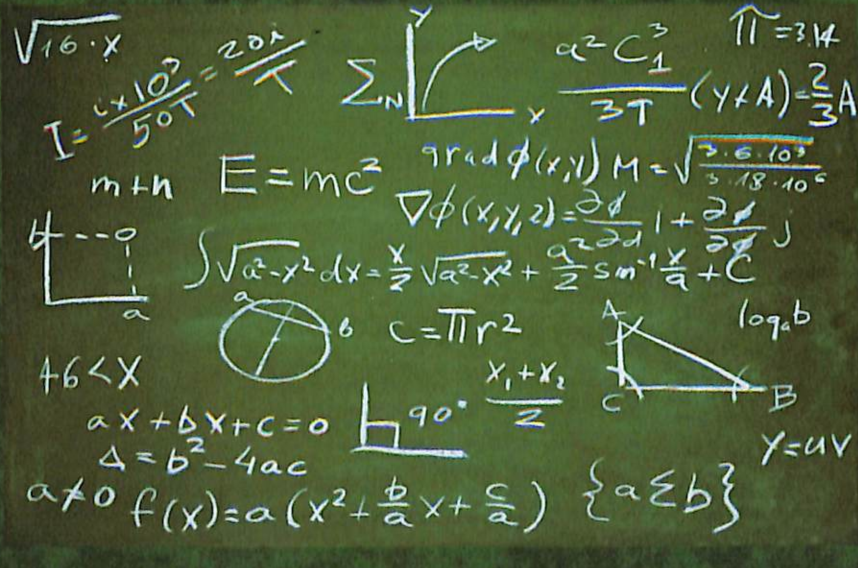
Д.М.МАХМУДОВА

МУАММОЛИ МАТЕМАТИК МАСАЛАЛАР ЁРДАМИДА ТАЛАБАЛАРДА КРЕАТИВ ФАОЛИЯТНИ РИВОЖЛАНТИРИШ МЕТОДИКАСИ



ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
ТОШКЕНТ ВИЛОЯТИ
ЧИРЧИҚ ДАВЛАТ ПЕДАГОГИКА ИНСТИТУТИ

Д.М.МАХМУДОВА

МУАММОЛИ МАТЕМАТИК МАСАЛАЛАР ЁРДАМИДА ТАЛАБАЛАРДА КРЕАТИВ ФАОЛИЯТНИ РИВОЖЛАНТИРИШ МЕТОДИКАСИ

(монография)

Тошкент
"Университет"
2020

УЎК: 378.016:51
КБК: 22.1
М 32

Махмудова Д.М. Муаммоли математик масалалар ёрдамида талабаларда креатив фаолиятни ривожлантириш методикаси. Монография. –Т.: Университет, 2020 й. 136-б.

Ушбу монография олий ўқув юртлари талабаларида креатив фаолиятни муаммоли масалалар ёрдамида ривожлантириш методикасига бағишланган бўлиб, муаммоли таълим хусусиятлари, унинг туб моҳияти, асосий методлари ва вазифалари, муаммоли таълимни ташкил қилиш методикасига оид масалалар ўз ифодасини топган.

Монография олий таълим муассасалари ўқитувчилари, ўқув магистрантлари, таянч докторантларига методик манба сифатида хизмат қилади.

Настоящая монография посвящена методике развития креативной активности у студентов высших учебных заведений с помощью проблемных задач. В данной монографии предложены задания касающиеся основных методов и целей, особенностей, базисных характеристик в организации методики проблемного обучения.

Монография может быть полезна преподавателям, магистрантам и докторантам высших учебных заведений в качестве методического пособия.

This monograph is devoted to the method of developing creative activity in students of higher educational institutions with the help of problem problems. This monograph offers tasks related to the main methods and goals, features, and basic characteristics in the organization of problem -based learning methods.

The monograph can be useful for teachers , undergraduates and doctoral students of higher educational institutions as a methodological guide.

Тақризчилар:
Ж.Э. Усаров, педагогика фанлари доктори.
Ш.А. Абдуллаева, педагогика фанлари доктори, профессор.

Тошкент вилояти Чирчиқ давлат педагогика институти Ўқув-услубий кенгашининг 2020 йил 03 мартдаги 13-сонли мажлис қарорига асосан монография сифатида нашр қилишга тавсия этилган.

ISBN: 978-9943-6554-0-9

КИРИШ

Мамлакатимизда таълим-тарбия тизимини янги босқичга кўтариш, кадрлар тайёрлаш сифатини илғор халқаро стандартлар асосида такомиллаштириш ва олий таълим билан қамров даражасини ошириш борасида изчил чора-тадбирлар амалга ошириб келинмоқда. Республикамизнинг жаҳондаги ривожланган мамлакатлар даражасида тараққий этиши шу жамият аъзоларининг, айниқса, ёшларнинг эркин фикрлай олиш даражаси, мустақил креатив фаолияти натижалари билан белгиланади. Иқтидорли ёшлар Ўзбекистон Республикасининг ижтимоий-иқтисодий тараққиётини ҳамда уни жаҳон ҳамжамиятида муносиб ўрин эгаллашини таъминловчи омил ва миллатимиз зийнати ҳисобланади. Бу борада Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги "Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида"ги ПФ-4947-сон, 2019 йил 8 октябрдаги "Ўзбекистон Республикаси олий таълим тизимини 2030 йилгача ривожлантириш Концепциясини тасдиқлаш тўғрисида"ги ПФ-5847-сон фармонларида таълим, илм-фан ва ишлаб чиқариш уйғунлигини таъминлаш орқали таълим сифатини яхшилаш, рақобатбардош кадрлар тайёрлаш, илмий ва инновацион фаолиятни самарали ташкил этишга алоҳида аҳамият қаратилган.

Олий ўқув юртлари олдидаги долзарб муаммолардан бири – бу битирувчи мутахассислар тайёргарлиги сифатини оширишдан иборатдир. Юқори малакали илмий кадрлар тайёрлаш эса давлат аҳамиятига молик бўлган масалалар сирасига киради.

Бугунги кунда ахборотлар тезкорлиги, ҳисоблаш техникаси ва технологияларининг тез ўзгариши кечаётган бир пайтда математикани ўқитиш самарадорлигини оширишга талаб кучаймоқда. Шу жиҳатдан олганда, талабаларнинг креатив қобилиятини ностандарт саволлар, ўзига хос муаммоли масалалар асосида ривожлантириш муҳим аҳамият касб этади.

Ҳар томонлама етук, рақобатбардош кадрларни тайёрлаш масаласи бугунги кунда долзарблик касб этади. Маълумки, талабаларнинг креатив қобилиятини бир ёки бир нечта дарсда ривожлантириб бўлмайди. Бу масалага доимий ва тизимли ёндашув талаб этилади.

Талабаларнинг креатив қобилиятини ностандарт саволлар, ўзига хос муаммоли масалалар асосида ривожлантиришда профессор-ўқитувчилар ҳар бир талабанинг индувидуал хусусиятларини ҳисобга олишлари зарур. Таҳлиллар шуни кўрсатадики, ўрта умумтаълим тизимида таҳсил олаётган ўқувчиларнинг креатив фаолиятини ривожлантиришга мўлжалланган бундай масалалар хусусида етарлича маълумотлар тўпланган ва ҳатто бундай масалаларни тузиш, улардан фойдаланиш методикалари ҳам ишлаб чиқилган. Бироқ олий таълим муассасаларида иқтидорли талабаларнинг мустақил илмий ва креатив фаолиятини ривожлантиришга бағишланган бундай илмий ишлар етарли даражада тадқиқ қилинмаган. Шу боис олий таълим муассасаларида муаммоли масалалар ёрдамида талабаларнинг мустақил креатив фаолиятини ривожлантириш методикасини ишлаб чиқиш долзарб илмий-услубий муаммо ҳисобланади.

Таҳлиллар шуни кўрсатадики, олий ўқув юртлари талабалари креатив фаолиятини ривожлантириш масалаларига бағишланган алоҳида ишлар деярли мавжуд эмас. Монографияда ана шу муаммонинг турли жабҳалари кенг ёритилган.

I БОБ. ОЛИЙ ТАЪЛИМ МУАССАСАЛАРИДА МАТЕМАТИКА ТУРКУМ ЎҚУВ ФАНЛАРИНИ ЎҚИТИШНИНГ ШАРТ – ШАРОИТЛАРИ ВА ЎЗИГА ХОС ХУСУСИЯТЛАРИ

1.1-§. Талабаларда креатив фаолиятни ривожлантиришда муаммоли математик масалаларнинг ўрни ва аҳамияти

Мамлакатимизда таълим соҳаларини такомиллаштириш мақсадида, замонавий билим ва педагогик технологияларни қўллаш кўникмаларига эга, мамлакатимизни ижтимоий-иқтисодий ривожлантиришда муносиб ҳисса қўшувчи юқори малакали мутахассислар тайёрлаш механизмини яратишга катта эътибор қаратилмоқда.

Бўлажак мутахассисларни тайёрлашда уларнинг юксак маданиятли, амалий касбий кўникмага эга, тарбия, ўқитиш методлари ва баҳолаш мезонларини пухта эгаллаган замонавий кадрларни шакллантириш жараёнлари самарадорлигини ошириш муҳим ҳисобланади. Шу сабабли, таҳсил олувчиларнинг таълим олишга бўлган қизиқишларини ошириш, уларда ўқув фанларини ўзлаштиришга мотивацияни кучайтириш зарур. Олий маълумот олишга бўлган эҳтиёжнинг оммавийлашуви ва шахсий компьютерларнинг талабалар орасида кенг тарқалиши олий ўқув юртларида математикани ўрганишга бўлган қизиқишнинг пасайишига олиб келувчи сезиларли омиллардан бири бўлиб қолмоқда. Бундай шароитда талабаларнинг математик билимларни ўзлаштириши, малака хосил қилиши ва кўникмага эга бўлиши, фанга бўлган қизиқишини рағбатлантириш ва математик маданиятни шакллантиришда мустақил фикрлаш қобилиятини фаоллаштириш масаласи алоҳида аҳамият касб этади. Бу масалаларни ҳал қилишда эса муаммоли таълим муҳитидан фойдаланиш зарур.

Талабалар креатив фаолиятини ривожлантириш муаммоларига қатор психолог ва педагог олимлар илмий ишлари бағишланган. Ушбу муаммонинг турли жиҳатлари бўйича: Ж.Адамар, А.Пуанкаре, А.Н.Колмогоров, Д.Пойа, С.Ҳ.Сиражиддинов, Б.Р.Кадиров, В.А.Крутецкий, В.С.Мерлин, В.В.Печенков, Б.М.Теплов, А.М.Матюшкин, Б.Блум, В.Г.Разумовский, В.Л.Юркевич, В.С.Яковлева, Ж.Гилфорд, Ж.Рензулли, Ж.Икрамов, Л.С.Виготский, Н.Р.Гайбуллаев, М.Ш.Маматов ва бошқа олимлар изланишлар олиб боришган.

Б.М.Теплов ўзининг "Психология музыкальных способностей", "Ум полководца" номли асарларида қобилиятнинг турли муаммоларига тўхталиб, нафақат инсон фаолиятининг муайян турларини моҳирона психологик таҳлил қилган, балки мусиқа ва ҳарбий санъатнинг иқтидорли вакиллари мисолида жамланган зарур ташкил этувчи хислатларни очиб берган.

А.Пункаре ўзининг "О науке" асарида математик креатив фаолиятнинг деярли барча муҳим томонларига тўхталиб, ўзининг ижод жараёнидан жуда кўп мисолларни илмий таҳлил қилган.

А.Пуанкаре ўз изланишлари натижасида, "математик қобилиятда, амаллар занжирини мантиқан қура олиш энг муҳим ўрин эгаллайди", - деган фикрга келган. Аммо ҳар ким ҳам математик символлар билан ишлаганда, мантиқий масалаларни ечгандагидек эпчиллик қила олмайди. Математик учун яхши хотира ҳамда диққатгина етарли эмас. А.Пуанкаре фикрига кўра исбот учун зарур бўлган элементлар кетма-кетлиги тартибини аниқлай олиш математик қобилиятли кишиларга хос хислатдир. Математик ижодда интуиция муҳим аҳамиятга эга. Бир тоифа одамлар бундай нозик ҳиссиёт ҳамда хотира, зеҳнга эга бўлмайдилар ва шунинг учун улар математикани тушуна олмайдилар. Бошқалари кучсиз интуицияга эга бўлиб, яхши хотира ва диққатга эга, улар математикани тушунади ва қўллай оладилар. Учинчилари шундай алоҳида интуицияга эга бўладиларки, улар ҳатто яхши хотирага эга бўлмасалар ҳам

нафақат математикани тушунишади, балки математик янгиликлар ҳам ярата оладилар.

Бу ерда жуда кам одамларгагина насиб қиладиган математик ижод ҳақида сўз бормоқда. Лекин Ж.Адамарнинг ёзишича, "алгебра ёки геометриядан масала ечаётган ўқувчи иши билан, ижодий иш орасидаги фарқ унинг даражаси ва сифатида, чунки ҳар иккаласи ҳам бир хил характердаги ишлардир". Мутахассислар математикада муваффақиятга эришишда инсонга яна қандай хислатлар зарур, деган саволга жавоб топиш учун қуйидаги математик фаолиятларни таҳлил қилишган: масала ечиш жараёни, исботлаш усуллари, мантиқий фикрлаш, математик хотира. Бу таҳлил компонентларига кўра жуда мураккаб, математик қобилиятлар структураларининг турли вариантларини топишга олиб келди. Шу билан бирга, фикрлар бир хил, ягона ажралиб турган математик қобилият йўқ ва бўлиши ҳам мумкин эмас, бу жамланган тавсиф бўлиб, идрок, фикрлаш, хотира, тасаввур каби психологик жараёнларда намоён бўлади.

А.Н.Колмогоров математик иқтидор қандай қобилиятларда намоён бўлишини ўрганган. У математикада яхши хотира фойдали эканлигига тўхталиб, жуда машҳур математик олимлар ҳам алоҳида улкан хотирага эга бўлмаганлигини ва аксинча, дилда кўп хоналик сонларни қўшиш ва кўпайтиришни яхши эслаб қолувчи фокусчилар ҳам яхши математик қобилиятли одамларга мисол бўла олмаслигини айтиб ўтган. Алгебраик ҳисоблаш қобилияти, яъни ҳарфли ифодалар шаклини алмаштириш, тенгламалар ечишнинг энг қулай ва қисқа усулларини топиш, ҳисоблаш ёхуд алгоритмик қобилиятлар, геометрик тасаввур, яъни геометрик интуиция, кетма-кет, тўғри тақсимланган мантиқий фикрлаш кабилар математик иқтидорли одамларга хос ҳислатлар деб қараган. Унинг фикрича, математик қобилиятнинг турли томонлари ҳар хил мажмуаларда намоён бўлади, математик қобилиятнинг юзага чиқиши анча эрта тинимсиз машқлар ечиш билан шуғулланишни талаб этади.

Маълумки, Ж.Гилфорд томонидан "Акл-идрок тизими" модели яратилган. Ж.Гилфорд ишлаб чиққан акл-идрок тизими концепцияси иқтидорли ўқувчиларни ўқитиш дастурининг асоси бўлган ва шундай ақлий фаолият модели бўлиб қолди. Моделнинг комплекс хусусияти шундаки, у ақлий фаолиятнинг кенг йўлларини кўрсатади, ўқитувчиларга турли усуллардан фойдаланиш имконини беради. Бу моделнинг кенг имкониятлари ўқитувчилар ва ўқувчиларга уларнинг мустақиллигини оширувчи, дарсларни жонлантирувчи бир талай амалий ва назарий воситаларини очиб беради. Моделнинг бу параметри ақлий фаолиятнинг усуллари ва хусусиятларини акс эттиради. Билиш, хотира, самарали фикрлаш ва вазиятларни тўғри баҳолай билиш шулар жумласидан. Билиш-англаш – бу ахборотни тушуниш ва ҳис қилиш органлари ёрдамида амалга ошириладиган кашфиёт жараёнидир. Билиш орқали биз янги ахборотларга эга бўламиз. Хотира ахборотни сақлаш ва қайта ишлаш механизмидир. Шубҳасиз, хотира фикрлаш фаолияти учун зарур манбадир. Самарали фикрлаш тасаввур қилишга таянади ва оригинал ғоялар туғилишига сабаб бўлади. Креатив фаолиятнинг муҳим элементларидан бири самарали фикрлашдир, бунда бир саволга бир нечта тўғри жавоб олиш мумкин. Бу моделнинг имконияти кенг ва одатдаги моделлардан кескин фарқ қилади.

Ж.Рензулли томонидан яратилган модель 1977 йилдан бошлаб кенг қўлланила бошлади. Бу модель ўртача қобилиятли ўқувчилар учун мўлжалланган оддий дарсни жадаллаштириб ўзлаштириш, иқтидорли ўқувчилар имкониятини юзага чиқаришга мўлжалланди. Зеро, ўқувчилар иқтидорининг юзага чиқиши учун оддий, ўзгаришсиз усуллар етарли эмас. Модель асосида тузилган дастурнинг икки асосий мақсади қуйидагилардан иборат: 1) ўқув дастури ўқувчиларга ўзлари

танлаган соҳа бўйича кўпроқ шуғулланиш имконини беради, шунингдек, машқларни бажариш усуллари ўқувчилар томонидан белгиланади; 2) ўқитувчининг асосий вазифаси ҳар бир ўқувчи ўз олдига қобилияти ва қизиқишларига мос келадиган вазифалар қўйишга ёрдам беришдан иборат.

Ж.Рензулли модели ўқув дастури самарадорлигини ошириш, яъни бойитишнинг уч турини тавсия қилади. Биринчи икки тур барча тоифадаги, айниқса, иқтидорли ўқувчилар учун фойдалидир. Улар ўқувчиларнинг қабул қилиш ва фикрлаш қобилиятига асосланади. Ўқув дастурини бойитишнинг учинчи тури барча ўқувчилар ва гуруҳларга мўлжалланган.

Қадимий цивилизация ўчоғларидан бўлмиш Вавилон ва Миср цивилизацияларида илк математик тафаккур тараққий этганлигининг гувоҳи бўламиз.

Вавилон цивилизацияси эрамиздан аввалги учинчи минг йилликдан бошлаб Месопотамияда яшаган қатор халқларни ўз ичига олади. Уларнинг бош маданий маркази Вавилон бўлган. Вавилонликларнинг математик билимлари пул ва товар алмашинуви, оддий ва мураккаб фоизлар масалаларида, солиқлар ҳисоблаш ва ҳосилни бўлиб олиш ишларида қўлланилган. Албатта, бундай ишларда, яъни ҳисоб-китобларда муаммоли вазиятлар юзага келган ва уларни ҳал қилиш йўллари изланган. Миср цивилизацияси равнақи Фирьавн учинчи династияси даври (эрамиздан аввалги 2500 йиллар)дан бошланган ва шу даврда пирамидалар қурилган. Мисрликлар икки кўринишдаги ёзув тизимидан фойдаланишган [36; 13 – 14-б]. Улардан биринчиси – иероглифик кўринишда бўлиб, улар ҳайкаллар ва қабр тошларида учрайди. Ундаги ҳар бир белги қандайдир предметни англатади. Иккинчиси, иератик кўринишда бўлган ва унда шартли белгилардан фойдаланилган. Охирги тизим қўлда ёзишга мослашган бўлиб, папирусларда учрайди ва у Миср математикаси ҳақида маълумот берувчи асосий манба ҳисобланади. Папируслар ичида "Ринда папируси" тизими энг машҳур тизимлардан ҳисобланади ва ҳозиргача Британия музейида сақланади. У эрамиздан аввалги 1650 йилларда Ахмес томонидан ёзилган бўлиб, бошловчилар учун ўзига хос дарслик ҳисобланади, унда 85 та масала жамланган. “Ринда папируси”да қуйидаги тенглик учрайди:

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}. \tag{1.1}$$

Машҳур математика тарихи мутахассислари Ами Даан-Далмедико ва Жанной Пейффер (Франция) “Пути и лабиринты” [36; — 432-б.] китобида “Ахмес уни қандай қилиб олган бўлиши мумкин?” деган саволни қўйишади ва қуйидаги жавобни келтиришади:

$$\begin{aligned}\frac{2}{13}&=\frac{1}{13}+\frac{1}{13}=\frac{1}{26}+\frac{1}{26}+\frac{1}{13}=\frac{1}{52}+\frac{1}{52}+\frac{1}{26}+\frac{1}{13}=\\&=\frac{1}{104}+\frac{1}{104}+\frac{1}{52}+\frac{1}{26}+\frac{1}{13}=\frac{1}{104}+\frac{1}{52}+\\&+\left[\frac{1}{104}+\frac{1}{26}+\frac{1}{13}\right]=\frac{1}{104}+\frac{1}{52}+\frac{1}{8}.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Бу масаланинг ўзи муаммоли. Умуман, муаммоли таълим усулларидан Ғарб таълими анъаналари ва “педагогика” термини бешиги бўлган Қадимги Грецияда ҳам фойдаланилган. Математикани ўқитишда юнонлар ўз олдиларига “қандай?”, “нимани?” ва “нимага?” саволларини ҳам қўйишган. Масалан, бизгача Аристотелнинг хизматлари туфайли “Ахиллес”, “Ўқ-ёй”, “Дихотомия” ва “Стадион” номлари билан етиб келган Зенон парадокслари шундай баён қилинганки, натижада, “ҳаракат” ва “вақт” тушунчалари орасидаги қарама–қаршиликлар юзага чиққан. Антик дунёнинг машҳур муаммолари бўлган бурчак трисекцияси, кубни иккилантириш, доира квадратураси, Зенон парадокслари, пифагорчилар томонидан иррационал соннинг кашф қилиниши янги математик ва фалсафий фикрларни уйғотди, илм ва таълимга жамият қизиқишини пайдо қилди (э.а 500-400 йиллар).

Платон (э.а 427-347 йиллар) асарларидан бизга маълум бўлган ўқитишнинг Сўкрот усули, яъни маъруза-суҳбат усулида ўқитувчи тингловчиларга олдиндан тайёрлаб қўйилган тўғри ва нотўғри ғояларни таклиф қилади, талабалар уларни қабул қилиш ёки инкор қилиш орқали ўз фикрларини баён қиладилар. Сўкротнинг “майевтика” деб номланган “суҳбатдош фикрини зиддиятли вазиятга келтириш”га асосланган педагогик усули муаммоли вазиятни юзага келтиришнинг асосий йўлларидан биридир.

Эрамиздан аввалги III асрга келиб, грек шаҳарлари ўз мустақилликларини йўқотди. Греция Филипп Македонский томонидан ишғол қилингандан сўнг, улар ўзларининг демократик принципларидан чекиниб, шоҳга итоат этдилар. Филиппнинг ўғли Александр катта империяни ўз ҳукмронлигига бириктириб, Александрияни унинг пойтахти этиб эълон қилди. Биринчи Птолемейлар ҳукмронлиги даврида Александрия антик дунёнинг маданий марказига айланди. Аристотелнинг ўқувчиси Стратон у ерда Мусейон – ўзларини илмий тадқиқотларга бағишлаган ва бунинг эвазига шоҳдан ҳақ оладиган олимлар жамиятини ташкил этди. Мусейонлар кутубхонасига тегишли 700000 томдан ортиқ тўпламлар олимлар ва талабалар ихтиёрига тақдим этилди. Мусейонда ўқитиладиган адабиёт, математика, астрономия ва медицина фанлари орасида математика алоҳида мавқега эга эди. Мусейон жамияти бутун дунё олимларини ўзига жалб этди. Савдонинг ривожланиши узоқ юртлар маданияти билан алоқада бўлиш имкониятини яратар эди, савдогарлар илмий соҳаларнинг кенгайишини таъминловчи янги билимларни олиб келишар эди. Александрияда амалий математика, механика, оптика, геодезия, астрономия ва логистика муваффақиятли ривож топди.

Араб цивилизацияси 632–640 йилларда равнақ топди. Пайғамбаримиз Муҳаммад (с.а.в.) вафотларидан кейин ва Александрия заифлашуви туфайли Муҳаммад (с.а.в.) давомчилари – халифалар қадимий кўчманчи Араб қабилаларини бирлаштириб, Ҳиндистондан то Испаниягача, Шимолий Африка ва Жанубий Италияни ҳам ўз ичига олган жуда катта ерларни истило қилди. VII аср охири VIII аср бошларида араблар Ўрта Осиёни тўла ишғол қилдилар. Бу ҳаракат Хитой чегарасига бориб тўхтади. Натижада, пойтахти (Сирияда жойлашган) Дамашқ бўлган жуда катта мусулмон империяси ташкил топди.

Араблар босиб олинган мамлакатлар аҳолисининг анъаналари, урф–одатлари, фикрлаш тарзи, диний таълимотларини тез орада ўзлаштириб олдилар. Улар қаноатлилик сиёсатини юритиб, маҳаллий аҳоли билан бирлашиб кетдилар ва маданиятини яратишга киришдилар. Шу тарика катта географик майдонда 700–1300 йилларда араб цивилизацияси ривожланди. Араб цивилизацияси илми XIV асрда Жанубий Испаниянинг Гренада қироллигида, Шимолий Африка, Мисрдаги мамлюклар давлатида, уларнинг асосий манбаи бўлган Марагин обсерваторияси ва Ўрта Осиё, жумладан, Самарқандда буюк ўзбек олими Улуғбек обсерваториясида гуллаб-яшнади [36; 23 – 28-б.].

Мусулмон шаҳарларида илм-фан ривожлана борди, уларнинг айримлари илм олиш ўчоқларига айланди. Илмни меценат (фанга, санъатга ҳомийлик қилувчи давлатманд одам)лар, халифалар қўллаб-қувватладилар. Улар академияларга тамал тошини қўйдилар, обсерваториялар барпо қилиб, кутубхоналар ташкил қилдилар. Александрия мактабининг буюк математик олимлари ҳисобланган Евклид, Архимед, Герон, Диофант ва астроном Птолемей асарлари жуда кўп маротаба машҳур олимлар шарҳи билан араб тилига таржима қилинди ва чуқур ўқитилди. Олти–етти аср давомида араблар донишмандлик ва маърифатни асраб келдилар. Турли томонлама қизиқишлар араб цивилизацияси олимларига хосдир. Улар бир пайтнинг ўзида ҳам файласуф, ҳам математик, ҳам астроном, ҳам физик, ҳам табиб бўла олишган. Араблар файласуфи номини олган Ўрта аср Шарқ файласуфи ал-Фаробий (870-950 йиллар) ва ўрта

осиёлик икки буюк олим – Ибн Сино (Европада Авиценна, 980-1037 йиллар), ал-Беруний (973-1048) шулар жумласидандир [36; 23 – 28-б.]. Мутафаккир аждодларимиз илмда ҳиндлар эришган ютуқларни ҳам ўргандилар, улардан ўз асарларида ва изланишларида кенг фойдаландилар. Шулардан бири ўнлик саноқ системаси бўлиб, уни ўрта осиёлик буюк ўзбек олими ал-Хоразмий (ўзининг асарларида) машҳур қилди. Улар бутун дунё халқлари ҳозирда ҳам ҳурмат билан тилга оладиган илмий асарлар ва дарсликлар яратганлар ҳамда ўқитиш усулларини баён қилганлар.

Ўрта асрларда Европада таълим жараёни черков мактабларига қаратилган. XII асрларга келиб, биринчи университетларда "етти эркин маҳорат" дарсларининг ўтилиши секин-асталик билан санъат ва кейинроқ олий мактабларнинг фалсафа факультетларига айланди. Ўрта асрлар мактаблари ва университетларида талабалар ўзларига таклиф қилинган саволларга жавоб топиш жараёнида мустақил билим олишга асосланган ўқитишнинг схоластик усули ривожланди. Бу усулни амалга ошириш учун биринчи дарсликлар яратилди. Маълум маънода ўқитишнинг схоластик усули муаммоли таълим усулининг ўтмишдоши бўлиб, унинг пайдо бўлишига замин тайёрлаб берган. Схоластик усул дунёқарашнинг "идрок ва дин", "ақлий ва ҳиссий", "умумий ва хусусий" каби тушунчалар ўртасидаги ўзаро муносабатларнинг муҳим муаммоларини ечишда қўлланилган. Таълимдаги бу жараёнлар жадал суръатлар билан ривожланаётган савдо ишлари ва ишлаб чиқариш, кемасозлик ва астрономия, танобчилик ва банк ишлари шарт қилиб қўйган ғарб жамияти оммавий саводхонлиги эҳтиёжига зид эди. Лютер, Кальвин ва шу каби реформаторлар жамиятни ўз ғояларини ўзлаштириш имконини берувчи воситалар билан таъминлашга ҳаракат қилдилар. Шунинг учун мактабларни тубдан ўзгартириш ва янгидан қуришга, улар учун дарслик, қўлланма ва луғатлар нашр этишга киришдилар. Черков мактаблари қаторида саводхонликка, ҳисоб-китобга ва ҳунармандчиликка ўргатадиган кўплаб шаҳар мактаблари очила бошлади. Лекин XVII асрларга қадар ўқитиш сифати жуда пастлигича қолаверди, ўқитишнинг илмий асосланган усуллари ва дарсликлар мавжуд эмас эди. Янгиланиш, Инсонпарварлик ва Ислоҳот ғоялари дунёни янгича ҳис қилишни тақозо этган бўлса, буржуазия ва унинг сиёсий ғалабаси Ўрта аср давридан янги даврга ўтишини бошлаб берди. Янги давр янги ижтимоий талабларни қўйди. Шуларнинг ичида энг муҳими – оммавий саводхонликка бўлган эҳтиёжидир. Барча халқларда мактаб очишга бўлган иштиёқ пайдо бўлди, бунақаси ҳеч бир тарихий даврда бўлган эмас. Ўша даврнинг илғор мутафаккир олимлари ва педагоглари ўқитишни мукаммаллаштириш йўлларини изладилар ва жорий қилдилар. Шулардан бири буюк чех педагоги ва файласуфи Ян Амос Коменский (1592-1670) эди. Коменскийнинг асосий мақсади "ҳаммани барча нарсага муфассал ва ютуқ кафолатланган"лигига имкон берувчи ўқитишнинг универсал усулини топишдан иборат бўлган [65; – 420-б.].

XIX асрга келиб шаклланган оммавий мактаб таълими дидактикаси немис файласуфи, педагог ва психологи И.Ф.Гербарт томонидан унинг асарларида концептуал шакллантирилди. Бу концепцияга кўра, ўқувчи – ўқитишнинг пассив объекти. Демак, ўқитувчини ўқув жараёнини қандай бошқариш, билимлари билан қуроллантириш етарли, яъни маълумотни қандай баён қилиш керак, у қандай талабларга жавоб бериши керак, саволларни қандай қўйиш керак, ўқув дастури қандай бўлиши керак ва ҳ.к. Шу билан бирга, педагогик жараённинг Гербарт "болаларни бошқариш" деб атаган қисми гипертрофияланган, яъни ўта кенгайган ҳолда эди. Айтиш жоизки, Гербарт тизими ўқувчиларни билим олишга бўлган қизиқиши ва муаммоли таълим усуллари каби гуманистик принципларни инкор этмаган Коменский тизимидан анчагина

узоқлашган ва уларга эҳтиёж қолдирмаган. Гербарт концепцияси жуда кўп давлатлардаги назарий педагогика ҳамда мактаб амалиётига улкан таъсир ўтказди. Авторитар педагогика деб ном олган, ҳозиргача ўқитишда ҳукмронликни бермай келаётган анъанавий дидактик ёндашув ва усулларнинг шаклланишида Гербарт концепцияси асосий ўрин тутган. Коменский, Песталоцци ва бошқа олимлар томонидан яратилган оммавий таълим тизимига қарши бўлган, уни асоссиз индивидуал таълим тизими билан таққословчи Ж.Ж.Руссо, С.Френэ каби олимлар ҳам бор эди. Аммо уларда ўқитишнинг қатъий тартибга солиниши ва универсал дарсликлар боланинг мустақиллиги ва шахсий хусусиятларини чегаралаб қўяди, деган жиддий эътирозлар ҳам мавжуд эди.

XIX-XX асрлар бўсағасида америкалик файласуф Дж.Дьюи талаба устунлигини тикловчи дидактик концепцияни таклиф қилди. Бу концепцияда муаммоли таълимнинг назарий асосларига алоҳида эътибор қаратилган. Дьюи болаларнинг кундалик муаммоларини ечишда билиш ва фаолият жараёнларини бирлаштирди. Бундай ҳаракат жараёнида қуйидаги бешта кетма-кет бажариладиган поғоналарда болалар томонидан янгилик ихтиро қилинади: 1) муаммони ҳис қилиш; 2) уни аниқлаш ва таърифлаш; 3) мумкин бўлган ечимларни таклиф қилиш; 4) бу ечимлардан тўғри хулоса чиқариш; 5) олинган натижани қабул қилиш ёки қабул қилмасликни аниқловчи кейинги кузатиш ва экспериментлар.

Мактабда муаммоли ўқитишга асосланган психологогик–педагогик ва методик изланишлар амалга оширилган. Улар мактаб амалиётида хам ўз ўрнини топди. Лекин олий ўқув юртларида муаммоли таълим илмий методик изланишлар ва педагогик амалиёт учун нисбатан янги соҳа ҳисобланади. Бунинг сабабини, албатта, университетлар ташкил қилиниши тарихидан излаш зарур. Черков мактаблари базасида ташкил қилинган Болон, Париж, Оксфорд ва бошқа биринчи университетлар барча даражадаги, барча миллат вакиллари, турли ёш ва табақадаги одамларга илм–фан эшигини очди. Университет таълим тизими маърузалар ва илмий мунозаралардан иборат бўлиб, талабалар қандайдир бирор илмий вазиятни юзага келтириб, ҳимоя қилиши зарур эди. Бундай ўқитиш тизими бутун ўқув жараёнини шакл ва мазмун жиҳатидан қатъий тартибга солинишини талаб қилар эди. Лекин тараққиёт давом этар ва аста–секинлик билан университетларда математика, табиий фанлар ва тарих факультетлари очилди. XIX аср охирларида, дастлаб, Германия, кейинчалик бошқа мамлакатлар университетларида илмий изланиш, таълим ва ўқитиш эркинлиги негизлари эълон қилинди ва амалиётга жорий қилинди. Ўқитишнинг марказий тузилиши – маъруза, илмий мунозара аввалги мақомини йўқотди, декламация бекор қилинди. Маърузаларнинг мазмуни ҳам ўзгарди: энди маърузачининг вазифаси илмий ҳақиқатни маълум қилишдангина иборат эмас, балки уни излашни намойиш қилиш ва талабаларни бунга ўргатиши ҳам керак эди. Бу ўзгаришлар Вильгельм фон Гумбольд томонидан талабаларни ўқитиш ва илмий тадқиқот ишлари биргаликда олиб борилиши мумкин бўлган университетнинг классик модели–элитар олий ўқув юрти сифатида ташкил қилинишига замин тайёрлади [49; 60-б.].

XIX, айниқса, XX асрда олий ўқув юртларининг сони ортиши ва олий таълимнинг профессионаллашиши муносабати билан классик университетлар Гумбольд модели принциплари ҳамда авторитар педагогика принцип ва усулларини сиқиб чиқара бошлади. XX аср ўрталарига қадар бу жараён олий таълим, юқори савияда тайёрланган ўқувчилар ва уларнинг ўқишга муносабати, профессура илмий компетентлиги билан ҳарактерланувчи – кўпчиликни ташкил қилмайдиган сондаги одамлар таълим олувчи муассасага айланди.

Кейинчалик олий таълимнинг оммалашуви натижасида вазият жуда ёмонлашди ва бу, биринчи навбатда, абитуриентларнинг ўртача тайёргарлиги пасайиши ҳамда

уларнинг олий ўқув юртларида ўқишга бўлган қизиқишининг пасайишида намоён бўлди.

XX асрнинг 30-йилларидан эътиборан олий таълимда мажбурий топшириқлар, андозали ҳисоблар, ўқув режа ва ишчи дастурлар ҳамда шунга ўхшаш талабаларни ўқишга мажбур қилиш усуллари кўринишида авторитар педагогика устунлик қила бошлади. Бугунги кунда ушбу вазиятдан чиқишнинг қатор чоралари амалга оширилмоқда. Шунга қарамасдан, олий ўқув юртлари олдида бу борада қатор муаммолар мавжуд. Бизнинг назаримизда, ушбу муаммоларни ҳал қилишда муаммоли таълим муҳим роль ўйнайди. Чунки муаммоли таълим “нафақат тайёр билимни ўзлаштириш, балки талабалар тадқиқот ишларида олинадиган янгиликлар ҳамдир” [65; – 420-б.]

