O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

J.I. ABDULLAYEV, Yu.X. ESHQOBILOV,
R.N. G‘ANIXO‘JAYEV

FUNKSIONAL ANALIZ

(Misol va masalalar yechish)
I QISM

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan oliy o‘quv yurtlarining talabalari uchun o‘quv qo‘llanma sifatida tavsiya etilgan

"TAFAKKUR BO‘STONI"
TOSHKENT - 2015

UO‘K:581(076)
KBK: 22.162ya73
F 96

J.I.Abdullayev
Funksional analiz (Misol va masalalar yechish) I qism
T.: "TAFAKKUR BO‘STONI" 2015.- 256 b.

Taqrizchilar:
Jalilov A.A. – Turin politexnika universiteti Toshkent filiali professori, f.m.f.d.,
Raximov A.A. – Toshkent avtomobil yo‘llari instituti professori, f.m.f.d.

Mas’ul muharrir:
Ikromov I.A. – Samarqand davlat universiteti professori, f.m.f.d.

Mazkur o‘quv qo‘llanmada "Funksional analiz" kursining I qismini tashkil etuvchi to‘plamlar Lebeg o‘lchovi, o‘lchovli funksiyalar, Lebeg integrali va metrik fazolar kabi mavzular bayon qilingan. Har bir mavzuga oid asosiy tushunchalar ta’rifi, asosiy teoremalar va xossalar keltirilgan. Namunaviy misollar tahlil qilingan. Amaliy mashg‘ulot va mavzularni mustaqil o‘rganish uchun misol va masalalar berilgan.

Ushbu o‘quv qo‘llanma universitetlarning "Matematika", "Mexanika" va "Amaliy matematika va informatika" yo‘nalishlari talabalariga mo‘ljallangan bo‘lib, undan boshqa yo‘nalish talabalari ham foydalanishlari mumkin.

UO‘K: 581(076)
KBK: 22.162ya73
F 96

ISBN 978-9943-993-09-9

Kirish

Funksional analiz matematikaning alohida bo‘limi sifatida XVIII asrning oxiri va XIX asr boshlarida shakllana boshlangan. Funksional analizga oid dastlabki ilmiy ishlar italyan matemagi Volterra, fransuz matematigi Puankare va nemis matematigi Hilbertga taalluqlidir. Metrik fazo tushunchasi fanga fransuz matematigi Freshe tomonidan XX asr boshlarida kiritilgan, normalangan fazo tushunchasi 1922 yilda polyak matematigi Banax va unga bog‘liq bo‘lmagan holda amerikalik matematik Viner tomonidan kiritilgan.

Ma’lumki universitetlarning "Matematika", "Mexanika" va "Amaliy matematika va informatika" yo‘nalishlari uchun tuzilgan o‘quv rejada "Funksional analiz" fani ko‘zda tutilgan bo‘lib, ushbu fan ixtisoslik fanlar ichida asosiy o‘rin tutadi.

Universitetlarda "Funksional analiz" kursi asosan ikki qismdan iborat, ular shartli ravishda quyidagicha nomlanadi:
I qism. Haqiqiy o‘zgaruvchining funksiyalari nazariyasi.
II qism. Operatorlar nazariyasi.

Amaldagi "Funksional analiz" kursi fan dasturida I qism "O‘lchovli to‘plamlar nazariyasi", "Lebeg integrali" va "Metrik fazolar" bo‘limlarini o‘z ichiga oladi. II qism esa, "Normalangan fazolar" va "Operatorlar nazariyasi" bo‘limlarini o‘z ichiga oladi. Universitetlarning matematika mutaxassisligida ta’lim oluvchi talabalar uchun "Funksional analiz" kursidan o‘zbek alifbosida, birinchi marotaba akademik T.A. Sarimsoqov tomonidan darslik nashr etilgan (T.A. Sarimsoqov. Haqiqiy o‘zgaruvchining funksiyalari nazariyasi; T.A. Sarimsoqov. Funksional analiz kursi). Oliy o‘quv yurtlarida ta’lim shakli ikki bosqichli tizimga (bakalavriatura va magistratura) o‘tishi munosabati bilan OTMlari barcha fan dasturlarida jiddiy o‘zgarishlar yuzaga keldi. Bu o‘zgarishlar o‘z navbatida barcha yo‘nalishlar uchun tegishli darslik va o‘quv qo‘llanmalarni ishlab chiqishni talab etmoqda. Ushbu [6, 7] o‘quv qo‘llanmalar, universitetlarning bakalavriatura o‘quv rejasidagi "Funksional analiz" kursidan yuqoridagi ehtiyojlarni qondirish maqsadida yaratilgandir.

Mazkur o‘quv qo‘llanma, universitetlarning matematika yo‘nalishi talabalari uchun "Funksional analiz" kursidan amaliy mashg‘ulotlarni olib borishda lotin yozuviga asoslangan o‘zbek alifbosida adabiyotlar tanqisligining oldini olish maqsadida yozilmoqda. Mazkur qo‘llanmada "Funksional analiz" fanining I qismini tashkil etuvchi o‘lchovli to‘plamlar nazariyasi, Lebeg integrali va metrik fazolarga oid mavzular uchun tegishli ta’riflar, xossalar, teoremalar bayoni berilgan, shuningdek misol va masalalar namuna sifatida yechib ko‘rsatilgan.

Birinchi bo‘lim o‘lchovli to‘plamlar nazariyasiga bag‘ishlangan bo‘lib, qo‘llanmada to‘plamlar va ularning o‘lchovlariga oid mavzular bayon qilinadi. Har bir mavzuga oid asosiy tushunchalar ta’rifi, asosiy teoremalar va xossalar keltirilgan. Qo‘llanma to‘plamlar, akslantirishlar, to‘plamlar quvvati, to‘plamlar sistemasi, o‘lchovli to‘plamlar, o‘lchovning umumiy ta’rifi va o‘lchovni Lebeg ma’nosida davom ettirish kabi mavzularni o‘z ichiga oladi. Har bir mavzu namunaviy misollar bilan boyitilgan. Shuningdek, mavzularni o‘zlashtirish va mustaqil o‘rganish uchun yetarlicha misol va masalalar berilgan.

Ikkinchi bo‘lim integrallar nazariyasiga bag‘ishlangan. Qo‘llanmada o‘lchovli funksiyalar, o‘lchovli funksiyalar ketma-ketliklarining yaqinlashishlari, Lebeg integrali, monoton funksiyalar, o‘zgarishi chegaralangan funksiyalar, absolyut uzluksiz funksiyalar va Lebeg-Stiltes integraliga oid ma’lumotlar bayon qilinadi. Har bir mavzuga oid asosiy tushunchalar ta’rifi, teoremalar va xossalar keltirilgan. Barcha mavzular bo‘yicha namunaviy misollar yechimi bilan berilgan. Shuningdek, talabalar mavzularni yaxshi o‘zlashtirishi va mustaqil o‘rganishi uchun har xil tipdagi misol va masalalar jamlangan.

Uchinchi bo'lim metrik fazolar nazariyasiga bag'ishlangan. Qo'llanmada metrik fazolar, yaqinlashuvchi ketma-ketliklar, to'la metrik fazolar, ochiq va yopiq to'plamlar, kompakt to'plamlar, separabel metrik fazolar va qisqartirib akslantirishlarga oid mavzular bayon qilingan. Har bir mavzuga oid asosiy tushunchalar ta'rifi, asosiy teoremalar va xossalar keltirilgan. Mavzularga oid namunaviy misollar yechib ko'rsatilgan. Shuningdek, mavzular bo'yicha uy vazifalarini bajarish va mustaqil o'rganish uchun yetarlicha masalalar berilgan.

Misol va masalalar tuzishda Ayupov Sh.A., Ibragimov M.M., Kudavbergenov K.K.(Funksional analizdan misol va masalalar, Nukus, "BILIM", 2009) va Очан Ю.С.(Сборник задач по математическому анализу, Москва, Просвещение, 1981) hamda Abdullayev J.I., G'anixo'jayev R.N., Shermatov M.H. va O.I. Egamberdiyevlarning "Funksional analiz" (Toshkent-Samarqand, 2009) o'quv qo'llanmasidan keng foydalanildi. Ushbu o'quv qo'llanma O'zbekiston Milliy universiteti, Samarqand davlat universitetida *Funksional analiz* hamda *Funksional analiz va integral tenglamalar* fanlaridan ma'ruza va amaliy mashg'ulotlar olib boruvchi professor-o'qituvchilarning ko'p yillik ish tajribalari asosida yozilgan.

Mualliflar o'quv qo'llanmani yaxshilashda bergan foydali maslahatlari uchun mas'ul muharrir va taqrizchilarga, hamda matnni tahrir qilgani uchun B.E.Davranovga o'z minnatdorchiliklarini bildiradilar.

Qo'llanma birinchi marta chop qilinayotgani uchun xato va kamchiliklar bo'lishi mumkin. Xato va kamchiliklar haqidagi fikr va mulohazalaringizni jabdullaev@mail.ru elektron manziliga jo'natishlaringizni so'raymiz.

I. O‘LCHOVLI TO‘PLAMLAR

Ushbu bo‘lim to‘plamlar, akslantirishlar, to‘plamlar quvvati, to‘plamlar sistemasi, o‘lchovli to‘plamlar, o‘lchovning umumiy ta’rifi va o‘lchovni Lebeg ma’nosida davom ettirish kabi mavzularni o‘z ichiga oladi. Har bir mavzuda namunaviy misollar yechimi bilan keltirilgan. Shuningdek, amaliy mashg‘ulotlar va uy vazifasi uchun yetarlicha misol va masalalar berilgan.

1-§. To‘plamlar ustida amallar

Matematikada juda xilma-xil to‘plamlarga duch kelamiz. Haqiqiy sonlar to‘plami, tekislikdagi ko‘pburchaklar to‘plami, ratsional koeffitsiyentli ko‘phadlar to‘plami va hokazo. To‘plam tushunchasi matematikada tayanch tushunchalardan bo‘lib, unga ta’rif berilmaydi. *To‘plam* so‘zining sinonimlari sifatida *ob’ektlar jamlanmasi* yoki *elementlar majmuasi* so‘z birikmalaridan foydalaniladi. To‘plamlar nazariyasi hozirgi zamon matematikasida juda muhim o‘ringa ega. Biz uning ayrim xossalarini o‘rganish bilan cheklanamiz.

To‘plamlarni lotin alifbosining bosh harflari $A, B, \ldots$ ularning elementlarini esa kichik - $a, b, \ldots$ harflar bilan belgilaymiz. Biz asosan quyidagi belgilashlardan foydalanamiz. $\mathbb{N}$ $-$ natural sonlar to‘plami, $\mathbb{Z}$ $-$ butun sonlar to‘plami, $\mathbb{Q}$ $-$ ratsional sonlar to‘plami, $\mathbb{R}$ $-$ haqiqiy sonlar to‘plami, $\mathbb{C}$ $-$ kompleks sonlar to‘plami, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{Z}_+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$ hamda $\mathbb{R}^n$ sifatida $n-$o‘lchamli arifmetik Evklid fazo belgilanadi.

Matematik simvollarning ma’nolariga to‘xtalamiz. $a \in A$ belgisi *a element A to‘plamga tegishli* ekanligini bildiradi. Bu tasdiqning inkori $a \notin A$ shaklda yoziladi va *a element A to‘plamga tegishli emas* deb o‘qiladi. $A \subset B$ belgi *A to‘plamning barcha elementlari B to‘plamga ham tegishli* ekanligini bildiradi. Bu holda A to‘plam B to‘plamning *qismi* deyiladi. Masalan, natural sonlar to‘plami haqiqiy sonlar to‘plamining qismi bo‘ladi. Agar A va

B to‘plamlar bir xil elementlardan tashkil topgan bo‘lsa, u holda ular *teng to‘plamlar* deyiladi va $A = B$ shaklda yoziladi. Ko‘pincha, to‘plamlarning tengligini isbotlashda $A \subset B$ va $B \subset A$ munosabatlarning bajarilishi ko‘rsatiladi ([1] ga qarang). Ba’zida birorta ham elementi mavjud bo‘lmagan to‘plamlarni qarashga to‘g‘ri keladi. Masalan, $2 \le x < 2$ qo‘sh tengsizlikni qanoatlantiruvchi haqiqiy sonlar to‘plami yoki $|x| = -1$ tenglamaning yechimlari to‘plami va hokazo. Bunday to‘plamlar uchun maxsus *bo‘sh to‘plam* nomi berilgan va uni belgilashda $\emptyset$ simvoldan foydalaniladi. Ma’lumki, har qanday to‘plam bo‘sh to‘plamni o‘zida saqlaydi va har qanday to‘plam o‘zining qismi sifatida qaralishi mumkin. To‘plamlarning bo‘sh to‘plamdan va o‘zidan farqli barcha qism to‘plamlari *xos qism to‘plamlar* deyiladi. o‘quv qo‘llanmada $\wedge$ va $\vee$ belgilari mos ravishda *va* hamda *yoki* so‘zlariga mos keladi.

Ixtiyoriy tabiatli A va B to‘plamlar berilgan bo‘lsin.

$$A \cup B = \{x : x \in A \ \vee \ x \in B\}$$

to‘plam A va B to‘plamlarning *yig‘indisi* yoki *birlashmasi* deyiladi.

$$A \cap B = \{x : x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$

to‘plam A va B to‘plamlarning *kesishmasi* deyiladi. Ixtiyoriy (chekli, cheksiz) sondagi A_α to‘plamlarning yig‘indisi va kesishmasi ham shunga o‘xshash aniqlanadi:

$$\bigcup_{\alpha \in X} A_\alpha = \{x : \ \exists\, \alpha_0 \in X, \ x \in A_{\alpha_0}\}, \quad \bigcap_{\alpha \in X} A_\alpha = \{x : \ \forall\, \alpha \in X, \ x \in A_\alpha\}.$$

A va B to‘plamlarning *ayirmasi* deb

$$A \backslash B = \{x : \ x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$

to‘plamga aytiladi. Agar $B \subset A$ bo‘lsa, $A \backslash B$ to‘plam B to‘plamning A to‘plamgacha *to‘ldiruvchi to‘plami* deyiladi va $C_A B := CB$ shaklda belgilanadi. Ba’zan, A va B to‘plamlarning *simmetrik ayirmasi* tushunchasini kiritish maqsadga muvofiq bo‘ladi. $A\backslash B$ va $B\backslash A$ to‘plamlarning birlashmasidan iborat to‘plamga A va B to‘plamlarning *simmetrik ayirmasi* deyiladi, ya’ni

$$A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A).$$

Agar $A,\, B\subset G$ bo‘lib, G da $"+"$ amali aniqlangan bo‘lsa, u holda

$$A+B=\{c:\ c=a+b,\ \ a\in A,\ \ b\in B\}$$

to‘plam A va B to‘plamlarning *arifmetik yig‘indisi* deyiladi.

X va Y to‘plamlarning *dekart ko‘paytmasi* deganda

$$X\times Y=\{(x,y):\ x\in X,\ y\in Y\}$$

to‘plam tushuniladi. $X\times Y$ to‘plamning ixtiyoriy R qism toplami *munosabat* deyiladi. x element (x,y) juftlikning birinchi koordinatasi, y element esa uning ikkinchi *koordinatasi* deyiladi va mos ravishda $x=pr_1(x,y)$ va $y=pr_2(x,y)$ kabi belgilanadi. Xuddi shunday $X\times Y$ to‘plamning ixtiyoriy R qism to‘plamining birinchi va ikkinchi koordinatalarga proyeksiyalari aniqlanadi:

$$pr_1R=\{x:\ x\in X,\ \exists\, y\in Y,\ (x,y)\in R\}\,,$$

$$pr_2R=\{y:\ y\in Y,\ \exists\, x\in X,\ (x,y)\in R\}\ .$$

Bu to‘plamlar R munosabatning mos ravishda *aniqlanish sohasi va qiymatlar sohasi* deyiladi. Bundan keyin biz $\mathfrak{A}(X)$ bilan X ning barcha qism to‘plamlari sistemasini belgilaymiz.

Endi mavzuga oid namunaviy misollar yechib ko‘rsatamiz.

1.1. To‘plamlar yig‘indisi va kesishmasi kommutativ. Isbotlang.

$$A\cup B=B\cup A,\qquad A\cap B=B\cap A.$$

Isbot. Ixtiyoriy $x \in A \cup B$ elementni olamiz. Bundan

$$x \in A \ \vee \ x \in B \Longrightarrow x \in B \ \vee \ x \in A \Longrightarrow x \in B \cup A$$

ni olamiz. Demak, $A \cup B \subset B \cup A$ ekan. Agar $y \in B \cup A$ ixtiyoriy element bo‘lsa, u holda

$$y \in B \ \vee \ y \in A \Longrightarrow y \in A \ \vee \ y \in B \Longrightarrow y \in A \cup B$$

bo‘ladi, ya’ni $B \cup A \subset A \cup B$ ekan. Yuqorida keltirilgan munosabatlardan $A \cup B = B \cup A$ ekanligi kelib chiqadi. $\square$

1.2. Distributivlik qonunlarini isbotlang:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Isbot. $x \in (A \cup B) \cap C$ ixtiyoriy elementn bo‘lsin. Ta’rifga ko‘ra, $x \in A \cup B \ \wedge \ x \in C$ bo‘ladi. Bu yerdan

$$(x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C \Longrightarrow x \in A \cup C \wedge \ x \in B \cup C \Longrightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cap C)$$

kelib chiqadi. Demak, $(A \cup B) \cap C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)$ ekan. Agar $y \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ ixtiyoriy element bo‘lsa, u holda

$$y \in A \cup C \ \wedge \ y \in B \cup C \Longrightarrow (y \in A \ \vee \ y \in C) \ \wedge \ (y \in B \ \vee \ y \in C)$$

bo‘ladi. Bu yerdan $y \in (A \cup B) \cap C$ ni olamiz, ya’ni $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subset (A \cup B) \cap C$ ekan. Yuqorida keltirilgan munosabatlardan $(A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ ekanligi kelib chiqadi.

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ tenglik shunga o‘xshash isbotlanadi. $\square$

To‘plamlar nazariyasida muhim o‘rin tutadigan va *ikkilik prinsipi* deb nomlanuvchi quyidagi munosabatni isbotlang.

1.3. Yig'indining to'ldiruvchisi to'ldiruvchilar kesishmasiga teng:

$$E \backslash \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcap_{\alpha} (E \backslash A_{\alpha}), \quad A_{\alpha} \subset E. \tag{1.1}$$

Isbot. Ixtiyoriy $x \in E \backslash \bigcup\limits_{\alpha} A_{\alpha}$ elementni olamiz, bu yerdan $x \in E$ va $x \notin \bigcup\limits_{\alpha} A_{\alpha}$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan ixtiyoriy α uchun x ning A_{α} to'plamga tegishli emasligiga kelamiz. Demak, x element A_{α} to'plamlarning to'ldiruvchilarida yotadi. Shunday qilib, ixtiyoriy α uchun $x \in E \backslash A_{\alpha}$ munosabat o'rinli, bundan biz $x \in \bigcap\limits_{\alpha} (E \backslash A_{\alpha})$ ga ega bo'lamiz. Bu esa

$$E \backslash \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \subset \bigcap_{\alpha} (E \backslash A_{\alpha}) \tag{1.2}$$

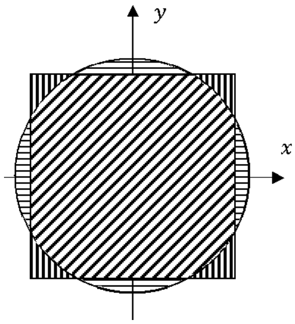
munosabatni keltirib chiqaradi. Endi teskari munosabatni isbotlaymiz. Agar $x \in \bigcap\limits_{\alpha} (E \backslash A_{\alpha})$ bo'lsa, u holda barcha α larda $x \in E \backslash A_{\alpha}$ bo'ladi va x element A_{α} to'plamlarning birortasiga ham tegishli emas, bu esa $x \notin \bigcup\limits_{\alpha} A_{\alpha}$ ekanligini bildiradi. Demak, $x \in E \backslash \bigcup\limits_{\alpha} A_{\alpha}$ ekan. Bundan biz

$$E \backslash \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \supset \bigcap_{\alpha} (E \backslash A_{\alpha}) \tag{1.3}$$

ga kelamiz. (1.2) va (1.3) munosabatlar (1.1) tenglikni isbotlaydi. $\square$

1.4. $A = \{(x, y) : \ |x| \leq 4, \, |y| \leq 4\}$ va $B = \big\{(x, y) : \ x^2 + y^2 \leq 25\big\}$ to'plamlar uchun $A \cup B$, $A \backslash B$, $A \Delta B$, $A \cap B$ to'plamlarni tekislikda tasvirlang.

Yechish. Tekislikda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini qaraymiz. Bu holda $A = [-4; \ 4] \times [-4; \ 4]$ kvadratdan, B esa markazi koordinatalar boshida radiusi 5 bo'lgan yopiq doiradan iborat bo'ladi (1.1-chizmaga qarang). $A \cup B -$ 1.1-chizmada shtrixlangan soha, $A \backslash B$ kvadratning uchlaridagi vertikal shtrixlangan soha, $A \Delta B -$ chizmada vertikal va gorizontal shtrixlangan soha, $A \cap B -$ chizmada qiyalab shtrixlangan soha. $\square$



1.1-chizma

1.5. $(X\backslash Y)\backslash Z = X\backslash(Y\cup Z)$ tenglikni isbotlang.

Isbot. Berilgan to‘plamlarning tengligini tekshirish $A\subset B$ va $B\subset A$ munosabatlarni ko‘rsatish orqali amalga oshiriladi. Endi $x\in(X\backslash Y)\backslash Z$ ixtiyoriy element bo‘lsin. U holda $x\in X\backslash Y,\ x\notin Z\ \Rightarrow\ x\in X,\ \ x\notin Y,\ \ x\notin Z \Rightarrow\ \ x\in X,\ \ x\notin(Y\cup Z)\ \Rightarrow\ \ x\in X\backslash(Y\cup Z)$. Demak, $(X\backslash Y)\backslash Z\subset X\backslash(Y\cup Z)$ munosabat o‘rinli. Endi teskari munosabatni ko‘rsatamiz. $y\in X\backslash(Y\cup Z)$ ixtiyoriy element bo‘lsin. U holda $y\in X,\ \ y\notin Y\cup Z$ bo‘ladi. Bu yerdan $y\in X, y\notin Y, y\notin Z$ ekanligini, bundan esa $y\in X\backslash Y,\ \ y\notin Z$ natijada $y\in(X\backslash Y)\backslash Z$ ekanligini olamiz. Demak, $(X\backslash Y)\backslash Z\supset X\backslash(Y\cup Z)$ munosabat o‘rinli. Olingan bu ikki munosabatdan $(X\backslash Y)\backslash Z = X\backslash(Y\cup Z)$ tenglik kelib chiqadi. $\square$

1.6. $(X\cap X_1)\times(Y\cap Y_1) = (X\times Y)\cap(X_1\times Y_1)$ tenglikni isbotlang.

Isbot. Bu yerda ham 1.5-misoldagi kabi yo‘l tutamiz. $\forall(x,y)\in(X\cap X_1)\times(Y\cap Y_1)\ \Rightarrow x\in X\cap X_1,\ y\in Y\cap Y_1$. Bu yerdan $x\in X,\ \ y\in Y\ \ \wedge\ x\in X_1,\ \ y\in Y_1\ \ \Rightarrow\ (x,y)\in X\times Y\wedge\ (x,y)\in X_1\times Y_1$ ekanligini, bundan esa $(x,y)\in(X\times Y)\cap(X_1\times Y_1)$ ni olamiz. Ya’ni $(X\cap X_1)\times(Y\cap Y_1)\subset(X\times Y)\cap(X_1\times Y_1)$ munosabat o‘rinli. Teskari munosabatni ko‘rsatish uchun $(x,y)\in(X\times Y)\cap(X_1\times Y_1)$ dan orqaga qarab harakatlanish yetarli. Shunday qilib, $(X\cap X_1)\times(Y\cap Y_1) = (X\times Y)\cap(X_1\times Y_1)$ tenglik isbotlandi. $\square$

1.7. Ixtiyoriy $\{A_n\}$ to'plamlar ketma-ketligi uchun shunday $\{B_n\}$ to'plamlar ketma-ketligini tuzingki,

a) $B_n \subset A_n, \quad B_i \cap B_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ bo'lsin;

b) $B_n \supset A_n, \quad B_{n+1} \supset B_n, \quad \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ bo'lsin;

c) $B_n \subset A_n, \quad B_{n+1} \subset B_n, \quad \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ bo'lsin.

Yechish. Berilgan $\{A_n\}$ ketma-ketlik uchun $\{B_n\}$ to'plamlar ketma-ketligini quyidagicha tuzamiz.

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2 \backslash A_1, \ldots, \quad B_n = A_n \backslash \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k, \ldots.$$

Hosil qilingan $\{B_n\}$ to'plamlar ketma-ketligi misolning a) bandidagi barcha shartlarni qanoatlantiradi. Quyida biz b) va c) banddagi shartlarni qanoatlatiruvchi $\{B_n\}$ to'plamlar ketma-ketligini keltiramiz:

b) $B_1 = A_1, \quad B_2 = A_1 \cup A_2, \ldots, \quad B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k, \ldots$

c) $B_1 = A_1, \quad B_2 = A_1 \cap A_2, \ldots, \quad B_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k, \ldots.$ $\square$

1.8. Ushbu $\left(\frac{m}{n} - \frac{1}{4n^2}, \frac{m}{n} + \frac{1}{4n^2}\right)$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ intervallarning hech biri $\sqrt{2}$ sonini o'z ichiga olmasligini isbotlang. Demak,

$$\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{m}{n} - \frac{1}{4n^2}, \frac{m}{n} + \frac{1}{4n^2}\right) \neq \mathbb{R}.$$

Isbot. $\sqrt{2}$ soni irratsional bo'lganligidan, ixtiyoriy butun m, n sonlari uchun $|m^2 - 2n^2| \neq 0$ bo'ladi. Binobarin $|m^2 - 2n^2| \geq 1$ tengsizlikka kelamiz. Endi ixtiyoriy butun $m \in \mathbb{Z}$ va natural $n \in \mathbb{N}$ sonlari uchun $|\frac{m}{n} - \sqrt{2}| > \frac{1}{4n^2}$ tengsizlikni isbotlaymiz. Bu yerdan

$$\sqrt{2} \notin \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{m}{n} - \frac{1}{4n^2}, \frac{m}{n} + \frac{1}{4n^2}\right)$$

munosabat kelib chiqadi. Agar $m \leq 0$ bo'lsa, u holda ravshanki $|\frac{m}{n} - \sqrt{2}| > \sqrt{2} > 1,4 > \frac{1}{4n^2}$ tengsizlik o'rinli. Demak, $m > 0$ bo'lgan hol, ya'ni $n \in \mathbb{N}$

uchun $|\frac{m}{n} - \sqrt{2}| > \frac{1}{4n^2}$ tengsizlikni isbotlash kifoya. Agar $\frac{m}{n} \geq 2$ bo‘lsa, u holda tengsizlik yana o‘rinli bo‘ladi. Shunday qilib, $n, m \in \mathbb{N}$ va $\frac{m}{n} < 2$ bo‘lganda tengsizlikni isbotlash yetarli. U holda

$$1 \leq |m^2 - 2n^2| \Longleftrightarrow \frac{1}{n^2} \leq |\frac{m^2}{n^2} - 2| = |\frac{m}{n} - \sqrt{2}|\,(\frac{m}{n} + \sqrt{2}) \leq$$

$$\leq (2 + \sqrt{2})\,|\frac{m}{n} - \sqrt{2}| < 4\,|\frac{m}{n} - \sqrt{2}|.$$

Bundan esa, $|\frac{m}{n} - \sqrt{2}| > \frac{1}{4n^2}$ tengsizligi kelib chiqadi. Shunday qilib, ixtiyoriy $m \in \mathbb{Z}$ va $n \in \mathbb{N}$ uchun

$$\sqrt{2} \notin \left(\frac{m}{n} - \frac{1}{4n^2}, \frac{m}{n} + \frac{1}{4n^2}\right).$$

Shuni isbotlash talab qilingan edi. $\square$

Uy vazifalari va mavzuni o‘zlashtirish uchun masalalar

1.9-1.17-misollarda keltirilgan munosabatlarni isbotlang.

1.9. To‘plamlar yig‘indisi va kesishmasi assotsiativ.

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

1.10. Kesishmaning to‘ldiruvchisi to‘ldiruvchilar yig‘indisiga teng:

$$E \backslash \bigcap_{\alpha} A_\alpha = \bigcup_{\alpha} (E \backslash A_\alpha), \quad A_\alpha \subset E. \tag{1.4}$$

1.11. $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

1.12. $A \cup B = (A \,\Delta\, B) \,\Delta\, (A \cap B)$.

1.13. $A \backslash B = A \,\Delta\, (A \cap B)$.

1.14. Agar $A \subset E$, $B \subset E$ bo‘lsa, $(E \backslash A) \Delta (E \backslash B) = A \Delta B$ tenglik o‘rinli.

1.15. $(A \cup B) \Delta (C \cup D) \subset (A \Delta C) \cup (B \Delta D)$.

1.16. A va B to'plamlar uchun $A \subset B \cup (A \Delta B)$ munosabat o'rinli.

1.17. Agar A_1 va A_2 to'plamlar kesishmasa, ixtiyoriy B_1 va B_2 lar uchun $B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$ munosabat o'rinli.

1.18-1.24-misollarda berilgan A va B to'plamlar uchun $A \cup B$, $A \backslash B$, $A \Delta B$, $A \cap B$ ko'rinishdagi to'plamlarni toping. 1.23-1.24-misollarda esa $A \cup B$, $A \backslash B$, $A \Delta B$, $A \cap B$ to'plamlarni tekislikda tasvirlang.

1.18. $A = [0,\, 1]\,, \quad B = (0,\, 1)\,.$

1.19. $A = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}\,,\ B = \{3, 6, 9, \ldots, 3n, \ldots\}\,.$

1.20. $A = \mathbb{Q}, \quad B = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} -$ irratsional sonlar to'plami.

1.21. $A = [0,\ 1] \backslash \mathbb{Q}, \quad B = [0,\ 1] \cap \mathbb{Q}\,.$

1.22. $A = \{x \in \mathbb{R} : \sin 4x = 0\}\,,\ B = \{x \in \mathbb{R} : \cos 2x = 0\}\,.$

1.23. $A = \{(x, y) :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}\,,$
$B = \{(x, y) :\ 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1\}\,.$

1.24. $A = \left\{(x, y) :\ x^2 + y^2 \le 16\right\}, \quad B = \left\{(x, y) :\ \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} \le 1\right\}.$

1.25-1.38-misollarda keltirilgan munosabatlarni isbotlang.

1.25. $X \subset Y \Longleftrightarrow X \cup Y = Y \Longleftrightarrow X \cap Y = X.$

1.26. $X \subset Z\ \wedge\ Y \subset Z \Longleftrightarrow X \cup Y \subset Z.$

1.27. $Z \subset X\ \wedge\ Z \subset Y \Longleftrightarrow Z \subset X \cap Y.$

1.28. $X \backslash Y = X \backslash (X \cap Y) = (X \cup Y) \backslash Y.$

1.29. $X \backslash (Y \backslash Z) = (X \backslash Y) \cup (X \cap Z)\,.$

1.30. $(X \backslash Y) \cap (Z \backslash U) = (X \cap Z) \backslash (Y \cup U)\,.$

1.31. $X \cap (Y \backslash Z) = (X \cap Y) \setminus (X \cap Z)$.

1.32. $(X \backslash Z) \cap (Y \backslash Z) = (X \cap Y) \backslash Z$.

1.33. $(X \cup Y) \backslash Z = (X \backslash Z) \cup (Y \backslash Z)$.

1.34. $X \cap Y = \emptyset \iff X \subset CY \iff Y \subset CX$.

1.35. $X \subset Y \iff CY \subset CX$.

1.36. $X \,\Delta\, Y = Y \,\Delta\, X$.

1.37. $X \,\Delta\, X = \emptyset$.

1.38. $X \,\Delta\, \emptyset = X$.

1.39. Shunday $X \subset Z$ va $Y \subset Z$ to‘plamlar topingki, $X \times Y \neq Y \times X$ bo‘lsin. $X \times Y = Y \times X$ tenglikdan $X = Y$ kelib chiqadimi?

1.40. $X = \{1, 3, 5\}$, $Y = \{2, 4\}$ to‘plamlar uchun $X \times Y$, $Y \times X$ to‘plamlar elementlarini yozib chiqing. $X \times Y = Y \times X$ tenglik to‘g‘rimi?

1.41-1.43-misollarda keltirilgan munosabatlarni isbotlang.

1.41. $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$.

1.42. $(X \times Y) \cup (X_1 \times Y_1) \subset (X \cup X_1) \times (Y \cup Y_1)$.

1.43. $(X \times Y) \cap (X_1 \times Y) = (X \cap X_1) \times Y$.

1.44. $(X \times Y) \cup (X_1 \times Y_1) = (X \cup X_1) \times (Y \cup Y_1)$ tenglik to‘grimi?

1.45. Ushbu $A \cup B = A\Delta\,(B \backslash A)$ tenglikni isbotlang. Demak, "$\cup$" amalni "Δ" va "$\backslash$" amallar orqali ifodalash mumkin. Shunga o‘xshash:

a) "$\cup$" amalni "Δ" va "$\cap$" amallar orqali;

b) "$\cap$" amalni "Δ" va "$\cup$" amallar bilan;

c) "$\cap$" amalni "Δ" va "$\backslash$" amallar orqali ifodalang.

Umuman, "$\cup$", "$\cap$", "$\backslash$", "Δ" amallardan ixtiyoriy birini:

d) qolgan uchtasi;

e) qandaydir ikkitasi orqali ifodalash mumkinmi?

1.46. $\{A_n\}$ to'plamlar ketma-ketligi uchun quyidagi belgilashlarni

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m, \quad A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

kiritamiz. U holda $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset A_* \subset A^* \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ munosabatlarni isbotlang.

1.47. Agar $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ bo'lsa, $\{A_n\}$ to'plamlar ketma-ketligi *o'suvchi*, aksincha, $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ bo'lganda $\{A_n\}$ *kamayuvchi* deyiladi. O'suvchi to'plamlar ketma-ketligi uchun

$$A_* = A^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

hamda kamayuvchi to'plamlar ketma-ketligi uchun

$$A_* = A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

tengliklarni isbotlang.

1.48. $A_n = \left\{ \dfrac{k}{n} : k \in \mathbb{Z} \right\}$ – maxraji $n \in \mathbb{N}$ bo'lgan barcha ratsional sonlar to'plami bo'lsa, $A_* = \mathbb{Z}$, $A^* = \mathbb{Q}$ tengliklarni isbotlang.

1.49. Agar $A_{3n} = B$, $A_{3n-1} = C$, $A_{3n-2} = D$, $n \in \mathbb{N}$ bo'lsa, A_* va A^* to'plamlarni B, C, D to'plamlar orqali ifodalang.

1.50. $A_{kn} = \left(k - \dfrac{1}{n}, k + \dfrac{1}{n} \right)$, $k, n \in \mathbb{N}$ to'plamlar uchun

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{kn}; \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{kn}; \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{kn};$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{kn}; \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{kn}; \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{kn}$$

to'plamlarni toping.

1.51. Ushbu $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{kn} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{kn}$ munosabat ixtiyoriy $\{A_{kn}\}$, $k, n \in \mathbb{N}$ to'plamlar uchun to'g'ri. Isbotlang.

1.52. $\Omega = \{ x : \ x = (x_1, \, x_2, \, \ldots, x_n, \ \ldots)\}$ barcha ketma-ketliklar to'plami, $\Omega_n = \{ x : \ x = (x_1, \, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...)\}$ esa $n+1-$ hadidan boshlab 0 dan iborat ketma-ketliklar to'plami bo'lsin. U holda $\Omega \neq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ ekanligini tushuntiring.

1.53. $c_0 = \left\{ x : \ x = (x_1, x_2, ...), \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \right\} -$ 0 ga yaqinlashuvchi barcha ketma-ketliklardan iborat to'plam va $p \in \mathbb{N}$ uchun

$$\ell_p = \left\{ x : \ x = (x_1, x_2, ...), \ \sum_{i=1}^{\infty} |\, x_i|^p < +\infty \right\}$$

ya'ni modulining $p-$ darajalaridan tuzilgan qator yaqinlashuvchi bo'lgan barcha ketma-ketliklar to'plami bo'lsin. U holda

$$c_0 \supset \bigcup_{p=1}^{\infty} \ell_p \quad \text{va} \quad c_0 \neq \bigcup_{p=1}^{\infty} \ell_p$$

bo'lishini isbotlang.

1.54. Ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q} = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots\}$ biror usulda nomerlangan bo'lsin. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (\eta_n - \varepsilon, \ \eta_n + \varepsilon) = \mathbb{R}$$

tenglikni isbotlang.

1.55. $\varepsilon > 0$ biror tayinlangan son bo'lsin. Ixtiyoriy $x \in \mathbb{R}$ haqiqiy son $\left(\frac{m}{n} - \frac{\varepsilon}{n}, \frac{m}{n} + \frac{\varepsilon}{n}\right)$, $m \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N}$ ko'rinishdagi intervallardan kamida biriga tegishli ekanligini isbotlang. Demak,

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \left(\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{m}{n} - \frac{\varepsilon}{n}, \frac{m}{n} + \frac{\varepsilon}{n}\right)\right) = \mathbb{R}.$$

2-§. Akslantirishlar

Funksiya tushunchasini umumlashtirish. Ma'lumki, matematik analizda funksiya tushunchasi quyidagicha ta'riflanadi: X sonlar o'qidagi biror to‘plam bo‘lsin. Agar har bir $x \in X$ songa f qoida bo‘yicha aniq bir $y = f(x)$ son mos qo‘yilgan bo‘lsa, u holda X to‘plamda f funksiya *aniqlangan* deyiladi. Bunda X to‘plam f funksiyaning *aniqlanish sohasi* deyiladi, bu funksiya qabul qiladigan barcha qiymatlardan tashkil bo‘lgan $E(f)$ to‘plam f funksiyaning *qiymatlar sohasi* deyiladi, ya’ni

$$E(f) = \{y : y = f(x), \quad x \in X\}.$$

Agar sonli to‘plamlar o‘rnida ixtiyoriy to‘plamlar qaralsa, u holda funksiya tushunchasining umumlashmasi, ya’ni akslantirish ta’rifiga kelamiz. Bizga ixtiyoriy X va Y to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Agar har bir $x \in X$ elementga biror f qoida bo‘yicha Y to‘plamdan yagona y element mos qo‘yilsa, u holda X to‘plamda aniqlangan Y to‘plamdan qiymatlar qabul qiluvchi f *akslantirish berilgan* deyiladi. Bundan keyin *funksiya* termini o‘rniga *akslantirish* atamasini ishlatamiz. Agar $Y = \mathbb{R}$ yoki $Y = \mathbb{C}$ bo‘lsa f ga X da aniqlangan *haqiqiy* yoki *kompleks qiymatli funksiya* deyiladi.

X to‘plamda aniqlangan va Y to‘plamdan qiymatlar qabul qiluvchi f akslantirish uchun $f : X \to Y$ belgilashdan foydalaniladi. Endi $f : X \to Y$ akslantirish uchun quyidagi tushunchalarni keltiramiz.

Har bir $a \in X$ uchun unga mos qo‘yilgan $b = f(a) \in Y$ element a elementning f akslantirishdagi *tasviri* yoki *aksi* deyiladi. Umuman, X to‘plamning biror A qismi berilgan bo‘lsa, A to‘plam barcha elementlarining Y dagi tasvirlaridan iborat bo‘lgan to‘plam A to‘plamning f akslantirishdagi *tasviri* yoki *aksi* deyiladi va $f(A)$ bilan belgilanadi. Endi $b \in Y$ ixtiyoriy element bo‘lsin. X to‘plamning b ga akslanuvchi barcha elementlaridan iborat qismi b elementning f akslantirishdagi *asli* deyiladi va u $f^{-1}(b) = \{x \in X : \ f(x) = b\}$ bilan belgilanadi. O‘z navbatida har bir $B \subset Y$ to‘plam uchun X ning B ga akslanuvchi (o‘tuvchi) qismi B to‘plamning f akslantirishdagi *asli* deyiladi va $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ shaklda belgilanadi. Agar barcha $b \in B$ elementlar uchun ularning $f^{-1}(b)$ aslilari bo‘sh bo‘lsa, u holda B to‘plamning asli ham bo‘sh to‘plam bo‘ladi. Umuman olganda, Y to‘plam sifatida f akslantirishning qiymatlar sohasini o‘zida saqlovchi to‘plam qaraladi. Aniqlanish sohasi X bo‘lgan $f : X \to Y$ akslantirishda $f(X) = Y$ tenglik bajarilsa, f akslantirish X to‘plamni Y to‘plamning *ustiga* yoki *syuryektiv akslantirish* deyiladi. Umumiy holda, ya’ni $f(X) \subset Y$ bo‘lsa, u holda f akslantirish X to‘plamni Y to‘plamning *ichiga akslantiradi* deyiladi. Agar $f : X \to Y$ akslantirishda X dan olingan har xil x_1 va x_2 elementlarga har xil $y_1 = f(x_1)$ va $y_2 = f(x_2)$ tasvirlar mos kelsa, u holda f *inyektiv akslantirish* yoki *inyeksiya* deyiladi. Bir vaqtda ham syuryektiv ham inyektiv bo‘lgan $f : X \to Y$ akslantirishga *biyektiv* akslantirish yoki *biyeksiya* deyiladi.

Endi $f : X \to Y$ akslantirishga misollar keltiramiz.

2.1-2.3 misollarda keltirilgan akslantirishlarning qiymatlar sohalarini toping.

2.1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2.$

Yechish. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$ akslantirishning qiymatlar sohasi $E(f) = [0, \infty)$ dan iborat. Chunki barcha $x \in \mathbb{R}$ lar uchun $x^2 \geq 0$ va ixtiyoriy $y \in [0, \infty)$ uchun $f(\sqrt{y}) = y$ tenglik o‘rinli. $\square$

2.2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = [x]$. Bu yerda $[x]$ belgi x sonining butun qismi.

Yechish. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = [x]$ akslantirish uchun ixtiyoriy $x \in \mathbb{R}$ da $g(x) \in \mathbb{Z}$, ya’ni $E(g) \subset \mathbb{Z}$. Ikkinchidan ixtiyoriy $n \in \mathbb{Z}$ uchun $g(n) = n$, ya’ni $\mathbb{Z} \subset E(g)$. Bulardan $E(g) = \mathbb{Z}$ ekanligini olamiz. $\square$

2.3. Dirixle funksiyasi $\mathfrak{D} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, & agar \ \ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & agar \ \ x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Yechish. Dirixle funksiyasi $\mathfrak{D} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ning qiymatlar sohasi, aniqlanishiga ko‘ra $E(\mathfrak{D}) = \{0, 1\}$ ikki nuqtali to‘plamdan iborat. $\square$

2.4. 2.1-misoldagi f akslantirishda $A = [0,\ 3)$ to‘plamning aksi (tasviri) va $B = (1,\ 4)$ to‘plamning aslini toping.

Yechish. $f(x) = x^2$ akslantirish $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ da o‘suvchi va uzluksiz funksiya bo‘lganligi uchun $f([0, 3)) = [0, 9)$ bo‘ladi. Endi $B = (1, 4)$ to‘plamning f akslantirishdagi aslini topamiz. $\big\{x \in \mathbb{R} : x^2 \in (1, 4)\big\}$ yoki $1 < x^2 < 4$ qo‘sh tengsizlikni qanoatlantiruvchi haqiqiy sonlar to‘plami $f^{-1}(B)$ ga teng. Bu tengsizlikning yechimi $(-2, -1) \cup (1, 2)$ to‘plamdan iborat. Demak, $f^{-1}(B) = (-2, -1) \cup (1, 2)$ ekan. $\square$

2.5. 2.3-misoldagi $\mathfrak{D}$ akslantirishda $A = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ to‘plamning aksi va $B = (1,\ \infty)$ to‘plamning aslini toping.

Yechish. $\mathfrak{D}$ akslantirish $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ to‘plamning barcha elementlariga nolni mos qo‘yadi, shuning uchun $\mathfrak{D}(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) = \{0\}$. Dirixle funksiyasining 1 dan katta qiymatlari mavjud emas. Demak, $\mathfrak{D}^{-1}(B) = \emptyset$. $\square$

2.6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f(x) = ax + b,\ a \neq 0$ akslantirish biyeksiya ekanligini isbotlang.

Isbot. Chiziqli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ akslantirishning biyeksiya ekanligini ko‘rsatish uchun ixtiyoriy $c \in \mathbb{R}$ da $ax+b = c$ tenglamaning yagona yechimga ega ekanligini ko‘rsatish yetarli. Yechimning mavjudligi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, akslantirishning syuryektivligini, yechimning yagonaligi esa uning inyektivligini ta’minlaydi. Bu tenglamaning yechimi yagona bo‘lib, u $x = \dfrac{c - b}{a}$ dan iborat. $\square$

2.7. Agar $f : X \to Y$ biyektiv akslantirish bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $A \subset X$ uchun $f : A \to B \quad (B = f(A))$ ham biyeksiya bo‘lishini isbotlang.

