 7 га қолдиқсиз бўлиниши керак. Қарама-қаршиликка келдик. Демак, икки ечимдан бошқа ечим йўқ.

Жавоб: (1;0;1) ва (2;1;2).

3.7. Евклид алгоритми ёрдамида Диофант тенгламасини ечиш

1. Тенгламани ечинг. 24x-17y=2.

Ечиш: (24;17;2)=1. Бу Диофант тенглама, ЭКУБ(24,17)=1. Евклид алгоритмидан фойдаланиб, (x₀, y₀) хусусий ечимларини топамиз:

$\frac{24}{17}\Rightarrow 24=17\cdot 1+7;$

$17=7\cdot 2+3;$

$7=3\cdot 2+1;$

$3=1\cdot 3+0.$

ЭКУБда чизиқли ифодасини аниқлаймиз:

1=7-3·2=7-(17-7·2)·2=7-17·2+7·4+5·7-2·17=5·(24-17·1)-2·17=5·24-5·17-2·17=5·24-7·17=24·5-17·7.

24·5-17·7=1;

24·10-17·14=2;

$$x_0=10, y_0=14;\begin{cases}x=10-17t,\\ y=14-2t,\end{cases} t\in Z.$$

Жавоб: *(10-17t, 14-24t), t∈Z.*

3.8. Занжирли каср ёрдамида Диофант тенгламасини ечиш

1.Тенгламанинг бутун ечимларини топинг.

127x-52y+1=0

Ечиш: $\frac{127}{52}$ ни занжир касрлар ёрдамида бўламиз.

$$\frac{127}{52}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}.$$

Ҳосил бўлган тенглик узлуксиз каср ёки чекли занжир каср деб аталади. Бу занжир касрнинг охирги бўғинини олиб ташлаб, қуйидаги янги касрни хосил қиламиз: $\frac{127}{52}$:

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1}}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}=2+\frac{4}{9}=\frac{22}{9},$$

$$\frac{127}{52}-\frac{22}{9}=\frac{1143-1144}{52\cdot 9}.$$

Шу билан, 127·9-52·22+1=0 хосил қиламиз. Бундан кўриниб турибдики, x=9, y=22 лар тенгламанинг хусусий ечимлари экан.

Умумий ечими: $x=9+52t, y=22+127t\,(t=0,\pm 1,\pm 2,...)$.

3.9. Таққослаш ёрдамида Диофант тенгламасини ечиш

1. Тенгламани ечинг.

5x-7y=6.

Ечиш: (5,7,6)=1 - Диофант тенглама, бунда (5,7)=1, у ҳолда, *∃x;y∈Z* - Диофант тенгламанинг ечими.

$y=\frac{5x-7}{6}\in Z\Leftrightarrow\frac{5x-6}{7}\Leftrightarrow 5x\equiv 6(\mathrm{mod}\,7)$, (5,6)=1, у ҳолда таққослама ягона ечимга эга бўлади.

$$5x\equiv 20(\mathrm{mod}\,7),$$
$$x\equiv 4(\mathrm{mod}\,7),$$
$$x=4+7t, t\in Z.$$
$$y=\frac{5\cdot(4+7t)-6}{7}=2+5t, t\in Z.$$
$$\begin{cases}x=4+7t,\\ y=2+5t,\end{cases} t\in Z.$$

Жавоб: (4+7*t*, 2+5*t*), *t∈Z*.

3.10. Пелля тенгламаси

Иккинчи даражали Диофант тенгламалари Пелля тенгламаси дейилади (бундай тенглама аникланмаган Ферма тенгламаси деб хам аталади), $x^2-\alpha y^2=1$, бунда α-мусбат бутун сон, тўлик квадратга келмайди. Ҳар бир Пелля тенгламаси (±1;0) ечимга эга бўлиб, тривиал деб аталади. Қолган барча ечимлар тривиал эмас. Пелля тенгламаси чексиз кўп ечимга эга. Пелля тенгламаси ечимининг бир нечта усуллари бор.

1-ҳол. Формулага асосланиб ҳисоблаш усули.

$$\begin{cases}\left(x_0+\sqrt{a}y_0\right)^n = x_n+\sqrt{a}y_n, \\ \left(x_0-\sqrt{a}y_0\right)^n = x_n-\sqrt{a}y_n\end{cases}$$

Икки ўзгарувчили $x_0+\sqrt{a}y_0$ ни *n*-даражага кўтариш асосида ҳамма ечимлари топилади. Бу усул ечимини топишда “қўлда ҳисоблаш” орқали қулай, чунки бутун сонлар билан ишлаш керак, “кам” операциялар бажарилади энг кичик ечимлардан ташқари ҳеч қандай маълумот талаб этилмайди. Аммо компьютерда амалга оширишда муаммолар вужудга келади. Биринчидан, намоён қилиш мураккаблигидир. Кўпгина қўшимча ўзгарувчиларни шакллантириш, Паскаль учбурчаги ва *n+1* йиғиндисини киритиш, даражага “катта” рақамларни киритиш, бунинг учун кўп дастурлаш тилларида алоҳида функция шакллантириш талаб этилади. Иккинчидан, *n+1* ни “катта” рақамлар (агарда a>4294967295 бўлса, a рақамини “катта” деб атаймиз) билан ишлаш лозим, бунинг учун янги типдаги рақамлар яратиш ва улар учун зарур операцияларни (умумийлаштириш, кўпайтириш, фарқлаш, бўлиш, сақлаш) ишлаб чиқиш талаб этилади. Ундан ташқари энг кичик ечимни топиш талаб этилади, бу эса муаммодир.

2-ҳол. Иккинчи усул “гиперболик буриш” амалига асосланган, графикдаги бир бутун нуқтани кейингисига қуйидаги формула асосида ўтказиш:

$$\begin{cases}x_n = x_0x_{n-1}+ay_0y_{n-1}, \\ y_n = x_0y_{n-1}+y_0x_{n-1}.\end{cases}$$

Бу формула математик индукция ёрдамида осон исботланади.

3-ҳол. (Ҳинд усули). Даставвал иккита бутун сонни олиб, Пелля тенгламасининг ўнг томонига қўйиб, натижа топилади. Шундай сонни олиш keракки, ўнг томон бирга яқинроқ бўлиши керак. Кейинчалик ҳосил бўлган тенгламани Пелля тенгламасига кўпайтирилади. Қавслар очилади, тўлиқ квадратга келтирилади ва тенгсизликни қаноатлантирувчи бошқа сон танланади. Тенгламанинг иккала томони уларнинг ЭКУБига қисқартирилади ва яна Пелля тенгламасига кўпайтирилади ва ҳоказо, токи ўнг томони бирга тенг бўлмагунича. Бу алгоритм жуда ҳам мураккаб бўлиб, ўзгарувчилар бажаришини текшириш тўпламида талаб қилинади ва жуда кўп вақтни олади. Қўлда ҳисоблаганда кичик алгоритмнинг ўзидаёқ хатога йўл қўйиш мумкин.

4-ҳол. (Инглиз усули). Занжирли каср асосида алгоритмнинг бажарилиш тартиби қуйидагича: $\sqrt{a}$ ни иккинчи тўлиқ бўлинмадан бошлаб даврий бўлган занжирли касрга ёямиз. Шундай *k* даврни топамизки, уни *kn* тартибда ҳисоблайди, бунда *n* энг кичик натурал сон, *kn* эса жуфт. Пелля тенгламасининг ҳамма ечимлари мос касрнинг сурат ва махражларидан иборат. Ҳинд ва инглиз усулларини занжирли касрларда қўллаш тўхтатилган.

Мисол. (МДУ –олимпиадаси 2012 й.) Пелля тенгламасини ечинг.

$$x^2\text{-}8y^2=1.$$

Ечиш:

1) (x_0,y_0) кичик сонни топамиз: $\sqrt{8}=2\sqrt{2}=[2,1,4,1,4,....];$

2) $S=2;$

3) $\frac{P_{S-1}}{Q_{S-1}}=\frac{P_1}{Q_1}=2+\frac{1}{1}=\frac{3}{1}$, бундан $x_0=3$, $y_0=1$.

Қолган ечимларни қуйидаги формула ёрдамида топамиз.

$$x_n=\frac{1}{2}\left[\left(x_0+\sqrt{d}y_0\right)^n+\left(x_0-\sqrt{d}y_0\right)^n\right],$$

$$y_n=\frac{1}{2\sqrt{d}}\left[\left(x_0+\sqrt{d}y_0\right)^n+\left(x_0-\sqrt{d}y_0\right)^n\right].$$

3.11. Каталан тенгламаси

1842 йил Бельгия математиги Эжен Шарл Каталан қуйидаги тасдиқни исботлаган: $x^a-y^b=1, бунда, x, y, a, b>1$ натурал сонларда ягона ечимга эга: x=3, y=2, a=2, b=3. (Каталан гипотезаси).

3.12. Марков тенгламаси

1879 йилда 23 ёшли Петербург университети талабаси Марков ўзининг “Мусбат аниқланган бинар квадратик формалар” мавзусидаги магистрлик диссертация ишида ўрганган

$$x^2+y^2+z^2=3xyz$$

тенгламасига Марков тенгламаси дейилади.

3.13. Икки ёки ундан юқори бўлган Диофант тенгламаларини ечиш усули

$$x^2+y^2=z^2$$

кўринишдаги тенгламалар.

1. (Москва олимпиадаси) Бутун сонларда ечинг.

$$6x^2+5y^2=74.$$

Ечиш: Тенгламани қуйидагича ёзиб оламиз: $6x^2-24=50-5y^2$, яъни $6(x^2-4)=5(10-y^2)$. Бундан, $x^2-4=5u, 10-y^2=6v$ ва u=v. Шундай қилиб,

$$x^2=4+5u;\ 4+5u\geq 0,\ \text{бундан}\ u\geq -\frac{4}{5};$$

$$10-y^2=6v;\ 10-y^2\geq 0,\ \text{бундан}\ u\geq -\frac{5}{3};$$

демак u=0 ёки u=1.

u=v=0 бўлса, 10=y^2, бунда y- бутун сон, нотўғри.

u=v=1 га тенг бўлсин, у ҳолда $x^2=9, y^2=4$.

Жавоб: (3;2), (3;-2), (-3;2), (-3;-2).

3.14 Диофант тенгламасининг баъзи тадбиқларига доир ечимлари

1. Тенгламани ечинг.

$\cos 3x+\cos 4x=2.$

Ечиш: $\cos 3x\leq 1; \cos 4x\leq 1,$ у ҳолда берилган тенглама қуйидаги тенгламалар системасини қаноатлантиради:

$$\begin{cases}\cos 3x=1,\\ \cos 4x=1,\end{cases}\quad \begin{cases}3x=2\pi k,\\ 4x=2\pi n,\end{cases}\quad \begin{cases}x=\dfrac{2\pi k}{3}, k\in Z,\\ x=\dfrac{n\pi}{2}, n\in Z.\end{cases}$$

Охирги системанинг кесишмасидан: $\frac{2\pi k}{3}=\frac{n\pi}{2}\Leftrightarrow 4\pi k=3n\pi\Leftrightarrow 4k=3n, n\in Z.$

$4k=3n$ тенгламадан қуйидаги ечимларга эга бўламиз: $k=3t, n=4t, t\in Z$ ва тенгламалар системасининг умумий ечимидан қуйидаги тенгламага келамиз. $x=\frac{2}{3}=\frac{2\pi 3t}{3}=2\pi t, t\in Z.$

Жавоб: $2\pi t, t\in Z.$

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МАСАЛАЛАР

I. БОБ. БУТУН СОНЛАР ХАЛҚАСИДА БЎЛИНИШ МУНОСАБАТИ

1 - §

1. Агар бўлинувчи ва бўлинма берилган бўлса, бўлувчи ва қолдиқни топинг.

а) 25 ва 3; б) – 30 ва – 4.

2*. Исботланг.

а) тоқ натурал соннинг квадратини 8 га бўлганда 1 қолдиқ қолади;

б) кетма-кет икки натурал сон квадратлари йиғиндисини 4 га бўлганда 1 қолдиқ қолади.

3*. 15 сони ҳар қандай натурал даражага кўтарилиб, 7 га бўлинса 1 қолдиқ қолишини исботланг.

4*. Агар $mn+pq$ $m-p$ га бўлинса, у ҳолда $mq+np$ ҳам $m-p$ га бўлинишини кўрсатинг, бу ерда $m, n, p, q \in Z$.

5*. a, b, c, d, n – бутун сонлар. $ad-bc$, $a-b$ сонлар n га бўлинади ва b, n сонлар бирдан фарқли натурал бўлувчиларга эга эмас. c - b ни n га бўлинишини исботланг.

6. Ихтиёрий бутун n сон учун исботланг:

а) n^3-n сон 3 га бўлинади; б) n^7-n сон 7 га бўлинади;

с*) n^5-n сон 30 га бўлинади.

7*. Олти хонали сон 5 билан тугайди, агар бу сонни чап томонга биринчи ўринга ўтказсак, у ҳолда берилган сондан 4 марта катта сон ҳосил бўлади. Шу сонни топинг.

8*. $n(n+1)(2n+1)(n\in N)$ сонни 6 га бўлинишини исботланг.

9*. Каср соннинг сурати, икки тоқ соннинг квадратлари айирмаси, махражи эса шу сонлар квадратлари йиғиндисига тенг. Шу каср сурат ва махражини иккига қисқартириш мумкин, 4 га эса қисқармаслигини кўрсатинг.

10*. Тўла квадрат бўлган тўрт хонали соннинг минглар ва ўнлар хонасидаги рақамлари бир хил, юзлар хонасидаги рақам бирлик рақамдан 1 га катта. Шу сонни топинг.

11*. Кетма-кет жойлашган бешта бутун сонлар квадратларининг йиғиндиси тўла квадрат бўлмаслигини исботланг.

12*. Агар бирор сонни 9 га бўлганда қолдиқ 2, 3, 5, 6, 8 сонлардан бирортаси бўлса, шу сон тўла квадрат бўла олмаслигини кўрсатинг.

13. $S_n=7+77+777+\ldots77\ldots7$ 7 кетма-кетликнинг + 77 + 777 + ... + 77...7 n -та ҳадлари йиғиндисини топинг.

14*. 16 сонининг рақамлари ўртасига 15 сони ёзилган, 1156 сони ўртасига яна 15 ёзилган ва ҳоказо. Шу сонлар тўла квадрат бўлишини кўрсатинг.

15*. Ҳар қандай натурал m ва n лар учун $mn(m^4-n^4)$ сонни 30 га бўлинишини исботланг.

16*. Ҳеч қандай бутун x учун $3x^2+2$ сон тўла квадрат бўла олмаслигини кўрсатинг.

17*. $3^n(n\in N)$ та бир хил рақамлардан тузилган натурал сонни 3^n га бўлинишини исботланг.

2 - §

18. Евклид алгоритми ёрдамида сонларнинг ЭКУБ ва ЭКУКини топинг.

а) 546 ва 231; б) 1001 ва 6253; с) 2737, 9163 ва 9639;

д) 420, 126 ва 525; е) 529, 1541 ва 1817.

19. Сонларни туб кўпайтувчиларга ажратиб сонларнинг ЭКУБини топинг.

а) 360 ва 504; б) 220 ва 6600; с) 187 ва 533;

д) 420, 126 ва 525; е) 529, 1541 ва 1817.

20*. Агар $a=cq+r, b=cq_1+r_1;$бўлиб, a,b,q,q_1,r,r_1 - бутун номанфий сонлар; с – бутун мусбат сон бўлса, $(a,b,c)=(c,r,r_1)$ тенгликни исботланг. Бу тенгликдан (a,b,c) ни топиш қоидасини келтириб чиқаринг ва шу қоидани n та сон учун умумлаштиринг.

21. 20-масаладан фойдаланиб, қуйидаги сонларнинг ЭКУБини топинг.

а) 299, 391 ва 667; б) 588, 2058 ва 2849;

с) 31605, 13524 , 12915 ва 11067.

22. $[a,b]=\dfrac{ab}{(a,b)}$ формуладан фойдаланиб, қуйидаги сонларнинг ЭКУКи ни топинг.

а) 252 ва 468; б) 279 ва 372; с) 178 ва 381;

д) 299 ва 234; е) 493 ва 221.

23*. Агар (a,b)=1 бўлса, қуйидагиларни топинг:

а) $((a,b), [a,b])$; б) $(a+b, ab)$; с) $(a+b, [a,b])$.

24*. Икки сон йиғиндиси 667, ЭКУКи ва ЭКУБи нисбатлари 120 га тенг бўлса, шу сонларни топинг.

25*. Икки соннинг ҳар бирини уларнинг ЭКУБига бўлганда ҳосил бўлган бўлинмалар йиғиндиси 18 га тенг. Сонларнинг ЭКУКи 975 га тенг бўлса, шу сонларни топинг.

26*. $a=899$, $b=493$ берилган. $d=(a,b)$ ни топинг ва шундай x ва y ларни аниқлангки, $d=ax+by$ кўринишда ифодалаш мумкин бўлсин.

27. 26-масалани қуйидаги жуфтликлар учун бажаринг:

а) $a=1445$, $b=629$; б) $a=903$, $b=731$; с) $a=1786$, $b=705$.

28*. Системаларни натурал ечимларини топинг:

а) $\begin{cases}(x,y)=45\\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{11}{7}\end{cases}$; б) $\begin{cases}(x,y)=20\\ xy=8400\end{cases}$;

с) $\begin{cases}(x,y)=28\\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{9}\end{cases}$; д) $\begin{cases}xy=20\\ [x,y]=10\end{cases}$

29*. Агар a, b, c – тоқ сонлар бўлса, $(a,b,c)=\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{a+c}{2},\dfrac{b+c}{2}\right)$ ни исботланг.

30*. Исботланг:

а) $[a,b,c]=\dfrac{abc(a,b,c)}{(a,b)(a,c)(b,c)}$;

б) $(a,b)(a,c)(b,c)[a,b][a,c][b,c]=a^2b^2c^2$.