Муаммоли таълим педагогик тизимни авторитарлашувдан асрайди, талабаларнинг билишга бўлган эхтиёжини ривожлантиради ва ижодкор шахс сифатида шакллантиради. Билиш жараёнининг психологик қонуниятлари муаммоли таълим методикаси фундаменти вазифасини ўтайди.

Биз шу ўринда АҚШдаги Мичиган университети профессори Андервуд Дудле (Andewood Dudley) нинг “What is mathematics for?” – “Математикани нимага ўрганиш керак?” мақоласини келтириб ўтишни лозим топдик [11;31–33-б.]. Мақолани шартли равишда уч қисмга ажратиш мумкин. Биринчи қисм – математиканинг қадимда ва АҚШдаги мустамлака даврида ўқитилишига бағишланади. Иккинчи қисмда - замонавий алгебра дарсликларида келтирилган масалалар жамият эҳтиёжларидан келиб чиқиб таҳлил этилади. Учинчи қисмида эса яна тарихдаги воқеаларга мурожаат этиш асосида юқоридаги саволга жавоб беришга ҳаракат қилинади.

Мақола замонамиздаги универсал математик таълим жамият ҳаётидаги янги ҳодиса, олдинги замонларда ҳеч қачон умумтаълим жараёни бўлмаганлигидан бошланади. Масалан, Қадимги Мисрда ва Бобилда ўқувчиларнинг бир қисмигина бутун

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
TOSHKENT VILOYATI CHIRCHIQ
DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI
AXBOROT RESURS MARKAZI

сонлар билан ҳисоб-китоб қилишга ўргатилган. Римликлар эса, муаллифнинг фикрига кўра, умуман, математика билан шуғулланишмаган. Лекин бундай вазият фақат қадимда бўлган. Муаллиф АҚШдаги мустамлака даврида кундузги мактабларда математика ўқитилмаганини ва айрим мактабларда кечқурунлари атиги бир–иккита дарс ўтилганлигини қайд этади. Кимдир арифметикани билишни тақозо этадиган бирорта ишга дуч келса, у математикани йўл–йўлакай ўрганаверган. Кунлардан бир кун профессор Дудле Флорида штатининг Транспорт департаменти мажлисида хизматчиларнинг математикани фақатгина элементар арифметика даражасида билишларига гувоҳ бўлган. Ходимлар бирор-бир математик билим керак бўлса, уни иш жараёнида мустақил равишда ўрганишларини айтишган.

А.Дудленинг мақоласи шундай бошланади: «Бир китобда: "Мавжуд иш жойларининг 75 фоизида элементар алгебра ва геометриядан билимга эга бўлиш талаб этилади", деб қайд этилган экан. Мен "Yellow Pages" – машҳур маълумотлар китобининг ихтиёрий бетини очиб вакант иш ўринлари саҳифасида ўқийман: "Фаррош, заргар, карате ва бошқа кураш турлари мураббийси, маркаловчи, иш бошқарувчи, эритувчи, абажурлар устаси". Қизиқ, бу ишларнинг қайси бирига математик билимлар керак бўлиши мумкин? Вакант ишлар рўйхати билан танишишни давом эттирдим, лекин бирор-бир математик билим керак бўладиган ишни учратмадим. Балки бунинг сабаби, аслида, аксарият ишларда математик билим керакмаслигидадир?..". Ёки олимнинг айнан шу китобида яна шундай мушоҳада юритишга ундайдиган фикрлар келтирилган:

"Алгебрага бағишланган бир китобнинг сўз бошисида: "...бу китобда электроника, фуқаро ва кимёвий муҳандислик, тартибни муҳофаза қилиш ва бошқа соҳаларда учрайдиган масалалар ва саволлар келтирилган", дейилган. Ўша китобда қуйидаги масала бор: "Бир неча киши бир уйни 12000 долларга ижарага олишган. Кейинчалик уларнинг иккитаси бу ишдан бош тортганидан кейин

колганлари қўшимча 300 доллардан тўлашга мажбур бўлишди. Ижарачиларнинг нечтаси қолди?" Лекин бундай масалани ечиш қайси соҳада керак бўлиши айтилмаган. Гап, аслида, масаланинг ёмонлигида эмас, жуда яхши масала ва ўқувчилар уларни қанча кўп ечишса, шунчалик фойдали. Аммо бундай масалаларни еча олиш кўпчиликнинг иш жараёни учун керак эмас. Математик билим керак бўлган ишларни рўйхатдан қидириб тополмадим. Бунинг сабаби бундай мутахассисликлар йўқлигидадир. Мақолани ёзишдан олдин шундай мутахассисликларни интернет сайтларидан роса қидирдим. Бир жойда мактаб математикасини билишни тақозо этадиган ишни топдим: "Агар ванил музқаймоғининг таркибида 90 фоиз ҳаво, 100 галлон аралашмага эса бир унция ванил солинишини ҳисобга олсак, унда 1000галлон ванил музқаймоқ тайёрлаш учун қанча музқаймоқ ва ванилнинг аралашмаси керак бўлишини топинг". Музқаймоқ тайёрловчи ҳеч қачон бундай масалани ечиши керак бўлмайди. У бошқа бир киши томонидан тайёрлаб қўйилган қўлланмадан фойдаланиб қўя қолади.

Бир халқаро математик тестларда қуйидаги масала берилган экан: "Бир журналнинг 24 та сонига обуна бўлишда қайси вариант арзонга тушади? Биринчи учта сон бепул, қолганлари эса 3 доллардан ёки биринчи олтита сони бепул, қолганлари эса 3,5 доллардан бўлгандами?" Бу масалани АҚШлик 8-синф ўқувчиларининг атиги 26 фоизи, дунё бўйича эса 24 фоизи тўғри ечишган. Ҳатто ўқишга ўта жиддий қарайдиган япониялик ўқувчиларнинг ҳам фақат 39 фоизи бу масалани тўғри ечган. Шубҳа йўқки, бу ёшларнинг кўпчилиги ёши улғайганидан кейин бунга ўхшаш масалаларни яхшироқ ечишади. Лекин барибир менинг ҳаётимдаги ҳодисалар бировнинг математик масалаларни тўғри ёки нотўғри еча олишига боғлиқ бўлишини хоҳламасдим" [11; 31 – 32-б.].

Муаллифнинг қатъий фикрича, математика деярли кўпчилик соҳаларда керак эмас. Умуман олганда, математика керак. Акс ҳолда биз замонавий технологияларнинг кўпчилигига эришолмас эдик. Ундай бўлса, миллионлаб ўқувчиларни математикага ўргатишнинг нима кераги бор? Муаллиф ўзининг ҳаётий тажрибасидан яна бир мисол келтиради.

"Metropolitan Life Insurance Co" номли суғурта компаниясида ишлаганимда менга бир кўрсаткични ҳисоблаб чиқиш топширилган эди. Ўша вақтда суғурта компанияларида ҳозиргидек норматив маълумотнома китоблари асосида иш юритишган. Ҳисобланиши менга топширилган кўрсаткич эса у китобларда йўқ экан. Мен математик билимлардан фойдаланиб, ушбу кўрсаткични ҳисоблаш натижасини раҳбаримга кўрсатганимда, у "бундай ҳисоблаш ярамайди, мана бундай ҳисоблаш керак", деди. "Лекин менинг усулим соддароқ, сизнинг усулингиз эса уч баробар кўп ишни бажаришни тақозо этади", дедим. У "шундай бўлса ҳам, бизда шу усул қўлланилади", деди.

Менинг усулим тўғри математик ёндашувга асосланган эди. Бу усулни бироз математик билимга эга ҳар қандай киши қўллар эди. Лекин раҳбарим қачонлардир тузилган йўриқномани афзал топди.

Профессор Дудленинг фикрича, математика кундалик ҳаётда керак эмаслигига қарамасдан, унга бўлган талаблар кундан кунга ошиб бормоқда. Бунинг сабаби математика инсоннинг фикрлаш қобилиятини ривожлантиради. У бошқа фанлардан яхшироқ фикрлаш, масаланинг туб моҳиятини ва ечимини топишга имкон беради.

Математикада масала ва фикрлаш орасида ҳеч қандай тўсиқ йўқ. Соф иқтисодий фикрлаш кўп ҳолларда зиддиятларга олиб келади. Фалсафий фикрлаш эса кўп ҳолларда ҳеч қандай натижага олиб келмайди. Математикада эса масала нафақат ечилади, балки ечимнинг тўғрилигини ҳам исботлаш мумкин. Тўғри фикрлашни ўрганиш керак ва бунинг учун математика энг қулай йўлдир. Кўпчилик менга математикани аниқ ва тўғри натижага эришиши туфайли қониқиш ҳосил қилиш учун яхши

кўришларини айтишган. Шубҳа йўқки, барчага тўғри фикр юритиш ёқади.

Шундан кейин муаллиф АҚШнинг асосчиларидан бири бўлмиш Т.Жефферсоннинг қуйидаги гапини келтиради: "Математика ва табиий фалсафа (табиий фанлар) шунчалик илҳомбахшки, улар ҳар қандай одамни ўрганишга чорлайди. Улар туфайли ақлимиз ва фикрлашимиз чархланади. Шунинг учун математик фикрлаш ва дедукция ҳуқуқ ғояларини ҳам чуқур англаш имконини беради".

Мақола сўнгида муаллиф бир неча қизиқ математик масалаларни келтиради. Мана бир неча минг йил олдин тузилган масала [11; 31 – 33-б.]: Папирусга ёзилган Қадимги Миср дарслигида қуйидаги масала бор: "Юз бўлак нонни 5 кишига шундай қилиб тақсимлаб бергинки, уларнинг улушлари арифметик прогрессияни ташкил этсин. Бундан ташқари, иккита кам улушнинг йиғиндиси учта катта улуш йиғиндисининг еттидан бир қисмни ташкил этсин. Жавоб: $1\frac{2}{3}, 10\frac{5}{6}, 20, 29\frac{1}{6}$ ва $38\frac{1}{3}$.

Муаллиф мақоласини қуйидагича якунлайди:

"Шундай қилиб, математиканинг кундалик ҳаётимизда ва аксарият кишиларнинг иш жараёнида кераги йўқ. У инсонни тўғри фикр юритишга ўргатиши учун керак. Мазкур масалада математика ҳар доим ҳам сўзсиз муваффақиятга эриша олгани йўқ. Бу мақсадга эришишнинг яккаю ягона йўли эмас, лекин у усуллар орасида энг яхшисидир. Охират куни мендан: "Ҳаётингни қайси яхши ишинг билан оқлайсан", деб сўралганда, мен ўрнимда тик туриб ғурур билан: "Мен математикага чин дилдан хизмат қилганлардан бириман", дейман. Лекин мен асло: "Одамларга яхши иш топишга ёрдам бердим", демайман.

Энди, биз бу борадаги охирги йилларда чоп этилган айрим мақолаларга қисқача тўхталиб ўтамиз.

М.Н.Кузьмин ўз илмий изланишларида Янги давр бошланиши муносабати билан эмпирик кузатиш мумкин бўлган

Европа давлатлари аҳолиси умумий саводхонлигининг ўсиши, одатда, маърифат тарқатиш деб қаралиши ҳақида тўхталган. Шу билан бирга, бу анъанавий жамиятдан фукаролик жамиятига ўтиш қаторида, қатъий детерминаллашган гражданлик жамияти мустақил субъектларини шакллантириш зарурати билан боғлиқ социомаданий жараёндир. Мақолада таълимга социомаданий синтез жараёнига нисбатан мураккаброқ ва кенгроқ ҳажмдаги маданий тузилма сифатида қаралиб, таҳлил олиб борилган. Умумевропа жараёнига мослиги нуқтаи назаридан охирги бир ярим аср давомида Россия аҳолиси саводхонлиги ўсиши таҳлил қилинган [72; 53–61-б.].

С.Н.Косаревнинг тадқиқот ишида таълимнинг умуммаданий компетенцияси тўғрисидаги масалаларга батафсил тўхталиб, бугун ҳамма вақтдан ҳам кўра кўпроқ таълим жараёнининг марказида талаба ва унинг мустақил ривожланиши тургани таъкидланади. Аввал ўқитувчи билимни берган бўлса, энди у талабага ўқитиш ва ўзини ривожлантиришнинг субъектига айланишига ёрдам кўрсатиши керак. Янги педагогик парадигманинг асосий ғояси – бу шахсга йўналтирилган ўқитиш эканлигига тўхталади [65; 34–61-б.].

Л.М.Фридман инсоннинг атрофини ўраб турган оламни билиши ва унда турли соҳалар билан шуғулланишида асосий параметрлардан бири фазовий фикрлаш ҳисобланишига тўхталган. Бундай кўринишдаги фикрлашни ўргатадиган предмет бу геометриядир. Муаллиф ушбу муаммони атрофлича таҳлил қилиб, ўқитиш жараёнида фазовий фикрлашни ўргатиш бўйича етарли даражада тажриба йиғилгани ва чуқур илмий натижаларга эришилгани ҳақида фикр юритган [152; – 217-б.].

Н.В.Михайлованинг ишида инсон фаолиятининг турли жабҳаларида амалий математиканинг роли ортиб бораётгани тадқиқ қилинади. Амалий масалалар эса информатика, эҳтимоллар назарияси, математик статистика, математик моделлаштириш каби фанлар билан чамбарчас боғлиқ. Муаллиф

шу муносабат билан ўз мақоласида масалалар ечимини баён қилиш ёки уларни тузиш учун муаммоли усуллардан фойдаланган [117; 45 – 55-б.].

1.2-§. Математик масалалар воситасида муаммоли вазиятларни ҳосил қилиш шакллари ва усуллари

Муаммоли таълимнинг муҳим компоненти талабада билишга бўлган эҳтиёж–асосий манба инсоннинг психик ривожланишига шарт-шароит яратилиши ҳисобланади. Бундай шароитни яратиш манбаи "талабаларда билиш мотиви ривожланиши шарти ўтказилган тажрибадаги психологик тўсиқни енгиб ўтишни ва янги билишга бўлган эҳтиёжларнинг туғилишини қўллаб-қувватловчи муаммоли вазиятлардир" [117; 45 – 55-б.].

Муаммоли вазият маълумга яқинлашишга ноқулайлик чегараси каби ҳис қилинади. Ушбу чегарани силжитиш ва маълумга яқинлашишга шароит яратишга эҳтиёж туғилади. Маълум билан номаълум орасидаги чегара қатъий бўлганда, уни силжитишга бўлган эҳтиёж фаолроқ бўлади [70; – 275-б.]. Л.Д.Кудрявцевнинг фикрича, биринчи курс талабаларининг олий математикани керакли даражада ўргана олмасликлари ва кейинчалик математик усулларни амалий масалаларни ечишга қўллай олмасликларига асосий сабаб қуйидагилар:

1) тушунадиганидан тушунмайдиганини ажрата олмаслик; 2) суҳбат олиб боришни эплай олмаслик: ўқитувчининг саволини тушуниб, унга жавоб бериш ва ўзининг саволини формулировка қилиш; 3) маълумотларни бир қолипда идрок қилиш, бузилган ва ҳатто, нотўғри қолипда идрок қилиш. Шунинг учун муаммоли таълимнинг муҳим масалаларидан бири имкон қадар ўқувчилар биладиган ва уларга маълумга ўхшаганларни бир-биридан ажратиб олишдир. Ўқитувчи талабалардаги шундоқ ҳам равшан-ку, кўриниб турибди-ку каби ақлий ҳамоҳангликни тартибли бузиб туриши ва ушбу ишни мустақил амалга оширишни

талабаларга ўргатиши зарур бўлади [70; – 275-б.].

Биз қуйида олий математика курсида талабаларга “Кесмада узлуксиз бўлган функциялар хоссалари” мавзусини ўқитишда муаммоли таълим мақсади қандай амалга оширилиши хусусида сўз юритамиз. Одатда, маъруза ёки дарсликда ушбу мавзуни ёритиш функцияларнинг $[a,b]$ кесмада узлуксизлиги таърифини беришдан бошланади. Кейин бундай функциялар хоссаларини баён қилувчи теоремалар ва уларнинг исботи берилади. Таърифнинг исботланган хоссалар билан қандай боғлиғлиги очилмай қолиб кетади. Айрим ҳолларда дарсликларда хоссаларнинг формал исботидан сўнг график тушунтириш берилади. Ундан ташқари, олий таълим, хусусан, техник университетлар дастурларида бу хоссаларнинг тўла исботини бериш инобатга олинмаган. Шунинг учун кўп ҳолларда исботлар тўла ёки қисман тушириб қолдирилади.

Маълумки, янги маълумот-мавзуни бундай ёритиш билишга бўлган иштиёқини рағбатлантирмайди, чунки олдиндан бу янги муаммоли вазиятлиги ва уни билишга бўлган эҳтиёж шакллантирилмайди. Муаммоли таълим шароитида бу мавзуни ёритиш, масалан, қуйидагича бўлиши мумкин:

Дастлабки тайёргарлик босқичида талабаларда мавжуд бўлган билимлар аниқлаб олинади. Бунинг учун талабаларга функцияларнинг қандай хоссалари маълумлигининг муҳокама қилиниши фойдали. Одатда, улар даврийлик хоссаси, тоқ-жуфтлилик хоссаси кабиларни эслашади. Кейин “Айтилган хоссалардан қайси бири барча узлуксиз функцияларга тегишли?” деган савол берилади. Мана шу саволни муаммоли деб аташ мумкин, чунки у “функция хоссалари” тушунчасини умумлаштириш имконини беради. Ҳақиқатан ҳам, жавоблар таҳлилидан сўнг, талабалар мустақил равишда қайсидир синфга тегишли функциялар хоссалари ҳақида гап кетганда, қуйидаги икки шарт бажарилиши зарур деган жуда муҳим хулосага келадилар:

1) кўрсатилган синфга тегишли барча функциялар учун бу хосса ўринли бўлади;

2) кўрсатилган синфга тегишли бўлмаган функциялар ичида шундайлари борки, у бу хоссага эга эмас.

Дастлабки тайёргарлик босқичида навбатдаги савол: “Кесмада узлуксиз функция таърифини беринг” кўринишида бўлиб, муҳокама қилинади. Буни талабаларнинг ўзи мустақил равишда амалга ошириши мақсадга мувофиқ. Шундан сўнг, Эйлерга тегишли: “Графигини қаламни қоғоз варағидан узмасдан чизиш мумкин бўлган функция берилган кесмада узлуксиз функция дейилади” деган таъриф ва талабалар томонидан берилган турли бошқа таърифлар таҳлил қилинади.

Тажриба шуни кўрсатадики, талабалар ўзлари мустақил равишда тегишли мисоллар ва контрмисоллар келтиришади ва уларга маълум бўлган хоссалардан фақат биттасигина, яъни чегараланганлик узлуксиз функцияларга хос эканлигига ишонч ҳосил қиладилар. Ана энди, “Узлуксиз функциялар яна қандай хоссаларга эга?” деган савол билан талабаларда янги, номаълум маълумотга бўлган эҳтиёж шакллантирилиб, муаммоли вазият юзага келтирилади. Кейин теорема формулировкасига олиб келувчи аниқ муаммоли топшириқлар берилади. Муаммоли таълимда талабаларга теореманинг фақат маълум қисминигина бериш мақсадга мувофиқ. Масалан, унинг шарти берилади, хулоса қисми талаба томонидан мустақил аниқланади ёки, аксинча, теореманинг хулоса қисми берилади, хулоса ўринли бўлган шартлар мустақил аниқланиши зарур. Мисол тариқасида Больцано-Коши теоремасини келтирамиз [71; 58 – 66-б.]. Уни қуйидагича киритиш мумкин:

Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда узлуксиз бўлиб, унинг четларида ноль бўлмаган турли ишорали қийматларни қабул қилса, ихтиёрий бундай функция қандай хоссага эга?

Бу саволга жавоб беришда талабаларга узлуксиз функцияга Эйлернинг юқорида келтирилган таърифидан онглилик принципидан фойдаланиб, қуйидаги тасдиқни мустақил таърифлашга имкон яратиш зарур: (a,b) оралиқда шундай ξ нуқта мавжудки, бу нуқтада $f(\xi)=0$ бўлади.

Бу ҳолда онглилик принципидан фойдаланиш узлуксиз функциянинг ноли борлигини исботлаш муаммосини олиб ташлайди ва у ойдин масалага айланади, талабаларда унинг қатъий исботига ҳожат қолмагандек туюлади. Айтиш жоизки, бундай ҳол математикада кенг тарқалган. Бежиз, "математиклар кўриниб турган нарсани қийин усуллар билан исботлашади", дейилмаган. Бу билан боғлиқ икки ёндашув мавжуд. Биз қуйида шунга тўхталамиз.

Биринчи ёндашув – онглилик принципидан фойдаланиш. Бунда исбот қисқариб кетади ва у график тушунтириш билан ойдинликка алмашинади. Иккинчи ёндашув – муаммоли. Унинг мазмунида ойдин дейилган нарсалар фақат билимнинг чегараланганлиги ва бир қолипдалигидан шундай туюлишига ишонтириш зарурлиги ётади. Ўқитувчи шубҳаланиш ҳақиқатан ҳам ўринли эканлигига талабаларни ишонтириши зарур бўлади. Тушунарлики, инсоннинг ақлан ривожланишида иккинчи ёндашув тўғри ва биринчи ёндашув илмий изланишдан йироқ.

Шундай қилиб, ойдинлик билан курашиш муаммоли таълим усулларидан биридир.

Мисолга қайтиб, талабаларда мотивни сақлаб қолиш учун ёки оралиқда узлуксиз функциянинг ноли борлиги ойдин, деган фикр нотўғри эканлигига ишонтиришимиз ёки масалани муаммоли масала кўринишида қайта таърифлашимиз зарур. Биринчи ҳолда талабаларга $[0,2]\cap Q, Q-$ (бу ерда рационал сонлар тўплами)да берилган $y=x^2-2$ функциянинг графигини чизинг, деган масалани таклиф қилиш ва ҳақиқий сонлар ўқида кесманинг тўлиқлиги билан боғлиқ муаммони муҳокама қилиш зарур.

Иккинчи ҳолда янги муаммоли масала таклиф қилинади:

$[a,b]$ оралиқда $f(x)$ функция узлуксиз ва $f(a)\cdot f(b)<0$ шартда (a,b) оралиқда $f(x)=0$ тенгламанинг илдизи қандай топилади?

Шуниси муҳимки, масала тушунарли ва уларни ечишни ўрганиш талабаларда шубҳа туғдирмайди. Шу билан бирга, қўйилган масалани ечишда қўлланиладиган оралиқни тенг иккига бўлиш ёки бисекция усули Больцано-Коши теоремасининг формал исботини теорема исботида қўлланиладиган ичма-ич жойлашган кесмалар ҳақидаги леммани ҳам талабалар қийинчиликсиз қабул қиладилар. Эътирозли жиҳати шундаки, бугунги кунда олий ўқув юртлари, айниқса, техника университетлари олий математика ўқув дастурларида бу вазиятлар инобатга олинмаган ва шу туфайли иккинчи йўлдан бориш мураккаб.

Аниқроқ қилиб айтганда, техника университетлари олий математика курсларидан сонли усуллар жуда кам ўрин олган, айрим ҳолларда эса бутунлай чиқариб юборилган. Бу дарсларда муаммоли усулларни қўллашгагина эмас, балки талабалар фикрида математикага хос бўлган аналитик, геометрик ва ҳисоблаш илмий усуллари бирлигига ҳам жиддий путур етказилади. Бу вазият, албатта, талабаларга муаммосиз тайёр натижалар ва уларнинг ечиминигина кўришига имкон беради ва уларнинг вазиятга кўникиши мақсадга мувофиқ эмас.

Худди шундай усул билан узлуксиз функцияларнинг экстремал қийматларга эришиши ҳақидаги хоссасини баён қилиш ва исботлаш жараёнида муаммоли вазиятни талабалар ҳис қиладиган даражада юзага келтириш мумкин. Якунида баён қилинган ва исботланган оралиқда узлуксиз функциялар хоссалари уларнинг ички хусусиятларига хослигини муҳокама қилиш жуда фойдалидир. Масалан, кесмада чегараланганлик хоссаси на фақат узлуксиз функцияларга, балки локал чегараланган ва бўлакли узлуксиз функцияларга ҳам хослигини аниқлаб, уларга мос мисоллар келтириш фойдадан холи бўлмайди. Бундай муҳокамалар талабалар учун жуда зарур, яъни, одатда, улар маълум бир функциянинг муҳим бўлмаган кўп сондаги хоссаларини ўрганиш билан ўралашиб қолиб, муҳим хоссага эга бўлган объектларни умумийликда ўрганишни унутиб қўядилар.

Юқорида келтирилган мисол шуни кўсатадики, у ёки бу муаммоли вазиятни юзага келтириш олдидан талабалардаги маълумотлар базасини аниқлаб олиш ва янгисини маълум қилиш учун ўқитувчининг махсус тайёргарлик босқичи зарур. Бу тайёргарлик ёки муаммоли вазият, масалан, муаммоли саволларга жавоблар орқали ёки ўқитувчи томонидан маълум қилинган ва талабалар томонидан ўзлаштириб олинган билим тарзида амалга оширилади. Шу муносабат билан, маърузачи ҳисобга олиши зарур бўлган психологик аспектни айтиб ўтамиз.

Талабаларнинг мустақил билим олиш фаолияти улар қандайдир интеллектуал қийинчиликка учраганларидагина фаоллашади, лекин бу қийинчиликнинг ечими уларнинг интеллектуал имкониятлари доирасида жойлашган бўлмоғи керак. Л.С.Выготский талабаларни ақлий ривожлантириш учун ўқув стратегиясини ишлаб чиқиш мухимлигини таъкидлаб, шундай деган: "Ўқитиш агар у ривожланишдан илгари юрсагина яхши. Ана шундагина у етилиш вазиятида турган, ривожланиш ҳудудига яқин жойлашган қатор вазифаларни жонлантиради ва ҳаётга чорлайди" [28; 120 – 125-б.]. Шунинг учун ҳам муаммоли таълимда тайёргарлик босқичи ниҳоятда муҳим. Бу босқичдаги савол-жавоблар ёки берилган маълумотни ўзлаштиришда йўл қўйилган хатоликлар уларнинг нафақат бу борадаги билим, кўникма ва малакалари етарли эмаслигидан, балки уларнинг имкониятлари, яъни ривожланиш ҳудудини характерлайди ва ўқитувчига талабалар интеллектуал имконияти доирасидаги қатор муаммоларни ажратиб олиш имконини беради. Қатор хорижий давлатлар педагогикасида хато-камчиликлар таҳлили ва мактаб таълими стратегиясини ишлашга бағишланган кўплаб

адабиётлар мавжуд [49; – 245-б.]. Аксарият ҳолларда талабалар йўл қўйган хатоларнинг ўзи муаммоли вазиятни юзага келтиради. Шунинг учун муаммоли вазиятни келтириб чиқариш мақсадида жамоани хато қилишга йўналтирилган педагогик усуллар ҳам мавжуд. Яна математика тарихида "буюк хатолар" ҳам бор, уларни таҳлил қилиш талабаларда математикани ўқишга қизиқиш уйғотишда муҳим роль ўйнайди.

Муаммоли характердаги барча таълим усуллари тайёргарлик босқичидан ташқари, қуйидаги анъанавий икки босқичга бўлинади:

1) муаммоли вазиятни келтириб чиқарувчи амалий ёки назарий топшириқ қўйиш;

2) муаммоли вазиятдаги номаълумни топиш учун мустақил ёки ўқитувчи билан биргаликда тадқиқот ўтказиш.

Бизнингча, биринчи босқичда муаммоли вазиятни тушуниш ва таҳлил қилиш жараёни амалга оширилади ва натижада, унинг ечими иккинчи босқичда янги тушунчалар, муносабатлар, усуллар ёки фаолият шартларини киритишга олиб келувчи бир ёки бир нечта масалалар тузилади. Айрим мутахассислар буларга яна бир босқич – "ечимни таҳлил қилиш ва олинган маълумотларни тартибга келтириш" ни ҳам қўшадилар [116; – 167-б.].

Муаммоли вазиятларни ҳал қилишда янги билим, кўникма ва малакага эга бўлиш жараёни "фикрлаш жараёни умумий психологик қонуниятлари, турли ўқув предметларида муаммоли вазиятни келтириб чиқариш усуллари ушбу предметни ўқитиш методикаси умумий принципларига мос келиши"га бўйсунади.

Бу борада бугунги кунда олиб борилаётган илмий-тадқиқот ишлари мазмунига қисқача тўхталамиз.

Л.Д.Кудрявцев янги билимларни ўзи мустақил ўзлаштиришга тайёр бўлмаган талаба профессионал фаолиятга тайёргарлигини ривожлантира олмаслигига тўхталган. Қандай қилиб талабаларни олий ўқув юртида бу жараёнга тайёрлаш йўллари ўрганилган. Бунинг учун талабани юқори даражадаги билим, кўникма ва малакага эга қилибгина қолмасдан, балки ўзини-ўзи такомиллаштириб борадиган ва мустақил таълим олишга тайёр креатив фикрловчи шахс, мутахассисни шакллантириш зарурлиги айтиб ўтилган [70; – 275-б.].

Мақолада Россия олий таълими реформаси, янги таълим стандартига ўтиш, уларда битирувчиларга қўйилаётган талаблар ҳақида мулоҳаза юритилган. Шулар ичида талабаларнинг кейинги ишларида муваффақиятли фаолият юритиши учун база ҳисобланган умуммаданий ва профессионал компетентлик кабилар мавжуд. Мақолада таълимда компетентлик, сифатли мутахассислар тайёрлашни таъминлайдиган, концептуал янги дидактик усуллар, хусусан, муаммоли ўқитиш усуллари, таълим технологиялари тўғрисида сўз юритилган. Хулоса якунида бунга эришишнинг йўли – ўқитишнинг когнитив ёндашуви эканлиги таъкидланади [151; – 217-б.].

Н.И.Мерлинанинг изланишларида ўқувчиларнинг креатив фикрлашини ривожлантириш муаммолари бугунги кунда ўта долзарб эканлиги, бундай ёшларга жамият талаби тобора ошиб бораётганлиги контекстида ўрганилади. Ноаниқлик ва кўп ечимлилик ҳукм сураётган бир пайтда, ўз олдига янги муаммолар қўя оладиган, уларни ечишга инновацион ечимлар таклиф қила оладиган фаол шахсларни тарбиялаш муаммолари тадқиқ қилинган. Ўқувчиларнинг билиш фаолияти тўғри ташкил қилиниши натижасида узлуксиз таълимнинг кейинги босқичларида шахснинг креатив фикрлашини ривожлантириш имкониятлари кенгайишига алоҳида урғу берилади [115; 223 – 224-б.].

А.А.Абдукодиров услубий қўлланмада ўқувчиларнинг креатив тасаввури ва уни ривожлантиришнинг интеллектуал қуроллари, жумладан, фокал объектлар, коучинг, синектика, ғоялар анжумани, фикрлашнинг "олтита шляпаси" каби услублар,

супервизия ва уни ўтказиш услубиёти, супервизорлик жамоасининг ишлаш усуллари ёритилган [7; – 134-б.].

Е.Г.Бурмистрова бугунги кунда кўникиб қолинган фикрлар ва қарашларга шубҳа билдирадиган, мулоқотга кириша оладиган, муаммо мазмунини аниқлаб, уни ечишнинг альтернатив йўлларини излаб топадиган шахсларни шакллантириш таълимнинг етакчи муаммоларидан бўлиб қолаётгани ҳақида фикр юритиб, уларни ечиш йўлларига тўхталади [26; 66 – 69-б.].

Billings Lora ўзининг "Succeeding in undergraduate student research: A few helpful hints for advisors" ("Иқтидорли талабаларни ўрганиш: илмий маслаҳатчилар учун фойдали тавсиялар") номли мақоласида талабаларни кичик курсларда илмий-тадқиқот ишларига жалб қилиш муаммоларини муҳокама қилади. Мазкур ишда ҳам, албатта, талабаларнинг мустақил фикрлаш қобилиятини ривожлантирадиган муаммоли масалалар қўйиш йўли билан кичик курсларда ўқиб юрган чоғидаёқ илмий ишларга жалб қилиш, концептуал янги дидактик усуллардан фойдаланиш, хусусан, муаммоли ўқитиш усуллари, таълим технологияларидан фойдаланиш тўғрисида фикр юритилган [167; 798 – 804-б.].

Математикада муаммоли ўқитиш назарияси умумий ўрта ва қисман ўрта махсус таълим тизимидагина ишлаб чиқилган ва ривожлантирилган. Маълумки, олий таълимда муаммоли ўқитиш методикаси максади ва вазифалари, мактаб, коллеж, академик лицей ўқувчилари билан олий ўқув юртлари талабалари ёши ва мотиви билан бир-биридан фарқ қилиши нуктаи назаридан ўзига хосдир. Шу билан бирга, ўқув жараёни ҳам бир-биридан фарқ қилади, хусусан, олий ўқув юртларида маъруза-семинар тизимининг устунлиги сақланиб қолмоқда. Олий ўқув юртлари, айниқса, техника университетларида олий математикани ўқитишда масаланинг асосий ўрин тутиши характерлидир. Бунда талабаларнинг математик билимлар, кўникмалар ва малакалар тизимини эгаллаши, математик маданият ва илмий фикрлашини ривожлантириш, мустақил билиш-ўрганиш фаолиятини фаоллаштириш муҳим аҳамият касб этади. Ҳозирда ўқув маълумотларининг ҳажми ва мураккаблиги ортиши муносабати билан математикани ўқитиш учун ажратилган аудитория соатлари қисқариб бормоқда. Бундай шароитда масаланинг анъанавий функциялари қаторига маълумот ташувчилик вазифаси ҳам қўшилади, яъни назарий маълумотлар масалалар ёрдамида берилади ва ўзлаштирилади. Олий математикани ўқитишда курснинг турли бўлимлари ўзаро алоқадорлиги, аналитик, геометрик ва ҳисоблаш усулларини тизимли бирлигини таъминлаган ҳолда масала ечишнинг универсал – умумий усулларини талабаларга бериш мақсадга мувофиқ ҳисобланади.

Муаммоли вазиятларни ҳал этишнинг методик структураси ва ундан келиб чиқадиган қуйидаги босқичлар:

1) масала шарти таҳлили (олдиндан берилганлар ва мақсад);
2) ечиш режаси(алгоритми)ни тузиш;
3) ечиш режасини амалга ошириш;
4) олинган натижасини ўрганиш,

Ўқув фаолиятида олий психик функциянинг шаклланиш босқичлари билан чамбарчас боғлиқдир. Ўқитишнинг фаолиятли концепциясида (А.Н.Леонтьев, П.Я.Гальперн, С.Л.Рубинштейн ва бошқалар) ўқувчилар изланиш фаолиятида, одатда, йўналиш, амалга ошириш ва назорат компонентлар ажратиб кўрсатилади [71; 53 – 61-б.].

Бундай тақсимланишда биринчи иккита босқич ўқувчининг масалани ечиш жараёнида фаолиятнинг йўналиш олиш бўлаги бўлса, учинчиси – амалга ошириш, тўртинчиси – назорат ҳисобланади. Анъанавий ўқитишда учинчи амалга ошириш босқичи марказий ҳисобланади, йўналиш олиш босқичига етарли даражада эътибор ҳамда вақт ажратилмайди, тўртинчи босқич, умуман, йўқ. Аксинча, муаммоли ўқитишда асосий эътибор биринчи иккита босқич ва тўртинчи босқичга қаратилади. Учинчи амалга ошириш босқичини қисман ёки тўла ҳисоблаш машиналари – компьютерларга топшириш мумкин ва бу зарур.

Шу тариқа охирги – тўртинчи босқичга ҳам вақт ажратиш имкони туғилади.

Масала ечишдаги якуний - тўртинчи босқич натижани ўрганиш ва назорат босқичи бўлиб, у ўз ичига қуйидаги компонентларни олади:

- олинган ечимнинг тўғрилигини асослаш, шу жумладан, фойдаланилган алгоритм ва натижанинг ўзини ҳам ўрганиш;
- танланган алгоритм оптималлиги масаласининг муҳокамаси;
- масалани ечиш натижасида олинган янги билим, кўникма ва малакаларни аниқлаш.