Isbot. $f(A) = B$ ekanligidan uning syuryektiv akslantirish ekanligi kelib chiqadi, inyektivligi esa $f : X \to Y$ ning inyektivligidan kelib chiqadi. $\square$

2.8. Ikki to'plam birlashmasining aksi ular tasvirlarining birlashmasiga teng, ya'ni quyidagi tenglikni isbotlang

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B). \tag{2.2}$$

Isbot. Agar $y \in f(A \cup B)$ ixtiyoriy element bo'lsa, u holda $y = f(x)$ bo'lib, x element A va B to'plamlardan aqalli biriga tegishli bo'ladi. Shunday ekan, $y \in f(A) \cup f(B)$. Bu yerdan $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. Endi teskari munosabatni ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $y \in f(A) \cup f(B)$ ixtiyoriy element bo'lsin. U holda $y = f(x)$ bo'lib, x element A va B to'plamlardan aqalli biriga tegishli bo'ladi, ya'ni $x \in A \cup B$. Bundan, $y = f(x) \in f(A \cup B)$ va demak, $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$. Bu munosabatlardan (2.2) tenglik kelib chiqadi. $\square$

Uy vazifalari va mavzuni o'zlashtirish uchun masalalar

2.9-2.11-misollardagi akslantirishlarning qiymatlar sohasini toping.

2.9. Riman funksiyasi $\mathfrak{R} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathfrak{R}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, \ \ agar \ x = \dfrac{m}{n}, \quad m \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N} \\ 0, \ \ agar \ x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Bu formulada $\dfrac{m}{n}$ – qisqarmas kasr.

2.10. Ortogonal proyeksiyalash funksiyasi $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $P(x, y) = x$.

2.11. Sferik simmetrik akslantirish

$$S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ S(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

2.12. 2.2-misoldagi g akslantirishda $A = [0,\ 3)$ to‘plamning aksi va $B = (1,\ 4)$ to‘plamning aslini toping.

2.13. 2.9-misoldagi $\mathfrak{R}$ akslantirishda $A = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ to‘plamning tasviri va $B = (1,\ \infty)$ to‘plamning aslini toping.

2.14. Syuryektiv (inyektiv) funksiyalar yig‘indisi va ayirmasi syuryektiv (inyektiv) bo‘lishi ham, bo‘lmasligi ham mumkin. Bu hollarga misollar keltiring.

2.15. Biyektiv funksiyalar yig‘indisi va ayirmasi biyektiv bo‘lishi ham, bo‘lmasligi ham mumkin. Bu hollarga misollar keltiring.

2.16. Agar f inyektiv funksiya bo‘lsa, u holda ixtiyoriy nolmas $\alpha \in \mathbb{R}$ son uchun $\alpha\, f$ ham inyektiv funksiya bo‘ladi. Isbotlang.

2.17. Agar f inyektiv funksiya bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $\alpha \in \mathbb{R}$ son uchun $\alpha\ +\ f$ ham inyektiv funksiya bo‘ladi. Isbotlang.

2.18. Agar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ syuryektiv funksiya bo‘lsa, u holda ixtiyoriy nolmas $\alpha \in \mathbb{R}$ son uchun $\alpha\, f$ ham syuryektiv funksiya bo‘ladi. Isbotlang.

2.19. Agar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ syuryektiv funksiya bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $\alpha \in \mathbb{R}$ son uchun $\alpha\ +\ f$ ham syuryektiv funksiya bo‘ladi. Isbotlang.

2.20. Agar f biyektiv funksiya bo‘lsa, u holda $\beta \in \mathbb{R}$ va nolmas $\alpha \in \mathbb{R}$ sonlar uchun $\alpha\, f + \beta$ ham biyektiv funksiya bo‘ladi. Isbotlang.

2.21. Agar $f(x) = k\,x + l,\ k > 0$ funksiya uchun $f(a) = c,\ \ f(b) = d$ bo‘lsa, u holda $f : [a,\ b] \to [c,\ d]$ chiziqli funksiya biyeksiya bo‘ladi. Isbotlang.

2.22. Ikki to‘plam birlashmasining asli ular aslilarining birlashmasiga teng, ya’ni quyidagi tenglikni isbotlang

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

2.23. Ikki to'plam kesishmasining asli ular aslilarining kesishmasiga teng, ya'ni quyidagi tenglikni isbotlang

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

2.24. Quyidagi tengliklarni isbotlang:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha} f^{-1}(A_{\alpha}), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}\right) = \bigcap_{\alpha} f^{-1}(A_{\alpha}).$$

2.25. (2.3) tenglikni ixtiyoriy (chekli yoki cheksiz) sondagi to'plamlar uchun o'rinli ekanligini, ya'ni $f\left(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha} f(A_{\alpha})$ tenglikni isbotlang.

2.26. Umuman olganda, ikkita to'plam kesishmalarining aksi ular aksilarining kesishmasiga teng emas. Bunga misol keltiring.

2.27. 2.5-misolda keltirilgan ortogonal proyeksiyalash akslantirishi $P(x, y) = x$ va $A = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ y = 0\}$, $B = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ y = 1\}$ to'plamlar berilgan. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ tenglik to'grimi?

2.28. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ munosabatni isbotlang.

2.29. Biror X to'plam va $A \subset X$ qism to'plam berilgan bo'lsin. X to'plamda aniqlangan

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & agar \quad x \in A \\ 0, & agar \quad x \notin A \end{cases} \tag{2.4}$$

funksiya A *to'plamning xarakteristik funksiyasi* yoki *indikatori* deyiladi. $X \backslash A$; $A \cup B$; $A \cap B$; $A \backslash B$; $A \Delta B$ to'plamlarning xarakteristik funksiyalarini $\chi_A(x)$ va $\chi_B(x)$ funksiyalar orqali ifodalang.

2.30. Quyidagi ikki tenglikni isbotlang.

$$\chi_{\cup_{\alpha} A_{\alpha}}(x) = \sup_{\alpha} \chi_{A_{\alpha}}(x); \qquad \chi_{\cap_{\alpha} A_{\alpha}}(x) = \inf_{\alpha} \chi_{A_{\alpha}}(x).$$

2.31. $f(x) = x^2$ bo‘lsin. U holda:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ akslantirish syuryektiv ham, inyektiv ham emas;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ akslantirish syuryektiv, ammo inyektiv emas;

c) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ akslantirish ham syuryektiv, ham inyektiv ekanligini isbotlang.

2.32. Agar $f : A \to B$ va $g : B \to A$ inyektiv akslantirishlar mavjud bo‘lsa, $\varphi : A \to B$ biyeksiya mavjudligini isbotlang.

2.33. Agar $f : A \to B$ va $g : B \to A$ syuryektiv akslantirishlar mavjud bo‘lsa, A ni B ga biyektiv akslantirish mavjudmi?

2.34. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ akslantirish $f((x, y)) = y$ tenglik bilan aniqlangan. $A = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ va $B = \{(1, y) : y \in \mathbb{R}\}$ to‘plamlar uchun $f(A \cap B)$ va $f(A) \cap f(B)$ to‘plamlarni toping. Berilgan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ akslantirish uchun $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ tenglik to‘g‘rimi?

2.35. Ixtiyoriy $f : X \to Y$ akslantirish va $A,\ B \subset X$ to‘plamlar uchun $A \subset B$ bo‘lsa, $f(A) \subset f(B)$ munosabatni isbotlang.

2.36. $f : X \to Y$ akslantirish uchun quyidagi jumlalar teng kuchli ekanligini isbotlang:

a) $f-$ inyektiv;

b) ixtiyoriy $A, B \subset X$ uchun $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;

c) barcha $B \subset A$ to‘plamlar uchun $f(A \backslash B) = f(A) \backslash f(B)$;

d) ixtiyoriy $A \subset X$ uchun $f^{-1}(f(A)) = A$.

2.37. $f : X \to Y$ akslantirish va $A,\ B \subset Y$ to‘plamlar uchun

a) $f\left(f^{-1}(A)\right) = A \cap f(\mathrm{X})$,

b) $A \supset B$ bo‘lganda $f^{-1}(A \backslash B) = f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B)$ tengliklarni isbotlang.

2.38. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0,5 \cdot [x]$ funksiya berilgan. Agar $A = [0,\ 8]$, $B = (2,\ 3)$ bo‘lsa, $f(A)$ va $f^{-1}(B)$ to‘plamlarni toping.

2.39. $f : X \to [5,\ 10]$, $f(x) = x^2+1$ funksiya berilgan. f ustiga (syuryektiv) akslantirish bo‘ladigan maksimal X to‘plamni toping.

2.40. $f : X \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2 + 1$ funksiya berilgan. X to‘plam qanday tanlansa, f inyektiv akslantirish bo‘ladi?

2.41. $M(x, y)$ nuqta $(0,\ 1) \times (0,\ 1)$ kvadratning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. Uning abssissasi x va ordinatasi y larni cheksiz davriy o‘nli kasr ko‘rinishida $x = 0, n_1 n_2 n_3 \ldots$ va $y = 0, m_1 m_2 m_3 \ldots$ tasvirlaymiz. Quyidagi $f : (0,\ 1) \times (0,\ 1) \to (0,\ 1)$ akslantirishni

$$f(M(0, n_1 n_2 n_3 \ldots,\ 0, m_1 m_2 m_3 \ldots)) = P(0, n_1 m_1 n_2 m_2 n_3 m_3 \ldots)$$

aniqlaymiz. Bu akslantirish syuryektiv bo‘ladimi? Biyektivchi?

2.42. $f : [0,\ \pi] \to [-1,\ 1], \quad f(x) = \cos x,$
$g : [0, \pi] \to [0,\ 1], \quad g(x) = \sin x,$
$\varphi : [0,\ \frac{\pi}{2}] \to [0,\ 1], \quad \varphi(x) = \sin x,$
$\psi : [0,\ 3] \to [0,\ 10], \quad \psi(x) = x^2 + 1,$ akslantirishlar ichidan inyektiv, syuryektiv va biyektivlarini ajrating.

3- §. To‘plamlar quvvati

To‘plamlarni sinflarga ajratish. Ekvivalentlik munosabatlari.

Ko‘pgina masalalarda berilgan to‘plam elementlarini ba’zi belgilariga qarab o‘zaro kesishmaydigan qism to‘plamlarga ajratiladi. Masalan, fazoni markazi koordinata boshida va radiusi r bo‘lgan har xil sferalarga ajratish mumkin va bu sferalar o'zaro kesishmaydi. Bir shahar aholisini bir yilda tug'ilganlik belgisiga ko'ra qism to'plamlarga ajratish mumkin. Bunday misollarning har biri to'plamni o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajratish deyiladi.

To'plamlarni o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajratish belgilari har xil bo'lishi mumkin. Ammo bu belgilar ixtiyoriy emas. Masalan, tekislikda ikki a va b nuqtalar orasidagi masofa 1 dan kichik bo'lsa, ularni bitta sinfga kiritsak, bu belgi tekislikni o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajratmaydi, chunki a va b nuqtalar orasidagi masofa 1 dan kichik, b va c nuqtalar orasidagi masofa ham 1 dan kichik bo'lib, a va c nuqtalar orasidagi masofa 1 dan katta bo'lishi mumkin. Bundan ko'rinadiki, a va b nuqtalar bir sinfda, b va c ham bir sinfda. U holda bir sinfga orasidagi masofa 1 dan katta bo'lgan a va c nuqtalar tegishli bo'ladi. Hosil qilingan xulosa sinflarning tashkil qilinishiga zid, ya'ni tekislik bu belgi yordamida o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajralmaydi.

Endi to'plam elementlari qanday shartlarni qanoatlantiruvchi belgilar yordamida o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajralishini qarab chiqamiz.

3.1-ta'rif. *$X \times X$ to'plamning ixtiyoriy R qism toplami munosabat deyiladi, ya'ni $(a,b) \in R$ bo'lsa, a element b element bilan R munosabatda deyiladi va $a \underset{R}{\sim} b$ shaklda belgilanadi.*

3.2-ta'rif. *Agar R munosabat quyidagi shartlarni qanoatlantirsa, unga ekvivalentlik munosabati deyiladi:*

1. *Ixtiyoriy $a \in X$ element uchun $a \underset{R}{\sim} a$ (refleksivlik);*
2. *Agar $a \underset{R}{\sim} b$ bo'lsa, u holda $b \underset{R}{\sim} a$ (simmetriklik);*
3. *Agar $a \underset{R}{\sim} b$ va $b \underset{R}{\sim} c$ bo'lsa, u holda $a \underset{R}{\sim} c$ (tranzitivlik).*

Ekvivalent to'plamlar. Chekli va cheksiz to'plamlar. Chekli dona elementdan iborat to'plamga *chekli to'plam* deyiladi, aks holda to'plam *cheksiz* deyiladi. Cheksiz to'plamlar ichida eng soddasi *sanoqli to'plam* deb ataluvchilaridir.

3.3-ta'rif. *Agar M to'plam bilan natural sonlar to'plami o'rtasida biyektiv moslik o'rnatish mumkin bo'lsa, M ga sanoqli to'plam deyiladi.*

Boshqacha aytganda, agar M to'plam elementlarini natural sonlar vositasida $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ cheksiz ketma-ketlik ko'rinishida nomerlab chiqish mumkin bo'lsa, M ga *sanoqli to'plam* deyiladi. Chekli yoki sanoqli to'plamlarni ifodalashda biz $\{\}$ qavsdan foydalanamiz. Masalan, 1, 2, 3, 4 sonlardan iborat to'plamni $\{1, 2, 3, 4\}$ shaklda yozamiz.

3.4-ta'rif. *Sanoqli bo'lmagan cheksiz to'plam sanoqsiz to'plam deyiladi.*

3.5-ta'rif. *Agar A va B to'plamlar o'rtasida biyektiv moslik o'rnatish mumkin bo'lsa, u holda ular ekvivalent to'plamlar deyiladi va $A \sim B$ shaklda belgilanadi.*

Endi sanoqli to'plam tushunchasini boshqacha ta'riflash mumkin: agar to'plam natural sonlar to'plamiga ekvivalent bo'lsa, u *sanoqli to'plam* deyiladi.

3.6-ta'rif. $[0,\ 1]$ *kesma va unga ekvivalent bo'lgan to'plamlar kontinuum quvvatli to'plamlar deyiladi.*

3.1-teorema. $[0;\ 1]$ *kesmadagi haqiqiy sonlar to'plami sanoqsizdir.*

Kantor–Bernshteyn teoremasi yordamida to'plamlarning ekvivalentligi oson tekshiriladi. Bu teoremani quyidagicha bayon qilish mumkin.

3.2-teorema *(Kantor–Bernshteyn). Agar A to'plam B to'plamning B_1 qismiga, B to'plam esa A to'plamning A_1 qismiga ekvivalent bo'lsa, u holda A va B to'plamlar ekvivalentdir.*

To'plamlar quvvati. Agar ikkita chekli to'plam ekvivalent bo'lsa, ularning elementlari soni teng bo'ladi. Agar A va B to'plamlar ekvivalent bo'lsa, u holda ular *bir xil quvvatga ega* deyiladi. Shunday qilib, quvvat ixtiyoriy ikki ekvivalent to'plamlar uchun umumiylik xususiyatidir. A to'plamning quvvati $\overline{\overline{A}}$ bilan belgilanadi. Agar A va B to'plamlar bir xil quvvatga ega bo'lsa, u holda biz $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ shaklda yozamiz. Agar A va B to'plamlar ekvivalent bo'lmasa va

A to'plam B to'plamning biror qismiga ekvivalent bo'lsa, u holda B to'plam A to'plamdan *quvvatliroq* deyiladi va $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ shaklda yoziladi. Agar A chekli to'plam bo'lib, uning elementlari soni n ga teng bo'lsa, u holda $\overline{\overline{A}} = n$ shaklda yoziladi. Natural sonlar to'plami va unga ekvivalent to'plam quvvati uchun $\aleph_0$ ("alef nol" deb o'qiladi) belgidan foydalaniladi. $[0,\ 1]$ kesma va unga ekvivalent to'plamlar "kontinuum quvvat" li to'plamlar deyiladi. Bu quvvat uchun c simvol ishlatiladi, ya'ni $A \sim [0,\ 1]$ bo'lsa, u holda $\overline{\overline{A}} = c$ shaklda yoziladi. Agar B to'plamning biror B_1 xos qism to'plami kontinuum quvvatli bo'lib, $\overline{\overline{B}} > \overline{\overline{B_1}}$ bo'lsa, u holda B *giperkontinuum quvvatli to'plam* deyiladi.

Agar A va B to'plamlar chekli to'plamlar bo'lib, n va m mos ravishda bu to'plamlar elementlarining soni bo'lsa, A to'plamni B to'plamga barcha akslantitishlar soni m^n ga tengdir. Bunga ko'ra ixtiyoriy quvvatlarni darajaga ko'tarishni quyidagicha ta'riflash mumkin: A va B to'plamlar quvvati mos ravishda α va β bo'lsin. U holda A to'plamni B to'plamga barcha aks ettirishlar to'plami B^A ning quvvati β ning α darajasi deyiladi va β^α kabi belgilanadi.

3.3-teorema. $2^{\aleph_0} = c.$

3.4-teorema. *Bo'sh bo'lmagan A to'plam quvvati α bo'lsa, u holda A ning barcha qism to'plamlaridan tuzilgan to'plam quvvati 2^α, shu A to'plam quvvatidan katta, ya'ni $2^\alpha > \alpha$.*

3.1. Bizga $f : X \to Y$ akslantirish berilgan bo'lsin. Agar $a, b \in X$ elementlar uchun $f(a) = f(b)$ bo'lsa, ularni φ munosabatda deymiz. Bu munosabatning ekvivalentlik munosabati bo'lishini isbotlang.

Isbot. Ixtiyoriy $a \in X$ uchun $f(a) = f(a)$ tenglik o'rinli, ya'ni $a \underset{\varphi}{\sim} a$ (refleksiv) munosabat o'rinli. $f(a) = f(b)$ tenglikdan $f(b) = f(a)$ tenglik kelib chiqadi, bundan φ munosabatning simmetriklik xossasi kelib chiqadi. Agar $f(a) = f(b)$ va $f(b) = f(c)$ bo'lsa, u holda $f(a) = f(c)$ bo'ladi. Bu esa φ munosabatning tranzitivlik xossasini isbotlaydi. Demak, φ munosabat ekvivalentlik munosabati bo'ladi. $\square$

3.2. $\mathbb{Z} -$ butun sonlar to'plami sanoqli. Isbotlang.

Isbot. Butun sonlar to'plami $\mathbb{Z}$ va natural sonlar to'plami $\mathbb{N}$ o'rtasida biyektiv moslikni quyidagicha o'rnatish mumkin:

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} 2n+1, & agar \;\; n \geq 0 \\ -2n, & agar \;\; n < 0. \end{cases}$$

f ning biyektiv akslantirish ekanligi oson tekshiriladi. Demak, butun sonlar to'plami sanoqli ekan. $\square$

3.3. Ixtiyoriy ikkita $[a,\ b]$ va $[c,\ d]$ kesmalardagi nuqtalar to'plamlari ekvivalentligini isbotlang. Bu yerda $a < b,\ \ c < d$ deb faraz qilinadi.

Isbot. Bu to'plamlar o'rtasida biyektiv moslikni

$$\varphi : [a,\ b] \to [c,\ d], \quad \varphi(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a)+c.$$

orqali o'rnatish mumkin. $\varphi(a) = c,\ \varphi(b) = d$ ekanligini hisobga olsak, φ ning biyektiv akslantirish ekanligi 2.21-misoldan kelib chiqadi. $\square$

3.4. $[0,\ 1]$ kesma va $(0,\ 1)$ interval ekvivalent ekanligini isbotlang.

Isbot. Bu to'plamlarni ekvivalent ekanligini ko'rsatishda Kantor-Bernshteyn teoremasidan foydalanamiz. $A = [0,\ 1],\ A_1 = (0,\ 1),\ B = (0,\ 1)$ va $B_1 = [1/4,\ 1/2]$ desak, u holda 3.3-misolga ko'ra $A \sim B_1$ bo'ladi. $A_1 = B$ bo'lganligi uchun $I : A_1 \to B,\ Ix = x$ akslantirish biyeksiya bo'ladi, ya'ni $B \sim A_1$. Kantor-Bernshteyn teoremasiga ko'ra $A \sim B$. $\square$

3.5. Kantor to'plamini kontinuum quvvatli ekanligini isbotlang.

Isbot. Dastlab Kantor to'plami qurilishini bayon qilamiz. $E = [0,\ 1]$ bo'lsin. Undan $K_1 = (3^{-1}, 2 \cdot 3^{-1})$ intervalni chiqarib tashlaymiz, qolgan yopiq to'plamni F_1 bilan belgilaymiz. Keyin F_1 dan $K_{21} = (9^{-1}, 2 \cdot 9^{-1})$ va $K_{22} = (7 \cdot 9^{-1}, 8 \cdot 9^{-1})$ intervallarni chiqarib tashlaymiz, ularning birlashmasini K_2 orqali, qolgan yopiq to'plamni, ya'ni

$$F_1 \backslash K_2 = \left[0,\ \frac{1}{9}\right] \bigcup \left[\frac{2}{9},\ \frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3},\ \frac{7}{9}\right] \bigcup \left[\frac{8}{9},\ 1\right]$$

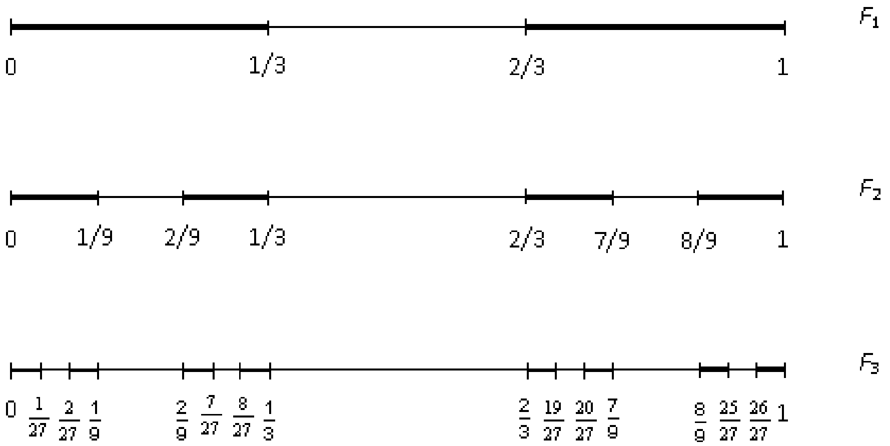
to'plamni F_2 bilan (3.1-chizma) belgilaymiz. Bu to'rtta kesmaning har biri teng 3 qismga bo'linib, o'rtadagi uzunligi 3^{-3} ga teng bo'lgan interval chiqarib tashlanadi. Chiqarib tashlangan

$$K_{31} \cup K_{32} \cup K_{33} \cup K_{34} = \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right) \bigcup \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right) \bigcup \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right) \bigcup \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$$

to'plamni K_3 bilan $F_2 \backslash K_3$ ni esa F_3 bilan (3.1-chizma) belgilaymiz. Bu jarayonni cheksiz davom ettirib, yopiq to'plamlarning kamayuvchi F_n ketma-ketligini hosil qilamiz. Agar

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

deb belgilasak, K yopiq to'plam bo'ladi. U $[0,\ 1]$ kesmadan sanoqli sondagi $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ intervallarni chiqarib tashlash natijasida hosil bo'ladi. Hosil bo'lgan K to'plam *Kantor to'plami* deyiladi.



3.1-chizma

Endi K to‘plamning tuzilishini (strukturasini) o‘rganamiz. Ravshanki, $[0,\ 1]$ kesmadan chiqarib tashlangan intervallarning oxirlari bo‘lgan

$$0,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{7}{9},\ \frac{8}{9},\cdots \tag{3.1}$$

nuqtalar K ga tegishli bo‘ladi. Biroq K to‘plam faqat shu nuqtalardan iborat emas. $[0,\ 1]$ kesmadagi K ga tegishli bo‘lgan nuqtalarni quyidagicha xarakterlash mumkin. Buning uchun $[0,\ 1]$ kesmadagi har bir x ni uchlik sistemada yozamiz:

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \ldots + \frac{a_n}{3^n} + \ldots$$

bu yerda a_n sonlar 0, 1 va 2 raqamlardan birini qabul qilishi mumkin. O‘nli kasrlar holidagidek bu yerda ham ba’zi sonlarni ikki xil ko‘rinishda yozish mumkin. Masalan,

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \cdots + \frac{0}{3^n} + \cdots = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2}{3^n} + \cdots$$

Endi K to‘plamga tegishli sonlarning uchlik sistemadagi yoyilmasi haqida fikr yuritamiz. Ravshanki, $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ intervaldagi sonlarning uchlik sistemadagi yoyilmasida a_1 son albatta 1 ga teng bo‘ladi, $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ va $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ intervallarga tegishli sonlarning uchlik sistemadagi yoyilmasida a_2 son albatta 1 ga teng bo‘ladi. Xuddi shunga o‘xshash $\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right)$, $\left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right)$, $\left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right)$ va $\left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$ intervallarga tegishli sonlar uchun ularning uchlik sistemadagi yoyilmalarida a_3 son albatta 1 ga teng bo‘ladi va hokazo. Shunday qilib, ixtiyoriy $x \in [0,\ 1]\backslash K$ son uchun uning uchlik sistemadagi yoyilmasida qatnashuvchi $a_1,\ a_2,\ldots a_n,\ldots$ sonlarning kamida bittasi 1 ga teng. Aytilgan mulohazalardan quyidagi xulosa kelib chiqadi: K to‘plamga kamida bir usul bilan uchlik kasr ko‘rinishida tasvirlanuvchi shunday $x \in [0,\ 1]$ sonlar kiradiki, ularga mos $a_1,\ a_2,\ldots a_n,\ldots$ ketma-ketlikda 1 raqami biror marta ham uchramaydi. Shunday qilib, har bir $x \in K$ uchun

$$a_1,\ a_2\,, \dots a_n, \dots \tag{3.2}$$

ketma-ketlikni mos qo'yish mumkin, bu yerda a_n raqam 0 yoki 2 ni qabul qiladi. Bunday ketma-ketliklar to'plami kontinuum quvvatli to'plamni tashkil qiladi. Bunga ishonch hosil qilish uchun har bir (3.2) ketma-ketlikka

$$b_1,\ b_2,\ \dots, b_n, \dots \tag{3.3}$$

ketma-ketlikni shunday mos qo'yamizki, agar $a_n = 0$ bo'lsa, $b_n = 0$ bo'ladi, agar $a_n = 2$ bo'lsa, $b_n = 1$ bo'ladi. Har bir (3.3) ketma-ketlikni, $[0,\ 1]$ kesmadagi biror x sonning ikkilik kasr yozuvi deb qarash mumkin. Shunday qilib, K to'plamni $[0,\ 1]$ ga biyektiv akslantirishni olamiz. Bu yerdan K ning kontinuum quvvatli to'plam ekanligi kelib chiqadi. □

Uy vazifalari va mavzuni o'zlashtirish uchun masalalar

3.6. M to'plamda kiritilgan φ munosabat M ni o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajratishi uchun uning ekvivalentlik munosabati bo'lishi zarur va yetarli. Isbotlang.

3.7. Har qanday $f : X \to Y$ akslantirish yordamida X ni o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajratish mumkinligini isbotlang.

3.8. 3.7-misoldan foydalanib, ortogonal proyeksiyalash akslantirishi $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $P(x, y) = x$ yordamida $\mathbb{R}^2$ ni o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajrating.

3.9. Sferik simmetrik akslantirish $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$, $S(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ yordamida $\mathbb{R}^3$ fazoni o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajrating.

3.10. Agar x va y haqiqiy sonlarning ayirmasi butun son bo'lsa, ularni φ munosabatda deymiz. Bu munosabat ekvivalentlik munosabati bo'lishini isbotlang.

3.11. Butun qismlari bir xil haqiqiy sonlarni bir sinfga to'plash yo'li bilan haqiqiy sonlar to'plamini sinflarga ajratamiz. Bu sinflarga ajratishga mos keluvchi akslantirishni quring.

3.12. Agar α va β kompleks sonlarning mavhum qismlari teng bo'lsa, ularni φ munosabatda deymiz. Bu munosabat ekvivalentlik munosabati bo'ladimi?

Endi sanoqli va sanoqsiz to'plamlarga misollar keltiramiz.

3.13. Barcha juft natural sonlar to'plami va natural sonlar to'plami o'rtasida biyektiv moslik o'rnating.

3.14. Ratsional sonlar to'plamining sanoqli ekanligini isbotlang.

3.15. Sanoqli to'plamning ixtiyoriy qism to'plami chekli yoki sanoqlidir. Isbotlang.

3.16. Chekli yoki sanoqlita sanoqli to'plamlar birlashmasi yana sanoqli to'plamdir. Isbotlang.

3.17. Chekli sondagi sanoqli to'plamlarning Dekart ko'paytmasi sanoqli to'plamdir. Isbotlang.

3.18. Har qanday cheksiz to'plam sanoqli qism to'plamga ega.

3.19. $\mathbb{R}$ va $(0,\ 1)$ interval ekvivalent to'plamlar ekanligini isbotlang.

3.20. Ixtiyoriy cheksiz to'plam o'zining biror xos qism to'plamiga ekvivalent bo'ladi. Isbotlang.

3.21. O'zbekistondagi barcha talabalar to'plami sanoqlimi?

3.22. Ayirmasi chekli, kesishmasi sanoqli bo'lgan A va B sanoqli to'plamlarga misol keltiring.

3.23. Simmetrik ayirmasi sanoqli, kesishmasi chekli bo‘lgan A va B sanoqli to‘plamlarga misol keltiring.

3.24. A va B sonli to‘plamlar sanoqli bo‘lsa, ularning arifmetik yig‘indisi ham sanoqli bo‘lishini isbotlang.

3.25. $\{x \in \mathbb{R} : \sin x = 0,5\}$ to‘plam sanoqli ekanligini isbotlang.

3.26. $\{x \in \mathbb{R} : \cos x \in \mathbb{Q}\}$ to‘plamning quvvatini toping.

3.27. Barcha ratsional koeffitsiyentli ko‘phadlar to‘plami sanoqli ekanligini isbotlang.

3.28. Agar ξ son biror ratsional koeffitsiyentli ko‘phadning ildizi bo‘lsa, ξ *algebraik son* deyiladi. Algebraik sonlar to‘plamining sanoqli ekanligini isbotlang.

3.29. Agar A to‘plam B ga, B to‘plam C ga ekvivalent bo‘lsa, u holda A to‘plam C ga ekvivalent bo‘lishini isbotlang.

3.30. To‘plamlar o‘rtasida kiritilgan ekvivalentlik munosabati refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo‘lishini isbotlang.

3.31. $[0,\ 1]$ kesmadagi haqiqiy sonlar to‘plami sanoqsizdir. Isbotlang.

3.32. $[0,\ 1]$ kesmani $(0,\ 1)$ intervalga biyektiv akslantiruvchi moslikni quring.

3.33. $[-1,\ 1]\times[-1,\ 1]$ kvadrat va $[a,\ b]\times[c,\ d]$ to‘g‘ri to‘rtburchak o‘rtasida biyektiv moslik o‘rnating.

3.34. $[-1,\ 1]\times[0,\ 1]$ va $\mathbb{R}^2$ o‘rtasida biyeksiya o‘rnating.

3.35. Haqiqiy sonlar to‘plami sanoqsizdir. Isbotlang.

3.36. $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ va $\mathbb{R}$ o‘rtasida biyeksiya o‘rnating.

3.37. A chekli B sanoqli to‘plam bo‘lsin, u holda $B \sim A \cup B$, $B \sim A \Delta B$ ekanligini isbotlang.

3.38-3.42-misollarda keltirilgan to‘plamlarni kontinuum quvvatli ekanligini isbotlang.

3.38. Tekislikdagi barcha nuqtalar to‘plami.

3.39. Sfera sirtidagi nuqtalar to‘plami.

3.40. Uch o‘lchamli fazodagi nuqtalar to‘plami.

3.41. Sfera ichidagi nuqtalar to‘plami.

3.42. $[a, b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalar to‘plami.

3.43. Tekislikdagi ratsional koordinatali nuqtalar to‘plamining sanoqli ekanligini isbotlang.

3.44. Ixtiyoriy cheksiz M va sanoqli A to‘plamlar uchun $M \sim M \cup A$ munosabatni isbotlang.

3.45. Ixtiyoriy kontinuum quvvatli M va sanoqli A to‘plamlar uchun $M \sim M \cup A$, $M \sim M \backslash A$, $M \sim M \Delta A$ munosabatlarni isbotlang.

3.46. Ikkita har xil cheksiz o‘nli kasrli yoyilmalarga ega bo‘lgan sonlar to‘plamining sanoqli ekanligini isbotlang.

3.47. Barcha irratsional sonlar to‘plamining sanoqsiz ekanligini isbotlang.

3.48. $[0,\ 1]$ dagi barcha ratsional sonlar bilan $[0,\ 1] \times [0,\ 1]$ dagi barcha ratsional koordinatali nuqtalar to‘plami o‘rtasida biyeksiya o‘rnating.

3.49. Koordinata boshidan o‘tuvchi barcha to‘g‘ri chiziqlar to‘plami $[0,\ 1]$ to‘plamga ekvivalentmi?

3.50. $[0,\ 1]$ to'plamni $[0,\ 1]\times[0,\ 1]$ to'plamga biyektiv akslantiring.

3.51. Ushbu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\varepsilon_n}{2^n}$ qatorda ε_n soni 0 yoki 1 ga teng bo'lishi mumkin. Demak, qator yaqinlashuvchi. Ixtiyoriy $x\in[0,\ 1]$ uchun ε_n sifatida 0 yoki 1 sonlarni shunday tanlash mumkinki,

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{2^n}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Isbot qiling. Qanday x sonlar uchun bu tanlash yagona usulda amalga oshiriladi?

3.52. Sonlar o'qidagi A to'plamning ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofa birdan katta bo'lsa, A ning chekli yoki sanoqli to'plam ekanligini isbotlang.

3.53. 3.51-masaladan foydalanib hadlari faqat 0 yoki 1 bo'lgan barcha ketma-ketliklar to'plami kontinuum quvvatli ekanligini isbotlang.

3.54. Chekli sondagi kontinuum quvvatli to'plamlarning Dekart ko'paytmasi kontinuum quvvatga ega. Isbotlang.

3.55. Kontinuum quvvatli sonli to'plamlarning arifmetik yig'indisi yana kontinuum quvvatli to'plami bo'lishini isbotlang.

3.56. Sanoqli va kontinuum quvvatli to'plamlarning Dekart ko'paytmasi kontinuum quvvatga ega. Isbotlang.

3.57. Sanoqli va kontinuum quvvatli sonli to'plamlarning arifmetik yig'indisi kontinuum quvvatli to'plam bo'lishini isbotlang.

3.58. Agar $A\subset B\subset C$ bo'lib, $A\sim C$ bo'lsa, $A\sim B$ bo'lishini isbotlang.

3.60-3.62-misollarda keltirlgan to'plamlarni 3.4-teoremadan foydalanib giperkontinuum quvvatli ekanligini isbotlang.

3.59. $[0,\ 1]$ kesmaning barcha qism to‘plamlaridan iborat to‘plam.

3.60. $[0,\ 1]$ kesmada aniqlangan va qiymatlari faqat 0 yoki 1 bo‘lgan barcha funksiyalar to‘plamining kontinuumdan quvvatliroq, ya’ni giperkontinuum quvvatli bo‘lishini isbotlang.

3.61. $\mathbb{R}^2$ ning barcha qism to‘plamlaridan iborat to‘plam.

3.62. $[0,\ 1]$ kesmada aniqlangan barcha funksiyalar to‘plami.

4-§. To‘plamlar sistemalari

To‘plamlar halqasi va yarim halqasi. Elementlari to‘plamlardan iborat to‘plam *to‘plamlar sistemasi* deyiladi. Biz asosan oldindan berilgan X to‘plamning ba’zi qism to‘plamlaridan iborat sistemalarni qaraymiz. To‘plamlar sistemalarini belgilash uchun biz gotik alifbosining bosh harflaridan foydalanamiz. Bizni asosan to‘plamlar ustidagi ba’zi amallarga nisbatan yopiq bo‘lgan sistemalar qiziqtiradi.

4.1-ta’rif. *Agar $\mathfrak{S}$ to‘plamlar sistemasi simmetrik ayirma va kesishma amallariga nisbatan yopiq, ya’ni ixtiyoriy $A,\ B \in \mathfrak{S}$ to‘plamlar uchun $A\Delta B \in \mathfrak{S}$ va $A \cap B \in \mathfrak{S}$ bo‘lsa, u holda $\mathfrak{S}$ to‘plamlar sistemasiga halqa deyiladi.*

4.1. Agar $\mathfrak{S}$ to‘plamlar sistemasi halqa bo‘lsa, u holda $\mathfrak{S}$ birlashma va ayirma amallariga nisbatan ham yopiq bo‘ladi. Isbotlang.

Isbot. Ixtiyoriy A, B to‘plamlar uchun $A \cup B = (A\Delta B)\ \Delta\ (A \cap B)$ (1.12-misol) va $A \backslash B = A\ \Delta\ (A \cap B)$ (1.13-misolga qarang) tengliklar o‘rinli. Bu tengliklardan hamda $\mathfrak{S}$ sistema halqa ekanligidan $A \cup B \in \mathfrak{S}$ va $A \backslash B \in \mathfrak{S}$ munosabatlar kelib chiqadi. □

Demak, halqa birlashma va ayirma amallariga nisbatan ham yopiq sistema bo‘lar ekan. Ushbu $A \backslash A = \emptyset$ tenglik ko‘rsatadiki, har qanday halqa o‘zida bo‘sh to‘plamni saqlaydi. Faqat bo‘sh to‘plamdan iborat sistema mumkin bo‘lgan halqalar ichida eng kichigi bo‘ladi.

Agar $\mathfrak{S}$ to‘plamlar sistemasida shunday $E \in \mathfrak{S}$ to‘plam mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $A \in \mathfrak{S}$ uchun $A \cap E = A$ bo‘lsa, E to‘plam $\mathfrak{S}$ sistemaning *"birlik elementi"* yoki *"biri"* deyiladi. Sistemaning *biri* deganda shu sistemadagi *maksimal to‘plam* tushuniladi. Hamma sistemalar ham maksimal to‘plamga ega bo‘lavermaydi. Masalan, natural sonlar to‘plamining barcha chekli qism to‘plamlaridan iborat sistemada maksimal to‘plam mavjud emas. Birlik elementga ega bo‘lgan to‘plamlar halqasi *algebra* deyiladi. Ba’zan, halqa tushunchasiga nisbatan umumiyroq bo‘lgan to‘plamlar yarim halqasi tushunchasidan ham foydalaniladi.

4.2-ta’rif. *Agar $\mathfrak{S}$ to‘plamlar sistemasi quyidagi uch shartni qanoatlantirsa, unga yarim halqa deyiladi:*

a) $\mathfrak{S}$ sistema bo‘sh to‘plamni saqlaydi;

b) $\mathfrak{S}$ sistema to‘plamlar kesishmasi amaliga nisbatan yopiq, ya’ni $A, B \in \mathfrak{S}$ munosabatdan $A \cap B \in \mathfrak{S}$ munosabat kelib chiqadi;

c) Agar $A \in \mathfrak{S}$, $A_1 \in \mathfrak{S}$ bo‘lib, $A_1 \subset A$ bo‘lsa, u holda $\mathfrak{S}$ sistemaning o‘zaro kesishmaydigan $A_2, \ldots, A_n$ cheklita elementlari mavjud bo‘lib, quyidagi tasvir o‘rinli bo‘ladi:

$$A \backslash A_1 = \bigcup_{k=2}^{n} A_k.$$

Agar A to‘plam o‘zaro kesishmaydigan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to‘plamlar birlashmasidan iborat bo‘lsa, bu birlashma A to‘plamning *chekli yoyilmasi* deyiladi va $A = \coprod_{k=1}^{n} A_k$ shakldа ham yoziladi.

Ixtiyoriy $\mathfrak{S}$ to‘plamlar halqasi yarim halqa bo‘ladi, chunki halqa bo‘sh to‘plamni saqlaydi va kesishma amaliga nisbatan yopiq. Endi c) shartning bajarilishini ko‘rsatamiz. A va $A_1\,(A_1 \subset A)$ to‘plamlar $\mathfrak{S}$ halqaga tegishli bo‘lsa, u holda $A_2 = A \backslash A_1 \in \mathfrak{S}$ bo‘lib, $A = A_1 \cup A_2$ chekli yoyilma o'rinli bo'ladi. Demak, har qanday halqa yarim halqa bo'lar ekan. Lekin, yarim halqa doim halqa bo'lavermaydi (4.14-misolga qarang). Agar $\mathfrak{S}$ to'plamlar halqasi undan olingan ixtiyoriy $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ to'plamlar ketma-ketligi bilan birgalikda ularning yig'indisi $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ ni ham o'zida saqlasa, u holda $\mathfrak{S}$ sistemaga $\sigma-$ *halqa* deyiladi. Agar $\mathfrak{S}$ to'plamlar halqasi undan olingan ixtiyoriy $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ to'plamlar ketma-ketligi bilan birgalikda ularning kesishmasi $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ ni ham o'zida saqlasa, u holda $\mathfrak{S}$ sistemaga $\delta-$ *halqa* deyiladi. Agar $\sigma-$ halqaning birlik elementi mavjud bo'lsa, u $\sigma-$ *algebra* deyiladi. Birlik elementli $\delta-$ halqa $\delta-$ *algebra* deyiladi. Shuni ta'kidlash lozimki, ikkilik prinsipidan, ya'ni

$$E \backslash \bigcup_n A_n = \bigcap_n (E \backslash A_n), \quad E \backslash \bigcap_n A_n = \bigcup_n (E \backslash A_n)$$

munosobatlardan ((1.1) va (1.4) ga qarang) $\sigma-$algebra va $\delta-$ algebra tushunchalarining ustma-ust tushishi kelib chiqadi.

4.1-teorema. *Ixtiyoriy bo'shmas $\mathfrak{S}$ to'plamlar sistemasi uchun $\mathfrak{S}$ ni o'zida saqlovchi va $\mathfrak{S}$ ni saqlovchi barcha $\mathfrak{P}$ halqalarda saqlanuvchi yagona $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ minimal halqa mavjud. Agar $\mathfrak{S}$ yarim halqa bo'lsa, u holda $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ minimal halqa A_k to'plamlar $(A_k \in \mathfrak{S})$ bo'yicha $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ chekli yoyilmaga ega bo'lgan A to'plamlarning $\mathfrak{X}$ sistemasi bilan ustma-ust tushadi.*

$\mathfrak{M}(\mathfrak{S})-$ $\mathfrak{S}$ sistema ustiga qurilgan *minimal halqa* deyiladi.

Har qanday cheksiz A to'plamning barcha qism to'plamlari sistemasi $\mathfrak{A}(A)$, $\sigma-$ algebra bo'ladi. Agar biror $\mathfrak{S}$ sistema berilgan bo'lsa, doim uni saqlovchi $\sigma-$ algebra mavjud. Haqiqatan ham, agar $X = \bigcup\limits_{A \in \mathfrak{S}} A$ desak, X ning barcha qism to'plamlaridan tuzilgan $\mathfrak{A}(X)$, sistema $\mathfrak{S}$ ni o'zida saqlovchi $\sigma-$ algebra bo'ladi. Agar $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{S}$ ni o'zida saqlovchi ixtiyoriy $\sigma-$ algebra va $\widetilde{X}$ uning biri bo'lsa, u holda ixtiyoriy $A \in \mathfrak{S}$ to'plam $A \subset \widetilde{X}$ munosabatga bo'ysunadi, va shunday ekan, $X = \bigcup\limits_{A \in \mathfrak{S}} A \subset \widetilde{X}$. Agar $\mathfrak{S}$ ni saqlovchi $\mathfrak{P} - \sigma-$ algebraning biri $\widetilde{X}$ uchun $X = \widetilde{X}$ munosabat bajarilsa, bu $\sigma-$ algebra ($\mathfrak{S}$ ga nisbatan) *keltirilmaydigan* $\sigma-$ *algebra* deyiladi.

4.2-teorema. *Ixtiyoriy bo'shmas* $\mathfrak{S}$ *to'plamlar sistemasi uchun (bu sistemaga nisbatan) keltirilmaydigan shunday* $\mathfrak{B}(\mathfrak{S}), \sigma-$ *algebra mavjudki, bu* $\sigma-$ *algebra* $\mathfrak{S}$ *ni saqlaydi va* $\mathfrak{S}$ *ni saqlovchi barcha* $\sigma-$ *algebralarda saqlanadi.*

4.2-teoremada keltirilgan $\sigma-$ algebra $\mathfrak{S}$ sistema ustiga qurilgan minimal $\sigma-$ *algebra* deyiladi.

Sonlar o'qidagi barcha $[a,\ b]$ kesmalar va $[a,\ b),\ (a,\ b]$ yarim intervallar va $(a,\ b)$ intervallardan tashkil topgan $\mathfrak{S}$ yarim halqani qarasak, u holda $\mathfrak{S}$ ustida qurilgan keltirilmaydigan minimal $\mathfrak{B}(\mathfrak{S}),\ \sigma-$ algebra elementlari *Borel to'plamlari* yoki *"Borel tipidagi" to'plamlar* deyiladi.