31*. $N=10a+b(0\le b\le 9)$ натурал сон $m=10q+1$ сонга бўлиниши учун фақат ва фақат $a-bq;m$ га бўлиниши кифоя эканлигини исботланг.

32*. Ҳисобланг.

а) $(n,2n+1)$; б) $(10n+9, n+1)$; с) $(3n+1, 10n+3)$.

33*. $N=10a+b$ $(0\le b\le 9)$ натурал сон m=$10q$+9 га бўлиниши учун фақат ва фақат $a+b(q+1)$ ни m га бўлиниши кифоя эканлигини исботланг.

34. Ихтиёрий натурал a ва b лар учун:

$$(a,b)=(5a+3b,13a+8b)$$

тенглик ўринли эканлигини исботланг.

35. Агар (a,b) = 1 бўлса, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a+b}$– қисқармас каср эканлигини исботланг.

3 - §

36. Сонлар орасида жойлашган туб сонларни топинг.

а) 200 ва 220; б) 2540 ва 2570; с) 1200 ва 1250.

37*. $n > 1$ натурал сонлар учун m^4+4 ва n^4+n^2+1 мураккаб сонлар бўлишини исботланг.

38*. Қандай туб p сон учун $4p^2+1$ ва $6p^2+1$ туб сонлар бўлади.

39*. Қандай туб p сон учун $p + 10$ ва $p + 14$ туб сонлар бўлади.

40*. Агар $a > 3$, натурал m ва n сонларни 3 га бўлганда мос равишда 1 ва 2 га тенг қолдиққа эга бўлса, a, $a + m$, $a + n$ сонлар бир вақтда туб бўла олмаслигини кўрсатинг.

41*. n ва $n!$ ($n > 2$) сонлар орасида ҳеч бўлмаганда битта туб сон борлигини исботланг.

42*. Барча $2p + 1$ кўринишдаги бутун сонлар ичида битта сон тўла куб бўлишини исботланг, бу ерда p – туб сон.

43*. Агар туб сонларни 5 туб сондан бошлаб номерлаб чиқилса, у ҳолда ҳар бир туб сон ўзини учланган рақамидан катта бўлишини исботланг.

44*. Агар $p > 5$ туб сон бўлса, унинг квадратини 30 га бўлганда қолдиқ 1 ёки 19 бўлишини кўрсатинг.

45*. p ва q – 3 дан катта туб сонлар бўлса, $p^2 - q^2$ сон 24 га каррали бўлишини кўрсатинг.

46*. Сонлар бир вақтда туб сон бўла олмаслигини исботланг:

а) $p + 5$ ва $p + 10$;

б) $p, p + 2$ ва $p + 5$.

47*. Агар тоқ p сонни икки сон квадратлари айирмаси шаклида ягона равишда ифодалаш мумкин бўлса, у туб, акс ҳолда мураккаб бўлишини исботланг.

48*. 47 масала ечимидан фойдаланиб тоқ сонларни кўпайтувчиларга ажратиш усулини келтириб чиқаринг:

а) 6643; б) 1769; с) 3551; д) 6497 сонларни кўпайтувчиларга ажратинг.

49*. Агар N сон икки сонлар квадратлари йиғиндиси шаклида икки хил ифодаланса, яъни $N=a^2+b^2=c^2+d^2$, у ҳолда N мураккаб сон бўлишини исботланг.

50*. $235^2 + 972^2$ сонни кўпайтувчиларга ажратинг.

51*. $3^{10} + 3^5 + 1$ сонни кўпайтувчиларга ажратинг.

52*. Агар $1+2^к$ туб сон бўлса, $к = 0$ ёки $к = 2^n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) бўлишини исботланг.

53*. Ўзаро туб a,b сонлар учун $a^\alpha+b^\beta$ туб сон бўлса, $(\alpha, \beta) = 1$ ёки $(\alpha,\beta)=2^k$ ўринли бўлишини кўрсатинг.

54. Агар 2^n-1 туб сон бўлса, n – туб сон эканлигини кўрсатинг.

4 - §

55. Касрларни узлуксиз касрларга ёйинг.

$a)2,71828; b)\frac{103993}{33102}; c)\frac{99}{170}; d)\frac{355}{113}.$

56. Касрларни узлуксиз касрларга ёйинг.

$a)\frac{247}{74}; b)\frac{77}{187}; c)\frac{333}{100}; d)\frac{103993}{3302}.$

57. Узлуксиз касрларга ёйилмасидан фойдаланиб, касрларни қисқартиринг.

$a)\frac{3953}{871}; b)\frac{6059}{1241}; c)\frac{6821}{2147}; d)\frac{10027}{32671}; e)\frac{3653}{3107}.$

58. Берилган касрни узлуксиз касрга ёйинг ва уни $\frac{P_4}{Q_4}$ каср билан алмаштиринг. Алмаштириш хатосини топинг ва хатоси кўрсатилган ҳолда тақрибий алмаштиришга мос тенглигини ёзинг.

$a)\frac{29}{37}; b)\frac{648}{385}; c)\frac{571}{359}.$

59. Кўрсатилган чекли узлуксиз касрларга мос оддий қисқармайдиган касрларни топинг.

$\frac{a}{b}=(2,3,1,4); b)\frac{a}{b}=(1,1,2,3,4); c)\frac{a}{b}=(1,3,2,4,3,1,1,1,5);$

$d)\frac{a}{b}=(2,1,1,2,1,6,2,5); e)\frac{a}{b}=(-2,3,1,5,4,2); f)\frac{a}{b}=(0,1,3,2,2,2,1,1,7).$

60. Тенгламани ечинг.

$a)(x,2,3,4)=\frac{73}{30}; b)(2,1,2,x)=\frac{19}{7}.$

5 - §

61. Ҳисобланг.

$a)[-2,7]; b)\left[2+\sqrt[3]{987}\right]; c)\left[\frac{7-\sqrt{21}}{2}\right]; d)\left[\frac{10}{3+\sqrt{3}}\right];$

62*. Барча ҳақиқий x ва y лар учун $[x + y] \geq [x] + [y]$ тўғрилигини исботланг.

63*. $[ax] = m$ тенгламанинг ечимини топинг, бу ерда $a \neq 0, x \in P$.

64*. m нинг қандай бутун мусбат қиймати учун $[12{,}4 \cdot m] = 86$ тенглик ўринли бўлади.

65*. Агар $p > 2$ туб сон бўлса, $\left[\frac{p}{4}\right]$ нинг қиймати $\frac{p-1}{4}$ ёки $\frac{p-1}{4}$ га тенглигини исботланг.

66*. a сонни m га бўлганда қолдиқ r бўлса, $\left[\frac{a}{m}\right] = \frac{a-r}{m}$ тенгликни исботланг.

67*. Агар m тоқ сон бўлса, $\left[\frac{m}{2}\right] = \frac{m-1}{2}$ ни исботланг.

68*. Тенгламани ечинг.

$a)\left[x^2\right] = 2; b)\left[3x^2 - x\right] = x+1; c)\left[x\right] = \frac{3}{4}x; d)\left[x^2\right] = x.$

69*. 10^6 ва 10^7 сонлар орасида 786 га каррали бўлган нечта натурал сон бор?

70*. 1000 дан кичик натурал сонлардан нечтаси 5 ва 7 га бўлинади?

71*. 100 дан катта бўлмаган натурал сонлардан нечтаси 36 билан ўзаро туб?

72. 1000! нинг каноник ёйилмасида 11 нечанчи даражада келади?

73. 1964! сони нечта нол билан тугайди?

74. 2311 дан ошмайдиган ва 5, 7, 13, 17 ларга бўлинмайдиган бутун мусбат сонлар сони нечта?

75. 12317 дан катта бўлмаган ва 1575 билан ўзаро туб бўлган бутун мусбат сонлар сонини топинг.

76. 1000 дан катта бўлмаган ва 363 билан ўзаро туб бўлган бутун мусбат сонлар сонини топинг.

77. r^n ! нинг каноник ёйилмасига p туб сон нечанчи даражада келади?

78. Сонларнинг каноник ёйилмасини топинг.

а) 10! ; б) 15! ; с) 20! ; д) 25! ; е) 30! .

79. $\frac{20!}{10!10!}$ ни каноник ёйилмасини топинг.

80*. α нинг шундай энг катта қийматини топингки, бунда

$N = \frac{101 \cdot 102 \cdot \ldots \cdot 1000}{7^\alpha}$ – бутун сон бўлсин.

81*. $(2m+1)!!$ нинг каноник ёйилмасида p туб сон нечанчи даражада бўлишини аниқланг.

82*. $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$ эгри чизиқли трапецияда бутун координатали нуқталар сони нечта? Бу ерда a ва b – натурал сонлар; $f(x)$ – берилган кесмада узлуксиз ва номанфий функция.

83. $x^2 + y^2 = 6{,}52$ доирада нечта бутун координатали нуқта бор?

84*. Агар $(a, 4) = 1$ бўлса,

$\left[\frac{a}{4}\right] + \left[\frac{2a}{4}\right] + \left[\frac{3a}{4}\right] = \frac{3(a-1)}{2}$ тенглик тўғрилигини исботланг.

85*. Агар $(a, m) = 1, m \geq 2, a \geq 2$ бўлса,

$\left[\frac{a}{m}\right] + \left[\frac{2a}{m}\right] + \ldots + \left[\frac{(m-1)a}{m}\right] = \frac{(m-1)(a-1)}{2}$ тенглик тўғрилигини исботланг.

86*. x нинг қандай қийматларида $[x] - 2\left[\frac{x}{2}\right] = 1$ тенглик ўринли.

87*. $\left[\frac{x}{m}\right] = \left[\frac{x}{m-1}\right]$ тенгламани ечинг, бу ерда $m = 2, 3, 4 \ldots$.

88. Қандай шартлар бажарилганда $[ax^2 + bx + c] = d$ тенглама ечимга эга бўлади, бу ерда $a \neq 0$, $d \in Z$.

89. Ҳисобланг. a)$\{2{,}6\}$; b)$\{\frac{8}{3}\}$; c))$\{7\}$; d) $\{-2\frac{1}{2}\}$.

90. Берилган сонларнинг натурал бўлувчилари ва улар йиғиндисини топинг.

а) 375 ; б) 720 ; с) 957 ; д) 988 ; е) 990 ; ф) 1200.

91. Берилган сонларнинг барча бўлувчиларини топинг:

а) 360 ; б) 375.

92*. $S(m) = 2m - 1$ шарти қаноатлантирувчи натурал m сонлар чексиз кўплигини исботланг.

93*. Агар $(m,n) > 1$ бўлса, $\tau(mn)$ ёки $\tau(m)\,\tau(n)$ лардан қайси бири катта, $S(mn)$ ва $S(m)\,S(n)$ ларчи?

94. Агар $m = 1968$ бўлса, $\tau(m)$, $S(m)$, $\delta(m)$ ларни топинг.

95*. Ўзининг натурал бўлувчилари кўпайтмасига тенг бўлган барча натурал сонлар тўплами барча туб сонлар тўплами билан устма-уст тушишини исботланг.

96*. a натурал соннинг барча натурал бўлувчиларининг n-даражаси ($n \in Z$) йиғиндиси $S_n(a)$ формуласини келтириб чиқаринг.

97. Ҳисобланг. а) $S_2(12)$; б) $S_2(18)$; с) $S_2(16)$.

98. 28, 496, 8128 сонлар мукаммал, яъни ўзининг бўлувчилари йиғиндисининг ярмига тенглигини исботланг.

99*. *Евклид теоремасини* исботланг: 2^{α} $(2^{\alpha+1}$ - 1) кўринишдаги жуфт натурал сонлар мукаммал сонлардир, бу ерда $2^{\alpha+1} - 1$ – туб сон.

100*. *Эйлер теоремасини* исботланг: 2^{α} $(2^{\alpha+1}$ - 1) кўринишдаги натурал сонлар, ягона мукаммал жуфт сонлардир, бу ерда $2^{\alpha+1} - 1$ – туб сон.

101*. *Ферма теоремаси*: $2^{\alpha}\cdot r_1 r_2$ кўринишдаги шундай энг кичик сон топингки, унинг барча бўлувчилари йиғиндиси ўзидан уч марта катта бўлсин, бу ерда r_1 ва r_2 – туб сонлар.

102*. Шундай сон топингки, унинг иккита туб бўлувчиси бўлиб, барча бўлувчиларининг сони 6 га, йиғиндиси эса 28 га тенг бўлсин.

103*. Натурал сон иккита туб бўлувчига эга. Шу сон квадратининг барча бўлувчилари сони 15 та бўлса, унинг куби нечта бўлувчига эга?

104*. Натурал сон иккита туб бўлувчига эга. Шу сон квадратининг барча бўлувчилари сони 81 та бўлса, унинг куби нечта бўлувчига эга?

105*. Исботланг.

$$N = \frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1} + d_n}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_{n-1}} + \frac{1}{d_n}},$$

бу ерда $d_1, d_2, \ldots, d_n$ – N соннинг барча бўлувчилари.

106*. Агар $N = a^{\alpha} b^{\beta} \ldots m^{\mu}$ $(a, b, \ldots, m \in Z)$ бўлса, шу сонни иккита сон кўпайтмаси шаклида неча хил ёзиш мумкин?

107*. $N = 2^{\alpha} 5^{\beta} 7^{\gamma}$ сон берилган. Агар $5N$, N дан кичик 8 та бўлувчига эга ва $8N$, N дан катта бўлса, N ни топинг.

108. $N = 2^{x} 3^{-y} 5^{z}$ сон берилган. Агар N ни 2 га бўлсак, янги сонннинг бўлувчилари N нинг бўлувчиларидан 30 та кам; агар N ни 3 га бўлсак, янги соннинг бўлувчилари N нинг бўлувчиларидан 35 та кам; агар N ни 5 га бўлсак, янги соннинг бўлувчиларидан 42 та кам. Шу сонни топинг.

109. Агар бирор сон тўла квадрат бўлиши учун фақат ва фақат унинг бўлувчилари сони тоқ бўлишини исботланг.

110. Қуйидагиларнинг аниқ қийматини ҳисобланг.

а) π (4); б) π (7); с) π (10); д) π (12); е) π (25);

ф) π (50); г) π (200); х) π (500).

111. $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$ формула ёрдамида қуйидагиларнинг тақрибий қиймати ва натижанинг нисбий хатосини топинг.

а) π (50), б) π (100); с) π (500).

112*. Чебышев тенгсизлиги ёрдамида $\frac{\pi(x)}{x} \to 0(x \ \to \ )$ни исботланг.

113*. Ихтиёрий p туб сон учун $\frac{\pi(p-1)}{p-1} < \frac{\pi(p)}{p}$ ўринли, лекин m – мураккаб сон бўлса, $\frac{\pi(m)}{m} < \frac{\pi(m-1)}{m-1}$ ўринли эканлигини кўрсатинг.

114. Топинг: $a)\varphi(375); b)\varphi(720); c)(988); d)\varphi(1200); e)\varphi(1500); f)\varphi(4320)$.

115. Кўпайтма қийматини топмасдан кўпайтувчиларнинг Эйлер функцияси қийматини топинг.

а) φ (5 · 7 · 13) ; б) φ (12 · 17); с) φ (11 · 14 · 15·); д) φ (990 · 1890).

116. 1 дан 120 гача сонлар интервалида 30 билан ўзаро туб бўлмаган сонлар нечта?

117*. Агар а = $3^{\alpha} 5^{\beta} 7^{\gamma}$ ва φ $(a) = 3600$ бўлса, a ни топинг.

118*. Агар $a = pq, p - q = 2$ ва φ $(a) = 120$ бўлса, a ни топинг.

Бу ерда p ва q – ҳар хил туб сонлар.

119*. Агар $a = p^2 q^2$ ва φ $(a) = 11424$ бўлса, a ни топинг.

Бу ерда p ва q – ҳар хил туб сонлар.

120*. Агар $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n} (\alpha_1 > 1, \alpha_2 > 1, \ldots, \alpha_n > 1)$ ва $\varphi(a) = 462000$ бўлса, a ни топинг.

121*. m дан кичик ва у сон билан ўзаро туб сонлар йиғиндиси $S = \frac{1}{2} m \cdot \varphi(m)$ формула ёрдамида ҳисобланишини исботланг.

122. $S = \frac{1}{2} a \cdot \varphi(a)$ формулани қуйидаги сонлар учун қўлланг:

а) 12; б) 18; с) 375.

123*. Исботланг.

а) $\varphi(2^{\alpha}) = 2^{\alpha} - 1$; б) $\varphi(p^{\alpha}) = \mathrm{p}^{\alpha-1} \varphi$ (р); с) $\varphi(a^{\alpha}) = a^{\alpha-1} \varphi(a)$, $a \in N$.

124. $\varphi(2a)$ ни $\varphi(a)$ ёки $2\varphi(a)$ га тенглигини исботланг. Шу сонлар ўринли бўладиган шартларни топинг.

125*. Исботланг. φ $(4n + 2) = \varphi$ $(2n + 1)$; b)

$$\varphi(4n) = \begin{cases} 2\varphi(n), агар\,(n,2) = 1 \\ 2\varphi(2n), агар\,(n,2) = 2 \end{cases}$$

126. Тенгламаларни ечинг. а) $\varphi\ (5^x) = 100$; б) $\varphi\ (7^x) = 294$; с) $\varphi\ (7^x) = 705894$; д) $\varphi\ (r^x) = r^{x-1}, x \in N$.

127. Берилган b махражли нечта тўғри кискармас мусбат касрлар мавжуд?

128. 129 масала ёрдамида махражлари қуйидагилар бўлган қисқармас мусбат касрлар сонини топинг.

а) 10; б) 16; с) 36; д) 72.

129. $\frac{a}{b}$ мусбат, тўғри кискармас каср бўлсин. Агар $b = 2$ дан $b = n$ гача кийматлар қабул қилса, бундай касрлар нечта?

130. 131 - масала шартида b: а) 2 дан 5 гача; б) 2 дан 10 гача; с) 2 дан 15 гача қийматлар қабул қилса, касрлар сонини топинг.