Охирги босқичда берилган муаммо ва уни ечишда қўлланилган алгоритм, янги ўзлаштирилган билим, кўникма ва малакаларни ўқув-тадқиқот ва профессионал масалаларни ҳал этишдаги аҳамияти, олинган натижалардан қаерда фойдаланиш мумкинлиги ҳақидаги мулоҳазалар билан бойитилса, мақсадга мувофиқ бўлади.

Анъанавий ўқитишда биз, одатда, муаммоли таълим қоидасига кўра, натижани ўрганиш ва олинган билимларни тизимлаш босқичи бошланганда тугаллаймиз. Масалан, функцияни экстремумда текшириш худди функция графигини қуриш учунгина керакдек таассурот қолдиради. Ваҳоланки, Эйлер фикрига кўра, “қандайдир максимум ёки минимум маъноси кўринмагунча дунёда ҳеч қандай ўзгариш содир бўлмайди”. Шундай қилиб, талабалар бир ёки бир нечта ўзгарувчили содда функциялар экстремуми масалаларини ечиш усулларини ўргана туриб, уларни тўғридан-тўғри амалиётда қўллаш ва янада мураккаб масалаларни ечиш учун умумлаштириш мумкинлигига ишонч ҳосил қилишлари лозим. Тажриба шуни кўрсатадики, талабалар вариацион ҳисоб элементларини мустақил равишда тўла ўзлаштириб олган билимларини функционал экстремумига доир оддий масалаларни ечишга қўллай олмоқдалар.

Танланган усулни асослаш алоҳида эътиборга лойиқ.

Масалан, чизиқли алгебра курсида операторли усулдан фойдаланиш мақсадга мувофиқ, чунки кейинчалик ундан чизиқли дифференциал тенгламалар ва системаларни, математик физика тенгламаларини ва умуман, турли тенгламаларни сонли ечишда, теплотехника ва электротехника масалаларини ечишда самарали фойдаланиш мумкин. Ўқитишнинг биринчи босқичида у ёки бу усулнинг танланишини асослаш талабаларга доим ҳам тушунарли бўлавермайди. Лекин шунга қарамасдан, мумкин бўлган барча ҳолларда талабалар олдида учрайдиган муаммоларни ҳал қилиб ўтиш зарур. Масалан, талабалар Грамм-Шмидт усулида евклид фазосида ортогонал базис қуришни ўрганиши биланоқ, чексиз ўлчовли гильберт фазосидаги шунга ўхшаш муаммо билан таништирилиб, унинг алоҳида мураккабликларини тушунтириб ўтиш мақсадга мувофиқдир. Шундай қилиб, Фурье қаторларини тўла ортогонал системалар орқали ўрганишга биринчи қадамлар қўйилади.

Таълимда ишлаб чиқариш ва тадқиқот фаолиятларидан фарқли ўлароқ, муаммоли вазиятни келтириб чиқариш зарур бўлади, яъни ўқитишни шундай ташкил қилиш керакки, натижада, муаммоли вазиятни талабалар кўрсин ва ҳис қилсин, таъсирлансин ва ҳаяжонлансин. Бу мақсадга талабаларда бор билим, кўникма ва малакалар кенгайиб ва чуқурлашиб бораётганда, яъни муаммоли вазият келиб чиқишига доир вазият туғила бошлаганда эришилади.

Олий математикани ўқитишнинг маъруза-семинар тизимида муаммоли вазиятлар, асосан, назарий материални ёритиш усули билан маъруза вақтида, масалаларни ечиш усули билан амалиёт дарсларида келтириб чиқарилади. Бундан ташқари, муаммоли топшириқларни бажаришдан иборат бўлган уй иши, Интернет ресурслари, маълумотнома ва монографиялар, босма ва электрон ўқув қўлланмалардан фойдаланиб математиканинг янги бўлимлари билан мустақил танишиш ва ўзлаштириш – муаммоли ўқитишнинг қўлланилмаган компонентларидир.

Қуйида муаммоли вазиятнинг бешта асосий турини баён қиламиз ва уларнинг олий математикани ўқитишда амалга оширилишига мисоллар келтирамиз [50; 17–66-б.].

1-турдаги муаммоли вазият. Муаммоли вазият янги маълумот ва талабаларда бўлиб ўтган тажрибалар натижасида шаклланган билим, кўникма ва малакалар қарама-қаршилиги туфайли содир бўлади. Бундай ҳолда ўқитувчининг вазифаси талабаларни янги тушунча киритиш зарурлигига йўналтириш ва ҳосил бўлган зиддиятли вазиятни бартараф қилиш учун мавжуд тасаввурни принципиал ўзгартиришдан иборат. Таъкидлаш жоизки, бу сунъий методик услуб эмас, балки бу тушунчалар айнан шундай пайдо бўлганига тарих шоҳид.

1-мисол. 1494 йилда францискан монахи Лука Пачоли (1450-1510 йиллар) ўша даврда арифметикадан, алгебра ва тригонометриядан маълум бўлган барча маълумотларни ўз ичига олган “Summa de arithmetica, geometria, proporzioni di proporzionalita” (арифметика, геометрия, бўлинма ва пропорциялар илми йиғиндиси) номли китобини чоп эттирди. Пачоли ўз китобини $x^3+px=q$ кубик тенгламани ечиш илми, унга маълум ҳолида доира квадратураси муаммоси каби мумкин эмас, деган эслатма билан якунлади.

Пачоли чақириғига Болон университети математиклари – Сципион дель Ферро, Тарталья ва Карданолар томонидан қизиқиш билдирилди. Тарихнинг бу драматик ва ибратли бобининг бизнинг тадқиқотимизга алоқаси шундаки, комплекс соннинг киритилиш зарурати

$$x^3+px=q \tag{1.3}$$

кубик тенгламанинг ечими билан боғлиқ бўлган муаммоли вазият туфайли юзага келган. Замонавий адабиётларда бу вазият квадрат тенглама билан боғланади.

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \tag{1.4}$$

ифодани (1.3) тенгламага формал қўйиш уни айниятга олиб келади. Шунга асосан, (2)–кубик тенгламанинг ечими учун, деган хулосага келиш мумкин (Кардано, 1545 й.). Аммо агар (1.3) тенглама фақат ҳақиқий илдизларга эга бўлса ("келтирилмайдиган ҳол" деб номланувчи), у ҳолда Виета теоремасидан фойдаланиб $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$, тенгсизлик ёзилади.

Бундан келиб чиқадики, тенгламанинг ҳақиқий ечимларини топишда Кардано формуласидан фойдалана олиш учун манфий сондан квадрат илдиз чиқара билиш зарур. Муаммоли вазият шундан иборатки, манфий сондан квадрат илдиз чиқариш зарурати, шу пайттача бундай илдиз мавжуд эмас, деб келинган тасаввурга зид эди. Мазкур муаммоли вазиятда илдиз мавжудлигини тан олиб, уни "сохта" сонлар деб атаса-да, Кардано уни ҳал қила олмади. Бу муаммони болон математиги Рафаэл Бомбелли еуb ҳал қилди ва ўзининг "Алгебра" (1572 й.) деб номланган китобида биринчи марта комплекс сонлар устида амаллар қоидалари ва уларнинг келтирилмайдиган кубик тенгламаларга татбиқини баён қилди [50;17 – 66-б.].

2- мисол. Яқинлашувчи узлуксиз функциялар қатори йиғиндиси

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n} \tag{1.5}$$

$x\neq0$ да 1 га, $x=0$ да 0 га тенг, яъни $x=0$ нуқтада узилади. Бу ерда муаммоли вазият шундан иборатки, талабаларга маълум бўлган узлуксиз функциялар йиғиндиси узлуксизлиги ҳақидаги теорема доим ҳам тўғри эмас, яъни қўлланиш чегараси мавжуд ва чексиз сондаги узлуксиз функциялар йиғиндиси узлуксиз бўлиши учун янги "текис яқинлашиш" тушунчасини киритишга тўғри келади. Шу ўринда талабаларга "функция лимити" тушунчасини

қатъий аниқлаган ва "қатор яқинлашиши" тушунчасини киритган Коши 1823 йилда, "яқинлашувчи узлуксиз функциялар қатори йиғиндиси узлуксиз бўлади", деган нотўғри тасдиқни формулировка қилганлиги ҳақида айтиб бериш фойдадан холи эмас. 1826 йилда Н.Х.Абель бу тасдиқ нотўғри эканлигини қуйидаги контрмисол ёрдамида исботлади:

$$\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+....+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+..., \tag{1.6}$$

бу йиғинди $x\in[0,\pi)$ ларда $x/2$ га, $x=\pi$ эса нолга тенг. Шундай қилиб, бу қатор яқинлашадиган функция $x=\pi$ да узилишга эга. Коши томонидан айтилган ушбу нотўғри "тасдиқ" Дирихленинг бўлакли узлуксиз, бўлакли монотон функциялар узлуксиз функцияларнинг Фурье қаторига ёйилиши ҳақидаги теоремасига ҳам зид эканлигини 1847 йилда Л.Зейдель маълум қилди. Бу муаммони ечиш учун зарур бўлган қаторнинг текис яқинлашиши тушунчаси 1848 йилда Дж. Стокс ва Л.Зейделларнинг ишларида пайдо бўлди. Кошининг ўзи эса бу тушунчани 1853 йили киритди ва текис яқинлашувчи қаторлар учун узлуксиз функциялар йиғиндиси узлуксизлиги ҳақидаги тасдиғини аниқлаштирди.

Бу мисоллар шуни кўрсатадики, муаммоли ўқитиш маълумотни баён қилишда тарихий услублар билан ҳамоҳанг. Тарихий тамойил замонавий олий таълим дидактикаси асосини ташкил этувчи тамойиллар орасидан ўз ўрнини эгаллаши лозим. Биз билган ва қила оладиган барча нарса у ёки бу муаммоли вазиятни ечиш натижасида дунёга келган. Илм тарихи – бу янглишишларни аниқлаш ва уларни бартараф қилиш тарихидир. Бунга ўхшаш мисолларни нафақат математикада, балки физикада, кимёда ва бошқа соҳаларда ҳам кўплаб келтириш мумкин. Таъкидлаш жоизки, чуқур математик муаммолар кўпинча бизга башоратлар, ривоятлар, тарихий латифалар ёки бошқотирмалар кўринишида етиб келган. Кубни иккилантириш, Дидоне, Карданонинг "қасамли жиноят", Кеплернинг "вино бочкаси" ҳақидаги масалалар шулар жумласидан. Булар ҳақидаги ҳикоялар, айниқса, бир қарашда математиканинг уларга йироқ бўлган соҳалари – ҳақиқий сонлар назарияси, группалар назарияси, вариацион ҳисоб ва бошқалар билан бу муаммолар орасидаги мавжуд алоқалар ўқитувчи томонидан баён қилиниши талабаларда математикани ўрганишга бўлган қизиқишни уйғотади.

2-турдаги муаммоли вазият. Муаммоли вазият назарий тасдиқларни, ечиш учун мавжуд билим, кўникма ва малакаларни, янги қўлланиш соҳаларини ўзлаштириш мақсадида бошқа кўринишга ўтказиш зарур бўлган масала кўринишида аниқланиши даркор. Спенсер ибораси билан айтганда: "Талабаларни мустақил ихтироларга тинимсиз чорлаш" орқали муаммоли ўқитишнинг асосий мақсади амалга оширилади.

1-мисол. Аналитик геометрия векторлар алгебраси қуйидаги масалаларни ечишга қўллаш мақсадида ўрганилади: берилган нуқтадан ўтувчи, берилган векторга перпендикуляр текислик тенгламасини келтириб чиқаринг; берилган учта нуқтадан ўтувчи текислик тенгламасини келтириб чиқаринг; фазода тўғри чизиқнинг каноник тенгламасини топинг ва ҳ.к. Бундай ёндашувда талабалар қидирилаётган тенгламаларни олишнинг умумий усулини ўзлаштирадилар, бу усулни қўллаш шартларини тадқиқ қилишни ўрганадилар ва бир қийматли, шу билан бирга, ечим мавжуд бўлмаган ҳолларни ҳам кўриб чиқадилар.

2-мисол. Функцияни даражали қаторга ёйиш ҳақидаги масалани ечиш натижасида Тейлор қатори ўрганилади. Бу масалани ечиш жараёнида талабалар мустақил равишда Тейлор қаторига келадилар, функцияларнинг Тейлор қаторига ёйилиш шартларини оладилар ва бундай ёйилиш ягоналигини асослайдилар.

3-мисол. Тейлор формуласи ва чизиқли алгебра курсида ўрганилган квадратик формани каноник кўринишга келтириш усулидан фойдаланиб, кўп ўзгарувчили функциялар экстремуми учун етарли шарт олиш масалалари.

3-турдаги муаммоли вазият. Муаммоли вазият маълум объектлар хоссалари, янги объект ва тушунчалар киритиш учун умумлаштиришдан фойдаланиб, ўхшатиш орқали юзага келтирилади.

1-мисол. Турли тўпламлар (геометрик векторлар, матрицалар, функциялар)да қўшиш ва сонга кўпайтириш амалининг бир хил хоссалари чизиқли фазонинг умумий таърифини киритиш имконини беради.

2-мисол. Функцияни ихтиёрий ортогонал системалар ёрдамида Фурье қаторига ёйиш масаласи қуйилади ва чекли ўлчовли евклид фазосида векторни ортогонал базислар ёрдамида ёйишнинг умумлашган масаласи сифатида ечилади.

4-турдаги муаммоли вазият. Стандарт ўқув масалаларининг ечимини муаммоли – йўналтирилган ўқитиш муаммоли ўқитишнинг юқорида келтирилган барча босқичларини ўз ичига олади: умумий масаланинг қўйилиши, ечишнинг алгоритми (режаси)ни тузиш, алгоритмни амалга ошириш, натижани ўрганиш ва тадқиқ қилиш.

Ўқув масалаларини ечишда муаммоли – йўналтирилган ўқитишнинг самарадорлиги бу масалаларни синфлаштириш ва уларни ечиш усулларини танлашга сезиларли даражада боғлиқ бўлади. Масалан А.И.Кириллов [51; – 260-б.] таҳрири остидаги "Олий математика" ўқув қўлланмасида масалаларни синфлаштириш сифати ҳар бир синфлар сонининг минималлиги ҳамда синфга тегишли масалаларнинг умумий режасини тузиш имконияти билан аниқланади. Бу ерда ўргатувчи компьютер пакети [52; – 81-с.] ёрдамида компьютердан фойдаланиш, масалаларни нисбатан умумийроқ усуллар билан ечиш имконини беришни назарда тутмоқ зарур. Таъкидлаш жоизки, масалаларни нафақат ечилиш усулларига қараб, балки жуда кўп бошқа параметрларига қараб ҳам синфларга ажратиш мумкин. Масалан, одатда, умумий ўрта таълим тизимида масалалар объектга қараб синфларга ажратилади.

Амалиёт дарсларида масалалар тўпламларидан фойдаланишда бир хил алгоритм билан ечиладиган масалаларни ажрата олиш, назарий асосларини муҳокама қилиш ва фан ичидаги ҳамда фанлараро боғлиқликларни, шу билан бирга, амалий йўналганлик инобатга оладиган усулни танлаш ҳақида муҳокама – муаммоли ўқитишнинг муҳим компоненталари ҳисобланади.

5-турдаги муаммоли вазият. Математиканинг янги бўлимларини мустақил ўрганиш мавжуд билим, кўникма ва малакаларни қўллаш ва кенгайтириш омили сифатида.

Мисоллар:

• векторни Фурье қатори базиси бўйича ёйиш;

• Фурье алмаштиришининг ортогонал операторлари;

• кўп ўзгарувчили функциялар экстремуми, функционаллар экстремуми, вариацион ҳисоб.

Бундай ҳолларда талабалар олдига маълумга ўхшаш ечиладиган ва кейинчалик назария қуриладиган масала қўйилади. Бундай ёндашув Дж.Брунерга хосдир: “Оптимал қурилган ўқув жараёни ўтилган материални акслантириб, ўқувчиларга бу мавзу доирасидан ташқаридаги умумлаштиришни амалга ошириш имконини беради” [24; – 96-б.].

Биз, албатта, олий математикани муаммоли ўқитишнинг турли ёндашувларини тўла баён қила олганимиз йўқ, фақат умумий ёндашувларга тўхталдик, холос. Хусусан, муаммоли вазиятни шакллантиришда тарихий ёндашув самаралидир. Айтиш жоизки, математикани ўқитишда фойдаланиш мумкин бўлган бу тоифадаги масалалар ниҳоятда кам. Уларга мисол қилиб “Риман интеграли” тушунчасига келтириладиган эгри чизиқли трапециянинг юзаси ҳақидаги масалаларни келтириш мумкин. Шунингдек, бу масалани умумий ҳолда турли чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапеция юзаси ҳақидаги масала кўринишида таърифлаш мақсадга мувофиқ. Бундай муаммолар рўйхатини таклиф қилиш мумкин, уларнинг кўплари

ўтмишдаги буюк математиклар асарларида бош ҳарфлар билан ёзилган. Жумладан, Архимедда: “Парабола квадратураси ҳақида”, “Доира ўлчови ҳақида”, “Спирал ҳақида”, “Шар ва цилиндр ҳақида”, “Коноид ва сфероидлар ҳақида”; Фермада: “Энг катта ва энг кичик қийматларни қидириш усули”; Лейбницда: “Максимумлар ва минимиумлар, шунингдек, уринмалар учун янги усул” ва ҳ.к.

Математикани ўқитишда муаммоли вазиятни юзага келтиришга доир турли мисоллар Д.Пойанинг “Математика и правдоподобные рассуждения” китобида ўз аксини топган. У шундай дейди: “Математик фикрлаш фақатгина аксиомалар ва қатъий исботларгагина таянмайди, шу билан бирга, ўз ичига жуда кўп бошқа нарсаларни ҳам олади: кўрилган ҳолларни умумлаштириш, индукция ва дедукцияни қўллаш, аналогиялардан фойдаланиш ... турли воситалардан фойдаланиб, топқирлик санъатини эсдан чиқармай исботлаш санъатини ўқитиш” [123; – 464-б.]. Буларни амалга ошириш, индуктив хулоса олиш учун база зарур. Бундай базани яратишда компьютер беқиёс ёрдам кўрсатиши мумкин.

Энди, бу борада бугунги кунда олиб борилаётган илмий-педагогик тадқиқот ишлар мазмунига қисқача тўхталамиз.

Е.А.Зубова ва Е.И.Семирновларнинг мақоласида математик таҳлил курсини мукаммал ўзлаштириш, талабаларнинг мустақил креатив фаолиятини шакллантириш, асосий тушунчалар, усуллар ва теоремаларнинг сифатли таҳлилига чуқур кириб боришда келтириладиган ўқув ва илмий-тадқиқот характерига эга бўлган масалалар тўғридан-тўғри жиддий математик изланишларга олиб бориш имконини бериши масалаларнинг циклик тизимидан фойдаланиб баён қилинган [53; 32 – 36-б.]. Бундай масалаларни ечиш талабада мустақил математик фикрлаш, илмий методик адабиётлар билан танишиш ва улар билан ишлаш, илмий маълумотларга ишлов бериш ва мустақил хулоса чиқариш каби хусусиятларнинг ривожланишига олиб келади. Ҳар бир цикл бир таянч ғояга боғланган, аста – секинлик билан маълумот йиғиб бориш хусусиятига эга бўлган мантиқан туталланган масалаларни ўз ичига олади. Бирор цикл масалалари ечимини охирига етказиш курс иши ёки битирув малакавий ишига асос бўлади.

О.В.Задорожная ва В.К.Кочетковларнинг изланишларида талаба-математикларни тайёрлашда проектлаш фаолияти алоҳида ўрин тутишига тўхталиб, уни янги билимларни ўзлаштиришнинг яна бир усули сифатида қарайди. Талабалар томонидан амалга оширилган ўқув проектларидан математик предметларни ўқитишда фойдаланиш, назарий билимларни чуқурлаштириш ва мустаҳкамлаш, илмий тадқиқот ишлари юзасидан биринчи тажрибаларни олишга имкон беради [45; 252 – 253-б.].

Г.Х.Воистинова ва М.Ю.Солощенколар мақоласида ясашга доир амалий мазмунли масалаларни ечишни ўргатиш методикаси келтирилган. Амалий мазмунли масалаларни қуришда иккита муҳим муаммо мавжуд: биринчиси, масалани тузиш, иккинчиси, бундай масалаларни ечиш. Муаллиф томонидан ўтказилган тадқиқот натижасида қуйидагилар аниқланган: бундай масалалар ичида талабалар учун энг қийини чизмалар қуриш ёрдамида ечиладиганлари; чизма инструментларидан фойдаланиш талабларида таҳлил, қуриш, исботлаш ва тадқиқот ўтказиш. Бу иш ўз ичига қуришга доир геометрик масалаларни, амалий аҳамиятли масалалар ва уларнинг моделларини яратишга доир масалалар комплексини олади [26; 817 – 821-б.].

М.Ш.Маматов ва Д.М.Махмудоваларнинг услубий қўлланмасида математиканинг турли соҳаларидан турли мавзуларга доир муаммоли масалалар келтирилган ва ечимлари баён қилинган. Айниқса, оптимал бошқарув, дифференциал ўйинлар соҳасига доир муаммоли масалалар ушбу йўналишда янгиликдир. Шу билан бир қаторда, муаммоли масалалар ечимлари баён қилинганки, уни ихтиёрий талаба бемалол таҳлил қила олади. Бу қўлланмада муаллифлар томонидан бундай масалаларни тузиш ва ечиш методикаси ишлаб чиқилган [94; – 95-б.].

1.3-§. Муаммоли математик масалаларни компьютер технологиясидан фойдаланиб ўқитиш орқали талабаларда мустақил креатив фаолиятни ривожлантиришнинг шарт-шароитлари

Машхур математик Г.Биркгофф 1969 йилда айтганидек: "...биз инсон ва машина орасида тобора ошиб бораётган рақобатни башорат қилишимиз мумкин, унда ҳар бир иштирокчи ўзича вазифани бажаради". Бу ҳақида Е.Мамфорд 1972 йилда шундай деган: "Тобора барча тизимларда инсон-машинали кўринишда бўлишига интеллектуал тан бериш ортмоқда...". Таълимда бу, компьютерлашган жамиятда ўқитишнинг мақсади талабага, унинг компьютери дастурлари таъминотига, шу билан бирга, ўқув ва ўқув-тадқиқот ишларини бажаришда фойдалана олиш имкониятига нисбатан аниқланишини билдиради. Шундай қилиб, янги ўқитиш объекти – тандем "талаба+компьютер" кириб келди.

Математикада муаммоли ўқитишни ташкил қилишда талабаларни компьютердан фойдаланишга йўналтириш, бизнинг фикримизча, асосида Винернинг "Инсонга – инсоний, ҳисоблаш машинасига – машинага хос нарсани беринг" ибораси ётган, муаммоли вазиятни келтириб чиқаришнинг янги турдаги манбаси бўлиб қолиши мумкинлиги муҳим. Бу муаммоли вазият тандемини ўқитишда юқорида айтилганлар билан бир қаторда, маъруза ва амалиёт дарсларида қуйидаги саволларни муҳокама қилишда аниқланади [49; – 245-б.]:

1) қайси ўзлаштирилган билимни компьютерга бериш, қайсиларини инсонда қолдириш керак ва нима учун?

2) компьютерни янги билимга қандай мослаштириш керак?

3) компьютерни янги билимларидан қандай қилиб саводли фойдаланиш мумкин ва унинг жавоблари қандай назорат қилинади?

4) мавзу ўзлаштириб бўлингандан кейин электрон ўқув

қўлланма модули қандай модификацияланади?

Тандемни муаммоли ўқитиш, компьютер билан мулоқотда “инсон томонидан муаммоли вазиятнинг хоссалари ҳақида шундай билимларни олиш мумкинки, уларни машинасиз мустақил аниқлашнинг иложи йўқ ёки принципиал ёпиқ” ташкил қила олиши муҳим компонентасидир [66; – 191-б.].

1-мисол. Қуйидаги интегралларни

$$I_1=\int_0^1 e^{-x^2}dx,\qquad I_2=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx \tag{1.7}$$

тақрибан ҳисоблаш шуни кўрсатмоқдаки, талаб қилинган абсолют хатолик катта эмаслиги (яъни то 0,0001гача бўлган)да ҳар иккала ҳолда, сонли интеграллашни трапеция ёки Симпсон усулларининг ихтиёрийси ёрдами билан ҳисоблаш мумкин. Компьютердан фойдаланиш, биринчи ҳолда тақрибий ҳисоблаш формулалари интегрални етарли даражада аниқликда ҳисоблаш имконини берса, иккинчи ҳолда бунинг акси. Муаммоли вазият шундан иборатки, бу натижа 1-курс талабаларининг билимларига зид, чунки улар учун интеграл остидаги функцияларнинг бир-биридан фарқи йўқ, иккаласи ҳам барча жойда дифференциалланувчи ва уларнинг графиги жуда ўхшаш. Компьютер e^{-x^2}, $1/(1+x^2)$ функциялар орасидаги принципиал фарқни излашга чорлайди. Бу фарқни биз уларга комплекс ўзгарувчили функция сифатида қараганимизда кўра бошлаймиз. Бошқача қилиб айтганда, формула хатолиги қанча катта бўлса, интеграл остидаги функциянинг махсуслиги интеграл йўлига шунча яқин бўлади. e^{-z^2} функция бутун комплекс текисликда аналитик бўлгани учун унинг Тейлор қатори барча z ларда яқинлашади. $\frac{1}{1+z^2}$ функция $z=\pm i$ полюсга эга ва у Тейлор қаторига фақат $|z|<1$ доирада ёйилади. Бу шуни кўрсатадики, унинг ҳосиласи ноль нуқтада факториалга ўхшаш тез ўсади. Ушбу фактни 1-курс талабаларига тушунтириш учун ҳар иккала

ҳақиқий функциянинг уларга маълум бўлган ёйилмасидан фойдаланиб, хатолик ҳисоблаш формуласида юқори тартибли ҳосила иштирок этади? 1-курсга тушунтириш учун нима қилиш керак? Бу мисол қандай қилиб компьютер ёрдамида, аниқ интеграл таърифи – интеграл йиғиндиси лимити кўринишида аниқланиши мураккаблигини аниқлашни кўрсатади, чунки бу тушунчани тўғридан-тўғри амалда қўллашда жуда кўп кичик сонларни қўшишга тўғри келади, бу эса хатолик манбаи.

Айтиш жоизки, компьютердан фойдаланиш нафақат у ёки бу феноменни аниқлаш, балки уни очиш имконини ҳам беради.

2-мисол. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ гармоник қатор йиғиндиси компьютерда ҳисоблнганда, чексиз эмас, балки қандайдир сон чиқади, қанча катта бўлса, “машина ноли” шунча кичик бўлади. Муаммоли вазиятни ечиш учун қуйидаги лимитни ҳисоблаш мақсадга мувофиқ:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right) \tag{1.8}$$

Бу вазият талабаларга, ҳақиқатан ҳам, гармоник қатор узоқлашишини кўрсатади, шу билан бирга, “Эйлер ўзгармаси” тушунчасини киритишга ва уни ҳисоблашга имкон беради.

Навбатдаги мисол компьютердан фойдаланиш, шундай муаммоли вазиятларни аниқлаш, муҳокама қилиш ва ечиш имконини берадики, улар анъанавий ўқитишда юзага келади, лекин турли йўллар билан айланиб ўтилади ёки инобатга олинмайди.

3-мисол. Универсал деб аталувчи $t=tg(x/2)$ алмаштириш интегрални қуйидагича кўринишга олиб келади:

$$\int\frac{\sin x}{2+\sin x}dx=x-\frac{4}{\sqrt{3}}arctg\frac{2tg(x/2)+1}{\sqrt{3}}+C. \tag{1.9}$$

Муаммоли вазият шундан иборатки, узлуксиз функциядан олинган бу (3) интегралда интеграл остидаги функция узлуксиз, лекин ҳосил бўлган ўнг томондаги функция эса $x=\pi k,\ k=\pm1,\pm2,...$ нуқталарда узилади.

Одатда, бу муаммо умуман тан олинмайди ёки $t=tg(x/2)$ янги ўзгарувчи киритилганда, $(-\pi,\pi)$ оралиқ билан чегараланади. Шундан кейин натижа олиниши билан бу функциянинг 2π - даврийлиги эслатилади. Агар талабаларга шу интегрални қайсидир математик пакет ёрдамида ҳисоблаш таклиф қилинса, компьютер умуман бошқа кўринишдаги натижани беради:

$$\int\frac{\sin x}{2+\sin x}dx=x\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)-\frac{4\sqrt{3}}{3}arctg\frac{\cos x}{\sin x+\sqrt{3}+2}+C. \qquad (1.10)$$

Бу ерда (1.9) ва (1.10) формулалар орасидаги фарқ юзасидан муҳокамалар учун бой имкониятлар очилади, геометрик талқин, шу жумладан, (1.9) ва (1.10) тенгликлар ўнг томонидаги функциялар графикларини С нинг турли қийматлари ва турли оралиқларда қуриш, шунингдек, ихтиёрий ўзгармас – нима бу сонми ёки функциями кабилар шулар жумласидан.

Таъкидлаш мумкинки, бугунги кунда математик тадқиқотларнинг бир қисми математик пакетлар яратиш бўйича фаолиятга трансформация қилинди. Уларда олинган натижалар олий математикадаги натижаларга яқин ва улар педагогик қайта ишловни талаб этади. “Инсон-компьютер” ҳамкорлигида қандай қилиб ва нима учун компьютер у ёки бу ечимни олябти, деган саволни тушунтириш жараёни ҳам бўлиши керак. Шу боис, ҳисоблаш алгоритмлари математик пакетда ёпиқлиги туфайли буни ҳар доим ҳам амалга ошириб бўлмайди. Шунинг учун бизга (1.10) формула қандай алгоритм ёрдамида олингани номаълум.

Келтирилган мисоллар шуни кўрсатмоқдаки, тандемни ўқитишда шундай муаммоли вазиятларни юзага келтириш кераккки, улар талабаларда маълумот ҳақида мавжуд бўлган тасаввур, компьютердан олинган маълумотларга зидлиги

туфайли пайдо бўлсин. Психологик адабиётларда бундай номутаносиблик вазиятлари “когнитив диссонанс” тушунчаси билан бирлаштирилади. Талаба билан компьютер ҳамкорлиги туфайли юзага келган когнитив диссонанс талабанинг билиш жараёнини фаоллаштиришга хизмат қилиши мумкин.

Тандемни муаммоли ўқитишда компьютердан фойдаланиш туфайли пайдо бўладиган қўшимча имкониятлар Пойа ва Фройденталларнинг талабаларда математик фикрлашни шакллантиришда “ҳақиқатга ўхшаш муҳокама”ларидан бўлган индукция ва бошқа усулларнинг муҳим аҳамияти ҳақидаги ғоялари билан боғлиқ [124; – 448-б.]. Фавқулодда тез кўпайиши туфайли генетик янгиликлар учун бебаҳо экспериментал материаллар манбаи бўлган Дрозофилла пашшаси каби компьютер ҳам инсон миясидан ташқарида ниҳоятда катта тезликда маълумотларга ишлов бериш имконияти сабабли талаба, муҳандис, тадқиқотчида исботлаш талаб этилаётган математик ғояларни шакллантиришга қодир.

Компьютер ва унинг барча имкониятларидан фойдаланишга мўлжаллаб, индуктив ақлий хулоса чиқара олиш асосини яратиш мақсадида махсус топшириқлар тайёрлаш мураккаб методик муаммо хисобланади. Маърузачи ёки дарслик муаллифи томонидан унинг аниқ ечими талабаларда мустақил билиш жараёнини фаоллаштиришда принципиал янги имкониятларни беради ва креатив шахснинг шаклланишига олиб келади.

Бу борада бугунги кунда олиб борилаётган илмий ва илмий–педагогик тадқиқот ишлари мазмунига қисқача тўхталамиз.

Д.И.Юнусова томонидан ёзилган дарсликда математика ўқитувчисининг инновацион педагогик фаолияти ва унинг турлари; янги педагогик технологиялар ва замонавий ахборот-коммуникация технологиялари асосида математика фанларини ўқитиш методикаси каби мавзулар ёритилган [161; – 200-б.].

[18; 60 – 64-б.] да тенглама ва тенгсизларни ечишга функционал усулни қўллаш ўрганилган, анъанавий усулларда ечилмайдиган масалаларни ечиш усуллари таҳлил қилинган. Функционал усул тенглама ва тенгсизликларни изланаётган ечимлар тўпламини таҳлил қилишни ва рационал ечим топишга ўргатади. Мақолада можарант усули тўла кўриб чиқилиб, уни қўллашга мисоллар берилган, шу билан бирга, машқлар ечимига кўрсатмалар ҳам келтирилган. Электрон ўқув-методик қўлланманинг яратилиши зарурлиги асосланган, ўқув-методик қўлланманинг мумкин бўлган структураси келтирилган.

У.Л.Гольдштейн ўз мақоласида тадқиқотли ўқитиш усули билан масала ечишга ўргатиш критик ва креатив фикрлаш, саволлар қўя билиш, режалаштириш, тадқиқот олиб бориш каби талабаларнинг ривожланишига катта ҳисса қўшганини таъкидлаб, бу жараёнга информацион-коммуникацион технологияларни кенг қўллаш тадқиқотли ўқитишнинг кўп қирраларини ёритишга олиб келишига тўхталган [31; 46 – 51-б.].

Бощенко Т.В., Фокина Н.И. ларнинг [22; 467 – 476-б.] ишида қобилиятли талабалар фаолиятининг ўқув дастури келтирилган. Талабанинг инновацион фаолиятга оптимал кириши, ўқув жараёнининг асосий самарали кўрсаткичлари таҳлил қилинган. Дастур мазмуни таркиби ва тематик режаси билан биргаликда келтирилган. Талабаларни олимпиадага тайёрлаш жараёни учун асосий тадбирлар режаси ёритилган. Тадқиқот олиб бориш учун зарур йўналиш аниқланган. Хулосаларда иқтидорли талабаларга компьютер графикасини ўқитиш жараёнида қўллаш тавсия этилган.

I боб бўйича хулоса

1. Муаммоли таълимнинг вужудга келиш тарихи, психологик асослари ва унинг таълим жараёнида қўлланилиш вазияти таҳлил қилинди ҳамда олий таълим муассасаларида муаммоли математик масалаларни ўқитишдаги ўрнига аниқликлар киритилди. Муаммоли таълимнинг ўқув жараёнида қўлланилишининг таҳлили шуни кўрсатмоқдаки, олий ўқув юртларида математика ўқув фани бўйича бугунги кунда амалда қўлланилаётган фан дастурлари мавзуларни муаммоли ёритишга етарли даражада асосланмаган. Бу эса табиий ва физика-математика фанларини яхши ўзлаштирган, мавжуд муаммолар устида мустақил тадқиқот ишларини олиб бора оладиган юқори савияли мутахассислар тайёрлашнинг замонавий талаб ва имкониятларига тўлақонли жавоб бермайди. Бу эса, олий таълим муассасаларида ўқитиладиган математикада муаммоли ўқитиш ғояси ҳақида юритилган таҳлилий мулоҳазалар муаммоли математик масалаларни ўқитишда самарали деган хулосага келишга асос бўлди.

2. Муаммоли математик масалаларни ўқитишда фойдаланиладиган муаммоли вазият турлари, математикани ўқитишда қўллаш усуллари асосида талабалар мустақил креатив фаолиятини ривожлантиришга хизмат қиладиган муаммоли математик масалалар мажмуаси ишлаб чиқилди. Олий ўқув юртларида математика фанларини ўқитишда масала асосий ўрин тутиши характерлидир. Шундан келиб чиққан ҳолда муаммоли вазиятнинг беш асосий тури келтириб ўтилган бўлиб, улардан фойдаланиб, муаммоли математик масалаларни ўқитиш орқали талабалар мустақил креатив фаолиятини ривожлантиришга асос бўлди, деган хулосага келинди ва муаммоли математик масалалар мажмуаси бунга хизмат қилди.

3. Муаммоли математик масалаларни ўқитишда компьютер технологияларининг восита сифатидаги ўрни ва аҳамияти

кўрсатиб берилди. Ҳақиқатан ҳам, математикадан муаммоли ўқитишни ташкил қилишда талабаларни компьютердан фойдаланишга йўналтириш масаласи муаммоли вазиятни келтириб чиқаришнинг янги турдаги манбаси бўлиб қолиши мумкинлиги аҳамиятга моликдир. Бунда компьютер имкониятларидан фойдаланишга мўлжаллаб, ақлий хулоса чиқара олиш асосини яратиш мақсадида махсус муаммоли топшириқлар мажмуасини тайёрлаш ўқитувчининг зиммасига юкланади, маърузачи ёки дарслик муаллифи томонидан унинг аниқ ечими талабаларда мустақил креатив фаолиятини ривожлантиришда принципиал янги имкониятлар беради.