$\mathbb{R}$ sonlar o'qi, x_0 uning biror nuqtasi bo'lsin. $\mathbb{R}$ da $O_\varepsilon(x_0) = =(x_0 - \varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$ interval x_0 *nuqtaning* $\varepsilon-$ *atrofi* deyiladi. Bizga $M \subset \mathbb{R}$ to'plam va $x \in \mathbb{R}$ nuqta berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $O_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$ munosabat bajarilsa, x nuqta M ning *urinish nuqtasi* deyiladi. M to'plamning barcha urinish nuqtalaridan iborat to'plam, M ning *yopig'i* deyiladi va u $[M]$ bilan belgilanadi. Agar x ning ixtiyoriy $O_\varepsilon(x)$ atrofi M ning cheksiz ko'p elementlarini saqlasa, u holda x nuqta M to'plamning *limitik nuqtasi* deyiladi. M ning barcha limitik nuqtalaridan iborat to'plamni M' bilan belgilaymiz. Agar $M = M'$ bo'lsa, M ga *mukammal to'plam* deyiladi. M to'plamga tegishli x nuqta uchun shunday $\varepsilon > 0$ mavjud bo'lib, $O_\varepsilon(x) \cap M = \{x\}$ bo'lsa, u holda x nuqta M to'plamning *yakkalangan nuqtasi* deyiladi. Agar M to'plam uchun $M = [M]$ tenglik bajarilsa, M ga *yopiq to'plam* deyiladi. Boshqacha aytganda, agar to'plam o'zining barcha limitik nuqtalarini saqlasa, u *yopiq to'plam* deyiladi. Agar $x \in M$ nuqta uchun shunday $\varepsilon > 0$ mavjud bo'lib, $O_\varepsilon(x) \subset M$ bo'lsa, x nuqta M to'plamning *ichki nuqtasi* deyiladi. Agar to'plamning barcha nuqtalari ichki nuqta bo'lsa, u *ochiq to'plam* deyiladi. Ya'ni faqat ichki nuqtalardan tashkil topgan to'plam *ochiq to'plam* deyiladi. Agar A va B to'plamlar uchun $B \subset [A]$ bo'lsa, u holda A to'plam B to'plamda *zich* deyiladi. Xususan, agar $[A] = \mathbb{R}$ bo'lsa, A to'plam $\mathbb{R}$ ning *hamma yerida zich* deyiladi. Agar A to'plam birorta ham $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ intervalda zich bo'lmasa, u holda A *hech yerda zichmas* deyiladi. Xuddi shunday tekislikdagi to'plamlar uchun ham ochiq va yopiq to'plam, hamda hamma yerda zich va hech yerda zichmas to'plam tushunchalari kiritiladi.

Endi Borel to'plamlarini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

4.3-ta'rif. *Sonlar o'qidagi barcha ochiq va yopiq to'plamlar, ularning chekli yoki sanoqli birlashmalaridan iborat to'plamlar va ularning to'ldiruvchilari Borel to'plamlari yoki Borel tipidagi to'plamlar deyiladi.*

4.4-ta'rif. *Bo'sh bo'lmagan* X *to'plamda* $*$ *binar amal kiritilgan bo'lib, u quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:*

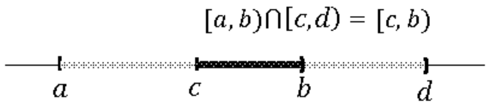
1) ixtiyoriy $x, y, z \in X$ *lar uchun* $(x * y) * z = x * (y * z)$ *bo'lsa;*

2) shunday $e \in X$ *element mavjud bo'lib, ixtiyoriy* $x \in X$ *uchun* $e * x = x * e = x$ *bo'lsa;*

3) ixtiyoriy $x \in X$ *uchun shunday* $x^{-1} \in X$ *element mavjud bo'lib,* $x * x^{-1} = e$ *bo'lsa,* $(X, *)$ *juftlikka gruppa deyiladi. Agar* X *gruppadagi ixtiyoriy* x, y *lar uchun* $x * y = y * x$ *bo'lsa,* X *ga kommutativ gruppa deyiladi.*

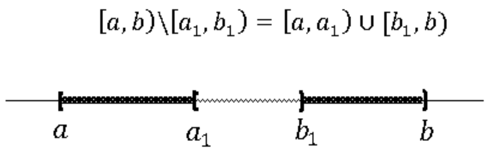
4.2. Sonlar o'qidagi barcha $[a,\ b)$ yarim ochiq intervallar sistemasi $- \mathfrak{S}$ yarim halqa bo'lishini isbotlang.

Isbot. $\mathfrak{S}$ bo'sh $[a,\ a) = \emptyset$ ni saqlaydi. $\mathfrak{S}$ to'plamlar kesishma amaliga nisbatan yopiq, ya'ni $[a, b),\ [c, d) \in \mathfrak{S}$ munosabatdan $[a, b) \cap\ [c, d) \in \mathfrak{S}$



4.1-chizma

(4.1-chizma) munosabat kelib chiqadi. $[a,\ b) \in \mathfrak{S},\ [a_1,\ b_1) \in \mathfrak{S}$, va $[a_1,\ b_1) \subset [a,\ b)$ ekanligidan $[a,\ b)\backslash[a_1,\ b_1) = [a,\ a_1) \cup [b_1,\ b)$ tasvir (4.2-chizmaga qarang) o‘rinli hamda $[a,\ a_1)$ va $[b_1,\ b)$ lar $\mathfrak{S}$ ga qarashli. Demak, $\mathfrak{S}$ yarim halqa bo‘ladi. $\square$



4.2-chizma

4.3. 4.2-misolda keltirilgan $\mathfrak{S}$ sistema halqa bo‘lmaydi. Isbotlang.

Isbot. Buning uchun $\mathfrak{S}$ sistemaning to‘plamlar simmetrik ayirmasi amaliga nisbatan yopiq emasligini ko‘rsatish yetarli. $\mathfrak{S}$ sistemadan olingan $A = [0,\ 5)$ va $B = [1,\ 3)$ to‘plamlarning simmetrik ayirmasini qaraymiz. Bu holda $A\Delta B = [0,\ 1) \cup [3,\ 5)$ bo‘lib, u $\mathfrak{S}$ sistemaga qarashli emas. Demak, $\mathfrak{S}$ sistema halqa bo‘lmaydi. $\square$

4.4. $\mathfrak{S} = \{A \subset \mathbb{R} : A\ yo\ \mathbb{R}\backslash A\ \ to'plamlardan\ biri\ chekli\}$ sistemaning $\sigma-$ algebra bo‘la olmasligini ko‘rsating.

Isbot. Berilgan $\mathfrak{S}$ sistema sanoqli birlashmaga nisbatan yopiq emas. Masalan, $A_n = \{n\} \in \mathfrak{S}$, lekin ularning birlashmasi $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \notin \mathfrak{S}$. $\square$

4.5. Agar $\mathfrak{S}$ to‘plamlar sistemasi halqa bo‘lsa, u simmetrik ayirma amaliga nisbatan kommutativ gruppa tashkil qiladi. Isbotlang.

Isbot. 4.4-ta’rif shartlarini bajarilishini tekshiramiz:

1) ixtiyoriy $A,\ B,\ C \in \mathfrak{S}$ lar uchun $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$ ya’ni $(A * B) * C = A * (B * C)$ o‘rinli.

2) shart ixtiyoriy $x \in X$ element uchun $e * x = x * e = x$ tenglikni qanoatlantiruvchi $e \in X$ element sigatida $\emptyset \in \mathfrak{S}$ ni olamiz. U holda $\emptyset\triangle A =$

$A \triangle \emptyset = A$ tenglik oʻrinli boʻladi.

3) teskari elementning mavjudligi. Ixtiyoriy $x = A \in \mathfrak{S}$ uchun x^{-1} sifatida $A \in \mathfrak{S}$ ni olamiz, u holda $x * x^{-1} = e$ tenglik $A \triangle A = \emptyset$ koʻrinishni oladi.

4) kommutativlik $x * y = y * x$ sharti esa $A \triangle B = B \triangle A$ tenglik koʻrinishga ega boʻladi. $\square$

Uy vazifalari va mavzuni oʻzlashtirish uchun masalalar

4.6. Agar $\mathfrak{S}$ toʻplamlar sistemasi halqa boʻlsa, u holda $\mathfrak{S}$ chekli sondagi birlashma va kesishma amallariga nisbatan yopiq boʻladi. Isbotlang.

4.7. Agar $\mathfrak{S}$ toʻplamlar sistemasi simmetrik ayirma va birlashma amallariga nisbatan yopiq boʻlsa, uning halqa boʻlishini isbotlang.

4.8. Agar $\mathfrak{S}$ toʻplamlar sistemasi simmetrik ayirma va ayirma amallariga nisbatan yopiq boʻlsa, uning halqa boʻlishini isbotlang.

4.9. Agar $\mathfrak{S}$ toʻplamlar sistemasi kesishma va ayirma amallariga nisbatan yopiq boʻlsa, u halqa boʻlmasligi mumkin. Misol keltiring.

4.10. Agar $\mathfrak{S}$ toʻplamlar sistemasi birlashma va kesishma amallariga nisbatan yopiq boʻlsa, u halqa boʻlmasligi ham mumkin. Misol keltiring.

4.11. Ixtiyoriy A toʻplam uchun uning barcha qism toʻplamlaridan tuzilgan $\mathfrak{A}(A)-$ sistema, biri $E = A$ boʻlgan algebra boʻladi. Isbotlang.

4.12. Ixtiyoriy A toʻplam uchun uning barcha chekli qism toʻplamlaridan tuzilgan sistema halqa boʻladi. Bu halqa algebra boʻlishi uchun A chekli toʻplam boʻlishi zarur va yetarli. Isbotlang.

4.13. Ixtiyoriy boʻshmas A toʻplam uchun A va $\emptyset$ toʻplamlardan tuzilgan $\{A, \emptyset\}$ sistema, biri $E = A$ boʻlgan algebra boʻladi. Isbotlang.

4.14. Sonlar oʻqidagi barcha chegaralangan toʻplamlar sistemasi halqa boʻladi, ammo algebra boʻlmaydi. Isbotlang.

4.15. Ixtiyoriy $\{\mathfrak{P}_\alpha\}$ halqalar sistemasi uchun ularning kesishmasi $\mathfrak{P} = \bigcap\limits_{\alpha} \mathfrak{P}_\alpha$ yana halqa boʻladi. Isbotlang.

4.16. Ixtiyoriy boʻshmas $\mathfrak{S}$ toʻplamlar sistemasi uchun $\mathfrak{S}$ ni oʻzida saqlovchi va $\mathfrak{S}$ ni saqlovchi barcha $\mathfrak{P}$ halqalarda saqlanuvchi yagona $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ minimal halqa mavjud. Isbotlang.

4.17. $[0,\ 1)$ dagi barcha $[a,\ b)$ yarim ochiq intervallar va ularning chekli sondagi birlashmalaridan iborat sistemani qaraymiz. Uning halqa boʻlishini isbotlang.

4.18. 4.17-misolda keltirilgan sistemaning algebra boʻlishini isbotlang.

4.19. 4.17-misolda keltirilgan sistemaning $\sigma-$ algebra boʻla olmaisligini isbotlang.

4.20. $\mathfrak{S}$ yarim halqadan A toʻplam va oʻzaro kesishmaydigan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ toʻplamlar olingan boʻlib, ularning har biri A toʻplamda saqlansin. U holda $A_1, A_2, \ldots, A_n$ toʻplamlarni $A_{n+1}, \ldots, A_s \in \mathfrak{S}$ toʻplamlar bilan A toʻplamning chekli yoyilmasiga qadar toʻldirish mumkin. Isbotlang.

4.21. $\mathfrak{S}$ yarim halqadan olingan har qanday cheklita $A_1, A_2, \ldots, A_n$ toʻplamlar sistemasi uchun $\mathfrak{S}$ da shunday oʻzaro kesishmaydigan cheklita $B_1, \ldots, B_t$ toʻplamlar sistemasi mavjudki, har bir A_k toʻplam $B_1, \ldots, B_t$ toʻplamlardan baʼzilari yordamida $A_k = \bigcup\limits_{s \in M_k} B_s$ yigʻindi koʻrinishida tasvirlanadi. Bu yerda $M_k \subset \{1,\ 2, \ldots,\ t\}$. Isbotlang.

4.22. Agar $\mathfrak{S}$ yarim halqa boʻlsa, u holda bu yarim halqadan hosil qilingan minimal halqa A_k toʻplamlar boʻyicha $A = \bigcup\limits_{k \geq 1} A_k,\ A_k \in \mathfrak{S}$ chekli yoyilmaga ega bo‘lgan A to‘plamlarning $\mathfrak{X}$ sistemasi bilan ustma-ust tushadi. Isbotlang.

4.23. Tekislikdagi barcha kvadratlar to‘plami yarim halqa bo‘ladimi?

4.24. Yarim halqalarning Dekart ko‘paytmasi yarim halqa bo‘ladimi?

4.25. Sonlar o‘qidagi barcha ochiq va yopiq to‘plamlar sistemasi yarim halqa (halqa) tashkil qiladimi?

4.26. Sonlar o‘qidagi barcha chekli yoki to‘ldiruvchisi chekli bo‘lgan to‘plamlar sistemasi halqa tashkil qiladimi?

4.27. $\mathfrak{S} = \{A \subset \mathbb{R} : A\ yo\ \mathbb{R}\backslash A\ \ to'plamlardan\ biri\ chekli\}$ sistemaning algebra tashkil qilishini isbotlang.

4.28. $\mathfrak{S} = \{A \subset \mathbb{R} : A\ yo\ \mathbb{R}\backslash A\ \ to'plamlardan\ biri\ chekli\ yoki\ sanoqli\}$ sistemaning $\sigma-$ algebra bo‘lishini isbotlang.

4.29. $\mathfrak{S} = \{A \cap B : A \subset \mathbb{R} - yopiq,\ B \subset \mathbb{R}\ ochiq\ to'plam\}$ sistemaning algebra bo‘lishini isbotlang.

4.30. 29-misolda keltirilgan sistemaning $\sigma-$ algebra bo‘la olmasligini ko‘rsating.

4.31. Shunday $\mathfrak{S}$ va $\mathfrak{P}$ halqalarga misol keltiringki, ularning birlashmasi halqa bo‘lmasin.

4.32. $A = \{a,\, b,\, c\}$ to‘plamning halqa va algebra tashkil qiluvchi barcha qism to‘plamlari sistemasini yozib chiqing.

4.33. Sonlar o‘qidagi barcha chekli to‘plamlar sistemasi halqa (yarim halqa) tashkil qiladimi?

4.34. Sonlar o‘qidan olingan barcha $[a,\ b]$ kesmalar va $[a,\ b)$, $(a,\ b]$ yarim intervallar va $(a,\ b)$ intervallar sistemasi yarim halqa bo‘lishini isbotlang. Bu sistemaning halqa bo‘la olmasligini ko‘rsating.

4.35. Tekislikdagi barcha yarim ochiq $\{(x, y): \ a < x \leq b, \ c < y \leq d\}$ to'g'ri to'rtburchaklar sistemasi yarim halqa bo'lishini isbotlang. Bu sistemaning simmetrik ayirma amaliga nisbatan yopiq emasligini ko'rsating.

4.36. Tekislikda $\big\{(x, \, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x < b, \ c \leq y < d\big\}$ ko'rinishdagi barcha to'g'ri to'rtburchaklar sistemasi yarim halqa bo'lishini isbotlang. Bu sistemaning birlik elementi mavjudmi? Bu sistema halqa bo'ladimi?

4.37. $\mathfrak{S} = \{(x, \, y) : a \leq x < b, \ c \leq y < d\}$ yarim halqada $A_1 \subset A$ shartni qanoatlantiruvchi $A = [0, 7) \times [0, 7)$ va $A_1 = [1, 3) \times [3, 5)$ to'plamlar berilgan. $A \backslash A_1$ to'plamning chekli yoyilmasida eng kamida nechta to'g'ri to'rtburchak qatnashadi. $A \backslash A_1$ to'plam yoyilmasidagi to'g'ri to'rtburchaklarni shunday tanlangki, ular perimetrlari yig'indisi minimal bo'lsin.

4.38. Sonlar o'qidagi barcha chegaralangan to'plamlar sistemasi halqa bo'lishini isbotlang. Bu sistema $\sigma-$ halqa bo'ladimi? $\sigma-$ algebrachi?

4.39. $\mathfrak{P}$ halqa bo'lsin. Har bir $A \in \mathfrak{P}$ uchun $\mathfrak{P}_A$ bilan $\{A \cap B, B \in \mathfrak{P}\}$, ko'rinishdagi to'plamlar sistemasini belgilaymiz. $\mathfrak{P}_A$ ning algebra bo'lishini isbotlang. Agar $\mathfrak{P}$ sistema $\sigma-$halqa bo'lsa, u holda $\mathfrak{P}_A$ to'plamlar sistemasi $\sigma-$ algebra bo'ladi. Isbotlang.

4.40. X cheksiz elementli to'plam bo'lsin. Uning barcha chekli yoki sanoqli qism to'plamlaridan iborat sistema $\sigma-$halqa bo'lishini isbotlang. X to'plamga qanday shart qo'yilsa bu sistema algebra bo'ladi.

4.41. Quyida berilgan to'plamlar sistemasi yarim halqa, halqa va algebra tashkil qiladimi? Tekshiring.

a) $\{[a, \, b] : a \in \mathbb{Q}, \ b \in \mathbb{Q} \wedge a < b\} \cup \emptyset$,

b) $\{(a, \, b] : a \in \mathbb{Z}, \ b \in \mathbb{Z} \wedge a < b\} \cup \emptyset$,

c) $\{[a, \, b) : a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, \ b \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \wedge a < b\} \cup \emptyset$.

4.42. bo‘sh bo‘lmagan X to’plamning barcha qism to’plamlaridan tashkil topgan $\mathfrak{A}(X)$ sistema simmetrik ayirma "Δ" amaliga nisbatan kommutativ gruppa tashkil qilishini isbotlang.

5-§. O‘lchovli to‘plamlar

Bu paragrafda biz o‘lchovning umumiy ta’rifini beramiz. O‘lchovni yarim halqadan halqaga davom ettirish masalasini qaraymiz. Bundan tashqari o‘lchovning Jordan va Lebeg ma’nosidagi davomlari qaraladi va ularning additivlik, $\sigma-$ additivlik xossalari o‘rganiladi.

Dastlab sonlar o‘qidagi va tekislikdagi to‘plamlarning Lebeg ma’nosidagi o‘lchoviga ta’rif beriladi. Jordan va Lebeg ma’nosidagi o‘lchovli to‘plamlar solishtiriladi.

5.1-ta’rif. *Aniqlanish sohasi $\mathfrak{S}_\mu$ yarim halqa bo‘lgan $\mu : \mathfrak{S}_\mu \to \mathbb{R}_+$ to‘plam funksiyasi additiv bo‘lsa, ya’ni o‘zaro kesishmaydigan ixtiyoriy $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{S}_\mu$ to‘plamlar uchun $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{S}_\mu$ bo‘lganda*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, $\mu : \mathfrak{S}_\mu \to \mathbb{R}_+$ ga o‘lchov deyiladi.

Boshqacha aytganda, μ to‘plam funksiyasi quyidagi

1) aniqlanish sohasi yarim halqa, 2) qiymatlari haqiqiy va manfiymas, 3) additivlik shartlarini qanoatlantirsa, unga *o‘lchov* deyiladi.

5.1-eslatma. $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ yoyilmadan $\mu(\emptyset) = 2\mu(\emptyset)$, ya’ni $\mu(\emptyset) = 0$ tenglik kelib chiqadi.

5.2-ta’rif. *Agar m o‘lchovning aniqlanish sohasi $\mathfrak{S}_m$ ikkinchi μ o‘lchovning aniqlanish sohasi $\mathfrak{S}_\mu$ da saqlansa $(\mathfrak{S}_m \subset \mathfrak{S}_\mu)$ va ixtiyoriy $A \in \mathfrak{S}_m$ to‘plam uchun*

$$\mu(A) = m(A)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda μ o'lchov m o'lchovning davomi deyiladi.

5.1-teorema. *Aniqlanish sohasi $\mathfrak{S}_m$ yarim halqa bo'lgan har bir m o'lchov uchun aniqlanish sohasi $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ ($\mathfrak{S}_m$ ni o'zida saqlovchi minimal halqa) bo'lgan yagona m' davom mavjud.*

5.3-ta'rif. *Agar $\mathfrak{S}_m$ sistemada aniqlangan m o'lchov va ixtiyoriy o'zaro kesishmaydigan sanoqlita $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathfrak{S}_m$ to'plamlar uchun $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{S}_m$ bo'lganda*

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda m o'lchov sanoqli additiv yoki $\sigma-$ additiv o'lchov deyiladi.

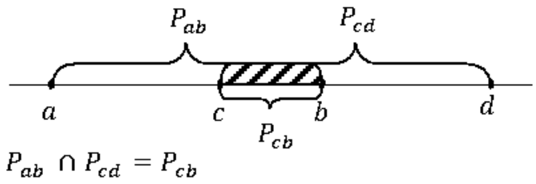
Sodda to'plam o'lchovi. Aytaylik a va b lar ixtiyoriy sonlar bo'lsin. Sonlar o'qida

$$a \leq x \leq b, \quad a \leq x < b, \quad a < x \leq b, \quad a < x < b$$

tengsizliklarning istalgan biri bilan aniqlangan to'plamlar sistemasi berilgan bo'lsin. Bu to'plamlarni *oraliqlar* deb ataymiz. Xususan, agar yuqoridagi shartlardan birini qanoatlantiruvchi nuqtalar mavjud bo'lmasa (masalan $a > b$), ya'ni $\emptyset$ to'plamni ham *oraliq* deb ataymiz. $\mathfrak{S}$ bilan sonlar o'qidagi barcha oraliqlar sistemasini belgilaymiz.

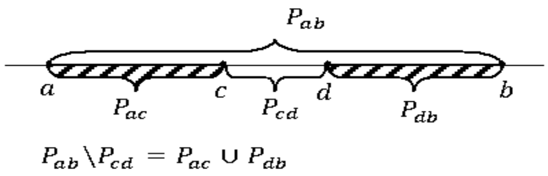
5.1. Sonlar o'qidagi barcha oraliqlar sistemasi $-$ $\mathfrak{S}$ yarim halqa tashkil qiladi.

Isbot. $\mathfrak{S}$ sistemaning elementlari $[a,\ b]$, $[a,\ b)$, $(a,\ b]$, $(a,\ b)$ ko'rinishdagi oraliqlardan iborat. $\mathfrak{S}$ sistemadan olingan va $a,\ b$ sonlari bilan aniqlangan (yopiq, ochiq yoki yarim ochiq) oraliqni $P = P_{ab}$ bilan belgilaymiz. $\mathfrak{S}$ bo'sh $[a,\ a) = \emptyset$ to'plamni saqlaydi. $\mathfrak{S}$ sistema to'plamlar kesishmasi amaliga nisbatan yopiq, ya'ni ikki P_{ab} va P_{cd} oraliqning kesishmasi bo'sh to'plam yoki yana $P_{ab} \cap P_{cd} = P_{nm}$, $n = \max\{a,\ c\}$, $m = \min\{b,\ d\}$ oraliq (5.1-chizmaga qarang) bo'ladi.



5.1-chizma

Agar $P_{ab} \in \mathfrak{S}$, $P_{cd} \in \mathfrak{S}$ bo'lib $P_{cd} \subset P_{ab}$ bo'lsa, u holda $P_{ab} \backslash P_{cd} = P_{ac} \cup P_{db}$ yoyilma (5.2-chizma) o'rinli. Demak, $\mathfrak{S}$ yarim halqa bo'ladi. $\square$



5.2-chizma

$\mathfrak{S}$ yarim halqadan olingan va a, b sonlari bilan aniqlangan (yopiq, ochiq yoki yarim ochiq) bo'sh bo'lmagan $P = P_{ab}$ oraliq uchun $m(P) = b - a$ sonni mos qo'yamiz, agar P bo'sh to'plam bo'lsa $m(P) = 0$ deymiz. U holda $m : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ to'plam funksiyasi 5.1-ta'rif shartlarini qanoatlantiradi, ya'ni $m : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ o'lchov bo'ladi. Bu o'lchovning additivlik shartini keltiramiz: agar

$$P = \bigcup_{k=1}^{n} P_k, \quad P_i \cap P_k = \emptyset, \quad i \neq k, \quad P, P_k \in \mathfrak{S}$$

bo'lsa, u holda $m(P) = \sum\limits_{k=1}^{n} m(P_k)$ tenglik o'rinli.

$\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ bilan $\mathfrak{S}$ yarim halqa ustiga qurilgan minimal halqani belgilaymiz. 4.1-teoremaga ko'ra $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ halqaning har bir elementi A o'zaro kesishmaydigan $P_k \in \mathfrak{S}$ oraliqlarning birlashmasi ko'rinishida tasvirlanadi, ya'ni $A = \coprod\limits_{k=1}^{n} P_k$. $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ halqa elementlarini *sodda to'plamlar* deymiz. Endi $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ halqadagi to'plamlarning, ya'ni sodda to'plamlarning o'lchovi tushunchasini kiritamiz. Har bir $A = \coprod\limits_{k=1}^{n} P_k \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ sodda to'plamga

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m\left(P_k\right) \tag{5.1}$$

sonni mos qo‘yuvchi $m' : \mathfrak{M}(\mathfrak{S}) \to \mathbb{R}$ moslikni aniqlaymiz. $m'(A)$ miqdor A to‘plamning *o‘lchovi* deyiladi.

Lebeg o‘lchovi. Dastlab $E = [0,\ 1]$ birlik kesmada saqlanuvchi to‘plamlar bilan chegaralanamiz.

5.4-ta’rif. *Ixtiyoriy $A \subset E$ to‘plam uchun*

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \cup_k P_k} \sum_k m\left(P_k\right) \tag{5.2}$$

son A to‘plamning tashqi o‘lchovi deyiladi.

(5.2) da aniq quyi chegara A to‘plamni qoplovchi oraliqlarning barcha chekli yoki sanoqli sistemalari bo‘yicha olinadi. Shuni ta’kidlaymizki, ixtiyoriy $A \subset E$ to‘plamning tashqi o‘lchovi mavjud. Chunki infimum belgisi ostidagi ifoda $\sum m\left(P_k\right)$ manfiymas, shuning uchun u quyidan nol bilan chegaralangan. Quyidan chegaralangan sonli to‘plam esa aniq quyi chegaraga ega. Endi $A \subset E$ to‘plam *o‘lchovi* ta’rifini beramiz.

5.5-ta’rif. *Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ sodda to‘plam mavjud bo‘lib, $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda A Lebeg ma’nosida o‘lchovli to‘plam deyiladi.*

Agar A Lebeg ma’nosida o‘lchovli to‘plam bo‘lsa, uning o‘lchovi deb tashqi o‘lchovini qabul qilamiz. Faqat o‘lchovli to‘plamlar sistemasi $\mathfrak{U}(E)$ da aniqlangan μ^* to‘plam funksiyasi *Lebeg o‘lchovi* deyiladi va u μ bilan belgilanadi. Shunday qilib, o‘lchovli to‘plamlar sistemasi $\mathfrak{U}(E)$ va unda Lebeg o‘lchovi μ aniqlandi. Demak, ixtiyoriy $A \in \mathfrak{U}(E)$ uchun $\mu(A) = \mu^*(A)$.

Biz yuqorida faqat $E = [0,\ 1]$ kesmada saqlanuvchi to‘plamlarni qaradik. Bu cheklashdan xalos bo‘lish mumkin. Ma’lumki, $\mathbb{R}$ ni

$$E_n = [n,\, n+1), \quad n \in \mathbb{Z}$$

oraliqlar yig‘indisi ko‘rinishida tasvirlash mumkin, ya’ni

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} E_n.$$

5.6-ta'rif. *Agar har bir* $n \in \mathbb{Z}$ *uchun* $A_n = A \cap E_n$ *to'plamlar o'lchovli bo'lsa, u holda* A *to'plam o'lchovli deyiladi. Agar* A *to'plam o'lchovli bo'lsa, quyidagi yig'indi*

$$\mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu(A_n), \tag{5.3}$$

A *to'plamning Lebeg o'lchovi deyiladi.*

Agar (5.3) qator yig'indisi chekli bo'lsa, A *chekli o'lchovli to'plam* deyiladi. Aks holda A *cheksiz o'lchovli to'plam* deyiladi. Shuning uchun μ o'lchov cheksiz qiymat ham qabul qilishi mumkin.

5.2. $A = \bigcup_{n=1}^{8} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{8},\ \frac{1}{n} + \frac{1}{8}\right)$ ni sodda to'plam ekanligini ko'rsating. Uni eng kam sondagi o'zaro kesishmaydigan $P_1, P_2, \ldots, P_n$ oraliqlar birlashmasi ko'rinishida tasvirlang. $A = \bigcup_{k=1}^{n} P_k$ yoyilmadan foydalanib, A to'plamning o'lchovini toping.

Yechish. $P_n = \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{8},\ \frac{1}{n} + \frac{1}{8}\right)$, $n = 1, 2, \ldots, 8$ belgilash olamiz va P_n oraliqlarning kesishish yoki kesishmasligini tekshiramiz.

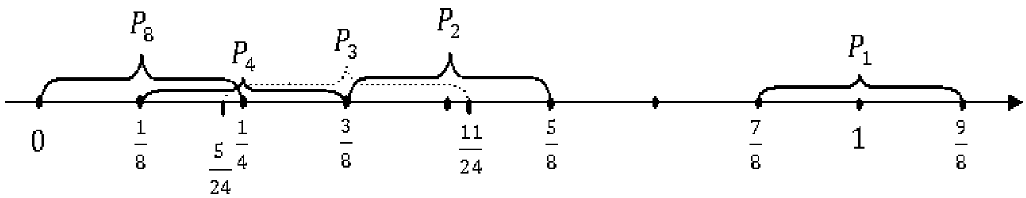
$$P_1 = \left[\frac{7}{8},\ \frac{9}{8}\right),\ \ P_2 = \left[\frac{3}{8},\ \frac{5}{8}\right),\ \ P_3 = \left[\frac{5}{24},\ \frac{11}{24}\right), \ldots, P_8 = \left[0,\ \frac{1}{4}\right).$$

5.3-chizmadan ma'lum bo'ldiki, $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, $P_k \cap P_{k+1} \neq \emptyset$, $k = 2, 3, \ldots, 8$. Shuning uchun

$$A = P_1 \cup Q_1, \quad Q_1 = \bigcup_{n=2}^{8} P_n = \left[0,\ \frac{5}{8}\right), \quad P_1, Q_1 \in \mathfrak{S}$$

tasvir eng kam sonli yoyilma bo'ladi. Demak, A sodda to'plam. Bu yoyilmadan quyidagi tenglikni olamiz:

$$\mu(A) = \mu(P_1) + \mu(Q_1) = \frac{2}{8} + \frac{5}{8} = \frac{7}{8}. \qquad \square$$



5.3-chizma

Elementar to'plam o'lchovi. Endi tekislikdagi to'plamlarning Lebeg o'lchoviga to'xtalamiz. Aytaylik a, b, c va d lar ixtiyoriy haqiqiy sonlar bo'lsin. Tekislikda biror Dekart koordinatalar sistemasi tayinlangan bo'lib, shu sistemada

$$a \le x \le b, \quad a \le x < b, \quad a < x \le b, \quad a < x < b$$

va

$$c \le y \le d, \quad c \le y < d, \quad c < y \le d, \quad c < y < d$$

tengsizliklarning istalgan bir jufti bilan aniqlangan to'plamlar sistemasi berilgan bo'lsin. Bu to'plamlarni *to'g'ri to'rtburchaklar* deb ataymiz. Xususan, agar yuqoridagi shartlardan birini qanoatlantiruvchi nuqtalar mavjud bo'lmasa (masalan $a > b$ yoki $c > d$ bo'lsa) uni ham *to'g'ri to'rtburchak* deb ataymiz. $\mathfrak{S}^2$ bilan tekislikdagi barcha to'g'ri to'rtburchaklar sistemasini belgilaymiz.

Sonlar o'qi holidagidek tekislikdagi $A \subset E^2 = [0,\ 1] \times [0,\ 1]$ to'plamning *tashqi o'lchovi* va *Lebeg o'lchovi* ta'riflarini berish mumkin.

5.7-ta'rif. *Ixtiyoriy $A \subset E^2$ to'plam uchun*

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \cup_k P_k} \sum_k m(P_k) \tag{5.4}$$

son A to'plamning tashqi o'lchovi deyiladi.

Bu yerda aniq quyi chegara A to'plamni qoplovchi to'g'ri to'rtburchaklarning barcha chekli yoki sanoqli sistemalari bo'yicha olinadi.

Tekislikdagi barcha to'g'ri to'rtburchaklar sistemasi $-\mathfrak{S}^2$ yarim halqa tashkil qiladi (5.24-5.25 misollarga qarang). $\mathfrak{S}^2$ yarim halqadan olingan va a, b, c, d sonlari bilan aniqlangan (ochiq, yopiq, yoki yarim ochiq) bo'sh bo'lmagan $P = P_{abcd}$ to'g'ri to'rtburchak uchun $m(P) = (b-a)(d-c)$ sonni mos qo'yamiz, agar P bo'sh to'plam bo'lsa $m(P) = 0$ deymiz. Bu qonuniyat bo'yicha aniqlangan $m : \mathfrak{S}^2 \to \mathbb{R}$ to'plam funksiyasi o'lchov (5.1-ta'rif) shartlarini qanoatlantiradi.

$\mathfrak{M}(\mathfrak{S}^2)$ bilan $\mathfrak{S}^2$ yarim halqa ustiga qurilgan minimal halqani belgilaymiz. $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}^2)$ halqaning elementlari *elementar to'plamlar* deyiladi.

5.8-ta'rif. *Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S}^2)$ elementar to'plam mavjud bo'lib, $\mu^*(A\Delta B) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda A Lebeg ma'nosida o'lchovli to'plam deyiladi.*

Faqat o'lchovli to'plamlar sistemasi $\mathfrak{U}(E^2)$ da aniqlangan μ^* to'plam funksiyasi *Lebeg o'lchovi* deyiladi va u μ bilan belgilanadi. Shunday qilib, o'lchovli to'plamlar sistemasi $\mathfrak{U}(E^2)$ va unda Lebeg o'lchovi μ aniqlandi. Demak, ixtiyoriy $A \in \mathfrak{U}(E^2)$ uchun $\mu(A) = \mu^*(A)$.

Xuddi sonlar o'qi holidagidek tekislikni, ya'ni $\mathbb{R}^2$ ni

$$E_{mn} = \{(x,\, y) : m < x \leq m+1, \quad n < y \leq n+1\}\,, \qquad n,\, m \in \mathbb{Z}$$

kvadratlar yig'indisi ko'rinishida tasvirlash mumkin:

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{m,\, n \in \mathbb{Z}} E_{mn}.$$

5.9-ta'rif. $A \subset \mathbb{R}^2$ *biror to'plam bo'lsin. Agar istalgan $m,\ n$ butun sonlar uchun $A_{mn} = A \cap E_{mn}$ to'plamlar o'lchovli bo'lsa, u holda A to'plam o'lchovli deyiladi. Agar A to'plam o'lchovli bo'lsa,*

$$\mu(A) = \sum_{m,\, n \in \mathbb{Z}} \mu(A_{mn}), \tag{5.5}$$

yig'indi A to'plamning Lebeg o'lchovi deyiladi.

Agar (5.5) qator yig'indisi chekli bo'lsa, $A \subset \mathbb{R}^2$ *chekli o'lchovli* to'plam deyiladi. Aks holda A *cheksiz o'lchovli* to'plam deyiladi.

5.2-teoroema *(O'lchovning $\sigma-$ additivlik xossasi). Agar $\{A_n\}-$ o'zaro kesishmaydigan o'lchovli to'plamlar ketma-ketligi bo'lsa, u holda*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right)$$

tenglik o'rinli.

5.3-teorema *(O'lchovning uzluksizlik xossasi). Agar o'lchovli to'plamlarning* $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ *ketma-ketligi uchun* $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ *bo'lsa, u holda* $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ *tenglik o'rinli.*

5.1-natija. *Agar* $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ *o'lchovli to'plamlar ketma-ketligi uchun* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *bo'lsa, u holda* $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ *tenglik o'rinli.*

Agar (5.2) tenglikda aniq quyi chegara $A \subset \mathbb{R}$ to'plamni qoplovchi barcha B sodda to'plamlar bo'yicha olinsa, A to'plamning Jordan ma'nosidagi *tashqi o'lchovi* hosil bo'ladi, u $j^*(A)$ bilan belgilanadi, ya'ni

$$j^*(A) = \inf_{B\supset A} m'(B), \quad B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S}).$$

Ushbu

$$j_*(A) = \sup_{B\subset A} m'(B), \quad B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S}),$$

son A to'plamning Jordan ma'nosidagi *ichki o'lchovi* deyiladi.

5.10-ta'rif. *Agar* $j^*(A) = j_*(A)$ *bo'lsa,* A *Jordan ma'nosida o'lchovli to'plam deyiladi.*

Shuni ta'kidlash joizki, agar A Jordan ma'nosida o'lchovli to'plam bo'lsa, u Lebeg ma'nosida ham o'lchovli to'plam bo'ladi va bu o'lchovlar o'zaro teng bo'ladi.

5.3. Lebeg ma'nosida o'lchovli, ammo Jordan ma'nosida o'lchovli bo'lmagan to'plamga misol keltiring.

Yechish. $E = [0,\ 1]$ bo'lsin, A esa $[0,\ 1]$ kesmadagi barcha ratsional sonlar to'plami bo'lsin. A to'plam E da zich bo'lganligi uchun A ni saqlovchi sodda to'plam E ni ham o'zida saqlaydi. Shuning uchun $j^*(A) = 1$ bo'ladi. A to'plamda saqlanuvchi sodda B to'plam faqat chekli to'plamdir. Shuning uchun $j_*(A) = 0$ tenglik o'rinli. Bu yerdan $j^*(A) \neq j_*(A)$. Demak, A to'plam Jordan ma'nosida o'lchovli emas. Ma'lumki, A sanoqli to'plam, shuning uchun uning elementlarini $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ ketma-ketlik ko'rinishida nomerlab chiqish mumkin. Shunday ekan

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k\,, \quad P_k = \{x: \ x_k \le x \le x_k\} = [x_k,\ x_k].$$

Ikkinchi tomondan ixtiyoriy $k \in \mathbb{N}$ uchun $m(P_k) = 0$. Bu yerdan

$$\mu^*(A) = 0$$

ekanligi kelib chiqadi. Shuni ta'kidlash lozimki, tashqi o'lchovi nolga teng bo'lgan har qanday to'plam o'lchovli to'plamdir. Buning uchun sodda to'plam sifatida $B = \emptyset$ ni olish yetarli:

$$\mu^*(A\Delta B) = \mu^*(A\Delta\emptyset) = \mu^*(A) = 0 < \varepsilon.$$

Demak, A Lebeg ma'nosida o'lchovli to'plam. Shunday qilib, A Lebeg ma'nosida o'lchovli bo'lgan, lekin Jordan ma'nosida o'lchovli bo'lmagan to'plamga misol bo'ladi. $\square$

5.4. $A \subset [0,\ 1]-$ bilan shunday sonlar to'plami belgilanganki, ularning cheksiz o'nli kasr yoyilmasida 5 raqami ishtirok etmaydi. $\mu(A)$ ni toping.

Yechish. A to'plam to'ldiruvchisining o'lchovini topamiz. $[0,\ 1]\backslash A$ to'plam elementlarining cheksiz o'nli kasr yoyilmasida 5 raqami ishtirok etadi. $[0,\ 1]$ kesmani teng o'n bo'lakka bo'lamiz va oltinchi $[0,5;\ 0,6)$ bo'lakni A_1 bilan belgilaymiz. A_1 dagi har bir sonning cheksiz o'nli kasr yoyilmasida, verguldan keyingi birinchi raqami 5 bo'ladi. Qolgan 9 ta bo'lakning har birini teng o'n bo'lakka bo'lamiz va ulardagi oltinchi bo'laklarning birlashmasini $[0,15;\ 0,16) \cup [0,25;\ 0,26) \cup \cdots \cup [0,95;\ 0,96) = A_2$ bilan belgilaymiz. A_2 to'plamdagi sonlarning cheksiz o'nli kasr yoyilmasida verguldan keyingi ikkinchi raqami 5 bo'ladi. Va hokazo bu jarayonni cheksiz davom ettiramiz. Hosil bo'lgan $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ to'plamlar juft-jufti bilan kesishmaydi va ularning birlashmasi $[0,\ 1]\backslash A$ ga teng. O'lchovning $\sigma-$ additivlik xossasiga ko'ra

$$\mu([0,\ 1]\backslash A)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$$

tenglik o'rinli. Murakkab bo'lmagan hisoblashlar shuni ko'rsatadiki $\mu(A_1)=10^{-1},\ \ \mu(A_2)=9\cdot 10^{-2},\ \ \mu(A_n)=9^{n-1}\cdot 10^{-n},\ldots$ tengliklar o'rinli. Demak,

$$\mu([0,\ 1]\backslash A)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^{n-1}}{10^n}=\frac{0,1}{1-0,9}=1.$$

Shunday qilib, $\mu(A)+\mu([0,\,1]\backslash A)=1$ dan $\mu(A)=0$ ekanini olamiz. $\square$

5.5. Shunday $\{A_n\}$ "Borel tipidagi to'plam" larga misol keltiringki, quyidagilar bajarilsin: $\mu(A_n)=+\infty,\ \ A_n\supset A_{n+1},\ \ n\geq 1,\ \ \mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)=0.$

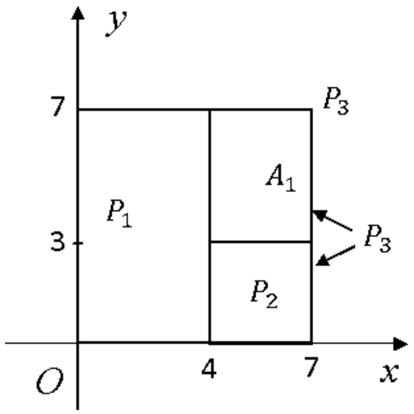
Yechish. "Borel tipidagi to'plam" sifatida $A_n=[n,\infty)\,,\quad n\in\mathbb{N}$ larni olamiz. Natijada istalgan $n\in\mathbb{N}$ uchun $\mu(A_n)=+\infty$ va $A_n\supset A_{n+1}$ munosabat bajariladi. Kesishma $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\emptyset$ bo'lganligi uchun $\mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)=0$ bo'ladi. $\square$

Quyidagi misolda $A_1\subset A$ shartni qanoatlantiruvchi A va A_1 to'plamlar berilgan. $A\backslash A_1$ to'plamni eng kam sondagi o'zaro kesishmaydigan $P_1,P_2,\ldots,P_n$ to'g'ri to'rtburchaklar birlashmasi ko'rinishida tasvirlang. $A\backslash A_1=\bigcup\limits_{k=1}^{n}P_k$ yoyilmadan foydalanib $A\backslash A_1$ to'plam o'lchovini toping.

5.6. $A=\{(x,\,y):\,0\leq x\leq 7,\ 0\leq y\leq 7\}\,,$

$$A_1=\{(x,\,y):\,4\leq x<7,\ 3\leq y\leq 7\}\,.$$

Yechish. Tekislikda A va A_1 to'plamlarni chizmada tasvirlaymiz. 5.4-chizmadan $A\backslash A_1=P_1\cup P_2\cup P_3$ yoyilmani olamiz.



5.4-chizma

Bu yerda $P_1 = [0,\ 4)\times[0,\ 7)$, $P_2 = [4,\ 7)\times[0,\ 3]$, $P_3 = \{7\}\times[0,\ 7]$. Bu to‘g‘ri to‘rtburchaklar o‘zaro kesishmaydi. O‘lchovning additivlik xossasiga ko‘ra,

$\mu(A\backslash A_1) = \mu(P_1) + \mu(P_2) + \mu(P_3) = 28 + 9 + 0 = 37.$ $\square$

5.7. O‘lchovning $\sigma-$ additivlik xossasidan foydalanib, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{(n+1)!},\ \dfrac{1}{n!}\right)$ to‘plamning o‘lchovini toping.

Yechish. A_n orqali $\left(\dfrac{1}{(n+1)!},\ \dfrac{1}{n!}\right)$ to‘plamni belgilaymiz. A_n to‘plamlar juft-jufti bilan o‘zaro kesishmaydi, shuning uchun o‘lchovning $\sigma-$ additivlik xossasiga ko‘ra

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$$

tenglik o‘rinli. A_n to‘plamning o‘lchovi $\mu(A_n) = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n-1)!}$ dan foydalansak

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} + \cdots = 1$$

ekanligini olamiz. $\square$

Ayrim umumlashtirishlar. Bizga sonlar o‘qida aniqlangan, kamaymaydigan, o‘ngdan uzluksiz F funksiya berilgan bo‘lsin. Bo‘sh bo‘lmagan interval, kesma va yarim intervallarga F funksiya yordamida quyidagi sonlarni mos qo‘yamiz:

$$m\,((a,\ b\,)) = F(b-0) - F(a),\ m\,([a,\ b]) = F(b) - F(a-0),$$

$$m((a,\ b]) = F(b) - F(a),\ m([a,\ b)) = F(b-0) - F(a-0).$$

Ravshanki, bu usulda aniqlangan m to‘plam funksiyasi manfiymas va additiv. Yarim halqada kiritilgan bu o‘lchovning davomini μ_F bilan belgilaymiz. Umuman olganda, μ_F o‘lchovga nisbatan o‘lchovli to‘plamlar sinfi F funksiyaning tanlanishiga bog‘liq. Ammo $\mathbb{R}$ da o‘ngdan uzluksiz, kamaymaydigan istalgan F funksiya uchun ochiq va yopiq to‘plamlar, shuningdek, ularning istalgan sanoqli yig‘indi va sanoqli kesishmalari μ_F o‘lchovga nisbatan o‘lchovli to‘plamlar bo‘ladi.