131*. 300 дан кичик натурал сонлар ичида 20 билан тенг умумий бўлувчига эга бўлган сонлар нечта?

132. 1665 дан кичик натурал сонлар ичида y билан 37 га тенг умумий бўлувчига эга бўлган сонлар нечта?

133. 1476 дан кичик натурал сонлар ичида y билан 41 га тенг умумий бўлувчига эга бўлган сонлар нечта?

134*. $a \geq 3$ лар учун $\varphi\ (a)$ нинг қиймати доимо жуфт сон бўлишини исботланг.

135*. Агар $\varphi\ (x) = a$ тенглама $x = m$ илдизга эга бўлса, $x = 2m$ ҳам тенглама илдизи бўлишини исботланг, бу ерда $(m,2) = 1$.

136*. $(m,n) > 1$ бўлса, $\varphi\ (mn)$ ёки $\varphi\ (m) \cdot \varphi\ (n)$ ларни солиштиринг.

137*. $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n) \cdot \frac{d}{\varphi(d)}$ тенгликни исботланг, бу ерда $(m,n)>1$.

138*. $\varphi(mn) = \varphi(\delta)\ \varphi(\mu)$ тенгликни исботланг, бу ерда $\delta=(m,n)$, $\mu=[m,n]$.

139. $\varphi(1)+\varphi(p)+\varphi(p^2)+\ldots+\varphi(p^\alpha)$, $\alpha \in N$ ни ҳисобланг.

140. $\varphi\left(\frac{a}{d_1}\right)+\varphi\left(\frac{a}{d_2}\right)+\ldots+\varphi\left(\frac{a}{d_k}\right)$ ни ҳисобланг, бу ерда $d_l - a$ нинг барча бўлувчилари?

141. Қуйидаги сонлар учун $\sum_{d|a}\varphi(d) = a$ тўғрилигини текширинг.

а) 80; б) 360; с) 375; д) 957; е) 2800.

142. Тенгламаларни ечинг. а) $\varphi\ (x) = 2^\alpha$; б) $\varphi\ (p^x) = 6 \cdot p^{x-2}$.

143. Тенгламаларни ечинг. а) $\varphi\ (x) = 14$; б) $\varphi\ (x) = 8$; с) $\varphi\ (x) = 12$.

144*. Тенгламани ечинг. $\varphi\ (2x) = \varphi\ (3x)$.

145. $\varphi\ (5x) = \varphi\ (7x)$ тенглама бутун сонлар тўпламида ечимга эга эмаслигини исботланг.

146. Тенгламаларни ечинг.

а) $\varphi\ (x) = \varphi\ (px)$;

б) $\varphi\ (px) = p\varphi\ (x)$;

с) $\varphi\ (p_1x) = \varphi\ (p_2x)$ (p_1, p_2 – турли туб сонлар).

147*. Тенгламани ечинг.

а) $\varphi(x) = \frac{x}{2}; \varphi(x) = \frac{x}{3}; \varphi(x) = \frac{x}{4}$;

148. $\varphi\left(p^x\right) = a$; тенгламани текширинг.

7 - §

149. Сонларни қўшинг.

a) $1001010_2 + 1101001_2$

b) $1543_6 + 42_6$

c) $65004_8 + 70645_8$

d) $7489(12)_{13} + 5762_{13}$

e) $43(10)(11)7_{12} + 3(10)6_{12} + 5(11)38_{12}$

f) $47(10)9_{11} + 84567_{11}$

g) $(12)724(11)(10)_{13} + 478(10)953_{13}$

150. Сонларни айиринг.

a) $10101011_2 - 110111_2$

b) $1131043_5 - 342144_5$

c) $23042_6 - 5354_6$

d) $783041_9 - 27605_9$

e) $46(10)37_{12} - 72(11)48_{12}$

f) $1(11)(10)9(10)_{13} - (12)(11)9(11)_{13}$

151. Сонларни кўпайтиринг.

a) $4203_5 \cdot 42_5$

b) $5034_6 \cdot 545_6$

c) $50624_7 \cdot 56_7$

d) $42(11)3_{12} \cdot 789_{12}$

e) $343224_7 \cdot 1256_7$

f) $258(10)3_{11} \cdot 56_{11}$

152. Сонларни бўлинг.

a) $111100011_2 : 10101_2$

b) $1141043_5 : 23_5$

c) $471222_8 : 27_8$

d) $51(10)3406_{11} : 548_{11}$

153. g сонлар тизимида $g\text{-}1$ бўлиниш белгисини бажаринг.

154. Юлдузчаларни рақамлар билан алмаштиринг бунда:

a) $7{*}8(10)5_2$ рақами 11 га бўлинсин;

b) $36{*}05$ рақами 6 га бўлинсин;

c) $51{*}2_6$ рақами 4 га бўлинсин;

d) $25{*}{*}_8$ рақами 32 га бўлинсин.

155. Бир саноқ системасидан бошқа саноқ системасига ўтишни амалга оширинг.

a) $37051_8 = x_6$; b) $42013_5 = x_7$; c) $890721 = x_8$; d) $45253_7 = x_{12}$;
e) $6785_9 = x_{12}$; *f*) $(11)89(10)_{12} = x_{14}$; g) $6276_8 = x_{13}$; i) $(10)983_{11} = x_{13}$.

156. m ва n ларни g асосли сонлар тизимида ёзинг ва m ни n га қолдиқли бўлинг.

a) $m = 54326_9,\ n = 35_7,\ g = 8$;

b) $m = 70463_8,\ n = 124_5,\ g = 7$;

c) $m = 23012_4,\ n = 158_9,\ g = 5$.

II. БОБ. ТАҚҚОСЛАМАЛАР НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

157. Қуйидаги таққосламалардан қайсилари тўғри:

a) $1 \equiv -5\ (mod\ 6)$; b) $546 \equiv 0\ (mod\ 13)$; c) $1956 \equiv 5\ (mod\ 12)$;

d) $23 \equiv 1\ (mod\ 4)$; e) $3m \equiv -1\ (mod\ m)$?

158*. Берилган модул бўйича ҳар қандай бутун сон ўзининг колдиғи билан таққосланишини исбот қилинг.

159. Қуйидаги таққосламаларни қаноатлантирадиган x нинг барча қийматларини топинг:

a) $x \equiv 0\ (mod\ 3)$; b) $x \equiv 1\ (mod\ 2)$.

160. Қуйидаги таққосламаларни қаноатлантирадиган m нинг барча кийматларини топинг: $3r + 1 \equiv r + 1\ (mod\ m)$.

161. Агар $x = 13$ сони $x \equiv 5\ (mod\ m)$ таққосламани қаноатлантирса, модулнинг мумкин бўлган қийматларини топинг.

162*. Агар n – тоқ сон бўлса, у ҳолда $n^2 - 1 \equiv 0\ (mod\ 8)$ таққослама ўринли эканлигини кўрсатинг.

163*. Агар $100a + 10b + c \equiv 0\ (mod\ 21)$ бўлса, у ҳолда $a - 2b + 4c \equiv 0\ (mod\ 21)$ таққосламанинг ўринли эканлигини кўрсатинг.

164. Агар $3^n \equiv -1\ (mod\ 10)$ бўлса, у ҳолда $3^{n+4} \equiv -1\ (mod\ 10)\ (n \in N)$ таққосламанинг ўринли эканлигини кўрсатинг.

165*. $2^{11\cdot 31} \equiv 2\ (mod\ 11\cdot 31)$ таққосламанинг тўғрилигини кўрсатинг.

166*. Агар $x = 3n + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots.$ бўлса, у ҳолда $1 + 3^x + 9^x$ нинг 13 га бўлинишини кўрсатинг.

167. $N = 11\cdot 18\cdot 2322\cdot 13\cdot 19$ сони 7 модул бўйича абсолют қиймати бўйича энг кичик қандай сон билан таққосланади?

168. $3^{14} \equiv -1\ (mod\ 29)$ ни текширинг.

169. $1532^5 - 1$ ни 9 га бўлганда ҳосил бўладиган қолдиқни топинг.

170*. Агар $a \equiv b\ (mod\ p^n)$ бўлса, у ҳолда $a^p \equiv b^p\ (mod\ p^{n+1})$ ни исботланг.

171. Агар $ax \equiv bx\ (mod\ m)$ бўлса, у ҳолда $a \equiv b\left(\mathrm{mod}\,\frac{m}{(x,m)}\right)$ ни исботланг.

172*. Агар $\overline{a_4a_3a_2a_1a_0} \equiv 0(\text{mod}33)$ бўлса, у ҳолда $a_4+\overline{a_3a_2}+\overline{a_1a_0} \equiv 0(\text{mod}33)$ ни исботланг. $a_{l+l}= 0$ да $a_{i+l}a_l=a_i$ деб олинг.

173*. Берилган соннинг охирги иккита рақамини топинг: а) 9^9; b) 7^9.

174. 10 модул бўйича чегирмаларнинг ҳамма синфларини таққосламалар кўринишида ёзинг.

175. 10 модул бўйича чегирмаларнинг ҳамма синфларини

$$x = 10q+r,\ 0 \le r < 10$$

кўринишда ёзинг.

176. Қуйидаги модуллар бўйича кўрсатилган чегирмаларнинг синфларини ёзинг:

а) 10 модул билан ўзаро туб бўлган; б) 10 модул билан ЭКУБи 2 га тенг бўлган;

с) 10 модул билан ЭКУБи 5 га тенг бўлган; д) 10 модул билан ЭКУБи 10 га тенг бўлган.

177. Берилган модуллар бўйича чегирмаларнинг тўла ва келтирилган системаларининг барча турларини ёзинг: а) $m = 9$; б) $m = 8$; с) $p = 7$; д) $m = 12$.

178*. 25, -20, 16, 46, -21, 18, 37, -17 сонларнинг 8 модул бўйича чегирмалар тўла системасининг ташкил қилишини кўрсатинг.

179. 32, -9, 15, 42, -18, 30, 6 сонларни p=7 модул бўйича чегирмаларнинг тўла системасини ташкил этишини кўрсатинг.

180. 21, 2, -18, 28, -19, 40, -22, -2, 15 сонларнинг 9 модул бўйича чегирмаларнинг тўла системасини ташкил этишини кўрсатинг.

181. 24, 18, -19, 37, 28, -23, -32, 5, 41, -35, -33 сонларнинг 11 модул бўйича чегирмаларнинг тўла системасини ташкил этишини кўрсатинг.

182. 19, 23, 25, -19 сонларнинг 12 модул бўйича чегирмаларнинг келтирилган системасини ташкил этишини кўрсатинг.

183. 11, -1, 17, -19 сонларнинг 8 модул бўйича чегирмаларнинг келтирилган системасини ташкил этишини кўрсатинг.

184*. 24, 14, 25, 37, -8, -19, -40 сонларнинг 6 модул бўйича энг кичик манфий бўлмаган, абсолют қиймати бўйича энг кичик мусбат бўлмаган ва абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик чегирмаларини топинг. Бу сонлар берилган модул бўйича нечта ҳар хил синфларга тегишли бўлади? Қайси сонлар берилган модул бўйича бир синфга тегишли бўлади?

185. Манфий бўлмаган энг кичик чегирмаларни бевосита синаш усули билан қуйидаги таққосламаларни ечинг:

а) $5x^2 - 15x + 22 \equiv 0\ (mod\ 3)$; б) $x^2 + 2x + 2 \equiv 0\ (mod\ 5)$; с) $3x \equiv 1\ (mod\ 5)$;

д) $8x \equiv 3\ (mod\ 14)$; е) $x^3 - 2 \equiv 0\ (mod\ 5)$; ф) $x^2 - 2x + 1 \equiv 0\ (mod\ 4)$;

г) $27x^2 - 13x + 11 \equiv 0\ (mod\ 5)$.

186. Таққосламаларнинг хоссалари ёрдамида дастлаб соддалаштириб, сўнгра абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик чегирмаларни бевосита синаш усули билан қуйидаги таққосламаларни ечинг:

а) $12x \equiv 1\ (mod\ 7)$; б) $8x \equiv 1\ (mod\ 5)$; с) $3x \equiv 13\ (mod\ 11)$; д) $6x \equiv 3\ (mod\ 7)$; е) $6x + 5 \equiv 1\ (mod\ 7)$; ф) $90x^{20} + 46x^2 - 52x + 46 \equiv 0\ (mod\ 15)$.

187. Қуйидаги таққосламаларнинг ечимга эга эмаслигини кўрсатинг:

а) $2x - 3 \equiv 0\ (mod\ 6)$; б) $x^2 - 2x + 3 \equiv 0\ (mod\ 4)$; с) $x^3 + x + 4 \equiv 0\ (mod\ 5)$;

д) $x^4 + 2 \equiv 0\ (mod\ 5)$; е) $x^5 - 2x^3 + 13x - 1 \equiv 0\ (mod\ 4)$.

188. Номаълумнинг ихтиёрий бутун қийматлари қуйидаги таққосламаларни қаноатлантиришини кўрсатинг:

а) $x^2 - x + 6 \equiv 0\ (mod\ 2)$; б) $x(x^2 - 1) \equiv 0\ (mod\ 6)$;

с) $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x \equiv 0\ (mod\ 4)$; д) $x^r - x \equiv 0\ (mod\ p)$.

189. Таққосламанинг хоссаларидан фойдаланиб, алмаштиришлар орқали қуйидаги таққосламаларни ечинг.

а) $2x \equiv 7\ (mod\ 15)$; б) $5x \equiv 2\ (mod\ 8)$; с) $7x \equiv 2\ (mod\ 13)$;

д) $3x \equiv 23\ (mod\ 37)$; й) $27x \equiv 14\ (mod\ 25)$; ф) $13x \equiv 10\ (mod\ 11)$;

г) $5x \equiv 3\ (mod\ 11)$; х) $7x \equiv 5\ (mod\ 24)$.

190. x нинг қандай бутун қийматларида $5x^2 + x + 4$ квадрат уч ҳад 10 га бўлинади?

191. $x^2 - 4x + 3 \equiv 0\ (mod\ 6)$ таққосламани $x^2 - 4x + 3 \equiv 0\ (mod\ 2)$ зарурий шартдан фойдаланиб ечинг.

192. $x^{\varphi(30)} \equiv 1(mod\ 30)$ таққосламани ечинг.

193. $x^{\varphi(м)} \equiv 1(mod\ m)$ таққослама нечта ечимга эга?

194*. Агар $(n,m)=1$ бўлса, у ҳолда n-даражали $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n\equiv 0(mod\ m)$ таққосламани янги y ўзгарувчини киритиш билан (n-1) даражали ҳади қатнашмайдиган $y^n+b_2x^{n-2}+\ldots+b_n\equiv 0(modm)$ таққосламага келтириш мумкинлигини кўрсатинг.

195*. Олдинги масаладан фойдаланиб, $x^3+5x^2+6x-8\equiv 0(mod13)$ таққосламани уч ҳадли $y^3+ry+q\equiv 0(mod13)$ таққосламага келтиринг.

196. Эйлер усули билан қуйидаги таққосламаларни ечинг:

а) $5x\equiv 7\ (mod\ 10)$; б) $3x\equiv 8\ (mod\ 13)$; с) $7x\equiv 5\ (mod\ 17)$;

д) $13x\equiv 3\ (mod\ 19)$; е) $27x\equiv 7\ (mod\ 58)$.

197. Узлуксиз касрлар усули билан қуйидаги таққосламаларни ечинг:

a) $7x\equiv 4\ (mod\ 19)$; b) $143x\equiv 41\ (mod\ 221)$; c) $13x\equiv 178\ (mod\ 153)$;

d) $67x\equiv 64\ (mod\ 183)$; e) $89x\equiv 86\ (mod\ 241)$; f) $213x\equiv 137\ (mod\ 516)$;

g) $111x\equiv 81\ (mod\ 447)$; h) $186x\equiv 374\ (mod\ 422)$; j) $129x\equiv 321\ (mod\ 471)$.

198. Қулай усул билан қуйидаги таққосламаларни ечинг:

a) $12x\equiv 9\ (mod\ 18)$;

b) $20x\equiv 10\ (mod\ 25)$;

c) $-50x\equiv 67\ (mod\ 177)$;

d) $-73x\equiv 60\ (mod\ 311)$;

e) $-53x\equiv 84\ (mod\ 219)$;

f) $90x+18\equiv 0\ (mod\ 138)$;

g) $78x\equiv 42\ (mod\ 51)$.

Жавобларни берилган таққосламага қўйиш билан текшириб кўринг.

199*. Биринчи даражали 21 модул бўйича қуйидаги таққосламаларни тузинг:

а) фақат ягона ечимга эга бўлган;

б) 3 ва 7 та ечимга эга бўлган;

с) 2, 10, 15 та ечимга эга бўлган.

200. Туғилган куннинг 12 га кўпайтмаси ва ойнинг 31 га кўпайтмаларининг йиғиндиси 198 бўлса, туғилган кунни топинг.

201*. 523 сонининг чап томонидан шундай уч хонали сонни ёзингки, ҳосил бўлган олти хонали сон 7, 8 ва 9 га бўлинсин.

202. 629 сонининг ўнг томонидан шундай уч хонали сонни ёзингки, ҳосил бўлган олти хонали сон 5, 8 ва 11 га бўлинсин.

203. 723 сонининг ўнг томонидан шундай икки хонали сонни ёзингки, ҳосил бўлган 5 хонали сонни 31 га бўлганда 7 қолдиқ қолсин.

204. Қуйидаги тенгламаларни бутун сонларда ечинг.

a) $3x+4y=13$;

b) $8x-13y=63$;

c) $43x+37y=21$;

d) $45x-37y=25$;

e) $81x-48y=33$;

f) $26x+3y=13$;

g) $53x+17y=25$;

h) $47x-105y=4$;

i) $18x-33y=112$;

j) $11x+16y=156$;

k) $12x-37y=-3$;

l) $23x+15y=19$.