II БОБ. МУАММОЛИ МАТЕМАТИК МАСАЛАЛАРНИ ЎҚИТИШ АСОСИДА ТАЛАБАЛАРНИНГ МУСТАҚИЛ КРЕАТИВ ФАОЛИЯТИНИ РИВОЖЛАНТИРИШ МЕТОДИКАСИ

2.1-§. Муаммоли таълим ва муаммоли математик масалаларнинг ўзига хос жиҳатлари

Математик фанлар ўқув курсларида одатда таърифлар “теоремалар – мисоллар – татбиқлар” занжири кўринишида қурилади. Бу жараёнда асосий ўринни олдиндан аниқ ифода қилинган исботланиши керак бўлган тасдиқлар – теоремалар эгаллайди. Теоремалар математик назария ва унинг таснифида улкан аҳамият касб этади, лекин математик таълим методик тизимида айниқса номатематик мутахассисликлар ва йўналишларда ҳар доим ҳам муваффақиятли ўрин эгалламаслиги мумкин.

Албатта, исботлашни ўқитиш – математикани ўқитишнинг мукаммал зарур элементи эканлигига шубҳа йўқ. Маърузада исботнинг мавжудлиги талабаларда мантиқни ривожлантиради. Аммо теореманинг исботи – бу ҳар ҳолда тингловчи яхши ёки ёмонроқ ўзлаштирадиган ёт мантиқдир. Ўқитувчи ўқув жараёнида муаммоли ёндашувни қўллаганда, талабаларнинг ўз заковатини намоён қилишга мажбур қилиб, улардаги мантиқни фаоллаштиришга ҳаракат қилади. Бундай вазиятда мантиқий занжир тахминан қуйидаги кўринишни олади: ”(кўпинча амалий аҳамиятли) муаммоли вазият – уни ечиш - (муаммони юзага келган) янги тушунчаларни аниқлаш – умумлаштириш”. Шу билан бирга мулоҳазалар қатъийлигига путур етмайди, у тадқиқот кўринишига, яъни олдиндан номаълум натижага қараб ҳаракатга ўтади.

Кўпинча муаммоли таълимни “амалиётдан – назарияга” принципига келтириш кўринишидаги тасаввурлар учраб туради. Агар математика тўғрисида гапирсак, бу – аввал бир нечта масала кўрсатиб берилди. Ҳақиқатан ҳам, математикадан муаммоли ўқитишни ташкил қилишда талабаларни компьютердан фойдаланишга йўналтириш масаласи муаммоли вазиятни келтириб чиқаришнинг янги турдаги манбаси бўлиб қолиши мумкинлиги аҳамиятга моликдир. Бунда компьютер имкониятларидан фойдаланишга мўлжаллаб, ақлий хулоса чиқара олиш асосини яратиш мақсадида махсус муаммоли топшириқлар мажмуасини тайёрлаш ўқитувчининг зиммасига юкланади, маърузачи ёки дарслик муаллифи томонидан унинг аниқ ечими талабаларда мустақил креатив фаолиятини ривожлантиришда принципиал янги имкониятлар беради.

II БОБ. МУАММОЛИ МАТЕМАТИК МАСАЛАЛАРНИ ЎҚИТИШ АСОСИДА ТАЛАБАЛАРНИНГ МУСТАҚИЛ КРЕАТИВ ФАОЛИЯТИНИ РИВОЖЛАНТИРИШ МЕТОДИКАСИ

2.1-§. Муаммоли таълим ва муаммоли математик масалаларнинг ўзига хос жиҳатлари

Математик фанлар ўқув курсларида одатда таърифлар "теоремалар – мисоллар – татбиқлар" занжири кўринишида қурилади. Бу жараёнда асосий ўринни олдиндан аниқ ифода қилинган исботланиши керак бўлган тасдиқлар – теоремалар эгаллайди. Теоремалар математик назария ва унинг таснифида улкан аҳамият касб этади, лекин математик таълим методик тизимида айниқса номатематик мутахассисликлар ва йўналишларда ҳар доим ҳам муваффақиятли ўрин эгалламаслиги мумкин.

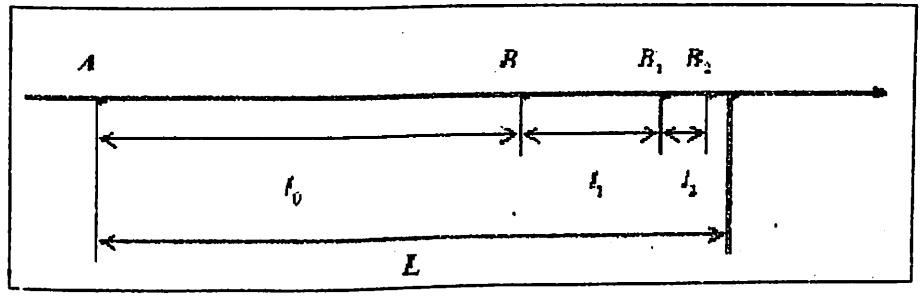
Албатта, исботлашни ўқитиш – математикани ўқитишнинг мукаммал зарур элементи эканлигига шубҳа йўқ. Маърузада исботнинг мавжудлиги талабаларда мантиқни ривожлантиради. Аммо теореманинг исботи – бу ҳар ҳолда тингловчи яхши ёки ёмонроқ ўзлаштирадиган ёт мантиқдир. Ўқитувчи ўқув жараёнида муаммоли ёндашувни қўллаганда, талабаларнинг ўз заковатини намоён қилишга мажбур қилиб, улардаги мантиқни фаоллаштиришга ҳаракат қилади. Бундай вазиятда мантиқий занжир тахминан қуйидаги кўринишни олади: "(кўпинча амалий аҳамиятли) муаммоли вазият – уни ечиш - (муаммони юзага келган) янги тушунчаларни аниқлаш – умумлаштириш". Шу билан бирга мулоҳазалар қатъийлигига путур етмайди, у тадқиқот кўринишига, яъни олдиндан номаълум натижага қараб ҳаракатга ўтади.

Кўпинча муаммоли таълимни "амалиётдан – назарияга" принципига келтириш кўринишидаги тасаввурлар учраб туради. Агар математика тўғрисида гапирсак, бу – аввал бир нечта масала ечилишини муҳокама қилиш ва кейин умумий принципни формулировка қилиш деганидир. Бундай тушунча қисман тўғри, лекин бу муаммоли таълим концепциясини соддалаштирилган кўринишидир. А.М.Матюшкин [102; — 208-б.] мисол сифатида қуйидаги экспериментни келтирган:

6-синф ўқувчиларига $a(b+c)=ab+ac$ дистрибутивлик хоссаси турли усулда ўргатилган. A гуруҳга, дастлаб, олдинига хосса сўз билан тушунтирилиб, кейин у бир нечта мисол орқали намойиш қилинди ва мустаҳкамлашга масалалар берилди. B гуруҳга аввал $a(b+c)$ ни ҳисоблаш таклиф қилинди, кейин олинган натижаларнинг $ab+ac$ ифода билан бир хиллиги кўрсатилди ва берилган хосса баён қилинди. Шу билан бирга, бу хоссанинг ушбу вазиятда экспериментал гуруҳлардаги ўзлаштирилишида сезиларли таъсири аниқланмади. Матюшкин бунга ўхшаш тажрибалардан муаммоли таълим самарадорлиги ҳақида хулоса чиқариб бўлмайди деб ҳисоблайди, чунки келтирилган тажрибада назарий материалдан олдин ёки ундан кейин бериладиган масалалар ҳақида гап кетмоқда. Бу масалалар муаммоли вазиятни юзага келтирмайди. Демак, янги билимни ўзлаштиришга эҳтиёж туғдирмайди.

“Масала” билан “муаммоли вазият” тушунчалари қандай фарқланади? Масаланинг қўйилиши объектив ва у субъект (ўқувчи)дан ташқарида мавжуд. Бундан фарқли ўлароқ, муаммоли вазият “биринчи навбатда, субъект вазиятини характерлайди, бундай топшириқларни бажариш жараёнида пайдо бўладиган, предмет ҳақидаги янги билимни очиш (ўзлаштириш) ни талаб қилувчи, топшириқни бажариш усуллари ёки шароитларидир” [71;58 – 66-б.]. Шундай қилиб, муаммоли вазият бу масаланинг ўзигина эмас, балки мавжуд билим ва малака бир томонда ва қилинаётган фараз бошқа томонда, ўзаро қарама-қаршилигини бартараф қилишни талаб этувчи билиш жараёни масаласидир.

Муаммоли вазиятга мисол сифатида Зенон Элейскийнинг Ахиллес (Троя жанги қаҳрамонларидан бири) ва тошбақа парадоксини кўрайлик (2.1-расм).



2.1-расм

Ахиллес B нуқтада жойлашган тошбақадан l_0 масофадаги A нуқтада жойлашган. Улар қандайдир вақтдан бошлаб AB тўғри чизиқ бўйлаб бир хил (A дан B га қараб) йўналишда ҳаракат қила бошлайди. Маълумки, Ахиллеснинг тезлиги тошбақанинг тезлигидан сезиларли даражада катта. Қанчадир вақтдан сўнг Ахиллес B нуқтада бўлади, лекин тошбақа бу вақтда B_1 нуқтага ўтган бўлади. Ахиллес B_1 нуқтага етиб борганда, тошбақа B_2 нуқтада бўлади. Бу мулоҳазани исталганча давом эттириш мумкин. Хулоса: Ахиллес тошбақага ҳеч қачон ета олмайди!

Талабалар аудиториясида бу парадоксга бўлган муносабат ҳар доим деярли бир хил: норозилик билан бошларини тебратиб, мийиғида кулиб қўядилар. Талабалар назарида уларни алдаётгандай туюлади ва бу табиий, чунки қилинган хулоса ақлга сиғмайди. У кундалик ҳаётий тажрибага ҳам зид: агар жараён фазода ҳамда вақт бўйича чегараланмаган бўлса, тез ҳаракат қиладиган жисм шу йўналишда нисбатан секин ҳаракатланаётган жисмга етиб олади ва ундан ўтиб кетади. Буни тезлик тушунчаси, вақт ва босиб ўтилган йўлдан фойдаланиб, қийинчиликсиз исботлаш мумкин.

Агар Ахиллес υ_A тезлик билан, тошбақа υ_B тезлик билан ҳаракат қилмоқда деб фараз қилсак, у ҳолда

$$\frac{L-l_0}{\upsilon_B}=\frac{L}{\upsilon_A} \tag{2.1}$$

тенгликдан, Ахиллес тошбақага ўзининг бошланғич вазиятидан

$$L=l_0\Big/\left(1-\frac{\upsilon_B}{\upsilon_A}\right) \tag{2.2}$$

масофада етиб олиши келиб чиқади.

Бироқ ўқитувчи қуйидаги талабни олдинга суради: қани, Ахиллес парадокси чегарасидан чиқмаган ҳолда, мантиғингизни баён қилинг, парадоксли хулосани инкор этинг! Бошқача қилиб айтганда, l_0, l_1, l_2 ва ҳоказо миқдорлар кетма-кетлигини ўрганинг (2.1-расмга қаранг). Бу – муаммоли вазият. Чунки у вақт ва чекли (чексиз кичик бўлмаган) миқдорлар ҳақидаги тасаввурлар маъносиз натижага олиб келган қарама-қаршиликни бартараф қилишни талаб қилмоқда. Бизнинг фикримизча, математик таҳлил курсининг "Сонли кетма-кетликлар лимити", "Сонли қатор ва унинг яқинлашиши" каби мураккаб мавзуларини айнан шу парадокснинг таҳлили билан бошлаш мақсадга мувофиқ бўлади:

$$\begin{aligned}
&\frac{l_0}{l_1}=\frac{\upsilon_A}{\upsilon_B}, && l_1=l_0\frac{\upsilon_B}{\upsilon_A},\\
&\frac{l_1}{l_2}=\frac{\upsilon_A}{\upsilon_B}, && l_2=l_0\left(\frac{\upsilon_B}{\upsilon_A}\right)^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots && \\
&\frac{l_{n-1}}{l_n}=\frac{\upsilon_A}{\upsilon_B}, && l_n=l_0\left(\frac{\upsilon_B}{\upsilon_A}\right)^n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots &&
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Ҳақиқатан ҳам, талаба мустақил равишда юқоридаги ифодаларни чиқара олади. Масалан, $l_0=1км$, $\frac{\upsilon_B}{\upsilon_A}=0{,}01$. У ҳолда

$l_n=0{,}01^n км$, яъни $l_1=10м$, $l_2=10см$, $l_3=1мм$ ва ҳоказо. Кўриниб турибдики, тошбақанинг ҳар бир навбатдаги "пойга босқичи"да ўтган йўли аянчли тарзда камаймоқда. Худди шундай вазиятда ҳар бир навбатдаги "пойга босқичи" давомийлиги камайиб бормоқда. Агар бу ерда ихтиёрий олдиндан берилган $\varepsilon>0$ сон учун шундай етарлича катта N танлаш мумкинки, $n>N$ тенгсизликдан $l_n=0{,}01^n<\varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқади, деган тасдиқни келтирсак тўғри бўлади.

Шундай қилиб, биз Ахиллес ва тошбақа ҳақидаги масала муҳокамасидан "сонли кетма-кетлик лимити" тушунчасига келиб қолдик (бизнингча, бу лимит нолга тенг). Албатта, бу вазиятдан талабалар ўқитувчининг ёрдамисиз чиқиб кетиши мушкул, аммо бундай кўмак фақатгина йўналтирувчи саволлардангина иборат бўлиши етарли.

Иккинчи томондан, $l_0, l_1, l_2,\ldots,l_n,\ldots$ кетма-кетлик лимити нолга тенг дегани $l_0+l_1+l_2+\ldots+l_n+\ldots$ йиғинди чексизликка интилмайди, дегани эмас (Агар охирги йиғинди чексизликка интилганда, ундан Ахиллес ҳеч қачон тошбақага ета олмаслиги келиб чиққан бўлар эди!). Бу энди мусбат ишорали сонли қатор яқинлашуви ҳақидаги масаладир. Қаторни ёзамиз:

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_i=l_0+l_1+l_2+\ldots+l_n+\ldots=l_0+l_0\frac{\upsilon_B}{\upsilon_A}+l_0\left(\frac{\upsilon_B}{\upsilon_A}\right)^2+\ldots+l_0\left(\frac{\upsilon_B}{\upsilon_A}\right)^n+\ldots, \tag{2.4}$$

чекли йиғиндиларни $n\to\infty$ даги лимити Ахиллес тошбақага етиб оладими ёки ета олмайдими, агар етиб олса қаерда? деган қатор саволларга жавоб беради.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(l_0+l_1+l_2+\ldots+l_n)=\lim_{n\to\infty}\left(l_0+l_0\frac{\upsilon_B}{\upsilon_A}+l_0\left(\frac{\upsilon_B}{\upsilon_A}\right)^2+\ldots+l_0\left(\frac{\upsilon_B}{\upsilon_A}\right)^n\right)= \tag{2.5}$$

$$=L=\frac{l_0}{1-\frac{\upsilon_B}{\upsilon_A}}.$$

Демак, чекли йиғиндиларнинг $n \to \infty$ даги лимити L га тенг бўлар экан. Масалан, юқорида танлаб олинганлар учун $L = \frac{1}{0,99} = 1,010101$ *км*, бошқача қилиб айтганда, тошбақа бу давр ичида бошланғич нуқтадан $10,1$ *м* масофага бора олади, холос.

L учун худди шундай хулосага, юқорида кўрсатилганидек, кетма-кетлик ва қатор тушунчаларисиз ҳам келиш мумкин эди. Бунинг учун $\sum_{n=0}^{\infty} l_i$ йиғиндини чексиз камаювчи прогрессия йиғиндиси эканига эътибор қаратиш кифоя. Шундай қилиб, "эски" (тезлик, вақт ва босиб ўтилган йўл орасидаги боғлиқлик ҳақидаги) билим билан "янги" – икки жисм ҳаракатини тавсифлашга дискрет ёндашув орасидаги зидлик кетма-кетликлар ва қаторлар билан боғлиқ тушунчаларни киритиш ҳисобига бартараф этилди.

Зенон Элейский парадоксини бунча кенг муҳокама қилишимизга сабаб, бу парадокс математиканинг бошқа йўналишларида ҳам қўллаш имконини берувчи муаммоли вазиятни жуда яхши тавсифлашга шароит яратади. Албатта, биз келтирган математик мулоҳазалар Зеноннинг фалсафий қарашларини тўлақонли ҳал этмайди. Бу ўқув жараёнида фойдаланиш мақсадида қурилган (кетма-кетлик лимити, чексиз кичик ва чексиз катта миқдорлар, сонли қаторлар ва улар йиғиндисининг яқинлашуви каби) математик тушунчалар доирасини кенгайтириш ва математик тўғри натижа берувчи модель холос.

Фикримизча, муаммоли вазиятни юзага келтириш учун энг маъқул усул бу – зарур тушунчалар киритиш, зарур боғланишлар ва муносабатлар, янги усуллардан фойдаланишни талаб қиладиган амалий ёки қизиқарли масалаларни қўйишдир.

Биз энди фундаментал фанлардан бири бўлган физика ва математиканинг универсал бўлимларидан бўлган геометриянинг

ўзаро боғлиқликда ривожланишига тўхталамиз. Физика ва бошқа табиий фанлар ривожида математиканинг алгебра, анализ, эҳтимоллар назарияси ва геометрия каби соҳалари доимий таъсирини ўтказиб келган. Назаримизда, келгусида физикада геометрия янада муҳимроқ ўрин тутади.

Физика (шу жумладан, механика ва астрономия) ва геометриянинг ўзаро боғлиқлиги илдизлари қадимий бўлиб, жуда узоқ даврларга бориб тақалади ва Евклид, Архимед, Гиппарх ва Птолемейлар каби номлар билан боғлиқ. Платон, айнан геометрия "ақлни ҳақиқатга яқинлаштиради", деб ҳисоблаган. Табиий фанлар билан геометрия орасидаги янада чуқур боғлиқлик XVII асрларда, бир томондан, Декарт, Паскаль ва Ферма асарларида иккинчи томондан, Кеплер, Галилей ва Ньютон асарларида амалга оширила бошлади. Кейинчалик бу боғлиқлик мустаҳкамлана борди, унинг учун замонавий физикани геометрик тилсиз тасаввур қилиб бўлмайди. Аёнки, илм соҳасининг ўзи худди шунингдек, унга мос асосий терминлар ҳам вақти билан бошланғич ҳолига нисбатан кенгайиб боради. Геометрия планиметрия шаклида пайдо бўлган бўлса, у кейинчалик евклид ва ноевклид геометриясига, аналитик, алгебраик ва яна дифференциал геометрияларга бўлиниб кетди. Физикада геометриянинг қўлланиш соҳаси XVIII асрларга келиб, Даламбер, Лагранж ва кейинроқ Гамильтоннинг ишларида кенгая бошлади. Бу олимларнинг барчаси физикдан кўра, кўпроқ математик эдилар. Улар умумлашган координаталар системасини ва шу асосда "конфигурацион ва фазали фазолар" тушунчаларини киритдилар.

Механика ва физикада геометрик тушунча ва усуллар узоқ вақтлар давомида ёрдамчи вазифасини ўтаб келган ва аниқроғи, асосан, ҳисоблашга қулайлик туғдириш мақсадида ишлатилган. Геометрик тасаввурларнинг классик механикадаги муҳим ўрни [140; – 448-б.] китобда батафсил баён қилинган.

Бугунги кунда физикада геометрик ёндашувлар жиддий концептуал ривожланиш босқичига ўтган. Маълум бўладики, ҳозирги замон квант майдонлар назариясининг табиий тили топология ва геометрик қатламалар фазоларидир [118; – 312-б.].

Бироқ "геометризациялаш" тенденцияси физиканинг анъанавий бўлимларига ҳам кириб келди. Хусусан, гамильтон динамикасининг табиий математик тили физик объектнинг фазали фазоси симплектик геометрияси эканлиги, худди шунингдек, термодинамиканинг адекват тили термодинамик параметрлар фазосининг контакт геометрияси эканлиги маълум бўлди. Бу ғоялар узоқ йиллар давомида В.И.Арнольд ва унинг шогирдлари томонидан ривожлантириб келинди [12; – 344-б.].

Ф.Клейн ўзининг "XIX асрда математикани ривожлантириш ҳақида маъруза"сида аналитик динамикани тавсифлай туриб, шундай деган эди: "Физик ўзининг масалалари учун бу назариядан кўп нарса ололмайди, муҳандис эса ҳеч нарса ололмайди". Фаннинг кейинги йиллардаги ривожи бу фикрнинг нотўғри эканлигини кўрсатди.

Гамильтон формализми квант механикаси асосида ётади ва физиканинг математик арсеналининг кўп қўлланиладиган қуролларидан бири ҳисобланади. Оптимизация масалалари учун симплектик структуралар ва Гюйгенс принципи аҳамияти тан олингандан сўнг Гамильтон тенгламалари шу соҳанинг муҳандислик ҳисоб-китобларида доимий қўллана бошлади [12; – 344-б.]. Айниқса, бу вазият оптимал бошқарув масалаларини ечишдаги ҳисоб-китобларда яққол кўзга ташланади[126; – 392-б.].

"...Симплектик геометрия гамильтон динамикасининг ваҳимали формал аппаратини соддалаштиради ва кўринадиган ҳолга келтиради... шундай қилиб, худди одатдаги чизиқли фазолар геометрияси каби кўп жой оладиган координатали ҳисоблашларни кўп бўлмаган сондаги содда асосий принципларга келтиради".

Математиклар учун, маълумки, ҳатто термодинамиканинг элементар курсини ҳам тушуниш осон кечмайди. Гап шундаки, Гиббснинг таърифлашича, (бу ерда Гиббснинг 1870 йилларда чоп этилган қатор ишлари тўғрисида гап кетмоқда) термодинамика етарли даражада мураккаб бўлган математик назария – контактли геометрияга асосланган. Бу геометрия Картаннинг рўйхати деб аталувчи "содда геометриялар"ига киради, лекин бугун физикадаги ўрни тўла тан олинганига қарамасдан, масалан, риман ва симплектик ёки Пуассон геометрияларига нисбатан физикларга деярли маълум эмас.

XX асрдаги ихтиролар ичида энг таъсирлиларидан бири Эйнштейн томонидан фазо ва вақт ҳақидаги янги тасаввурлар – махсус нисбийлик назариясини (1905 й.) умумлаштириш натижасида яратилган (1916 й.) умумий нисбийлик назариясидир.

Кейинги йилларда геометрияни жараёнлар фазоларига татбиқ қилиш анъанавий тус олди. Бу фазолар нафақат классик, балки физиканинг квант назариясида ҳам кинематик аспектларинигина тасвирлашга асос бўла олади.

Шу билан бирга, физикада вазиятлар фазосидан ҳам фойдаланилади. Бунингсиз муҳим физик тавсифларнинг динамик аспектларини ёритиб бўлмайди. Бошқача қилиб айтганда, физиклар учун нафақат у ёки бу физик жараён қаерда ва қачон бўлиб ўтганигина эмас, балки уларнинг мазмунини қандай математик тушунчалар орқали тасвирлаш муҳим, ўз ўрнида бу геометрик тасавурларни кенгайтиришни тақозо қилади.

2.2-§. Муаммоли геометрик масалаларни ўқитиш орқали талабаларнинг креатив фаолиятини ривожлантириш

Бугунги кунда мутахассиснинг технологик тайёргарлигидан ташқари, шахснинг мустақиллиги, муҳим ечимлар қабул қилиши, ҳар бир ишга креатив ёндашиши, доимий ўқиб – ўрганиши, киришувчанлиги, ҳамкорлик ўрната билиши ва касбий жавобгарликни ҳис қила олиши каби қатор фазилатларга эга бўлиши муҳим ўрин тутмоқда. Барча босқичларда таълимнинг шахсга йўналтирилишигина юқорида санаб ўтилган фазилатларни бўлғуси мутахассисларда шакллантириш имконини беради. Шахснинг касбий мувофиқлашган фазилатлари унинг ҳаёти давомида илм олишини таъминлайди. Шахсга йўналтирилган таълим инсоннинг ўз касбий имкониятини амалга оширишини ва кейинчалик креатив ривожини таъминлайди. Ижод, креативлик, бунёдкорлик, яратувчанлик психик жараён бўлиб, у аввало, талабаларнинг фикрлаши, дунёқараши, мустақил фаолият кўрсатиши, хотираси, диққати, иродаси билан чамбарчас боғланган. Шарқнинг буюк мутафаккирлари креатив тафаккурга юқори баҳо берганлар. Қомусий олим Ал-Фаробий креативликка шундай таъриф беради: "...шундай улуғ фазилатки, инсон уни эгаллаши учун бошқа ҳамма фазилатларини ишга солиши керак".

Олимлар креативликка турлича муносабатда бўладилар. Айримлар креатив кашфиётларни мантиқ ва интеллект билан боғлиқ истеъдод деб тушунса, айримлар мантиқ ва интеллектга алоқаси бўлмаган нарса деб билади. Академик И.П.Павлов креативликка физиологик жараён сифатида қарайди. Унинг фикрича, ижод, дастлаб, инсон тасаввурида туғилади, кейин унга тааллуқли масалалар борасида изланишлар олиб борилади, бошқалар бажарган ишлар танқидий кўриб чикилади, таҳлил этилади, кузатилади ҳамда ундан мантиқий хулосалар чиқарилади. Изланиш муайян натижа бергандан кейин у ҳақиқий ижодкорликка айланади. Креатив фаолият талабаларнинг ички руҳий кечинмаси – илҳомланиш, хурсандчилик ва аччиқланиш ҳислари, қўйилган муаммони ҳал этиш истаклари орқали олиб борилади. Креатив қобилиятлар амалда ҳосил бўлган мавжуд билимлар тизимидан четга чиқишга, ходисаларга одатдагидан ташқари янгича нуқтаи назардан ёндашиш, қарама-қаршиликларни тушунишга ва уларни ҳал этиш усулларини излаб топишга имкон беради.

Креатив қобилиятларни шахсдан бутунлай ажратиб

бўлмайди. Улар билиш, қизиқиш ва ишонч, ҳиссиёт ва ирода, қўйилган мақсадга интилиш, талабчанлик, меҳнатсеварлик каби ҳаракатлар билан чамбарчас боғлиқдир. Ўқув жараёнида талабаларнинг креатив қобилиятларини ривожлантириш муаммоси мураккаб ва кўп қирралидир. Креатив қобилиятларни ўстиришнинг ўзига хос хусусияти шундан иборатки, улар бошқа қобилиятлар сингари фаолият даврида ривожланади [94; – 96-б.].

Бугун бозор муносабатларининг тез ривожланиши муносабати билан ҳар бир одамга ўз ҳаётида нафақат иш жойини, балки мутахассислиги ҳамда касбини ҳам тез-тез ўзгартиришга тўғри келмоқда. Бошқача қилиб айтганда, мутахассис касбий ўзгарувчанлик имкониятига эга бўлиши керак. Ишлаб чиқариш технологияларининг ривожи кадрларга бўлган касбий талабларнинг сезиларли даражада ўзгаришига олиб келди. Касбий билим, малака ва кўникма билан бир қаторда, мустақиллик каби сифат зарур бўлиб қолди. Ҳозирда ходимлардан кенг касбий маҳоратга эга бўлишлари талаб этилмоқда[97; 234 – 241-б.]. Кўринадики, улар таълимдаги ўзгаришларга ўзининг кучли таъсирини ўтказмоқда ва касбий ҳаракатчан, юқори даражада моҳир ўрнашувчан мутахассис тайёрлашга қаратилгани билан аҳамиятлидир.

Таълим олдига қўйилган вазифа инсонни тўлақонли фуқаро бўлишини таъминловчи ҳар томонлама илм беришдангина иборат эмас, балки унда ўраб турган табиатни креатив тасаввур қилишга имконият яратувчи мустақил фикрлашни ҳам ривожлантириши зарур.

Ҳозирда замонавий давлат маданияти ва хўжалигида илмнинг ниҳоятда катта аҳамияти борлиги ҳеч кимга сир эмас. Шунинг учун ҳам, юқорида айтиб ўтган фазилатларга эга бўлган ёш олимларни ўқитиш ва тарбиялаш катта аҳамиятга эга бўлган масалалардан биридир.

Илмий иш билан шуғулланиш инсоннинг шундай фаолияти турига кирадики, у билан фақат креатив қобилиятга эга бўлганларгина шуғуллана олиши ва натижага эришишиши мумкин. Санъат, адабиёт, мусиқа соҳасида креатив қобилиятга эга бўлган жуда кам сондаги одамларгина муваффақиятли ишлаши мумкинлиги ҳаммага маълум. Бу борада илмий ишга ҳам таалуқли, фақат креатив қобилиятга эга бўлган одамларгина муваффақиятли ишлашлари мумкин. Шундай қилиб, илмий ишларни ривожлантиришда ҳам худди санъатдагидек креатив қобилиятли инсонларни танлаб олиш зарур.

Тушунарлики, бу ерда танлов санъатдагига нисбатан қийинроқ амалга оширилади, чунки санъатда алоҳида ташкилий ишларсиз ҳаётнинг ўзи буни аниқлаши мумкин. Жумладан, ёзувчининг ёмон асарини шунчаки ўқимай қўя қолишади, ёмон ашулачи ёки созандани эшитишмайди ва ҳоказо. Илм соҳаларида инсоннинг креатив муваффақиятларини баҳолаш қийинроқ амалга оширилади. Ваҳоланки, бу ҳам одамлар томонидан, фақат жуда кам сондаги, бу соҳада етарли даражада тажрибага эга бўлган бир гуруҳ олимлар томонидан ташкил этилиши мумкин. Ходимларни креатив қобилиятига қараб танлаш илмий ишни ташкил этишнинг энг оғир ташкилий ишларидан бири ҳисобланади [59; – 496-б.].

Илмнинг ихтиёрий соҳасида илмий ишлар муваффақияти креатив қобилиятга эга бўлганлар томонидан олиб борилади ва бундай одамлар ниҳоятда кам. Бундай одамлар кам экан, демак, улардан унумли фойдаланиш имконини берувчи шароитлар яратилиши зарур. Бунинг учун, биринчидан, қобилиятли одамларни илмий ишларга тортувчи муҳит ярата билиш; иккинчидан, уларнинг қобилияти характерига қараб танлов ташкил этиш; учинчидан, креатив қобилиятли ёшларни тарбияловчи ва уларнинг табиат томонидан берилган қобилиятлари тўлақонли ривожланишини таъминловчи махсус шароитлар зарур. Бу масала бизда қуйидагича амалга оширилмоқда: ўқувчи ўрта мактаб (9-синф)ни тугатиши билан, қобилият турига қараб, турли академик лицейларга юборилади.

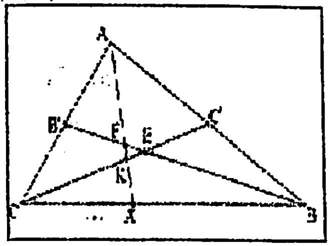
Лекин бу масаланинг тўлиқ ечими эмас. Гап шундаки, барча академик лицейларда ҳам профессор-ўқитувчилар таркиби ёшларнинг креатив қобилиятини керакли йўналишда ривожлантиришга тайёр эмас. Бундай имкониятга жуда кам сондаги академик лицейларгина эга. Шунинг учун академик лицейларда ёшларнинг креатив тарбиясига ташқаридан турибгина таъсир қилиш имкони бор.

Ҳозирча академик лицейлар талабалари учун олимпиадалар ташкил этиш таъсир килишнинг энг яхши усуллардан бири бўлиб келмоқда. Бу математика ва физикадан масалалар ечиш бўйича ўзига хос мусобақа бўлиб, талабаларда қизиқиш уйғотувчи асбоблар тайёрлаш, астрономик кузатишлар, математик ўйинлар, компьютерда дастурлаш кабиларни ҳам ўз ичига олади. Бундай олимпиадалар бир гуруҳ илмий ходимлар ҳамда тегишли вазирликлар мутахассислари томонидан ташкил этилади. Бундай олимпиадалар креатив қобилиятли ёшларни ажратиш имкониятини беришдан ташқари, уларни ёшлигидан илмий изланишларга, илмий муаммоларга қизиқишларини уйғотиш имконини беради. Мамлакатимизда бундай турдаги олимпиадалар кенг тарқалган ва ривожланган, улар жуда юқори савияда ўтказилади [94; 15 – 16-б.].

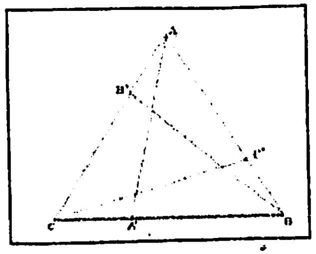
Ҳаммага маълумки, самарали илмий иш олиб боришда билим ва тушунишнинг ўзи камлик қилади, бунда, энг асосийси, мустақил аналитик ҳамда креатив фикрлаш бўлиб, ёшларни тарбиялашда шу жиҳатларга алоҳида эътибор қаратиш зарур. Математика, механика, физика каби бошқа аниқ фанларни ўқитишда масала ечиш катта аҳамиятга эга. Масала ечиш нафақат талабага ўзининг билимини синаб кўриш имкониятини беради, балки ўқитувчига ҳам талаба мавзуни қандай ўзлаштирганлиги тўғрисида аниқ маълумот олиш имкониятини берадиган самарали усуллардан биридир. Бундан ташқари, масала ечиш ёшларнинг мустақил креатив, илмий фикрлаш қобилиятини аниқлаш ва тарбиялаш имконини ҳам беради. Математика аниқ фанлар соҳасида болаларнинг бошланғич креатив фаолиятини ёшликдан тарбиялаш имконини берувчи фан ҳисобланади.

Аёнки, ҳамма масалалар ҳам талабада бундай қобилиятларни аниқлаш, ривожлантириш имконини беравермайди. Шунинг учун бундай масалаларнинг характери ҳақида алоҳида тўхталиш зарур. Тажриба шуни кўрсатмоқдаки, одатдаги машқлар тўпламларидаги масалалар ҳар доим ҳам мустақил фикрлашни тарбиялайдиган характерга эга эмас. Бундай масалаларни ечиш берилганларни формулага қўйиш ва натижани олиш билан тугайди. Бу ерда талабанинг мустақиллиги берилганларни қўйиш учун зарур бўлган формулани тўғри танлашдан иборат [98; 215 – 220-б.].

Айтиб ўтилганидек, муаммоли масалалар бундай хоссага эга. Масалан, *айтайлик, ABC берилган ихтиёрий учбурчак бўлсин. A', B', C' нуқталар бошланишда учбурчакнинг мос равишда B, C, A учларида жойлашган бўлиб, томонларда соат стрелкаси йўналишида бир хил ўзгармас тезлик билан ҳаракат қилмоқда. AA', BB', CC' кесмалар кесишиш нуқталари тўпламини топинг.* Масала шартига кўра, чизмани ясаймиз (2.2-расм).



2.2-расм



2.3-расм

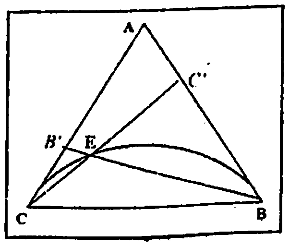
2.2-расмдан изланаётган тўплам қандай нуқталардан ташкил топиши маълум. Улар E, F, K нуқталар ўрнидан хосил бўлган нуқталар тўпламидир. Лекин масала етарли даражада мураккаб кўринади, чунки шарт бўйича A', B', C' нуқталар бир пайтда учбурчакнинг кейинги учларига етиб бормайди. Шунинг учун

изланаётган тўплам бир нечта бўлакдан ташкил топган бўлиши ҳам мумкин.