5.11-ta’rif. *Biror kamaymaydigan, o‘ngdan uzluksiz F funksiya vositasida qurilgan μ_F o‘lchov Lebeg-Stiltes o‘lchovi deyiladi.*

Bizga Lebeg o‘lchovi μ va Lebeg-Stiltes o‘lchovi μ_F berilgan bo‘lsin.

5.12-ta’rif. *Agar $\mu(A) = 0$ ekanligidan $\mu_F(A) = 0$ tenglik kelib chiqsa, μ_F absolyut uzluksiz o‘lchov deyiladi.*

5.13-ta’rif. *Agar μ_F o‘lchov chekli yoki sanoqli qiymat qabul qiluvchi F funksiya yordamida aniqlansa, μ_F diskret o‘lchov deyiladi.*

5.14-ta’rif. *Agar μ_F o‘lchovda istalgan bir nuqtali to‘plam nol o‘lchovga ega bo‘lsa va Lebeg o‘lchovi nolga teng bo‘lgan biror A to‘plam uchun $\mu_F(\mathbb{R}\backslash A) = 0$ bo‘lsa, u holda μ_F singulyar o‘lchov deyiladi.*

O‘lchovning Lebeg bo‘yicha davomi. Birlik elementli yarim halqada aniqlangan o‘lchovning Lebeg bo‘yicha davomini qaraymiz. Agar $\mathfrak{S}_m$ da aniqlangan m o‘lchov $\sigma-$additiv bo‘lsa, u holda m ni $\mathfrak{S}_m$ dan $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ ga nisbatan kengroq bo‘lgan va qandaydir ma’noda maksimal sinfga davom ettirish mumkin. Buni Lebeg bo‘yicha davom ettirish yordamida amalga oshirish mumkin. Bizga biror $\mathfrak{S}_m$ birlik elementli yarim halqada aniqlangan $\sigma-$additiv m o‘lchov berilgan bo‘lsin va E to‘plam $\mathfrak{S}_m$ yarim halqaning birlik elementi bo‘lsin. E ning barcha qism to‘plamlaridan tashkil topgan $\mathfrak{A}(E)$ sistemada tashqi o‘lchov deb ataluvchi μ^* to‘plam funksiyasini quyidagi usulda aniqlaymiz.

5.15-ta'rif. *Ixtiyoriy* $A \subset E$ *to'plam uchun*

$$\mu^*(A) = \inf \sum_n m(B_n)$$

son A *to'plamning tashqi o'lchovi deyiladi. Bu yerda aniq quyi chegara* A *to'plamni qoplovchi barcha chekli yoki sanoqli* $\{B_n\}$, $B_n \in \mathfrak{S}_m$ *to'plamlar sistemasi bo'yicha olinadi.*

5.4-teorema . *Agar* A *va sanoqlita* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *to'plamlar uchun* $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ *bo'lsa, u holda quyidagi tengsizlik o'rinli*

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

5.16-ta'rif. *Agar* $A \subset E$ *to'plam va istalgan* $\varepsilon > 0$ *uchun shunday* $B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ *to'plam mavjud bo'lib,*

$$\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A *(Lebeg ma'nosida) o'lchovli to'plam deyiladi.*

Faqat o'lchovli to'plamlar sistemasi $\mathfrak{U}(E)$ da aniqlangan μ^* to'plam funksiyasi *Lebeg o'lchovi* deyiladi va u μ harfi bilan belgilanadi. Ravshanki, $\mathfrak{S}_m$ va $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ dan olingan to'plamlar o'lchovli bo'ladi. Bunda, agar $A \in \mathfrak{S}_m$ va $B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ bo'lsa, u holda

$$\mu(A) = m(A), \quad \mu(B) = m'(B).$$

Agar A o'lchovli to'plam va $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ to'plam berilgan bo'lsa,

$$A \Delta B = (E \backslash A) \Delta (E \backslash B)$$

tenglikdan A ning to'ldiruvchi to'plami $E \backslash A$ ning ham o'lchovli ekanligi kelib chiqadi.

5.5-teorema. *O‘lchovli to‘plamlar sistemasi* $\mathfrak{U}(E)$ *halqa bo‘ladi.*

5.2-eslatma. $\mathfrak{S}_m$ ning birlik elementi - E o‘lchovli to‘plamlar sistemasi $\mathfrak{U}(E)$ uchun ham birlik element bo‘ladi, shuning uchun o‘lchovli to‘plamlar sistemasi $\mathfrak{U}(E)$ algebra tashkil qiladi.

5.6-teorema. *O‘lchovli to‘plamlar sistemasi* $\mathfrak{U}(E)$ *da aniqlangan* μ *to‘plam funksiyasi additivdir.*

5.7-teorema. *O‘lchovli to‘plamlar sistemasi* $\mathfrak{U}(E)$ *da aniqlangan* μ *to‘plam funksiyasi* $\sigma-$ *addituvdir.*

5.8-teorema. *Lebeg bo‘yicha o‘lchovli bo‘lgan barcha to‘plamlar sistemasi* $\mathfrak{U}(E)$, E *birlik elementli* $\sigma-$ *algebradir.*

5.17-ta’rif. *O‘lchovli to‘plamlar sistemasi* $\mathfrak{U}(E)$ *da aniqlangan va* $\mathfrak{U}(E)$ *da tashqi o‘lchov* μ^* *bilan ustma-ust tushuvchi* μ *funksiya* m *o‘lchovning* $\mu = L(m)$ *Lebeg davomi deyiladi.*

5.9-teorema. *Istalgan boshlang‘ich* m *o‘lchov uchun Lebeg bo‘yicha o‘lchovli to‘plamlar sistemasi* $\mathfrak{U}(E)$ $\delta-$ *halqa bo‘ladi. Sanoqli sondagi o‘lchovli* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *to‘plamlar birlashmasi bo‘lgan* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *to‘plamning o‘lchovli bo‘lishi uchun* $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$ *miqdorning* n *ga bog‘liqsiz o‘zgarmas bilan chegaralangan bo‘lishi zarur va yetarli.*

Lebeg o‘lchovining yana bir xossasini keltiramiz.

5.18-ta’rif. *Agar* $\mu(A) = 0$ *va* $A' \subset A$ *bo‘lishidan* A' *ning o‘lchovli ekanligi kelib chiqsa,* μ *o‘lchov to‘la deyiladi.*

Agar μ o‘lchov to‘la bo‘lsa, A' to‘plam uchun $\mu(A') = 0$ bo‘ladi.

Ixtitoriy o‘lchovning Lebeg davomi to‘la bo‘ladi. Haqiqatan ham, $A' \subset A$, $\mu(A) = \mu^*(A) = 0$ bo‘lsa, $\mu^*(A') = 0$ bo‘ladi va $B = \emptyset \in \mathfrak{S}_m$ ni olsak,

$$\mu^*(A'\Delta\emptyset) = \mu^*(A') = 0$$

bo‘ladi, ya’ni A' ning o‘lchovli ekanligi va $\mu(A') = 0$ kelib chiqadi.

5.8. O‘lchovsiz to‘plamlarning birlashmasi o‘lchovsiz bo‘ladimi?

Yechish. O'lchovsiz to'plamlarning birlashmasi o'lchovli ham o'lchovsiz ham bo'lishi mumkin. Masalan, $A \subset [0,\ 1]$ o'lchovsiz to'plam bo'lsin, u holda $B = [0,\ 1] \backslash A$ ham o'lchovsiz to'plam bo'ladi. Ularning birlashmasi $A \cup B = [0,\ 1]$ esa o'lchovli to'plam. Agar $A \subset [0,\ 1)$ o'lchovsiz to'plam, $B \subset [1,\ 2)$ o'lchovsiz to'plam bo'lsa, u holda ularning birlashmasi $C = A \cup B$ to'plam uchun, $A_0 = C \cap E_0 = A$ o'lchovsiz to'plam bo'lganligidan 5.6-ta'rifga ko'ra $C = A \cup B$ o'lchovsiz to'plam bo'ladi. $\square$

5.9. $F(x) = [x]$ funksiya yordamida qurilgan μ_F- Lebeg-Stiltes o'lchovi diskret o'lchov bo'lishini ko'rsating.

Yechish. $F(x) = [x]$ funksiya monoton kamaymaydigan o'ngdan uzluksiz funksiya bo'lib, uning qiymatlar sohasi butun sonlar to'plami $\mathbb{Z}$ dan iborat. Butun sonlar to'plami esa sanoqli to'plam bo'lganligi uchun, 5.13-ta'rifga ko'ra μ_F diskret o'lchov bo'ladi. $\square$

Uy vazifalari va mavzuni o'zlashtirish uchun masalalar

5.10. To'plam funksiyasi $m' : \mathfrak{M}(\mathfrak{S}) \to \mathbb{R}$ o'lchov bo'ladi. Isbotlang.

5.11. (5.1) tenglik bilan aniqlangan $m' : \mathfrak{M}(\mathfrak{S}) \to \mathbb{R}$ funksiyaning qiymati A sodda to'plamni chekli sondagi o'zaro kesishmaydigan oraliqlar yig'indisiga yoyish usulidan bog'liq emas. Isbotlang.

5.12. $m' : \mathfrak{M}(\mathfrak{S}) \to \mathbb{R}$ o'lchov $m : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ o'lchovning davomi bo'ladi. Isbotlang.

5.13. Ikki sodda to'plamning birlashmasi, kesishmasi, ayirmasi va simmetrik ayirmasi yana sodda to'plam bo'ladi. Isbotlang.

5.14. Agar $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ to'plam oraliq bo'lsa, u holda $m'(A) = m(A)$ bo'ladi. Isbotlang.

5.15. Agar $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ to'plam chekli sondagi o'zaro kesishmaydigan $A_1, A_2, \dots, A_n$ sodda to'plamlarning yig'indisi, ya'ni $A = \coprod\limits_{k=1}^{n} A_k$ shaklda tasvirlansa, quyidagi tenglikni isbotlang:

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m'(A_k).$$

5.16. Agar $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ sodda to'plam, $\{A_n\}-$ sodda to'plamlarning chekli yoki sanoqli sistemasi bo'lib, $A \subset \bigcup\limits_{n} A_n$ bo'lsa,

$$m'(A) \le \sum_{n} m'(A_n)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Isbotlang.

5.17. A sodda to'plam sanoqli sondagi o'zaro kesishmaydigan $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ sodda to'plamlarning yig'indisidan iborat, ya'ni

$$A = \coprod_{n=1}^{\infty} A_n$$

bo'lsin. U holda quyidagi tenglikni isbotlang:

$$m'(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n).$$

5.18-5.23-misollarda keltirilgan $A \subset \mathbb{R}$ ni sodda to'plam ekanligini ko'rsating. Uni eng kam sondagi o'zaro kesishmaydigan $P_1, P_2, \dots, P_n$ oraliqlar birlashmasi ko'rinishida tasvirlang. $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$ yoyilmadan foydalanib, A to'plamning o'lchovini toping.

5.18. $A = \bigcup\limits_{n=1}^{5} \left[3^{2-n},\ 2^{3-n}\right).$

5.19. $A = \bigcup\limits_{n=1}^{6} \left[3^{3-n},\ e^{4-n}\right).$

5.20. $A = \bigcup\limits_{n=1}^{4} \left[\dfrac{n}{2(n+1)!},\ \dfrac{6-n}{2n!}\right).$

5.21. $A = \bigcup\limits_{n=1}^{4} \left[\dfrac{n}{4^{n+1}},\ \dfrac{5-n}{4^n}\right].$

5.22. $A = \bigcup\limits_{n=1}^{8} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{24}\right).$

5.23. $A = \bigcup\limits_{n=1}^{4} \left(\dfrac{3}{n} - \dfrac{1}{5},\ \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{5}\right).$

5.24. Ikkita yarim halqaning Dekart koʻpaytmasi yarim halqa boʻladi. Isbotlang.

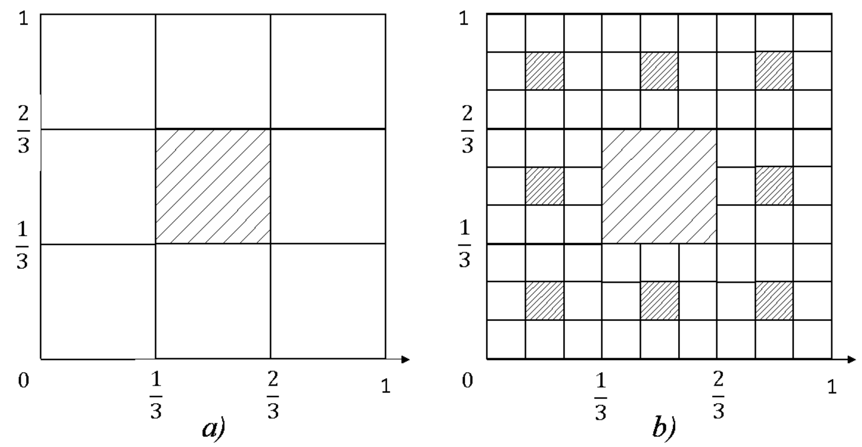
5.25. $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S} = \mathfrak{S}^2$ tenglikni isbotlang.

5.26. Tekislikdagi barcha toʻgʻri toʻrtburchaklar sistemasi – $\mathfrak{S}^2$ yarim halqa tashkil qiladi. Isbotlang.

"Serpin gilami" nomli masala. $\mathbb{R}^2$ dagi $E^2 = [0,\ 1] \times [0,\ 1]$ kvadratni $x = \dfrac{1}{3},\ x = \dfrac{2}{3},\ y = \dfrac{1}{3},\ y = \dfrac{2}{3}$ togʻri chiziqlar yordamida 9 ta bir xil kvadratlarga boʻlamiz va markazdagi ochiq

$$P_1 = \left\{(x, y): \quad \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}\right\}$$

kvadratni (5.5a-chizma) tashlaymiz. Keyin qolgan 8 ta kvadratning har birini yuqoridagidek 9 ta bir xil kvadratlarga boʻlamiz (5.5b-chizma) va markazdagi kvadratni tashlaymiz. Bu jarayonni cheksiz marta davom ettiramiz. Natijada qolgan toʻplamni A bilan belgilaymiz. Bu toʻplamga *"Serpin gilami"* nomi berilgan.



5.5-chizma

5.27. Serpin gilamining oʻlchovini toping.

5.28. $A \subset [0,\ 1]-$ bilan shunday sonlar toʻplamini belgilaymizki, ularning cheksiz oʻnli kasr yoyilmasida 2 raqami 3 raqamidan oldin uchraydi. Bu toʻplamning oʻlchovini toping.

5.29. $A \subset [0,\ 1]-$ bilan cheksiz o'nli kasr yoyilmasida 8 raqami qatnashadigan sonlar to'plamini belgilaymiz. Uning o'lchovini toping.

5.30. $A \subset [0,\ 1]-$ shunday to'plamki, uning elementlarini cheksiz o'nli kasr yoyilmasida 1 dan 9 gacha raqamlarning barchasi qatnashadi. Uning o'lchovini toping.

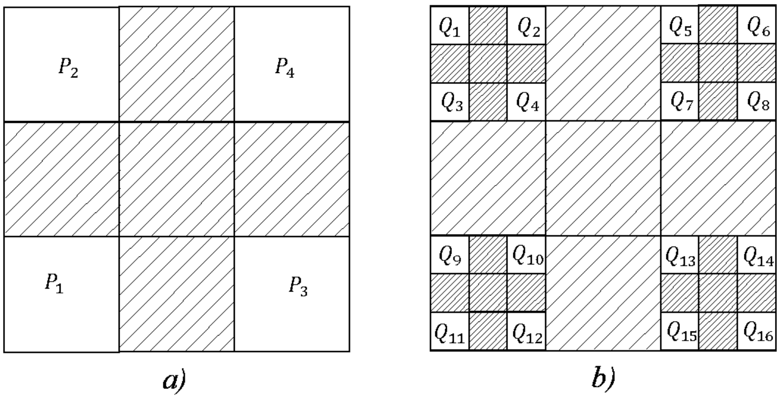
5.31. Kantor to'plami $K \subset [0,\ 1]$ ning Jordan ma'nosida o'lchovli emasligini isbotlang.

5.32. *"Kantor tarog'i"* nomli masala. $K-$Kantor to'plami bo'lsin.

$$A = \{(x,\ y) : x \in [0,\ 1],\ \ y \in K\}$$

to'plam *"Kantor tarog'i"* deyiladi. A to'plam $[0,\ 1] \times [0,\ 1]$ ning hech yerida zich emas, yopiq va $\mu(A) = 0$. Isbotlang.

"Serpin qabristoni" nomli masala. $\mathbb{R}^2$ da $[0,\ 1] \times [0,\ 1]$ kvadratni $x = \frac{1}{3},\ x = \frac{2}{3},\ y = \frac{1}{3},\ y = \frac{2}{3}$ tog'ri chiziqlar yordamida 9 ta teng kvadratlarga bo'lamiz. Asosiy kvadratning uchlariga yopishgan 4 ta



5.6-chizma

$$P_1 = \left\{(x,y):\ 0 \le x\ \le \frac{1}{3},\ \ 0 \le y\ \le \frac{1}{3}\right\},$$

$$P_2 = \left\{(x,y):\ 0 \le x\ \le \frac{1}{3},\ \ \frac{2}{3} \le y\ \le 1\right\},$$

$$P_3 = \left\{(x,y): \ \frac{2}{3} \le x \ \le \ 1, \quad 0 \le y \ \le \ \frac{1}{3}\right\},$$

$$P_4 = \left\{(x,y): \frac{2}{3} \le x \ \le \ 1, \quad \frac{2}{3} \le y \ \le \ 1\right\}$$

yopiq kvadratlarni (5.6a-chizma) *birinchi rang kvadratlari* deb ataymiz.

Bu to'rt kvadratning birlashmasini $A_1 = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$ bilan belgilaymiz. Birinchi rang kvadratlarining har birini yuqoridagidek 9 ta teng kvadratlarga bo'lamiz. Birinchi rang kvadratlari $P_1, \ P_2, \ P_3, \ P_4$ uchlariga yopishgan kvadratlarni *ikkinchi rang kvadratlari* (5.6b-chizmada $Q_1 - Q_{16}$) deymiz. Bu 16 ta kvadratning birlashmasini A_2 bilan belgilaymiz. Va hokazo bu jarayonni cheksiz marta davom ettiramiz. Natijada ichma-ich joylashgan $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ ketma-ketlikka ega bo'lamiz. Ularning kesishmasini $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ bilan belgilaymiz. A to'plam *Serpin qabristoni* deyiladi.

5.33. Serpin qabristoni A ning o'lchovi nol ($\mu(A) = 0$) va $[0, \ 1] \times [0, \ 1]$ kvadratning hech yerida zich emasligini isbotlang.

5.34. $A \subset \mathbb{R}$ to'plamning o'lchovi nolga teng bo'lsa, $\mu(\overline{A}) = 0$ bo'lishi shartmi? Bu yerda $\overline{A}$ – A to'plamning yopig'i.

5.35. $A \subset \mathbb{R}$ chegaralanmagan musbat o'lchovli to'plam bo'lsin, u holda shunday $x, y \in A$ lar mavjudki $x - y \in \mathbb{Q}$ bo'ladi. Isbotlang.

5.36. $A \subset \mathbb{R}$ ixtiyoriy musbat o'lchovli to'plam bo'lsin, u holda shunday $x, y \in A$ mavjudki $x - y \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ bo'ladi. Isbotlang.

5.37. $\mathbb{R}$ dagi nol o'lchovli to'plamlar sistemasi $\sigma-$ halqa bo'lishini isbotlang.

5.38. $A \subset \mathbb{R}$ Borel tipidagi to'plam ekanligini ko'rsating, uning Lebeg o'lchovini toping:

a) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(n - \dfrac{1}{3^n}, \ n + \dfrac{1}{2^n}\right],$

b) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(n^n,\ n^n + \dfrac{1}{\ln(n+1)}\right] \setminus \mathbb{Q}$,

c) $A = [0,\ 1] \setminus \mathbb{Q}$.

5.39. Quyida berilgan $A \subset \mathbb{R}$ toʻplamning *Borel tipidagi toʻplam* ekanligini koʻrsating, keyin uning oʻlchovini toping.

a) $A = (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cap [0,\ 1]$, b) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^4 \in \mathbb{Q}\right\}$,

c) $A = [a, \infty)$, d) $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} (n - \dfrac{1}{2^n},\ n + \dfrac{1}{2^n})$,

e) $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \left[n - \dfrac{1}{e^n},\ n + \dfrac{1}{4^n}\right]$, f) $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \left[n^3 - \dfrac{1}{5^n},\ n^3 + \dfrac{1}{5^n}\right] \cap (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$.

5.40. Shunday $\{A_n\}$ "Borel tipidagi toʻplam" larga misol keltiringki, quyidagilar bajarilsin:

a) $\mu(A_n) = 1,\ n \geq 1,\ \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}$,

b) $\mu(A_n) = +\infty,\ A_n \supset A_{n+1},\ \ n \geq 1,\ \mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$,

c) $\mu(A_n) = +\infty,\ n \geq 1,\ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{N}$,

d) $\mu(A_n) = +\infty,\ \ A_n \bigcap A_m = \emptyset,\ \ n \neq m,\ \ \ n, m \in \mathbb{N}$.

5.41. $A \subset \mathbb{R}^2$ ning "Borel tipidagi toʻplam" ekanligini koʻrsatib, uning oʻlchovini toping:

a) $A = \left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in \mathbb{R},\ 0 \leq y \leq \dfrac{1}{1+x^2}\right\}$,

b) $A = \left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 :\ -1 < x < 1,\ 0 \leq y \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right\}$.

5.42. $a \in (0,\ 1)$ ixtiyoriy son boʻlsin. $[0,\ 1]$ kesmaning oʻrtasidan uzunligi $\dfrac{a}{2}$ ga teng $A_1 = \left(\dfrac{2-a}{4}, \dfrac{2+a}{4}\right)$ intervalni chiqarib tashlaymiz. A_1 ni oʻrta interval deb ataymiz. Ikkinchi qadamda qolgan ikki kesmaning uzunligi $\dfrac{a}{8}$ ga teng boʻlgan oʻrta intervalini chiqarib tashlaymiz. Bu intervallar birlashmasini A_2 bilan belgilaymiz. Uchinchi qadamda qolgan to‘rtta kesmaning har biridan uzunligi $\dfrac{a}{32}$ ga teng bo‘lgan o‘rta intervalini chiqarib tashlaymiz. Ularning birlashmasini A_3 orqali belgilaymiz. Bu jarayonni cheksiz davom ettiramiz. A bilan $[0,\ 1]\backslash \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ to‘plamni belgilaymiz. A ning o‘lchovli ekanligini ko‘rsating va uning o‘lchovini toping.

5.43. 5.42-misolda keltirilgan A to‘plam $[0,\ 1]$ kesmaning hech yerida zich emasligini isbotlang.

5.44. $A \subset [a,\ b]$ o‘lchovli to‘plam va $\mu(A) = \lambda > 0$ bo‘lsin. U holda $f(x) = \mu\left([a,\ x) \cap A\right)$ funksiyaning uzluksizligini isbotlang. $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ funksiyaning qiymatlar sohasini toping.

5.45. $[0,\ 1]$ kesmada $[0,\ 1]$ dan farqli va o‘lchovi 1 bo‘lgan yopiq to‘plam mavjudmi?

5.46. Tekislikda shunday o‘lchovli $A \subset \mathbb{R}^2$ to‘plamga misol keltiringki, uning koordinata o‘qlariga proyeksiyalari o‘lchovsiz bo‘lsin.

5.47-5.49-misollarda $A_1 \subset A$ shartni qanoatlantiruvchi A va A_1 to‘plamlar berilgan. $A\backslash A_1$ to‘plamni eng kam sondagi o‘zaro kesishmaydigan $P_1, P_2, \ldots, P_n$ to‘g‘ri to‘rtburchaklar birlashmasi ko‘rinishida tasvirlang. $A\backslash A_1 = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$ yoyilmadan foydalanib $A\backslash A_1$ to‘plam o‘lchovini toping.

5.47. $A = \{(x,\ y) :\ 0 \le x < 7,\ 0 \le y < 7\}$,

$$A_1 = \{(x,\ y) :\ 4 \le x < 6,\ 3 \le y < 5\}.$$

5.48. $A = \{(x,\ y) :\ 0 \le x \le 7,\ 0 \le y \le 7\}$,

$$A_1 = \{(x,\ y) :\ 3 \le x \le 7,\ 0 \le y < 7\}.$$

5.49. $A = \{(x,\, y) :\, 0 \leq x \leq 7,\ 0 \leq y \leq 7\}$,

$$A_1 = \{(x,\, y) :\, 0 \leq x < 7,\ 0 < y < 6\}.$$

5.50-5.64-misollarda keltirilgan tasdiqlarni isbotlang.

5.50. $A \subset \mathbb{R}$ to‘plam o‘lchovli bo‘lishi uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ ga ko‘ra shunday $G\ (G \supset A)$ ochiq to‘plam mavjud bo‘lib, $\mu^*(G \backslash A) < \varepsilon$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

5.51. Agar $A \subset \mathbb{R}$ o‘lchovli to‘plam bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $G\ (G \subset A)$ yopiq to‘plam mavjud bo‘lib, $\mu^*(A \backslash G) < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

5.52. Agar $A \subset B$ bo‘lsa, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ bo‘ladi.

5.53. Agar $A -$ sodda to‘plam bo‘lsa, u holda $\mu^*(A) = m'(A)$ tenglik o‘rinli.

5.54. Agar chekli yoki sanoqli sondagi $\{A_n\}$ to‘plamlar sistemasi uchun $A \subset \bigcup\limits_n A_n$ bo‘lsa, u holda quyidagi tengsizlik o‘rinli

$$\mu^*(A) \leq \sum_n \mu^*(A_n).$$

5.55. Agar $A \subset [0,\ 1]$ o‘lchovli to‘plam bo‘lsa, $[0,\ 1] \backslash A$ ham o‘lchovli bo‘ladi.

5.56. Agar A va B to‘plamlar o‘lchovli bo‘lsa, u holda $A \cup B$, $A \cap B$, $A \Delta B$, $A \backslash B$ to‘plamlar o‘lchovli bo‘ladi.

5.57. O‘lchovli to‘plamlar sistemasi $\mathfrak{U}(\mathbb{R})$ halqa tashkil qiladi.

5.58. Chekli sondagi o‘lchovli to‘plamlarning birlashmasi va kesishmasi yana o‘lchovli to‘plamdir.

5.59. Agar A va B lar o‘zaro kesishmaydigan o‘lchovli to‘plamlar bo‘lsa, u holda $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ tenglik o‘rinli.

5.60. Agar A va B lar o‘lchovli to‘plamlar bo‘lsa, quyidagi tengliklar o‘rinli:

a) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$,

b) $\mu(A \Delta B) = \mu(A) + \mu(B) - 2\mu(A \cap B)$.

5.61. Ixtiyoriy ikkita A va B to‘plamlar uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli:

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \Delta B).$$

5.62. $A \subset E = [0,\ 1]$ o‘lchovli to‘plam uchun $\mu\,(E \backslash A) = 1 - \mu(A)$ tenglik o‘rinli.

5.63. Sanoqli sondagi o‘lchovli to‘plamlarning birlashmasi va kesishmasi yana o‘lchovli to‘plamdir.

5.64. O‘lchovli to‘plamlar sistemasi $\mathfrak{U}(\mathbb{R})$, $\sigma-$ algebra tashkil qiladi.

5.65. O‘lchovning $\sigma-$ additivlik xossasidan foydalanib, quyidagi to‘plamlarning o‘lchovini toping:

a) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [n,\ n + 2^{-n})$; b) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[n - \dfrac{2}{3^n},\ n + \dfrac{2}{3^n}\right)$;

c) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[2^{-n},\ 2^{1-n}\right)$; d) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{(n+1)!},\ \dfrac{1}{n!}\right)$.

5.66. O‘lchovning uzluksizlik xossasi va uning natijasidan foydalanib, quyidagi to‘plamlarning o‘lchovini toping:

a) $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left[(1 + \dfrac{1}{n})^n,\ 11 - (1 + \dfrac{1}{n})^n\right)$;

b) $B = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \left[1 - \dfrac{8}{2^n},\ 4 + \dfrac{16}{2^n}\right)$;

c) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[1 - (1 + \dfrac{1}{n})^n,\ 5 + (1 + \dfrac{1}{n})^n\right)$;

d) $B = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \left[1 - \dfrac{n}{n+1},\ 4 + \dfrac{n}{n+1}\right)$.

5.67. Chegaralangan o‘lchovsiz to‘plamga misol keltiring.

5.68-5.75-misollarga ham 5.8-misol kabi javob bering.

5.68. O‘lchovsiz to‘plamlarning kesishmasi o‘lchovsiz bo‘ladimi?

5.69. O‘lchovsiz to‘plamlarning ayirmasi o‘lchovsiz bo‘ladimi?

5.70. O‘lchovsiz to‘plamlarning simmetrik ayirmasi o‘lchovsiz bo‘ladimi?

5.71. $A \subset E = [0,\ 10]$ o‘lchovsiz to‘plam, $B \subset E$ o‘lchovli to‘plam. Ularning birlashmasi o‘lchovli bo‘lishi mumkinmi? $A \subset B$ holni tahlil qiling.

5.72. $A \subset E$ o‘lchovsiz to‘plam, $B \subset E$ o‘lchovli to‘plam. $A \cap B$ to‘plam o‘lchovli bo‘ladimi? $A \cap B = \emptyset$, $B \subset A$, $A \subset B$ hollarni tahlil qiling.

5.73. $A \subset E$ o‘lchovsiz to‘plam, $B \subset E$ o‘lchovli to‘plam bo‘lsin. $A \backslash B$ to‘plam o‘lchovli bo‘lishi mumkinmi? $A \subset B$, $B \subset A$ hollarni tahlil qiling.

5.74. $A \subset E$ o‘lchovsiz to‘plam, $B \subset E$ o‘lchovli to‘plam bo‘lsin. $B \backslash A$ to‘plam qanday hollarda o‘lchovli, qachon o‘lchovsiz bo‘lishini misollarda tushuntiring. $A \cap B = \emptyset$, $B \subset A$, $A \subset B$ hollarni tahlil qiling.

5.75. $A \subset E$ o‘lchovsiz to‘plam, $B \subset E$ o‘lchovli to‘plam bo‘lsin. $A \Delta B$ to‘plam o‘lchovli bo‘lishi mumkinmi? $A \cap B = \emptyset$, $B \subset A$, $A \subset B$ hollarni tahlil qiling.

5.76. $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ o‘lchovli to‘plamlar ketma-ketligi uchun $\mu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$ tenglikni isbotlang.

5.77. O‘lchovli to‘plamlarning $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ ketma-ketligi uchun $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$ tenglikni isbotlang.

5.78. Agar $\mathfrak{U}(\mathbb{R})-$ sonlar o‘qidagi Lebeg ma’nosida o‘lchovli to‘plamlar sistemasi, $[a,\ b]$ ixtiyoriy kesma bo‘lsa, u holda $[a,\ b]$ kesmada saqlanuvchi o‘lchovli to‘plamlar sistemasi $\sigma-$ algebra tashkil qiladi. Isbotlang.

5.79. Kantor to‘plamining o‘lchovi nolga teng ekanligini isbotlang.

5.80. Ixtiyoriy $A \subset \mathbb{R}$ sanoqli to‘plam uchun $\mu(A) = 0$ ekanligini isbotlang.

5.81. A va B lar sonlar o‘qidagi nol o‘lchovli to‘plamlar bo‘lsa, $A \cup B$ va $A \Delta B$ lar ham nol o‘lchovli to‘plamlar bo‘ladi. Isbotlang.

5.82. $A \subset \mathbb{R}$ nol o‘lchovli to‘plam va ixtiyoriy $B \subset \mathbb{R}$ to‘plam uchun $\mu(A \cap B) = 0$ ekanligini isbotlang.

5.83. Sonlar o‘qidagi barcha nol o‘lchovli to‘plamlar sistemasi σ halqa va δ halqa bo‘lishini isbotlang.

5.84. Sonlar o‘qidagi barcha nol o‘lchovli to‘plamlar sistemasi simmetrik ayirma amaliga nisbatan kommutativ gruppa bo‘lishini isbotlang.

5.85. Sonlar o‘qida kontinuum quvvatli, nol o‘lchovli to‘plamga misol keltiring.

5.86. $[0,\ 1]$ kesmada, o‘lchovi 0,9 ga teng bo‘lgan va $[0,\ 1]$ ning hech yerida zich bo‘lmagan mukammal to‘plamga misol keltiring.

5.87. $[0,\ 1]$ kesmada, o‘lchovi 1 ga teng bo‘lgan va $[0,\ 1]$ ning hech yerida zich bo‘lmagan mukammal to‘plam mavjudmi?

5.88. $[0,\ 1]$ kesmada, nol o‘lchovli va $[0,\ 1]$ ning hamma yerida zich kontinuum quvvatli to‘plamga misol keltiring.

5.89. $A \subset [0,\ 1]$ hech yerda zich bo‘lmagan nol o‘lchovli to‘plam bo‘lsa, uning yopig‘i $\overline{A}$ ham nol o‘lchovli to‘plam bo‘lishi shartmi?

5.90. Shunday nol o‘lchovli $A \subset \mathbb{R}$ va $B \subset \mathbb{R}$ to‘plamlarga misol keltiringki, ularning arifmetik yig‘indisi $A + B = \{c : \ c = a + b,\ a \in A,\ b \in B\}$ musbat o‘lchovli bo‘lsin.

5.91. Shunday $A \subset [0,\ 1]$ va $B \subset [0,\ 1]$ to‘plamlarga misol keltiringki, quyidagilar bajarilsin: $\mu(A) = \mu(B) = 0, \quad \mu(A+B) = 2.$

5.92. $F(x) = 2x+1$ funksiya yordamida qurilgan μ_F- Lebeg-Stiltes o‘lchovi absolyut uzluksiz o‘lchov bo‘lishini isbotlang.

5.93. $\mu_F,\ F(x) = 2x+1$ o‘lchov bo‘yicha $A = (1,\ 5]$ to‘plamning o‘lchovini toping.

5.94. $\mu_F,\ F(x) = [x]$ Lebeg-Stiltes o‘lchovi bo‘yicha $A = (1,\ 5] \cup \{7,\ 8\}$ to‘plamning o‘lchovini toping.

Qurilishi Kantor to‘plami $-K$ (3.5-misolga qarang) bilan bog‘liq bo‘lgan *Kantorning zinapoya funksiyasini* (5.7-chizma) keltiramiz. Kantorning zinapoya funksiyasini $\mathfrak{K}$ bilan belgilaymiz va uni $\mathbb{R}$ da quyidagicha aniqlaymiz: $\mathfrak{K}(x) = 0,\ x \in (-\infty, 0]$ va $\mathfrak{K}(x) = 1,\ x \in [1, \infty)$. $\mathfrak{K}$ ni $[0,\ 1]\backslash K$ da quyidagicha aniqlaymiz. $K_1 = \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ to‘plam va uning chegarasida (5.7-chizmaga qarang)

$$\mathfrak{K}(x) = \frac{1}{2}, \quad x \in \left[\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right].$$

$K_2 = K_{21} \cup K_{22} = \left(\frac{1}{9},\ \frac{2}{9}\right) \bigcup \left(\frac{7}{9},\ \frac{8}{9}\right)$ to‘plam va uning chegaralarida

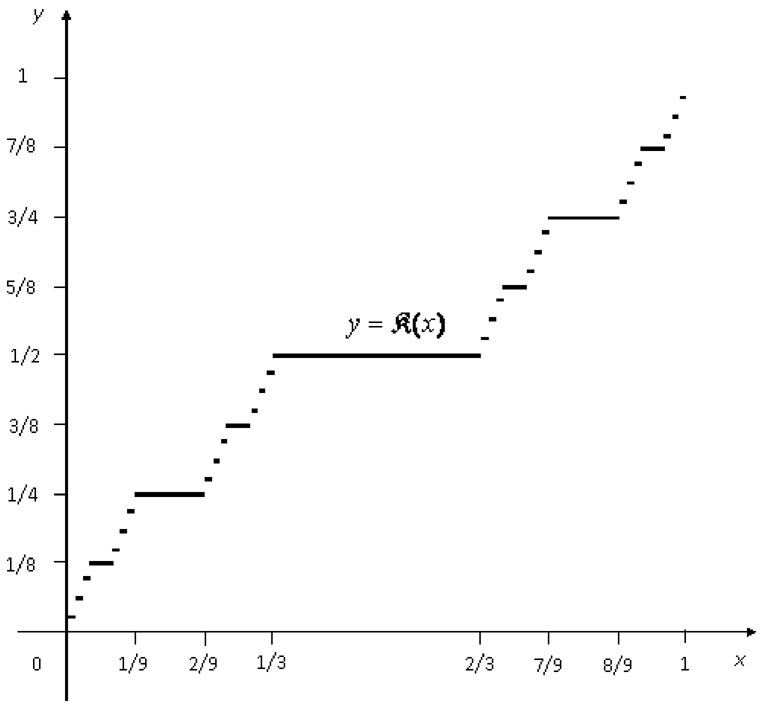
$$\mathfrak{K}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & agar\ \ x \in \left[\frac{1}{9},\ \frac{2}{9}\right], \\ \frac{3}{4}, & agar\ \ x \in \left[\frac{7}{9},\ \frac{8}{9}\right]. \end{cases}$$

Endi

$$K_3 = \bigcup_{k=1}^{4} K_{3k} = \left(\frac{1}{3^3},\ \frac{2}{3^3}\right) \bigcup \left(\frac{7}{3^3},\ \frac{8}{3^3}\right) \bigcup \left(\frac{19}{3^3},\ \frac{20}{3^3}\right) \bigcup \left(\frac{25}{3^3},\ \frac{26}{3^3}\right)$$

to‘plam va uning chegaralarida

$$\mathfrak{K}(x) = \frac{2k-1}{2^3}, \quad x \in \overline{K_{3k}},\ k = 1, 2, 3, 4.$$



5.7-chizma

Xuddi shunday $K_n = \bigcup\limits_{k=1}^{2^{n-1}} K_{nk}$ to'plamning $k-$ qo'shni intervali va uning chegarasida

$$\mathfrak{K}(x) = \frac{2k-1}{2^n}, \quad x \in \overline{K_{nk}}, \; k = 1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1}.$$

Shunday qilib, K_n to'plamlar va ularning chegaralarida $\mathfrak{K}$ funksiya aniqlandi. Bu $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n = [0,\ 1] \backslash K$ to'plam $[0,\ 1]$ kesmada zich. Endi $x_0 \in K$ soni $\mathfrak{K}$ funksiya aniqlanmagan biror nuqta bo'lsin, u holda

$$\mathfrak{K}(x_0) = \sup\left\{\mathfrak{K}(x) : \; x < x_0, \; x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right\}$$

deymiz. Hosil qilingan funksiya *Kantorning zinapoya funksiyasi* deyiladi.

5.95. Kantorning zinapoya funksiyasi $\mathfrak{K}$ ning $[0,\ 1]$ kesmada uzluksiz, monoton kamaymaydigan funksiya ekanligini isbotlang.

5.96. Kantorning zinapoya funksiyasi $F(x) = \mathfrak{K}(x)$ yordamida qurilgan Lebeg-Stiltes o'lchovi $-\mu_{\mathfrak{K}}$ bo'lsin.

a) $\mu_{\mathfrak{K}}$ ning singulyar o'lchov ekanligini isbotlang.

b) $\mu_{\mathfrak{K}}(K) = 1$ tenglikni isbotlang. Bu yerda $K-$ Kantor to'plami.

c) A Kantor to'plamini saqlovchi $(K \subset A)$ ixtiyoriy to'plam bo'lsin. $\mu_{\mathfrak{K}}(A) = 1$ tenglikni isbotlang.

5.97. a) $F(x) = x$ funksiya yordamida qurilgan Lebeg-Stiltes o'lchovi absolyut uzluksiz o'lchov bo'ladimi?

b) $F(x) = 2[x] + 1$ funksiya yordamida qurilgan Lebeg-Stiltes o'lchovi diskret o'lchov bo'ladimi?

c) Singulyar Lebeg-Stiltes o'lchoviga misol keltiring.

5.98. Additiv, ammo $\sigma-$ additiv bo'lmagan o'lchovga misol keltiring.

5.99. Har bir $A \subset \mathbb{R}$ to'plamga

$$m(A) = \sum_{n \in \mathbb{N} \cap A} \frac{1}{2^n}$$

sonni mos qo'yamiz. m to'plam funksiyasi o'lchov bo'lishini ko'rsating. $A = (-\infty,\ 0)$ va $B = [1,\ 4]$ to'plamlarning o'lchovlarini toping.

I bobni takrorlash uchun test savollari

1. Quyidagi tengliklar ichidan to'g'rilarini ajrating.

1. $A\Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$, 2. $A\Delta B = (A \cup B)\Delta(A \cap B)$,

3. $A \,\Delta\, B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

A) 1, 2 B) 2, 3 C) 1, 2, 3 D) 1, 3

2. $E-$ universal to'plam. Ikkilik munosabatlarini toping.

1) $E \backslash \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha}(E \backslash A_\alpha)$, 2) $E \backslash \bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha}(E \backslash A_\alpha)$

3) $A\Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$, 4) $(E \backslash A)\Delta(E \backslash B) = A\Delta B$

A) 1, 2 B) 2, 3 C) 3, 4 D) 1, 4

3. A va B to'plamlar o'zaro kesishmaydi. Quyidagilar ichidan to'g'rilarini ajrating. 1) $A\Delta B = A\cup B$, 2) $A\backslash B = A$, 3) $B\backslash A = B$

A) 1, 2 B) 2, 3 C) 1, 2, 3 D) 1, 3

4. A_1 va A_2 to'plamlar o'zaro kesishmaydi. Quyidagilar ichidan to'g'rilarini ajrating. 1) $B_1\cap B_2\subset (A_1\,\Delta\, B_1)\cup(A_2\,\Delta\, B_2)$, 2) $A_1\Delta A_2=\emptyset$, 3) $A_1\Delta A_2 = A_1\cup A_2$, 4) $(A_1\cup A_2)\Delta(B_1\cup B_2)\subset(A_1\Delta B_1)\cup(A_2\Delta B_2)$

A) 1, 2, 3 B) 2, 3, 4 C) 1, 2, 3, 4 D) 1, 3, 4

5. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=[0,5\,x]$ akslantirish berilgan. Bu yerda $[x]$ belgi x sonining butun qismi. Agar $A=[0,\ 8]$ bo'lsa, $f(A)$ ni toping.

A) $\{0;\,1;\,2;\,3;\,4;\,5;\,6;\,7\}$ B) $[0,\,8]$

C) $\{0;\,1;\,2;\,3;\,4;\,5;\,6;\,7;\,8\}$ D) $\{0;\,1;\,2;\,3;\,4\}$

6. $f:X\to[5,\ 26]$, $f(x)=x^2+1$ funksiya berilgan. $f-$ ustiga (suryektiv) akslantirish bo'ladigan maksimal X to'plamni toping.

A) $[-5,\,-2]\cup[2,\,5]$ B) $[-2,\,5]$ C) $[2,\,5]$ D) $(2,\,5)$

7. $f:[0,\pi]\to[-1,1]$, $f(x)=\cos x$, $g:[0,\pi]\to[0,1]$, $g(x)=\sin x$, $\varphi:[0,\dfrac{\pi}{2}]\to[0,1]$, $\varphi(x)=\sin x$, $\psi:[0,2]\to[0,5]$, $\psi(x)=x^2+1$ akslantirishlar ichidan suryektivlarini ajrating.

A) f,g,φ B) f,g,ψ C) g,φ,ψ D) f,φ,ψ

8. $f:[0,\pi]\to[-1,1]$, $f(x)=\cos x$, $g:[0,\pi]\to[0,1]$, $g(x)=\sin x$, $\varphi:[0,\dfrac{\pi}{2}]\to[0,1]$, $\varphi(x)=\sin x$, $\psi:[0,2]\to[0,5]$, $\psi(x)=x^2+1$ akslantirishlar ichidan biyektivlarini ajrating.

A) f,g B) f,ψ C) f,φ D) φ,ψ

9. Quyidagilar ichidan sanoqli to'plamlarni ajrating.

1) Jahon banklaridagi valyutalar to'plami.

2) Barcha ratsional sonlar to'plami.

3) Yer sharidagi barcha qushlar to'plami.

4) Barcha tub sonlar to'plami.

A) 1, 3 B) 2, 4 C) 1, 2, 3 D) 1, 3, 4

10. Quyidagi tasdiqlar ichidan to'g'rilarini ajrating.

1) Chekli to'plamlarning ayirmasi chekli to'plam bo'ladi.

2) Sanoqli to'plamlarning ayirmasi sanoqli to'plam bo'ladi.

3) Kontinuum quvvatli to'plamlarning ayirmasi kontinuum quvvatli to'plam bo'ladi.