205. Дон ташиш учун 60 кг ва 80 кг вазнлик қоплар бор. 440 кг донни ташиш учун шу қоплардан нечта керак бўлади?

206. 14900 сўмга 300 сўмлик ва 500 сўмлик чипталардан нечтадан сотиб олса бўлади?

207. Қуйидаги таққосламалар системаларини ечинг:

a) $\begin{cases} x\equiv 4(\mathrm{mod}5)\\ x\equiv 1(\mathrm{mod}12)\\ x\equiv 7(\mathrm{mod}14)\end{cases}$; b) $\begin{cases} x\equiv 1(\mathrm{mod}25)\\ x\equiv 2(\mathrm{mod}4)\\ x\equiv 3(\mathrm{mod}7)\\ x\equiv 4(\mathrm{mod}9)\end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x\equiv 7(\mathrm{mod}13)\\ 5x\equiv 8(\mathrm{mod}17)\\ 3x\equiv 7(\mathrm{mod}31)\\ 14x\equiv 35(\mathrm{mod}19)\end{cases}$; d) $\begin{cases} 4x\equiv 7(\mathrm{mod}13)\\ x\equiv 2(\mathrm{mod}17)\\ 5x\equiv 3(\mathrm{mod}9)\\ 8x\equiv 4(\mathrm{mod}14)\end{cases}$;

e) $\begin{cases} 3x\equiv 7(\mathrm{mod}10)\\ 2x\equiv 5(\mathrm{mod}15)\\ 7x\equiv 5(\mathrm{mod}12)\end{cases}$; f) $\begin{cases} 4x\equiv 1(\mathrm{mod}9)\\ 5x\equiv 3(\mathrm{mod}7)\\ 4x\equiv 5(\mathrm{mod}12)\end{cases}$;

208. 2, 3, 4 га бўлинганида 1 қолдиқ қоладиган ва 5 га қолдиқсиз бўлинадиган барча натурал сонларни топинг.

209. 4, 5, 7 га бўлинганида мос равишда 3, 4, 5 қолдиқ қоладиган 200 ва 500 сонлари орасидаги барча бутун сонларни топинг.

210. Қуйидаги таққосламалар системаларини ечинг.

a) $\begin{cases} x+3u\equiv 5 \\ 4x\equiv 5 \end{cases} \pmod 7$	b) $\begin{cases} x-2u\equiv 1 \\ x\equiv 2 \end{cases} \pmod 4;$	c) $\begin{cases} 9u\equiv 15 \\ 3x-7u\equiv 1 \end{cases} \pmod{12};$
d) $\begin{cases} 3x-5u\equiv 1 \\ 9u\equiv 15 \end{cases} \pmod{12};$	e) $\begin{cases} x+2u\equiv 0 \\ 3x+2u\equiv 2 \end{cases} \pmod 5$	f) $\begin{cases} 3x+4u\equiv 29 \\ 2x-9u\equiv -84 \end{cases} \pmod{143}.$

III БОБ. ДИОФАНТ ТЕНГЛАМАЛАРИ

211. $x^2-2y^2=1$ тенгламани қаноатлантирувчи барча *x*, *y* ларни топинг.

212. $x^2-y^2=7$ тенгламанинг натурал ечимларини топинг.

213. $x^4\left(x^2-x^4+2y\right)=y^2+1999$ тенгламанинг бутун ечимларини топинг.

214. $x^3+y^3=8^{30}$ $x\ ,y-$ ларнинг бутун қийматини топинг.

215. $(x-y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)=2005.$ x, y ,z ларнинг натурал ечимини топинг.

216. $10x^2+11xy+3y^2=7$ *x*, *y* ларнинг бутун ечимларини топинг.

217. $n^2+n=m^2+2m-9$ (n,m) - ларнинг бутун қийматини топинг.

218. $2x^3+x^2+10x+5=2\cdot p^n$. (x,n,p) ларни *x*, *n* –натурал ва *p* –туб сонларни топинг.

219. $(m+n)^{m^2+n^2}=\left(m^2+n^2+2\right)^{mn}$ барча натурал ечимларини топинг.

220. $(n!)^m!$-$(m!)^n!$=28. *m* ва *n* ларнинг натурал ечимларини топинг.

221. $y^2-11x^2=1$. Пелля тенгламасининг натурал ечимини топинг.

222. . $34x^4+24y^3=100000$. тенгламанинг бутун қийматли ечимини топинг.

223. $\cos 2x+\cos\frac{6}{5}x=-2$. тенгламани ечинг.

224. . $\sin ax+\sin bx=2$. тенгламани ечинг.

225. . $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2$. тенгламани ечинг.

226.

1) 3x+4y=13;
2) 8x−13y=63;
3) 7x−19y=23;
4) 39x−22y=10;
5) 17x−25y=117;
6) 43x+37y=21;
7) 53x+47y=11;
8) 45x−37y=25;
9). 81x−48y=33;
10). 26x+34y=13;
11). 122x+129y=2;
12). 258x+172y=56;
13). 38x+117y=209;
14). 119x−68y=34;
15). 258x−175y=113;
16). 41x+114y=5.

Тенгламаларни узлуксиз каср ва таққосламалар ёрдамида ечинг.

ЖАВОБЛАР ВА КЎРСАТМАЛАР

I БОБ. БУТУН СОНЛАР ҲАЛҚАСИДА БЎЛИНИШ МУНОСАБАТИ

1 - §

1. а) $q=7$; 8 ва $r=2$; 6; б) $q=8$; 9 ва $r=2$; 6.

2. а) Ечиш: $(2n+1)^2=4n(n+1)+1$, бу ерда $n(n+1)$ 2 га бўлинади;

б) Ечиш. $n^2+(n+1)^2=2n\ (n+1)+1$, бу ерда $n\ (n+1)^2$ га бўлинади.

3. Кўрсатма. 15 = 7·2 + 1. Агар 15*n* =7*q*+1, у ҳолда 15*n*+1= 5*n* · 15=7 +1.

4. Ечиш. Масала шарти бўйича, $\frac{mn+pq}{m-p}=t-$бутун сон.

$$\frac{mq+np}{m-p}-t=\frac{mq+np}{m-p}-\frac{mn+pq}{m-p}=\frac{q(m-p)-n(m-p)}{m-p}=q-n..$$

Бундан $\frac{mq+np}{m-p}=q-n+t$ бутун сон. Демак, $mq+np;m-p$ га бўлинади.

5. Ечиш. Масала шартига кўра, *ad-bc=nt* ва $a-b=nt_1$. Иккинчи тенгликни *d* га кўпайтириб, биринчисидан айирамиз:

$b(c\text{-}d)=n\ (dt_1\text{-}1)$.

Бундан *b* ва *n* га қўйилган шартларга асосан *c–d* ни *n* га бўлиниши келиб чиқади.

6. с) Ечиш. $m^5-m=(m-1)m(m+1)(m^2+1)=(m-1)m(m+1)\cdot[(m^2-4)+5]=$
$=(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)+5(m-1)(m+1).$

Қўшилувчиларнинг ҳар бири 30 га бўлинади, чунки *k* та кетма-кет сонлар кўпайтмаси *k*! га бўлинади (бу $C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot k}-$ бутун сон бўлишидан келиб чиқади). Бундан йиғинди ҳам 30 га бўлинади, демак m^5-m 30 га бўлинади.

7. Ечиш. 10*x* + 5 – изланаётган сон бўлсин. 5 рақамни чап томондан биринчи ўринга қўйиб $5\cdot 10^5+x$ ни ҳосил қиламиз . Берилган шартларга кўра, $5\cdot 10^5+x=4\ (10x+5)$ тенгламага келамиз. Бундан, *x* = 112820 келиб чиқади.

8. Ечиш. Масала шартини қуйидагича ёзиб оламиз:

$n(n+1)\ (2n+1)=n\ (n+1)\ [(n-1)\ +\ (n+2)]\ =\ (n-1)\ n\ (n+1)\ +\ n\ (n+1)(n+2)$.

Ҳар бир қўшилувчи 6 га бўлинишидан (6 масала ечимидан) йиғиндини 6 га бўлиниши келиб чиқади.

9. Ечиш. $\frac{(2m+1)^2-(2n+1)^2}{(2m+1)^2+(2n+1)^2}=\frac{4(m+n+1)(m-n)}{2[2(m^2+n^2+m+n)]}$ ҳосил бўлган касрни фақат 2 га қисқартириш мумкин.

10. Ечиш. $N^2 = 1000x + 100(y+1) + 10x + y = 101(10x+y) + 100$.

Бундан $10x+1=\frac{(N+10)(N-10)}{101}, N=91, N^2=8181$.

11. Ечиш. $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5\ (n^2+2)$ тўла квадрат бўлиши учун $n^2 + 25$ га каррали бўлиши керак ёки n^2 нинг охирги рақами 8 ёки 3 бўлиши керак, бу мумкин эмас.

12. Ечиш. Ҳар қандай бутун сонни қуйидагилардан бирортаси шаклида ёзиш мумкин: $9k$, $9k \pm 1$, $9k \pm 2$, $9k \pm 3$, $9k \pm 4$. Бу сонлар квадратлари:

$(9k)^2 = 9(9k^2)$; $(9k \pm 1)2 = 9\ (9k^2 \pm 2k) + 1$; $(9k \pm 2)2 = 9(9k^2 \pm 4k) + 4$;

$(9k \pm 3)^2 = 9\ (9k^2 \pm 6k + 1)$; $(9k \pm 4)^2 = 9\ (9k^2 \pm 8k + 1) + 7$. Натижада бутун сон квадрати 9 га бўлганда қолдиқ фақат 0, 1, 4, 7 бўлиши мумкинлиги келиб чиқади.

13. Ечиш.

$$S_n=7(1+11+111+\ldots+111\ldots11)=7(\frac{10-1}{9}+\frac{10^2-1}{9}+\frac{10^3-1}{9}+\ldots+\frac{10^n-1}{9})=\frac{7}{81}(10^{n+1}-9n-10).$$

14. Ечиш.

$$111\ldots11555\ldots56=\frac{10^{n+1}-1}{9}\cdot10^{n+1}+5\cdot10\cdot\frac{10^n-1}{9}+6=(\frac{10^{n+1}+2}{3})^2=(\frac{10^{n+1}-1}{3}+1)^2=(333\ldots33+1)^2.$$

15. Ечиш. $m\ (m^4 - n^4) = n\ (m^5 - m) - m\ (n^5 - n)$ 30 га каррали (1 мисолга кўра).

16. Ечиш. $y^2 = 3x^2 + 2$ тенглама бутун сонларда ечимга эга эмас. Уни $y = 3n$ ёки $y = 3n \pm 1$ шакллардан бирорта кўринишида ифодалаш мумкин ва бундан y^2 ни 3 га бўлганда қолдиқ фақат 0 ёки 1 бўлади. Масала шартига кўра, қолдиқ 2 бўлиши керак.

17. Ечиш. Математик индукция усулини қўллаймиз: $\overline{aaa}$ сон 3 га бўлинади, чунки $a + a + a = 3a$. Агар $\overline{aa\ldots a}$ сон 3^n га бўлинса, у ҳолда

$\overline{aa\ldots a}=\overline{aa\ldots aaa\ldots aaa\ldots a}=\overline{aa\ldots a}\cdot\left(10^{3^n}\right)^2+\overline{aa\ldots a}\cdot10^{3^n}+\overline{aa\ldots a}=aa\ldots a\cdot100\ldots0100\ldots01$ 3^{n+1} га бўлинади.

2 - §

18. а) 21, б) 13; с) 119; д) 3; е) 23.

19. а) 2520; б) 138600; с) 99671; д) 881200.

20. Ечиш. $(a, b, c) = d$ бўлсин, у ҳолда $a = cq + r$, $b = cq_1 + q_1$ дан $d|$r ва

d|r₁ келиб чиқади. $d = (c, r, r_1)$ ни исботлаймиз. (c, r, r₁) = D бўлсин. $a = cq + r$ ва $b = cq_1 + r_1$ тенгсизликлардан $D|a$, $D|b$ ва шарт бўйича $D|c$. Бундан

$D = (a, b, c)$ ва демак, $D = d$. n та сон учун $(a_1a_2,\ldots,a_n)=(a_n,r_1,r_2,\ldots,r_{n-1})$ ни оламиз, бу ерда $(r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}-a_1a_2,\ldots,a_{n-1})$ сонларни a_n га бўлгандаги колдик.

21. а) 23; б) 7; с) 21.

22. а) 3776; б) 1116; с) 67818; д) 5382; е) 6409.

23. а) Ечиш. $(d,m) = (d, [dx, dy]) = d(1, [x, y]) = d$. Агар $d=(a_1a_2,\ldots,a_n)$ ва $m=(a_1a_2,\ldots,a_n)$ деб олсак, натижа ўзгармайди.

б) Ечиш. Агар $p = a + b$ ва $a \cdot b$ сонларнинг умумий бўлувчиси бўлса, у ҳолда a ёки b сонлардан бирортаси p га бўлиниши керак. $a + b$ ни p га бўлинишидан p сон a ва b ларни умумий бўлувчиси эканлиги келиб чиқади. Бу масала шартига зид, чунки $(a, b) = 1$;

с) Ечиш. $(a, b) = d$ ва $a = dx$, $b = dy$ бўлсин, бунда $(x, y) = 1$. Бу ҳолда

$(a + b, m) = (d\ (x + y), dxy) = d(x + y, xy) = d$. Демак, $(a+b, [a,b]) = (a, b)$.

24. Ечиш. x ва y – изланаётган сонлар бўлсин ва $(x, y) = d$, бундан $x = dm$ ва $y = dn$ ва $(m, n) = 1$. Шартга кўра, $x + y = d(m+n) = 667 = 23\cdot29$. Шарт бўйича $\frac{[x,y]}{(x,y)}=120$, бундан $[x,y]=120\cdot(x,y)=120d$, бошқа томондан $[x,y]=\frac{xy}{d}\Rightarrow\frac{xy}{d}=120d$ ёки $xy = 120d^2$. Булардан $\begin{cases}x+y=23\cdot29\\ xy=120d^2\end{cases}$ системани ҳосил қиламиз. $d\ (m+n) = 23 \cdot 29$ дан $d = 23$ ва $d = 29$ ($d = 1$ ёки $d = 23 \cdot 29$ - ўринли бўлмайди) бўлиши мумкин. $d = 23$ бўлганда, $x = 552$, $y = 115$. $d = 29$ да $x = 435$, $y = 232$.

25. Ечиш. x ва y – номаълум сонлар ва $(x,y) = d$ бўлсин. У ҳолда $\frac{x}{d}=m, \frac{y}{d}=n,$ бунда $(m,n) = 1$. Шарт бўйича $m+n = 18$,

$[x,y]=\frac{xy}{d}=\frac{dm\cdot dn}{d}=mnd=975=3\cdot 5^2\cdot 13$. Бундан $\begin{cases} m+n=18 \\ mnd=3\cdot 5^2\cdot 13 \end{cases}$ ни ҳосил қиламиз ва унинг ечими $m = 5$, n =13, d =15 бўлади. Демак, $x = 75$, $y =$ 195.

26. Ечиш. Шарт бўйича, $a = 899$, $b = 493$. Евклид алгоритмига кўра:

$a = b\cdot 1 + 406$, $b = 406\cdot 1 + 87$, $406 = 87\cdot 4 + 58$, $87 = 58\cdot 1 + 29$, $58 = 29\cdot 2$ бўлади. Охирги иккинчи тенгликдан бошлаб,

$$29 = 87-58 = 87-(406-87\cdot 4) = 87\cdot 5-406 = (b-406)\cdot 5-406 = 5b-406\cdot 6 =$$
$$5b-(a-b)6 = a(-b)+b\cdot 11$$ ни оламиз.

$29 = 899\,x + 493y$ билан солиштирсак, $x = -6$, $y = 11$ келиб чиқади.

27. а) $17 = a\,(-10) + б\cdot 23 = ax + by$;

б) $43 = a\cdot(-4) + б\cdot 5 = ax + by$;

с) $47 = a\cdot 2 + б\,(-5) = ax + by$.

28. а) Ечиш. $x = 45u$ ва $y = 45v$, бу ерда $(u,v) = 1$, $\frac{u}{v}=\frac{11}{7}$ дан

$u = 11$ ва $v = 7$, демак $x = 495$ ва $y = 315$;

б) Ечиш. $x = 20u$ ва $y = 20$v, бу ерда $(u,v) = 1$, $uv = 21$ дан $u = 1; 3; 7; 21$ ва $x = 20; 60; 140; 420$. $y=\frac{8400}{x}$ бўлганлиги сабабли $y = 420, 140, 60, 20$;

д) $x = 140$, $y = 252$.

29. Ечиш. $(a, b, c) = d$ бўлсин, у ҳолда $a = md$, $b = nd$, $c = kd$ $\frac{a+b}{2}=\frac{m+n}{2}d; \frac{a+c}{2}=\frac{m+k}{2}d; \frac{b+c}{2}=\frac{n+k}{2}d$. Бундан, d сон $\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2}$ сонларнинг умумий бўлувчиси бўлишини кўрсатади.

Фараз қиламиз, $(\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2})=D$ бундан $d|D$ $\frac{a+b}{2}=m_1D$; $\frac{a+c}{2}=n_1D$; $\frac{b+c}{2}=k_1D$. Биринчи ва иккинчи тенгликлар йиғиндисидан учинчи тенгликни айириб, $a=(m_1+n_1-k_1)D$ ни топамиз. Шу усулда $b=(m_1-n_1+k_1)D, c=(-m_1+n_1+k_1)D$ ларни ҳосил қиламиз. Бу тенгликлардан

a, b, c ларнинг D га бўлиниши келиб чиқади ва демак, $D|d$. Натижада $D=d$ яъни, $(a,b,c)=(\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2})$.