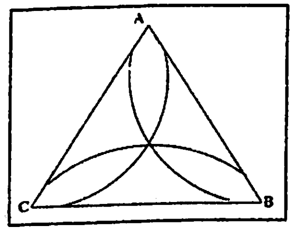
Балки масалани аввал хусусий ҳолда ечиб кўрган маъқулдир? Ҳақиқатан ҳам, масалани қуйидаги хусусий ҳолда ечиб кўрамиз. Масалани биз тўхтаган жойдан соддалаштиришдан бошлаймиз. A', B', C' нуқталар бир хил ўзгармас тезлик билан ҳаракат қилиб, бир пайтда учбурчакнинг кейинги учларига етиб бориши учун ABC учбурчак тенг томонли бўлиши керак. Шундай қилиб, биз қуйидаги масалани олдик. *Айтайлик, ABC тенг томонли учбурчак бўлсин. A', B', C' нуқталар бошида учбурчакнинг учлари B, C, A нуқталарда бўлиб, ўзгармас бир хил тезлик билан соат стрелкаси йўналишида ҳаракат қилмоқда. AA', BB', CC' кесмалар кесишиш нуқталари тўпламини топинг.*

Бу масалани ечиш учун расмни чизамиз (2.3-расм). Учбурчак тенг томонли бўлгани учун, BB', CC' кесмалар кесишиш нуқталари тўпламини топиш кифоя. CC', AA' ва AA', BB' кесмалар кесишиш нуқталари тўплами ҳам худди шундай топилади. Масала шартидан қуйидагиларни оламиз:

1) ABC тенг томонли, шунинг учун $CB=AB$; 2) C', A' нуқталар бир хил тезлик билан ҳаракат қилмоқда, шунинг учун $BC'=AB'$, $CC'=BB'$. Бундан эса, BCC', ABB' учбурчаклар тенглиги келиб чиқади. BCC', ABB' бурчаклар тенг, демак, ACC', CBB' бурчаклар ҳам тенг. Иккинчи томондан, CBB' ва BCC' бурчаклар йиғиндиси – 60^0. Демак, ҳар доим BEC бурчак 120^0 га тенг (2.4-расм).



2.4-расм



2.5-расм

Бундан изланаётган тўплам B, E, C нуқталардан ўтувчи айлана бўлаги эканлиги келиб чиқади. Юқоридаги мулоҳазаларни кейинги кесмалар учун қўллаб, соддалаштирилган масаланинг тўлиқ ечимини оламиз (2.5-расм). Биз, дастлаб, қўйилган масалани ABC учбурчак тенг томонли бўлган хусусий ҳолда ечдик, лекин умумий ҳолда масаланинг ечими мураккаб бўлгани учун уни алоҳида кўриш керак бўлади.

Математик эксперимент олий ўқув юртида математикани ўқитишда исботни қўллаб-кувватловчи восита сифатида қўлланилишига тўхталиб ўтайлик. Исбот ҳар доим ҳам математиканинг ажралмас қисми бўлавермаган. Қадимги мисрликлар, кўпгина математик фактлар ва алгоритмларни билган ҳолда исботсиз ҳам яшаганлар. Лекин Н.Бурбакининг фикрига кўра, "Математика греклар давридан бошлабоқ, "исбот" деганини англатади". Аммо кўпчилик олимлар математик исбот ҳақида бутунлай бошқача фикрларни ҳам билдирадилар [125; 43 – 48-б.].

Исбот ҳақида А.Шопенгауэр шундай дейди: "Математик сизни теоремаларнинг тўғрилигига ишонишга мажбур қилади, лекин сиз ҳеч қандай реал тушунчага эга бўла олмайсиз. Бу худди сизни лабиринт орқали олиб ўтиш билан баробар. Сиз лабиринтдан чиқиб, шундай дейсиз: "Ҳа, мен чикдим, лекин ҳайронман, қандай қилиб бу ердаман?"

Шопенгауэр нуқтаи назари, албатта, ғалати, лекин унда эътиборга лойиқ жиҳатлар ҳам бор. Исботнинг ҳар бир қадамини кузата олиш керак. Акс ҳолда унинг бўлаклари ўзаро боғлиқликдан маҳрум бўлиб қолади ва ихтиёрий пайтда худди қоғоз уйлардек сочилиб кетиши мумкин. Шу билан бирга, исботнинг ҳар бир бўлагини ўз ўрнида зарур бўлган яхлит бир бутун тузилма сифатида кўра билиш ҳам кам бўлмаган аҳамият касб этади. Яхлит кўринишда тушунилмаган исбот инсонни ҳеч нарсага ишонтира олмайди. Ҳатто уни сўзма-сўз ёдлаб олганингизда ҳам предмет тўғрисидаги билимларингизга ҳеч

нарса қўшилмайди. Француз математиги А.Пуанкаре ушбу масала юзасидан шундай деган эди: "Исбот жараёни ҳар қадамини кузатиб, худди шахмат ўйинидагидек, ҳар бир юриш ўйин қоидасига риоя қилган ҳолда амалга оширилаётганига ишонч ҳосил қилишингиз зарур".[128; – 375-б.].

И.Ньютон ҳақидаги ҳикояларда айтилишича, у талабалик йилларида ўша даврнинг анъаналарига кўра, геометрияни ўрганишни Евклид асарларини ўқишдан бошлаган. Теоремаларнинг формулировкаси билан танишиб чиқиб, уларни тўғри деб тушунган ва исботини ўқиб ўтирмаган. У одамлар шундоқ кўриниб турган нарсани исботлашга шунча куч ва вақт сарфлашларига ҳайрон қолган. Кейинчалик Ньютон ўз фикрини ўзгартириб, математикада ва бошқа фанларда ҳам исбот зарур эканлигига ишонч ҳосил қилган, шунингдек, Евклиднинг исботлари қатъий ва камчиликсиз эканлигини эътироф этган.

Олий ўқув юртларида математикани ўқитишда аудитория соатларининг қисқариши сабабли маърузаларда математик тасдиқлар, теоремаларнинг исботларига кам эътибор қаратилмоқда. Бундай ёндашувда предмет мазмуни маъносиз бўлиб қолади, асоссиз формулировка қилинган тасдиқ ёки теоремага эса ишонч йўқолади. Бу зарарни қоплаш учун ўқув жараёнида исбот қандай вазифани ўташини тушунмоқ зарур. Илмий ишларда исбот тасдиқни тўғрилигини текшириш усули ҳисобланади. Маърузаларда эса, исбот илмий ишлардан фарқли ўлароқ, тингловчиларни теореманинг тўғрилигига ишонтириш ва тасдиқ тўғрилиги сабабларини тушунтиришдан иборат. Шу ўринда тан олиш керакки, исбот қатъийлигига бўлган талаб универсал эмас ва у матнга, тингловчилар аудиториясига, у ёки бу фан бўлимига қараб ўзгариб туради. Ишонарлилик эса, янада мураккаброқ вазият, хусусан, маърузада талабалар аудиториясида бўладиган вазиятдир.

Мисол сифатида $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ тасдиқни қарайлик. Ушбу лимитнинг бирга тенг эмаслиги, талабага маълум бўлган $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{100}=1$ тасдиқдан келиб чиқади. Бу фактнинг исботи кўпинча талабаларда шубҳа туғдиради. Демак, бу ерда $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ кетма-кетлик ҳадларини ҳисоблаш бўйича тажриба ўтказиб кўриш зарур. Бу ишни талабаларнинг ўзларига топшириш мумкин. Улар бу ишни, одатда, калькулятор, телефон ёки компьютерга ёзилган дастур асосида иштиёқ билан бажарадилар. Одатда, талабалар маърузада эшитганлари ёки китобдан ўқиганларини ўзлари ҳисоблаганларидек эслаб қола олмайдилар. Бунга доир Хитой мақолларидан бирида шундай дейилади: “Мен эшитяпман ва эсдан чиқармоқдаман. Мен кўряпман ва эслаб қолмоқдаман. Мен бажаряпман ва тушунмоқдаман”.

Биз бу бандда юқорида таклиф қилинган асосий масалаға қайтамиз. Олдинги бандда биз масалани берилган учбурчак тенг томонли бўлган ҳолда ҳал қилдик. Энди масалани янада умумий ҳолда ечиш учун учбурчакни тенг томонли дейишга мажбур қилган сабабга қайтайлик. Бизга учбурчакнинг тенг томонли эканлиги A, B ва C нуқталардан чиққан C', A', B' нуқталар бир вақтда мос равишда B, C ва A нуқталарга етиб келиши учун керак эди. Агар эътибор бериб қаралса, бунинг учун берилган учбурчак тенг томонли бўлиши шарт эмас. Нуқталар тезликларини асосий учбурчакнинг турли томонларида текис ва турлича қилиш ҳисобига ҳам бунга эришиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, энг катта тезликдаги нуқта A' деб фараз қилсак, у ҳолда B нуқтадан чиққан A' нуқта C нуқтага $T=|BC|/\upsilon_1$ вақтда етиб келади. Демак, биз қўйган шарт бажарилиши учун, яъни C нуқтадан чиққан B' нуқта A нуқтага $T=|CA|/\upsilon_1=|BC|/\upsilon_1$ вақтда етиб келиши учун $\upsilon_2=|BC|/T$ тезлик билан, A нуқтадан чиққан C' нуқта B нуқтага $T=|AB|/\upsilon_1=|BC|/\upsilon_1$ вақтда етиб келиши учун эса $\upsilon_3=|CA|/T$ тезлик билан ҳаракат қилиши зарур. Тушунарлики, бундай ҳолда

берилган учбурчак тенг томонли бўлиши шарт эмас [99; 205 – 217-б.].

Бизга учлари A, B ва C нуқталар бўлган ихтиёрий ABC учбурчак ва мос равишда бошланғич вазиятда B, C ва A охирги вазиятда жойлашган C, A ва B нуқталарда жойлашадиган соат стрелкаси йўналишида текис ҳаракатланувчи A', B', C' нуқталар берилган бўлсин. AA', BB', CC' кесмалар кесишиши нуқталари ўрнини топинг. Бу масала энди юқорида ечган масаламизга қараганда умумийроқ, яъни бу ерда ABC учбурчак тенг томонли бўлиши шарт эмас. Лекин бир вақтда B, C ва A нуқталардан чиққан A', B', C' нуқталар юқорида эслатилган тезликларда текис ҳаракат қилиб, $T=|AB|/\upsilon_1$ вақтда мос равишда C, A ва B нуқталарга етиб келади. Ушбу масалани ечиш йўлларидан бирини таклиф этамиз. Умуман олганда, бу масала етарлича мураккаб масала. Биринчи навбатда, хаёлимизга бу ҳам, балки аввалги масалага ўхшаш айлана бўлакларини берар, бу гипотезани инкор қилиш қийин эмас, деган фикрга келиш табиий. Хўш, унда бундай нуқталар тўплами қандай фигурадан иборат? Бу саволга жавоб беришда, тахминларнинг чегараси йўқ. Ана энди биз асосий масала бўйича олинган гипотезани, яъни ўша учта бўлак нуқталар тўплами, ҳар бири қандайдир эллипс бўлаги эканига аналитик исботи билан шуғулланамиз.

Бунинг учун айрим номлашлар ва белгилашларни киритамиз: *Асосий учбурчак* – масала шартига кўра, берилган (ABC учбурчак); *Ҳаракатланувчи нуқталар* – масала шартига кўра, A', B', C' нуқталар; *Ҳаракатланувчи кесмалар* – AA', BB', CC' кесмалар; *Кесишиш нуқталари чизиғи* – ҳаракатланувчи нуқталарнинг ўзаро кесишиш нуқталари тўпламидан ҳосил бўлган чизиқлар.

Декарт координаталар системасини киритамиз, унда $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ва $C(x_3, y_3)$ координаталарга эга бўламиз. Декарт координаталар системасини шундай киритамизки, натижада, ABC

учбурчакнинг A нуқтаси координата боши билан устма-уст тушсин, ABтомони эса абсцисса ўқида шундай жойлашганки, B нуқта мусбат йўналишида ётсин. Бундай координаталар системасида асосий учбурчакнинг барча нуқталари қандайдир аниқ координаталарга эга бўлади, яъни $A(0,0)$, $B(a,0)$ ва $C(b,c)$, бу ерда a, b, c – лар қандайдир хақиқий сонлар, шу билан бирга, координаталар системасининг киритилишига кўра, $a>0, c\neq 0$ (акс холда бундай учбурчак мавжуд бўлмай қолади).

Қулайлик учун $t\in[0,1]$ параметр(вақт)ни киритамиз. Маълумки, A', B', C' нуқталар ҳаракатланганда, уларнинг координаталари шу параметрга боғлиқ бўлади. Масала шартига кўра, бошланғич вазиятда, яъни $t=0$ да A', B', C' нуқталар мос равишда $B(a,0), C(b,c)$ ва $A(0,0)$ нуқталар билан устма-уст тушади. Охирги $t=1$ моментда эса мос равишда $C(b,c), A(0,0)$ ва $B(a,0)$ нуқталар билан устма-уст тушади. A', B', C'нуқталар мос равишда, BC, CAва AB кесмаларда ҳаракатланаётганини инобатга олиб, уларнинг координаталари учун қуйидаги ифодаларни оламиз:

$A': \begin{cases} x=a+(b-a)t, \\ y=ct. \end{cases}$ - A'нуқта ҳаракати координаталари;

$B': \begin{cases} x=b-bt, \\ y=c-ct. \end{cases}$ - B'нуқта ҳаракати координаталари;

$C': \begin{cases} x=at, \\ y=0. \end{cases}$ - C'нуқта ҳаракати координаталари.

Энди, AA', BB', CC' тўғри чизиқлар тенгламаларини тузамиз. 1) AA'тўғри чизиқ тенгламасини l_1 орқали белгилаймиз. У ҳолда $l_1: y=kx$ (чунки у координата бошидан ўтади). k ни топиб ўрнига қўямиз. $A'\in l_1$бўлгани учун

$$ct=k(a+(b-a)t),\quad k=\frac{ct}{a+(b-a)t} \tag{2.6}$$

Демак, l_1 тўғри чизиқ тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y=\frac{ct}{a+(b-a)t}x \tag{2.7}$$

2) BB' тўғри чизиқ тенгламасини l_2 орқали белгилаймиз. У ҳолда $l_2: y=kx+l$. k ва l ларни топиб ўрнига қўямиз. $B, B'\in l_2$ бўлгани учун

$$\begin{cases} c-ct=k(b-bt)+l, \\ 0=ka+l. \end{cases},\qquad \begin{cases} k=\dfrac{c-ct}{b-bt-a}, \\ l=-\dfrac{a(c-ct)}{b-bt-a}, \end{cases} \tag{2.8}$$

Демак, l_2 тўғри чизиқ тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y=\frac{c-ct}{b-bt-a}x-\frac{a(c-ct)}{b-bt-a}. \tag{2.9}$$

3) CC' тўғри чизиқ тенгламасини l_3 орқали белгилаймиз. У ҳолда $l_3: y=kx+l$. k ва l ларни топиб, ўрнига қўямиз. $C, C'\in l_3$ бўлгани учун

$$\begin{cases} c=kb+l, \\ 0=kat+l. \end{cases},\qquad \begin{cases} k=\dfrac{c}{b-at}, \\ l=-\dfrac{act}{b-at}, \end{cases} \tag{2.10}$$

Демак, l_3 тўғри чизиқ тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y=\frac{c}{b-at}x-\frac{act}{b-at}. \tag{2.11}$$

Энди l_1, l_2, l_3 тўғри чизиқлар (2.7), (2.9), (2.11) ўзаро кесишиш нуқталари координаталарини топамиз.

$l_1\cap l_2$ нуқта координаталарини топиш учун қуйидаги тенгламалар системасини ечамиз:

$$\begin{cases} y=\dfrac{ct}{a+(b-a)t}x, \\ y=\dfrac{c-ct}{b-bt-a}x-\dfrac{a(c-ct)}{b-bt-a}, \end{cases} \quad \frac{ct}{a+(b-a)t}x=\frac{c-ct}{b-bt-a}x-\frac{a(c-ct)}{b-bt-a},$$

$$\left(\frac{ct}{a+(b-a)t}-\frac{c-ct}{b-bt-a}\right)x=-\frac{a(c-ct)}{b-bt-a},\quad x=\frac{(1-t)(a+(b-a)t)}{t^2-t+1},$$

$$y=\frac{ct}{a+(b-a)t}x=\frac{ct}{a+(b-a)t}\cdot\frac{(1-t)(a+(b-a)t)}{t^2-t+1}=\frac{ct(1-t)}{t^2-t+1} \tag{2.12}$$

Шундай қилиб, l_1 ва l_2 чизиқлар кесишиш нуқтаси (2.12) координаталари қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} x=\dfrac{(1-t)(a+(b-a)t)}{t^2-t+1}, \\ y=\dfrac{ct(1-t)}{t^2-t+1}. \end{cases} \tag{2.13}$$

Ниҳоят, l_1 ва l_2 чизиқлар кесишиш нуқтаси координаталари параметрик тенгламасини (2.13) олдик. Бу тенгликлардан t параметрни йўқотиб изланаётган нуқталар ўрни тенгламасига эга бўламиз:

$$\frac{x}{y}=\frac{(1-t)(a+(b-a)t)}{t^2-t+1}:\frac{ct(1-t)}{t^2-t+1}=\frac{a+(b-a)t}{ct},\quad t=\frac{ay}{cx-y(b-a)},$$

$$y=\frac{ct(1-t)}{t^2-t+1},\quad y=\frac{\dfrac{cay}{cx-y(b-a)}\left(1-\dfrac{ay}{cx-y(b-a)}\right)}{\left(\dfrac{ay}{cx-y(b-a)}\right)^2-\dfrac{ay}{cx-y(b-a)}+1}. \tag{2.14}$$

Охирги ифодани соддалаштириб, изланаётган l_1 ва l_2 чизиқлар кесишиш нуқтаси (2.14) координаталари тенгламасини оламиз:

$$c^2x^2+(a^2-ab+b^2)y^2+(ac-2bc)xy-ac^2x+abcy=0. \tag{2.15}$$

Бу (2.15) иккинчи тартибли чизиқ тенгламаси, унинг инвариантларини ҳисоблаб, турини аниқлаймиз:

$$\delta=\begin{vmatrix} c^2 & \frac{1}{2}(ac-2bc) \\ \frac{1}{2}(ac-2bc) & a^2-ab+b^2 \end{vmatrix}=a^2c^2-abc^2+b^2c^2-\frac{1}{4}(ac-2bc)^2=\frac{3}{4}a^2c^2>0$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} c^2 & \frac{1}{2}(ac-2bc) & -\frac{1}{2}ac^2 \\ \frac{1}{2}(ac-2bc) & a^2-ab+b^2 & \frac{1}{2}abc \\ -\frac{1}{2}ac^2 & \frac{1}{2}abc & 0 \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}ac^2\begin{vmatrix} \frac{1}{2}(ac-2bc) & -\frac{1}{2}ac^2 \\ a^2-ab+b^2 & \frac{1}{2}abc \end{vmatrix}-$$

$$-\frac{1}{2}abc\begin{vmatrix} c^2 & -\frac{1}{2}ac^2 \\ \frac{1}{2}(ac-2bc) & \frac{1}{2}abc \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}ac^2\left(\frac{1}{4}(ac-2bc)abc+\frac{1}{2}ac^2\left(a^2-ab+b^2\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{2}abc\left(\frac{1}{2}abc^3+\frac{1}{4}(ac-2bc)ac^2\right)=-\frac{1}{4}a^4c^4<0,$$

$a>0,\ c\neq 0$ бўлгани учун охирги тенглама (2.15) эллипс тенгламасини беради.

Энди $l_1\cap l_3$ нуқта координаталарини топамиз:

$$\begin{cases} y=\dfrac{ct}{a+(b-a)t}x, \\ y=\dfrac{c}{b-at}x-\dfrac{cat}{b-at}. \end{cases} \quad \frac{ct}{a+(b-a)t}x=\frac{c}{b-at}x-\frac{cat}{b-at},$$

$$\left(\frac{ct}{a+(b-a)t}-\frac{c}{b-at}\right)x=-\frac{cat}{b-at},\quad x=\frac{t(a+(b-a)t)}{t^2-t+1},$$

$$y=\frac{ct}{a+(b-a)t}x=\frac{ct}{a+(b-a)t}\cdot\frac{t(a+(b-a)t)}{t^2-t+1}=\frac{ct^2}{t^2-t+1}. \tag{2.16}$$

Кўринадики, l_1 ва l_3 чизиқлар кесишиш нуқтаси (2.16) координаталари қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} x=\dfrac{t(a+(b-a)t)}{t^2-t+1}, \\ y=\dfrac{ct^2}{t^2-t+1}. \end{cases} \tag{2.17}$$

Ниҳоят, l_1 ва l_3 чизиқлар кесишиш нуқтаси координаталари параметрик тенгламасини (2.17) олдик. Бу тенгликлардан t параметрни йўқотиб, изланаётган нуқталар ўрни тенгламасига эга бўламиз:

$$\frac{x}{y}=\frac{t(a+(b-a)t)}{t^2-t+1}:\frac{ct^2}{t^2-t+1}=\frac{a+(b-a)t}{ct},\quad t=\frac{ay}{cx-y(b-a)},$$

$$y=\frac{ct^2}{t^2-t+1},\quad y=\frac{c\left(\dfrac{ay}{cx-y(b-a)}\right)^2}{\left(\dfrac{ay}{cx-y(b-a)}\right)^2-\dfrac{ay}{cx-y(b-a)}+1}. \qquad (2.18)$$

Шундай қилиб, охирги (2.18) ифодани соддалаштириб, изланаётган l_1 ва l_2 чизиқлар кесишиш нуқтаси координаталари тенгламасини оламиз:

$$c^2x^2+(a^2-ab+b^2)y^2+(ac-2bc)xy-a^2cy=0. \qquad (2.19)$$

Бу (2.19) иккинчи тартибли чизиқ тенгламаси, унинг инвариантларини ҳисоблаб, турини аниқлаймиз.

$$\delta=\begin{vmatrix} c^2 & \frac{1}{2}(ac-2bc) \\ \frac{1}{2}(ac-2bc) & a^2-ab+b^2 \end{vmatrix}=a^2c^2-abc^2+b^2c^2-\frac{1}{4}(ac-2bc)^2=\frac{3}{4}a^2c^2>0$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} c^2 & \frac{1}{2}(ac-2bc) & 0 \\ \frac{1}{2}(ac-2bc) & a^2-ab+b^2 & -\frac{1}{2}a^2c \\ 0 & -\frac{1}{2}a^2c & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}a^2c\begin{vmatrix} c^2 & \frac{1}{2}(ac-2bc) \\ 0 & -\frac{1}{2}a^2c \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}a^2c\left(-\frac{1}{2}a^2c\right)=-\frac{1}{2}a^4c^2<0,$$

$a>0,\ c\neq 0$ бўлгани учун охирги (2.19) тенглама эллипс тенгламасини беради.

Ва ниҳоят, $l_2\cap l_3$ нуқта координаталарини топамиз.

$$\begin{cases} y=\dfrac{c-ct}{b-bt-a}x-\dfrac{a(c-ct)}{b-bt-a}, \\ y=\dfrac{c}{b-at}x-\dfrac{cat}{b-at}. \end{cases},\quad \frac{c-ct}{b-bt-a}x-\frac{a(c-ct)}{b-bt-a}=$$

$$=\frac{c}{b-at}x-\frac{cat}{b-at},$$

$$\left(\frac{c-ct}{b-bt-a}-\frac{c}{b-at}\right)x=\frac{a(c-ct)}{b-bt-a}-\frac{cat}{b-at},\quad x=\frac{at^2+b(1-t)^2}{t^2-t+1},$$

$$y=\frac{c}{b-at}x-\frac{cat}{b-at}=y=\frac{c}{b-at}\cdot\frac{at^2+b(1-t)^2}{t^2-t+1}-\frac{cat}{b-at}=\frac{c(t-1)^2}{t^2-t+1}. \qquad (2.20)$$

Демак, l_2 ва l_3 чизиқлар кесишиш нуқтаси (2.20) координаталари қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} x=\dfrac{at^2+b(1-t)^2}{t^2-t+1}, \\ y=\dfrac{c(t-1)^2}{t^2-t+1}. \end{cases} \qquad (2.21)$$

l_2 ва l_3 чизиқлар кесишиш нуқтаси координаталари параметрик тенгламасини (2.21) олдик. Бу тенгликлардан t параметрни йўқотиб, изланаётган нуқталар ўрни тенгламасига эга бўламиз:

$$\frac{x-a}{y}=\left(\frac{at^2+b(1-t)^2}{t^2-t+1}-a\right):\frac{c(t-1)^2}{t^2-t+1}=\frac{a(t-1)+b(t-1)^2}{c(t-1)^2}=\frac{a+b(t-1)}{c(t-1)},$$

$$t=\frac{ay}{cx-yb-ac}+1,$$

$$y=\frac{c(t-1)^2}{t^2-t+1},\quad y=\frac{c\left(\dfrac{ay}{cx-yb-ac}\right)^2}{\left(\dfrac{ay}{cx-yb-ac}+1\right)^2-\left(\dfrac{ay}{cx-yb-ac}+1\right)+1}, \qquad (2.22)$$

Охирги ифодани соддалаштириб, изланаётган l_2 ва l_3 чизиқлар кесишиш нуқтаси координаталари (2.22) тенгламасини оламиз:

$$c^2x^2+(a^2-ab+b^2)y^2+(ac-2bc)xy-2ac^2x+2(abc-a^2c)y+a^2c^2=0. \qquad (2.23)$$

Бу (2.23) иккинчи тартибли чизиқ тенгламаси, унинг инвариантларини ҳисоблаб, турини аниқлаймиз:

$$\Delta=\begin{vmatrix} c^2 & \frac{1}{2}(ac-2bc) & -ac^2 \\ \frac{1}{2}(ac-2bc) & a^2-ab+b^2 & abc-a^2c \\ -ac^2 & abc-a^2c & a^2c^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c^2 & \frac{1}{2}(ac-2bc) & -ac^2 \\ \frac{1}{2}(ac-2bc) & a^2-ab+b^2 & abc-a^2c \\ 0 & -\frac{1}{2}a^2c & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}a^2c\begin{vmatrix} c^2 & -ac^2 \\ \frac{1}{2}(ac-2bc) & abc-a^2c \end{vmatrix}=\frac{1}{2}a^2c\left(abc^3-a^2c^3+\frac{1}{2}a^2c^3-abc^3\right)=-\frac{1}{4}a^4c^4<0$$

$a>0,\ c\neq 0$ бўлгани учун охирги тенглама (2.23) эллипс тенгламасини беради.

Биз изланаётган нуқталар тўплами учун учта кўринишдаги эллипс тенгламаларини олдик:

$$c^2x^2+(a^2-ab+b^2)y^2+(ac-2bc)xy-ac^2x+abcy=0, \qquad (2.24)$$

$$c^2x^2+(a^2-ab+b^2)y^2+(ac-2bc)xy-a^2cy=0, \qquad (2.25)$$

$$c^2x^2+(a^2-ab+b^2)y^2+(ac-2bc)xy-2ac^2x+2(abc-a^2c)y+a^2c^2=0. \qquad (2.26)$$

Агар биз (2.24) тенгламада координаталар ўқини $(a-b,-c)$ вектор бўйлаб кўчирсак, қуйидагини оламиз:

$$c^2(x+a-b)^2+(a^2-ab+b^2)(y-c)^2+(ac-2bc)(x+a-b)(y-c)-$$
$$-ac^2(x+a-b)+abc(y-c)=0,$$
$$c^2x^2+(a^2-ab+b^2)y^2+(ac-2bc)xy-a^2cy=0.$$

Яъни (2.24) тенглама кўчириш бажарилгандан сўнг, (2.25) тенглама билан устма-уст тушди.

Агар биз (2.26) тенгламада координаталар ўқини $(a,0)$ вектор бўйлаб кўчирсак, қуйидаги натижага эга бўламиз:

$$c^2(x+a)^2+(a^2-ab+b^2)y^2+(ac-2bc)(x+a)y-2ac^2(x+a)+$$
$$+2(abc-a^2c)y+a^2c^2=0, \quad c^2x^2+(a^2-ab+b^2)y^2+(ac-2bc)xy-a^2cy=0.$$

Яъни, (2.26) тенглама кўчириш бажарилгандан сўнг (2.25) тенглама билан устма-уст тушди.

Бундан олинган чизиқлар эллипс бўлаклари эканлиги келиб чиқади ва уларни параллел кўчирсак, битта яхлит эллипс ҳосил бўлади.

Олинган натижадан хусусий холда асосий учбурчак тенг томонли бўлганда изланаётган нуқталар тўплами берилган учбурчакка ташқи чизилган айлана бўлакларидан иборат эканлигини кўришимиз мумкин. Бу масала юзасидан 2-§ да фикр юритилган эди.

Ҳақиқатан ҳам, агар асосий тенг томонли учбурчак томони a га тенг бўлса, $b=a/2$ ва $c=\sqrt{3}a/2$ тенгликлар ўринли бўлади. a,b,c ларнинг ушбу қийматларини (2.24), (2.25) ва (2.26) тенгламаларга қўйиб, қуйидагини оламиз:

$$x^2+y^2-ax+\frac{1}{\sqrt{3}}ay=0, \quad \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2\sqrt{3}}a\right)^2=\frac{a^2}{3},$$

$$x^2+y^2-\frac{2}{\sqrt{3}}ay=0, \quad x^2+\left(y-\frac{1}{\sqrt{3}}a\right)^2=\frac{a^2}{3},$$

$$x^2+y^2-2ax-\frac{2}{\sqrt{3}}ay+a^2=0, \ (x-a)^2+\left(y-\frac{1}{\sqrt{3}}a\right)^2=\frac{a^2}{3}.$$

Бу тенгламалар радиуси $a/\sqrt{3}$ га тенг бўлган турли марказли айланаларни аниқлайди [99; 205 – 217-б.].

Шундай қилиб, ўрнатилган гипотезани аналитик исботладик. Энди, бу натижалардан кейинги изланишларда фойдаланиш мумкин.

2.3-§. Оддий дифференциал тенгламалар махсус ечимларини ўрганишда ва чегаравий масалалар мавзусини ёритишда муаммоли масалалардан фойдаланиш методикаси

Олий ўқув юртлари математика курсларида “Дифференциал тенгламалар” бўлими алоҳида ўрин тутади. Чунки дифференциал тенгламалар физика, химия, биология каби табиий фанлар, шунингдек, техникада ўрганиладиган жараёнларни моделлаштиришда фойдаланиладиган математик аппаратлардан бири ҳисобланади. Шунинг учун талабаларга фақатгина дифференциал тенгламаларни у ёки бу шартни қаноатлантирувчи ечимини топишнигина эмас, балки бу ечимларнинг махсусликларини ҳам тадқиқ қилишни ўргатиш зарур бўлади. Бошқача қилиб айтганда, дифференциал тенгламаларнинг барча ечимлари тўпламини таҳлил қилишга тўғри келади [133; 57— 64-б.].

Бугунги кунда ўзбек тилида дифференциал тенгламалар бўйича етарли сондаги адабиётлар мавжудлигига қарамасдан, уларда маъруза ва амалиёт дарсларида дифференциал тенгламанинг барча ечимлари тўпламини ўрганишга етарли эътибор қаратилмаган. Бир томондан, бу осон масала эмас, чунки ечимларнинг ошкор кўринишини олишни жуда кам ҳолларда амалга ошириш мумкин. Иккинчи томондан, функция хоссаларини ўрганиш дифференциал ҳисобнинг масаласи хисобланади. Шу билан бирга, ечимни ҳар доим ҳам ошкор кўринишда олиш мумкин эмаслиги дифференциал тенгламаларни тақрибий ечиш усулларининг ривожланишига туртки бўлган бўлса, бошқа томондан, уларни ечиш учун математик дастурлар пакетларининг мавжудлиги биз тўхталаётган изланишлар долзарблигини йўқотади.

Лекин дифференциал тенгламани тақрибий ечишда, яъни бошланғич ёки бошқа шартни қаноатлантирувчи ечимни топиш ёки қидирилаётган ечим графигини чизишда талаба олдида

аниқликни қандай олиш зарур деган савол кўндаланг туради. Агар бу масалага етарлича эътибор берилмаса, олинган натижа ҳақиқатдан узоқ бўлиши мумкин.

Мисол учун талаба компьютерда берилган шартларни қаноатлантирувчи ечимнинг бир тармоғини қуриши ёки ҳисоблаш аниқлигини нотўғри танлаш ҳисобига абсурд натижага эришиши мумкин. Бундай хатолар охир-оқибатда ечим ҳақидаги тасаввурларни умуман бузиб юбориши ва натижада, Коши масаласи учун мавжудлик ва ягоналик теоремасига зид натижаларга олиб келиши ҳам мумкин.

Юқорида айтганларимизни икки мисол орқали таҳлил қиламиз. Қуйидаги дифференциал тенгламани қарайлик:

1-масала.

$$2tx^2dt + (t^2-1)dx = 0. \tag{2.27}$$

Бундай ёзувда битта ўзгарувчининг иккинчисига нисбатан устунлиги бўлмайди. Шунинг учун И.Г.Петровский [121;—232-б.]да ҳатто ҳосилага нисбатан ечилган дифференциал тенгламаларни ўрганаётганда ҳам

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{2.28}$$

тенглама билан бирга,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{f(t,x)}, \tag{2.29}$$

тенгламани ҳам ўрганиш тавсия этилади. Шунинг учун (2.27) тенгламанинг бир нечта ечимини кўрсатиш мумкин:

$$\begin{aligned} &x=0,\ t\in(-\infty;-1),\ t\in(-1;+1), t\in(1;+\infty);\\ &t=-1,\ x\in(-\infty;0),\ x\in(0;+\infty);\\ &t=1,\ x\in(-\infty;0),\ x\in(0;+\infty). \end{aligned} \tag{2.30}$$

$x=0,\ t=-1,\ t=1$ функцияларнинг бўлакларга бўлиниши, $2tx^2$ ва

(t^2-1) функцияларни нуқталарда бир пайтда нолга айланиши ва натижада (2.27), тенгламани маънога эга бўлмай қолиши билан тушунтирилади.

Умуман, талабаларга дифференциал тенгламаларни давом эттириб бўлмайдиган ечимларини ўргатишда, ўрганилаётган ечимларни қандай оралиқда аниқланганлигини кўрсатиш муҳимлигига эътибор қаратиш лозим.

Агар (2.27) тенгламада $t^2-1\neq 0$ бўлса, уни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{2tx^2}{t^2-1}=f(t,x). \qquad (2.31)$$

Қуйидаги соҳаларнинг ҳар бирида

$$D_1=\{-\infty<t<-1;-\infty<x<+\infty\},$$
$$D_2=\{-1<t<1;-\infty<x<+\infty\},$$
$$D_3=\{1<t<+\infty;-\infty<x<+\infty\},$$

$f(t,x)$ ва $f'_x(t,x)=-4tx/(t^2-1)$ функциялар узлуксиз. Бу берилган (2.31) тенглама учун Коши масаласининг ечими мавжудлиги ва ягоналигини таъминлайди. $f(-t,x)=-f(t,x)$ тенглик ўринли бўлгани учун (2.31) тенглама ечимларининг умумий график кўриниши вертикал $t=0$ ўққа нисбатан симметрик бўлади. Ундан ташқари, $t\in(0;1)$ ва $x\neq 0$ ларда $f(t,x)>0$, бўлгани учун (2.31) тенгламанинг барча ечимлари ўсувчи. $t>1, x\neq 0$ ларда эса $f(t,x)<0$. Демак, (2.31) тенгламанинг барча ечимлари камаяди.