A) 1, 3 B) 2, 3 C) 1 D) 1, 2, 3

11. Quyidagi tasdiqlar ichidan to'g'rilarini ajrating.

1) Chekli to'plamlarning kesishmasi chekli to'plam bo'ladi.

2) Sanoqli to'plamlarning kesishmasi sanoqli to'plam bo'ladi.

3) Kontinuum quvvatli to'plamlarning kesishmasi kontinuum quvvatli to'plam bo'ladi.

A) 1, 3 B) 2, 3 C) 1 D) 1, 2, 3

12. Quyidagi tasdiqlar ichidan to'g'rilarini ajrating.

1) Chekli to'plamlarning birlashmasi chekli to'plam bo'ladi.

2) Sanoqli to'plamlarning birlashmasi sanoqli to'plam bo'ladi.

3) Kontinuum quvvatli to'plamlarning birlashmasi kontinuum quvvatli to'plam bo'ladi.

A) 1, 3 B) 2, 3 C) 1 D) 1, 2, 3

13. Kesishmasi kontinuum, simmetrik ayirmasi sanoqli bo'lgan A_1 va A_2 kontinuum quvvatli to'plamlarga misol keltiring.

A) $A_1 = [0,\ 1],\ A_2 = (0,\ 1)$ B) $A_1 = [0,\ 1],\ A_2 = [0,\ 1] \cup \mathbb{Q}$

C) $A_1 = [0,\ \infty),\ A_2 = [-2,\ \infty)$ D) $A_1 = (-\infty,\ 0],\ A_2 = (0,\ \infty)$

14. Chekli to'plamlar ko'rsatilgan javobni toping.

A) $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ B) $\{2;\ 3\},\ \emptyset$ C) $\{2;3\},\ [0,\ 1], \mathbb{Z}$ D) $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$

15. Sanoqli to‘plamlar ko‘rsatilgan javobni toping.

A) $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ B) $\{2;\ 3\},\ \emptyset$ C) $\{2;3\},\ [0,\ 1],\ \mathbb{Z}$ D) $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$

16. Kontinuum quvvatli to‘plamlar ko‘rsatilgan javobni toping.

A) $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ B) $\{2;\ 3\}, \emptyset$ C) $\{2;3\}, [0,\ 1], \mathbb{Z}$ D) $[0,\ 1], \mathbb{R}, \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

17. Ekvivalent to‘plamlar ko‘rsatilgan javobni toping.

A) $\mathbb{Q} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \sim \mathbb{R}$ B) $[0,\ 1] \sim [0,\ \infty) \sim \mathbb{R} \sim \mathbb{Q}$

C) $[0,\ 1] \sim \mathbb{R} \sim \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ D) $[0,\ 1] \sim \mathbb{R} \sim \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \sim \mathbb{Q}$

18. Sonlar o‘qidagi barcha $[a,\ b)$ yarim intervallar sistemasi $\mathfrak{S}$:

A) Yarim halqa bo‘ladi, halqa bo‘lmaydi.

B) Halqa bo‘ladi, algebra bo‘lmaydi.

C) Ham halqa, ham algebra bo‘ladi.

D) Ham algebra, ham σ algebra bo‘ladi.

19. Sonlar o‘qidagi barcha chekli to‘plamlar sistemasi $\mathfrak{S}$:

A) Yarim halqa bo‘ladi, halqa bo‘lmaydi.

B) Halqa bo‘ladi, algebra bo‘lmaydi.

C) Ham halqa, ham algebra bo‘ladi.

D) Ham algebra, ham σ algebra bo‘ladi.

20. Sonlar o‘qidagi barcha chekli, sanoqli va kontinuum quvvatli to‘plamlar sistemasi $\mathfrak{S}$:

A) Yarim halqa bo‘ladi, halqa bo‘lmaydi.

B) Halqa bo‘ladi, algebra bo‘lmaydi.

C) Ham halqa, ham algebra bo‘ladi.

D) Ham algebra, ham σ algebra bo‘ladi.

21. Sonlar o'qidagi barcha chegaralangan to'plamlar sistemasi $\mathfrak{S}$:

A) Yarim halqa bo'ladi, halqa bo'lmaydi.

B) Halqa bo'ladi, algebra bo'lmaydi.

C) Ham halqa, ham algebra bo'ladi.

D) Yarim halqa tashkil qilmaydi.

22. Tekislikdagi barcha to'g'ri to'rtburchaklar sistemasi $\mathfrak{S}$:

A) Yarim halqa bo'ladi, halqa bo'lmaydi.

B) Halqa bo'ladi, algebra bo'lmaydi.

C) Ham halqa, ham algebra bo'ladi.

D) Ham algebra, ham σ algebra bo'ladi.

23. $E = \{(x, y) : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1\}$ birlik kvadratdagi barcha elementar to'plamlar sistemasi $\mathfrak{S}$:

A) Yarim halqa bo'ladi, halqa bo'lmaydi.

B) Halqa bo'ladi, algebra bo'lmaydi.

C) Ham halqa, ham algebra bo'ladi.

D) Ham algebra, ham σ algebra bo'ladi.

24. $E = [0, \ 1]$ to'plamning barcha qism to'plamlaridan tashkil topgan $\mathfrak{A}(E)$ sistema simmetrik ayirma Δ amaliga nisbatan gruppa tashkil qiladi. Uning birlik elementi $e \, (e * x = x * e = e)$ ni toping.

A) $e = [0, \ 1]$ B) $e = \emptyset$ C) $e = \{0\}$ D) $e = (0, \ 1)$

25. $E = [0, \ 1]$ to'plamning barcha qism to'plamlaridan tashkil topgan $\mathfrak{A}(E)$ sistema simmetrik ayirma Δ amaliga nisbatan gruppa tashkil qiladi. Bu gruppada $x = (0, \ 1)$ elementga teskari elementni toping.

A) $x^{-1} = \{0\}$ B) $x^{-1} = \emptyset$ C) $x^{-1} = (0, \ 1)$ D) $x^{-1} = [0, \ 1]$

26. $P = \left\{1,4 \le x \le 5\frac{3}{5}, \ \ 2,5 \le y \le \frac{15}{2}\right\}$ to'g'ri to'rtburchakning o'lchovini toping.

A) 20 B) 21 C) 18,75 D) 20,4

27. $P=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ va $Q=\{0,3\le x\le 0,8,\ 0\le y\le 1\}$ to‘g‘ri to‘rtburchaklar kesishmasining o‘lchovini toping.

A) 0,5 B) 0,8 C) 0,15 D) 0,75

28. $P=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ va $Q=\{0,5\le x\le 1,5,\ 0\le y\le 1\}$ to‘g‘ri to‘rtburchaklar birlashmasining o‘lchovini toping.

A) 1,3 B) 1,4 C) 1,5 D) 2

29. $P=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ va $Q=\{0,5\le x\le 1,5,\ 0\le y\le 1\}$ to‘g‘ri to‘rtburchaklar simmetrik ayirmasining o‘lchovini toping.

A) 0,5 B) 1 C) 1,5 D) 0,8

30. $P=\{0\le x\le 5,\ 0\le y\le 5\}$, $P_1=\{0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2\}$. $P\backslash P_1$ ayirmaning chekli yoyilmasida eng kamida nechta to‘g‘ri to‘rtburchak qatnashadi?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 5

31. $A=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 0,2\}\cup\{0\le x\le 1,\ 0,8\le y\le 1\}$ elementar to‘plamning o‘lchovini toping.

A) 0,2 B) 0,3 C) 0,4 D) 0,5

32. $A=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$ to‘plamning tashqi o‘lchovini toping.

A) 0,2 B) 0,3 C) 0,4 D) 0,5

33. Lebeg o‘lchovining additivlik xossasini ko‘rsating.

A) $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\mu(A_k),\quad A_i\cap A_j=\emptyset\ ,\ i\neq j$

B) $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(A_n),\quad A_i\cap A_j=\emptyset\ ,\ i\neq j$

C) $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(A),\ \ A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n,\ \ A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$

D) $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$

34. Lebeg o‘lchovining yarim additivlik xossasini ko‘rsating.

A) $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k), \quad A_i \cap A_j = \emptyset\ ,\ i \neq j$

B) $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), \quad A_i \cap A_j = \emptyset\ ,\ i \neq j$

C) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A), \ \ A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n, \ \ A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$

D) $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

35. Lebeg o‘lchovining $\sigma-$ additivlik xossasini ko‘rsating.

A) $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k), \quad A_i \cap A_j = \emptyset\ ,\ i \neq j$

B) $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), \quad A_i \cap A_j = \emptyset\ ,\ i \neq j$

C) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A), \ A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n, \ \ A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$

D) $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

36. Lebeg o‘lchovining uzluksizlik xossasini toping.

A) $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k), \quad A_i \cap A_j = \emptyset\ ,\ i \neq j$

B) $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), \quad A_i \cap A_j = \emptyset\ ,\ i \neq j$

C) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A), \ A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n, \ \ A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$

D) $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

37. $A \subset [0,\ 1] -$ o‘lchovsiz to‘plam. Quyidagilar ichidan o‘lchovsiz to‘plamlarni ajrating. 1) $[0,\ 1]\backslash A$, 2) $A \cap \mathbb{Q}$, 3) $A \cap ([0,\ 1]\backslash \mathbb{Q})$.

A) 1, 3 B) 2, 3 C) 1, 2 D) 1, 2, 3

38. $A \subset [0,\ 1]-$ o‘lchovsiz to‘plam, $K-$ Kantor to‘plami bo‘lsin. Quyidagilar ichidan o‘lchovli to‘plamlarni ajrating.

1) $[0,\ 1]\backslash A$, 2) $A \cap \mathbb{Q}$, 3) $A \cap K$.

A) 1, 3 B) 2, 3 C) 1, 2 D) 1, 2, 3

39. μ_F o‘lchov $F(x) = [x]$ funksiya yordamida qurilgan Lebeg-Stiltes o‘lchovi,

$A = \{1,\ 2,\ 3\}$ bo‘lsin. $\mu_F(A)$ ni hisoblang.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 0

40. $F(x) = \mathfrak{K}(x)-$ Kantorning zinapoya funksiyasi, μ_F- esa $F(x)$ yordamida qurilgan Lebeg-Stiltes o‘lchovi bo‘lsin. $A = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ to‘plamning o‘lchovini toping.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) 0

I bob uchun javoblar va ko‘rsatmalar

1-§. To‘plamlar ustida amallar

10. $x \in E \backslash \bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ ixtiyoriy element bo‘lsin. U holda $x \in E$ va $x \notin \bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ bo‘ladi. Bundan shunday α_0 mavjud bo‘lib, x ning A_{α_0} to‘plamga tegishli emasligiga kelamiz. Demak, x element A_{α_0} to‘plamning to‘ldiruvchisida yotadi. Shunday qilib, α_0 uchun $x \in E \backslash A_{\alpha_0}$ munosabat o‘rinli, bundan biz $x \in \bigcup\limits_{\alpha} (E \backslash A_\alpha)$ ga ega bo‘lamiz. Bu esa

$$E \backslash \bigcap_{\alpha} A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha} (E \backslash A_\alpha) \tag{1.1j}$$

munosabatni keltirib chiqaradi. Endi teskari munosabatni isbotlaymiz. Agar $x \in \bigcup\limits_{\alpha} (E \backslash A_\alpha)$ bo‘lsa, u holda biror α_0 uchun $x \in E \backslash A_{\alpha_0}$ bo‘ladi, bundan x element A_{α_0} to‘plamga tegishli bo‘lmaydi, bu esa $x \notin \bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ ekanligini bildiradi. Demak, $x \in E \backslash \bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ ekan. Bundan biz

$$E \backslash \bigcap_{\alpha} A_\alpha \supset \bigcup_{\alpha} (E \backslash A_\alpha) \tag{1.2j}$$

munosabatga kelamiz. (1.1j), (1.2j) munosabatlar (1.4) tenglikni isbotlaydi.

18. $A \cup B = [0,\ 1]$, $A \backslash B = \{0,\ 1\}$, $A \Delta B = \{0,\ 1\}$, $A \cap B = (0,\ 1)$.

19. $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, \ldots\}$,
$A \backslash B = \{2, 4, \ldots, 2(3n-2), 2(3n-1), \ldots\}$, $A \cap B = \{6, 12, \ldots, 6n, \ldots\}$

$A\Delta B = \{2, 3, 4, 8, 9, 10, 14, 15, 16, \ldots\}$.

20. $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \backslash B = \mathbb{Q}$, $A\Delta B = \mathbb{R}$, $A \cap B = \emptyset$.

21. $A \cup B = [0,\ 1]$, $A \backslash B = A$, $A\Delta B = [0,\ 1]$, $A \cap B = \emptyset$.

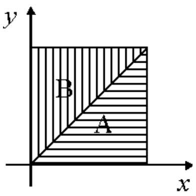
22. $A = \left\{\dfrac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}\right\}$, $B = \left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}$. Bu yerda $B \subset A$ munosabat oʻrinli, demak $A \cup B = A$, $A \cap B = B$, $A \backslash B = A\Delta B = \left\{\dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$.

23. A toʻplam 1.1k-chizmada gorizontal shtrixlangan soha, B toʻplam 1.1k-chizmada vertikal shtrixlangan soha. $A \cup B = \{(x, y):\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$,

$A \backslash B = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y < x\}$,

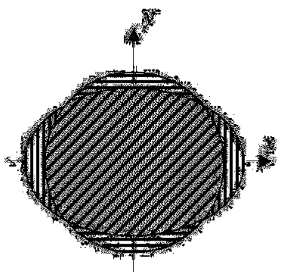
$A \cap B = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, y = x\}$,

$A\Delta B = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y < x\} \cup \{(x, y) : 0 \le x \le 1, x < y \le 1\}$.



1.1k-chizma

24. $A \cup B -$ 1.2k-chizmada shtrixlangan soha, $A \backslash B -$ chizmada gorizontal shtrixlangan soha, $A\Delta B; -$ chizmada vertikal va gorizontal shtrixlangan soha, $A \cap B -$ chizmada qiyalab shtrixlangan soha.



1.2k-chizma

39. $Z = \mathbb{Z}$, $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3\}$. $X \times Y = Y \times X$ tenglikdan $X = Y$ kelib chiqadi.

40. $X \times Y = \{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4)\}$,

$Y \times X = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5)\}$.

$X \times Y = Y \times X$ tenglik umuman olganda to‘g‘ri emas.

44. To‘g‘ri emas, masalan $X = [0,1]$, $X_1 = [1,2]$, $Y = [2,3]$, $Y_1 = [3,4]$.

49. $A^* = B \cup C \cup D$, $A_* = B \cap C \cap D$.

52. $x_m = (-1)^m$ ketma-ketlik Ω ga qarashli, lekin $\{x_m\} \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$.

2-§. Akslantirishlar

9. $E(\mathfrak{R}) = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$. **10.** $E(P) = \mathbb{R}$. **11.** $E(S) = [0, \infty)$.

12. $g(A) = \{0,1,2\}$, $g^{-1}(B) = [2,4)$. **13.** $\mathfrak{R}(A) = \{0\}$, $\mathfrak{R}^{-1}(B) = \emptyset$.

14. $f(x) = x$, $g(x) = 1 - x$, $(f+g)(x) = 1$,

$f(x) = x$, $g(x) = x - 3$, $(f-g)(x) = 3$.

26. 2.27-misolga qarang.

27. A va B to‘plamlar o‘zaro kesishmaydi, ya’ni $A \cap B = \emptyset$. Bu yerdan $P(A \cap B) = \emptyset$ ekanligini olamiz. Bu to‘plamlarning P akslantirishdagi tasvirlari ustma-ust tushadi, ya’ni $P(A) = [0,\ 1]$, $P(B) = [0,\ 1]$. Demak, $P(A) \cap P(B) = [0,\ 1] \neq \emptyset = P(A \cap B)$.

29. $\chi_{X \setminus A}(x) = 1 - \chi_A(x)$,

$\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$,

$\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$, $\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_A(x)\,\chi_B(x)$,

$\chi_{A \Delta B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$.

33. Mavjud. **34.** To‘g‘ri emas.

38. $f(A) = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4\right\}$, $f^{-1}(B) = [5,6)$.

39. $X = [-3,-2] \cup [2,3]$.

40. $X \subset (-\infty, 0]$ yoki $X \subset [0, +\infty)$ dagi ixtiyoriy to‘plam.

41. Bu akslantirish ham syuryektiv, ham biyektiv.

42. Inyektivlari f, φ, ψ. Syuryektivlari f, g, φ. Biyektivlari f, φ.

3-§. To‘plamlar quvvati

8. $K_a = \{(x,y) : x = a, -\infty < y < \infty\}$ – sinf tekislikda $x = a$ vertikal to‘g‘ri chiziqdan iborat.

9. $K_r = \Big\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = r\Big\} -$ sinf fazoda markazi koordinata boshida radiusi $r \geq 0$ bo'lgan sferadan iborat.

12. Bo'ladi. **13.** $f(2n) = n$.

19. Bu to'plamlar o'rtasida biyektiv moslikni

$$f : \mathbb{R} \to (0,\ 1), \quad f(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}$$

funksiya yordamida o'rnatish mumkin. Bu akslantirishning biyektiv ekanligi arktangens funksiyaning xossalaridan kelib chiqadi.

21. Yo'q, bu chekli to'plam.

22. $A = \mathbb{N}, B = \{3, 4, \ldots, n, \ldots\}$.

23. $A = \mathbb{N}, B = \{\ldots - 2, -1, 0, 1, 2\}$.

26. Sanoqli.

32. $A = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\},\ B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ to'plamlar bo'lsin. U holda $[0,\ 1]\backslash A = (0,\ 1)\backslash B = C$. A va B lar sanoqli to'plamlar bo'lganligi uchun $f : A \to B$ biyektiv akslantirish mavjud. U holda $g(x) = \begin{cases} f(x),\ agar\ x \in A \\ x,\ \ agar\ \ \ x \in C \end{cases}$ funksiya $[0, 1]$ ni $(0, 1)$ ga biyektiv akslantiradi.

33. $f(x, y) = \left(a + \frac{x+1}{2}(b - a), c + \frac{y+1}{2}(d - c)\right),\ (x, y) \in [-1,\ 1] \times [-1,\ 1]$.

36. $A \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ biror sanoqli to'plam bo'lsin, u holda $B = A \cup \mathbb{Q}$ ham sanoqli to'plam bo'ladi. $f : A \to B$ biror biyektiv akslantirish mavjud. U holda $g(x) = \begin{cases} f(x), \quad agar\ x \in A \\ x,\ \ agar\ \ x \in \mathbb{R}\backslash(\mathbb{Q} \cup A) \end{cases}$ funksiya $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ni $\mathbb{R}$ ga biyektiv akslantirish bo'ladi.

49. Ekvivalent. **51.** Irratsional sonlar uchun.

59. $A = [0;\ 1]$ kontinuum quvvatli bo'lgani uchun 3.4-teoremaga ko'ra uning barcha qism to'plamlaridan iborat to'plam giperkontinuum quvvatli bo'ladi.

60. $A \subset [0,\ 1]$ dagi ixtiyoriy to'plam bo'lsin. $f(x) = \chi_A(x) - A$ to'plamning xarakteristik funksiyasini olamiz. U holda χ_A xarakteristik funksiya A to‘plam orqali bir qiymatli aniqlanadi. Demak, $[0,\ 1]$ da aniqlangan va faqat 0 yoki 1 qiymat qabul qiluvchi funksiyalar to‘plami bilan $[0,\ 1]$ ning barcha qism to‘plamlari o‘rtasida biyektiv moslik mavjud. $[0,\ 1]$ to‘plamning barcha qism to‘plamlaridan iborat sistemaning quvvati giperkontinuum bo‘lgani bois $[0,\ 1]$ da aniqlangan va faqat 0 yoki 1 qiymat qabul qiluvchi funksiyalar to‘plami giperkontinuum quvvatli to‘plam bo‘ladi.

61. 3.4-teoremaga ko‘ra $\mathbb{R}^2$ ning barcha qism to‘plamlaridan iborat to‘plam giperkontinuum quvvatli bo‘ladi.

62. Bu to‘plam 60-misolda keltirilgan to‘plamni saqlaydi, shuning uchun u giperkontinuum quvvatli bo‘ladi.

4-§. To‘plamlar sistemalari

10. Sonlar o‘qidagi yopiq to‘plamlar sistemasi.

15. Agar $A, B \in \mathfrak{P} = \bigcap\limits_{\alpha} \mathfrak{P}_\alpha$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy α da $A, B \in \mathfrak{P}_\alpha$ bo‘ladi. $\mathfrak{P}_\alpha$ halqa bo‘lganligi uchun $A \Delta B \in \mathfrak{P}_\alpha$, $A \cap B \in \mathfrak{P}_\alpha$. U holda $A \Delta B \in \mathfrak{P}$ va $A \cap B \in \mathfrak{P}$.

23. Yarim halqa bo‘lmaydi.

24. Bo‘ladi.

25. Yarim halqa bo‘ladi, lekin halqa bo‘lmaydi.

26. Halqa tashkil qiladi.

30. Sistema sanoqli birlashmaga nisbatan yopiq emas. Masalan, $A_n = \{n^{-1}\} \in \mathfrak{S}$ lekin $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \notin \mathfrak{S}$.

31. $\mathfrak{S}$ halqa sifatida tayinlangan Oxy koordinatalar sistemasidagi elementar to‘plamlar sistemasini olamiz. $\mathfrak{S}_{45}$ halqa sifatida Oxy ni 45^0 ga burishdan hosil bo‘lgan koordinatalar sistemasidagi elementar to‘plamlar sistemasini belgilaymiz. $\mathfrak{S} \cup \mathfrak{S}_{45}$ sistemaning halqa emasligi ravshan. Chunki bu to‘plamlar sistemasi kesishma amaliga nisbatan yopiq emas.

32. $\mathfrak{S}_1 = \{A, \emptyset\}$, $\mathfrak{S}_2 = \{A, \{a\}, \{b,c\}, \emptyset\}$, $\mathfrak{S}_3 = \{A, \{b\}, \{a,c\}, \emptyset\}$, $\mathfrak{S}_4 = \{A, \{c\}, \{a,b\}, \emptyset\}$, $\mathfrak{S}_5 = \{A, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \emptyset\}$ bu sistemalar ham halqa, ham algebra bo'ladi. $\mathfrak{P}_1 = \{\emptyset, \{a\}\}$, $\mathfrak{P}_2 = \{\emptyset, \{b\}\}$, $\mathfrak{P}_3 = \{\emptyset, \{c\}\}$ bu sistemalar halqa bo'ladi, lekin algebra bo'lmaydi.

33. Halqa tashkil qiladi.

34. Bu sistema simmetrik ayirma amaliga nisbatan yopiq emas. Masalan, $A = [0,7]$, $B = (1,3)$ uchun $A\Delta B = [0,1] \cup [3,7]$ to'plam bu sistemaga qarashli emas.

35. $A = (0,7] \times (0,7]$ va $B = (0,5] \times (3,5]$ to'plamlar uchun $A\Delta B$ bu sistemaga qarashli emas.

36. Bu sistemada birlik element mavjud emas. Bu sistema halqa bo'lmaydi.

37. Eng kamida 4 ta to'g'ri to'rtburchak qatnashadi. Minimal perimetr 50.

38. Bu sistema $\sigma-$ halqa bo'lmaydi. $\sigma-$ algebra bo'lmaydi.

39. $\mathfrak{P}_A$ ning halqa ekanligini ko'rsataymiz. Haqiqatan ham $\widetilde{B}_1 = A \cap B_1$, $\widetilde{B}_2 = A \cap B_2$ bo'lsin. U holda

$$\widetilde{B}_1 \cap \widetilde{B}_2 = (A \cap B_1) \cap (A \cap B_2) = A \cap (B_1 \cap B_2) \in \mathfrak{P}_A.$$

Xuddi shunday

$$\widetilde{B}_1 \Delta \widetilde{B}_2 = (A \cap B_1)\Delta(A \cap B_2) = ((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)) \setminus (A \cap (B_1 \cap B_2)) =$$

$$= A \cap (B_1 \Delta B_2) \in \mathfrak{P}_A$$

munosabat o'rinli. Demak, $\mathfrak{P}_A$ sistema halqa bo'ladi. Bu sistemada A to'plam birlik element bo'ladi, ya'ni $\mathfrak{P}_A$ sistema algebra bo'ladi. Agar $\mathfrak{P}$ sistema $\sigma-$ halqa bo'lsa, u holda $\mathfrak{P}_A$ to'plamlar sistemasining $\sigma-$ algebra bo'lishi yuqoridagidek ko'rsatiladi.

40. X sanoqli to'plam bo'lsa.

41. a) Yarim halqa tashkil qilmaydi. b) va c) lar yarim halqa tashkil qiladi. Halqa va algebra tashkil qilmaydi.

18. $A = \left[\frac{1}{27}, 2\right) \bigcup [3, 4)\,, \quad \mu(A) = 2\frac{26}{27}.$

19. $A = \left[\frac{1}{27}, e\right) \bigcup \left[3, e^2\right) \cup \left[9, e^3\right)\,, \quad \mu(A) = e^3 + e^2 + e - 12\frac{1}{27}.$

20. $A = \left[\frac{1}{60}, \frac{1}{24}\right) \bigcup \left[\frac{1}{16}, \frac{5}{2}\right), \quad \mu(A) = 2\frac{37}{80}.$

21. $A = \left[\frac{3}{256}, \frac{1}{4}\right) \bigcup \left\{\frac{1}{256}\right\}, \quad \mu(A) = \frac{61}{256}.$

22. $A = \left(0, \frac{3}{8}\right) \bigcup \left(\frac{3}{8}, \frac{13}{24}\right) \bigcup \left(\frac{7}{8}, \frac{25}{24}\right), \quad \mu(A) = \frac{17}{24}.$

27. $\mu(A) = 0.$ **28.** $\mu(A) = \frac{1}{2}.$ **29.** $\mu(A) = 1.$

30. $A_k \subset [0,\ 1],\ k \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ bilan sonlarining cheksiz o‘nli kasr yoyilmasida k raqami qatnashadigan sonlar to‘plamini belgilaymiz. Biz sonlarning cheksiz o‘nli kasr yoyilmasida 5 raqami qatnashadigan sonlar to‘plaminining o‘lchovi 1 ekanligini 5.4-misolda ko‘rsatdik. Xuddi shunday, istalgan $k \in \{1,\ 2, \ldots,\ 9\}$ uchun $\mu(A_k) = 1$ ekanligi ko‘rsatiladi. Sonlarning cheksiz o‘nli kasr yoyilmasida 1 dan 9 gacha bo‘lgan barcha raqamlar qatnashadigan sonlar to‘plami $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_9$ dan iborat bo‘ladi. U holda

$$\mu\left([0,\ 1] \setminus (\bigcap_{k=1}^{9} A_k)\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{9}([0,\ 1] \setminus A_k)\right) \leq \sum_{k=1}^{9} \mu([0,\ 1] \setminus A_k) = 0$$

bo‘ladi. Demak, $\mu(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_9) = 1$ bo‘ladi.

34. Shart emas. Masalan, $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ bo‘lsin, u holda $\mu(A) = 0,\ \mu(\overline{A}) = 1$ bo‘ladi.

38. a) 4.3-ta’rifga ko‘ra A Borel tipidagi to‘plam bo‘ladi.
$A_n = \left(n - \frac{1}{3^n}, n + \frac{1}{2^n}\right]$ to‘plamlar o‘zaro kesishmaydi, shuning uchun $\mu(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) = \frac{3}{2}$. b) $\mu(A) = \infty$, c) $\mu(A) = 1.$

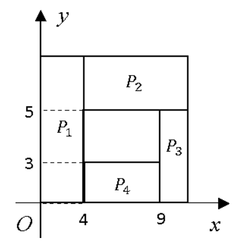
39. a) $\mu(A) = 1$, b) $\mu(A) = 0$, c) $\mu(A) = \infty$, d) $\mu(A) = 3,5$,
e) $\mu(A) = 2\frac{1}{3} + \frac{1}{e(e-1)}$, f) $\mu(A) = 2\frac{3}{10}.$

40. a) $A_{2n-1} = [n-1, n)$, $A_{2n} = [-n, 1-n)$. b) $A_n = [n, \infty) \cup (0,1)$.
c) $A_n = (-\infty, n) \cup \mathbb{N}$. d) $A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[k + \frac{1}{\sqrt{n+k}}, k + \frac{1}{\sqrt{n+k-1}}\right)$.
41. a) $\mu(A) = \pi$, b) $\mu(A) = \pi$.

42. $\mu(A) = 1 - a$. **44.** $E(f) = [0, \lambda]$. **45.** Mavjud emas.

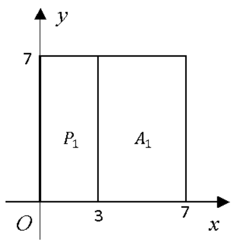
46. $B \subset [0,1]$ o'lchovsiz to'plam bo'lsin. U holda $A = \{(x,y) : x \in B, y = 1\}$ $\cup \{(x,y) : x = 1, y \in B\}$ to'plam uchun $pr_x A = B$, $pr_y A = B$ bo'ladi.

47. $A \backslash A_1 = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$ (5.1k-chizmaga qarang). $P_1 = [0,4) \times [0,7)$, $P_2 = [4,7) \times [5,7)$, $P_3 = [6,7) \times [0,5)$, $P_4 = [4,6) \times [0,3)$.
$\mu(A \backslash A_1) = 45$.



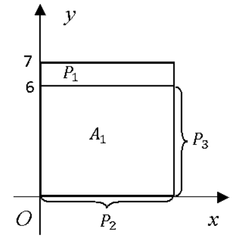
5.1k-chizma

48. $A \backslash A_1 = P_1 \cup P_2$. 5.2k-chizmaga qarang. $P_1 = [0,3) \times [0,7)$, $P_2 = [0,7] \times \{7\}$. $\mu(A \backslash A_1) = 21$.



5.2k-chizma

49. $A \backslash A_1 = P_1 \cup P_2 \cup P_3$. 5.3k-chizmaga qarang. $P_1 = [0,7] \times [6,7]$, $P_2 = [0,7] \times \{0\}$, $P_3 = \{7\} \times [0,6)$. $\mu(A \backslash A_1) = 7$.



5.3k-chizma

60. **a)** $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)$ tenglikni isbotlaymiz. $A\cup B$ ni o‘zaro kesishmaydigan to‘plamlarning birlashmasi ko‘rinishida tasvirlaymiz:

$$A\cup B=(A\setminus(A\cap B))\cup(B\setminus(A\cap B))\cup(A\cap B).$$

Bu yoyilmadan va o‘lchovning additivlik xossasidan

$$\mu(A\cup B)=\mu(A\setminus(A\cap B))+\mu(B\setminus(A\cap B))+\mu(A\cap B) \qquad (5.1j)$$

ni olamiz. Ma’lumki o‘lchovli E va A to‘plamlar uchun $A\subset E$ bo‘lganda $\mu(E\setminus A)=\mu(E)-\mu(A)$ tenglik o‘rinli. Shunga ko‘ra $\mu(A\setminus(A\cap B))=\mu(A)-\mu(A\cap B)$, $\mu(B\setminus(A\cap B))=\mu(B)-\mu(A\cap B)$ bo‘ladi. Bularni (5.1j) tenglikka qo‘yib $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)$ tenglikni olamiz.

b) tenglikni isbotlashda yuqoridagi tenglikdan foydalanamiz:

$$\mu(A\Delta B)=\mu((A\cup B)\setminus(A\cap B))=\mu(A\cup B)-\mu(A\cap B). \qquad (5.2j)$$

(5.2j) da $\mu(A\cup B)$ o‘rniga $\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)$ ni qo‘yib, $\mu(A\Delta B)=\mu(A)+\mu(B)-2\mu(A\cap B)$ tenglikni olamiz.

65. a) $\mu(A)=1$. b) $\mu(A)=2$. c) $\mu(A)=1$. d) $\mu(A)=1$.

66. a) $\mu(A)=11-2e$. b) $\mu(A)=3$. c) $\mu(A)=4+2e$. d) $\mu(A)=5$.

67. Chegaralangan o‘lchovsiz to‘plam quyidagicha quriladi. Buning uchun $[-1,\ 1]$ kesmaning nuqtalari orasida ekvivalentlik tushunchasini kiritamiz: agar x va y ning ayirmasi $x-y\in\mathbb{Q}$ bo‘lsa, *ular ekvivalent* deyiladi. Bu munosabat ekvivalentlik munosabati bo‘ladi. Shuning uchun $[-1,\ 1]$ kesma o‘zaro ekvivalent bo‘lgan elementlardan iborat $K(x)$, $x\in[-1,\ 1]$ sinflarga ajraladi. Bunda turli sinflar o‘zaro kesishmaydi. Shunday qilib $[-1,\ 1]$ kesma o‘zaro kesishmaydigan $K(x)$, $x\in[-1,\ 1]$ sinflarga ajraladi. Endi bu sinflarning har biridan bittadan element tanlab olib, bu tanlab olingan elementlar to‘plamini A bilan belgilaymiz. Hosil bo‘lgan A to‘plam o‘lchovsiz to‘plam bo‘ladi.

68. O‘lchovli ham o‘lchovsiz ham bo‘lishi mumkin. Masalan, $A \subset [0,1)$ dagi $B \subset [1,2)$ dagi o‘lchovsiz to‘plamlar bo‘lsin. U holda ularning kesishmasi $A \cap B = \emptyset$ o‘lchovli to‘plam, $A \cap A = A$ o‘lchovsiz to‘plam bo‘ladi.

69. O‘lchovli ham, o‘lchovsiz ham bo‘lishi mumkin. Masalan, $A_0 = [0,\ 1)$ o‘lchovsiz to‘plam bo‘lsin. $A = A_0 \cup [1,\ 2)$, $B = A_0$ bo‘lsa, $A \backslash B = [1,\ 2)$ o‘lchovli to‘plam bo‘ladi. Agar $A = A_0 \cup [1,\ 2)$, $B = [1,\ 2)$ desak, $A \backslash B = A_0$ o‘lchovsiz to‘plam bo‘ladi.

70. O‘lchovli ham, o‘lchovsiz ham bo‘lishi mumkin.

71. Mumkin.

72. Agar $A \cap B = \emptyset$ bo‘lsa, keshishma o‘lchovli to‘plam bo‘ladi. Agar $B \subset A$ bo‘lsa, keshishma $A \cap B = B$ o‘lchovli to‘plam bo‘ladi. Agar $A \subset B$ bo‘lsa, keshishma $A \cap B = A$ o‘lchovsiz to‘plam bo‘ladi.

73. Agar $A \subset B$ bo‘lsa, $A \backslash B = \emptyset$ o‘lchovli to‘plam bo‘ladi. Agar $B \subset A$ bo‘lsa, $A \backslash B$ o‘lchovsiz to‘plam bo‘ladi.

74. $A \cap B = \emptyset$ holda $B \backslash A = B$ o‘lchovli to‘plam bo‘ladi. $B \subset A$ holda $B \backslash A = \emptyset$ o‘lchovli to‘plam bo‘ladi. $A \subset B$ holda $B \backslash A$ o‘lchovsiz to‘plam bo‘ladi.

75. $A \cap B = \emptyset$, o‘lchovli to‘plam. $B \subset A$ va $A \subset B$ hollarda $A \Delta B$ to‘plam o‘lchovsiz bo‘ladi.

85. Kantor to‘plami.

86. 5.42-misolda $a = 0,1$ deb olsak, $\mu(A) = 0,9$ bo‘ladi. Bu A to‘plam hech yerda zich bo‘lmagan mukammal to‘plam bo‘ladi.

87. Mavjud emas.

88. $A = K \cup ([0,1] \cap \mathbb{Q})$. Bu yerda K Kantor to‘plami.

89. Shart emas.

90. $A = K,\ B = K$. Bu yerda K Kantor to‘plami.

91. $A = B = K$. Bu yerda K Kantor to‘plami. $K + K = [0,2]$ tenglik

13.5-misolda isbotlangan.

93. 5.11-ta'rifga ko'ra,

$$\mu_F(A) = F(5) - F(1) = 2 \cdot 5 + 1 - (2 \cdot 1 + 1) = 11 - 3 = 8.$$

94. $\mu(A) = 6$.

97. b) Ha. **c)** 5.96-misolga qarang.

98. $X = [0,\ 1] \bigcap \mathbb{Q}$ deymiz. $\mathfrak{S}_m$ orqali X ning $(a,\ b)$ interval, $[a,\ b]$ kesma va $[a,\ b)$, $(a,\ b]$ yarim intervallar bilan kesishmalaridan iborat to'plamlar sistemasini belgilaymiz. $\mathfrak{S}_m$ yarim halqa bo'ladi. Agar $A_{ab} = X \bigcap (a,\ b)$ $(\bigcap [a,\ b], \bigcap (a,\ b], \bigcap [a,\ b))$ desak, va har bir A_{ab} to'plamga $m(A_{ab}) = b - a$ sonni mos qo'ysak, bu to'plam funksiyasi $m\ :\ \mathfrak{S}_m \to \mathbb{R}_+$ additiv, ammo $\sigma -$ additiv bo'lmagan o'lchov bo'ladi.

99. 1) m to'plam funksiyasining aniqlanish sohasi $\mathbb{R}$ ning barcha qism to'plamlari sistemasi bo'ladi. Bu sistema yarim halqa tashkil qiladi.

2) $m(A) \geq 0$ tengsizlik m ning aniqlanishidan kelib chiqadi.

3) agar A va B to'plamlar kesishmasa

$$\mu(A \cup B) = \sum_{n \in \mathbb{N} \bigcap (A \bigcup B)} \frac{1}{2^n} = \sum_{n \in \mathbb{N} \bigcap A} \frac{1}{2^n} + \sum_{n \in \mathbb{N} \bigcap B} \frac{1}{2^n} = \mu(A) + \mu(B)$$

tenglik o'rinli. Bu yerdan o'lchovning additivlik xossasi kelib chiqadi. $\mu(A) = 0$, $\mu(B) = 0,875$.

I bobda keltirilgan test javoblari

1-C 2-A 3-C 4-D 5-D 6-A 7-A 8-C 9-B 10-C 11-C 12-D 13-B 14-B 15-A 16-D 17-C 18-A 19-B 20-D 21-B 22-A 23-C 24-B 25-C 26-B 27-A 28-C 29-B 30-C 31-C 32-D 33-A 34-D 35-B 36-C 37-A 38-B 39-C 40-D.

II. LEBEG INTEGRALI

Ushbu bo'limda o'lchovli funksiyalar va ularning Lebeg integrali xossalari bayon qilingan. O'lchovli funksiyalar Lebeg integrali tushunchasini kiritishda asosiy manba hisoblanadi. O'lchovli funksiyalar ta'rifi, ularning asosiy xossalari keltirilgan. Jumladan, o'lchovli funksiyalar to'plamining arifmetik amallarga nisbatan yopiqligi, shuningdek o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi xossalari va Lebeg integrali ta'rifi, asosiy xossalari bayon etilgan. Amaliy mashg'ulotlar va uy vazifalari uchun yetarlicha masalalar berilgan.

6-§. O'lchovli funksiyalar

Bu paragrafda uzluksiz funksiyaga "qaysidir" ma'noda yaqin bo'lgan o'lchovli funksiya tushunchasini keltiramiz. O'lchovli funksiyalar Lebeg integralini kiritishda asosiy manba hisoblanadi. Bizga $E \subset \mathbb{R}$ $(E \subset \mathbb{R}^2)$ Lebeg ma'nosida o'lchovli to'plam va unda aniqlangan haqiqiy qiymatli f funksiya berilgan bo'lsin.

6.1-ta'rif. *Agar ixtiyoriy $c \in \mathbb{R}$ uchun $\{x \in E : f(x) < c\} := E(f < c)$ to'plam o'lchovli bo'lsa, f funksiya E to'plamda o'lchovli deyiladi.*

6.1. $f : E \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a = const$ funksiyaning o'lchovli ekanligini ta'rif yordamida ko'rsating.

Yechish. Ixtiyoriy $c \in \mathbb{R}$ uchun

$$E(f < c) = \{x \in E : f(x) < c\} = \begin{cases} E, & agar\ c > a, \\ \emptyset, & agar\ c \leq a \end{cases}$$

tenglik o'rinli. E va $\emptyset$ to'plamlar o'lchovli. Demak, ixtiyoriy $c \in \mathbb{R}$ uchun $E(f < c)$ to'plam o'lchovli ekan. 6.1-ta'rifga ko'ra, $f(x) = a$ funksiya E da o'lchovli bo'ladi. $\square$

6.2. Funksiyalarni ta'rif yordamida o'lchovli ekanligini ko'rsating.

a) $f(x) = [x], \quad x \in [0,\ 2)$. b) $f(x) = \{x\}, \quad x \in [0,\ 2)$.

c) $f(x) = 2x + 3, \quad x \in [0,\ 3]$. d) $f(x) = x^2 - 5, \quad x \in [-2,\ 3]$.

e) $f(x) = 2^x - 1, \quad x \in [0,\ 2]$. f) $f(x) = \ln(x + 1), \quad x \in [0,\ 2)$.

g) $f(x) = \sin x + 5, \quad x \in [0,\ \pi]$. h) $f(x) = \cos x + 5, \quad x \in [-\pi,\ 0]$.

Yechish. Biz a) misolning yechimini beramiz. Ixtiyoriy $c \in \mathbb{R}$ uchun

$$E(f < c) = \{x \in E : [x] < c\} = \begin{cases} \emptyset, & agar\ c \leq 0 \\ [0,\ 1), & agar\ 0 < c \leq 1 \\ [0,\ 2), & agar\ c > 1 \end{cases}$$

tenglik o‘rinli. $\emptyset$ va $[0,\ 1)$, $[0,\ 2)$ to‘plamlar o‘lchovli. Demak, ixtiyoriy $c \in \mathbb{R}$ uchun $E(f < c)$ to‘plam o‘lchovli ekan. 6.1-ta’rifga ko‘ra, $f(x) = [x]$ funksiya $E = [0,\ 2)$ da o‘lchovli bo‘ladi. □

6.3. O‘lchovli bo‘lmagan funksiyaga misol keltiring.

Yechish. E musbat o‘lchovli to‘plam, $A \subset E$ o‘lchovsiz to‘plam bo‘lsin. Quyidagi funksiyani qaraymiz:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & agar\ \ x \in A \\ 1, & agar\ \ x \in E \backslash A\,. \end{cases} \tag{6.1}$$

Bu funksiya uchun $E(f < 0) = A$ bo‘lib, u o‘lchovsiz to‘plam. Demak, f funksiya E da o‘lchovli emas. □

6.4. Agar $A \subset E$ o‘lchovsiz to‘plam bo‘lsa, u holda $g(x) = \chi_{E \backslash A}(x)$ funksiya o‘lchovsiz bo‘lishini isbotlang.

Isbot. To‘plam xarakteristik funksiyasi ta’rifiga ko‘ra $E(g < 0,5) = A$ bo‘lib, u o‘lchovsiz to‘plam. Demak, $g : E \to \mathbb{R}$ o‘lchovli funksiya emas. □

6.5. Agar f funksiya E to‘plamda o‘lchovli bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $a,\, b \in \mathbb{R}$ lar uchun quyidagi to‘plamlarning har biri o‘lchovli bo‘lishini isbotlang:

1) $E(f \geq a)$; 2) $E(a \leq f < b)$; 3) $E(f = a)$;

4) $E(f \leq a)$; 5) $E(f > a)$.

Isbot. Aytaylik, f o'lchovli funksiya bo'lsin, u holda ta'rifga ko'ra, ixtiyoriy $a \in \mathbb{R}$ uchun $E(f < a)$ to'plam o'lchovli bo'ladi.

1) $E(f \geq a) = E \setminus E(f < a)$ tenglikdan, hamda o'lchovli to'plamning to'ldiruvchisi o'lchovli ekanligidan $E(f \geq a)$ to'plamning o'lchovli ekanligi kelib chiqadi.

2) $E(a \leq f < b) = E(f \geq a) \cap E(f < b)$ tenglikdan, hamda o'lchovli to'plamlar kesishmasi o'lchovli ekanligidan $E(a \leq f < b)$ to'plamning o'lchovli ekanligi kelib chiqadi.

3) $E(f = a)$ to'plamning o'lchovli ekanligini ko'rsatamiz.

$$E(f = a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(a \leq f < a + \frac{1}{n}\right).$$

Bu yerda $E(a \leq f < a+1/n)$ to'plam 2) ko'rinishdagi to'plam bo'lgani uchun u - o'lchovli. O'lchovli to'plamlarning sanoqli sondagi kesishmasi o'lchovli bo'lganligi uchun $E(f = a)$ to'plam o'lchovli bo'ladi.

4) $E(f \leq a)$ to'plamning o'lchovli ekanligi ta'rifdan, 3) dan hamda $E(f \leq a) = E(f < a) \cup E(f = a)$ tenglikdan kelib chiqadi.

5) $E(f > a)$ to'plamning o'lchovli ekanligi $E(f > a) = E \setminus E(f \leq a)$ tenglikdan va to'ldiruvchi to'plamning o'lchovli ekanligidan kelib chiqadi. $\square$

6.6. Agar f va g lar E da o'lchovli funksiyalar bo'lsa, u holda

$$\{x \in E : f(x) > g(x)\}$$

to'plam o'lchovli bo'ladi. Isbotlang.