30. а) Ечиш. $(a, b, c) = d$ бўлсин, у ҳолда $(a, b) = md$, $(a, c) = nd$, $(b,c) = kd$, бу ерда $(m,n,k) = 1$. Бу тенгликдан adm ва dn га бўлиниши келиб чиқади, демак, $a = dmn\alpha$. Худди шундай: $b = dmk\beta$; $c = dnk\gamma$. Бу ерда $(\alpha, \beta, \gamma) = 1$.

$$[a,b,c]=dmnk\alpha\beta\gamma=\frac{\alpha^4m^2n^2k^2\alpha\beta\gamma}{d^2mnk}=\frac{(bmn\alpha)(dmk\beta)(dnk\gamma)d}{dm\cdot dn\cdot dk}=\frac{abc(a,b,c)}{(a,b)(a,c)(b,c)};$$

б) Кўрсатма: $[a,b]=\frac{ab}{(a,b)}$ дан фойдаланинг.

31. Ечиш. $qN = 100q + bq = 100q + a - a + bq = am - (a - bq)$, бундан тасдик тўғрилиги келиб чиқади, чунки $(q,m) = 1$.

32. а) 1;

б) Ечиш. $(10$n $+ 9$, n $+ 1) = d$ ва 10n $+ 9 = dx$, n $+ 1 = dy$ бўлсин. У ҳолда

$10\,(dy - 1) + 9 = dx$ ёки $10\,dy - 1 = dx$ ва натижада $d = 1$.

с) Ечиш. Агар $(3$n $+ 1$, 10n $+ 3) = d$ бўлса, у ҳолда

$\begin{cases} 3n+1=dx \\ 10n+3=dy \end{cases}$ ёки $\begin{cases} 30n+10=10dx \\ 30n+9=3dy \end{cases}$, бундан $1 = d(10x - 3y)$ ва $d = 1$.

Масалани Евклид алгоритми ёрдамида ҳам ечиш мумкин.

33. Ечиш. $(q + 1)N = 10a\,(q + 1) + b(q + 1) = am + [a + b\,(q + 1)]$, бу ерда

$(q + 1, 10q + 9) = 1$ (32 масалага қаранг).

34. Ечиш. $(a, b) = d$ бўлсин, у ҳолда $a = md$, $b = nd$, $(m,n) = 1$. $5a + 3b =$

$(5m + 3n)\,d$, $13a + 8b = (13m + 8n)d$ тенгликлардан $5a + 3b$ ва $13a + 8b$ ларнинг умумий бўлувчиси d бўлади. $(5a + 13b, 13a + 8b) = D$ бўлсин, у ҳолда $D|d$, $5a + 3b = \mathrm{m}_1D$, $13a + 8b = n_1D$.

Бундан $a = (8m_1 - 3n_1)D$, $b = (5n_1 - 13m_1) = D$ ва D, a ва b ларнинг бўлувчиси, демак, $D|d$. Натижада $d = D$.

35. Ечиш.

$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}=\frac{2a+b}{a(a+b)}.(a,b)=1$ дан $(a, 2a + b) = 1$ келиб чиқади.

$(2a + b, a + b) = 1$ ни кўрсатамиз. $(2a + b, a + b) = d > 1$ бўлсин, у ҳолда $2a + b = dm$, $a + b = dn$, $(m,n) = 1$, демак, $a = d\ (m-n)$, $b = d\ (2n - m)$, яъни $d|a$, $d|b$ масала шартига зиддир.

3 - §

36. а) 211;

б) 2543, 2549, 2551, 2557;

с) 1201, 1213, 1217, 1223, 1229, 1231, 1237, 1249.

37. Ечиш.

$$n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=(n^2+2)^2-4n^2=\left(n^2+2n+2\right)(n^2-2n+2).$$

38. Ечиш. Барча натурал сонларни $5n$, $5n \pm 1$, $5n \pm 2$ кўринишда ёзиш мумкин. $5n$ кўринишдаги сон туб сон бўлади, агар n=1 бўлса, у ҳолда p=5, $4p_2$+1=101, $6p^2$+1=151. Бу p нинг қиймати масала шартини қаноатлантиради.

Бошқа бундай сонлар мавжуд эмаслигини кўрсатамиз. Агар p=5n±1 бўлса, у ҳолда $4p^2+1=5(20n^2\pm8n+1)$ – мураккаб сон, агар p=5n+2 бўлса, $6p^2+1=5(30n^2\pm 24\ n +1)$ – мураккаб сон бўлади.

39. Ечиш. Барча натурал сонларни $6k$, $6k \pm 1$, $6k \pm 2$, $6k \pm 3$ кўринишда ёзиш мумкин. 2 ва 3 дан ташқари $6k \pm 1$ кўринишдаги сонлар туб бўлиши мумкин (тескариси ҳамма вакт ўринли эмас, яъни ҳар қандай $6k \pm 1$ кўринишдаги сонлар туб сон бўлмаслиги ҳам мумкин). Агар $p = 6k - 1$ бўлса, у ҳолда $p + 10 = 6k - 1 + 10 = 3\ (2k + 3)$ – мураккаб сон; агар $p = 6k + 1$ бўлса, у ҳолда $p + 14 = 6k + 1 + 14 = 3(2k + 5)$ – мураккаб сон. Шундай қилиб, бир вақтда $p + 10$ ва $p + 14$ сонлар туб бўладиган 3 дан катта p туб сон мавжуд эмаслигини кўрсатдик.

Агар $p = 2$ бўлса, $p + 10$ ва $p + 14$ – мураккаб сонлар бўлади. Агар $p = 3$ бўлса, $p + 10$ ва $p + 14$ – туб сонлар бўлади. Демак, битта $p = 3$ сон масала шартини қаноатлантиради.

40. Ечиш. Шарт бўйича, $a > 3$, $m = 3t + 1$, $n = 3t_1 + 2$. 2 ва 3 дан фарқли туб сонларни $p = 6k \pm 1$ кўринишда ифодалаш мумкин (39 масалага қаранг). Агар $a = p = 6k + 1$, у ҳолда $a + n = 6k + 1 + 3t + 2 = 3\ (2k + t + 1)$ – мураккаб сон; агар $a = p = 6k - 1$, у ҳолда $a + m = 6k - 1 + 3\ t + 1 = 3(2k + t)$ мураккаб сон.

41. Ечиш. p – n! нинг туб бўлувчиси. $p \le n! - 1$ бўлганлиги сабабли p<n!

Бошқа томондан n! p га бўлинмайди, бундан n < p. Шундай қилиб, n<p<n! (бу исботдан туб сонлар сони чексиз кўплиги келиб чиқади).

42. Ечиш. Шарт бўйича, $2p + 1$ – тўла куб, яъни
$2\ p + 1 = (2\ x + 1)^3 = 8\ x^3 + 12\ x^2 + 6\ x + 1 = 2\ x\ (4\ x^2 + 6\ x + 3) + 1$, бундан
$p = x\ (4x^2 + 6x + 3)$. p – туб сонлигидан $x = 1$ ва $p = 13$, шунинг учун
$2p + 1 = 27 = 3^3$ – ягона сон.

43. Ечиш. Олдин натурал сонлар қаторида 5 дан бошлаб учта кетма-кет келган тоқ сонлар барчаси туб бўла олмаслигини кўрсатамиз. Фараз қиламиз, ҳар бир туб сонлар жуфти ораларида битта мураккаб сон жойлашган (эгизак сонлар). Туб сонларни бундай жойлашиши етарлича зич бўлади. У ҳолда туб сонларни $6n$–1 ва $6n$+1 шаклида тасвирлаш мумкин ва уларнинг рақамлари $2n$–1 ва $2n$ бўлади.

n=1, 2, 3, 4, 5, 6, … деб $6n$–1=5, 11, 17, 23, 29, 35, … (бу сонлар рақамлари $2n$–1=1, 3, 5, 7, 9, 11,…) ва $6n$+1=7, 13, 19, 25, 31, 37, … (бу сонлар рақамлари 2n=2, 4, 6, 8, 10, 12,…). Бундан кўринадики, ҳар бир сон ўзининг рақами учланганидан катта: 6n – 1 > 3 (2n -1) ва (6n + 1) > 3 · 2n.

44. Кўрсатма.

Натурал сонлар қаторидаги сонларни $30k$, $30k \pm 1$, $30k \pm 2$, …, $30k \pm 15$ шаклида тасвирлаймиз. Бу сонлардан $p = 30k \pm 1$; $30k \pm 7$; $30k \pm 11$, $30k \pm 13$ лар туб сонлар бўлиши мумкин.

45. Ечиш. Агар p–1 ва p+1 сонлар орасига 3 дан катта p сон жойлаштирилса, $(p$-1$)p(p$+1) кўпайтма 3 га бўлинади. p>3 бўлганлиги сабабли $(p$-1$)(p$+1) кўпайтма 3 га бўлиниши керак. Бошқа томондан $(p$-1$)(p$+1) 8 га бўлинади, чунки агар p–12 га бўлинса, p+1 – ҳеч бўлмаса 4 га бўлиниши керак. p^2–q^2=$(p$-1$)(p$+1) – $(q$-1) $(q$+1), бу ерда $(p$-1) $(p$+1) ва $(q$-1$)(q$+1) лар ҳар бири 3 га ва 8 га бўлинади. Демак, p^2–q^2 24 га бўлинади.

46. а) Ечиш. Агар p=2 бўлса, у ҳолда p+10 – мураккаб сон. Агар p=2q+1(q=1, 2, …) бўлса, у ҳолда p+5 – мураккаб сон.

47. Ечиш. $p=2k+1$ кўринишдаги тоқ сон. $p=mn$ $(m>n)$ кўринишда кўпайтувчиларга ажралсин. У ҳолда, шундай x ва y сонлар топиладики, булар учун қуйидаги система ўринли:

$\begin{cases} x+y=m \\ x-y=n \end{cases}$, бундан $x=\frac{m+n}{2}, y=\frac{m-n}{2}$. Демак, мураккаб p учун:

$$p=mn=(x+y)(x-y)=x^2-y^2=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2.$$

Агар p туб бўлса, уни $p=(2k+1)\cdot 1$ ягона шаклда ёзиш мумкин. Бу ҳолда

$m=2k+1=p, n=1$, демак, $p=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2=\left(\frac{p+1}{2}\right)^2-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$.

Шундай қилиб, $p=\left(\frac{p+1}{2}\right)^2-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ кўринишда тасвирланиш ягона бўлса, у ҳолда p –туб сон; агар $p=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2$ кўринишда тасвирланган бўлса, p – мураккаб сон.

48. 47-масала шартидан тоқ сонларни $(x+y)\cdot(x-y)$ кўринишдаги кўпайтувчиларга ажратишнинг қуйидаги усули келиб чиқади: $p=x^2-y^2$ тенгликдан $p+y^2=x^2$, яъни x ни топиш учун p га шундай y $\left(y\le\frac{p-1}{2}\right)$ натурал сон квадратини қўйиш керакки, натижада $p+y^2$ йиғинди квадратдан (x^2) иборат бўлсин. Шу усулда y ва x ни топиб, p $(x+y)$ $(x-y)=mn$.

а) Квадратлар жадвалидан фойдаланиб, 6643 сонига яқин бўлган сон $6724=82^2$ оламиз. $6724-6643=81=9^2$. Демак, $6643=82^2-9^2=(82+9)(82-9)=91\cdot73=7\cdot13\cdot73$;

б) $1769=61\cdot29$; с) $3551=67\cdot53$; д) $6497=89\cdot73$.

49. Ечиш. $N=a^2+b^2=c^2+d^2$ ва a ва b, c ва d – сонларнинг жуфт тоқлиги ҳар хил бўлсин. a ва c, b ва d – ларнинг жуфт тоқлиги бир хил деб оламиз.

$(a-c)$ $(a+c)=(d-b)$ $(d+b)$ тенгликдан, $\frac{a-c}{d-b}+\frac{d+b}{a+c}=\frac{u}{v}$ келиб чиқади. Бунда биринчи касрни t га ва иккинчи касрни c га қисқартирилган деб олсак, яъни

$a-c=tu$, $d+b=cu$, $ak=cv$, $d-b=tv$. У ҳолда, $a=\frac{tu+sv}{2}, b=\frac{su-tv}{2}$ бўлади.

Натижада, $N=a^2+b^2=\frac{1}{4}\left[(tu+sv)^2+(sn-tv)^2\right]=\frac{1}{4}\left(u^2+v^2\right)\left(t^2+s^2\right)$

50. Ечиш. $972^2+235^2=1000009=1000^2+3^2$ дан 1000009 сон икки усулда икки сон квадратлари йиғиндиси кўринишда ёзилиши келиб чиқади, демак, бу сон мураккаб ва $293\cdot3413$ га тенг.

51. Ечиш. Қуйидаги ёйилмани кўрамиз:

$$a^{10}+a^5+1=\frac{a^{15}-1}{a^5-1}=\frac{\left(a^3-1\right)\left(a^{12}+a^9+a^6+a^3+1\right)}{(a-1)\left(a^4+a^3+a^2+a+1\right)}=\left(a^2+a+1\right)\left(a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1\right);$$

Бу ерда $a^{12}+a^9+a^6+a^3+1$ кўпҳад $a^4+a^3+a^2+a+1$ кўпҳадга кўпҳадларни бўлиш қоидасига асосан бўлинган. Натижада,

$$3^{10}+3^5+1=(3^2+3+1)\qquad(3^8-3^7+3^5-3^4+3^3-3+1)=13\cdot4561.$$

52. Ечиш. Агар q – тоқ бўлса, $1+2k$ сон $1+2=3$ га каррали. Агар k –жуфт бўлса, у $k=2n$ га ёки $k=2nm$ ($m\ge1$ ва тоқ сон), ёки $k=0$. Лекин $1+2^k=1+2^{2^n m}=\left(1+2^{2^n}\right)^m$; $1+2^{2^n}$ га каррали (агар $k=0$ бўлса, 2 га каррали). $1+2^{2^n}$ сон мураккаб сон бўлади. Демак, барча $k=2^n$ дан фарқли k лар учун $1+2^{2^n}$ сон мураккаб сон бўлади.

53. Ечиш. $(\alpha,\beta)=1$, $(\alpha,\beta)=2^n$ шартларни қаноатлантирувчи барча α ва β лар учун $a^\alpha+b^\beta$ мураккаб сон эканлигини кўрсатамиз. $(\alpha,\beta)=1$ – бўлиб, тоқ бўлса, у ҳолда $\alpha=dm$, $\beta=dk$, $(m,k)=1$ ва $a^\alpha+b^\beta=\left(a^m\right)^d+\left(b^k\right)^d$ a^m+b^k га каррали. Агар $(\alpha,\beta)=2^n d$ жуфт сон бўлиб, $d>1$–тоқ бўлса, у ҳолда $\alpha=2^n dm$, $\beta=2^n dk$ бундан, $a^\alpha+b^\beta=\left(a^{2^n m}\right)^\alpha+\left(b^{2^n k}\right)^\alpha$ сон $\left(a^{2^n m}\right)+\left(b^{2^n k}\right)$ га каррали. Демак, $(\alpha,\beta)=1$ ва $(\alpha,\beta)=2n$ шартларни қаноатлантирувчи α ва β лардан ташқари барча ҳолларда $a^\alpha+b^\beta$ сон мураккаб бўлади. Тескари тасдиқ нотўғри, масалан $2^4+3^2=25$ – мураккаб сон.

54. Ечиш. n – мураккаб сон бўлсин, $n=ab$ $(a>1, b>1)$, у ҳолда $2^n-1=2^{ab}-1=(2^a)^b-1$ – мураккаб сон. Тескари тасдиқ нотўғри: $2p-1$ ҳамма вақт туб эмас, масалан $2^{11}-1=23\cdot89$; $2^{23}-1=47\cdot178421$.

4 - §

55. $a)\frac{271828}{10^5}=(2,1,2,1,1,4,1,1,6,10,1,1,2);$

$b)\frac{103993}{33102}=(3,7,15,1,292);$

$c)\frac{99}{170}=(0,1,1,2,1,1,6,2);$

$d)\frac{355}{113}=(3,7,16);$

56. $a)\frac{247}{47}=(3,2,1,2,2);$ муносиб касрлари: $\frac{3}{1},\frac{4}{3},\frac{11}{3},\frac{15}{4},\frac{131}{35},\frac{277}{74}.$

$b)\frac{77}{187}=(0,2,2,3);$ муносиб касрлари: $\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{5},\frac{7}{12};$

$c)\frac{333}{100}=(3,3,3,3);$ муносиб касрлари: $\frac{3}{1},\frac{10}{3},\frac{333}{100};$

$d)\frac{103993}{3302}=(3,7,15,1,292);$ муносиб касрлари: $\frac{3}{1},\frac{22}{7},\frac{333}{106},\frac{355}{113},\frac{103993}{33102},\frac{277}{74}.$

58. а) $\frac{29}{37}$ сонни узлуксиз касрга ёямиз: $a)\frac{29}{37}=(0,1,3,1,1,1,2);$

Жадвал ёрдамида

K		0	1	2	3	4	5	6
q_k		0	1	3	1	1	1	2
P_k	1	0	1	3	4	7	11	29
Q_k	0	1	1	4	5	9	14	37

касрларни топамиз.

$\frac{P_4}{Q_4}=\frac{7}{9}$ $\quad \frac{1}{Q_4Q_5}=\frac{1}{9\cdot14}=\frac{1}{126}=0,008<0,01;$ $\frac{7}{9}=0,78$ ортиғи билан.

59. $a)\frac{43}{19};b)\frac{73}{43};c)\frac{2633}{1810};d)\frac{1421}{552};e)\frac{157}{225};f)-1\frac{159}{215};g)\frac{893}{11953}.$

60. $a)$ $x=2$; $b)$ $x=2$.

5 - §

61. а) – 3; b) 11; c) 1; d) 2;

62. Ечиш.

$x=[x]+\theta_1$ ва $y=[y]+\theta_2$ бўлсин, бу ерда $0\le\theta_1<1$, $0\le\theta_2<1$ у ҳолда $x+y=[x]+[y]+(\theta_1+\theta_2)$. Агар $0\le\theta_1+\theta_2<1$, $[x+y]=[x]+[y]$; агар $1\le\theta_1+\theta_2<2$ бўлса, $[x+y]>[x]+[y]$ бўлади. Натижаларни бирлаштирсак,

$[x+y]\ge[x]+[y]$ ни ҳосил киламиз.