$x^2(t^2-1)\neq 0$ бўлганда, бир неча тенг кучли алмаштиришлардан сўнг (2.31) тенгламадан унга тенг кучли бўлган қуйидаги тенгликларни оламиз:

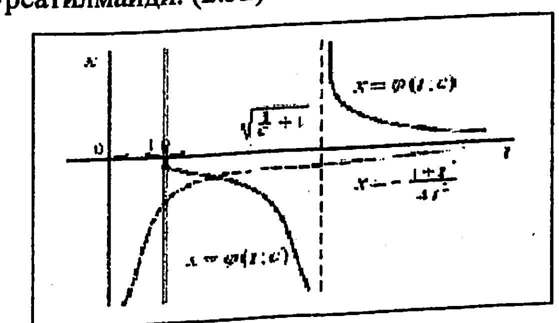
$$\frac{2t}{t^2-1}dt+\frac{1}{x^2}dx=0 \Leftrightarrow d(\ln|t^2-1|-\frac{1}{x})=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}=\ln(C|t^2-1|), \\ C\neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=\varphi(t,C)=\dfrac{1}{\ln(C|t^2-1|)}, \\ C\neq 0, \\ |C(t^2-1)|\neq 1. \end{cases} \qquad (2.32)$$

Бу дифференциал тенгламани ечиш ёки умумий ечимини топиш жараёни ҳисобланади. Шу билан бирга, C ва t ларга бўлган чекловлар ҳар доим ҳам кўрсатилавермайди. Шунинг учун

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\ln(C|t^2-1|)}, \\ x=0. \end{cases}$$

Айрим ҳолларда $t=-1$ ва $t=1$ ечимлар кўрсатилади. Лекин C га боғлиқ равишда ечимларнинг мавжудлик оралиғи кўрсатилмайди, бошқача қилиб айтганда, давом эттирилмайдиган ечимлар кўрсатилмайди. (2.32) тенгликдан



2.6-расм

кўриниб турибдики, ҳар бир мусбат деб қараш мумкин бўлган C да D_3 соҳадаги $x=\varphi(t,C)$ ечимга D_1 соҳадаги $x=\varphi(-t,C)$ ечим мос келади ва уларнинг графиклари $t=0$ вертикал ўққа нисбатан симметрик бўлади. Бунга илгари ҳам (2.31) даги $f(t,x)$ функция t га нисбатан тоқлиги эслатилганда, эътибор қаратилган эди. Ундан ташқари, (2.32) дан ҳар бир $C>0$ га (2.31) тенгламанинг

D_3 соҳада мос равишда $(1;\sqrt{\frac{1}{C}+1})$ ва $(\sqrt{\frac{1}{C}+1};+\infty)$ оралиқларда аниқланган иккита давом эттирилмайдиган ечимлари мос келади. Биринчиси, манфий, иккинчиси эса, мусбат ва ҳар иккаласи t ўсиши билан камаяди (2.6-расм).

(2.31) дан фойдаланиб, $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{2x^2}{(t^2-1)^2}(1+t^2+4t^2x)$ тенгликни оламиз. Бундан эса, $x>-\frac{1+t^2}{4t^2}$ ларда $x=\varphi(t,C)$ ечим графиги қуйига қаварик, $x<-\frac{1+t^2}{4t^2}$ ларда эса, юқорига қаварик ва бурилиш нуқталари тенгламаси $x=-\frac{1+t^2}{4t^2}<0$ бўлади. (2.31) ва (2.32) лардан қуйидагиларни оламиз:

$$\lim_{t\to 1+0}\varphi'(t;C)=\lim_{t\to 1+0}\frac{-2tx^2}{t^2-1}=-\infty,$$

$$\lim_{t\to 1-0}\varphi'(t;C)=\lim_{t\to 1-0}\frac{-2tx^2}{t^2-1}=+\infty,$$

$$\lim_{t\to 1\pm 0}\varphi(t;C)=\lim_{t\to 1\pm 0}\frac{1}{\ln\left|C(t^2-1)\right|}=-0.$$

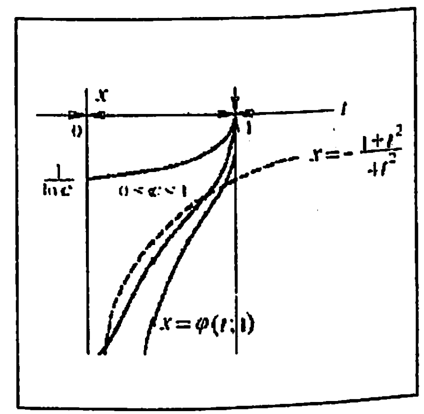
Бу ифодалар $x=\varphi(t,C)$ ечимни $0<t<1$ оралиқда ўзини қандай тутишини характерлаш имконини беради. $t\in(0;1)$ оралиқда аниқланган давом эттирилмайдиган $x=\varphi(t,1)=\frac{1}{\ln\left|t^2-1\right|}$ ечимга алоҳида эътибор қаратиш мақсадга мувофиқ. Лопитал қоидасига кўра, $\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{\ln\left|t^2-1\right|}}{-\frac{1+t^2}{4t^2}}=4$ бўлгани учун, $t=0$ нуқта атрофида $t>0$ ларда $\varphi(t,1)$ функциянинг графиги $x=-\frac{1+t^2}{4t^2}$ функция графигидан

пастда жойлашган бўлади. (2.32) дан кўриниб турибдики, $0<C<1$ ларда $x=\varphi(t,C)$ ечим $t\in(0;1)$ оралиқда аниқланган ва

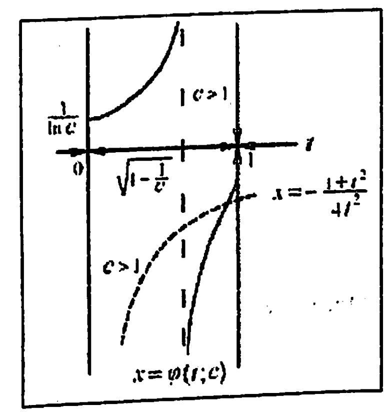
$$\lim_{t\to 1-0}\varphi(t;C)=-0,\ \lim_{t\to +0}\varphi(t;C)=\frac{1}{\ln C}<0,$$

$$\lim_{t\to +0}\varphi'(t;C)=\lim_{t\to +0}\frac{-2t\varphi^2(t;C)}{t^2-1}=+0.$$

Бундан ташқари, $t>0$ ва $0<C<1$ ларда (2.32) тенглама ечими ёки бурилиш нуқталари чизиғини икки марта кесиб ўтади ёки уни умуман кесиб ўтмайди. Бошқача қилиб айтганда, ўз йўналишини икки марта алмаштиради ёки уни умуман алмаштирмайди. Бундай C да $x=\varphi(t,C)$ ва



2.7-расм



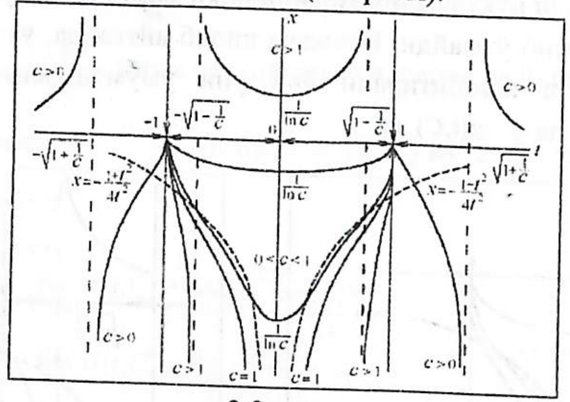
2.8-расм

$x=-\frac{1+t^2}{4t^2}$ функциялар графиги бир нуқтада бир-бирига уринади, $x=\varphi(t,C)$ функция графиги қуйига қаварик (2.7-расм). Хусусан, $t>0$ ва ҳар бир $C>1$да (2.32) тенгламанинг D_2 соҳада мос равишда $\left(0;\sqrt{1-\frac{1}{C}}\right)$ ва $\left(\sqrt{1-\frac{1}{C}};1\right)$ оралиқларда аниқланган иккита давом эттирилмайдиган ечимлари мавжуд. Биринчиси, мусбат, иккинчиси эса, манфий (2.8-расм).

Шу билан бирга,

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to+0} \varphi(t,C) = \dfrac{1}{C} > 0, \\ \lim\limits_{t\to\sqrt{1-\frac{1}{C}}\mp 0} \varphi(t,C) = \pm\infty, \\ \lim\limits_{t\to+0} \varphi'(t;C) = +0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{t\to 1-0} \varphi(t;C) = -0, \\ \lim\limits_{t\to 1-0} \varphi'(t;C) = +\infty. \end{cases}$$

Ва ниҳоят $t=0$ га нисбатан симметриклигидан фойдаланиб, охирги натижавий графикни оламиз (2.9-расм).



2.9-расм

Олий ўқув юртлари талабалари учун (2.27) тенгламанининг

$$x\Big|_{t_0=-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{1}{\ln 2} = x_0$$

шартни қаноатлантирувчи ечимини қидиришда дастурий таъминот пакетларидан фойдаланилганда, қандай мураккабликларни енгиб ўтишга тўғри келишини тасаввур қила олишлари зарур.

Яна бир мисолни кўрамиз. Қуйидаги Бернулли тенгламасини қарайлик:

$$\frac{dx}{dt} + 4tx = 2te^{-t^2}\sqrt{x} \qquad (2.33)$$

бу тенгламанинг фақат $x \ge 0$ лардагина $x = \varphi(t) = 0, -\infty < t < +\infty$ кўринишдаги ечими мавжуд. $D:\{-\infty < t < +\infty, x > 0\}$ юқори ярим текисликда (2.33) тенгламага қўйилган Коши масаласининг ечими мавжуд ва ягоналиги таъминланган, чунки $f(t,x) = -4tx + 2te^{-t^2}\sqrt{x}$ ва $f'_x(t,x)$ функциялар D соҳада узлуксиз. (2.33) тенгламага мос бир жинсли $\frac{dx}{dt} + 4tx = 0$ тенгламанинг ечими

$x = ce^{-2t^2}$ кўринишда бўлгани учун, (2.33) тенгламанинг ечимини топишда ўзгармасни вариациялаш (ёки Лагранж) усулини қўллаймиз, яъни бир жинсли бўлмаган тенглама ечимини $x = c(t)e^{-2t^2}, c(t) > 0$ кўринишда қидирамиз. Уни (2.33) тенгламага қўйиб, қуйидаги тенгламани оламиз:

$$c'(t)e^{-2t^2} = 2te^{-t^2}\sqrt{c(t)e^{-2t^2}}.$$

Бу тенглама қуйидаги тенгламага тенг кучли: $\frac{d}{dt}(\sqrt{c(t)}) = t$. Бундан қуйидаги натижани оламиз:

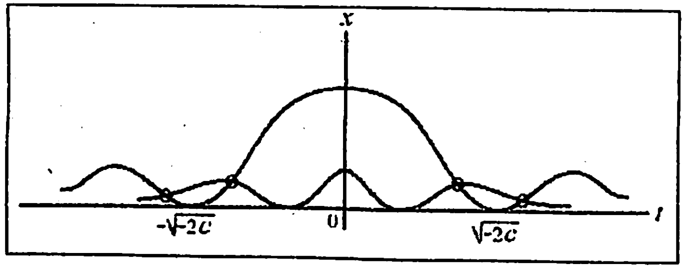
$$\sqrt{c(t)} = \frac{t^2}{2} + c. \qquad (2.34)$$

Шу ўринда қўпол хатога йўл қўйилади, яъни:

$$\frac{t^2}{2} + c > 0 \qquad (2.35)$$

шарт инобатга олинмай қолади.

Шундай қилиб, (2.33) тенгламанинг барча ечимлари тўплами қуйидаги кўринишда бўлади (2.10-расм):



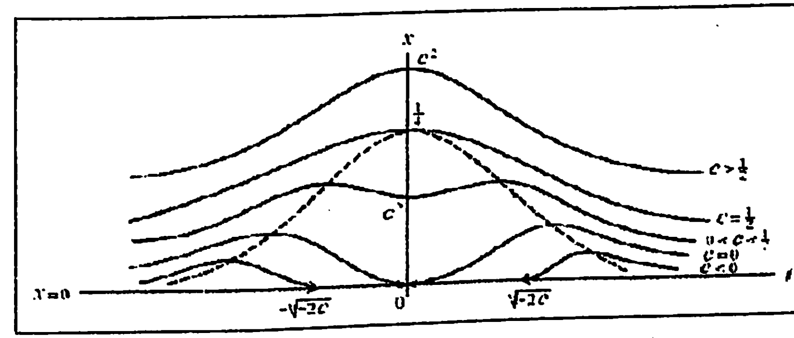
2.10-расм

$$\left[\begin{array}{l} x=0,\ -\infty<t<+\infty, \\ x=\left(\dfrac{t^2}{2}+c\right)^2 e^{-2t^2}, -\infty<t<+\infty,\ c>0, \\ x=\dfrac{t^4}{4}e^{-2t^2}, -\infty<t<0,\ \ 0<t<+\infty,\ c=0, \\ x=\left(\dfrac{t^2}{2}+c\right)^2 e^{-2t^2}, -\infty<t<-\sqrt{-2c},\ -\sqrt{-2c}<t<+\infty, c<0. \end{array}\right. \qquad (2.36)$$

(2.35) шартни $c<0$ да инобатга олмаслик натижасида юқори $x>0$ ярим текисликда берилган Коши масаласи ечимининг ягоналиги бузилади. Чунки $f(t,x)=-4tx+2te^{-t^2}\sqrt{x}=2t\sqrt{x}(-2\sqrt{x}+e^{-t^2})$. Демак, $t>0$ ларда

$$\left[\begin{array}{l} f(t,x)>0,\ \ 0<x<\dfrac{1}{4}e^{-2t^2}, \\ f(t,x)=0,\ \ x=\dfrac{1}{4}e^{-2t^2}, \\ f(t,x)<0,\ \ x>\dfrac{1}{4}e^{-2t^2}. \end{array}\right.$$

$t<0$ ларда тенгсизликлар тескарисига алмашади. Бу (2.33) тенгламанинг барча ечимлари тўпламини олиш имконини беради (2.11-расм).



2.11-расм

Физика, математика факультетларида математика фани ўқитилишида талабалар креатив фаолиятини ривожлантирувчи масалаларнинг аҳамиятига тўхталамиз. Албатта, талабаларнинг креатив қобилиятини бир ёки бир нечта дарсда ривожлантириб бўлмайди. Бу масалага доимий эътибор зарур. Акс ҳолда талабаларнинг ёдлаб олиш қобилиятигина ривожланиши мумкин холос. Жаҳон тажрибасидан маълумки, талабаларнинг креатив қобилиятини ностандарт саволлар, ўзига хос масалалар кўпроқ ривожлантиради. Бундай савол ва масалаларни тузиш даврида профессор-ўқитувчилар ҳар бир талабанинг индувидуал хусусиятларини ҳисобга олишлари зарур. Қуйида келтириладиган масалалар ана шундай ўзига хослиги билан талабаларни жалб қилган.

2-масала. Агар $m=const>0$ бўлса, $y''+my=0$ тенглама ихтиёрий (айнан нолдан фарқли) ечимининг қўшни нолари орасидаги масофани топинг. $a\le x\le b$ оралиқда нечта ноли бўлиши мумкин?

Ечилиши. Функциянинг ноли деб, бу функция нолга айланадиган нуқталарига айтилади. Бу дифференциал тенглама ўзгармас коэффицентли иккинчи тартибли чизиқли тенглама. Тенгламани ечиш учун аввал унинг характеристик тенгламасини тузиб оламиз:

$$k^2+m=0,\ k_{1,2}=\pm i\sqrt{m}.$$

Биз биламизки, $k_1=i\sqrt{m}$ ва $k_2=-i\sqrt{m}$ хос сонларга тенгламанинг мос равишда $y_1(x)=\sin\sqrt{m}\,x$ ва $y_2(x)=\cos\sqrt{m}\,x$ чизиқли эркли ечимлари мос келади. Булар орқали тенгламанинг умумий ечимини топиш мумкин:

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=c_1\sin\sqrt{m}\,x+c_2\cos\sqrt{m}\,x.$$

Умумий ечим кўринишини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$c_1\sin\sqrt{m}\,x+c_2\cos\sqrt{m}\,x=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\sin\sqrt{m}\,x+\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\cos\sqrt{m}\,x\right)=$$

$$=A\left(\sin\sqrt{m}\,x\cos\alpha+\cos\sqrt{m}\,x\sin\alpha\right)=A\sin(\sqrt{m}\,x+\alpha),$$

Бу ерда: $A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$, $\sin\alpha=\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$, $\cos\alpha=\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$.

Демак, берилган тенгламанинг ихтиёрий ечими:

$$y=A\sin(\sqrt{m}\,x+\alpha)$$

кўринишда экан. Бу функцияни биз яхши биламиз A,α лар ўзгармас бўлгани учун унинг қўшни ноллари орасидаги масофа $\sin\sqrt{m}\,x$ функциянинг қўшни ноллари орасидаги масофа билан устма-уст тушади. $\sin\sqrt{m}\,x$ функциянинг қўшни ноллари орасидаги масофа $\pi/\sqrt{m}$, чунки $\sin x$ нинг қўшни ноллари орасидаги масофа π. Шундай қилиб, биз берилган тенглама ихтиёрий ечимининг қўшни ноллари орасидаги масофа $\pi/\sqrt{m}$ га тенг эканлигини кўрсатдик.

Энди, $a\le x\le b$ оралиқда тенглама ечимининг нечта нолли бўлиши мумкин деган саволга жавоб берайлик. Юқоридаги хулосадан фойдалансак, ноллар сони $N=\left[\frac{b-a}{\frac{\pi}{\sqrt{m}}}\right]=\left[\frac{\sqrt{m}\,(b-a)}{\pi}\right]$ та ёки биттага ортиқ эканлигига ишонч хосил қиламиз. Бу ерда $[z]$, $z-$ сонининг бутун қисмини билдиради.

Энди, олинган натижалардан фойдаланиб, қуйидаги масалани ечайлик.

3-масала. Агар $20\le x\le 45$ бўлса, $y''+2xy=0$ тенглама ихтиёрий (айнан нолдан фарқли) ечимининг қўшни ноллари орасидаги

масофани қуйи ва юқоридан баҳоланг.

Ечилиши. Маълумки, бу тенглама ўзгарувчи коэффицентли, шунинг учун унинг ечими қўшни ноллари орасидаги масофани аниқ ёзиш имконини бермайди. Лекин, $20\le x\le 45$ лигидан $y''+2\cdot 20y=0$, $y''+2\cdot 45y=0$ тенгламаларни ўрганиб, улар орқали берилган тенглама учун хулоса чиқарса бўлмасмикин, деган фикр келади, албатта. Бу интуиция холос, лекин уни асослаш осон эмас.

Бизга бу ерда В.В.Степановнинг китобидаги қуйидаги таққослаш теоремаси ёрдам беради. [144; — 473-б.]

Теорема. Агар бизга

$$y''+Q_1(x)y=0,\ z''+Q_2(x)z=0 \tag{2.37}$$

тенгламалар берилган бўлиб (a,b) оралиқда $Q_2(x)\ge Q_1(x)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда биринчи тенгламанинг $\bar{y}(x)$ ихтиёрий ечими қўшни ноллари орасида, иккинчи тенглама ҳар бир $\bar{z}(x)$ ечимининг камида битта ноли бўлади.

Биз берилган тенгламамизни, биринчи x нинг энг кичик қийматида олинган $y''+2\cdot 20y=0$ ёки $y''+40y=0$ тенглама билан, кейин x нинг энг катта қийматида олинган $y''+2\cdot 45y=0$ ёки $y''+90y=0$ тенглама билан қиёслаб, уларга таққослаш теоремасини қўллаймиз.

1) $y''+40y=0$, $y''+2xy=0$ тенгламаларни таққослаймиз. Бу ерда $Q_1(x)=40$, $Q_2(x)=2x$ ва $20\le x\le 45$ оралиқда $Q_2(x)=2x\ge Q_1(x)=40$. Аввалги 1-масала хулосасига кўра, $y''+40y=0$ тенглама ихтиёрий ечимининг қўшни ноллари орасидаги масофа $\pi/\sqrt{40}$ га тенг. Таққослаш теоремасига кўра, $y''+2xy=0$ тенглама ихтиёрий ечимининг қўшни ноллари орасидаги масофа $d\le\pi/\sqrt{40}\approx 0,5$ келиб чиқади;

2) Энди, $y''+2xy=0$, $y''+90y=0$ тенгламаларни таққослаймиз. Бу ерда $Q_1(x)=2x$, $Q_2(x)=90$ ва $20\le x\le 45$ оралиқда $Q_2(x)=90\ge Q_1(x)=2x$.

Аввалги ҳолга ўхшаш 1-масала хулосасига кўра, $y''+90y=0$ тенглама ихтиёрий ечимининг қўшни ноллари орасидаги масофа $\pi/\sqrt{90}=\pi/3\sqrt{10}$ га тенг. Таққослаш теоремасига кўра, $y''+2xy=0$ тенглама ихтиёрий ечимининг қўшни ноллари орасидаги масофа $d\geq\pi/3\sqrt{10}\approx 0{,}33$ бўлади. Демак, қуйидаги $0{,}33\leq d\leq 0{,}5$ баҳога эга бўлдик. Энди, янада аниқ ҳисоблашлар зарур бўлган қуйидаги масалани кўрайлик.

4-масала. $y''+xy=0$ тенгламанинг ихтиёрий ечими $-25\leq x\leq 25$ оралиқда 15 тадан кам бўлмаган нолга эга бўлишини исботланг.

Ечилиши. $y''+xy=0$ берилган тенгламани, $x=10$ қийматни қўйиб ҳосил қилинган $y''+10y=0$ тенглама билан, $10\leq x\leq 25$ оралиқда таққослаймиз. Тушунарлики, $Q_1(x)=10$, $Q_2(x)=x$ ва $10\leq x\leq 25$ оралиқда $Q_2(x)=x\geq Q_1(x)=10$. 1-масала хулосасига кўра, $y''+10y=0$ тенглама ихтиёрий ечимининг қўшни ноллари орасидаги масофа $\pi/\sqrt{10}(<1)$ га тенг. Унинг $10\leq x\leq 25$ оралиқдаги ноллари сони $\left[\dfrac{25-10}{\frac{\pi}{\sqrt{10}}}\right]=15$ га тенг. Таққослаш теоремасига кўра, $y''+xy=0$ тенглама ихтиёрий ечимининг $10\leq x\leq 25$ оралиқдаги ноллари сони 15 дан кам эмас. Демак, $y''+xy=0$ тенглама ихтиёрий ечимини $-25\leq x\leq 25$ оралиқдаги ноллари N ҳам 15дан кам бўлмаслиги керак.

Эътибор берган бўлсангиз, биз бу ерда А.Ф.Филипповнинг китобидаги 726 (1-масала), 727 (2-масала), 731 (3-масала) – масалаларнинг ечимини намойиш этдик. Бундан кейин навбатдаги 728, 729, 730, 732, 733 – масалаларни ечишни таклиф этамиз. Шу билан бирга, талабаларга қуйидаги мавзу ва адабиётлар билан танишиш зарурлигини айтамиз. [151; – 240-б.]

1. Линейные уравнения второго порядка с колеблющимися решениями ([144;IV боб, 3-банд, 240 – 245-б.].

2. О нулях решений линейных однородных уравнений 2-го порядка ([121;V боб, 145 – 148 б.].

3. Краевые задачи для линейных уравнений 2-го порядка ([151;III боб, 118 – 178-б.].

Бу жараённи шундай олиб бориш керакки, натижада, бу масала билан талабалар қизиқиб қолсинлар.

Ушбу мавзулар талабага ўрганилган масаланинг тарихи, ҳозирги вазияти, татбиқи кабилар билан танишиш ва ўзига янги масалалар топиб олиш имконини беради. Тебранувчи ечимли иккинчи тартибли тенгламалар [144] да жуда кенг, содда тилда баён қилинган ва мисоллар ҳам ечиб кўрсатилган. Уларнинг ечимларини таҳлил қилиш давомида иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламаларни ечиш бўйича янада чуқур билимга эга бўлинади. Ундан ташқари, таққослаш теоремаси исботи билан танишилади. Бу теорема айрим, жумладан, $y''+my=0$ тенглама билан бошқа тенгламаларни таққослашга хам қўллаб кўрилган. Мақолада таҳлил қилинган барча масалаларни тушуниб олиш учун [144] адабиётдаги тегишли мавзу билан танишиб чиқиш етарли. Хусусан, бу китобда математик физика тенгламаларида муҳим ўрин тутувчи Бессель тенгламаси, унинг ечимлари кетма-кет ноллари орасидаги масофаларни аниқлаш билан танишиш мумкин. [144; – 473-б.] даги таққослаш теоремаси [121] да Штурм теоремаси номи билан берилган. Худди шунингдек, [121] да ҳам Штурм теоремаси мавжуд, лекин улар бир-биридан фарқ қилиши баробарида мазмунан жуда яқин. Ижодкор талаба бу теоремаларни ўрганиб, ўзининг кўп саволларига жавоб олади.

Иккинчи тартибли чизиқли чегаравий масалалар [151] бутун бир бобни ташкил этади. Мазкур китобда ҳозиргача ўз долзарблигини йўқотмаган масалалар мавжуд. Бу ерда мақолада кўрилган тенгламаларга қараганда умумийроқ чизиқли дифференциал тенгламалар ечимларининг қўшни ноллари орасидаги масофани баҳоловчи “Валле Пуссен теоремаси” деб аталувчи ажойиб теорема билан танишиш имконияти мавжуд. Теоремада шундай баҳолаш таклиф этилганки, уни янада яхшилашнинг имкони йўқ. [151] да юқорида эслатилган [144]; [121] адабиёт-ларга қараганда ниҳоятда қизиқ ва кенг маълумотлар берилган. [151] да дифференциал тенглама ноллари ҳақидаги теоремалар тор тебраниш тенгламаси мисолида муҳим физик талқинга эгалиги кўрсатилган. [133] да, [151] да берилган натижалар юқори тартибли чизиқли ўзгарувчи коэффициентли ва чизиқли бўлмаган тенгламаларга қандай умумлаштирилиши баён қилинган.

Энди ушбу мавзунинг татбиқига тўхталайлик. XX асрнинг буюк математикларидан бири Л.С.Понтрягин "Математическая теория оптимальных процессов" номли ҳаммуаллифликдаги китобида [126] ўзининг машҳур "Максимум принципи"ни чизиқли дифференциал тенгламалар системаси билан ёзиладиган жараёнларни исботлаётганида чизиқли дифференциал тенгламалар системаси ихтиёрий ечимининг берилган оралиқдаги ноллари сони n (дифференциал тенгламалар системаси тартиби) га тенглиги ҳақидаги леммани исботлайди. Чунки бу маълумот бошқарув функциясини топишда муҳим ҳисобланади. Бу олим ўтган асрнинг 70 – йилларида ўзи асос солган янги соҳа "Дифференциал ўйинлар" билан шуғулланади ва дифференциал тенглама ечими ноллари ҳақидаги натижаларни умумлаштириб, уни "қочиш" масаласига қўллайди.

Шундай қилиб, ижодкор иқтидорли талабаларни аниқлаш учун дифференциал тенгламалар дарсида танлаб олинган ушбу мавзулар йиллар давомида йиғилган ва сайқалланган тажрибалар натижасидир. Ҳозирда ушбу мавзулар бўйича барча янги натижалар интернет тизими ёрдамида йиғилиб бойитиб борилмоқда.

2.4-§."Олий математика" ўқув фани мавзуларини компьютер технологияси имкониятларидан фойдаланиб ўқитиш орқали талабаларнинг креатив фаолиятини ривожлантириш

Иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар ёрдамида қисқача чегаравий масала қўйилиши ва ечилиш схемасини эслатиб ўтамиз [9]:

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{2.38}$$

Ушбу (2.38) тенглама учун $[a,b]$ чегаравий масала қуйидаги уч кўринишдан бирида берилади:

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \tag{2.39}$$

$$y'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta, \tag{2.40}$$

$$y'(a) + k_1 y(a) = \alpha, \quad y'(b) + k_2 y(b) = \beta. \tag{2.41}$$

Интеграллаш оралиғи $[a,b]$ охирларида ҳосила қийматлари уларнинг чекли айирмалари билан алмаштириладиган n та тенг бўлакларга бўлинади. Натижада, берилган дифференциал тенглама изланаётган функциянинг $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ тугунлардаги қийматларига нисбатан $n-1$ тартибли алгебраик тенгламага келтирилади. Уларга, зарур ҳолларда ҳосила қийматларига мос чекли айирмалари билан алмаштириладиган, чегаравий шартлар қўшилса номаълум функциянинг қийматларига нисбатан $n+1$ тартибли алгебраик тенгламалар системасини оламиз. Бу алгебраик тенгламалар системасини ечими берилган чегаравий масаланинг тақрибий ечимини беради.

Одатда, маълум берилган бошланғич шартларда ягона ечимга эга бўладиган Коши масаласидан фарқли ўлароқ, чегаравий масала, умуман, ечимга эга бўлмаслиги, чекли сондаги ечимга эга бўлиши ёки чексиз кўп ечимга эга бўлиши мумкин. Айниқса, охирги ҳолни жуда содда мисоларда ҳам учратиш мумкин. Масалан, $y = g(x)$ функция (2.38) тенгламани (2.39) чегаравий шартларда қаноатлантирсин, дейлик. У ҳолда $y = g(x) + const$ кўринишдаги барча функциялар (2.38) тенгламани ҳам, (2.39) чегаравий шартларни ҳам қаноатлантиради.

Чегаравий масалаларни MatLab тизимида ечишда асосий инструмент **bvp4c** функция бўлиб, у билан оддий ҳоллардаги мулоқот қуйидаги кўринишда бўлади:

```
sol=bvp4c(@f_e, @f_b,[ab],y_init);
```

Бу ерда:

f_e– (2.38) кўринишга келтирилган оддий дифференциал тенглама ўнг томонини ҳисоблаш функцияси кўрсаткичи;

f_b– $f\left(y(a), y(b)\right)=0$ форматга келтирилган чегараловчи функция кўрсаткичи;

[a b] – интеграллаш оралиғи;

y_init– изланаётган ечимга бошланғич яқинлашиш;

sol – ечим олинадиган структура. Ўнг томонни ҳисоблаш функцияси чақирилганда, унга x эркли ўзгарувчининг жорий қийматлари ва y нинг жорий қийматлари вектори берилади. У, ўз навбатида, берилган оддий дифференциал тенгламага мос dy/dx нинг вектор қийматларини шакллантириши керак.

Бошланғич яқинлашишлар вектори yinit изланаётган y функциянинг интеграллаш оралиғида текис тўр тугунларидаги қийматлари массиви кўринишида берилиши ёки шундай массивни ҳисоблайдиган функцияга кўрсаткич кўринишида берилиши мумкин. Қоидага кўра, бундай мақсадда икки вектор аргументли bvpinit ёрдамчи функциясидан фойдаланилади:

y_init=bvpinit(linspace(a,b,n),y0);

Бу ерда:

Linspace – [a b] оралиқни n та тенг оралиқларга бўлади ва бошланғич тўр тугун нуқталари векторларини ҳаракатга келтирувчи функция n нинг қиймати фойдаланувчи томонидан танланади, кўпинча у $n=10$ кўринишида бўлади;

y0 - [a b] оралиқда изланаётган функциянинг бошланғич қийматини аниқловчи бошланғич ўзгармас вектор. Биринчи ўзгармас y0(1) биринчи y1функцияга тўрнинг барча ички тугун нуқталарида бошланғич яқинлашиш сифатида, иккинчи ўзгармас y0(2) – иккинчи y2 функцияга тўрнинг барча ички нуқталарида бошланғич яқинлашиш сифатида қабул қилинади ва ҳ.к. Чегаравий масала ягона ечимга эга бўлган ҳолда n ва y0

векторнинг қандай танланиши ечиш жараёнига унчалик таъсир кўрсатмайди. Чегаравий масала ягона ечимга эга бўлмаган ҳолда эса бошланғич қийматларни бир неча кўринишда танлаб кўришга тўғри келади.

Биринчи чегаравий масалага мисол сифатида қуйидаги масалани қараймиз. Фараз қилайлик, қаралаётган масала $y=e^{-ax}\cos(x)$ аналитик ечимга эга бўлсин, ва биз бу ечимни $[0, 3.5\pi]$ оралиқда ўрганамиз. Бундай ечимни кузатиш қулай ва иккинчи томондан, функцияларга чегаравий шартларни қўйиш ҳам осон. Энди, бу ечимга мос иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар системасини қуриш қолди холос:

$$
\begin{aligned}
&y1 = y = e^{-ax}\cos(x), \\
&y_1' = y_2 = -ae^{-ax}\cos(x) - e^{-ax}\sin(x), \\
&y_2' = (a^2-1)y_1 + 2ae^{-ax}\sin(x).
\end{aligned}
$$

$a=0.2$ деб қабул қиламиз, чегаравий шартни $y(0)=1$ва $y(3.5\pi)=0$ кўринишда танлаймиз.

Биринчи чегаравий масалани ечишнинг асосий дастури қуйидаги кўринишда бўлади:

```
global a
a=0.2;
y_init=bvpinit(linspace(0,3.5*pi,10),[01];sol=bvp
4c(@f_e1,@f_b1,y_init);
plot(sol.x,sol.y);
gridon
```

Интеграллаш оралиғи ички тугун нуқталарида бошланғич ўзгармаслар сифатида $y1(x)\equiv 0$ ва $y2(x)\equiv 1$ кўринишдаги функциялар олинган.

Оддий дифференциал тенгламалар системаси ўнг томони векторларини ҳисоблаш функцияси

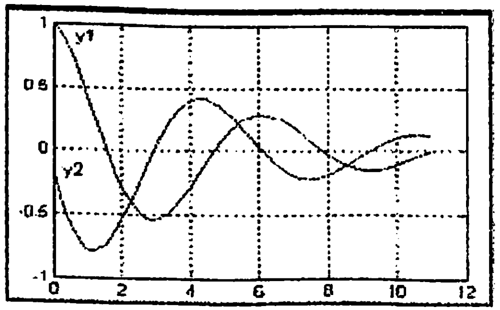
(f_e1.m) кўринишда бўлади

```
functiondydx=f_e1(x,y)
global a
dydx=[y(2); y(1)*(a^2-1)+2*a*exp(-a*x)*sin(x)];
```

Чегаравий шартларни (f_b1.m) сақлаш функцияси қуйидаги кўринишда бўлади.

```
function res=f_b1(ya,yb)
res=[ya(1)-1; yb(1)];
```

Асосий дастурни ишлаш натижаси 2.12-расмда келтирилган. Бошланғич тугун нуқталар танловидаги ўзгаришлар ва бошланғич яқинлашувни берилишидаги ўзгаришлар охирги натижага ҳеч қандай таъсир кўрсатмайди.



2.12-расм

Иккинчи чегаравий масалага мисол сифатида MatLab-7 тизимидаги файллар материалларидан фойдаланамиз. Унда қуйидаги $y'' + |y| = 0$ тенгламанинг $y(0)=0$ ва $y(4)=-2$ чегаравий шартлардаги ечими намойиш этилади. Бошланғич яқинлашиш сифатида интеграллаш оралиғи тугун нуқталарида $y1(x)\equiv 0$ ва $y2(x)\equiv 1$ функциялар берилган бешта тенг оралиқларга бўлинган. Иккинчи чегаравий масалани ечишнинг асосий дастури қуйидаги кўринишда бўлади:

```
y_init =bvpinit(linspace(0,4,5),[01]);
sol =bvp4c(@twoode,@twobc,y_init);
```

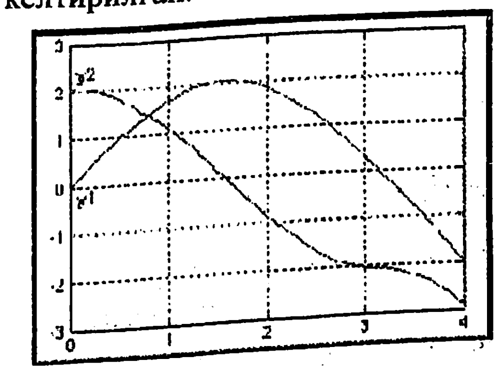


```
plot(sol.x,sol.y);
grid on
```

Чегаравий шартларни (f_b1.m) сақловчи ўнг томондаги векторларни ҳисоблаш функцияси (twoode.m) қуйидаги кўринишда бўлади:

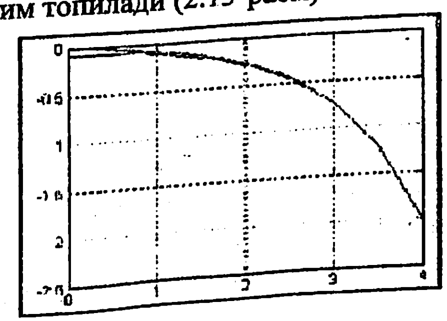
```
function dydx=twoode(x,y)
dydx =[y(2); -abs(y(1))];
function res=twobc(ya,yb)
res =[ya(1); yb(1) +2];
```

Биринчи ечимнинг [0 1] бошланғич шартлардаги графиги 2.13-расмда келтирилган.



2.13-расм

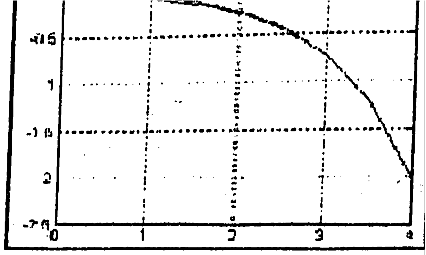
Бироқ [-100] ораликда бошланғич ўзгармасларни алмаштириш билан бошқа ечим топилади (2.13-расм).