Isbot. Ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q}$ sanoqli bo'lgani uchun uning elementlarini nomerlab chiqamiz, ya'ni $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ va quyidagi tenglikni isbotlaymiz:

$$\{x \in E : f(x) > g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\{x : f(x) > r_k\} \cap \{x : g(x) < r_k\}\right) \qquad (6.2)$$

Faraz qilaylik, $x_0 \in \{x \in E : f(x) > g(x)\}$ bo‘lsin. Ratsional sonlarning zichlik xossasiga ko‘ra shunday $r_k \in \mathbb{Q}$ mavjudki, $f(x_0) > r_k > g(x_0)$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. Demak,

$$x_0 \in \{\, x : f(x) > r_k\} \cap \{\, x : g(x) < r_k\} \,.$$

Bundan

$$x_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (\{\, x : f(x) > r_k\} \cap \{\, x : g(x) < r_k\})$$

ekanligi kelib chiqadi. Endi

$$x_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (\{\, x : f(x) > r_k\} \cap \{\, x : g(x) < r_k\})$$

ixtiyoriy nuqta bo‘lsin, u holda x_0 birlashmadagi to‘plamlarning hech bo‘lmaganda bittasiga tegishli bo‘ladi, ya’ni shunday $r_k \in \mathbb{Q}$ mavjudki, bir vaqtda $f(x_0) > r_k$ va $g(x_0) < r_k$ bo‘ladi. Bundan $f(x_0) > g(x_0)$ ekanligi va demak, $x_0 \in \{x \in E : f(x) > g(x)\}$ ekanligi kelib chiqadi. (6.2) tenglik isbotlandi. $\{x \in E : f(x) > g(x)\}$ to‘plamning o‘lchovli ekanligi (6.2) tenglikdan, hamda o‘lchovli to‘plamlarning sanoqli birlashmasi va kesishmasi yana o‘lchovli ekanligidan kelib chiqadi. $\square$

O‘lchovli funksiyalar ketma-ketligining yaqinlashishlari. Bu bandda ekvivalent funksiyalar, ularning ayrim xossalari va o‘lchovli funksiyalar ketma-ketliklarining turli yaqinlashishlari orasidagi bog‘lanishlarni o‘rganamiz.

6.2-ta’rif. *E o‘lchovli to‘plamda aniqlangan f va g funksiyalar uchun $\mu(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) = 0$ bo‘lsa, f va g lar ekvivalent funksiyalar deyiladi va $f \sim g$ shaklda belgilanadi.*

6.3-ta’rif. *Agar biror xossa E to‘plamning nol o‘lchovli qismida bajarilmay, qolgan qismida bajarilsa, bu xossa E to‘plamda deyarli bajariladi deyiladi.*

Endi 6.2-ta’rifni quyidagicha ham aytish mumkin. Agar ikki funksiya deyarli teng bo‘lsa, ular *ekvivalent funksiyalar* deyiladi.

6.4-ta'rif. *Agar E to'plamda aniqlangan $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligining f funksiyaga yaqinlashmaydigan nuqtalari to'plamining o'lchovi nol bo'lsa (ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ tenglik E to'plamdagi deyarli barcha x lar uchun o'rinli bo'lsa), u holda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi E to'plamda f funksiyaga deyarli yaqinlashadi deyiladi.*

Bizga E to'plamda aniqlangan $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi va f o'lchovli funksiya berilgan bo'lsin.

6.5-ta'rif. *Agar ixtiyoriy $\delta > 0$ uchun*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in E : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}\right) = 0$$

tenglik bajarilsa, u holda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi E to'plamda f funksiyaga o'lchov bo'yicha yaqinlashadi deyiladi.

6.1-teorema *(Yegorov). E chekli o'lchovli to'plamda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi f ga deyarli yaqinlashsin. U holda ixtiyoriy $\delta > 0$ uchun shunday $E_\delta \subset E$ to'plam mavjudki, $\mu(E \backslash E_\delta) < \delta$* va *$E_\delta$ da $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi f ga tekis yaqinlashadi.*

6.2-teorema *(Luzin). $[a, b]$ kesmada aniqlangan f funksiya o'lchovli bo'lishi uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $[a, b]$ da uzluksiz bo'lgan shunday φ funksiya mavjud bo'lib, $\mu\left(\{x \in [a, b] : \ f(x) \neq \varphi(x)\}\right) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilishi zarur va yetarli.*

6.7. Dirixle funksiyasi $\mathfrak{D}$ ((2.1) ga qarang), Riman funksiyasi $\mathfrak{R}$ ((2.3) ga qarang), nol funksiya $\theta(x) \equiv 0$ hamda bir $I(x) \equiv 1$ funksiyalar orasidan o'zaro ekvivalent funksiyalarni ajrating.

Yechish. Ma'lumki, $\mathbb{Q}$ sanoqli to'plam, shuning uchun $\mu(\mathbb{Q}) = 0$. Lebeg o'lchovi - to'la o'lchov (5.20-ta'rifga qarang), shunday ekan, ixtiyoriy $A \subset \mathbb{Q}$

uchun $\mu(A)=0$. Endi bu funksiyalarni ekvivalentlikka tekshiramiz:

$$\{x:\mathfrak{D}(x)\neq\theta(x)\}=\mathbb{Q},\qquad \{x:\mathfrak{R}(x)\neq\theta(x)\}=\mathbb{Q},$$
$$\{x:\mathfrak{D}(x)\neq\mathfrak{R}(x)\}\subset\mathbb{Q},\qquad \{x:\mathfrak{D}(x)\neq I(x)\}=\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.$$

Bu yerdan quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$\mu\left(\{x:\mathfrak{D}(x)\neq\theta(x)\}\right)=\mu\left(\{x:\mathfrak{R}(x)\neq\theta(x)\}\right)=\mu\left(\mathbb{Q}\right)=0,$$

$$\mu\left(\{x:\mathfrak{D}(x)\neq\mathfrak{R}(x)\}\right)=0,\quad \mu\left(\{x:\mathfrak{D}(x)\neq I(x)\}\right)=\mu\left(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\right)\neq 0.$$

Demak, $\mathfrak{D}\sim\theta$, $\mathfrak{R}\sim\theta$, $\mathfrak{D}\sim\mathfrak{R}$ munosabatlar o‘rinli. $\mathfrak{D},\mathfrak{R}$ va θ funksiyalarning birortasi ham I bilan ekvivalent emas. □

6.8. Aytaylik, $E=A_1\cup A_2$ va $A_1\cap A_2=\emptyset$ bo‘lsin. Agar $f_1:A_1\to\mathbb{R}$ va $f_2:A_2\to\mathbb{R}$ funksiyalar o‘lchovli bo‘lsa, u holda

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & agar\ \ x\in A_1\\ f_2(x), & agar\ \ x\in A_2\end{cases}$$

funksiyaning E to‘plamda o‘lchovli bo‘lishini isbotlang.

Isbot. Ixtiyoriy $c\in\mathbb{R}$ da

$$\{\,x\in E: f(x)<c\,\}=\{x\in A_1: f_1(x)<c\}\cup\{x\in A_2: f_2(x)<c\}$$

to‘plam - o‘lchovli. Haqiqatan ham, $\{x\in A_1: f_1(x)<c\}$ va $\{x\in A_2: f_2(x)<c\,\}$ to‘plamlarning o‘lchovli ekanligi f_1 va f_2 funksiyalarning o‘lchovli ekanligidan kelib chiqadi. $\{x\in E: f(x)<c\}$ esa o‘lchovli to‘plamlarning birlashmasi sifatida o‘lchovlid. Demak, f funksiya E da o‘lchovli. □

Uy vazifalari va mavzuni o‘zlashtirish uchun masalalar

6.9. Agar f va g funksiyalar E to‘plamda o‘lchovli bo‘lsa, u holda ularning yig‘indisi $f+g$, ayirmasi $f-g$ va ko‘paytmasi $f\cdot g$ o‘lchovli bo‘ladi. Agar E dagi barcha x lar uchun $g(x)\neq 0$ bo‘lsa, u holda $f:g$ funksiya ham E da o‘lchovli bo‘ladi. Isbotlang.

6.10. $A \subset \mathbb{R}$ to'plamning *xarakteristik funksiyasi* (2.29-misol, (2.4) formulaga qarang) $y = \chi_A(x)$ o'lchovli bo'lishi uchun A ning o'lchovli bo'lishi zarur va yetarli. Isbotlang.

6.11. O'lchovsiz funksiyalar yig'indisi o'lchovsiz bo'ladimi? $A \subset E = [0,\,1]$ o'lchovsiz to'plam uchun $f(x) = \chi_A(x)$ va $g(x) = \chi_{E\setminus A}(x)$ ni tahlil qiling.

6.12. O'lchovsiz funksiyalar ko'paytmasi o'lchovli bo'lishi mumkinmi? $A \subset E = [0,\,1]$ o'lchovsiz to'plam. $f(x) = \chi_A(x)$ va $g(x) = \chi_{E\setminus A}(x)$ holni tahlil qiling.

6.13. Agar f funksiya E da o'lchovsiz, g esa E da o'lchovli bo'lsa, ularning yig'indisi $f + g$ funksiya E da o'lchovli bo'lishi mumkinmi?

6.14. O'zi o'lchovsiz, kvadrati o'lchovli bo'lgan funksiyaga misol keltiring. 6.3-misoldagi (6.1) tenglik bilan aniqlangan f funksiyani tahlil qiling.

6.15. O'zi o'lchovsiz, moduli o'lchovli bo'lgan funksiyaga misol keltiring. (6.1) tenglik bilan aniqlangan f funksiyani tahlil qiling.

6.16. Agar ixtiyoriy $a,\, b \in \mathbb{R}$ lar uchun 6.5-misolda keltirilgan 1), 2), 4), 5) ko'rinishdagi to'plamlarning birortasi o'lchovli bo'lsa, u holda f funksiya E to'plamda o'lchovli bo'ladi. Isbotlang.

6.17. Ixtiyoriy $a \in \mathbb{R}$ uchun $E(f = a)$ to'plamning o'lchovli ekanligidan f ning E to'plamda o'lchovli bo'lishi kelib chiqmaydi. Misol keltiring.

6.18. $A \subset [0,\,1]$ o'lchovsiz to'plam. $\mathfrak{L} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiyani quyidagicha aniqlaymiz:

$$\mathfrak{L}(x) = \begin{cases} x, & agar\ x \in A \\ -x, & agar\ x \notin A. \end{cases} \tag{6.3}$$

Bu funksiya uchun har bir $a \in \mathbb{R}$ da $\{x : \mathfrak{L}(x) = a\}$ to‘plamning o‘lchovli ekanligini isbotlang.

6.19. (6.3) tenglik bilan aniqlangan $\mathfrak{L}$ funksiya uchun $\{x \in [0, 1] : \mathfrak{L}(x) < 0\}$ to‘plamning o‘lchovsiz ekanligini isbotlang.

6.20. (6.3) tenglik bilan aniqlangan $\mathfrak{L}$ funksiyaning $E = [-1,\ 1]$ to‘plamda o‘lchovsiz ekanligini isbotlang.

6.21. $f : E \to \mathbb{R}$ o‘lchovli funksiya bo‘lishi uchun ixtiyoriy $A \subset \mathbb{R}$ Borel to‘plami uchun $f^{-1}(A)$ ning o‘lchovli to‘plam bo‘lishi zarur va yetarli. Isbotlang.

6.22. $\mathfrak{K} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – Kantorning zinapoya funksiyasi. $K_n,\ n = 1, 2, \ldots$ lar Kantor to‘plamining qurilishida $n-$ qadamda chiqarib tashlangan K_{ni} intervallar birlashmasi. Ularning Borel to‘plamlari bo‘lishini ko‘rsating, $\mathfrak{K}^{-1}(K_1),\ \mathfrak{K}^{-1}(K_2),\ \mathfrak{K}^{-1}(K_3)$ va $\mathfrak{K}^{-1}(K_n)$ larni toping.

6.23. Agar $f : E \to \mathbb{R}$ o‘lchovli funksiya bo‘lsa, u holda f funksiya E ning ixtiyoriy o‘lchovli A qismida ham o‘lchovli bo‘lishini isbotlang.

6.24. $[-2,\ 2]$ kesmada o‘lchovli bo‘lmagan funksiyaga misol keltiring.

6.25. $[-2,\ 2]$ kesmada o‘lchovli bo‘lmagan, lekin moduli o‘lchovli bo‘lgan funksiyaga misol keltiring.

6.26. Har bir $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ uchun

$$f_+(x) = \max\{f(x),\ 0\}\,,\ \ f_-(x) = \min\{f(x),\ 0\}$$

deymiz. Quyidagilarni isbotlang.

a) Agar f o‘lchovli bo‘lsa, u holda f_+ va f_- lar o‘lchovli bo‘ladi.

b) Agar f_+ va f_- lar o‘lchovli bo‘lsa, f ham o‘lchovli bo‘ladi.

6.27. Shunday f va g funksiyalarga misol keltiringki, ularning yig'indisi o'lchovli bo'lsin, lekin ayirmasi o'lchovli bo'lmasin. $A \subset E = [0,\ 1]$ o'lchovsiz to'plam. $f(x) = \chi_A(x)$ va $g(x) = \chi_{E \setminus A}(x)$ holni tahlil qiling.

6.28. Shunday f va g funksiyalarga misol keltiringki, ularning ko'paytmasi o'lchovli bo'lsin, lekin yig'indisi o'lchovli bo'lmasin.

6.29. Dirixle funksiyasi (2.3-misol, (2.1) formulaga qarang) $\mathfrak{D}$ ning $[0,\ 3] = E$ to'plamda o'lchovli ekanligini ta'rif yordamida ko'rsating.

6.30. Agar f funksiya E da o'lchovli bo'lsa, u holda $h(x) = \operatorname{sign} f(x)$ ning o'lchovli ekanligini isbotlang.

6.31. Agar f funksiya E to'plamda o'lchovli bo'lsa, u holda

$$f_+(x) = \frac{1}{2}\ (f(x) + |f(x)|) \tag{6.4}$$

funksiyaning o'lchovli ekanligini isbotlang.

6.32. Agar f funksiya E to'plamda o'lchovli bo'lsa, u holda

$$f_-(x) = \frac{1}{2}\,(|f(x)| - f(x)) \tag{6.5}$$

funksiyaning o'lchovli ekanligini isbotlang.

6.33. Agar f va g funksiyalar E to'plamda o'lchovli bo'lsa, u holda $m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ funksiyaning o'lchovli ekanligini isbotlang.

6.34. Agar f va g funksiyalar E to'plamda o'lchovli bo'lsa, u holda $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ funksiyaning o'lchovli ekanligini isbotlang.

6.35. Agar f funksiya E da o'lchovli bo'lsa, u holda $h(x) = [f(x)]$ ning o'lchovli ekanligini isbotlang. Bu yerda $[x]$ bilan x ning butun qismi belgilangan.

6.36. $f : E \to \mathbb{R}$ o'lchovli bo'lishi uchun f^3 ning o'lchovli bo'lishi zarur va yetarli. Isbotlang.

6.37. Agar f va g funksiyalar E to'plamda o'lchovli, $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uzluksiz funksiya bo'lsa, u holda $h(x) = \varphi(f(x), g(x))$ funksiyaning o'lchovli ekanligini isbotlang.

6.38. $f : E \to \mathbb{R}$ o'lchovli bo'lishi uchun $h(x) = e^{f(x)}$ funksiyaning o'lchovli bo'lishi zarur va yetarli. Isbotlang.

6.39. $h(x) = \cos f(x)$ funksiyaning o'lchovli ekanligidan $f : E \to \mathbb{R}$ ning o'lchovli ekanligi kelib chiqmaydi. 6.3-misoldagi (6.1) tenglik bilan aniqlangan f funksiya misolida buni tahlil qiling.

6.40. Kompleks qiymatli $f(x) = u(x) + i\,v(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Agar u va v funksiyalar o'lchovli bo'lsa, $f : E \to \mathbb{C}$ *o'lchovli funksiya* deyiladi. Agar kompleks qiymatli $f(x) = u(x) + i\,v(x)$ funksiya o'lchovli bo'lsa, uning moduli va argumenti o'lchovli funksiya bo'lishini isbotlang.

6.41. Kompleks qiymatli $f(x) = e^{ix}, \quad x \in [-\pi, \pi]$ funksiyaning o'lchovli ekanligini isbotlang.

6.42. $f : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ uzluksiz funksiya. Har bir $y \in \mathbb{R}$ uchun $N_f(y)$ bilan $f(x) = y$ tenglama yechimlari sonini belgilaymiz. $N_f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}_+$ funksiyaning o'lchovli ekanligini isbotlang.

6.43. Nol o'lchovli A to'plamda aniqlangan ixtiyoriy $f : A \to \mathbb{R}$ funksiyaning o'lchovli bo'lishini isbotlang.

6.44. Agar $f : E \to \mathbb{R}$ funksiya, o'lchovli $g : E \to \mathbb{R}$ funksiyaga ekvivalent bo'lsa, u holda f ham E da o'lchovli funksiya bo'ladi. Isbotlang.

6.45. Agar $f : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ va $g : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ uzluksiz funksiyalar ekvivalent bo'lsa, ular aynan teng bo'lishini isbotlang.

6.46. Agar $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi E to'plamning har bir nuqtasida f ga yaqinlashsa, quyidagi tenglikni isbotlang:

$$\{x \in E:\ f(x) < c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m>n}^{\infty} \left\{x : f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right\}. \qquad (6.6)$$

6.47. Agar $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi har bir $x \in E$ da $f(x)$ funksiyaga yaqinlashsa, u holda limitik funksiya f o'lchovli bo'ladi. Isbotlang.

6.48. Nolga ekvivalent $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi uchun $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ qator deyarli barcha $x \in E$ larda yaqinlashuvchi bo'ladi va $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ham nolga ekvivalent funksiya bo'ladi. Isbotlang.

6.49. $[0,\ 1]$ kesmada shunday o'lchovli funksiyaga misol keltiringki, uning o'zi va unga ekvivalent bo'lgan ixtiyoriy funksiya har bir nuqtada uzilishga ega bo'lsin.

6.50. Quyidagi qatorlar yaqinlashadigan nuqtalarda yig'indi bilan aniqlangan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiyaning o'lchovli ekanligini isbot qiling.

a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{|x| + n}$, b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n[x]^4)}{n\sqrt{n}}$,

6.51. Quyidagi qator yaqinlashadigan nuqtalarda yig'indi bilan aniqlangan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funksiyaning o'lchovli ekanligini isbot qiling.

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n(x^2 + y^2))}{\sqrt{n^4[1 + x^2 + y^2]}}.$$

6.52. Quyida berilgan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funksiyaning o'lchovli ekanligini isbot qiling:

a) $f(x, y) = \mathrm{sign}(\cos \pi(x^2 + y^2))$, b) $f(x,\ y) = (|x| + |y|) \cdot e^{[y]}$,

c) $f(x, y) = [x]^2 + [y]^3$, d) $f(x, y) = \ln(1 + [x^2 + y^2])$.

6.53. $f_n(x) = \cos^n x,\ \ E = [0,\ 2\pi]$ funksiyalar ketma-ketligi nol funksiyaga deyarli yaqinlashadi. Isbotlang.

6.54. Agar E to'plamda $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi f ga deyarli yaqinlashsa, u holda f ham o'lchovli funksiya bo'ladi. Isbotlang.

6.55. Agar E to'plamda $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi f ga deyarli yaqinlashsa va $f \sim g$ bo'lsa, u holda $\{f_n\}$ ketma-ketlik g ga ham deyarli yaqinlashadi. Isbotlang.

6.56. Agar $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi ham f, ham g ga deyarli yaqinlashsa, u holda f va g lar ekvivalent bo'ladi. Isbotlang.

6.57. *Lebeg teoremasini isbotlang.* Agar $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi E $(\mu(E) < \infty)$ to'plamda f funksiyaga deyarli yaqinlashsa, u holda $\{f_n\}$ ketma-ketlik E to'plamda f ga o'lchov bo'yicha ham yaqinlashadi.

6.58. O'lchov bo'yicha nol funksiyaga yaqinlashuvchi, lekin biror nuqtada ham nolga yaqinlashmaydigan $\{f_n\}$ ketma-ketlikka misol keltiring.

6.59. *Riss teoremasini isbotlang.* Agar $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi E to'plamda f funksiyaga o'lchov bo'yicha yaqinlashsa, u holda $\{f_n\}$ ketma-ketlikdan f ga deyarli yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin.

6.60. $f : [-1,\ 2] \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \operatorname{sign} x$ funksiyaning o'lchovli ekanligini ta'rif yordamida ko'rsating.

6.61. $[0,\ \pi]$ kesmada aniqlangan

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0,\ \pi] \setminus \mathbb{Q} \\ \cos^2(\sin x), & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

funksiya o'lchovli bo'lishini Luzin teoremasidan foydalanib isbotlang.

6.62. Agar $f : E \to \mathbb{R}-$ o‘lchovli funksiya va $A \subset E-$ o‘lchovli to‘plam bo‘lsa, u holda $f : A \to \mathbb{R}$ funksiyaning A to‘plamda o‘lchovli bo‘lishini isbotlang.

6.63. Agar $f \sim g$ va $g \sim \varphi$ bo‘lsa, u holda $f \sim \varphi$ ekanligini isbotlang.

6.64. $f_n(x) = \cos^n x, \ E = [0, \ 2\pi]$ ketma-ketlik uchun Yegorov teoremasi shartlarini qanoatlantiruvchi E_δ to‘plamni $\delta = 10^{-3}$ uchun quring.

6.65. $[0, \ 1]$ kesmada Dirixle va Riman funksiyalari uchun Luzin teoremasining shartlarini qanoatlantiruvchi uzluksiz φ funksiyani toping.

6.66. f funksiyaga har bir nuqtada yaqinlashuvchi, lekin tekis yaqinlashmaydigan f_n funksiyalar ketma-ketligiga misol keltiring.

6.67. $f_n(x) = x^n, \ x \in [0, \ 1]$ funksional ketma-ketlikning $\theta(x) \equiv 0$ funksiyaga nuqtali, deyarli va o‘lchov bo‘yicha yaqinlashishini tekshiring.

6.68. $f_n(x) = x^n, \ \ x \in [-1, \ 1]$ funksional ketma-ketlik Dirixle yoki Riman funksiyalariga deyarli yaqinlashadimi?

6.69. Deyarli yaqinlashuvchi funksional ketma-ketlikning limitik funksiyasi yagona bo‘ladimi?

6.70. Quyida berilgan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiya uchun shunday $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uzluksiz funksiya topingki, $g(x) = f(x)$ tenglik deyarli barcha $x \in \mathbb{R}$ lar uchun o‘rinli bo‘lsin.

a) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{arctg} x, & x \in \mathbb{Z} \\ \pi, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x^2 \in \mathbb{Q} \\ 0, & x^2 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} \ln(1 + |x|), & e^x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ \sin x^2, & e^x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

6.71. Quyida berilgan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funksiya uchun shunday $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uzluksiz funksiya topingki, $g(x, y) = f(x, y)$ tenglik deyarli barcha $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ lar uchun o‘rinli bo‘lsin.

a) $f(x, y) = \begin{cases} x + y, & (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\ x^2, & (x, y) \in \mathbb{R} \backslash (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}), \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \sin x + \cos y, & (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \\ \cos x - \sin y, & (x, y) \notin \mathbb{Q} \times \mathbb{R}, \end{cases}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} xy, & (x, y) \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \times \mathbb{R} \\ x + y, & (x, y) \notin (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \times \mathbb{R}, \end{cases}$

d) $f(x, y) = \begin{cases} [x] + [y], & (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \\ chx, & (x, y) \notin \mathbb{R} \times \mathbb{Q}. \end{cases}$

6.72. Faraz qilaylik, $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$ lar o‘lchovli funksiyalar bo‘lsin. Quyida berilgan funksiyalarning $[a, b]$ kesmada o‘lchovli bo‘lishini isbotlang.

a) $\min \{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$; b) $\max \{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$;

c) $\dfrac{f_1(x)}{\ln (2 + |f_2(x)|)}$; d) $\dfrac{f_1(x)}{\mathrm{ch}[f_2(x)]}$; e) $\dfrac{f_1(x) \cdot f_2(x)}{1 + |\max \{f_3(x), f_4(x)\}|}$.

6.73. $A-$ o‘lchovli to‘plam, $f, f_n, g_n : A \to \mathbb{R}$ o‘lchovli funksiyalar bo‘lsin. Quyidagi to‘plamlarning o‘lchovli ekanligini isbotlang.

a) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f_n(x) \geq 0\}$. b) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f_n(x) \geq f(x)\}$.

c) $\left\{x \in A : \sup\limits_{n \geq 1} f_n(x) \neq f(x)\right\}$. d) $\left\{x \in A : \inf\limits_{n \geq 1} f_n(x) < f(x)\right\}$.

e) $\left\{x \in A : \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} f_n(x) > f(x)\right\}$. f) $\left\{x \in A : \underline{\lim\limits_{n \to \infty}} f_n(x) < f(x)\right\}$.

g) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f_n(x) < g_n(x)\}$. h) $\left\{x : \inf\limits_{n \geq 1} f_n(x) \neq \inf\limits_{n \geq 1} g_n(x)\right\}$.

6.74. Quyidagi $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ketma-ketlik uchun shunday $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uzluksiz funksiya topingki $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$ tenglik $\mathbb{R}$ ning deyarli barcha nuqtalarida o‘rinli bo‘lsin.

a) $f_n(x) = \cos^n x.$ b) $f_n(x) = \left(\dfrac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\, x\right)^n + \sin^n 2x.$

c) $f_n(x) = x^2 \cdot \sin^n x^2.$ d) $f_n(x) = \dfrac{n^2 \cdot \sin^2 x}{1 + n^2 \cdot \sin^2 x}.$

e) $f_n(x) = \dfrac{\sin^n x}{2 + \sin^n x}.$ f) $f_n(x) = \exp(-n\left|x^2 - 1\right|).$

6.75. Quyidagi $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ketma-ketlik uchun shunday $g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uzluksiz va $g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uzilishga ega bo‘lgan funksiyalar topingki, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = g_1(x)$ va $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = g_2(x)$ tengliklar $\mathbb{R}^2$ ning deyarli hamma yerida bajarilsin.

a) $f_n(x, y) = \cos^n\left(x^2 + y^2\right).$ b) $f_n(x, y) = \exp\left(-n\left(x^2 + y^2\right)\right).$

c) $f_n(x, y) = \exp(-n\,|x + y|).$ d) $f_n(x, y) = 2^{\sin^n(x^4 + y^4)}.$

e) $f_n(x, y) = \sqrt[n]{|x|^n + |y|^n}.$ f) $f_n(x, y) = n \cdot \ln\left(1 + \dfrac{|x| + |y|}{n}\right).$

g) $f_n(x, y) = \exp(x + \dfrac{1}{n}y^2).$ h) $f_n(x, y) = \exp(\sin^n x + \cos^n y).$

6.76. $f_n : A \to \mathbb{R}$ ketma-ketlikning deyarli yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang. Yegorov teoramasidan foydalanib, berilgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $A_\varepsilon \subset A$ o‘lchovli to‘plam tanlangki, $\mu(A \backslash A_\varepsilon) < \varepsilon$ va $\{f_n\}$ ketma-ketlik A_ε to‘plamda tekis yaqinlashuvchi bo‘lsin.

a) $f_n(x) = \cos^n(x), \quad A = [0,\, 2\pi], \quad \varepsilon = 10^{-1}.$

b) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^n}, \quad A = [0,\, 1], \quad \varepsilon = 10^{-2}.$

c) $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1 + n^2x^2}, \quad A = [0,\, 1], \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

d) $f_n(x) = x^n - x^{2n}, \quad A = [0,\, 1], \quad \varepsilon = 10^{-4}.$

e) $f_n(x) = \dfrac{n^2\,|\sin \pi x|}{1 + n^2\,|\sin \pi x|}, \quad A = [-1,\, 1], \quad \varepsilon = 10^{-5}.$

f) $f_n(x) = \exp(n(x-2)), \quad A = [0,\,2], \quad \varepsilon = 10^{-6}$.

6.77. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \chi_{[-n,\,n]}(x)$ ketma-ketlik $f(x) \equiv 1$ funksiyaga har bir nuqtada yaqinlashadi, lekin $\{f_n\}$ ketma-ketlik $f(x) \equiv 1$ga o'lchov bo'yicha yaqinlashmaydi. Bu Lebeg teoremasiga (6.57-misolga qarang) zid emasmi? Sababini tushuntiring.

6.78-6.80-misollarda keltirilgan $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiyalar ketma-ketligini o'lchov bo'yicha yaqinlahuvchilikka tekshiring. Yaqinlashuvchi bo'lsa, limitik funksiyasini toping.

6.78. $f_n(x) = \chi_{\left[\sqrt{n},\,\sqrt{n+1}\right]}(x)$.

6.79. $f_n(x) = \sin^n x \cdot \chi_{[2\pi n,\,2\pi n+\pi]}(x)$.

6.80. $f_n(x) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \chi_{[k,\,k+k^{-2}]}(x)$.

6.81-6.84-misollarda keltirilgan funksiyalarni Luzin teoremasidan foydalanib $[0,\,1]$ da o'lchovli ekanligini isbotlang. Bu yerda $K-$ Kantor to'plami.

6.81. $f(x) = x \cdot \chi_{[0,\,1]\setminus\mathbb{Q}}(x)$.

6.82. $f(x) = \mathfrak{D}(x) + \mathfrak{R}(x)$.

6.83. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in K \\ 1 + x^2, & x \in [0,\,1]\setminus K \end{cases}$.

6.84. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0,\,1]\setminus(K \cup \mathbb{Q}) \\ 1 + x^2, & x \in K \cup \mathbb{Q} \end{cases}$.

6.85. $f_n(x) = \chi_{[n,\,n+1]}(x)$ ketma-ketlik uchun har bir $x \in \mathbb{R}$ da

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

tenglikni isbotlang. Bu ketma-ketlik nol funksiyaga o'lchov bo'yicha yaqinlashadimi?

6.86. Agar $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi $f : E \to \mathbb{R}$ funksiyaga har bir $x \in E$ da yaqinlashsa, u holda ixtiyoriy $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uzluksiz funksiya uchun $\{\varphi_n = g(f_n)\}$ ketma-ketlik $g(f)$ funksiyaga nuqtali yaqinlashadi. Isbotlang.

6.87. Agar $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi $f : E \to \mathbb{R}$ funksiyaga o'lchov bo'yicha yaqinlashsa, u holda ixtiyoriy $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uzluksiz funksiya uchun $\{\varphi_n = g(f_n)\}$ ketma-ketlik $g(f)$ funksiyaga E to'plamda o'lchov bo'yicha yaqinlashadi. Isbotlang.

7-§. Chekli o'lchovli to'plamlarda Lebeg integrali

Bu paragrafda o'lchovli A to'plamda aniqlangan, o'lchovli f funksiyani qaraymiz va $\mu(A) < +\infty$ deb faraz qilamiz.

7.1-ta'rif. *Agar $f : A \to \mathbb{R}$ o'lchovli bo'lib, uning qiymatlari to'plami ko'pi bilan sanoqli bo'lsa, u holda f sodda funksiya deyiladi.*

Dastlab cheklita $y_1, y_2, \ldots, y_n$ qiymatlarni qabul qiluvchi f sodda funksiya uchun Lebeg integrali ta'rifini beramiz. Ixtiyoriy $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ uchun quyidagicha belgilash olamiz:

$$A_k = \{x \in A : f(x) = y_k\}. \tag{7.1}$$

7.2-ta'rif. *Cheklita $y_1, y_2, \ldots, y_n$ qiymatlarni qabul qiluvchi $f : A \to \mathbb{R}$ sodda funksiya berilgan bo'lsin. U holda*

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \mu\left(A_k\right)$$

yig'indi f sodda funksiyaning A to'plam bo'yicha olingan Lebeg integrali deyiladi va quyidagicha belgilanadi

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{k=1}^{n} y_k \mu\left(A_k\right).$$

Endi sanoqlita $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ qiymatlarni qabul qiluvchi $f : A \to \mathbb{R}$ sodda funksiya berilgan bo‘lsin. f funksiya uchun quyidagi formal

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu\left(A_k\right) \tag{7.2}$$

qatorni qaraymiz, bu yerda A_k lar (7.1) tenglik bilan aniqlanadi.

7.3-ta’rif. *Agar* (7.2) *qator absolyut yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda f sodda funksiya A to‘plamda Lebeg ma’nosida integrallanuvchi deyiladi.* (7.2) *qatorning yig‘indisi f funksiyaning A to‘plam bo‘yicha olingan Lebeg integrali deyiladi va quyidagicha belgilanadi*

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu\left(A_n\right).$$

Shuni ta’kidlaymizki, (7.2) qatorning absolyut yaqinlashishi muhim. Aks holda bu shartli yaqinlashuvchi qator yig‘indisi funksiya qiymatlarining tartiblanishiga bog‘liq bo‘lib, integralning qiymati funksiya qiymatlarining nomerlanishiga bog‘liq bo‘lar edi (matematik analizdan Riman teoremasini eslang).

7.3-ta’rifda y_n qiymatlarning har xilligi talab qilingan. Lekin y_n larning har xilligini talab qilmasdan ham sodda funksiyalar uchun Lebeg integrali ta’rifini keltirish mumkin.

7.4-ta’rif. *Faraz qilaylik,* $A = \bigcup_k B_k$, $B_i \bigcap B_j = \emptyset$, $i \neq j$ *yoyilma o‘rinli bo‘lib, har bir o‘lchovli B_k to‘plamda f funksiya faqat bitta c_k qiymat qabul qilsin. Agar*

$$\sum_{k} c_k \mu\left(B_k\right) \tag{7.3}$$

qator absolyut yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda f sodda funksiya A to‘plamda Lebeg ma’nosida integrallanuvchi deyiladi. (7.3) *qatorning yig‘indisi f funksiyadan A to‘plam bo‘yicha olingan Lebeg integrali deyiladi.*

Endi f ixtiyoriy o‘lchovli funksiya bo‘lsin.

7.5-ta’rif. *Agar A to‘plamda f funksiyaga tekis yaqinlashuvchi, integrallanuvchi sodda funksiyalarning $\{f_n\}$ ketma-ketligi mavjud bo‘lsa, u holda*

f funksiya A to'plamda Lebeg ma'nosida integrallanuvchi deyiladi va uning integrali quyidagi tenglik bilan aniqlanadi

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu = \int_A f(x)d\mu\,. \qquad (7.4)$$

Lebeg integraliga uning o'zi tomonidan berilgan ta'rifni keltiramiz. Chekli o'lchovli A to'plamda aniqlangan o'lchovli, chegaralangan $f : A \to \mathbb{R}$ funksiyani qaraymiz. Bu holda shunday m va M sonlari mavjudki, barcha $x \in A$ larda

$$m \leq f(x) \leq M$$

tengsizlik bajariladi. $[m,\, M]$ kesmani $m = y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = M$ nuqtalar yordamida n bo'lakka bo'lamiz. Bu bo'linishni Π bilan belgilaymiz. Har bir $[y_{k-1},\ y_k),\ k = 1, 2, \ldots, n-1$ yarim interval yordamida $A_k = \{x \in A :\ y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}$ to'plamni va $A_n = \{x \in A :\ y_{n-1} \leq f(x) \leq y_n\}$ to'plamni aniqlaymiz. Bu Π bo'linishga mos Lebegning quyi va yuqori yig'indilarini topamiz:

$$s_\Pi(f) = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\mu(A_k), \qquad S_\Pi(f) = \sum_{k=1}^{n} y_k\mu(A_k).$$

Ixtiyoriy Π bo'linishga mos Lebegning quyi yig'indisi $s_\Pi(f)$ yuqoridan chegaralangan (masalan $M\cdot\mu(A)$ bilan), yuqori yig'indisi $S_\Pi(f)$ esa quyidan chegaralangan (masalan $m\cdot\mu(A)$ bilan). Shuning uchun quyidagilar mavjud va chekli:

$$L_*(f) = \sup s_\Pi(f), \qquad L^*(f) = \inf S_\Pi(f). \qquad (7.5)$$

(7.5) da aniq quyi va aniq yuqori chegaralar $[m,\, M]$ kesmaning barcha chekli bo'linishlari bo'yicha olinadi. $L_*(f)$ soni f funksiyadan A to'plam bo'yicha olingan *quyi integral*, $L^*(f)$ esa f funksiyadan A to'plam bo'yicha olingan *yuqori integral* deyiladi.

7.6-ta'rif. *Agar $L_*(f) = L^*(f)$ bo'lsa, chegaralangan f funksiyani A to'plamda Lebeg ma'nosida integrallanuvchi deymiz. $L_*(f)$ va $L^*(f)$ larning* *bu umumiy qiymati f funksiyadan A to'plam bo'yicha olingan Lebeg integrali deyiladi, ya'ni*

$$\int_A f(x)d\mu = L_*(f) = L^*(f).$$

Quyidagi

$$0 \leq S_{\text{II}}(f) - s_{\text{II}}(f) \leq \lambda_n \cdot \mu(A), \quad \lambda_n = \max_{0\leq k\leq n-1}(y_{k+1} - y_k)$$

tengsizlikdan chekli o'lchovli A to'plamda aniqlangan har qanday chegaralangan o'lchovli f funksiyaning Lebeg ma'nosida integrallanuvchi ekanligi kelib chiqadi. Bundan Lebeg hayratga tushgan va bu jamlash usulining boshqa afzalliklarini qidirgan va topgan. Chegaralangan o'lchovli funksiyaning integrallanuvchanligi hozirda Lebeg integralining IV xossasi sifatida keltiriladi.

Endi chekli o'lchovli A to'plamda aniqlangan chegaralanmagan $f : A \to \mathbb{R}$ funksiyaning Lebeg integrali ta'rifini keltiramiz. Dastlab f ni A to'plamda manfiymas deb faraz qilamiz, ya'ni $\forall x \in A$ uchun $f(x) \geq 0$ bo'lsin. Bu holda $f : A \to \mathbb{R}$ funksiya yordamida $\{f_n\}$ ketma-ketlikni quyidagicha quramiz:

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq n \\ n, & f(x) > n \end{cases}$$

Bu usulda qurilgan f_n funksiya A da o'lchovli va chegaralangan bo'ladi. Ma'lumki bu ketma-ketlik monoton, ya'ni

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \quad \forall x \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Shuning uchun quyidagi (chekli yoki cheksiz) limit mavjud

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu. \tag{7.6}$$

7.7-ta'rif. *Agar* (7.6) *limit chekli bo'lsa, manfiymas f funksiya A to'plamda integrallanuvchi deyiladi. Bu holda f dan A to'plam bo'yicha olingan integral deb* (7.6) *limitning qiymati qabul qilinadi, ya'ni*

$$\int_A f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu.$$

Endi chegaralanmagan $f : A \to \mathbb{R}$ funksiya A da har xil ishorali qiymatlar qabul qilsin. Bu holda f funksiyadan A to‘plam bo‘yicha olingan integralni aniqlashda

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x),$$

$$f_+(x) = \frac{1}{2}\left(|f(x)| + f(x)\right) \geq 0, \quad f_-(x) = \frac{1}{2}\left(|f(x)| - f(x)\right) \geq 0 \tag{7.7}$$

yoyilmadan foydalanamiz.

7.8-ta’rif. *Agar A to‘plamda f_+ va f_- funksiyalar integrallanuvchi bo‘lsa, u holda f ni A da integrallanuvchi deymiz va uning integrali deb*

$$\int_A f_+(x)d\mu - \int_A f_-(x)d\mu$$

ni qabul qilamiz, ya’ni

$$\int_A f(x)d\mu = \int_A f_+(x)d\mu - \int_A f_-(x)d\mu.$$

7.1-teorema *(Lebeg integralining $\sigma-$ additivlik xossasi). O‘lchovli A to‘plam o‘zaro kesishmaydigan $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ o‘lchovli to‘plamlarning birlashmasidan iborat bo‘lsin, ya’ni*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \;\; A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

va f funksiya A to‘plamda integrallanuvchi bo‘lsin. U holda har bir A_n to‘plam bo‘yicha f funksiyaning integrali mavjud,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)d\mu$$

qator absolyut yaqinlashadi va quyidagi tenglik o‘rinli

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)d\mu. \tag{7.8}$$

Endi ma’lum ma’noda 7.1-teoremaga teskari hisoblanuvchi quyidagi teoremani keltiramiz.

7.2-teorema. *O'lchovli A to'plam o'zaro kesishmaydigan $A_1, A_2, \ldots,$ $A_n, \ldots$ o'lchovli to'plamlarning birlashmasidan iborat bo'lsin, ya'ni*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Agar har bir A_n to'plamda f funksiya integrallanuvchi bo'lib,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)| \, d\mu$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda f funksiya A to'plamda integrallanuvchi bo'ladi va (7.8) *tenglik o'rinli.*

7.3-teorema *(Lebeg integralining absolyut uzluksizlik xossasi). Agar f funksiya A $(\mu(A) < \infty)$ to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjudki, $\mu(D) < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday $D \subset A$ to'plam uchun*

$$\left| \int_D f(x) d\mu \right| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli.

Endi Riman va Lebeg integrallarini taqqoslash haqidagi teoremani keltiramiz.

7.4-teorema. *Agar $[a, b]$ kesmada*

$$I = (R) \int_a^b f(x) dx$$

Riman integrali mavjud bo'lsa, u holda f funksiya $[a, b]$ kesmada Lebeg ma'nosida ham integrallanuvchi bo'ladi va quyidagi tenglik o'rinli:

$$(L) \int_{[a,\, b]} f(x) d\mu = (R) \int_a^b f(x) \, dx.$$

7.1. Ko'pi bilan sanoqlita har xil $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ qiymatlarni qabul qiluvchi $f : A \to \mathbb{R}$ funksiya o'lchovli bo'lishi uchun

$$A_n = \{ x \in A : f(x) = y_n \}$$

to'plamlarning o'lchovli bo'lishi zarur va yetarli. Isbotlang.

Isbot. *Zaruriyligi.* f funksiya A to'plamda o'lchovli bo'lsa, A_n to'plamlarning o'lchovli ekanligi 6.5-misoldan kelib chiqadi.

Yetarliligi. A_n to'plamlarning har biri o'lchovli ekanligidan f funksiyaning o'lchovli ekanligini keltirib chiqaramiz.

$$A(f < c) = \{x \in A : f(x) < c\} = \bigcup_{y_n < c} A_n$$

tenglikdan va o'lchovli to'plamlarning chekli yoki sanoqli birlashmasi o'lchovli ekanligidan f ning A da o'lchovli funksiya ekanligiga kelamiz. □

7.2. Kantorning zinapoya funksiyasi $\mathfrak{K}$ ning K_n to'plam bo'yicha olingan Lebeg integralini hisoblang.

Yechish. Malumki, $K_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} K_{nk}$ to'plamning $k-$ qo'shni intervali K_{nk} da $\mathfrak{K}$ funksiya $y_k = (2k-1) \cdot 2^{-n}$, $(k = 1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1})$ qiymatni qabul qiladi, ya'ni

$$A_k = \{x \in K_n : \mathfrak{K}(x) = y_k\} = K_{nk}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1}.$$

Bundan tashqari barcha $k \in \left\{1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1}\right\}$ lar uchun $\mu(K_{nk}) = 3^{-n}$ ekanligini hisobga olsak, sodda funksiyalar uchun Lebeg untegrali ta'rifidan

$$\int_{K_n} \mathfrak{K}(x) d\mu = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{2k-1}{2^n} \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2^n \cdot 3^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (2k-1) =$$

$$= \frac{1}{2^n \cdot 3^n} \cdot \frac{1 + 2^n - 1}{2} \cdot 2^{n-1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2^n}{3^n}$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu yig'indini hisoblashda arifmetik progressiyaning dastlabki n ta hadi yig'indisi uchun $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n$ dan foydalandik. □

7.3. Kantorning zinapoya funksiyasi $\mathfrak{K}$ dan $[0,\ 1] \backslash K$ to'plam bo'yicha olingan integralni hisoblang. Bu yerda $K-$ Kantor to'plami.

Yechish. Malumki, $[0,\ 1]\backslash K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ tenglik o'rinli va K_n to'plamlar juft-jufti bilan o'zaro kesishmaydi. Lebeg untegralining $\sigma-$ additivlik xossasiga (7.1-teorema va (7.8) ga qarang) ko'ra quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_{[0,1]\backslash K} \mathfrak{K}(x)d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{K_n} \mathfrak{K}(x)d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}. \tag{7.9}$$

Bu yerda biz oldingi misol natijasidan hamda cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig'indisi uchun $S = \dfrac{b_1}{1-q}$ formuladan foydalandik. □

7.4. Chekli o'lchovli A to'plamda chegaralangan f sodda funksiya integrallanuvchidir. Isbotlang.

Isbot. Bu xossa sodda funksiyalar uchun Lebeg integralining C) *xossasi* deb yuritiladi. f sodda funksiya chegaralangan bo'lganligi uchun biror $M > 0$ va barcha $x \in A$ larda $|f(x)| \leq M$ bo'ladi. Faraz qilaylik, f sodda funksiya A_i to'plamda f_i qiymatni qabul qilsin. U holda

$$\sum_i |f_i|\mu\ (A_i) \leq M \cdot \sum_i \mu\ (A_i) = M \cdot \mu\,(A).$$

Demak, 7.3-ta'rifga ko'ra f sodda funksiya integrallanuvchi. □

7.5. $A = (0,\ 1]$ oraliqda f funksiyani quyidagicha aniqlaymiz: $f(x) = n$, agar $x \in A_n = \left(\dfrac{1}{2^n}, \dfrac{1}{2^{n-1}}\right]$, $n \in \mathbb{N}$. f sodda funksiya $A = (0,\ 1]$ to'plamda Lebeg ma'nosida integrallanuvchimi? Agar integrallanuvchi bo'lsa, uning integralini hisoblang.