63. Ечиш. $[x]$ ни таърифига кўра, масала шартига асосан $ax=m+\theta$, бу ерда $0\le\theta<1$ ва $a\ne0$, бу тенгликдан $x=\frac{m+\theta}{a}$ ни ҳосил қиламиз.

64. Ечиш. $12{,}4\,m=86+\theta$, бу ерда $0\le\theta<1$. Тенгликни 5 га кўпайтирамиз: $62m=430+5\theta$, бундан $m=\frac{430+5\theta}{62}=6+\frac{58+5\theta}{62}.$ $0\le\theta<1$ дан $0\le5\theta<5$ ва m бутун мусбат сон бўлиши учун $t=\frac{58+5\theta}{62}$ бутун бўлиши лозим. $t=1$ деб олсак, $\theta=\frac{4}{5}$ ва $m=7$ ни ҳосил қиламиз.

65. Ечиш. $\left[\frac{p}{4}\right]_{p=4n+1}=n=\frac{p-1}{4};$ $\left[\frac{p}{4}\right]_{p=4n+3}=n=\frac{p-3}{4};$

66. Ечиш.

$a=mq+1,0\le r<m,ёки\frac{a}{m}=q+\frac{r}{m},0\le\frac{r}{m}<1,$ бу ердан $q=\left[\frac{a}{m}\right];ва\left[\frac{a}{m}\right]=\frac{a-r}{m}.$

67. $\left[\frac{m}{2}\right]_{m=2k+1}=\left[k+\frac{1}{2}\right]=k=\frac{m-1}{2}.$

68. а) Ечиш. $2\le x^2<3$ ёки $\sqrt{2}\le|x|<\sqrt{3},$ бундан $-\sqrt{3}<x<-\sqrt{2};ва\sqrt{2}\le x<\sqrt{3}$ ни оламиз;

б) Ечиш. $x+1$ нинг қийматлари ва бундан x нинг қийматлари ҳам бутун бўлиши зарур. Бу қийматларда $3x^2-x$ ҳам бутун бўлади ва берилган тенглама $3x^2-x=x+1$ га тенг кучли бўлади, бундан $x=1$ ни оламиз.

с) Ечиш. Берилган тенгламани $0\le x<4$ қийматлар қаноатлантиради, бу

қийматларда $\frac{3}{4}x$ бутун қийматларни қабул қилади, яъни ; $x=0$; $1\frac{1}{3}$; $2\frac{2}{3}$.

д) x=0; 1.

69. $\left[\frac{10^7}{786}\right]-\left[\frac{10^6}{786}\right]=11450.$

70. Ечиш. $999-\left[\frac{999}{5}\right]-\left[\frac{999}{7}\right]+\left[\frac{\left[\frac{999}{5}\right]}{7}\right]=686.$

71. Ечиш. $100-\left[\frac{100}{2}\right]-\left[\frac{100}{3}\right]+\left[\frac{100}{6}\right]=33.$

72. 98.

73. 488.

74. $B\,(2311;\,5,\,7,\,13,\,17) = 1378;$

75. $B\,(12317;\,3{,}5{,}7) = 5634.$

76. 393.

77. $\left[\frac{p^n}{p}\right]+\left[\frac{p^n}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{p^n}{p^{n-1}}\right]+\left[\frac{p^n}{p^n}\right]=p^{n-1}+\ldots+p+1=\frac{p^n-1}{p-1}.$

78.

$a)10!=2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7;$

$b)15!=2^{11}\cdot3^6\cdot5^3\cdot7^2\cdot11\cdot13;$

$c)20!=2^{18}\cdot3^8\cdot5^4\cdot7^2\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19;$

$d)25!=2^{22}\cdot3^{10}\cdot5^6\cdot7^3\cdot11^2\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23;$

$e)30!=2^{26}\cdot3^{14}\cdot5^7\cdot7^4\cdot11^2\cdot13^2\cdot17\cdot19\cdot23\cdot29;$

79. $\frac{20!}{10!10!}=2^2\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19.$

80. Ечиш. ,

$N=\frac{1000!}{100!7^\alpha}$, бу ерда $\alpha\left[\frac{1000}{7}\right]+\left[\frac{1000}{49}\right]+\left[\frac{1000}{301}\right]=\left[\frac{100}{7}\right]+\left[\frac{100}{49}\right]+\alpha$ шартни қаноатлантиради, бундан $\alpha = 148$ келиб чикади.

81. Ечиш. $(2m+1)!!=\frac{(2m+1)!}{(2m)!!}=\frac{(2m+1)!}{m!2^m}$. Агар $p > 2$ бўлса, у холда $\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{2m+1}{p^i}\right]-\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{m}{p^i}\right]$, бу ерда $p^k\le 2m+1<p^{k+1}$.

82. Ечиш. Ихтиёрий бутун $x = k$ $(a \le k \le b)$ абсцисса учун $[\varphi(x)]+1$ бутун ординатали ва берилган трапециянинг ичида ва чегарасида жойлашади. Демак, нукталар сони $\sum_{k=a}^{b}([f(k)]+1)$ га тенг.

83. 126.

84. Ечиш. Шартга асосан, $a = 4q + 1$ ёки $a = 4q + 3$ га тенг. Биринчи ҳолда

$\left[\frac{a}{4}\right]+\left[\frac{2a}{4}\right]+\left[\frac{3a}{4}\right]=q+2q+3q=6q=\frac{3(a-1)}{2}$. Иккинчи ҳол ҳам худди шундай текширилади.

85. Ечиш. $a = mq$ + г бўлсин, бу ерда $0 \le r < m$ ва $(r,m) = 1$. (r,m) $= 1$

шарт барча $m \le 2$ лар учун бажарилишидан $r = 1$ келиб чиқади. Демак,

$$\sum_{i=1}^{m-1}\left[i\left(q+\frac{1}{m}\right)\right]=q\sum_{i=1}^{m-1}i=\frac{a-1}{m}\cdot\frac{m(m-1)}{2}=\frac{(a-1)(m-1)}{2}.$$

86. Ечиш. $x = [x]+\alpha$, $0 \le \alpha < 1$ бўлганлигидан $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=2[x]+\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]$, бундан

$\frac{1}{2}\le\alpha+\frac{1}{2}<1\frac{1}{2};$ *ва* $\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]$ 0 га ёки 1 га тенг. $2x = 2[x]+ 2\alpha$ ва $[2x] = 2[x] + [2\alpha]$ бўлганлигидан $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[2\alpha]+\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]$.

Бу ерда $\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]=[2\alpha]=0,$ *ёки* $\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]=[2\alpha]=1.$

87. Ечиш. Тенгламанинг ҳар бир қисмини y деб белгилаб, $y\le\frac{x}{m}<\frac{x}{m-1}<y+1$ ни оламиз, $my\le x<(m-1)(y+1)$. Бу тенгсизликни қаноатлантирувчи x лар мавжуд бўлиши учун $my<(m-1)(y+1)$ ёки $y < m - 1$ шартлар бажарилиши зарур ва етарли. Бундан қуйидаги натижа келиб чиқади:

$my \le x <(m - 1)\ (y + 1)$, бу ерда $x - y< m - 1$ шартни қаноатлантирувчи бутун сон.

88. Ечиш. $ax^2 + bx + c$ функция ва шу билан биргаликда $[ax^2 + bx + c]$ функция $a > 0$ да қуйидан, $a < 0$ да эса юқоридан чегараланган.

Иккала ҳолда ҳам $[ax^2 + bx + c]$ функция чегараси $\left[-\frac{b^2-4ac}{4a}\right]$ сонга тенг. Шу сабабли $a > 0$ да берилган тенглама ечимга эга бўлади, агар, $\left[-\frac{b^2-4ac}{4a}\right]\le d-$ шарт бажарилса ва фақат шартда, агар $a < 0$ бўлса, бу шарт қуйидагича: $\left[-\frac{b^2-4ac}{4a}\right]\ge1.$

89. а) 0, 6; б) $\frac{2}{3}$; с) 0; д)$\frac{1}{2}$.

90. а) 624; б) 2418; 30; с) 1440; 8; д) 1960; 12; е) 2808; 24; ф) 3844;30.

91. а) 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 5. 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360;

б) 1, 5, 25, 125, 3, 15, 75, 375.

92. Ечиш. $S(2^\alpha) = 2^{\alpha+1} - 1 = 2\cdot 2^\alpha - 1$, демак, $m = 2^\alpha$, $\alpha \in N$.

93. Ечиш. Агар p сон m ёки n нинг каноник ёйилмаларининг бирортасига α кўрсаткич кирса, у ҳолда $\tau(mn)$, ва $\tau(m)\cdot\tau(\text{n})$ да $\alpha + 1$ кўпайтма мавжуд. Агар m ва n нинг каноник ёйилмаларида мос равишда ρ^α ва ρ^β лар бўлса, у ҳолда mn нинг каноник ёйилмасида $\rho^{\alpha+\beta}$ мавжуд ва $\tau(mn)$ даги $\alpha + \beta + 1$ кўпайтмага $\tau(m)\cdot\tau(n)$ да қатнашувчи $(\alpha + \beta)(\beta + 1) > \alpha + \beta + 1$ кўпайтма мос келади. Демак, агар $(m,n)>1$, у ҳолда $\tau(m)\,\tau(n) > \tau(mn)$. Агар r m ёки n нинг каноник ёйилмасига қатнашса, юқорида қайд қилинганидек, $S(x)$ ни ҳисоблаш мумкин.

Иккинчи ҳолда $S(\text{mn})$ га кирувчи $\frac{p^{\alpha+\beta+1}}{p^{-1}}$, кўпайтмага $S(m)\,S(\text{n})$ га кирувчи $\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}\cdot\frac{p^{\beta+1}-1}{p-1}=\frac{p^{\alpha+\beta+2}-p^{\alpha+1}}{(p-1)^2}+\frac{p^{\beta+1}+1}{(p-1)^2}$, кўпайтма мос келади. $\frac{p^{\alpha+\beta+2}-p^{\beta+1}+1}{p-1}-\left(p^{\alpha+\beta-1}-1\right)=\frac{p\left(p^{\alpha}-1\right)\left(p^{\beta}-1\right)}{p-1}$. тенгликни ўринлилигини осонгина кўрсатиш мумкин, бундан $\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}\cdot\frac{p^{\beta+1}-1}{p-1}>\frac{p^{\alpha+\beta-1}-1}{p-1}$.

Демак, агар $(m,n) > 1$ бўлса, $S(m)\,S(\text{n}) > S(mn)$ бўлади.

94. $\tau(m) = 20$, $S(m) = 5208$, $\delta(m) = 196810$.

95. Ечиш. Ўзининг барча бўлувчилари кўпайтмасига тенг бўлган m натурал сон $m=\sqrt{m^{\tau(m)}}$, тенглама ёрдамида аниқланади, яъни $\tau(m) = 2$ бундан масала ечими келиб чиқади.

96. $S_n(a)=\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{n(\alpha_i+1)}-1}{p_i^{n}-1}$. *Кўрсатма.* Математик индукция усулидан фойдаланинг.

97. а) $S_2(12) = 120$; б) $S_2(18) = 455$; с) $S_2(16) = 341$.

99. Ечиш. $2^\alpha(2^{\alpha+1}-1)= m$ ва $2^{\alpha+1}-1 = p$, бўлсин, у ҳолда $S(m) = S(2^\alpha\cdot p)=(2^{\alpha+1}-1)(p+1) = (2^{\alpha+1}-1)2^{\alpha+1}= 2m$.

100. Ечиш. 99-масалага асосан, ҳар қандай мукаммал сон $2^\alpha(2^{\alpha+1} - 1)$, кўринишда бўлишини исботлаш керак, бу ерда $2^{\alpha+1}-1$ – туб сон. $m = 2^\alpha q$ бўлсин, $(q,2) = 1$ ва $S(m) = 2m$, яъни $(2^{\alpha+1}-1)\,S(q) = 2^{\alpha+1}\cdot q$, бундан $S(q)= 2^{\alpha-1}\cdot k$ ва $q =(2^{\alpha+1} - 1)k$, $k \in N$. k ва $(2^{\alpha+1} - 1)k$ сонлар q нинг бўлувчилари бўлиб улар йиғиндиси $k\cdot 2^{\alpha+1} = S(q)$ га тенг, бундан q бошқа натурал бўлувчиларга эга эмас. Демак, $q =(2^{\alpha+1}-1)k$ – туб сон, бундан $k = 1$ ва $2^{\alpha-1} - 1$ – туб сондир.

101. Ечиш. $S(m) = 3m$ тенглама $m = 2^\alpha\cdot p_1p_2$ учун $(2^{\alpha+1} - 1)(1 + p_1)(1 + p_2) = 3\cdot 2^\alpha p_1p_2$ кўринишга эга. Агар $\alpha = 0$ бўлса $(1 + p_1)(1 + p_2) = 3p_1p_2$ ёки $1 + p_1 + p_1$, бундан p_1 ва p_2 жуфт сон бўлиши керак, бу эса ўринли эмас, чунки $1 + p_1$ ва $1 + p_2$ жуфт сонлар. Демак, $\alpha \neq 0$. Агар $\alpha = 1$ $(1 + p_1)(1 + p_2) = 2p_1 p_2$ ёки $1 + p_1 + p_2 = p_1 p_2$, яъни $1 + p_1 = p_2(p_1 - 1)$; $p_1 - 1 = 2\text{n}$ бўлганлигидан $\text{n} + 1 = p_2\text{n}$, бундан n=1 ва $p_2 = 2$, бу эса ўринли эмас. Демак, $\alpha \neq 1$. Агар $\alpha = 2$ бўлса, $7(1 + p_1)(1 + p_2) = 12\,p_1p_2$ ёки $7 + 7(p_1 + p_2) = 5p_1 p_2$, бундан $p_1 = 7$ (ёки $p_2 = 7$) ва $p_2 = 2$ (ёки $p_1 = 2$), бундай бўлиши мумкин эмас. Демак, $\alpha \neq 1$. $\alpha = 3$ бўлганда $5(1 + p_1)(1 + p_2) = \gamma\, p_1 p_2$ ёки $5 + 5(p_1 + p_2) = 3\,p_1 p_2$, бундан $p_1 = 5$ ва $p_2 = 3$. Шундай қилиб, масала шартини қаноатлантирувчи энг кичик натурал сон $m =23\cdot 3\cdot 5 = 120$ бўлади.

102. Ечиш. Шарт бўйича, $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$ ва $(1+p_1)(1 + p_2) = 6$, бўлганлигидан $\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$ ва $m=p_1 p_2^2$. Бундан ташқари, $S(m)=28$, яъни $(1+p_1)(p_2^2+p_2+1)=28$, бундан $1+p_1=4$ ва $p_2^2+p_2+1=7$, яъни $p_1=3$, $p_2=2$. Демак, $m=3\cdot 2^2=12$.

103. Ечиш. Масала шартига кўра, $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$, $(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)=15$, бундан $2\alpha_1+1=3$ ва $2\alpha_2+1=5$, яъни $\alpha_1=2$, $\alpha_2=1$. Демак, $\tau(m^2)=(3\alpha_1+1)(3\alpha_2+1)=4\cdot 7=28$.

104. Ечиш. Шарт бўйича $(1 + 2\alpha_1)(1 + 2\alpha_2) = 81$, икки ҳол ўринли бўлиши мумкин: $(1 + 2\alpha_1)(1 + 2\alpha_2) = 3\cdot 27$ ва $(1 + 2\alpha_1)(1+2\alpha_2) = 9\cdot 9$, яъни $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2=13$ ва $\alpha_1=\alpha_2=4$, булардан $\tau(m^3) = 160$ ёки $\tau(m^3) = 169$.

105. Кўрсатма. $d_1=\frac{N}{d_n}, d_2=\frac{N}{d_{n-1}},\ldots$ дан фойдаланинг.

108. $N = 2\cdot 3\cdot 5^4$.

109. Ечиш. . $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$ бўлсин, у ҳолда $\tau(m)=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_\kappa)$. Агар $\tau(m)\equiv 1(mod 2)$ бўлса, у ҳолда $1+\alpha_i\equiv 1(mod 2)$ бўлади, бундан $\alpha_i\equiv 0(mod 2)$, бу эса , m – бутун соннинг квадрати бўлишини кўрсатади. Тескаридан, агар

m – бутун соннинг квадрати бўлса, у ҳолда $\alpha_i \equiv 0 (mod\ 2)$ ва бундан $\tau(m) \equiv 1 (mod\ 2)$ ни ҳосил қиламиз.

110. а) 2; б) 4; с) 4; д) 5; е) 9; ф) 15; г) 46; х) 95.

111. а) ≈13; 13%; б) ≈ 22; 12%; с) ≈ 80; 16%.

113. Ечиш. $\pi(p) < p$ тенгсизликдаги $-p < -\pi(p)$, $p\pi(p) - p < (p - 1)\pi(p)$ ва $\frac{\pi(p)-1}{p-1} < \frac{\pi(p)}{p}$ ни ҳосил қиламиз. $\pi(p)-1 = \pi(p-1)$ дан $\frac{\pi(p-1)}{p-1} < \frac{\pi(p)}{p}$ келиб чиқади. $\pi(m-1) = \pi(m)$ тенгсизликдан $\frac{\pi(m)}{m} < \frac{\pi(m-1)}{m-1}$ ни оламиз.

114. а) 200; б) 192; с) 432; д) 320; е) 400; ф) 1152.

115. а) 288; б) 24; с) 480; д) 388800.

116. 88.

117. Ечиш. Масала шарти бўйича, $a = 3^{\alpha} 5^{\beta} 7^{\Upsilon}$. Бу соннинг Эйлер функцияси $\varphi(a) = 3^{\alpha-1} \cdot 2 \cdot 5^{\beta-1} 4 \cdot 7^{\Upsilon-1} \cdot 6 = 2^4 3^{\alpha-1} 5^{\beta-1} 7^{\gamma-1}$. Шартга кўра, $\varphi(a) = 3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, демак $2^4 \cdot 3^{\alpha} \cdot 5^{\beta-1} \cdot 7^{\gamma-1} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, бундан $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=1$ ва $a=3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 = 7875$.