2.14-расм

... интеграллаш оралиғи тугун нуқталарида $y1(x)\equiv 0$ ва $y2(x)\equiv 1$ функциялар берилган бешта тенг оралиқларга бўлинган. Иккинчи чегаравий масалани ечишнинг асосий дастури қуйидаги кўринишда бўлади:

```
y_init =bvpinit(linspace(0,4,5),[01]);
sol =bvp4c(@twoode,@twobc,y_init);
```

2.14-расм

Топилган ечимнинг янада силлиқроқ графигини қуриш учун интеграллаш оралиғини олдиндан кўпроқ сондаги тенг бўлакларга бўлган ҳолда deval сервис дастуридан фойдаланиш мумкин.

x=linspace(0,4);y=deval(sol,x);

MathCAD тизими чегаравий масалаларни ечиш учун бераётган воситалар худди оддий дифференциал тенгламалар системасини ечиш жараёнини эслатади. Given–Odesolve форматидаги нисбатан замонавий яқинлашувлар, MatLab тизимидаги шунга ўхшаш bvp4c функциясига нибатан соддароқ. Унда ҳатто изланаётган ечим учун бошланғич функциянинг берилиши ҳам талаб қилинмайди:

Given

$y''(t)+|y(t)|=0$

$y(0)=0 \quad y(4)=-2$

y:=odesolve(t,4)

Бироқ бундай усул билан фақат чегаравий масаланинг 2.13-расмда келтирилган биринчи ечимгина топилади.

Иккинчи ечимни қидириш учун бошланғич шартни енгил ўзгартириш зарур:

Given

$y''(t)+|y(t)|=0$

$y(0)=0.0001 \quad y(4)=-2$

y:=odesolve(t,4)

Гарчи янги олинган ечим 2.14-расмда келтирилган чизиқдан деярли фарқ қилмаса-да, бу усулдан фойдаланишда эҳтиёткор бўлиш талаб этилади Зеро олинган ечимдан фойдаланишда амалда ҳисобга олиш мумкин бўлмаган қадамлар сони ўсиши билан камаймайдиган ўзгармас хатолик келиб чиқиши мумкин.

Чегаравий масалани ечишнинг иккинчи усули қатор [масалан, 8, 9] китобларда кенг реклама қилинадиган “отиб синаш”(пристрелки) усулидир. Унинг маъноси шундан иборатки, етишмаётган бошланғич шартларни қўлда ёки автомат тарзда шундай танлаш керакки, натижада, маълум аниқликда интеграллаш оралиғи четларида чегаравий шартлар бажарилсин. Иккинчи тартибли тенгламалар учун “отиб синаш” бошқаруви анча содда кўринишда бўлади. Унинг маъноси чегаравий масалани етишмаётган бошланғич шартларни қандайдир усул билан тўлдириш эвазига Коши масаласига келтиришдан иборат. Натижада, шундай интеграл чизиқни топамизки, у қайсидир интегралланувчи функцияга айлансин.

Чегаравий масалада берилган ва ҳисоблашларда оралиқ четларида олинган шартлар ўртасидаги фарқни баҳолаймиз. Кейин сунъий бошланғич шартларни корректировка қилиш билан олинган Коши масаласини қайта-қайта ечиш орқали юқорида айтилган шартлар орасидаги фарқни минималлаштиришга ҳаракат қиламиз.

Ўрганилаётган оддий дифференциал тенгламалар системаси тартиби юқори бўлса, оралиқ четларидаги хатоликларни минималлаштириш учун икки ёки ундан ортиқ параметрларни бошқаришга тўғри келади. Қўл билан танлаш тартибида “отиб синаш” жараёни узоққа чўзилиши мумкин ва шунга қарамасдан эришилган натижа қониқарли бўлмаслиги мумкин.

MathCAD тизимида етишмаётган бошланғич шартларни танлаш тартибини автоматлаштириш sbval буйруғидан фойдаланиш орқали амалга оширилади:

S:=sbval(v,t0,t1,D,f0,f1)

Бу ерда:

S – вектор, қайсики sbval функцияси етишмаётган бошланғич шартларни оптимал жойлаштиради;

υ – етишмаётган бошланғич шартлар интегратив жараёнда яхшиланиб борадиган бошланғич яқинлашиш;

$t0, t1$ – интеграллаш оралиғи боши ва охири;

$D(t, y)$ – оддий дифференциал тенглама ўнг томонини аниқловчи вектор функция;

$f0(t0, v)$ – бошланғич шартлар тўла жамланмасини берувчи вектор-функция. Бу вектордаги ўзгармаслар чегаравий масалада берилган шартларга мос келади, v – вектор элементлари эса етишмаётган бошланғич шартларга мос келади. v векторнинг бу компонентлари кетма-кетлиги натижаларни беришнинг S сектордаги тартибини аниқлайди;

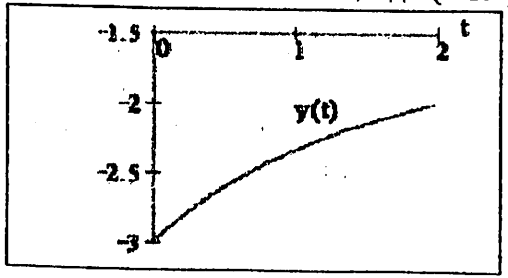
$f1(t1, y)$ – вектор-функция y тақрибий ечим билан берилган шартлар орасидаги фарқни (sbval функцияси бу айирмани 0га айлантиришга ҳаракат қилади). Айтилганларни учинчи тартибли дифференциал тенглама мисолида тушунтирамиз:

$$2 \cdot y'''(t)^2 = 0 \quad y(0) = -3 \quad y'(2) = \frac{1}{4} \quad y''(2) = \frac{-1}{8}$$

$$D(t, y) := \begin{bmatrix} y1 \\ y2 \\ \frac{3}{2} \cdot (y_1)^2 \end{bmatrix} \quad f0(t0, v) := \begin{pmatrix} y_1 - \frac{1}{4} \\ y_2 + \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$s := sbval\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, 2, D, f0, f1\right] \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Етишмаётган бошланғич шартлар аниқлангандан сўнг чегаравий масала Коши масаласига келиб қолди (2.15-расм).



2.15-расм

Топилган тақрибий ечимни $y = -4/(x+2) - 2$ аналитик ечим билан таққослаб кўриш мумкин. MathCAD тизимига яна бир интеграллаш оралиғи ичкарисида берилган қўшимча шартли чегаравий масалаларни ечиш имконини берувчи bvalfit функцияси киритилган.

Ўтган асрнинг 90-йилларидан бошлаб, асосий символик ҳисоблашлардан иборат компьютер математикаси шиддат билан ривожлана бошлади. Бугунги кунда замонавий талаба учун зарур бўлган, етарли даражада кенг қамровли математик масалаларни осон еча оладиган, жуда кучли ва узлуксиз мукаммаллаштириб борилаётган Maple, Mathematica, Reduce каби қатор тизимлар мавжуд. Шу билан бирга, ушбу дастурлар ҳар бир конкрет вазиятда олинган натижа тўғри эканлигини текшириб кўриш имконини беради.

Зарур ҳолларда бажарилган ҳисоблашларнинг график ёки сонли ифодаларини олиш мумкин. Яна дастур ёрдамида масалани ечиш жараёнининг батафсил аниқликдаги тавсифини олиш мумкин. Бундай пакетларнинг муҳим томони шундаки, улардан амалда фойдаланиш учун дастурлашни билиш талаб этилмайди.

Биз бу бандда 1-§ да таклиф қилинган асосий масалага қайтамиз. Бошланишига изланаётган нуқталарнинг геометрик ўрни ҳақида тасаввурга эга бўлиш учун бу жараённинг дастурини тузиб, компьютерда ечишга ҳаракат қилиб кўриш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, бу – ажойиб фикр. Декарт координаталар системасида учлари ихтиёрий $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ва $C(x_3, y_3)$ нуқталарда бўлган учбурчак чизамиз. Унинг BC, CA, AB томонларини ҳар бирини тенг (масалан 100 тадан, умумий ҳолда n тадан) бўлакларга бўламиз. Тушунарлики, бу бўлакларни ҳосил қилувчи нуқталарни мос равишда $A_1', A_2', \ldots, A_{n-1}'$; $B_1', B_2', \ldots, B_{n-1}'$; $C_1', C_2', \ldots, C_{n-1}'$ лар орқали белгиласак, бу нуқталарнинг координаталарини A, B, C нуқталар координаталари орқали ифодалаш мумкин. Демак, берилганлар ёрдамида

$AA_1', AA_2', \ldots, AA_{n-1}'; BB_1', BB_2', \ldots, BB_{n-1}'; CC_1', CC_2', \ldots, CC_{n-1}'$ тўғри чизиқларни мос равишда кесишиш нуқталари ўрнини аниқлаш имкони туғилади. Бунинг учун Maple 13 дастурий муҳитидан фойдаланамиз [99; 205 – 217-б.].

$>with(plots):$

$with(geometry):$

$pc := \mathbf{proc}(t)\ line\left(l1, y - \frac{2t}{5-3t}x = 0, [x, y]\right), line\left(l2, y - \frac{2x}{2-5t} + \frac{10t}{2-5t} = 0, [x, y]\right) : intersection(F, l1, l2);$
$pointplot(coordinates(F), symbol = \text{solidcircle}, \text{symbolsize} = 7)$
$\mathbf{end\ proc};$

$pc1 := \mathbf{proc}(t)\ line\left(l1, y - \frac{2t}{5-3t}x = 0, [x, y]\right), line\left(l3, y + \frac{(2-2t)}{3+2t}x + \frac{10(t-1)}{3+2t} = 0, [x, y]\right) : intersection(F, l1, l3); pointplot(coordinates(F), \text{symbol} = \text{solidcircle}, \text{symbolsize} = 7)\ \mathbf{end\ proc};$

$pc2 := \mathbf{proc}(t)\ line\left(l2, y - \frac{2x}{2-5t} + \frac{10t}{2-5t} = 0, [x, y]\right), line\left(l3, y + \frac{(2-2t)}{3+2t}x + \frac{10(t-1)}{3+2t} = 0, [x, y]\right) : intersection(F, l2, l3); pointplot(coordinates(F), \text{symbol} = \text{solidcircle}, \text{symbolsize} = 7)\ \mathbf{end\ proc};$

$a := plot([[0, 0], [5, 0], [2, 2], [0, 0]], x = 0..5, y = 0..2, style = line, color = red, thickness = 3);$

$b := animate(plot, [[[0, 0], [5 - 3t, 2t]], style = line, color = green], t = 0..1, trace = 30, frames = 50);$

$c := animate(plot, [[[2, 2], [5t, 0]], style = line, color = green], t = 0..1, trace = 30, frames = 50);$

$d := animate(plot, [[[5, 0], [2 - 2t, 2 - 2t]], style = line, color = green], t = 0..1, trace = 30, frames = 50);$

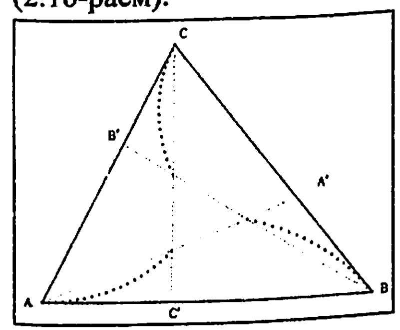
$e := animate(pc, [t], t = 0..1, trace = 30, frames = 50);$

$f := animate(pc1, [t], t = 0..1, trace = 30, frames = 50);$

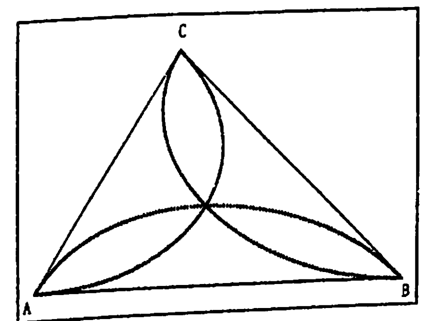
$g := animate(pc2, [t], t = 0..1, trace = 30, frames = 50);$

$>display(\{a, b, c, d, e, f, g\});$

Ушбу дастур ёрдамида биз излаётган нуқталар координаталари, уларнинг геометрик ўрни белгиланган нуқталар ва вазиятлар қийинчиликсиз топилади. Шундан сўнг, хусусий ҳолларда ушбу жараён такрорланиб, изланаётган нуқталар ўрни ҳақида хулоса чиқариш имкони бўлади. Бизни эса ана шу хулоса қизиқтиради. Лекин уни аналитик исботлаш зарурлигини эсдан чиқармаслигимиз зарур. Масалан, расм қуйидагича ҳосил бўлади (2.16-расм):

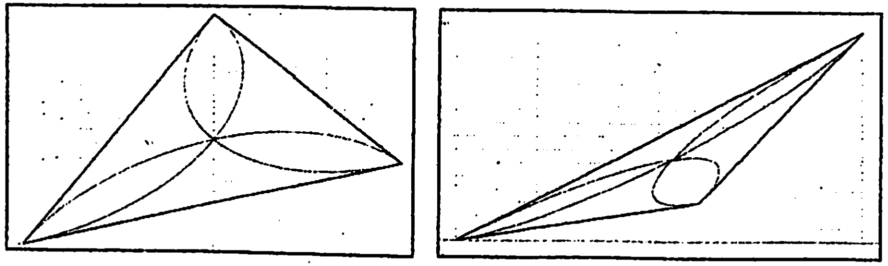


2.16-расм



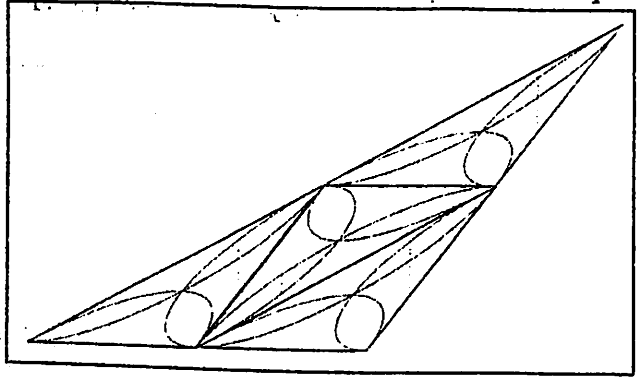
2.17-расм

2.17-расмда декарт координаталари системасида учлари координаталари A(0,0), B(0,5) ва C(2,2) бўлган асосий учбурчак учун тузилган дастур ёрдамида олинган ечим тасвирланган. У кўриб турганингиздек, эллипс бўлаклари бирлашувидан иборат фигура (бу 3-§да аналитик исботланган). Айтиш жоизки, ҳаракатланувчи A', B', C' нуқталарнинг мос томонлардаги ҳаракати умумий ҳолда (ихтиёрий учбурчак учун) асосий учбурчак томонларига пропорционал тезликларда амалга оширилади, чунки дастур тузишда ҳар бир томон тенг сонлардаги ўзаро тенг бўлакларга бўлинмоқда.



2.18-расм

Айрим ўзгартиришлар ва янги мисоллар (2.18-расм) таҳлили ёрдамида юқорида айтилган хулосамиз гипотеза эканлигига қарамасдан, унинг ҳақиқатлигига янада ишончимиз ортмоқда.



2.19-расм

2.19-расмда биз ихтиёрий бошланғич учбурчак ва дастур ёрдамида олинган ва изланаётган нуқталар ўрни бўлган кесишиш нуқталари ҳамда чизиқларини, параллел кўчиришлар ёрдамида ҳосил қилинган эллипс бўлаклари оддий бўлакларгина эмас, балки битта бутун эллипснинг бўлаклари экани тасвирланган. Бу гипотеза жуда муҳим хулоса. Демак, биз излаётган кесишиш нуқталари ҳамда чизиқлари эллипс бўлакларидан иборат эканлигига шубҳа йўқ.

Агар шундай бўлса, 2.19-расмга кўра, тасаввурдаги эллипс асосий учбурчакка ташқи чизилган ва ундан ўлчамлари икки марта катта бўлган учбурчакка ички чизилган (3-§да исботланган). Бу эса янада муҳим ва жуда чиройли хулоса.

Чизмага кўра, кесишиш нуқталари чизиқлари ўзаро кесишган нуқта асосий учбурчакка ташқи чизилган эллипс ўқлари кесишиш нуқтаси билан устма-уст тушади.

Энди Maple тизимида кўпроқ ишлатиладиган буйруқлар ва улар қўлланилгандаги натижаларга мисоллар келтирамиз. Даставвал, функцияларни берамиз. Масалан:

f:=x→sin(x) ва g:=(x,y) →sin(2x+y).

Бу функциялар билан ишлаганда қўлланилган турли буйруқлар натижалари қуйидаги жадвалда келтирилган.

Асосий амаллар			
Буйруқ	Натижа	Буйруқ	Натижа
$f'(x)$	$\cos x$	$\mathrm{int}(f(x),x)$	$-\cos x$
$f''(x)$	$-\sin x$	$\mathrm{int}(f(x),x=a.b)$	$\cos a-\cos b$
$diff(f(x),x)$	$\cos x$	$\mathrm{int}(f(x)/x,x=\mathrm{inf}\,initi..\mathrm{nf}\,initi)$	π
$diff(f(x),x,x)$	$-\sin x$	$\mathrm{int}(\mathrm{int}(g(x,y),x=0..\frac{\pi}{4}),y=0..\frac{\pi}{2})$	1
$D(f)(x)$	$\cos(x)$	$\mathrm{int}(sqrt(1-x^n),x=0..1)$	$\dfrac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{n})}{n\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})}$
$D^{(2)}(f)(x)$	$-\sin(x)$		

Жадвалда келтирилган ҳар бир буйруқ етарли даражада равшан ва уларни буйруқ каторига киритилган заҳоти ҳисоблаш натижаси дарҳол пайдо бўлади. Бу, албатта, дастурлаш пакетининг дастлабки афзалликлари холос. Ҳар бир пакет қудратли маълумотнома тизимига эга. Хусусан, Maple ўзининг минглаб ечимлари ва кўргазмали расмлари билан берилган мисоллар маълумотномаси тизимига эга. Нисбатан мураккаб масалаларни ечиш учун етарлича ривожлантирилган цикллар, операторлар, бошқарувчи тизимлар каби дастурлаш процедураларини ўз ичига олган дастурлаш тили мавжуд.

Таъкидлаш ўринлики, компьютер математикаси тизимлари нафақат турли масалаларнинг аналитик ечимини берувчи, балки уларни чуқур таҳлил қила оладиган имкониятларга ҳам эга. Биз мақсадни дифференциал тенгламалар курси мавзуларини муаммоли таълим услубларидан фойдаланиб ёритишга қаратамиз.

Дастлаб, ишни биринчи тартибли дифференциал тенгламалардан бошлаймиз. Амалдаги ушбу курс дастурида бу бўлимга етарлича вақт ажратилган. Лекин назарий материаллар унчалик кўп эмас. Фан дастурининг кўп қисмини чизиқли, бир жинсли ва тўлиқ дифференциал тенгламаларни амалий ечишга бағишланган усуллар олади. Бу масалаларни амалий ечиш ва таҳлил қилишга Maple тизимида кўп сондаги буйруқлар жамланмаси мавжуд. Улардан фойдаланиш юқорида келтирилган ҳар бир тенгламани ечишда қатор қулайликлар туғдиради, шу билан бирга, дифференциал тенгламалар ва дастурлаш усулларидан алоҳида билимга эга бўлишни талаб қилмайди. Ана шулардан асосийларини келтириб ўтамиз [35; – 544-б.], [61;27 – 52-б.], [63; – 168-б.].

1. Интеграл чизиқларни кўргазмали аниқлаш ва унга мос тенглама ечимларини аниқлаш учун йўналишлар майдони ва уларга ўтказилган интеграл чизиқларни аниқловчи буйруқлардан фойдаланиш талаб этилади. Унга қуйидаги буйруқларни киритиш билан эришилади:

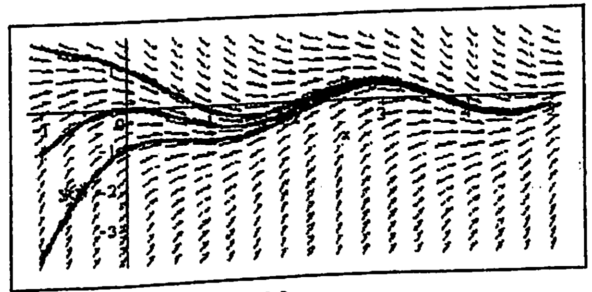
$>with(DEtools):$

$$>phaseportrait\left(\cos(x)\left(\frac{d^3}{dx^3}y(x)\right)-\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right)+\pi\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)=y(x)-x, y(x), x=-2.5..1.4, [[y(0)=1, D(y)(0)=2, D^{(2)}(y)(0)=1]], y=-4..5, stepsize=0.05\right):$$

$$>phaseportrait\left([D(x)(t)=y(t)-z(t), D(y)(t)=z(t)-x(t), D(z)(t)=x(t)-y(t)\cdot 2], [x(t), y(t), z(t)], t=-2..2, [[x(0)=1, y(0)=0, z(0)=2]], stepsize=0.05, scene=[z(t), x(t)], linecolour=\sin\left(\frac{t\pi}{2}\right), method=classical_{foreuler}\right):$$

$$>phaseportrait(D(y)(x)=-y(x)-\sin(2*x), y(x), x=-1..5, [[y(0)=0], [y(0)=1], [y(0)=-1]], colour=black, linecolor=black);$$

Буйруқларни бажарилиш натижаси компьютер экранида пайдо бўлади ва у 2.20-расмда тасвирланган.



2.20-расм

2. “odeadvisor” буйруғи дифференциал тенглама турини аниқлайди.

>eq:=diff(y(x),x)+p(x)y(x)=q(x)y^2(x);==>$\frac{dy(x)}{dx}+p(x)y(x)=q(x)y^2(x)$

> odeadvisor(eq);==>[Bernoulli].

3. “dsolve(eq)” буйруғидан eq тенгламани ечишда фойдаланилади:

> leq:=diff(y(x),x)+y(x)=sin(x):

> dsolve(leq);==>$-\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{1}{2}\sin(x)+e^{-x}C.$

4. “dsolve({leq,y(0)=1})” буйруқ ёрдамида leq тенглама y(0)=1 бошланғич шартда ечилади:

> dsolve({leq,y(0)=1});==>$y(x)=-\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{1}{2}\sin(x)+\frac{3}{2}e^{-x}.$

5. “parametricsol(req)” буйруқ req ечимни параметрик кўринишда топади:

$>req := diff(y(x),x)=\frac{x+y(x)}{x-y(x)};$

> parametricsol(req);==>$\left\{\left[x(T)=\frac{e^{\arctan(T)}C(T+1)}{\sqrt{(T^2+1)}}, y(T)=\frac{e^{\arctan(T)}C(T-1)}{\sqrt{(T^2+1)}}\right]\right\}.$

6. "particularsol" буйруқ умумий ечимни изламасдан хусусий ечимни излаш вазифасини бажаради:

$>ode := diff(y(x),x) = 1 + y^3(x):$

$>$ particularsol(ode,y(x));$\Longrightarrow y(x) = -1,\ y(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} I\sqrt{3}.$

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} I\sqrt{3}.\ \frac{1}{3}\ln(y(x)+1) - \frac{1}{6}\ln(y^2(x) - y(x) + 1) +$$

$$+\frac{1}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{3}(2y(x)-1)\sqrt{3}\right) - x + C = 0.$$

7. Юқоридаги буйруқнинг бажарилиши давоми

$>$ ode1:=diff(y(x),x)+y(x)+y^2(x) =x^{-1}:

$>$ odeadvisor(ode1);==>[rational,Riccati]

$>$ ans:=riccatisol(ode1);==>$\left\{y(x) = \frac{e^{-x}}{x(e^{-x} + Cx - xEi(1,x))} + \frac{1}{x}\right\}.$

8. "odetest" буйруқ эса дифференциал тенглама ечимининг тўғрилигини текшириш вазифасини бажаради:

$>$ odetest(ans,ode1);==>0.

Бу рўйхатни яна давом эттириш мумкин, албатта. Юқорида баён қилинган тизимлардаги тенгламаларни амалий ечишга бағишланган бунчалик кўп воситалар биринчи тартибли дифференциал тенгламалардан ўтказиладиган назарий ва айниқса, семинар дарслари мазмунига муҳим тузатишлар киритиш имкониятини беради. Маърузаларда назарий масалаларга кўпроқ эътибор қаратиш мақсадга муофик. Хусусан, "тенглама ечими" ва "интеграли" тушунчасини кенгрок таҳлил қилиш мумкин. Ечим мавжудлиги ва ягоналиги муаммосини, махсус ечим муаммоларини батафсил кўриб чиқиш имкони мавжуд. Бир жинсли, чизиқли, Бернулли, Риккати каби биринчи тартибли тенгламалар хоссаларини уларни амалий ечишга эътиборни кучайтирмасдан янада батафсил ўрганиш мумкин.

Мисоларни ечиш семинар дарсларига тўла ўтказилиб, компьютер ёрдамида амалга оширилиши зарур. Шу билан бирга, тайёр ҳолдаги масалаларнигина эмас, балки уларни келтириб

чиқариш зарур бўлган амалий масалаларни ҳам таҳлил қилиш мақсадга мувофиқ. Бундай масалалар мустақил таълим мавзуларида ҳам инобатга олиниши керак.

Дифференциал тенгламалар фан дастурида навбатдаги катта мавзу юқори тартибли тенгламаларга бағишланади. Maple тизими бу бўлимдаги масалаларни ечиш учун кенг кўламдаги дастурий воситалар мажмуасини таклиф этади. Бу мажмуага айрим ҳолларда ўзгартиришлар билан юқорида кўрсатиб ўтилган дастурлар киритилган.

1-мисол

$>$ eq:=diff(y(x),x\$2)+2diff(y(x),x)+y(x)=e^{-x};==>$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y(x) = e^{-x}.$

$>$ bc:=y(0)=1,D(y)(0)=0: буйруқ билан бошланғич шартлар киритилади:

$>$ dsolve({eq,bc});==>$y(x) = e^{-x}\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$ - Коши масаласининг ечими.

2-мисол

$>$ eq1:=diff(y(x),x,x)+y(x)=sinx; ==>$\frac{d^2y}{dx^2} + y(x) = \sin x$

$>$ bc:=y(0)=0,y(2)=0: буйруқ билан чегаравий шартлар киритилади:

$>$ dsolve({eq1,bc}); ==>$y(x) = \frac{x}{2}\cos x$ - чегаравий масала ечими.

Пакетда юқори тартибли дифференциал тенгламаларга қўйилган бошқа кўринишдаги масалаларни ечиш учун ҳам кенг кўламдаги дастурий воситалар мажмуаси таклиф этилади. Иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларга қўйилган чегаравий масалалар алоҳида ўрин тутади. Уларни ўрганиш қатор махсус функцияларнинг киритилишига замин бўлди. Maple тизимида уларга мос чегаравий масалалар келтирилган. Шундай тенгламалардан айримларини келтириб ўтамиз.

3-мисол

> ode:=x^2diff(y(x),x,x)+xdiff(y(x),x)+(x^2-n^2)y(x); ==>

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y(x)$$

Қуйидаги буйруқ билан

> odeadvisor(ode);==> [Bessel] тенглама типи аниқланади.

> dsolve(ode);==>$y(x)$ = C1*Bessel$J(n;\ x)$+C2*Bessel$Y\ (n;\ x)$.

4-мисол

> ode1 := diff(x*(1-x^2)*diff(y(x),x),x)-x*y(x)=0; ==>

$$\frac{d}{dx}\left[x(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]-xy(x)=0$$

> odeadvisor(ode1); ==>[_elliptic, _class_I]

> dsolve(ode1); ==>$y(x)$ = C1Elleptic$K(x)$ + C2Elleptic$CK(x)$.

Ихтиёрий тартибли тенгламаларни ечиш ва тадқиқ қилиш учун жуда кўп турли опциялар билан dsolve буйруғидан фойдаланилади. Бу эса шундай тенгламалар билан боғлиқ бўлган турли масалаларни аналитик ва сонли ечиш имконини беради. Шулардан айримларини келтирамиз.

5-мисол

> eq:= diff(y(x),x,x)+2diff(y(x),x)+y(x)=x; ==>$\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+y(x)=x;$

> bc:= y(0)=0, D(y)(0)=0; - бошланғич шартлар;

> dsolve({eq,bc},y(x),method=laplace); ==> $y(x)=e^{-x}(x+2)+x-2$ - бу Лаплас алмаштиришидан фойдаланиб, Коши масаласини ечишдир.

6-мисол. DFactorsols – тенглама ечимини интегралловчи кўпайтувчи усулидан фойдаланиб қуриш.

> eq3:=(x-1)diff(y(x),x,x)-(1+2x)diff(y(x),x)+4y(x)=x; ==>

$$(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}-(1+2x)\frac{dy}{dx}+4y(x)=x$$

> DFactorsols(eq3,y(x)); ==>$\left[[e^{2x}(2x-5),2x^2+1],-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x\right]$ - ички қавслар ичида мос бир жинсли тенгламанинг иккита ечими бу қавслар ташқарисида эса бир жинсли бўлмаган тенгламанинг

хусусий ечими.

Хуллас, Maple тизимидан фойдаланиш, талабалар ҳаракатдаги дастур доирасида ечиши керак бўлган юқори тартибли тенгламаларни ечиш жараёнини сезиларли даражада қисқартиради. Шу билан бирга, Maple тизими бир ҳаракатда мос процедуралар ёрдамида бир турдаги масалалар синфини ечиш имкониятини беради. Бундай процедуралар Maple тизими маълумотномасида ёзилган. Буларнинг барчаси амалдаги дастурда мавжуд юкори тартибли тенгламаларни ўрганишга сарфланадиган вақтни сезиларли қисқартиришга шароит яратади.

Худди шундай хулосаларни биринчи тартибли тенгламалар системаси учун ҳам айтиш мумкин. Айниқса, бу хулосалар ўзгармас коэффициентли чизикли дифференциал тенгламаларга хосдир. Иккита теорема уларни амалда ечиш учун назарий база ҳисобланади.

Улардан биринчиси $y'=Ay$ чизиқли бир жинсли тенглама умумий ечими структурасини аниқлайди. Бу структура A матрица хос сонларини каррали ёки каррали эмаслиги, ҳақиқий ёки комплекслиги кабиларга кескин боғлиқ. Маъруза ва семинар дарсларида ушбу тафсилотларни таҳлил қилишга кўп вақт сарфланади.

Иккинчиси – $y'=Ay+f(x)$ чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими структурасини мос бир жинсли тенглама умумий ечими билан бир жинсли бўлмаган тенглама хусусий ечимининг йиғиндиси кўринишида аниқлайди. Одатда, хусусий ечимни топиш жараёни ҳам етарли даражада кўп вақтни талаб қилади. Ўзгармасни вариациялаш усули билан қуриладиган хусусий

Maple тизимидаги мос дастур масалани matrixDE буйруғи ёрдамида ечади. Шу билан бирга, тизим хатто тенгламалар системасини ёзишни хам талаб этмайди. x эркли ўзгарувчи, A матрица ва f функцияни кўрсатиш кифоя.

7-мисол

> A:=Matrix(3,3,[-2,1,-2,-1,-1,-1,-1,0,-1]);
f:=Matrix(3,1,[x,0,x]);==>.

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad f := \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}.$$

> sol:= matrixDE(A,f,x); ==>

$$sol := \left[\begin{bmatrix} 1 & e^{-2x} & e^{-2x}x \\ 0 & 2e^{-2x} & (2x+3)e^{-2x} \\ -1 & e^{-2x} & (x+1)e^{-2x} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x & \frac{1}{2}(1-x) & \frac{1}{4}x^2 \end{bmatrix}\right].$$

Бу ерда олинган ечим мос бир жинсли тенгламанинг чизиқли эркли ечимларидан тузилган матрица ва берилган бир жинсли бўлмаган тенглама хусусий ечимларидан тузилган вектор йиғиндисидан иборат. $A=A(x)$ бўлган ҳолда ҳам худди шундай процедура зарур ўзгаришлар билан амалга оширилади. Бу борадаги барча маълумотларни Maple тизимидаги маълумотномадан топиш мумкин.

Маълумки, ўзгармас коэффициентли тенгламалар ситемаси учун Коши масаласини ечишда фундаментал ечимлар системаси матрицаси сифатида e^{Ax} экспоненциал матрицадан фойдаланиш мақсадга мувофиқ. Maple тизимида у MatrixExponential буйруғи билан LinearAlgebra пакетидан топилади.

8-мисол

> B:=Matrix([[0,1],[-1,0]]; ==> $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

> MatrixExponential(B,x);==>

$$\begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}.$$

Агар дифференциал тенглама ечилиши жараёни у ёки бу маънода кенгроқ таҳлил қилинишни талаб этилаётган бўлса, infolevel[dsolve]:=level тизимли буйруғидан фойдаланиб, ечиш жараёни ҳақида барча маълумотларни, ҳатто қандай алгоритмдан

фойдаланишини билиш мумкин. Шу билан бирга, level қийматини 0 дан, то 5 гача танлаш мумкин.

9-мисол

> eq := x^2*(diff(y(x), x, x))+x*(diff(y(x), x))+(1-x^2)*y(x) = 0:

> infolevel[dsolve] := 2; dsolve(eq); ==>

Methods for second order ODEs: _ Trying classification methods _
trying a quadrature checking if the LODE has constant coefficients checking if the LODE is of Euler type trying a symmetry of the form [_ = 0; _ = *F*(*x*)] checking if the LODE is missing 'y'

-> Trying a Liouvillian solution using Kovacic's algorithm

<- No Liouvillian solutions exists -> Trying a solution in terms of special functions:

-> Bessel

<- Bessel successful

<- special function solution successful

$y(x)$ = C1Bessel*I*(*I*; *x*) + C2Bessel*K*(*I*; *x*):

Кўринадики, масалани тақрибий ечишда ҳар бир усулнинг муносиблиги жуда оддий аниқланади, яъни усулнинг муносиблиги унинг яқинлашиш тезлиги ва хатолигини баҳолаш орқали аниқланади. Maple тизимида турли сонли ва тақрибий аналитик усуллар келтирилган. Улардан мос опциялар билан dsovli буйруғидан фойдаланилади. Ечимнинг абсолют хатолиги миқдорини abserr=aerr, хатолик миқдорини эса miner=vain параметри орқали бериш мумкин. Мисол келтирамиз.

10-мисол ==>

>ode2:=(x^2-1)*diff(y(x),x,x)-7*x*diff(y(x),x)+6*y(x)=0;

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}-7x\frac{dy}{dx}-6y(x)=0;$$

> ic:=y(0)=1,D(y)(0)=0: - бошланғич шартлар.

> Order:=10; ==> Order:=10

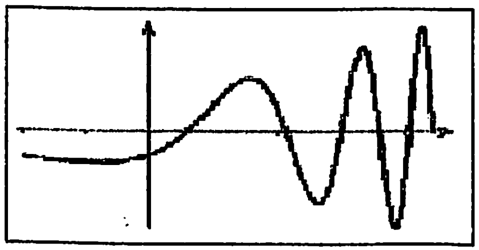
> dsolve({ode2,ic,y(x)},series,Order=10); ==>

ans:= $y(x)=1-3x^2+(9/2)x^4+(1/2)x^6-(3/56)x^8+O(x^{10})$.

Шу билан бу тизимда танланган процедурани мукаммаллаштириш ҳатто ўзиникини яратиш имкони мавжуд. Бунинг учун Maple тизимида зарур дастурий воситалар ҳам бор.

Олинган натижаларни ҳар доим мос график ва расмлар орқали намойиш этиш мумкин. Айниқса, маъруза ёки амалий машғулот дарсларида татбиқий масалалар ечилаётганда бундай вазият самарали натижа беради. Бундан кўриниб турибдики, дифференциал тенгламаларни тақрибий ҳамда аналитик ечиш усулларини алоҳида олиб боришга ҳожат ҳам йўқ.

Maple тизимида ечим, яъни ҳисоблаш натижаларини визуаллаштириш етарли даражада хилма-хил. Phaseportrait буйруғи тенглама расмини фазовий кўринишида беради (2.21-расм).



2.21-расм

Шу билан бирга, numeric опциясидан фойдаланиб, тенглама ечими тақрибий топилади.