Yechish. Ma'lumki,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0,\ 1], \qquad A_n \cap A_m = \emptyset, \quad n \neq m.$$

va $A_n = \{x \in A : f(x) = n\}$ tenglik o'rinli. Sodda funksiyalar uchun Lebeg integrali ta'rifiga ko'ra,

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{2^n} \tag{7.10}$$

qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, f sodda funksiya $A=(0,\ 1]$ da integrallanuvchi bo‘ladi. Bu holda musbat hadli qatorlarni taqqoslash haqidagi Dalamber alomatidan foydalanish qulay:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=\frac{1}{2}<1.$$

Demak, (7.10) qator yaqinlashuvchi. Bu yerdan f sodda funksiyaning Lebeg ma’nosida integrallanuvchi ekanligi kelib chiqadi. Endi (7.10) qator yig‘indisini hisoblaymiz. Uning qismiy yig‘indisi S_n uchun

$$S_n=2S_n-S_n=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}\right)=$$

$$=1+\left(\frac{2}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{2^{n-1}}-\frac{n-1}{2^{n-1}}\right)-\frac{n}{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+$$
$\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}$ o’rinli. Bu tenglikda $n\to\infty$ da limitga o‘tib,

$$\int_{(0,1]}f(x)d\mu=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^n}\right)=2$$

ekanligini olamiz. □

Shuni ta’kidlash joizki, yuqorida biz integralini hisoblagan sodda funksiya chegaralanmagandir. Ma’lumki, Riman integrali ta’rifi dastlab chegaralangan funksiyalar uchun keltiriladi. Chegaralanmagan funksiyalar uchun Riman integrali alohida xosmas integral sifatida ta’riflanadi. Lebeg integrali chegaralangan va chegaralanmagan funksiyalar uchun bir xilda ta’riflanadi.

7.6. O‘lchovli $f:A\to\mathbb{R}$ funksiya $A\,(\mu(A)<\infty)$ to‘plamda integrallanuvchi bo‘lishi uchun har bir $n\in\mathbb{N}$ da

$$f_n^{but}(x)=\frac{[nf(x)]}{n} \qquad (7.11)$$

sodda funksiya integrallanuvchi bo‘lishi zarur va yetarli. Isbotlang.

Isbot. *Zaruriyligi.* $f : A \to \mathbb{R}$ oʻlchovli ekanligidan hamda 7.12 va 7.19-misollardan, har bir $n \in \mathbb{N}$ da (7.11) tenglik bilan aniqlangan f_n^{but} ning sodda funksiya ekanligi kelib chiqadi. Quyidagi tengsizlikdan

$$|f_n^{but}(x)| \leq |f(x)| + 1$$

va VII xossadan f_n^{but} funksiyaning integrallanuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Yetarliligi. f_n^{but} sodda funksiya har bir $n \in \mathbb{N}$ da integrallanuvchi boʻlsin. $\{f_n^{but}\}$ sodda funksiyalar ketma-ketligining f ga tekis yaqinlashuvchi ekanligini koʻrsatamiz. Haqiqatan ham, barcha $x \in A$ larda

$$\left|f(x) - f_n^{but}(x)\right| = \left|f(x) - \frac{[nf(x)]}{n}\right| = \left|\frac{nf(x) - [nf(x)]}{n}\right| = \frac{\{nf(x)\}}{n} \leq \frac{1}{n}$$

tengsizlik oʻrinli. Demak, $\{f_n^{but}\}$ ketma-ketlik f ga tekis yaqinlashadi. 7.5-ta'rifga koʻra f funksiya A toʻplamda integrallanuvchidir. □

7.7. Lebeg ma'nosida integrallanuvchi, lekin Riman ma'nosida integrallanuvchi boʻlmagan funksiyaga misol keltiring.

Yechish. Dirixle funksiyasini $[0,\ 2]$ kesmada Lebeg va Riman ma'nolarida integrallanuvchanlikka tekshiramiz. $\mathfrak{D}$ sodda funksiya boʻlib, uning Lebeg integrali quyidagiga teng:

$$\int_{[0,2]} \mathfrak{D}(x)d\mu = 1 \cdot \mu\left([0,\ 2] \cap \mathbb{Q}\right) + 0 \cdot \mu\left([0,\ 2] \backslash \mathbb{Q}\right) = 0.$$

Dirixle funksiyasi $[0,\ 2]$ kesmada Riman ma'nosida integrallanuvchi emas. Buni koʻrsatish uchun $[0,\ 2]$ kesmani $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 2$ nuqtalar yordamida teng n boʻlakka boʻlamiz. Ma'lumki, Dirixle funksiyasining $[x_{k-1},\ x_k]$ boʻlakchadagi aniq yuqori chegarasi M_k barcha $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ uchun 1 ga teng, Dirixle funksiyasining bu boʻlakchalardagi aniq quyi chegarasi m_k esa 0 ga teng. Bu boʻlinishga mos Darbuning yuqori Ω_n va quyi ω_n yigʻindilarini qaraymiz:

$$\Omega_n = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} M_k = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} 1 = 2, \qquad \omega_n = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} m_k = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} 0 = 0.$$

Bu yerdan,

$$\lim_{n\to\infty} \Omega_n = 2, \quad \lim_{n\to\infty} \omega_n = 0$$

tengliklarga kelamiz. Demak, Dirixle funksiyasi $[0,\ 2]$ kesmada Riman ma'nosida integrallanuvchi emas. $\square$

Shuni ta'kidlaymizki, IV, VI, VII va VIII xossalar faqat Lebeg integrali uchun xos. Bu xossalar Riman integrali uchun oʻrinli emas. Buni 7.8-7.9 va 7.49-7.50-misollarda koʻrib chiqamiz.

7.8. Lebeg integralining IV xossasi, Riman integrali uchun oʻrinli emasligini, ya'ni shunday oʻlchovli va chegaralangan funksiyaga misol keltiringki, u Riman ma'nosida integrallanuvchi boʻlmasin.

Yechish. $[0,\ 2]$ kesmada Dirixle funksiyasini qaraymiz. U chegaralangan va o'lchovli, demak IV xossaga koʻra u Lebeg ma'nosida integrallanuvchi, lekin Dirixle funksiyasi $[0,\ 2]$ kesmada Riman ma'nosida integrallanuvchi emas. Bu tasdiq 7.7-misolda koʻrsatildi. $\square$

7.9. Lebeg integralining VII xossasi, Riman integrali uchun oʻrinli emas. Ya'ni, shunday integrallanuvchi $\varphi : A \to \mathbb{R}$ va oʻlchovli $f : A \to \mathbb{R}$ funksiyalarga misol keltiringki, barcha $x \in A$ larda $|f(x)| \leq \varphi(x)$ boʻlsin, lekin f funksiya Riman ma'nosida integrallanuvchi boʻlmasin.

Yechish. Quyidagi funksiyalarni qaraymiz: $\varphi(x) \equiv 2$ va

$$f(x) = \begin{cases} -1, & agar \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1, & agar \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases} \tag{7.12}$$

Barcha $x \in [0,\ 2]$ lar uchun $|f(x)| \leq \varphi(x)$ tengsizlik oʻrinli. $\varphi : [0,\ 2] \to \mathbb{R}$ oʻzgarmas funksiya sifatida $[0,\ 2]$ kesmada Riman ma'nosida integrallanuvchi boʻladi. Lekin f funksiya $[0,\ 2]$ kesmada Riman ma'nosida integrallanuvchi emas. Bu tasdiq $\mathfrak{D}$ ning Riman ma'nosida integrallanuvchi emasligiga oʻxshash isbotlanadi. $\square$

7.10. *Chebishev tengsizligini isbotlang,* ya'ni A o'lchovli to'plamda manfiymas φ funksiya va $c > 0$ son berilgan bo'lsa, u holda

$$\mu\{x \in A : \varphi(x) \geq c\} \leq \frac{1}{c}\int_A \varphi(x)d\mu \tag{7.13}$$

tengsizlik o'rinli. (7.13) *Chebishev tengsizligi* deyiladi.

Yechish. Aytaylik, $A_c = \{\, x \in A : \varphi(x) \geq c\}$ bo'lsin. U holda

$$\int_A \varphi(x)\,d\mu = \int_{A_c} \varphi(x)\,d\mu + \int_{A\setminus A_c} \varphi(x)\,d\mu \geq \int_{A_c} \varphi(x)\,d\mu \geq c \cdot \mu\,(A_c)\,.$$

Bu yerdan (7.13) tengsizlikning isboti kelib chiqadi. □

7.11. $f(x) = 3x^2 + 2, \quad x \in [0,\ 1]$ funksiyaning integralini ta'rif yordamida hisoblang. Javobingizni Riman va Lebeg integrallarini taqqoslash haqidagi 7.4-teoremadan foydalanib tekshiring.

Yechish. Berilgan $f(x) = 3x^2 + 2,\ x \in [0,\ 1]$ funksiya sodda funksiya emas. Bu funksiya o'lchovli va $[0,\ 1]$ kesmada chegaralangan, shuning uchun u integrallanuvchi. f ga tekis yaqinlashuvchi va integrallanuvchi $\{f_n\}$ sodda funksiyalar ketma-ketligini shunday tanlash kerakki, har bir $n \in \mathbb{N}$ da f_n ning integralini hisoblash mumkin bo'lsin, hamda $\lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,d\mu$ ni hisoblash oson bo'lsin. Shu maqsadda biz quyidagicha yo'l tutamiz. $[0,\ 1]$ kesmani

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1$$

nuqtalar yordamida teng n bo'lakka bo'lamiz va

$$A_k = \left[\frac{k-1}{n},\ \frac{k}{n}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \quad A_n = \left[\frac{n-1}{n},\ 1\right]$$

belgilashlarni kiritamiz. Tanlanishiga ko'ra bu to'plamlar juft-jufti bilan o'zaro kesishmaydi va $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = [0,\ 1]$. f_n sodda funksiyani $[0,\ 1]$ kesmada quyidagicha aniqlaymiz:

$$f_n(x) = f\left(\frac{k}{n}\right) = 3\frac{k^2}{n^2} + 2, \qquad x \in A_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Tanlangan ketma-ketlikni $[0,\ 1]$ da f ga tekis yaqinlashishini ko‘rsatamiz.

$$\max_{0\leq x\leq 1}|f_n(x)-f(x)| = \max_{1\leq k\leq n}\max_{x\in A_k}|f_n(x)-f(x)| =$$

$$= \max_{1\leq k\leq n}\max_{x\in A_k}|f(k/n)-f(x)| = \max_{1\leq k\leq n}\frac{3(2k-1)}{n^2} = \frac{3(2n-1)}{n^2}.$$

Demak, bu ketma-ketlik $[0,\ 1]$ da f ga tekis yaqinlashadi. Endi f_n sodda funksiyaning $[0,\ 1]$ to‘plam bo‘yicha Lebeg integralini hisoblaymiz.

$$\int_{[0,1]} f_n(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\,\mu(A_k) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3k^2}{n^2}+2\right)\frac{1}{n} = \frac{3}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+$$

$$+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}1 = \frac{3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{2\,n^2}+2. \qquad (7.14)$$

Yig‘indini hisoblashda barcha $n\in\mathbb{N}$ lar uchun o‘rinli bo‘lgan

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

tenglikdan foydalandik. (7.14) tenglikda $n\to\infty$ limitga o‘tib,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} f_n(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{2\,n^2}+2\right) = 1+2 = 3$$

ni hosil qilamiz. Olingan natijani Riman va Lebeg integrallarini taqqoslash haqidagi 7.4-teorema yordamida tekshiramiz.

$$\int_0^1 (3x^2+2)\,dx = (x^3+2x)\Big|_0^1 = 1+2-0 = 3.$$

Demak, ta’rif yordamida hisoblangan integral to‘g‘ri ekan. □

Uy vazifalari va mavzuni o‘zlashtirish uchun masalalar

7.12. Agar $f : A\to\mathbb{R}$ o‘lchovli funksiya bo‘lsa, u holda $g(x) = [f(x)]$ funksiya A da sodda funksiya bo‘lishini isbotlang. Bu yerda $[a]$ belgi a sonining butun qismini bildiradi.

7.13. O‘lchovli $A\subset E$ to‘plamning $y = \chi_A(x)$ xarakteristik funksiyasi E da sodda funksiya ekanligini ta’rif va 7.1-misol yordamida A_n to‘plamlarning o‘lchovli ekanligidan foydalanib ko‘rsating.

7.14. $y = \operatorname{sign} x$ ning $E = [-1,\ 3]$ da sodda funksiya ekanligini ta'rif yordamida va 7.1-misol tasdig'idan foydalanib ko'rsating.

7.15. Agar $f_1 : A \to \mathbb{R}$ va $f_2 : E \backslash A \to \mathbb{R}$ sodda funksiyalar bo'lsa, u holda

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A \\ f_2(x), & x \in E \backslash A \end{cases}$$

funksiya E da sodda funksiya bo'lishini isbotlang.

7.16. Kantorning zinapoya funksiyasi $\mathfrak{K}$ ning $[0,\ 1] \backslash K$ da sodda funksiya bo'lishini ko'rsating. Bu yerda $K-$ Kantor to'plami.

7.17. $\mathfrak{K} : K \to \mathbb{R}$ Kantor funksiyasining sodda funksiya emasligini isbotlang. Bu yerda $K-$ Kantor to'plami.

7.18. Quyidagi sodda funksiyalarning $[0,\ 1]$ to'plam bo'yicha olingan Lebeg integralini hisoblang.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} 0, \ agar \ x \in K \\ n, \ agar \ x \in K_n, \end{cases} \qquad b)\ g(x) = \begin{cases} 1, & x \in K \\ 2^{-n}, & x \in K_n. \end{cases}$$

7.19. Sodda funksiyaning songa ko'paytmasi yana sodda funksiya bo'lishini isbotlang.

7.20. Sodda funksiyalar yig'indisi yana sodda funksiya bo'lishini isbotlang.

7.21. Agar f va g lar sodda funksiyalar bo'lsa, u holda $\alpha f + \beta g$ funksiya ham sodda funksiya bo'ladi. Isbotlang.

7.22. Agar $f : A \to \mathbb{R}$ va $g : A \to \mathbb{R}$ lar sodda funksiyalar bo'lsa, u holda $f \cdot g$ ham sodda funksiya bo'ladi. Isbotlang.

7.23. $f : A \to \mathbb{R}$ funksiya o'lchovli bo'lishi uchun unga tekis yaqinlashuvchi sodda funksiyalar ketma-ketligining mavjud bo'lishi zarur va yetarli. Isbotlang.

7.24. Kantorning zinapoya funksiyasi $\mathfrak{K}$ ga $[0,\ 1]$ da tekis yaqinlashuvchi va cheklita qiymat qabul qiluvchi sodda funksiyalar ketma-ketligini quring.

7.25. Agar f va g sodda funksiyalar A to‘plamda integrallanuvchi bo‘lsa, u holda $\alpha f + \beta g$ funksiya ham A to‘plamda integrallanuvchi bo‘ladi va

$$\int_A (\alpha f(x) + \beta g(x))\, d\mu = \alpha \int_A f(x) d\mu + \beta \int_A g(x) d\mu$$

tenglik o‘rinli. Isbotlang.

7.26. $f(x) = [x]$, $x \in [0,\ 5) = A$ ning sodda funksiya ekanligini ko‘rsating va uning A to‘plam bo‘yicha olingan integralini hisoblang.

7.27. Ixtiyoriy o‘lchovli $A \subset E$ uchun $\int_E \chi_A(x)\, d\mu = \mu(A)$ tenglikni isbot qiling.

7.28. $A = \{x \in [-\pi,\ \pi] :\ \sin x < 0,5\}$ uchun $\int_{[-\pi,\,\pi]} \chi_A(x)\, d\mu$ integralni hisoblang.

7.29. Dirixle funksiyasining sodda funksiya ekanligini ta’rif yordamida ko‘rsating. Uning $A = [0, 3]$ to‘plam bo‘yicha olingan integralini hisoblang.

7.30. Riman funksiyasining sodda funksiya ekanligini ko‘rsating va uning $A = [0, 1]$ to‘plam bo‘yicha olingan integralini hisoblang.

7.31-7.37-misollarda berilgan $f : A \to \mathbb{R}$ funksiyani sodda ekanligini ko‘rsatib, uning integralini hisoblang.

7.31. $f(x) = [2x], \quad A = [0,\ 2)$.

7.32. $f(x) = \operatorname{sign} x, \quad A = [-1,\ 3]$.

7.33. $f(x) = \chi_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}(x), \quad A = [-1,\ 3]$.

7.34. $f(x) = [x] + \operatorname{sign} x, \quad A = [-1,\ 2]$.

7.35. $f(x) = \operatorname{sign} x + \chi_{[1,2]}(x), \quad A = [-1,\ 4]\,.$

7.36. $f(x) = n,\ x \in A_n = \left(\dfrac{1}{3^n},\ \dfrac{1}{3^{n-1}}\right], \quad n \in \mathbb{N},\ \ A = (0,\ 1].$

7.37. $f(x) = \dfrac{1}{n},\ x \in A_n = \left(\dfrac{1}{(n+1)!},\ \dfrac{1}{n!}\right], \quad n \in \mathbb{N},\ \ A = (0,\ 1].$

7.38. f ga tekis yaqinlashuvchi va A to‘plamda integrallanuvchi har qanday sodda funksiyalar ketma-ketligi uchun (7.4) limit mavjud. Isbotlang.

7.39. Berilgan f funksiya uchun (7.4) limit, unga tekis yaqinlashuvchi $\{f_n\}$ ketma-ketlikning tanlanishiga bog‘liq emas. Isbotlang.

7.40. Lebeg integralining *bir jinslilik xossasini* isbotlang. Bu xossani matematik simvollar yordamida quyidagicha yozish mumkin.

$$\int_A k \cdot f(x)\, d\mu = k \int_A f(x)\, d\mu, \quad k \in \mathbb{R}.$$

7.41. Lebeg integralining *additivlik xossasini* isbotlang. Bu xossani matematik simvollar yordamida quyidagicha yozish mumkin:

$$\int_A (f(x) + g(x))\, d\mu = \int_A f(x)\, d\mu + \int_A g(x)\, d\mu.$$

7.40 va 7.41-misollarda keltirilgan xossalar adabiyotlarda ([1] ga qarang) Lebeg integralining II va III *xossalari* deb berilgan.

7.42. Lebeg integralining IV *xossasini* isbotlang. A to‘plamda chegaralangan, o‘lchovli f funksiya integrallanuvchidir.

7.43. Lebeg integralining *monotonlik xossasini* (V xossa) isbotlang. A to‘plamda manfiymas $f(x) \geq 0$ funksiyaning integrali manfiymas.

7.44. Lebeg integralining VI *xossasini* isbotlang. Agar $\mu\,(A) = 0$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $f : A \to \mathbb{R}$ funksiyaning integrali nolga teng.

7.45. Agar deyarli barcha $x \in A$ lar uchun $f(x) = g(x)$ boʻlsa, u holda

$$\int_A f(x)d\mu = \int_A g(x)d\mu$$

tenglik o'rinli. Isbotlang. Bu ham Lebeg integralining VI *xossasi* deyiladi.

7.46 va 7.47-misollarda keltiriladigan tasdiqlar mos ravishda Lebeg integralining VII va VIII *xossasi* deb ataladi ([1] ga qarang).

7.46. Agar φ funksiya A toʻplamda integrallanuvchi boʻlib, deyarli barcha $x \in A$ lar uchun $|f(x)| \leq \varphi(x)$ boʻlsa, u holda f oʻlchovli funksiya ham A toʻplamda integrallanuvchi boʻlishini isbotlang.

7.47. Agar f oʻlchovli funksiya boʻlsa, u holda f va $|f|$ funksiyalar bir vaqtda integrallanuvchi yo integrallanuvchi emas. Isbotlang.

7.48. Agar har bir $n \in \mathbb{N}$ uchun (7.11) tenglik bilan aniqlanuvchi f_n^{but} sodda funksiya integrallanuvchi boʻlsa, quyidagi tenglikni isbotlang

$$\int_A f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n^{but}(x)\, d\mu.$$

7.49. Lebeg integralining VI xossasi, Riman integrali uchun oʻrinli emas. Ya'ni, shunday $f : A \to \mathbb{R}$ va $g : A \to \mathbb{R}$ ekvivalent funksiyalarga misol keltiringki, ulardan biri Riman ma'nosida integrallanuvchi, ikkinchisi esa integrallanuvchi boʻlmasin. $A = [0,\ 2]$ kesmada Dirixle $\mathfrak{D}(x)$ va nol $\theta(x) = 0$ funksiyalarini tahlil qiling.

7.50. Lebeg integralining VIII xossasi Riman integrali uchun oʻrinli emas. Ya'ni, Riman ma'nosida integrallanuvchi boʻlmagan shunday $f : A \to \mathbb{R}$ funksiyaga misol keltiringki, uning moduli $|f|$ esa, Riman ma'nosida integrallanuvchi boʻlsin. (7.12) bilan aniqlangan f funksiyani tahlil qiling.

7.51. $[-1,\ 1]$ kesmada aniqlangan Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lmagan, lekin kvadrati Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lgan funksiyaga misol keltiring. 7.9-misol yechimida qaralgan f funksiyani tahlil qiling.

7.52. (7.12) tenglik bilan aniqlangan f funksiya va $\varphi(x) \equiv 1$ funksiyani $[-1,\ 1]$ kesmada ekvivalent ekanligini isbotlang. Ularni $[-1,\ 1]$ kesmada Lebeg va Riman ma'nolarida integrallanuvchanlikka tekshiring.

7.55. Agar f funksiya A to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda f funksiya A to'plamning ixtiyoriy o'lchovli A' qismida ham integrallanuvchi bo'ladi. Isbotlang.

7.54. Agar $\int_A |\, f(x)\, |\, d\mu = 0$ bo'lsa, u holda deyarli barcha $x \in A$ lar uchun $f(x) = 0$ bo'ladi. Isbotlang.

7.55. *Lebeg integralining absolyut uzluksizlik xossasidan foydalanib isbotlang.* Agar f funksiya A $(\mu(A) < \infty)$ to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ son uchun shunday $m \in \mathbb{N}$ son mavjudki, $\mu(D) < m^{-1}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday o'lchovli $D \subset A$ to'plam uchun

$$\left| \int_D f(x)\, d\mu \right| < \frac{1}{n}$$

tengsizlik bajariladi.

7.56. $[0,\ 1]$ kesmada chegaralanmagan, ammo Lebeg ma'nosida integrallanuvchi bo'lgan sodda funksiyaga misol keltiring.

7.57. $f(x) = [x^2]$ funksiyaning $A = [0,\ 2]$ to'plam bo'yicha olingan Lebeg integralini hisoblang.

7.58. $[a,\ b]$ kesmada uzluksiz funksiya sodda funksiya bo'la oladimi?

7.59. Dirixle, Riman funksiyalari sodda funksiya bo'ladimi? Ularning $[0,\ 4]$ to'plam bo'yicha olingan Lebeg integralini hisoblang.

7.60-7.65-misollarda berilgan $f : A \to \mathbb{R}$ funksiyaning integralini ta'rif yordamida hisoblang. Javobingizni Riman va Lebeg integrallarini taqqoslash haqidagi 7.4-teoremadan foydalanib tekshiring.

7.60. $f(x) = 2x + 1, \quad x \in [0,\ 3].$

7.61. $f(x) = 6x - 3, \quad x \in [-1,\ 2].$

7.62. $f(x) = 3x^2 - 2x, \quad x \in [-1,\ 1].$

7.63. $f(x) = 6x^2 + 4x - 5, \quad x \in [-1,\ 1].$

7.64. $f(x) = 2^x + 3, \quad x \in [0,\ 2].$

7.65. $f(x) = e^x + 3x, \quad x \in [0,\ 1].$

7.66. Quyidagi integrallarni hisoblang.

a) $\int\limits_{[-3,3]} \mathrm{sign}(\cos \pi x) d\mu;$ b) $\int\limits_{(0,1]} \mathrm{sign}(\sin \frac{\pi}{x}) d\mu;$

c) $\iint\limits_{[0,2]\times[0,2]} [x+y] d\mu;$ d) $\iint\limits_{x \le y \le 4} \sqrt{[y-x]} d\mu.$

7.67-misolni Lebeg integrali ta'rifi va xossalaridan foydalanib hisoblang. Bu yerda $\mathfrak{D}-$ Dirixle, $\mathfrak{R}-$ Riman, $\mathfrak{K}-$ Kantor funksiyasi.

7.67. a) $\int\limits_{[0,1]} x \cdot \chi_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}(x) d\mu;$ b) $\int\limits_{[0,2]} (1+2x)\, d\mu;$

c) $\int\limits_{[0,2]} \big(3x^2+1\big)\, d\mu;$ d) $\int\limits_{[0,1]} (2^x+2)\, d\mu;$

e) $\int\limits_{[0,1]} (\ln 3 + e^x)\, d\mu;$ f) $\int\limits_{[0,1]} \mathfrak{K}(x)\, d\mu;$

g) $\int\limits_{[0,1]} x\,(1-\mathfrak{D}(x)) d\mu;$ h) $\int\limits_{[0,1]} x\,(1-\mathfrak{R}(x)) d\mu;$

i) $\int\limits_{[0,1]} (x+\mathfrak{K}(x))\, d\mu;$ j) $\int\limits_{[0,1]} x \cdot \mathfrak{K}(x)\, d\mu;$

k) $\int\limits_{[0,1]} x^2 \cdot \mathfrak{R}(x)\, d\mu.$

7.68. Har bir $n \in \mathbb{N}$ uchun $f_n : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ funksiyani quyidagicha aniqlaymiz. f_n funksiyaning $x \in [0,\ 1]$ nuqtadagi qiymati, x ning cheksiz ikkilik kasrga yoyilmasidagi $n-$ raqamiga teng. Masalan, $f_2(0,10010\ldots) = 0$, $f_3(0,10110\ldots) = 1$. Bu ketma-ketlik uchun quyidagilarni isbotlang:

$$\int_{[0,1]} f_n(x) f_m(x) d\mu = \frac{1}{4}, \quad n \neq m, \quad \int_{[0,1]} (f_n(x))^2\, d\mu = \frac{1}{2}.$$

7.69. Har bir $n \in \mathbb{N}$ uchun $g_n : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ funksiyani quyidagicha aniqlaymiz. Agar $x \in [0,\ 1]$ ning cheksiz ikkilik kasrga yoyilmasida $n-$ raqami 1 bo‘lsa, $g_n(x) = 1$, agar $n-$ raqami 0 bo‘lsa, $g_n(x) = -1$. Bu ketma-ketlik uchun quyidagilarni isbotlang:

$$\int_{[0,1]} g_n(x) g_m(x) d\mu = 0, \quad n \neq m, \quad \int_{[0,1]} (g_n(x))^2\, d\mu = 1.$$

8- §. Lebeg integrali belgisi ostida limitga o‘tish

Integral belgisi ostida limitga o‘tish yoki qatorlarni hadma-had integrallash masalasi ko‘plab muammolarni yechishda uchraydi. Boshqacha qilib aytganda qanday shartlarda

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n(x) d\mu := \int_A f(x) d\mu \tag{8.1}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi, ya’ni limit va integral belgilarining o‘rinlarini almashtirish mumkin? Integral belgisi ostida limitga o‘tishning yetarli shartlaridan biri berilgan ketma-ketlikning tekis yaqinlishish shartidir, lekin bu shart ta’rifda bor. Shuning uchun tekis yaqinlishishdan kuchsizroq shartlar qo‘ygan holda (8.1) tenglikning bajarilishini tekshiramiz. Agar $\{f_n\}$ integrallanuvchi funksiyalar ketma-ketligi A to‘plamning har bir nuqtasida f funksiyaga yaqinlashsa, (8.1) tenglik to‘g‘rimi degan savol tug‘iladi. Umuman olganda, nuqtali yaqinlashish integral belgisi ostida limitga o‘tishni ta’minlay olmas ekan. Bunga quyidagi misolda ishonch hosil qilamiz.

8.1. $[0,\,\pi]$ kesmada quyidagi funksional ketma-ketlikni qaraymiz

$$f_n(x) = \begin{cases} n\sin nx, & x \in \left[0,\,\dfrac{\pi}{n}\right) \\ 0, \quad x \in \left[\dfrac{\pi}{n},\,\pi\right]. \end{cases} \tag{8.2}$$

Bu ketma-ketlik har bir nuqtada nolga yaqinlashadi. Bu ketma-ketlik uchun (8.1) tenglik to‘g‘rimi?

Yechish. Har bir $x \in [0,\,\pi]$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ tenglik oson tekshiriladi. Endi f_n ning $[0,\,\pi]$ kesma bo‘yicha olingan integralini hisoblaymiz:

$$\int_0^{\pi} f_n(x)d\mu = n\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nx d\mu = 2.$$

Ikkinchi tomondan

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f_n(x)d\mu = 2 \neq \int_0^{\pi} \theta(x)d\mu = 0.$$

Demak, bu ketma-ketlik uchun integral belgisi ostida limitga o‘tish to‘g‘ri emas. $\square$

Quyida biz integral belgisi ostida limitga o‘tish belgilarini keltiramiz.

8.1-teorema *(Lebeg). Agar* $\{f_n\}$ *ketma-ketlik* A *to‘plamning har bir nuqtasida* f *funksiyaga yaqinlashsa va barcha* $n \in \mathbb{N}$ *lar uchun* $|f_n(x)| \le \varphi(x)$ *tengsizlik bajarilib,* φ *funksiya* A *to‘plamda integrallanuvchi bo‘lsa, u holda limitik funksiya* f *ham* A *da integrallanuvchi bo‘ladi va quyidagi tenglik o‘rinli*

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu = \int_A f(x)d\mu.$$

8.1-natija. *Agar* $|\,f_n(x)\,| \le M = const$ *va barcha* $x \in A$ *larda* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *bo‘lsa, u holda quyidagi tenglik o‘rinli*

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu = \int_A f(x)d\mu.$$

Nol o‘lchovli to‘plamda funksiyaning qiymatini o‘zgartirish integral qiymatiga ta’sir qilmaydi, shuning uchun 8.1-teoremada $\{f_n\}$ ketma-ketlikning

f funksiyaga deyarli yaqinlashishini va $|f(x)| \leq \varphi(x)$ tengsizlikning ham deyarli barcha x lar uchun bajarilishini talab qilish yetarli.

8.2-teorema *(Levi). A to'plamda monoton*

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \cdots ,$$

integrallanuvchi $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi berilgan bo'lib, barcha $n \in \mathbb{N}$ lar uchun

$$\int_A f_n(x) d\mu \leq K$$

tengsizlik bajarilsin. U holda A to'plamning deyarli hamma yerida $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ chekli limit mavjud hamda f funksiya A da integrallanuvchi va integral belgisi ostida limitga o'tish mumkin, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\, d\mu = \int_A f(x)\, d\mu.$$

8.2-natija. *Agar $\psi_n(x) \geq 0$ bo'lib,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n(x) d\mu < +\infty$$

bo'lsa, u holda A to'plamning deyarli barcha nuqtalarida

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)$$

qator yaqinlashadi va bu qatorni hadlab integrallash mumkin, ya'ni

$$\int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n(x)\, d\mu\, .$$

8.3-teorema *(Fatu). Agar manfiymas, o'lchovli $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi A to'plamda f funksiyaga deyarli yaqinlashsa va*

$$\int_A f_n(x)\, d\mu \leq K$$

bo'lsa, u holda f funksiya A to'plamda integrallanuvchi va

$$\int_A f(x)\, d\mu \leq K$$

tengsizlik o'rinli.

Shu paytgacha biz faqat chekli o'lchovli $(\mu(A) < \infty)$ to'plamlarda Lebeg integrali va uning xossalarini o'rgandik. Lekin ko'plab masalalarni yechishda cheksiz o'lchovli to'plamda berilgan funksiyaning integralini qarashga to'g'ri keladi. Masalan, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ da berilgan funksiyaning Lebeg integralini qarashga to'g'ri keladi. Biz X to'plam sanoqli sondagi chekli o'lchovli X_n to'plamlarning birlashmasi ko'rinishida tasvirlanishi mumkin bo'lgan hol bilan chegaralanamiz.

8.1-ta'rif. *Agar X to'plamda μ o'lchov berilgan bo'lib, X to'plamni sanoqli sondagi chekli o'lchovli to'plamlarning birlashmasi ko'rinishida tasvirlash mumkin bo'lsa, u holda X da berilgan μ o'lchov $\sigma-$ chekli o'lchov deyiladi.*

$\sigma-$ chekli o'lchovlarga sonlar o'qidagi va tekislikdagi Lebeg o'lchovlari misol bo'la oladi.

8.2-ta'rif. *Agar monoton o'suvchi $\{X_n\}$ $(X_n \subset X_{n+1})$ to'plamlar ketma-ketligi quyidagi ikki shartni qanoatlantirsa*

1) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n = X,$ 2) *barcha* $n \in \mathbb{N}$ *lar uchun* $\mu(X_n) < \infty,$

$\{X_n\}$ *ga* X *to'plamni qoplovchi ketma-ketlik deyiladi.*

8.3-ta'rif. *X to'plamda $\sigma-$ chekli μ o'lchov va X da aniqlangan manfiymas f funksiya berilgan bo'lsin. Agar f funksiya ixtiyoriy chekli o'lchovli $A \subset X$ to'plamda integrallanuvchi bo'lib, biror qoplovchi $\{X_n\}$ ketma-ketlik uchun*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X_n} f(x)d\mu$$

chekli limit mavjud bo'lsa, u holda f funksiya X to'plamda integrallanuvchi deyiladi va bu limit

$$\int_X f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{X_n} f(x)d\mu$$

f dan X to'plam bo'yicha olingan Lebeg integrali deyiladi.

Endi f ixtiyoriy funksiya bo'lsin. Uni ikkita manfiymas funksiyalar ayirmasi shaklida tasvirlaymiz, ya'ni $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, bu yerda f_+ va f_- lar (7.7) tenglik bilan aniqlanadi.

8.4-ta'rif. *Agar* (7.7) *tenglik bilan aniqlangan* f_+ *va* f_- *manfiymas funksiyalar* X *to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda* f *funksiya* X *to'plamda integrallanuvchi deyiladi va*

$$\int_X f(x)d\mu = \int_X f_+(x)d\mu - \int_X f_-(x)d\mu.$$

Lebeg va Riman integrallari orasidagi quyidagi bog'lanishni keltiramiz. Agar $[a,\ b]$ kesmada f funksiya Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lsa, u holda f funksiya $[a,\ b]$ kesmada Lebeg ma'nosida ham integrallanuvchi bo'ladi va bu integrallar teng bo'ladi (7.4-teoremaga qarang).

Agar f funksiya $[0,\ 1]$ kesmada xosmas ma'noda Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lsa, u Lebeg ma'nosida integrallanuvchi bo'lmasligi ham mumkin. Masalan,

$$\int_0^1 \sin\frac{1}{t}\frac{dt}{t} \tag{8.3}$$

xosmas integral Riman ma'nosida mavjud (integrallanuvchi). Haqiqatan ham, o'zgaruvchilarni almashtirib

$$\int_0^1 \sin\frac{1}{t}\ \frac{dt}{t} = \int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

ga kelamiz. Dirixle alomatiga ko'ra bu integral yaqinlashuvchi ($f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ funksiya integrallanuvchi). $f(t) = \sin\dfrac{1}{t}\cdot\dfrac{1}{t}$ funksiya $(0,\ 1)$ oraliqda Lebeg ma'nosida integrallanuvchi emas. Faraz qilaylik, bu funksiya Lebeg ma'nosida integrallanuvchi bo'lsin. U holda VIII xossaga ko'ra

$$\int_0^1 \left|\sin\frac{1}{t}\right| \frac{dt}{t}$$

integral ham mavjud bo'ladi. Bundan esa yana o'zgaruvchilarni almashtirib,

$$\int_0^1 \left|\sin\frac{1}{t}\right| \frac{dt}{t} = \int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\, dx \geq \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\, dx = \int_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{2x}\, dx =$$

$$= \int_1^\infty \frac{dx}{2x} - \int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x} dx$$

tenglikka kelamiz. Oxirgi

$$\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x} dx$$

integral yaqinlashuvchi. Birinchi integral esa uzoqlashuvchi. Demak,

$$\int_0^1 \left|\sin\frac{1}{t}\right| \frac{dt}{t}$$

integral ham uzoqlashuvchi. Shuni ta'kidlaymizki, agar manfiymas funksiya Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya Lebeg ma'nosida ham integrallanuvchi bo'ladi va bu integrallar teng bo'ladi.

8.4-teorema. *Aytaylik A to'plamning o'lchovi cheksiz bo'lsin. Cheklita nolmas $y_1, y_2, \ldots, y_n$ qiymatlarni qabul qiluvchi $f : A \to \mathbb{R}$ sodda funksiya A da integrallanuvchi bo'lishi uchun $A_k = \{x \in A : f(x) = y_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ to'plamlarning o'lchovi chekli bo'lishi zarur va yetarli. Xususan $B \subset A$ to'plamning xarakteristik funksiyasi - $\chi_B(x)$ integrallanuvchi bo'lishi uchun $\mu(B) < \infty$ bo'lishi zarur va yetarli.*

8.5-ta'rif. *Aytaylik A cheksiz o'lchovli to'plam, $f : A \to \mathbb{R}$ sanoqlita $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ qiymatlarni qabul qiluvchi sodda funksiya bo'lsin. Agar har bir nolmas y_k uchun $A_k = \{x \in A : f(x) = y_k\}$ to'plam chekli o'lchovli bo'lib, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n\, \mu(A_n)$ qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, $f : A \to \mathbb{R}$ sodda funksiya A to'plamda Lebeg ma'nosida integrallanuvchi deyiladi.*

8.2. Quyida keltirilgan funksiyalar $\mathbb{R}$ da Lebeg ma'nosida integrallanuvchi bo'ladimi?

a) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \chi_{[n,\, n+1]}(x)$; b) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\, n}{n} \chi_{[n,\, n+1]}(x)$;

c) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\chi_{[n^2,\,(n+1)^2)}(x)$; d) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos n\cdot\chi_{\left[\sqrt{n},\,\sqrt{n+1}\right)}(x)$;

e) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{(n+1)!}\chi_{[n,\,n+1)}(x)$; f) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}\chi_{[n,\,n+1)}(x)$.

Yechish. Hozir biz f) ning yechimini beramiz. Berilgan funksiyaning aniqlanishidan quyidagilarga ega bo'lamiz. $A_0=(-\infty,1)$ to'plamda $f(x)=0=y_0$ va $f(x)=\dfrac{n^2}{2^n}$, $x\in A_n=[n,\ n+1)$. 8.5-ta'rifga ko'ra $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funksiya integrallanuvchi bo'lishi uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty}y_n\,\mu(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}\cdot 1$$

qator yaqinlashuvchi bo'lishi zarur va yetarli. Musbat hadli qatorlarni taqqoslash haqidagi Dalamber alomatidan foydalanib ($q=0,5$), hosil bo'lgan qatorning yaqinlashuvchi ekanligiga ishionch hosil qilamiz. Demak, f funksiya $\mathbb{R}$ da integrallanuvchi bo'ladi. □

8.3. $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[n,\ n+n^{-\alpha})$ to'plamning xarakteristik funksiyasi $f(x)=\chi_A(x)$ parametr α ning qanday qiymatlarida $\mathbb{R}$ da integrallanuvchi bo'ladi?

Yechish. 8.4-teoremaga ko'ra, $f(x)=\chi_A(x)$ funksiya integrallanuvchi bo'lishi uchun A to'plam chekli o'lchovli bo'lishi zarur va yetarli. A to'plamning o'lchovi, o'lchovning $\sigma-$ additivlik xossasiga ko'ra

$$\mu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$$

yig'indiga teng. Ma'lumki, bu qator parametr α ning 1 dan katta barcha qiymatlarida yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, barcha $\alpha\in(1,\ \infty)$ larda A to'plamning χ_A xarakteristik funksiyasi, $\mathbb{R}$ da integrallanuvchi bo'ladi. □

8.4. Quyidagi limitlarni integral belgisi ostida limitga o'tish haqidagi teoremalardan foydalanib yeching.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,\,1]} \exp\left(-n\,x^2\right)\,d\mu$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,\,1]} \exp\left(-\dfrac{x^2}{n}\right)\,d\mu$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{\sin^n x}{1+x^2}\,d\mu$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,\,\pi]} \exp(-\cos^n x)\,d\mu$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,\,\infty]} n\left(\exp\left(-\dfrac{x}{n}\right)-1\right)\dfrac{d\mu}{1+x^4}$.

Yechish. a) ning yechimi. Integral belgisi ostida limitga o'tish haqidagi Lebeg teoremasidan foydalanamiz. Berilgan $f_n(x)=\exp(-nx^2)$ ketma-ketlik $[0,\ 1]$ kesmaning deyarli barcha (nol nuqtadan tashqari) nuqtalarida $\theta(x)\equiv 0$ funksiyaga yaqinlashadi. Integrallanuvchi $\varphi:[0,\ 1]\to\mathbb{R}$ funksiya sifatida $\varphi(x)\equiv 1$ ni olamiz. U holda barcha $x\in[0,\ 1]$ va $n\in\mathbb{N}$ lar uchun $|f_n(x)|\le\varphi(x)$ tengsizlik bajariladi. Integral belgisi ostida limitga o'tish haqidagi Lebeg teoremasining shartlari bajariladi. Teorema tasdig'iga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\,1]}\exp(-nx^2)\,d\mu=\int_{[0,\,1]}\theta(x)\,d\mu=0. \qquad \square$$

8.5. $f(x)=\dfrac{1}{1+[x]^2},\quad x\in A=[0,\ \infty)$ funksiya A da integrallanuvchimi?

Yechish. Sonning butun qismi ta'rifiga ko'ra $f:A\to\mathbb{R}$ sodda funksiya bo'lib, $A_n=[n,\ n+1),\ n=0,1,\ldots$ to'plamda $y_n=\dfrac{1}{1+n^2}$ qiymatni qabul qiladi va $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{1+n^2}\cdot 1$ qator yaqinlashuvchi. Demak, 8.5-ta'rifga ko'ra $f(x)=\dfrac{1}{1+[x]^2}$ funksiya $A=[0,\ \infty)$ da integrallanuvchi. $\square$

Uy vazifalari va mavzuni o'zlashtirish uchun masalalar

8.6. Quyida keltirilgan funksiyalar $\alpha>0$ parametrning qanday qiymatlarida $\mathbb{R}$ da integrallanuvchi bo'ladi?

a) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\chi_{[n,\,n+1]}(x)$; b) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^\alpha}\chi_{[n,\,n+1)}(x)$;

c) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\chi_{[n^2,\,(n+1)^2)}(x)$.

8.7. Parametr α ning qanday qiymatlarida $f_n(x) = \dfrac{nx^{\alpha}}{nx^2+1}$, $\quad x \in [0,\ 1]$, ketma-ketlik integral belgisi ostida limitga o'tish haqidagi Lebeg teoremasi shartlarini qanoatlantiradi?

8.8. Quyidagi $\{g_n\}$ ketma-ketlik integral belgisi ostida limitga o'tish haqidagi Levi teoremasi shartlarini qanoatlantiradimi?

$$g_n(x) = \frac{nx^{\frac{3}{2}}}{nx^2+1}, \quad x \in [0,\ 1].$$

8.9. Fatu teoremasi shartlari bajarilganda

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu = \int_A f(x)d\mu$$

tenglik o'rinlimi? O'rinli bo'lmasa, misol keltiring.

8.10. Integral belgisi ostida limitga o'tish haqidagi teoremalardan foydalanib quyidagi limitlarni hisoblang.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\left(x^2+y^2\right)\right) \cos\left(\dfrac{1}{n}x \cdot y\right) dx\, dy;$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{n}{(1+x^4)} \cdot \sin\dfrac{|x|}{n} d\mu.$

8.11. Agar manfiymas funksiya xosmas ma'noda Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lsa, u Lebeg ma'nosida integrallanuvchi bo'lishini isbotlang.

8.12. (8.3) integralning absolyut integrallanuvchi emasligini isbotlang.

8.13. $f(x) = \dfrac{1}{1+[x^2]}$, $\quad x \in A = [0,\ \infty)$ funksiya A da integrallanuvchimi?

8.14. $f_1(x) = \dfrac{x_1}{x_1^2+x_2^2}$, $f_2(x) = \dfrac{x_2}{x_1^2+x_2^2}$, $f_1^+(x) = \dfrac{|x_1|}{x_1^2+x_2^2}$, $f_2^+(x) = \dfrac{|x_2|}{x_1^2+x_2^2}$ funksiyalarni $U_0(1) = \{(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ to'plamda integrallanuvchi ekanligini ko'rsating.

8.15. $f_i(x) = \dfrac{\sin x_i}{2 - \cos x_1 - \cos x_2}$, $\ i = 1,\ 2$ funksiyalarni $U_0(1) = \{(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ to'plamda integrallanuvchi ekanligini ko'rsating.

8.16. $f(x)=\dfrac{1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ va $f_i(x)=\dfrac{|x_i|}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, $i=1,\,2,\,3$ funksiyalarni $B_0(1)=\{(x_1,\,x_2,\,x_3)\in\mathbb{R}^3:\;x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 1\}$ to‘plamda integrallanuvchi ekanligini isbotlang. Ularning $B_0(1)$ to‘plam bo‘yicha olingan integralini hisoblang.