118. Ечиш. Шарт бўйича: $\varphi(a) = \varphi(pq) = (p-1)(q-1) = 120$ ва $p-q = 2$. Натижада $\begin{cases}(p-1)(q-1)=120 \\ p-q=2\end{cases}$; системани ҳосил қиламиз. Унинг ечими $p=13$, $q=11$. Демак, $a=pq=143$.

119. Ечиш. Шарт бўйича $\varphi(a) = \varphi(p_2q_2) = p(p-1)q(q-1)$ ва $\varphi(a) = 11424 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17$. Демак, $p(p-1)q(q-1) = 2^5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17$ ёки $p(p-1)q(q-1) = 17 \cdot 16 \cdot 7 \cdot 6$ бундан $p = 17$, $q = 7$ ва $a = 17^2 \cdot 7^2 = 14161$.

120. Ечиш. Шарт бўйича,

$\varphi(a) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\ldots p_n^{\alpha_n-1}(p_n-1)$ ва $\varphi(a) = 462000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$.

Демак, $\varphi(a) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\ldots p_n^{\alpha_n-1}(p_n-1) = 24 \cdot 3 \cdot 53 \cdot 7 \cdot 11$

Ўнг томондаги кўпайтувчиларни чап томондаги каби кўринишда кўпайтувчиларнинг ўрнини алмаштирамиз:

$\varphi(\tilde{a}) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\ldots p_n^{\alpha_n-1}(p_n-1) = (11 \cdot 10)(7 \cdot 6)(5^2 \cdot 4)$, бундан $p_1 = 11$ ва $\alpha_1 = 2$; $p_2 = 7$ ва $\alpha_2 = 5$; $p_3 = 2$ ва $\alpha_3 = 3$; $a = 11^2 \cdot 7^2 \cdot 5^3 = 741125$.

121. Ечиш. $(a, m)=1$ шарт бажарилганда $(a, m-a) = 1$ бажарилишини кўрсатамиз. Тескарисини фараз қиламиз, яъни $(a, m-a) = d > 1$, у ҳолда $a = dk$, $m - a = dt$, бундан $m = d(t+k)$ ва $(a, m) = d > 1$, бу эса $(a, m) = 1$ шартга зиддир. m дан кичик ва у билан туб бўлган сонларни тартиб билан ёзамиз:

$1, a_1, a_2, \ldots, m - a_2, m - a_1, m - 1$; бу қаторда $\varphi(m)$ та сон бор. Ҳар қандай a_i сонга $m - a_i$ сон мос келади; улар йиғиндиси $a_i + (m - a_i) = m$, бу жуфтликлар сони $\frac{1}{2}\varphi(m)$, демак, $S = \frac{1}{2}m\varphi(m)$

122. а) 24; б) 54; с) 37500.

124. Биринчи ҳол $(a, 2) = 1$ бўлганда ўринли, иккинчи ҳол эса $(a, 2) = 2$
бўлганда ўринли бўлади.

125. а) Ечиш. $\varphi(4n + 2) = \varphi(2)\varphi(2n + 1) = \varphi(2n + 1)$;

б) Ечиш. Агар $(n, 2)=1$ бўлса, у ҳолда $\varphi(4n) = \varphi(4)\varphi(n) = 2\varphi(n)$.
Агар
$n=2^{\alpha} \cdot k$ бўлиб, $(k, 2) = 1$ бўлса, у ҳолда

$$\varphi(4n) = \varphi(2^{\alpha+2} \cdot k) = 2^{\alpha+1} \cdot \varphi(k) = 2 \cdot \varphi(2^{\alpha+1} \cdot k) = 2\varphi(2n).$$

126. а) $x = 3$; б) $x = 3$; с) тенглама $p > 2$ да ечимга эга эмас. $p = 2$ да ихтиёрий натурал сонлар учун ўринли.

127. $\varphi(b)$.

128. а) 4 каср: $\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}$. с) 12 каср.

129. $\varphi(2) + \varphi(3) + \ldots + \varphi(n)$.

130. а) 9; б) 31; с) 71.

131. Ечиш. Шарт бўйича $(300, x) = 20$ ва барча x лар 300 дан кичик, 20 га қисқартиргандан сўнг $(15, y) = 1$, бу ерда барча y лар 15 дан кичик ва 15 билан ўзаро туб; улар сони $\varphi(15) = 8$. Бу $y = 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$ сонлар ва бундан $x = 20, 40, 80, 140, 160, 220, 260, 280$.

132. $\varphi(45) = 24$.

133. $\varphi(36) = 12$.

134. Кўрсатма. $\varphi(a)$ нинг жуфтлиги 121 - масала ёрдамида келиб чиқади.

135. Ечиш. Агар $(m, 2) = 1$ бўлса, у ҳолда $\varphi(m) = \varphi(2m)$.

136. Ечиш. m ва n ларнинг туб бўлувчиси p учун $\varphi(mn)$ сонда $1-\frac{1}{p}$, кўпайтувчи бор, $\varphi(m)\varphi(n)$ – сонида эса $(1-\frac{1}{p})^2$, кўпайтувчи бор.

$1-\frac{1}{p}<1$,

бўлганлиги сабабли $\varphi(m)\varphi(n) < \varphi(mn)$. Хусусий ҳолда $\varphi^2(m) \le \varphi(m^2)$, тенглик $m = 1$ бўлганда бажарилади.

138. Ечиш. $\varphi(mn) = \varphi(\delta\mu) = \varphi(\delta)\varphi(\mu)\cdot\frac{\delta}{\gamma^t} = \delta\varphi(\mu)$.

139. p^α.

140. m.

142. а) Ечиш. Гаусс формуласидан $x = 2^y 3^z 5^y$ ($y \ge 0$, z = 0; 1 ва u = 0; 1) келиб чиқади. $x = 2^y; 2^y \cdot 3; 2^y \cdot 5; 2^y \cdot 15; 3; 5; 15$ имкониятларни текшириши $x = 2^{\alpha+1}; 2^\alpha \cdot 3; 2^{\alpha-1} \cdot 5; 2^{\alpha-2} \cdot 15$ ($\alpha \ge 2$); 15 ($\alpha = 3$)ларни беради;

б) $p \neq 3$ да ечим йўқ. $r = 3$ да тенгламаларни ихтиёрий бутун $x \ge 2$ қийматлар қаноатлантиради.

143. а) ечими йўқ.

II. БОБ. ТАҚҚОСЛАМАЛАР НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

158. Ечилиши. Агар $a = mq+r$ бўлса, у ҳолда $a - r = mq$ ва $a \equiv r\ (mod\ m)$.

159. а) x = 3q; в) x = 1+2q.

160. 2r нинг бўлувчилари.

161. 8 нинг бўлувчилари.

162. Ечилиши. Агар n тоқ сон бўлса, у ҳолда n-1 ва n+1- кетма-кет келадиган жуфт сонлар. Агар улардан бири 2 га каррали бўлса, у ҳолда иккинчиси камида 4 га каррали, шунинг учун $(n-1)(n+1) = n^2 - 1 \equiv 0\ (mod\ 8)$, ёки $n^2 \equiv 1(mod\ 8)$.

163. Ечилиши. Берилган таққосламанинг иккала томонини 4 га кўпайтирамиз:

$400a + 40b + 4c \equiv 0\ (mod\ 21)$, лекин $400a \equiv a\ (mod\ 21)$, $40b \equiv -2\ (mod\ 21)$,

$4c \equiv 4\ (mod\ 21)$.

Охирги учта таққосламани ҳадма-ҳад қўшамиз:

$400a + 40b + 4c \equiv a - 2b + 4c(mod\ 21)$. Бу ердан $a - 2b + 4c \equiv 0(mod\ 21)$ ни хосил киламиз.

165. Ечилиши. $11\cdot31-1=340=5\cdot68$ ва $2^5\equiv-1(mod 11)$ бўлганлиги учун охирги таққосламанинг иккала томонини 68-даражага кўтариб, $(25)^{68}=2340=211\cdot31-1\equiv1$(мод11) ни ҳосил қиламиз. Сўнгра 25≡1(мод31) дан $(2^5)^{68}=2^{11\cdot31-1}\equiv1$(мод31) ни топамиз. Бу ердан $2^{11\cdot31-1}\equiv1$(мод11·31). Бу таққосламани иккала томонини 2 га кўпайтириб, изланаётган таққосламани топамиз.

166. Ечилиши. x = 3n + 1 бўлганда бўлинувчи $1+3\cdot27^n+9\cdot729^n$ га тенг бўлади. Берилган модул бўйича $27^n = 729^n \equiv 1$, шунинг учун

$1 + 3\cdot27^n + 9\cdot729^n \equiv 1 + 3 + 9 = 13$.

169. 4.

170. Ечилиши. Шартга асосан, $a = b + pnq$ (q=0, ±1, ±2, ...). Бу тенгликнинг иккала томонини r – даражага кўтариб, $a^r = b^r + p^n+1 \cdot \alpha$ (α = 0, ±1, ±2, ...) ни ҳосил қиламиз.

172. Кўрсатма. $a^4 \cdot 10^4 + a_3a_2\cdot10^2 + a_1a_0 \equiv 0(mod\ 33)$ таққосламанинг чап томонидан модулга каррали бўлган $999a_4 + 99a_3a_2$ сонни айириш керак.

173. Ечилиши. а) $9^{10} \equiv 1(mod\ 100)$ бўлганлиги учун $9^{10q+r} \equiv 9^r\ (mod\ 100)$.

$9^9 \equiv 9(mod\ 10)$ бўлганлиги учун $9^{9^9} \equiv 9^9 \equiv 89\ (mod\ 100)$. Изланаётган рақамлар 8 ва 9;

б) $7^4 = 2401 \equiv 1(mod\ 100)$ бўлганлиги учун $7^{100} \equiv 1(mod\ 100)$, бу ердан $7^{9^{9^9}} \equiv 7^{100q+89} \equiv 7^{89}\ (mod\ 100)$. $7^{88} \equiv 1(mod\ 100)$ бўлганлиги учун $7^{89} \equiv 7\ (mod\ 100)$. Изланаётган рақамлар 0 ва 7.

174. x ≡ 0; 1; 2; ... ; 9 (mod 10).

176. а) x ≡ 1; 3; 7; 9 (mod 10); б) x ≡ 2; 4; 6; 8 (mod 10); с) x ≡ 5 (mod 10);

д) x ≡ 0 (mod 10).

177. а) m = 9 да чегирмаларнинг тўла системалари:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0; -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4. Чегирмаларнинг келтирилган системалари:

1, 2, 4, 5, 7, 8; -8, -7, -5, -4, -2, -1; -4, -2, -1, 1, 2, 4.

б) m = 8 да чегирмаларнинг тўла системалари:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0; -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4
ёки -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.

Чегирмаларнинг келтирилган системалари: 1. 3, 5, 7; -7, -5, -3, -1; -3, -1, 1, 3.

178. Ечилиши. Берилган синф сонларининг умумий кўринишидан қуйидагиларни топамиз:

$25 = 8\cdot3 + 1$; $-20 = 8(-3) + 4$; $16 = 8\cdot2 + 0$; $46 = 8\cdot5 + 6$; $-21 = 8(-3) + 3$;

$18 = 8\cdot2 + 2$; $37 = 8\cdot4 + 5$; $-17 = 8(-3) + 7$. Ҳосил қилинган қолдиқларнинг ҳаммаси ҳар хил ва улар манфий бўлмаган энг кичик чегирмаларнинг тўла системасини ташкил қилади: 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, демак, берилган сонлар ҳам чегирмаларнинг тўла системасини ташкил қилади.

184. Ечилиши. Ҳар бир сонни 6 га бўлиб, 0, 2, 1, 1, 4, 5, 2 қолдиқларни ҳосил қиламиз. Топилган манфий бўлмаган чегирмалардан (нолдан ташқари) 6 ни айириб, 0, -4, -5, -5, -2, -1, -4 – абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик мусбат бўлмаган чегирмаларни топамиз. Абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик чегирмалар 0, 2, 1, 1, -2, -1, 2 лардан иборат.

185. a) $x_1 \equiv 1 (mod\ 3)$, $x_2 \equiv 2\ (mod\ 3)$;
b) $x_1 \equiv 1 (mod\ 5)$, $x_2 \equiv 2\ (mod\ 5)$;
c) $x \equiv 2\ (mod\ 5)$;
d) ечимлари йўқ;
e) $x \equiv 3\ (mod\ 5)$;
f) $x_1 \equiv 1 (mod\ 4)$, $x_2 \equiv 3\ (mod\ 4)$;
g) $x_1 \equiv 1$(мод 5), $x_2 \equiv 3\ (mod\ 5)$.

186. a) $x \equiv 3\ (mod\ 7)$; б) $x \equiv 2\ (mod\ 5)$; c) $x \equiv -3\ (mod\ 11)$;
d) $x \equiv -3\ (mod\ 7)$; e) $x \equiv -1\ (mod\ 7)$; f) $x \equiv -4\ (mod\ 15)$.

189. a) $x \equiv 11\ (mod\ 15)$; b) $x \equiv 2\ (mod\ 8)$;
c) $x \equiv 4\ (mod\ 13)$; d) $x \equiv 20\ (mod\ 37)$;
e) $x \equiv 7\ (mod\ 25)$; f) $x \equiv 5\ (mod\ 11)$; g) $x \equiv 5\ (mod\ 11)$; h) $x \equiv 11\ (mod\ 24)$.

194. Ечилиши. $x = u + \alpha$ алмаштиришни киритиб,

$(u + \alpha)^n + a_1(y + \alpha^{n-1} + \ldots + a_n) \equiv 0(mod\ m)$ ни хосил қиламиз. Бу ердан қавсларни очиб чиқиб, қайтадан гуруҳлашдан сўнг

$u^n + (n\alpha + a_1)\ y^{n-1} + \ldots + (\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n) \equiv 0(mod\ m)$ ни ҳосил киламиз. α ни шундай танлаймизки, $n\alpha + a_1 \equiv 0\ (mod\ m)$ ўринли бўлсин. Натижада, u^{n-1} ни ўзида саклайдиган ҳад йўқолади: $u^n + b_1y^{n-2} + \ldots + b_n \equiv 0\ (mod\ m)$.

195. Ечилиши. $n^\alpha + a_1 \equiv 0\ (mod\ m)$ таққосламани тузамиз. Шартдан
$3\alpha + 5 \equiv 0\ (mod\ 13)$ келиб чикади, унинг ечими: $\alpha \equiv 7\ (mod\ 13)$, демак, $x = u + 7$ алмаштирамиз. Бу алмаштиришни берилган таққосламага қўйиб,
$(u + 7)^3 + 5(y + 7)^2 + 6(u + 7) - 8 = u^3 + 26y^2 + 223u + 622 \equiv u^3 + 2u - 2 \equiv 0(mod 13)$ ни ҳосил киламиз.

196. a) (5,10)=5 ва 7 сони 5 га бўлинмаслиги учун берилган таққослама ечимга эга эмас. б) $x \equiv 7(mod\ 13)$; c) $x \equiv 8\ (mod\ 17)$; д) $x \equiv 9\ (mod\ 19)$;
e) $x \equiv 11\ (mod\ 58)$.

197. a) $x \equiv 6(mod\ 19)$; b) ечими йўқ; c) $x \equiv 49(mod\ 153)$; d) $x \equiv 3(mod 183)$;
e) $x \equiv 47\ (mod\ 241)$. f) ечими йўқ; g) $x \equiv 41, 190, 339\ (mod\ 447)$;
h) $x \equiv 61, 248\ (mod\ 422)$; j) $x \equiv 39, 196, 353\ (mod\ 471)$.

198. a) ечими йўқ; b) $x \equiv 3, 8, 13, 18, 23\ (mod\ 25)$; c) $x \equiv 73\ (mod\ 177)$;
d) $x \equiv 29\ (mod\ 311)$; e) $x \equiv 48\ (mod\ 219)$;
f) $x \equiv 9, 32, 55, 78, 101, 124\ (mod\ 138)$; g) $x \equiv 11, 28, 45\ (mod\ 51)$.

199. Ечилиши. a) $ax \equiv b\ (mod\ 21)$, бу ерда $(a, 21) = 1$, $b \in Z$;

b) $ax \equiv b(mod\ 21)$ таққослама ечимга эга бўлиши учун, масалан, 3 та ечимга эга бўлиши учун $(a, 21)=3$ ва b сони 3 га бўлиниши зарур ва етарлидир;

c) бундай таққосламани тузиш мумкин эмас.

200. 1 июнь.

201. Ечилиши. Қўшиб ёзиладиган сонни x билан белиглаймиз, у ҳолда

$523\cdot10^3 + x \equiv 0\ (mod\ 7\cdot8\cdot9)$, бу ердан $x \equiv -523000 \equiv -352 \equiv 152\ (mod\ 504)$, ёки $x = 504t + 152$. x нинг қиймати $t = 0$ ва $t = 1$ да уч хонали бўлади. Бу ерда $x_1 = 152$, $x_2 = 656$.

202. $x \equiv 200\ (mod\ 440)$, яъни $x \equiv 200; 640$.

203. $x \equiv 30\ (mod\,31)$, яъни $x = 30, 61, 42.$

204. a) $x = 3 + 4t$, $y = 1 - 3t$; b) $x = 3 + 13t$, $y = -3 + 8t$; c) $x = 22 - 37t$, $y = -25 + 43t$; d) $x = 17 + 37t$, $y = 20 + 45t$; e) $x = 1 + 16t$, $y = 1 + 27t$; f) ечимга эга эмас g) $x = 4 + 17t$, $й = -11 - 53t$; h) $x = 47 + 105t$; $y = 21 + 47t$; i) ечими йўқ; j) $x = 4 + 16t$, $y = 7 - 11t$; k) $x = 9 + 37t$, $y = 3 + 12t$; l) $x = -7 + 15t$, $y = 12 - 23t$.