11-мисол

```
>p:=dsolve(diff(y(x),x,x)-(diff(y(x),x))+exp(x)*y(x)=0,
y(0)=-1,(D(y))(0)=1,y(x),type=numeric):
>odeplot(p,[x,y(x)],-2..4.45,labels=[, ],colour=black,
thickness=3):
```

Maple тизими фойдаланувчиси оддий дифференциал тенгламалар ҳамда хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар интегралларини таҳлил қилишда катта имкониятларга эга. Plots3D дастурий пакет ёрдамида сиртларни турли томонлардан қараб таҳлил қилиш мумкин. Динамик системаларни таҳлил қилишда материални анимацион кўринишда тасвирлаш мумкин

ва бунинг ёрдамида кузатилаётган жараёндаги ўзгаришларни намойиш қилиш мақсадга мувофиқ.

Юқорида айтилганлардан, Maple тизимидан фойдаланишда оддий дифференциал тенгламаларни аниқ ва тақрибий ечиш усулларини битта маъруза курсида ёритиш мумкинлиги келиб чиқади. Методик нуқтаи назардан қараганда, материални баён қилишнинг бундай ёндашуви, масалан, аниқ ечимни топиб бўлмаганда тақрибий ечимни топишга ўтиш ва қўйилган хатони баҳолаш каби ёндашувлардан табиийроқдир. Бунинг устига материални баён қилишнинг бу усулида вақт сезиларли даражада қисқаради.

Maple тизимидан фойдаланиш семинар дарсларини ўтказиш методикаси, унинг мазмуни, шу билан бирга, талабаларнинг мустақил иши мазмунини тубдан ўзгартириб юборади. Масала ечишнинг бундай методикасида талаба жуда кўп ортиқча ҳисоблашлардан халос бўлади, унда дифференциал тенгламалар ва уларнинг ечимлари хоссаларини таҳлил қилиш имконияти туғилади.

II боб бўйича хулосалар

Маъруза ўқилаётганда муаммоли вазиятларни юзага келтиришда танланаётган мисол ёки масаладаги мантиқий тушунчаларни қанчалик боғлиқлигига эътибор бериш долзарб саналади.

1. Муаммоли таълим ва муаммоли математик масалаларнинг ўзига хос жиҳатларига аниқлик киритилди. Бунда, муаммоли таълим ва муаммоли математик масалаларнинг бир-биридан ўзига хос бўлган фарқи ва математикани ўқитишдаги биргаликда қўлланилишининг аҳамияти муҳимдир.

2. Муаммоли вазиятларни келтириб чиқариш асосида геометрик масалалар ва дифференциал тенгламаларни ўқитиш методикаси асосида “Чегаравий масалалар” мавзусини математик

пакетлардан фойдаланиб ўқитиш методикаси ишлаб чиқилди ва шу асосида битта дарс ишланмасининг намунаси берилди.

3. Муаммоли математик масалаларни ўқитишда компьютер технологияларининг имкониятларига аниқлик киритилди ва геометрик масалаларни, оддий дифференциал тенгламалар системасини компьютер технологиялари воситасида ўқитиш ҳамда дифференциал тенгламалар мавзуларини MathCAD, MatLab, Maple, Mathematica муҳитидан фойдаланиб ўқитиш методикаси ишлаб чиқилди. Ҳақиқатан ҳам, муаммоли таълим имкониятларидан фойдаланиб муаммоли математик масалаларни ўқитишда компьютер тизимларидан фойдаланиш мутахассисларнинг математик тайёргарлиги сифатининг кескин кўтарилишини таъминлайди.

4. Талабалар мустақил креатив фаолиятини ривожлантиришда муаммоли масалалардан фойдаланишнинг педагогик самарадорлигини аниқлаш бўйича ўтказилган педагогик синов–тажриба ишлари натижалари таҳлил қилинди ҳамда шу асосида қуйидаги методик тавсиялар берилди:

а) математика курсининг барча бўлимларида талабаларнинг илмий тадқиқот фаолиятини шакллантириш учун муаммоли масалалардан кенг фойдаланиш ва уларни ўқув жараёнига татбиқ этиш мақсадга мувофиқдир.

б) дифференциал тенгламаларни ечишда MatLab ва MathCAD дастурий тизимларидан унумли ва кенг фойдаланиш самарадорликни таъминлайди.

в) курсларнинг дастури ва ўқув соатлари қайта кўриб чиқилиши лозим.

ХУЛОСА

Олий таълим муассасалари талабаларида мустақил креатив фаолиятни ривожлантириш жараёнида муаммоли масалалардан фойдаланиш бўйича олиб борилган илмий изланишлар натижасида қуйидаги хулосалар тақдим этилади:

1. «Олий математика» фанини ўқитишда муаммоли математик масалалардан фойдаланиш талабаларнинг креатив ва билиш фаолияти ҳамда мантиқий фикрлаш қобилияти ривожига ижобий таъсир этиши аниқланди. Ушбу вазиятлар муаммоли математик масалалардан фойдаланиш асосида олий таълим муассасалари талабаларининг мустақил креатив фаолиятини ривожлантириш методикасини такомиллаштириш бўйича таклифлар ва тавсиялар ишлаб чиқиш имконини берди.

2. Муаммоли математик масалалардан фойдаланиш орқали ҳосил бўладиган муаммоли вазиятлар синфларга ажратилди, уларнинг синфларга ажратилиш мезонлари (муаммоли математик масалаларнинг қийинлик даражасига ва ўқув материалларининг хусусиятларига асосан) аниқланди. Талабаларнинг креатив фаолиятини ривожлантиришга йўналтирилган муаммоли вариатив математик масалалар тўплами ишлаб чиқилди.

3. «Олий математика» фанини муаммоли математик масалалардан фойдаланган ҳолда ўқитиш бўйича методик тавсиялар ишлаб чиқилди. Жумладан, муаммоли математик масалаларни ўқитишда компьютер технологиясининг ўрни ва аҳамияти кўрсатиб берилди, муаммоли ёндашув асосида талабалар креатив фаолиятини ривожлантириш бўйича «Олий математика» фанининг оддий дифференциал тенгламалар системаси ҳамда геометрик масалаларни MathCAD, MatLab, Maple, Mathematica каби математик пакетлардан фойдаланиб ўқитиш методикаси такомиллаштирилди.

4. Педагогик тажриба-синов натижаларини математик статистик метод асосида қайта ишлаш орқали «Олий математика»

ўқув фани мавзуларини ўқитишда муаммоли математик масалаларни қўллаш самарадорлиги анъанавий ўқитишга қараганда 9 фоизга ошиши ва муаммоли математик масалалар талабаларнинг креатив ва билиш фаолиятига ижобий таъсир кўрсатиши исботланди.

5. Ўтказилган назарий изланишлар ва экспериментал тадқиқотлар асосида талабаларда мустақил креатив фаолиятни ривожлантириш жараёнларида муаммоли масалалардан фойдаланиш бўйича қуйидаги методик тавсиялар ишлаб чиқилди:

– «Олий математика» ўқув фанининг барча бўлимларида талабаларнинг илмий тадқиқот фаолиятини шакллантириш учун муаммоли масалалардан кенг фойдаланиш ва уларни ўқув жараёнига татбиқ этиш мақсадга мувофиқ;

– талабалар мустақил креатив фаолиятини ривожлантиришда «Олий математика» ўқув фанининг дифференциал тенгламалар ва геометрияга оид мавзуларини MatLab ва MathCAD дастурий воситаларидан фойдаланиб ўқитиш самаралидир.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

1. Ўзбекистон Республикаси Конституцияси – Т: "Ўзбекистон", 1998. – 48б.
2. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947 сон "Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида"ги Фармони. www.lex.uz.
3. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 16 февралдаги ПФ-4958-сонли "Олий ўқув юртидан кейинги таълимни янада такомиллаштириш тўғрисида"ги Фармони. www.lex.uz.
4. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909 сон "Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида"ги Қарори. www.lex.uz.
5. Мирзиёев Ш. Буюк келажагимизни мард ва олижаноб халқимиз билан қурамиз. – Тошкент: "Ўзбекистон" НМИУ, 2017. – 488 б.
6. Абдуллаева Б.С. Фанлараро алоқадорликнинг методологик-дидактик асослари (ижтимоий-гуманитар йўналишлардаги академик лицейларда математика ўқитиш мисолида): пед. фан. докт. дисс.автореф. – Тошкент, 2006. – 49-б.
7. А.А.Абдуқодиров, Ф.Отабаева, Креатив тасаввур ва уни ривожлантиришнинг интеллектуал қуроллари. - Тошкент: "Тафаккур қаноти", 2014. – 134 б.
8. Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. – М.: МЦНМО, 2001.– 127с.
9. Айзекс Р. Дифференциальные игры. – Москва: Мир, 1967. – 480 с.
10. Алихонов С. Математика ўқитиш методикаси. – Тошкент, 1992. – 200 б.
11. Андервуд Д. Нимага математикани ўрганиш керак? // Фан ва турмуш. – Тошкент, 2014.–№3-4.–Б.31-33.
12. Арипов М, Ҳайдаров А., Информатика асослари. – Тошкент: Ўқитувчи, 2002. – 432 б.
13. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Москва: Наука, 2012. –344 с.

14. Архангельский С.И. Учебный процесс в высшей школе, его закономерные основы и методы. – М.: Высш.шк., 1980. – 368 с.

15. Атаханов Р. Математическое мышление и методика определения уровня его развития / Под ред. В.В. Давыдова. – Рига: Эксперимент,2000. –208 с.

16. Бабанский Ю.К. Ҳозирги замон умумтаълим мактабларида ўқитиш методлари. – Тошкент.: Ўқитувчи, 1990. – 342 б.

17. Бегимқулов У.Ш., Адашбоев Ш.М., Исянов Р.Г., Бабаходжаев З.М. Электрон педагогика асослари (методик қўлланма). – Тошкент, 2011. – 60 б.

18. Беляева О.П., Бучнева Е.В., Моргунова А.Ю. Электронное учебно-методическое пособие "Функциональный метод решения уравнений и неравенств" // Гаудеамус, 2013.– №2.–Б. 60-64.

19. Бережнова В., Краевский В.В. Основы учебно-исследовательской деятельности студентов. –Москва: Наука, 2014.–128 с.

20. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Сборник задач и упражнений по теории игр. –Санкт-Петербург: Лань, 2014.–120 с.

21. Bloom, B. S., etal. (1994). Excerpts from the "Taxonomy of educational objectives, the classification of educational goals, handbook I: Cognitive domain." In L. W. Anderson & L. A. Sosniak (Eds.), Bloom's taxonomy: A forty-year retrospective. Chicago: University of Chicago Press.

22. Боровских А.В. Игра как социальная и педагогическая проблема // Вестн. -Моск.ун-та. Сер.20. Педагогическое образование. – Москва: 2014. – №4. – Б. 3-14.

23. Бощенко Т.В., Фокина Н.И. Образовательное соправодение одаренных студентов в условиях инновационного образования // Геом. и графика. 2013.–№ 3-4. – С. 467-476.

24. Брунер Дж. Психология познания. – М.: Прогресс, 1977.– 96 с.

25. Брушлинский А.В. Избранные психологические труды. – Москва: Институт психологии РАН, 2006. – 34 с.

26. Бурмистрова Е.Г. Проблемы развития критического мышления студентов в образователном процессе вуза // Интеграция математической и методической подготовки студентов в педвузе: Сборник научных трудов. – Саранск, 2006. – С.66-69.

27. Воистинова Г.Х., Солощенко М.Ю. Обучение решению

задач на построение с практическим содержанием // Фундам. ислед. -2014. – №3. – С. 817-821.

28. Выготский Л.С. Педагогическая психология / Под ред. В.В. Давыдова. – М.: Педагогика-Пресс, 1996. – 536 с.

29. Гайбуллаев, Н.Р. Дырченко И.И. Развитие математических способностей учащихся: методическое пособие для учителей / Н.Р. Гайбуллаев, И.И.Дырченко, – Т.: Ўқитувчи, 1988. –248 с.

30. Гальперин П.Я. Введение в психологию: учеб. пособие / П.Я. Гальперин; Ред., предисл. и коммент. А.И. Подольского. 2-е изд. – М.: Университет, 2000. –330 с.

31. Гилфорд Дж. Три стороны интеллекта // Психология мышления: сб. переводов / под ред. А.М.Матюшкина. – М.: Прогресс, 1965. – С. 433-456.

32. Гольдштейн У.Л. Подготовка студентов-учителей математики с использованием исследовательского метода и информационных технологий // Математика. Образование: материалы международной конференции, Чебоксары, 2013.– Б.46-51.

33. Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. Учебник для вузов. – СПб.: Питер, 2004. – С. 539.

34. Горюнова Н.Б., Дружинин В.Н. Операциональные дескрипторы когнитивного ресурса и продуктивность решения тестовых задач и задач-головоломок // Психологический журнал, 2001. Т.22. –№4. – 21 с.

35. Гурский Д.А., Турбина Е.С. Вычисления в Mathcad 12. – СПб.: Питер, 2006. – С. 544.

36. Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж. Пути и лабиринты. – Москва: МИР, 1986. – С. 432.

37. Давыдов В.В. Проблемы развивающего обучения: опыт теоретического и экспериментального психологического исследования. – М.: Педагогика, 1986. – 240 с.

38. Дегтярев Е.С. Психологические факторы развития контекстно-понятийной памяти субъекта в процессе когнитивной деятельности: Автореф.дис.канд.психол.наук.Красноярск,2004.–23 с.

39. Джураев Р.Х. Информатизация образовательного учреждения // Узлуксиз таълим. – Ташкент, 2012. – № 1. – С. 42–46.

40. Дубовицкая Т.Д. К проблеме диагностики учебной

мотивации //Вопросы психологии. –Москва, 2005. –№1. –С. 73-78.

41. Дьяконов В.П. MATLAB 6/6.1/6.5+Simulink 4/5.Основы применения. Полное руководство пользователя.– М.: Солон, 2002.–768с.

42. Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. Изд. 3-е, испр.и доп. – М.: Физмат.лит, 2007.–448с.

43. Егоров А.И. Теорема Коши и особые решения дифференциальных уравнений. – Москва: Физмат.лит, 2008. –256с.

44. Еровенко-Риттер В.А.Философско-образовательное значение математики // Педагогика.– Москва, 2004.– №5.– С. 35-39.

45. Задорожная О.В., Кочетков В.К. Научный результат как конечная цель учебно-научных проектов // Математика. Образование: Материалы международной конференции, Чебоксары, 2013.–С.252-253.

46. Зверева М.И. Формирование информационно-мировозренческой культуры учащихся // Педагогика. – Москва, 2005.–№8.–С.45-50.

47. Злоцкий Г.В. О психолого-педагогической и методико-математической подготовке студентов математиков университетов к профессионально-педагогической деятельности. // Таълим муаммолари. – Тошкент, 2000. – №2. – С.28-30.

48. Зимина О.В. Проблемное обучение высшей математики в технических вузах // Математика в высшем образовании. – Москва, 2006.–№4.– С.55-77.

49. Зимина О.В. Печатные и электронные учебные издания в современном высшем образовании: теория, методика, практика. – М.: Изд-во МЭИ, 2003.– 245 с.

50. Зимина О.В. Дидактические аспекты информатизации высшего образования // Вестник МГУ.Сер.20, 2005.–№1.– С.17-66.

51. Зимина О.В., Кириллов А.И., Сальникова Т.А. Высшая математика (Решебник).–М.: Физматлит, 2004.– 260 с.

52. Зимина О.В., Кириллов А.И. Обучающий компьютерный пакет РЕШЕБНИК. ВМ. www.AcademiaXXI.ru.Гос.регистрация НТЦ Информрегистр номер 0320301148.

53.Зубова Е.А., Смирнов Е.И. Цепочки математических задач

учебно- и научно-исследовательского характера в составе фундирующих комплексов//Яросл. пед.вестн.,2013.–№1.– С.32-36.

54. Иванов А.О., Ильюпко Д.П., Носовский Г.В., Тужилин А.А., Фоменко А.Т. Компьютерная геометрия практикум. Учебное пособие. –М.: БИНОМ. Лаборатория знаний.2010.–390 с.

55. Икромов Ж. Мактаб математика тили. – Тошкент: Ўқитувчи, 1977.– 195 б.

56. Иноятов У., Муслимов Н., Рўзиева Д.И., Усмонбоева М.Ҳ. Педагогика / Нопедагогик олий таълим муассасалари учун мўлжалланган дарслик. – Т.: “Фан” нашриёти, 2012. – 246 б.

57. Кадиров Б.Р., Сакеллион Д.Н., Султонходжаева Н.Д.,Мухамеджанов Н.З., Каримбердиев Д.Р. // Журнал неврологии и психаметрии имени С.С.Карсакова. 2006. – №3. – С.39-47.

58. Кагосян А.С. Гуманистический подход к развитию мышления студентов в вузе: Автореф. дис. канд. пед. наук. Сочи, 2000. – 24 с.

59. Капица П.Л. Эксперимент, теория, практика. Серия: "Наука, мировоззрение, жизнь". – Москва: Наука, 1987.–496с.

60. Кетков Ю.Л., Кетков А.Ю., Шульц М.М. MATLAB7: программирование, численные методы. – СПБ.: БХВ-Петербург, 2005.–752с.

61. Кетков Ю.Л., Кузнецов А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. MathLab versus MathCAD // Математика в высшем образовании. 2005. –№3. – С.27-52.

62. Кирьянов Д.В. Mathcad 12. –СПб.: БХВ-Петербург, 2005.– 576 с.

63. Кирсанов М.Н. Графи в Maple. Задачи, алгоритмы, программ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 168 с.

64. Колмогоров А.К. О профессии математика. Издание третье, переработанное. - М.: изд-во Московского университета, 1988. – 32 с.

65. Коменский Ян Амос. Избранные педагогические сочинения. – М.: Педагогика, 1982. – 420 с.

66. Корнилова Т.В., Тихомиров О.К. Принятие интеллектуальных решений в диалоге с компьютером. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 191с.

67. Колягин Ю.М., Оганесян В.А. Учись решать задачи. //

пособие для учащихся 7-8 классов.–М.: Просвещение, 1980.–105 с.

68. Крутецкий В.А. Основы педагогической психологии. – М.:Просвещение, 1972. – 253 с.

69. Кудрявцев Е.М. GPSSWorld. Основы имитационного моделирования различных систем.–М.:ДМК Пресс, 2004.–320с.

70. Кудрявцев Л.Д. Современная математика и ее преподавание. –М.:Наука,1980.–275с.

71. Кудрявцев Л.Д., Кириллов А.И., Бурковская М.А., Зимина О.В. О тенденциях и перспективах математического образования // Высшее образование сегодня. 2002. – №1. – С. 58-66.

72. Кузьмин М.Н. Образовательный процесс в России и Европе в Новое время: антропологический аспект // Вопр. филос. 2011.–№4.– С.53-61.

73. Курлянова Н.В. Педагогические средства развития творческого мышления студентов: автореф.дис.пед.психол.наук. - Магнитогорск, 2005. – 22с.

74. Лернер А. Я., Розенман Е. А. Оптимальное управление. Энергия, – Москва, 1970. – 360 с.

75. Лернер И.Я. Проблемное обучение. – М.: Знание, 1974. – 64 с.

76. Лернер И.Я. Поисковые задачи в обучении как средство развития творческих способностей // Научное творчество / Под ред. С.Р. Микулинского и др. – М.: Просвещение, 1982. – 176 с.

77. Лернер И.Я., Скаткин М.Н. Современный урок. – М.: Педагогика, 1992. – 112 с.

78. Мавлонов А., Абдалова С., Алламбергенова М. Ижтимоий-гуманитар фанлар мавзулари ўқув мақсадларини аниқлаштириш ва уларни топшириқларга айлантириш. Услубий тавсиянома. – Тошкент, 2013. – 100 б.

79. Маматов М.Ш. Математик иқтидорли ўқувчиларни ўқитишда масаланинг аҳамияти ва уларни гуруҳларга ажратиш // Узлуксиз таьлим.– Ташкент, 2002.– №2. – Б. 67-75.

80. Маматов М.Ш. Математика дарсларида иқтисодиёт масалалари ва уларни гуруҳларга ажратиш // Узлуксиз таьлим. – Тошкент, 2002. – №4. – Б. 12-21.

81. Маматов М.Ш. Ўқувчиларни актив иш фаолиятига жалб қилишда ахборотларнинг роли // Республика Таълим маркази / Республика илмий-амалий конференцияси материаллари. – Тошкент, 2002. – Б. 14-15.

82. Маматов М.Ш. Математикалык пикирлеудин курамалык системалары // Қорақалпакистон муғаллими. – Нокус, 2002. . – №1-2. – Б. 41-46.

83. Маматов М.Ш. Ўқувчиларда математик тушунчаларни шакллантириш манбалари // Халқ таълими. – Тошкент, 2002. – №5. – Б. 71-75.

84. Маматов М.Ш. Математик таълимда идрок жараёнини ривожлантириш босқичлари // Халқ таълими. – Тошкент: 2003.– №2. – Б. 84 -88.

85. Маматов М.Ш. Таълимда кузатиш ва тажриба, индукция ва дедукция // Халқ таълими. – Тошкент: 2003. – №3. – Б. 79-81.

86. Маматов М.Ш. Ўқувчилар онгида математик тушунчаларни шакллантиришда мантиқ // Халқ таълими. – Тошкент, 2003. – № 4. – Б. 96-99.

87. Маматов М.Ш. Мактаб математика курсида мантиқ ва интуиция уйғунлиги // Халқ таълими. – Тошкент. 2003. – № 5. – Б. 120-124.

88. Маматов М.Ш., Махмудова Д.М. Масала тузиш ёрдамида талабалар мустақил креатив фикрлаш қобилятини ривожлантириш // Нанотехнология ва қайта тикланадиган энергия манбалари: муаммолар ва ечимлар. Республика илмий-амалий конференция материаллари. – Қарши, 2012. – Б. 258-260.

89. Маматов М.Ш., Махмудова Д.М. Способы и правила создания проблемных ситуаций в процессе развитие самостоятельного творческого мышления студентов // Математика ва уни замонавий педагогик технологиялар ёрдамида ўқитиш муаммолари / Республика илмий-амалий конференцияси материаллари. – Навоий, 2015.Т.1. – Б. 122-124.

90. Маматов М.Ш., Махмудова Д.М. Развитие самостоятельного аналитического мышления творческого мышления студентов при помощи решения игровых задач // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. – Москва, 2016. – №1. – С. 47-53.

91. Маматов М.Ш., Махмудова Д.М. Развитие самостоятельного аналитического мышления студентов при помощи решения проблемных игровых задач // Математика ва

111. Mahmudova D.M. Talabalarda mustaqil fikrlay olishni, ijodiy yondashishni, izlanishni, tahlil eta olishni shakllantirish // Физика фани муаммолари ва унинг ривожида истеъдодли ёшлар ўрни. Республика илмий-амалий конференцияси тўплами. РИАК-IX. – Тошкент: 2016.– Б. 368-371.

112. Махмудова Д.М. Талабаларда мустақил креатив фаолиятни ривожлантиришда муаммоли масалалардан фойдаланиш жиҳатлари. Монография. – Тошкент: Fan va texnologiya. 2017. – 164 б.

113. Mahmudova D.M., Mamatov M.Sh. Muammoli masalalar yordamida talabalarning mustaqil ijodiy faoliyatini rivojlantirish metodikasi. Uslubiy qollanma. O'zMU. –Тошкент, 2012. – 96 б.

114. Махмудова Д.М., Далабаев У., Каримходжаев А., Пяк П., Норбоев Т. Компьютер и сетевая работа в учебном процессе физического факультета НУУЗ // Таълим муассасаларида электрон ахборот-таълим муҳитини шакллантиришнинг долзариб масалалари. Республика илмий анжуманининг материаллари. – Тошкент, 2011. – С.246-248.

115. Мерлина Н.И. О математическом творчестве одаренных детей // Математика. Образование: Материалы международной конференции. – Чебоксары, 2009. – С. 223-224.

116. Митрохина С.В. Самостоятельная работа по решению математических задач как средство развития творческой активности учащихся 5-6 классов школ гуманитарного направления: Дис.канд.пед.наук. – М., 2000. – 167с.

117. Михайлова Н.В. Математическое знание и его экспликация в философии образования // Вестн. Моск.ун-та. Сер.20. Педагогическое образование. – Москва, 2014. – №2. –С. 45-55.

118. Новиков С.П., Тайманов И.А. Современные геометрические структуры и поля. – М.: МЦНМО, 2005.–312с.

119. Паничев С.А. Дедуктивный принцип обучения в высшем естественно-научном образовании // Педагогика. 2004. –№8. – С. 18-28.

120. Петров Н.Н., Петров Н. Никандр. О дифференциальной игре «казаки-разбойники» // Дифференц. уравнения. – Минск.: 1983. – Т. 19. – № 8. – С. 1366-1374.

121. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.Л.: ГИТТЛ,1952. –232с.

122. Петросян Л. А. Дифференциальные игры преследования. – Ленинград.: Изд-во ЛГУ, 1977.

123. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения / Д. Пойа; Пер. с англ. И.А. Вайнштейна; Под. ред. С.А. Яновской. 2-е изд., испр. – М.: Наука, 1975. – 464 с.

124. Пойа Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание / Д. Пойа; Пер. с англ. В.С. Бермана; Под ред. И.М. Яглома. 2-е изд., стереотип. – М.: Наука, 1976. – 448с.

125. Посицельская Л.Н. Математический эксперимент как поддержка доказательства при изучении математики в вузе // Математика в высшем образовании задачу. 2012. – №10. – С.43-48.

126. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976. – 392 с.

127. Прядехо А.А. Алгоритм развития познавательных способностей учащихся // Педагогика, 2002. –№3. – С. 8-15.

128. Пуанкаре А. Математическое творчество. // О науке. – Москва: Наука, 1989. – С.399-414.

129. Раемов М. Тушунчаларни шакллантиришнинг назарий асослари // Физика-математика ва информатика. 2002. №2.

130. Разумовский В.Г. Инновации в преподовании физики в школах зарубежом. – Новосибирск: РИЦНГУ, 2005. – 185 с.

131. Реньи А. Диалоги о математике. – Москва: Мир, 1980. – 376 с. – (В мире науки и техники).

132. Рензулли Дж.С., Рис М. Модель обогащающего школьного обучения: практическая программа стимулирования одаренности детей // Основные современные концепции творчества и одаренности. – Москва: Молодая гвардия, 1997. – 372 с.

133. Рубинштейн А.И. О некоторых моментах изложения раздела дифференциальные уравнения во втузовском курсе математики // Математика в высшем образовании. 2007. – №5. – С.57-64.

134. Рыблова А.К. Самостоятельная познавательная деятельность студентов. – Саратов, 1997. – 115 с.

135. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Москва: Иностранная литература, 1954.–552с.

136. Саранцев Т.И. Красота в математике, математика — в

120. Петров Н.Н., Петров Н. Никандр. О дифференциальной игре «казаки-разбойники» // Дифференц. уравнения. – Минск.: 1983. – Т. 19. – № 8. – С. 1366-1374.

121. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.Л.: ГИТТЛ,1952. –232с.

134. Рылова ... деятельность студентов. – Саратов, 1997. – 115 с.

135. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Москва: Иностранная литература, 1954.–552с.

136. Саранцев Т.И. Красота в математике, математика — в

красоте // Педагогика. 2004. –№3. –С. 24-31.

137. Сатимов Н.Ю., Маматов М.Ш. Об одном классе линейных дифференциальных и дискретных игр между группами преследователей и убегающих // Дифференц. уравнения. – Минск: 1990. – Т. 26. – № 9. – С. 1541-1551.

138. Сатимов Н.Ю.,Маматов М.Ш. Об одном классе линейных дифференциальных игр преследования и убегания// Труды Таш ГУ.–Ташкент: 1981.– №670.–С. 64-75.

139. Сатимов Н.Ю., Маматов М.Ш. О задачах преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих// ДАН УзССР.–Ташкент, 1983.– №4. –С.2-5.

140. Селькина Л.В. Решение нестандартных задач в начальном курсе математики как средство формирования субъекта учебной деятельности: Дис.канд.пед.наук. – Пермь, 2001. – 183 с.

141. Синг Дж.Л. Классическая механика. – М.: Физматлит, 1963. – 448 с.

142. Сираждинов С.Х., Матвиевская Г.П. Ал-Хорезми – выдающийся математик и астроном средневековья. – М.: Просвещение, 1983. – 220 с.

143. Сластенин В.А., Каширин В.П. Психология и педагогика. – М.: Изд. центр "Академия", 2003. –С.312-353.

144. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – 6 изд. – М.: Физматлит. 1958. – 473 с.

145. Студенова Т.Ю. Трансформация математических моделей в процессе эмпрической интерпретации // Вестн. Моск.ун-та. Сер.20. Педагогическое образование. – Москва, 2014. – №4. – С.89-98.

146. Темербекова А.Т. Методика преподавания математики. – М.: Владос, 2010. – 234 с.

147. Тўлаганов Т. Математика ўқитиш методикаси (маърузалар тўплами), – Т.: ТДПУ, 2011.

148. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. Иностранная литература. – Москва: 1962. – 352 с.

149. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Учебное пособие. Изд. 5-е. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. – 240 с.

150. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математике: пособие для учителей, методистов и пед. высших учебных заведений. – М.: Московский психол.-соц. ин-т: Флинта, 1998. – 217 с.

151. Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача. – М.: Просвещение, 1982. – 210 с.

152. Харламов И.Ф. Педагогика: учеб.пособие для студ. вузов, обучающихся по пед.спец. 4-е изд., доп. и перераб. – М.: Гардарики, 2000. – 517 с.

153. Холодная М.А. Психология интеллекта. Парадоксы исследования. – СПб.: Питер, 2002. – 272 с.

154. Хуторской А.В. Развитие одаренности школьников: методика продуктивного обучения. – М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 2000. – 320 с.

155. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. – М.: Наука, 1978. – 270 с.

156. Черняк А.А., Василец С.И., Богданович С.А. Информационные технологии в прподовании математических дисциплин // Бюл. лаб. мат. естественно-научн. образ. и информатиз. 2013.–№5.–С.39-42.

157. Шуруханова К. Становление культуры мышления студентов в процессе интеграции знаний: автореф. дис.канд.пед. наук. – Оренбург, 2003.–22 с.

158. Эльконин Д.Б. Введение в психологию развития. – М.: Тривола, 1994. – 164 с.

159. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – С.424.

160. Юзликаева Э.Р., Мадьярова С.А., Янбарисова Э.Э., Морхова И.В.. Теория и практика общей педагогики: учебник для направления бакалавриата область образования 110000 – Педагогика. ТГПУ, 2012.

161. Юнусова Д.И. Математикани ўқитишнинг замонавий технологиялари. – Тошкент: Фан ва технологиялар, 2011.–200 б.

162. Ғозиев Э. Психология. Ўқув қўлланма. – Тошкент: Ношир, 2014. – 352 б.

163. Andewood Dudley. What Is mathematics for? // Noticesofthe American Mathematical Society, 2010. – Vol. 57(5). – P. 601-607.

164. Arne D. The Cognitive Neuroscience of Creativity //

Psychonomic Bulletin Review. 2004. – Vol. 11(6). – P. 1011-1026.

165. Balota D.A., Spieler D.H. Word frequency, repetition, and lexicality effects in word recognition tasks: Beyond measures of central tendency // Journal of Experimental Psychology: General. 1999. – Vol. 128(1). – P. 32-55.

166. Billings Lora. Succeeding in undergraduate student research: A few helpful hints for advisors // PRIMUS:Probl., and Issues Math. Undergrad. Stud. 2013.23, – №6. – P. 798-804.

167. Bundesen C., Habekost T., Kyllingsbask S. A Neural Theory of Visual Attention: Bridging Cognition and Neurophysiology // Psychological Review. 2005. – Vol. 112(2). – P. 291-328.

168. Duncan J., Bundesen C., Olson A., Humphreys G., Chavda S., Shibuya H. Systematic analysis of deficits in visual attention // Journal of Experimental Psychology: General. 1999. – Vol. 128(4). – P. 450-478.

169. Duncan O., Seitz R.J., Kolodny J., Bor D., Herzog H., Ahmed A., Nevel F.N., Emslie P. A neural basis for general intelligence // Science. 2000, – Vol. 289. – P. 457-460.

170. Friedman N.P., Miyake A. Differential roles for visuospatial and verbal working memory in situation model construction // Journal of Experimental Psychology: General. 2000. –Vol. 129(1). – P. 61-83.

171. Heyes C. Four routes of cognitive evolution // Psychological Review. 2003. – Vol. 110(4). – P. 713-727.

172. Kane M.J., Engle R.W. Working-memory capacity and the control of attention: The contributions of goal neglect, response competition, and task set to Stroop interference // Journal of Experimental Psychology: General. 2003. –Vol. 132(1). – P. 47-70.

173. Klein S.B., Cosmides L., Tooby J., Chance S. Decisions and the evolution of memory: Multiple systems, multiple functions // Psychological Review.2002.–Vol. 109(2). – P. 306-329.

174. Lavie N., Hirst A., de Fockert J.W., Viding E. Load Theory of Selective Attention and Cognitive Control // Journal of Experimental Psychology: General. 2004. – Vol. 133(3). – P. 339-354.

175. Mamatov M.SH., Mahmudova D.M., Temurov S.U. A geometric construction of the strategy fleeing the player in person differential games // Dynamical system modeling and stability investigation / XVI International Conference. – Ukraine,2013. – C. 372.

176. Mac Kay D.G., Shafto M., Taylor J.K., Marian D.E., Abrams L., Dyer J.R. Relation between emotion, memory and attention: evidence from taboo Stoop, lexical decision, and immediate memory tasks // Memory & Cognitions. 2004. – Vol. 32(3). –P. 474-488.

177. Makhmudova D.M. On the role of problem tasks in the development of independent analytical and creative thinking of students //American Journal of Scientific and Educational Research. 2014. – № 1(4). – P.325-330.

178. Makhmudova D.M.Using the method in solving the problematic tasks with simple differential equations in teaching on optimal control themes // European Journalof Research and Reflectionin Educational Sciences. 2016. – №10. – P.2056-2058.

179. Prinzmetal W., McCool C., Park S. Attention: Reaction Time and Accuracy Reveal Different Mechanisms // Journal of Experimental Psychology: General. 2005. – Vol. 134(1). – P. 73-92.

180. Rotello C.M., Macmillan N.A., Reeder J.A. Sum-Difference Theory of Remembering and Knowing: A Two-Dimensional Signal-Detection Model // Psychological Review. 2004. – Vol.111(3). – P. 588-616.

181. Sakamoto. Y., Bradley C. Schematic Influences on Category Learning and Recognition Memory // Journal of Experimental Psychology: General. 2004. – Vol. 133(4). – P. 534-553.

182. Shomstein S., Yantis S. Configural and contextual prioritization in object-based attention // Psychonomic Bulletin & Review. 2004. – Vol. 11(4). – P.247-254.

183. Smith S.V., Vela E. Environmental context-dependent memory: A review and meta-analysis // Psychonomic Bulletin & Review. 2001. -Vol. 8(4). - P. 203221.

184. Theeuwes J., Kramer A.F., Belopolsky A.V. Attentional set interacts with perceptual load in visual search // Psychonomic Bulletin & Review. 2004. –Vol. 11(4). – P. 697-703.

185. Wheeler M.E., Treisman A.M. Binding in short-term visual memory // Journal of Experimental Psychology: General. 2002. – Vol. 131(1). –P. 48-64.

МУНДАРИЖА

ДИЛФУЗА МЕЛИЕВНА МАХМУДОВА

МУАММОЛИ МАТЕМАТИК МАСАЛАЛАР ЁРДАМИДА ТАЛАБАЛАРДА КРЕАТИВ ФАОЛИЯТНИ РИВОЖЛАНТИРИШ МЕТОДИКАСИ

(монография)

Муҳаррир М.А.Хакимов

Босишга рухсат этилди 14.07.2020 й. Бичими 60Х84 1/16.

Босма табоғи 8,25. Шартли босма табоғи 8,25. Адади 100 нусха.

Буюртма № 121. Баҳоси келишилган нархда.

“Университет” нашриёти. Тошкент, Талабалар шаҳарчаси, ЎзМУ маъмурий биноси.

Ўзбекистон Миллий университети босмахонасида босилди. Тошкент, Талабалар шаҳарчаси, ЎзМУ.

ISBN 978-9943-6554-0-9
9 789943 655409