205. $x = 2 - 4t$, $y = 4 + 3t$. $t = 0$ ва $t = -1$ да талаб қилинган ҳосил бўлади.

206. $x = 3 - 5t$, $y = 28 + 3t$.

207. a) $x \equiv 49$ (mod 420); b) $x \equiv 4126$ (mod 6300); c) $x \equiv 85056$ (mod 130169); d) $x \equiv 9573$ (mod 13923); e) ечими йўқ; f) ечими йўқ;

208. $x \equiv 25$ (mod 60).

209. 299 ва 439.

210. b) ечими йўқ; c) ечими йўқ; $y_1 \equiv 7 (mod\ 12)$ $x_2 \equiv 4\ (mod\ 12)$, $y_2 \equiv 7\ (mod\ 12)$; $x_3 \equiv 8\ (mod\ 12)$, $y_3 \equiv 7\ (mod 12)$.

III БОБ. ДИОФАНТ ТЕНГЛАМАЛАРИ

211. (3,2)
212. (4,3)
213. (10,9001), (10,10999), (-10, 10999), (-10,9001)
214. $(2^{30};0)$, $(0;2^{30})$
215. (16;12;1)
216. (-4;9), (14;-21), (4;-9), (-14;21)
217. (-10;-11), (-10;9), (-3;-5), (-3;3), (2;-5), (2;3), (9;9), (9;-11)
218. (1;2;3), (3;2;7
219. $m=1,n=1$
220. $n=2$, $m=3$
221. . $x=10$, y=3
222. . *ечимга эга эмас.*
223. . $\frac{5\pi}{2}+5\pi t, t \in Z.$
224. . $\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\left(q+(1+4q)t\right)\right), b=\frac{1+4p}{1+4q}a, a \neq 0, q, t, p \in Z.$
225. . $\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}; \frac{\pi}{10}+\frac{m\pi}{5}, n, m \in Z.$

ГЛОССАРИЙ

№	Ўзбек тилида	Рус тилида	Инглиз тилида
1.	Тўплам	Множество	Lots of
2.	Тўплам элементи	Элементы множества	Elements of the set
3.	Бўш тўплам	Пустое множество	Empty set
4.	Тўплам кисми	Подмножество	Subset
5.	Тўпламлар тенглиги	Равенства множеств	Equalities of sets
6.	Сонлар	Чисел	Numbers
7.	Соннинг кўрсаткичи	Показател количества	Quantity indicator
8.	Бутун сонлар	Селых чисел	Of numbers
9.	Туб сонлар	Номера ванны	Tub numbers
10.	Мураккаб сонлар	Сложные числа	Compleks numbers
11.	Арифметик прогресия	Арифметическая прогрессия	Arithmetic progression
12.	Геометрик прогресия	Геометрическая прогрессия	Geometric progression
13.	Ўзаро бир қийматли мослик	Взаимно однозначные соотвецтвия	Mutual value compatubility
14.	Эквивалент тўпламлар	Эквивалентные множества	Eqiuvalent paskages
15.	Тўплам қуввати	Мощност множества	Paskage capacity
16.	Саноқли тўплам	Счетное множество	Countless collection
17.	Саноқсиз тўплам	Несчетное множество	Countless collections
18.	Натурал сонлар	Натуралные числа	Natural numbers
19.	Бўлиниш муносабати	Разделителный подход	The division approach
20.	Энг катта умумий бўлувчи (ЭКУБ)	Крупнейший генерал глава	The largest general head
21.	Энг кичик умумий каррали (ЭКУК)	Минималная общая кратност	Minimum total multiplicity
22.	Алгоритм	Алгоритм	Algorithm
23.	Касрлар	Фраксии	Fractions
24.	Занжир касрлар	Цепные дроби	Chain fractions
25.	Чексиз занжир касрлар	Бесконочные цепные дроби	Infinite chain fractions
26.	Узлуксиз касрлар	Непрерывные дроби	Continuous fractions
27.	Тенгламалар	Уравнения	Equations
28.	Чизиқли тенгламалар	Линейные уравнения	Linear equations
29.	Икки номаълумли тенгламалар	Два неизвестных уравнения	Two unknown equations
30.	Аниқмас тенгламалр	Неопределенные	Indefinite equations

		уравнения	
31.	Ечимлар	Решения	Solutions
32.	Мусбат ечимлар	Положителные решения	Positive solutions
33.	Номаълум сон	Неизвестный номер	Unknown number
34.	Функциялар	Функции	Features
35.	Таққосламалар	Сравнения	Comparisons
36.	Юқори даражали таққосламалар	Сравнения высокого уровня	High-level comparisons
37.	Икки ҳадли таққосламалар	Двумерные сравнения	Two-dimensional comparisons
38.	Тенгсизликлар	Неравенства	Inequalities
39.	Чегирмалар синфи	Дискотный класс	Discount class
40.	Кўпайтувчиларга ажратиш	Разделит на множители	Divide into multipliers
41.	Комбинаторлик масала	Комбинаторная задача	Combinarny sum
42.	Комбинаторика	Комбинаторика	Combinatoricc
43.	Ўрин алмаштириш	Перастановки	Permutations
44.	Коэффициент	Коэффициент	Coefficient
45.	Комбинация	Комбинация	Combination
46.	Нюьтон биноми	Бином Нюьтона	Nyuton bean
47.	Биномиал коэффициент	Биноминалные коэффициенты	Binomial coefficients
48.	Ўринлаштириш	Перемещение	Moving
49.	Умумий ечим	Общее решение	Common decision
50.	Бир жинсли система	Однородная система	Homogeneous system
51.	Скаляр	Скаляр	Scalar
52.	Натурал сонлар тўплами	Множества натуралных чисел	Sets of natural numbers
53.	Бутун сонлар тўплами	Множества селых чисел	Lots of numbers
54.	Рационал сонлар тўплами	Множества рационалных чисел	Sets of rational numbers
55.	Иррационал сонлар тўплами	Множества иррационалных чисел	Sets of irrational numbers
56.	Ҳақиқий сонлар тўплами	Множества действителных чисел	Reality numbers
57.	Кўпҳад -	Многочлен	Polynomial
58.	Модул	Модул	Module
59.	Мусбат	Положителный	Positive
60.	Манфий	Отрицателный	Negative

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. Александров В.А. Задачник-практикум по теории чисел / В. А. Александров, С. М. Горшенин. – М.: Просвещение, 1972.

2. Александров В.А., Горшинин С.М. Задачник-практикум по теории чисел. Для студентов заочных отделений физико-математических факультетов педагогических институтов. Изд. второе, испр. И доп. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1963. – 72 с.

3. Алфутова Н.Б., Устинов А.В. “Алгебра и теория чисел”, Сборник задач для математических школ.-М.: МЦНМО, 2002,-264 с.

4. Аюпов Ш., Рихсиев Б., Қучқоров О. Математика олимпиадалар масалалари. 1,2 қисмлар - Т.: Фан, 2004.

5. Барабанов Е.А. Задачи заключительного тура минской городской математической олимпиады школьников / Е.А. Барабанов, И.И. Воронович, В.И. Каскевич, С.А. Мазаник. – Минск, 2006 г.- 352 с.

6. Басова А.А., Шубин М.А., Эпштейн Л.А. Лекции и задачи по математике. Пособие для учителей. – М.: Просвещение. 1981. – 96 с.

7. Башмакова И.Г. Диофант и диофантовы уравнения / И.Г. Башмакова. – М.: Наука, 1972. – 68 с.

8. Бендукидзе А., Сулаквелидзе А. Вычисление сумм // Квант, № 9. 1970.

9. Берлов С.Л. Петербургские математические олимпиады / С.Л. Берлов, С.В. Иванов, К.П. Кохась. – СПб.: Лань, 2003. – 532 с.

10. Боревич З. И. Теория чисел / З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич. – М.: Наука, 1972.

11. Бошмаков М.И., Беккер Б.М., Гольговей В.М., Ионин Ю.И. Алгебра и начала анализа: задачи и решения. Учебное пособие. – М.: Высшая школа. 2004. – 296 с.

12. Бухштаб А.А Теория чисел М:1966,- 347 с.

13. Бухштаб А.А, Виноградов И.М Сонлар назарияси асослари Т: 1959 257-бет.

14. Буштаб А.А. Теория чисел. / А.А. Буштаб. – М.: Просвещение, 1966. – 385 с.

15. Ван дер Варден Е.Л Алгебра М 1979, 483-с.

16. Василенко О. Н., Галочкин А. И. Сборник задач по теории чисел. — М.: изд-во Моск. ун-та, 1995.

17. Васильев Н.Б. Заочные математические олимпиады / Н.Б. Васильев, В.Л. Гутенмахер, Ж.М. Раббот, А.Л. Том. – М.: Наука, 1986. – 230 с.

18. Виленкин Н.Я. За страницами учебника математики: Пособие для учащихся 5-6 классов средней школы / Н.Я. Виленкин, И.Я. Депман. – М.: Просвещение, 1989. – 287 с.

19. Виноградов И. М. Основы теории чисел / И. М. Виноградов. – М.: Наука, 1972.

20. Воробьев Н.Н. Признаки делимости. Серия "Популярные лекции по Математике"— Вып. 39. — М.: Наука, 1963.

21. Гильфорд А.О. Решение уравнений в целых числах / А.О. Гильфорд. – М.: Наука, 1983. – 64 с.

22. Грибанов В.У. Сборник упражнений по теории чисел / В.У. Грибанов, П.И. Титов. – М.: Просвещение, 1964. – 144 с.

23. Грибанов В.У., Титов П.И. Сборник упражнений по теории чисел. Учебное пособие для физикоматематических факультетов пед. институтов. – М.: Просвещение, 1964. – 142 с.

24. Грибанов В.У., Титов П.И. Сборник упражнений по теории чисел. Учебное пособие для физикоматематических факультетов пед. институтов. – М.: Просвещение, 1964. – 142 с.

25. Гринько, Е.П. Методы решения алгебраических олимпиадных задач: учебно-методич. пособие / Е.П. Гринько ; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест: БрГУ, 2012. – 108 с.

26. Гринько, Е.П. Система работы с интеллектуально одаренными детьми: монография / Е.П. Гринько; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест: Изд-во БрГУ, 2009. – 229 с.

27. Довбыш Р.И. Математические олимпиады: 906 самых интересных задач и примеров с решениями [Текст] / Р.И. Довбыш, Н.А. Кулеско, В.В. Лиманский, Л.Л. Оридрога, Л.Л. Потемкина, Н.Л. Трегуб. – Ростов н/Д: Феникс; Донецк: издательский центр «Кредо», 2006. – 335 с. – (Большая перемена).

28. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика / Г. Дэвенпорт. – М.: Наука, 1965.

29. Е.П. Гринько, А.Г. Головач Методы решения диофантовых уравнений при подготовке школьников к олимпиадам Брест БрГУ имени А.С. Пушкина 2013.

30. Задачи Минской городской математической олимпиады младших школьников / Е.А. Барабанов [и др.] – Мн.: Бел. ассоц. «Конкурс», 2005. – 352 с.

31. Задачи районного тура Минской городской математической олимпиады школьников (1991—2001 гг.) / Е.А. Барабанов [и др.]. – Мн.: Фаритэкс. 2002. – 181 с.

32. Зарубежные математические олимпиады / Конягин С.В., Тоноян Г.А., Шарыгин И.Ф. и др.; под ред. И. Н. Сергеева – М.: Наука, Физматлит, 1987.

33. Исмаилов Ш.Н. Сонлар назарияси. Т: 2008 й. - 63 б.

34. Казачек Н.А., Перлатов Г.Н., Виленкин Н.Я., Бородин А.И. Алгебра и теория чисел. Учебное пособие для студентов-заочников физико-математических факультетов педагогических институтов. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1984. – 200 с.

35. Калужнин Л.А. Введение в общую алгебру. М: «Наука» - 1973.

36. Кострикин А.И. , и др. Сборник задач по алгебру. М.: Наука,1986.

37. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М.: Наука,1977.

38. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть III основные структуры. М: «Наука» - 2004.

39. Кот В.И. Как одолеть олимпиадные задачи по математике: Пособие для учителей общеобразовательной школы / В.И. Кот. – Мн.: Бестпринт, 2002. – 400 с.

40. Кочева А.А. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Ч.3.Учебное пособие для студентовзаочников II курса физико-математических факультетов педагогических институтов. – М.: Просвещение, 1984. – 42 с.

41. Криллов А.А. Элементы теории представлений. М.: «Наука» 1978.

42. Кудреватов Г. А. Сборник задач по теории чисел / Г. А. Кудреватов. – М.: Просвещение, 1970.

43. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. - М: Высшая школа, 1979.

44. Курош А.Г. Олий алгебра курси. Т: Ўкитувчи, 1975.

45. Ляпин Е.С., Евсеев А.Е. Алгебра и теория чисел. Ч. I. Числа: Учебное пособие для студентов физикоматематических факультетов педагогических институтов. – М.: Просвещение, 1974. – 383 с.

46. Мазаник А.А. Реши сам / А.А. Мазаник, С.А. Мазаник. – Мн., Народная асвета, 1992. – 256 с.

47. Маркова И.С. Новые олимпиады по математике / И. С. Маркова. – Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 315 с.: ил. – (Здравствуй, школа!).

48. Московские математические олимпиады 1993 – 2005. / Р.М. Федоров и др. Под ред. В.М. Тихомирова – М.: МЦНМО, 2006. – 456 с.

49. Нечаев В.А. Задачник-практикум по алгебре. – М.: Просвещение,1983.

50. Никитин Н.Д. Алгебра и теория чисел: учебное пособие / - Пенза, 2010- 96 с.

51. Ожигова Е.П. Что такое теория чисел. Изд. 2-е, стереотип. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 96 с.

52. Окунев Л.Я. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Просвещение, 1964.

53. Петраков И.С. Содержание и методика подготовки и проведения олимпиад (на примере международных олимпиад) / И.С. Петраков. – М.: 1973, – 152 с.

54. Прасолов В.В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу: учебное пособие / В.В. Прасолов. – М.: МЦНМО, 2007. – 608 с.: ил.

55. Серр Ж.-П. Курс арифметики / Ж.-П. Серр. – М. : Мир, 1972.

56. Соловьев Ю. П. Задачи по алгебре и теории чисел для математических школ. Ч. 1 - 3. — М.: школа им. А. Н. Колмогорова, 1998.

57. Соловьев Ю.П. Задачи по алгебре и теории чисел для математических школ. Ч. 1 - 3. — М.: школа им. А.Н. Колмогорова, 1998.

58. Сонлар назарияси асосларидан масала ва машқлар. “Алгебра ва сонлар назарияси” фанидан амалий машғулотлар учун услубий тавсиялар. Услубий қўлланма. – Самарқанд: СамДУ н, 2011. – 80 бет.

59. Фадеев Д.К. Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984.

60. Фадеев Д.К. Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука, 1977.

61. Фарков А.В. Математические олимпиады в школе / А. В. Фарков. – 5-е изд. – М.: Айрис-Пресс, 2006. – 176 с.: ил. – (Школьные олимпиады).

62. Хинчин А.Я. Цепные дроби. – М., Гос. Изд-во Физ. - Мат. Лит., 1961.

63. Хинчин, А.Я. Цепные дроби. / А.Я. Хинчин. – М.: Наука, 1978. – 111 с.

64. Шнеперман Л. Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел. Учебное пособие для физикоматематических факультетов педагогических институтов. М: Высшая школа, 1982. – 223 с.

65. Юнусов А.С., Афонина С.И., Бердиқулов М.А., Юнусова Д.И. Қизиқарли математика ва олимпиада масалалари. Т: 2007.

66. “Математика в школе” (Россия), “Квант” (Россия), “Соровский образовательный журнал” (Россия), “Crux mathematicorum with mathematical Mayhem” (Канада), “Физика, математика ва информатика” (Ўзбекистон) журналлари.

67. Andreescu T., Andrica D,. Feng Z. 104 Number Theory Problems. Boston: Birkhäuser, 2007

68. Engel A.. Problem-Solving Strategies. Springer-Verlag New York Inc. 1998.

69. H. Lee. Problems in elementary number theory.

70. Mathematical Olympiads, Problems and solutions from around the world, 1998-1999. Edited by Andreescu T. and Feng Z. Washington. 2000.

71. T. Andreescu, D. Andrica, Z. Feng. 104 Number Theory Problems. Boston: Birkhäuser, 2007

72. Xojiev J.X. Faynleyb A.S. Algebra va sonlar nazariyasi kursi. T: «O‘zbekiston», 2001 y.

73. Yunusov A., Yunusova D. Algebra va sonlar nazariyasidan modul texnologiyasi asosida tuzilgan nazorat topshiriqlari to’plami. TDPU,2004.

74. http://my.netian.com/ideahitme/eng.html

75. Math Links, http://www.mathlinks.ro

76. Art of Problem Solving, http://www.artofproblemsolving.com

77. Math Pro Press, http://www.mathpropress.com

78. Математические задачи, http://www.problems.ru

МУНДАРИЖА

Махмудова Дилфуза Мелиевна,
Дўсмуродова Гавҳар Холбоевна,
Эшмаматов Исмоил Абсаламович,
Абдуқодирова Патмахон Турсунбоевна.

“Алгебра ва сонлар назарияси”

Ўкув қўлланма

Муҳаррир М.А.Хакимов

Босишга рухсат этилди 27.10.2020й. Бичими 60X84 $^1/_{16}$.
Босма табоғи 10,5. Шартли босма табоғи 10,5. Адади 100 нусха.
Буюртма №177. Баҳоси келишилган нархда.
“Университет” нашриёти. Тошкент, Талабалар шаҳарчаси,
ЎзМУ маъмурий биноси.

Ўзбекистон Миллий университети босмахонасида босилди.
Тошкент, Талабалар шаҳарчаси, ЎзМУ.

ISBN 978-9943-6555-1-5