8.17. $f(x)=\dfrac{1}{3-\cos x_1-\cos x_2-\cos x_3}$ funksiyani $B_0(1)$ to‘plamda integrallanuvchi ekanligini ko‘rsating.

9- §. Monoton va o‘zgarishi chegaralangan funksiyalar

9 va 10-paragraflarda biz sonlar o‘qida aniqlangan funksiyalarning Lebeg integralini qaraymiz. Bunda integralni tayinlangan f da to‘plam funksiyasi sifatida o‘rganamiz. Agar f funksiya $X\subset\mathbb{R}$ o‘lchovli to‘plamda integrallanuvchi bo‘lsa, u holda

$$\int\limits_A f(x)\,d\mu \tag{9.1}$$

integral barcha o‘lchovli $A\subset X$ to‘plamlar uchun mavjud va u tayinlangan f da to‘plam funksiyasi bo‘ladi. Bu integral *Lebegning aniqmas integrali* deyiladi. X sonlar o‘qidagi oraliq bo‘lishi ham mumkin. Bu holda A to‘plam X dagi kesmadan iborat bo‘lsa, (9.1) integral kesma chetki nuqtalarining funksiyasi bo‘ladi. $A=[a,\,b]$ kesma chap chekkasini tayinlab,

$$\int\limits_{[a,x]} f(t)d\mu \tag{9.2}$$

integralning xossalarini o‘rganamiz. Bu masala bizni sonlar o‘qida aniqlangan funksiyalarning ba’zi muhim sinflarini qarashga olib keladi. Bular monoton funksiyalar, o‘zgarishi chegaralangan funksiyalar va absolyut uzluksiz funksiyalar sinflaridir.

Monoton funksiyalar. Dastlab o‘suvchi, kamayuvchi hamda kamaymaydigan, o‘smaydigan funksiyalar ta’riflarini beramiz.

9.1-ta'rif. $[a,\ b]$ *kesmada aniqlangan* f *funksiya, shu kesmadan olingan har qanday* x_1, x_2 *lar uchun* $x_1 < x_2$ *bo'lganda*

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2))$$

bo'lsa, f *funksiya* $[a,\ b]$ *kesmada kamaymaydigan (o'smaydigan) funksiya deyiladi.*

9.2-ta'rif. $[a,\ b]$ *kesmada aniqlangan* f *funksiya, shu kesmadan olingan har qanday* x_1, x_2 *lar uchun* $x_1 < x_2$ *bo'lganda*

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)) \tag{9.3}$$

bo'lsa, f *funksiya* $[a,\ b]$ *kesmada o'suvchi (kamayuvchi) funksiya deyiladi.*

Umuman, qisqalik uchun monoton funksiya deyilganda, 9.1 va 9.2-ta'riflarda keltirilgan funksiyalar tushuniladi. Ba'zan o'quvchining diqqatini jalb qilish uchun o'suvchi yoki kamayuvchi funksiyani, qat'iy o'suvchi yoki qat'iy kamayuvchi, yoki qat'iy monoton deb ataymiz.

Lebegning aniqmas integrali (9.2) ning xossalarini o'rganishni quyidagi sodda va muhim xossadan boshlaymiz. Agar f manfiymas funksiya bo'lsa, u holda (9.2) monoton kamaymaydigan funksiya bo'ladi. Har qanday integrallanuvchi funksiya ikkita manfiymas integrallanuvchi funksiyalar ayirmasi shaklida tasvirlanadi

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x),$$

bu yerda f_+ va f_- lar (7.7) tenglik bilan aniqlanadi.

Shuning uchun (9.2) integral ikkita monoton kamaymaydigan funksiyalarning ayirmasi shaklida ifodalanadi. Shu sababli yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan (9.2) integralni o'rganish, monoton funksiyalarning xossalarini tekshirish masalasiga keladi.

Haqiqiy sonlar to'plami $\mathbb{R}$ da aniqlangan f funksiya va $x_0 \in \mathbb{R}$ nuqta berilgan bo'lsin. Agar

$$\lim_{h\to 0+} f(x_0+h) \quad (\lim_{h\to 0-} f(x_0+h))$$

limit mavjud bo'lsa, bu limitga f funksiyaning x_0 nuqtadagi *o'ng (chap) limiti* deyiladi va $f(x_0+0)\,(f(x_0-0))$ ko'rinishda belgilanadi. Agar f funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng (chap) limiti mavjud bo'lib,

$$f(x_0+0) = f(x_0) \quad (f(x_0) = f(x_0-0))$$

tenglik o'rinli bo'lsa, f funksiya x_0 nuqtada *o'ngdan (chapdan) uzluksiz* deyiladi. Agar f funksiyaning x_0 nuqtada o'ng va chap limitlari mavjud bo'lib,

$$f(x_0+0) = f(x_0) = f(x_0-0)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, f funksiya x_0 nuqtada *uzluksiz* deyiladi. Agarda

$$f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$$

bo'lsa, f funksiya x_0 nuqtada *birinchi tur uzilishga ega* deyiladi, x_0 nuqta esa f funksiyaning *birinchi tur uzilish nuqtasi* deyiladi.

$$\Delta_f(x) = f(x+0) - f(x-0)$$

qiymatga f funksiyaning $x \in (a,\, b)$ *nuqtadagi sakrashi* deyiladi. f funksiyaning kesma chetlaridagi *sakrashlari deb* $\Delta_f(a) = f(a+0) - f(a), \quad \Delta_f(b) = f(b) - f(b-0)$ miqdorlarga aytiladi.

Agar f funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng va chap limitlaridan birortasi mavjud bo'lmasa yoki ulardan biri cheksizga aylansa, bu nuqta f funksiyaning *ikkinchi tur uzilish nuqtasi* deyiladi.

Quyidagi sonlar

$$\overline{\lim_{h\to 0+}} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \Lambda_r, \quad \overline{\lim_{h\to 0+}} \frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{h} = \Lambda_l,$$

$$\underline{\lim}_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lambda_r, \quad \underline{\lim}_{h\to 0+} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} = \lambda_l,$$

mos ravishda f funksiyaning x_0 *nuqtadagi o'ng yuqori, chap yuqori, o'ng quyi va chap quyi hosila sonlari* deyiladi.

Endi monoton funksiyalarning xossalariga doir misollar qaraymiz.

9.1. $f(x) = [x] + 2 \cdot \operatorname{sign}(x+1) + 3 \cdot \chi_{(-1,1]}(x), \quad [-2,\ 1]$ funksiyani $[-2,\ 1]$ kesmada monotonlikka tekshiring. Ulardan qaysilari o'ngdan uzluksiz, qaysilari chapdan uzluksizligini aniqlang. Ularning barcha uzilish nuqtalarini toping, uzilish nuqtalaridagi sakrashlarini hisoblang.

Yechish. Berilgan funksiyaning har bir qo'shiluvchisini alohida tahlil qilamiz. Sonning butun qismi ta'rifiga ko'ra $y_1(x) = [x]$ funksiya barcha butun nuqtalarda uzilishga ega, kamaymaydigan, o'ngdan uzluksiz, uzilish nuqtalardagi sakrashlari esa 1 ga teng. $y_2(x) = \operatorname{sign}(x+1)$ funksiya birgina $x = -1$ nuqtada uzilishga ega. Bu nuqtadagi o'ng va chap limitlar esa quyidailarga teng:

$$\lim_{h\to 0+} \operatorname{sign}(0-h) = -1 \neq \operatorname{sign} 0 = 0 \neq \lim_{h\to 0+} \operatorname{sign}(0+h) = 1. \tag{9.4}$$

$y_2(x) = \operatorname{sign}(x+1)$ kamaymaydigan funksiya bo'lib, uzilish nuqtasidagi sakrashi $y_2(-1+0) - y_2(-1-0) = 2$ ga teng. (9.4) dan ma'lumki, bu funksiya $x = -1$ nuqtada o'ngdan ham chapdan ham uzluksiz emas. So'nggi, $y_3(x) = \chi_{(-1,1]}(x)$ funksiya ham $[-2,\ 1]$ kesmaning faqat $x = -1$ nuqtasida uzilishga ega. Bu funksiya $x = -1$ nuqtada chapdan uzluksiz va sakrashi 1 ga teng. Tekshirish natijalariga ko'ra quyidagi xulosaga kelamiz. y_1, y_2 va y_3 funksiyalar kamaymaydigan va musbat sonlarga ko'paytirib yig'ilganligi uchun

$$f(x) = [x] + 2 \cdot \operatorname{sign}(x+1) + 3 \cdot \chi_{(-1,1]}(x)$$

ham $[-2,\ 1]$ da kamaymaydigan funksiya bo'ladi. Uning uzilish nuqtalari -1

va 0 nuqtalardir. Bundan tashqari $f(-1)=-1$, $f(0)=5$ va

$$\lim_{h\to 0+} f(-1-h) = -2+2\cdot(-1) = -4 \neq \lim_{h\to 0+} f(-1+h) = -1+2\cdot 1+3\cdot 1 = 4,$$

$$\lim_{h\to 0+} f(0-h) = -1+2\cdot 1+3\cdot 1 = 4 \neq \lim_{h\to 0+} f(0+h) = 0+2\cdot 1+3\cdot 1 = 5.$$

Bu funksiyaning -1 va 0 nuqtadagi sakrashlari mos ravishda $\Delta_f(-1)=8$ va $\Delta_f(0)=1$. Berilgan funksiya $x=-1$ nuqtada oʻngdan ham chapdan ham uzluksiz emas, $x=0$ nuqtada oʻngdan uzluksiz. □

9.2. Faraz qilaylik, $f:[a,\,b]\to\mathbb{R}$ kamaymaydigan funksiya, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ shu kesmadagi ixtiyoriy muqtalar boʻlsin. U holda

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_f(c_i) \leq f(b)-f(a) \tag{9.5}$$

tengsizlik oʻrinli. Isbotlang.

Isbot. Faraz qilaylik, $f:[a,\,b]\to\mathbb{R}$ kamaymaydigan funksiya, $c_1<c_2<\ldots<c_n$ lar shu kesmadagi, oʻsish tartibida joylashgan ixtiyoriy muqtalar boʻlsin. Quyidagi $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta_f(c_i)$ yigʻindini qaraymiz:

$$\sum_{i=1}^{n}(f(c_i+0)-f(c_i-0)) = f(c_1+0)-f(c_1-0)+\cdots+f(c_n+0)-f(c_n-0).$$

Bu yigʻindini quyidagicha yozib olamiz:

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta_f(c_i) = f(c_n+0)-f(c_1-0)-\sum_{i=2}^{n}(f(c_i-0)-f(c_{i-1}+0)). \tag{9.6}$$

Kamaymaydigan f funksiya va istalgan $c_i>c_{i-1}$ uchun

$$f(c_i-0)-f(c_{i-1}+0)\geq 0 \tag{9.7}$$

tngzislik oʻrinli. (9.6) va (9.7) lardan

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta_f(c_i) \leq f(c_n+0)-f(c_1-0) \leq f(b)-f(a) \tag{9.8}$$

ni olamiz. Bu esa (9.5) tengsizlikning oʻzidir. □

9.3. $f:[a,\,b]\to\mathbb{R}$ kamaymaydigan funksiya, $n\in\mathbb{N}$ ixtiyoriy son bo'lsin. U holda $D_n=\left\{x\in[a,\,b]:\Delta_f(x)\geq\dfrac{1}{n}\right\}$ chekli to'plam. Isbotlang.

Isbot. Teskaridan faraz qilaylik, biror $n\in\mathbb{N}$ uchun D_n to'plamning elementlari soni cheksiz bo'lsin, u holda ixtiyoriy $m\in\mathbb{N}$ uchun D_n dan $c_1,c_2,\ldots,c_m\in D_n$ nuqtalar olish mumkin. (9.5) hamda D_n ning aniqlanishidan quyidagini olamiz:

$$f(b)-f(a)\geq\sum_{i=1}^{m}\Delta_f(c_i)\geq m\cdot\frac{1}{n}.$$

Bu yerdan $m\leq n(f(b)-f(a))$ ekanligi kelib chiqadi. Bu tengsizlik m ning ixtiyoriy natural son ekanligiga zid. Demak, D_n chekli to'plam. □

9.4. $f:[a,\,b]\to\mathbb{R}$ kamaymaydigan funksiya, $c_1,c_2,\ldots,c_n,\ldots$ lar uning uzilish nuqtalari bo'lsin. U holda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_f(c_n)$ qator yaqinlashuvchi va

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Delta_f(c_n)\leq f(b)-f(a)$$

tengsizlik o'rinli. Isbotlang.

Isbot. Kamaymaydigan $f:[a,\,b]\to\mathbb{R}$ funksiya va $[a,\,b]$ kesmada saqlanuvchi ixtiyoriy $c_1,c_2,\ldots,c_n$ nuqtalar uchun (shu jumladan uning uzilish nuqtalari uchun ham) $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta_f(c_i)\leq f(b)-f(a)$ tengsizligi 2-misolda ((9.8) ga qarang) ko'rsatildi. Bu esa musbat hadli $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_f(c_n)$ qatorning qismiy yigindilari ketma-ketligi S_n ning yuqoridan chegaralanganligini bildiradi. Demak, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_f(c_n)$ qator yaqinlashuvchi. (9.8) tengsizlikda $n\to\infty$ da limitga o'tib

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Delta_f(c_n)\leq f(b)-f(a)$$

tengsizlikni olamiz. □

9.5. $f : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ kamaymaydigan funksiya, $c_1, c_2, \ldots$ lar uning uzilish nuqtalari bo‘lsin.

$$f_d(x) = \sum_{c_i \le x} \Delta_f(c_i), \qquad x \in [a,\, b] \tag{9.9}$$

funksiya, f *ning sakrashlari funksiyasi* deyiladi. $f_d : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ o‘ngdan uzluksiz kamaymaydigan funksiya. Isbotlang.

Isbot. Kamaymaydigan $f : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ funksiyaning uzilish nuqtalari $c_1, c_2, \ldots$ larni o‘sib borish tartibida joylashtirish mumkin bo‘lgan hol bilan cheklanamiz, ya’ni $c_1 < c_2 < \cdots < c_n < \cdots$ bo‘lsin. (9.9) tenglik bilan aniqlangan

$$f_d(x) = \sum_{c_i \le x} \Delta_f(c_i), \qquad x \in [a,\, b]$$

ni $[a,\, b]$ kesmada kamaymaydigan funksiya ekanligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik, $x_1 < x_2 \in [a,\ b]$ kesmaning ixtiyoriy ikki nuqtasi bo‘lsin. U holda kamaymaydigan f funksiya va istalgan $c \in [a,\, b]$ uchun $\Delta_f(c) \ge 0$ ekanligidan

$$f_d(x_1) = \sum_{c_i \le x_1} \Delta_f(c_i) \le \sum_{c_i \le x_1} \Delta_f(c_i) + \sum_{x_1 < c_j \le x_2} \Delta_f(c_j) = f_d(x_2)$$

ni olamiz. Bu esa $f : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ ning kamaymaydigan funksiya ekanligini bildiradi. Shuni ta’kidlaymizki f va f_d funksiyalarning uzilish nuqtalari bir xil bo‘lib, ular $c_1, c_2, \ldots$ lardan iborat. Xuddi shunday f va f_d funksiyalarning c_i uzilish nuqtasidagi sakrashlari teng, ya’ni $\Delta_f(c_i) = \Delta_{f_d}(c_i)$. Har bir $(c_i,\, c_{i+1})$ intervalda f_d funksiya o‘zgarmasdir. $\square$

9.6. $f(x) = x + 2[x], \quad x \in [0,\, 2]$ funksiyani $[0,\, 2]$ kesmada kamaymaydigan ekanligini ko‘rsatib, uning sakrashlari funksiyasi va uzluksiz qismini toping.

Yechish. Ma'lumki, x ning butun qismi – $[x]$ o'ngdan uzluksiz va kamaymaydigan funksiyadir, $g(x) = x$ esa uzluksiz va o'suvchi funksiyadir. Demak, ularning yig'indisi bo'lgan f funksiya o'ngdan uzluksiz kamaymaydigan funksiya bo'ladi. Uning uzilish nuqtalari $x_1 = 1$ va $x_2 = 2$ lar bo'lib, bu nuqtalardagi sakrashlari $\Delta_f(x_1) = \Delta_f(x_2) = 2$. Bulardan $f_d(x) = 2[x]$ va $f_c(x) = x$ ekanligini olamiz. □

O'zgarishi chegaralangan funksiyalar. Ma'lumki, Lebegning aniqmas integrali (9.2) ikkita monoton funksiyaning ayirmasi shaklida tasvirlanadi. Ikki monoton funksiya ayirmasi shaklida tasvirlanuvchi funksiyalar sinfi hozir biz ta'rifini keltirmoqchi bo'lgan *o'zgarishi chegaralangan* funksiyalar sinfi bilan ustma-ust tushadi.

9.3-ta'rif. *Bizga* $[a,\ b]$ *kesmada aniqlangan* f *funksiya berilgan bo'lsin. Agar* $[a,\ b]$ *kesmani*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

nuqtalar bilan ixtiyoriy n *qismga bo'lganimizda* $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ *nuqtalarni tanlab olishga bog'liq bo'lmagan va ushbu*

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq C \tag{9.10}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi o'zgarmas C *son mavjud bo'lsa, u holda* f *funksiya* $[a,\ b]$ *kesmada o'zgarishi chegaralangan deyiladi.*

9.4-ta'rif. *Bizga* $[a,\ b]$ *kesmada o'zgarishi chegaralangan* f *funksiya berilgan bo'lsin.* (9.10) *yig'indilarning barcha chekli bo'linishlar bo'yicha olingan aniq yuqori chegarasi* f *funksiyaning* $[a,\ b]$ *kesmadagi to'la o'zgarishi (to'la variatsiyasi) deyiladi va* $V_a^b[f]$ *bilan belgilanadi, ya'ni*

$$V_a^b[f] = \sup_{\{x_i\}} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|\ . \tag{9.11}$$

9.7. Har qanday kamaymaydigan $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ funksiya $[a,\ b]$ kesmada o‘zgarishi chegaralangan va uning to‘la o‘zgarishi $f(b) - f(a)$ ga teng. Isbotlang.

Isbot. $[a,\ b]$ kesmani $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ nuqtalar yordamida

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

ixtiyoriy n qismga bo‘lamiz va bu bo‘linishga mos

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \tag{9.12}$$

yig‘indini qaraymiz. f kamaymaydigan funksiya bo‘lgani uchun $|f(x_k) - f(x_{k-1})| = f(x_k) - f(x_{k-1})$ tenglik o‘rinli. Bu tenglikdan (9.12) yig‘indining qiymati $f(b) - f(a)$ ga teng ekanligi kelib chiqadi. Demak, monoton kamaymaydigan funksiyalar uchun (9.12) yig‘indining qiymati $[a,\ b]$ kesmaning bo‘linishiga bog‘liq emas va u $f(b) - f(a)$ ga teng. Shunday ekan, $V_a^b[f] = f(b) - f(a)$ tenglik o‘rinli. □

9.8. Agar $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ funksiya $[a,\ b)$ yarim intervalda monoton bo‘lsa, u holda uning o‘zgarishi chegaralangan va

$$V_a^b[f] = |\, f(b-0) - f(a)| + |\, f(b) - f(b-0)| \tag{9.13}$$

tenglik o‘rinli. Isbotlang.

Isbot. $[a,\ b]$ kesmani $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ nuqtalar yordamida ixtiyoriy bo‘linishini qaraymiz. Funksiyaning $[a,\ b)$ yarim intervalda monoton ekanligini hisobga olsak, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(b) - f(x_{n-1})| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| + |f(b) - f(x_{n-1})| =$$

$$= |f(x_{n-1}) - f(a)| + |f(b) - f(x_{n-1})|. \tag{9.14}$$

Endi $\psi(x) = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)|,\ x \in [a,\ b)$ ning kamaymaydigan funksiya ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun $[a,\ b)$ yarim intervalda yotuvchi ixtiyoriy $x_1 < x_2$ nuqtalar uchun $\psi(x_2) - \psi(x_1) \geq 0$ ekanligini ko‘rsatish kifoya.

$$\psi(x_2) = |f(x_2) - f(a)| + |f(b) - f(x_2)| = |f(x_2) - f(x_1) + f(x_1) - f(a)| +$$

$$+|f(b) - f(x_1) - (f(x_2) - f(x_1))| = |f(x_2) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(a)| +$$

$$+|f(b) - f(x_1) - (f(x_2) - f(x_1))|. \tag{9.15}$$

(9.15) dagi oxirgi tenglik f ning $[a,\ b)$ yarim intervalda monoton (ya’ni $f(x_2) - f(x_1)$ bilan $f(x_1) - f(a)$ ning ishorasi bir xil) ekanligidan kelib chiqadi. Ixtiyoriy c va d sonlar uchun $|c - d| \geq |c| - |d|$ ekanligidan foydalansak,

$$\psi(x_2) - \psi(x_1) =$$

$$= |f(b) - f(x_1) - (f(x_2) - f(x_1))| + |f(x_2) - f(x_1)| - |f(b) - f(x_1)|$$

ayirmaning manfiymasligiga kelamiz. Bu esa ψ ning $[a,\ b)$ da kamaymaydigan funksiya ekanligini isbotlaydi. (9.14) tenglikdan

$$\sup_{\{x_j\}} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sup_{a < x_{n-1} < b} \psi(x_{n-1}) = \psi(b - 0)$$

tenglik kelib chiqadi. Funksiya to‘la o‘zgarishining ta’rifiga ko‘ra ushbuga kelamiz:

$$V_a^b[f] = \psi(b - 0) = |f(b - 0) - f(a)| + |f(b) - f(b - 0)|. \qquad \square$$

9.9. $f(x) = \sin x$ funksiyani $[0,\ \pi]$ kesmada o‘zgarishi chegaralangan ekanligini ta’rif yordamida ko‘rsating.

Yechish. $[0,\ \pi]$ kesmani $x_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ nuqtalar yordamida ixtiyoriy n bo'lakka bo'lamiz va bu bo'linishga mos

$$\sum_{k=1}^{n}|f\,(x_k)-f\,(x_{k-1})\,|\;=\sum_{k=1}^{n}|\sin x_k-\sin x_{k-1}| \tag{9.16}$$

yig'indini baholaymiz. Agar $\sin x-\sin y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$ va $|\sin x|\leq x,\quad x\geq 0$ munosabatlardan foydalansak, (9.16) ni quyidagicha baholash mumkin:

$$\sum_{k=1}^{n}|f\,(x_k)-f\,(x_{k-1})\,|\;=\sum_{k=1}^{n}|2\cos\frac{x_k+x_{k-1}}{2}\sin\frac{x_k-x_{k-1}}{2}|\;\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{x_k-x_{k-1}}{2}\right)=x_n-x_0=\pi.$$

Demak, $f(x)=\sin x$ funksiya $[0,\ \pi]$ kesmada o'zgarishi chegaralangan. $\square$

Uy vazifalari va mavzuni o'zlashtirish uchun masalalar

9.10-9.13-misollarda berilgan funksiyalarni $[a,\ b]$ kesmada monotonlikka tekshiring. Ulardan qaysilari o'ngdan uzluksiz, qaysilari chapdan uzluksizligini aniqlang. Ularning barcha uzilish nuqtalarini toping, uzilish nuqtalaridagi sakrashlarini hisoblang.

9.10. $f(x)=[x],\quad [-1,\ 3]$.

9.11. $f(x)=\operatorname{sign} x,\quad [-1,\ 5]$.

9.12. $f(x)=\chi_{(0,4]}(x),\quad [-2,\ 4]$.

9.13. $f(x)=2\cdot\operatorname{sign} x+3\cdot\chi_{(-1,0)}(x),\quad [-4,\ 5]$.

9.14. $[a,\ b]$ kesmada aniqlangan har qanday monoton funksiya shu kesmada chegaralangan, o'lchovli hamda Riman va Lebeg ma'nolarida integrallanuvchidir. Isbotlang.

9.15. Kamaymaydigan, oʻngdan uzluksiz $f:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ funksiya uchun

$$f_c(x)=f(x)-f_d(x),\quad x\in[a,\,b]$$

funksiya, f *ning uzluksiz qismi* deyiladi. $f_c:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ ning uzluksiz ekanligini isbotlang. Bu yerda f_d (9.9) tenglik bilan aniqlanadi.

9.16. Kamaymaydigan (oʻsmaydigan) funksiyalar yigʻindisi kamaymaydigan (oʻsmaydigan) funksiyadir. Isbotlang.

9.17-9.20-misollarda keltirilgan funksiyalarning kamaymaydigan ekanligini koʻrsatib, ularning sakrashlari funksiyasi va uzluksiz qismini toping.

9.17. $f(x)=x+\operatorname{sign}x+\chi_{[-1,\,0)}(x),\quad x\in[-2,\,2]\,.$

9.18. $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\in[-10,-2),\\ -7, & x\in[-2,0),\\ x-3, & x\in[0,4].\end{cases}$

9.19. $f(x)=\begin{cases} \left[\dfrac{2x}{\pi}\right]+\sin^3 x, & x\in[-\dfrac{\pi}{2},0)\\ \sin^2 x+\operatorname{sign}x, & x\in[0,-\dfrac{\pi}{2}]\,.\end{cases}$

9.20. $f(x)=2x+[x],\quad x\in[-2,\,4]\,.$

Monoton funksiyalarning quyidagi xossalarini (9.21-9.23) isbotlang.

9.21. Monoton funksiya faqat birinchi tur uzilish nuqtalarga ega.

9.22. Monoton funksiyaning uzilish nuqtalari koʻpi bilan sanoqlidir.

9.23. Oʻngdan uzluksiz boʻlgan har qanday monoton funksiyani yagona usul bilan uzluksiz monoton funksiya va oʻngdan uzluksiz boʻlgan sakrashlar funksiyasi yigʻindisi shaklida tasvirlash mumkin.

9.24. $f(x)=x+[x]$ funksiyani $[-2,\ 1]$ kesmada uzluksiz monoton funksiya va oʻngdan uzluksiz boʻlgan sakrash funksiyasi yigʻindisi shaklida tasvirlang.

9.25. Sakrashlar funksiyasining hosilasi deyarli barcha nuqtalarda nolga teng. Isbotlang.

9.25. Monoton funksiyaning songa ko'paytmasi yana monoton funksiya bo'ladi. Isbotlang.

9.26. Kamaymaydigan funksiyaning musbat songa ko'paytmasi kamaymaydigan funksiya bo'ladi. Isbotlang.

9.27. O'suvchi funksiyaning manfiy songa ko'paytmasi kamayuvchi funksiyadir. Isbotlang.

9.28. Agar $f(x) \geq 0, \quad x \in [a, b]$ integrallanuvchi funksiya bo'lsa,

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

kamaymaydigan funksiya bo'ladi. Isbotlang.

9.29. Ikki monoton funksiyaning yig'indisi monoton funksiya bo'ladimi? $f(x) = x^2, \quad g(x) = 1 - 2x, \quad x \in [0,\ 2]$ funksiyalarni tahlil qiling.

9.30. Ikkita monoton funksiyaning ko'paytmasi monoton funksiya bo'ladimi? $f(x) = x,\ g(x) = x - 2,\ x \in [0,\ 2]$ funksiyalarni tahlil qiling.

9.31. Agar f va g lar $[a,\ b]$ da kamaymaydigan funksiyalar bo'lib, $f(x) \geq 0$ va $g(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,\ b]$ bo'lsa, u holda $\varphi(x) = g(x) \cdot f(x)$ funksiya $[a,\ b]$ da kamaymaydigan funksiya bo'ladi. Isbotlang.

9.32. Agar f funksiya $[a,\ b]$ da o'suvchi funksiya bo'lib, $f(a) = A,\ f(b) = B$ va $g : [A,\ B] \to \mathbb{R}-$ monoton funksiya bo'lsa, u holda $g(f(x))$ funksiya $[a,\ b]$ da monoton bo'ladimi?

9.33. Har qanday o'smaydigan $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ funksiya $[a,\ b]$ kesmada o'zgarishi chegaralangan va uning to'la o'zgarishi $f(a) - f(b)$ ga teng. Isbotlang. Teskari tasdiq to'g'rimi?

9.34. Agar $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ funksiya $(a,\ b]$ da monoton bo‘lsa, u holda uning o‘zgarishi chegaralangan va

$$V_a^b[f] = |\, f(a+0) - f(a)| + |\, f(b) - f(a+0)|$$

tenglik o‘rinli. Isbotlang

9.35. Agar $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ funksiya $(a,\ b)$ intervalda monoton bo‘lsa, u holda uning o‘zgarishi chegaralangan va

$$V_a^b[f] = |\, f(a+0) - f(a)| + |\, f(b-0) - f(a+0)| + |\, f(b) - f(b-0)|$$

tenglik o‘rinli. Isbotlang.

9.36-9.44-misollarda berilgan funksiyaning o‘zgarishi chegaralangan ekanligini ta’rif yordamida ko‘rsating.

9.36. $f(x) = 3x + 1, \quad [0,\ 2]\,.$

9.37. $f(x) = 2x^2 + 5, \quad [-1,\ 3]\,.$

9.39. $f(x) = 2\cos x, \quad [-\pi,\ \pi]\,.$

9.40. $f(x) = tg\dfrac{x}{4}, \quad [-\pi,\ \pi]\,.$

9.41. $f(x) = \ln(1 + x), \quad [0,\ e]\,.$

9.42. $f(x) = 2^x + 5x, \quad [-2,\ 3]\,.$

9.43. $f(x) = x\, e^{x+1} + 5, \quad [-1,\ 1]\,.$

9.44. $f(x) = 3|x - 1| + 4, \quad [0,\ 2]\,.$

9.45-9.53-misollarda keltirilgan tasdiqlarni isbotlang.

9.45. Agar $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ funksiya $[a,\ b]$ kesmada o‘zgarishi chegaralangan bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $k \in \mathbb{R}$ uchun $k + f$ ning ham o‘zgarishi chegaralangan va $V_a^b\,[k +\ f] = V_a^b\,[f]$ tenglik o‘rinli.

9.46. Agar $f:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ funksiya $[a,\ b]$ kesmada oʻzgarishi chegaralangan boʻlsa, u holda ixtiyoriy $k\in\mathbb{R}$ son uchun $k\cdot f$ ning ham oʻzgarishi chegaralangan va quyidagi tenglik oʻrinli

$$V_a^b\,[k\,f]=|k|\,V_a^b\,[f]\,.$$

9.47. Agar $f:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ funksiya $[a,\ b]$ kesmada oʻzgarishi chegaralangan boʻlsa, u holda ixtiyoriy $k,l\in\mathbb{R}$ sonlar uchun $k\cdot f+l$ ning ham oʻzgarishi chegaralangan va quyidagi tenglik oʻrinli

$$V_a^b\,[f]\,[k\cdot f+l]=|k|\,V_a^b\,[f]\,.$$

9.48. $f:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ funksiyaning $[a,\ b]$ kesmadagi toʻla oʻzgarishi nol boʻlishi uchun $f(x)=const$ boʻlishi zarur va yetarli. Isbotlang.

9.49. Ixtiyoriy f va g oʻzgarishi chegaralangan funksiyalar uchun

$$V_a^b\,[f+g]\le V_a^b\,[f]+V_a^b\,[g]$$

tengsizlik oʻrinli.

9.50. Ixtiyoriy f va g oʻzgarishi chegaralangan funksiyalar uchun $\varphi(x)=f(x)\cdot g(x)$ ning ham oʻzgarishi chegaralangan boʻladi va

$$V_a^b\,[f\cdot g]\le\sup_{x\in[a,\,b]}|f(x)|\cdot V_a^b\,[g]+\sup_{x\in[a,\,b]}|g(x)|\cdot V_a^b\,[f]$$

tengsizlik oʻrinli.

9.51. Ixtiyoriy $c\in(a,\,b)$ uchun $V_a^b\,[f]=V_a^c\,[f]+V_c^b\,[f]$ tenglik oʻrinli.

9.52. Agar $f:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ oʻzgarishi chegaralangan funksiya boʻlsa, u holda $v(x)=V_a^x\,[f]-$ kamaymaydigan funksiya boʻladi.

9.53. Agar $f:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ uchun shunday $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ boʻlinish mavjud boʻlib, har bir $[x_k,\ x_{k+1}]$, $k=0,1,\ldots,n-1$, kesmada

f monoton bo‘lsa, u holda f ning $[a,\ b]$ da o‘zgarishi chegaralangan hamda quyidagi tengliklar o‘rinli

$$V_a^x\left[f\right] = \sum_{j=0}^{k-1} \left|f(x_{j+1}) - f(x_j)\right| + \left|f(x) - f(x_k)\right|, \qquad x \in \left[x_k,\, x_{k+1}\right],$$

$$V_a^b[f] = \sum_{j=0}^{n-1} \left|f(x_{j+1}) - f(x_j)\right|. \tag{9.17}$$

9.54. 9.53-misol va (9.17) tenglikdan foydalanib, 9.36-9.44-misollarda keltirilgan funksiyalarning to‘la o‘zgarishini toping.

9.55. Quyidagi funksiyalarning to‘la o‘zgarishini toping.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1, \\ 0, & x = 1, \\ 1, & 1 < x \le 2, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1, \\ 5, & x = 1, \\ x+3, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

9.56. $[0,\ 2]$ kesmada f funksiyaning to‘la o‘zgarishini toping.

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 1, \\ a, & x = 1, \\ x^2, & x > 1. \end{cases}$$

Parametr $a \in \mathbb{R}$ ning qanday qiymatida f funksiyaning to‘la o‘zgarishi minimal bo‘ladi? Minimallik shartini qanoatlantiruvchi a yagonami?

9.57. Agar o‘zgarishi chegaralangan f funksiya $x^* \in [a,\ b]$ nuqtada o‘ngdan uzluksiz bo‘lsa, u holda $v(x) = V_a^x\left[f\right]$ ham x^* nuqtada o‘ngdan uzluksiz bo‘ladi. Isbotlang.

9.58. Agar $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ o‘zgarishi chegaralangan funksiya bo‘lsa, u holda $\varphi\left(x\right) = V_a^x[f] - f\left(x\right)$ kamaymaydigan funksiya bo‘ladi. Isbotlang.

9.59. Har qanday o‘zgarishi chegaralangan funksiyani ikkita kamaymaydigan funksiyalar ayirmasi shaklida tasvirlash mumkin. Isbotlang.

9.60. $f(x)=1-\sin x,\quad g(x)=1+|\cos x|,\ \phi(x)=(x-2)^2,\ \psi(x)=\sin^2 x$ funksiyalarni $[0,\ \pi]$ kesmada ikkita kamaymaydigan funksiyalar ayirmasi shaklida tasvirlang.

9.61. 9.36-9.44-misollarda keltirilgan funksiyalar uchun $v(x)=V_a^x[f]$ va $\varphi(x)=v(x)-f(x)$ funksiyalarni toping.

9.62. Quyida berilgan f funksiyaning $x=0$ nuqtadagi hosila sonlarini toping:

$$f(x)=\begin{cases}\alpha\, x\,\sin^2\dfrac{1}{x}+\beta\, x\,\cos^2\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ 0, & x=0\\ a\,x\,\sin^2\dfrac{1}{x}+b\,x\,\cos^2\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases},\quad 0<\alpha<\beta,\ 0<a<b.$$

9.63. Agar f funksiya $[a,\ b]$ kesmada tekis uzluksiz boʻlsa, uning oʻzgarishi chegaralangan boʻladimi?

9.64. Agar f funksiya $[a,\ b]$ kesmada chegaralangan hosilaga ega boʻlsa, u holda f ning $[a,\ b]$ kesmada oʻzgarishi chegaralangan boʻlishini isbotlang.

9.65. $[0,\ 1]$ kesmada uzluksiz

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ x\,\sin\dfrac{\pi}{x}, & x\in(0,\ 1],\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ x\,\mathrm{sign}\left(\cos\dfrac{\pi}{x}\right), & x\in(0,\ 1],\end{cases}$$

funksiyalarning toʻla oʻzgarishi $V_0^1[f]=V_0^1[g]=\infty$ ekanligini isbotlang.

9.66. Agar f funksiya $[a,\ b]$ da Lipshits shartini qanoatlantirsa, u holda f ning $[a,\ b]$ da oʻzgarishi chegaralangan boʻlishini isbotlang.

9.67. $[a,\ b]$ kesmada oʻzgarishi chegaralanmagan va $\alpha\in(0,\ 1)$ tartibli Gyolder shartini qanoatlantiruvchi funksiyaga misol keltiring.

9.68. α va β musbat sonlar, $f(x) = x^{\alpha} \cdot \sin \dfrac{1}{x^{\beta}}$, $f(0) = 0$ bo‘lsin.

$$V_0^1[f] = \begin{cases} chekli, & agar \quad \alpha > \beta \\ cheksiz, & agar \quad \alpha \leq \beta \end{cases}$$

munosabatni isbotlang.

9.69. $A \subset [a,\ b]$ to‘plamning xarakteristik funksiyasi $\chi_A(x)$, A ga qanday shartlar qo‘yilganda $[a,\ b]$ da o‘zgarishi chegaralangan funksiya bo‘ladi? Qanday shartda $V_a^b[\chi_A]$ minimal bo‘ladi?

9.70. Agar $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ o‘zgarishi chegaralangan, $g : [\alpha,\ \beta] \to [a,\ b]$ uzluksiz, o‘suvchi biyektiv akslantirish bo‘lsa, u holda $\psi(x) = f(g(x))$, $x \in [\alpha,\ \beta]$ o‘zgarishi chegaralangan funksiya bo‘ladi va $V_a^b[f] = V_{\alpha}^{\beta}[\psi]$ tenglik o‘rinli. Isbotlang.

$y_1 = \sin x$ va $y_2 = \cos x$ funksiyalarning $\left[x,\ x + \dfrac{\pi}{2}\right]$ kesmadagi to‘la o‘zgarishini mos ravishda $v_s(x) = V_x^{x+\frac{\pi}{2}}[\sin]$ va $v_c(x) = V_x^{x+\frac{\pi}{2}}[\cos]$ orqali belgilaymiz. Bu funksiyalar uchun quyidagilarni (9.71-9.74) isbotlang.

9.71. $v_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ va $v_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lar uzluksiz, chegaralangan va 2π davrli funksiya.

9.72. Ixtiyoriy $a < b$ lar uchun $V_a^b[v_s + v_c] = 0$ o‘rinli.

9.73. Shunday $a \in (0,\ \pi/2)$ sonni topingki, $[0,\ a]$ va $[a,\ \pi/2]$ kesmalarda v_s monoton funksiya bo‘lsin.

9.74. $V_0^{\pi/2}[v_s] + V_0^{\pi/2}[v_c]$ ni hisoblang.

9.75. $v_s(x) = V_x^{x+\pi}[\sin]$ funksiyaning o‘zgarmas ekanligini isbotlang.

9.76. Agar $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ integrallanuvchi funksiya bo‘lsa, u holda

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

o‘zgarishi chegaralangan funksiya bo‘ladi va

$$V_a^b[F] = \int_a^b |f(t)|\, dt$$

tenglik o‘rinli. Isbotlang.

9.77. Agar $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ o‘zgarishi chegaralangan funksiya bo‘lsa, u holda

$$g(a) = 0, \quad g(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a,\ b]$$

o‘zgarishi chegaralangan funksiya bo‘ladi. Isbotlang.

9.78. $[a,\ b]$ da aniqlangan har qanday o‘zgarishi chegaralangan funksiya o‘lchovli bo‘lishini isbotlang.

9.79. Agar $\{f_n\}$ lar $[a,\ b]$ da o‘zgarishi chegaralangan funksiyalar bo‘lib, biror $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty} V_a^b[f - f_n] = 0$ bo‘lsa, u holda f ham $[a,\ b]$ da o‘zgarishi chegaralangan funksiya bo‘ladi. Isbotlang.

10-§. Absolyut uzluksiz funksiyalar. Lebeg-Stiltes integrali

Lebegning aniqmas integrali (9.2) quyida biz ta’rifini keltirmoqchi bo‘lgan *absolyut uzluksiz* funksiyalar sinfiga qarashli bo‘ladi.

10.1-ta’rif. *Bizga $[a,\ b]$ kesmada aniqlangan f funksiya berilgan bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ mavjud bo‘lib, soni chekli va har ikkisi o‘zaro kesishmaydigan har qanday $\{(a_k,\ b_k)\}_{k=1}^n$ intervallar sistemasi uchun*

$$\bigcup_{k=1}^n (a_k,\ b_k) \subset [a,\ b], \quad \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$$

shartlar bajarilganda

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon \tag{10.1}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda f funksiya $[a,\ b]$ kesmada absolyut uzluksiz funksiya deyiladi.

10.2-ta'rif. *Agar uzluksiz va o'zgarmasdan farqli o'zgarishi chegaralangan f funksiyaning hosilasi deyarli barcha x larda nolga teng bo'lsa, u singulyar funksiya deyiladi.*

$[a,\ b]$ kesmada kamaymaydigan va o'ngdan uzluksiz $F:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ funksiya vositasida qurilgan o'lchovlar (5- § ga qarang) Lebeg-Stiltes o'lchovlari deyiladi va ular μ_F bilan belgilanadi.

10.3-ta'rif. *Agar Lebeg o'chovi nolga teng bo'lgan ixtiyoriy A to'plam uchun $\mu_F(A)=0$ bo'lsa, u holda μ_F (Lebeg o'choviga nisbatan) absolyut uzluksiz o'lchov deyiladi.*

Shuni ta'kidlaymizki, agar F funksiya absolyut uzluksiz bo'lsa, u yordamida hosil qilingan Lebeg-Stiltes o'lchovi μ_F ham absolyut uzluksiz o'lchov bo'ladi.

10.4-ta'rif. *Agar μ_F o'lchov uchun chekli yoki sanoqli A to'plam mavjud bo'lib, A bilan kesishmaydigan ixtiyoriy B to'plam uchun $\mu_F(B)=0$ bo'lsa, u holda μ_F diskret o'lchov deyiladi.*

Agar F sakrashlar funksiya (zinapoyasimon funksiya) bo'lsa, u yordamida hosil qilingan Lebeg-Stiltes o'lchovi μ_F diskret o'lchov bo'ladi.

10.5-ta'rif. *Agar μ_F o'lchovda istalgan bir nuqtali to'plam nol o'lchovga ega bo'lsa va Lebeg o'lchovi nolga teng bo'lgan biror A to'plam mavjud bo'lib, $\mu_F(\mathbb{R}\backslash A)=0$ bo'lsa, u holda μ_F singulyar o'lchov deyiladi.*

Singulyar funksiyalar yordamida qurilgan Lebeg-Stiltes o'lchovi μ_F singulyar o'lchov bo'ladi.

Hozir biz chekli o'lchovli A to'plamda aniqlangan va chegaralangan funksiyalar uchun Lebeg-Stiltes inregrali ta'rifini keltiramiz. Cheksiz o'lchovli A to'plamda aniqlangan funksiyalar va chegaralanmagan funksiya uchun Lebeg-Stiltes inregrali ta'rifi shunga o'xshash ta'riflanadi.

Chekli o'lchovli $A\subset\mathbb{R}$ to'plamda aniqlangan kamaymaydigan $F:A\to\mathbb{R}$

va chegaralangan, o'lchovli $f : A \to \mathbb{R}$ funksiyalarni qaraymiz. Bu holda shunday m va M sonlari mavjudki, barcha $x \in A$ larda

$$m \le f(x) \le M$$

tengsizlik bajariladi. $[m,\, M]$ kesmani $m = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = M$ nuqtalar yordamida n bo'lakka bo'lamiz. Bu bo'linishni Π bilan belgilaymiz. Har bir yarim interval $[y_{k-1},\, y_k)$, $k = 1, \ldots, n-1$, yordamida $A_k = \{x \in A : y_{k-1} \le f(x) < y_k\}$ va $A_n = \{x \in A : y_{n-1} \le f(x) \le y_n\}$ to'plamlarni aniqlaymiz. Bu Π bo'linishga mos Lebeg-Stiltesning quyi va yuqori yig'indilarini aniqlaymiz:

$$s_\Pi(f) = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\mu_F(A_k), \quad S_\Pi(f) = \sum_{k=1}^{n} y_k \mu_F(A_k).$$

Quyi yig'indi $s_\Pi(f)$ yuqoridan, yuqori yig'indi $S_\Pi(f)$ esa quyidan chegaralangan. Shuning uchun quyidagilar mavjud va chekli:

$$L_*(f) = \sup s_\Pi(f), \quad L^*(f) = \inf S_\Pi(f). \tag{10.2}$$

(10.2) da aniq quyi va aniq yuqori chegaralar $[m,\, M]$ kesmaning barcha chekli bo'linishlari bo'yicha olinadi.

10.6-ta'rif. *Agar $L_*(f) = L_*(f)$ bo'lsa, chegaralangan f funksiyani A to'plamda Lebeg-Stiltes ma'nosida integrallanuvchi deymiz. $L_*(f)$ va $L^*(f)$ larning bu umumiy qiymati f funksiyadan A to'plam bo'yicha olingan Lebeg-Stiltes integrali deyiladi, ya'ni*

$$\int_A f(x)\, dF(x) = L_*(f) = L^*(f).$$

Endi $g : A \to \mathbb{R}$ ixtiyoriy o'zgarishi chegaralangan funksiya bo'lsin. Uni ikkita kamaymaydigan $F : A \to \mathbb{R}$ va $\Phi : A \to \mathbb{R}$ funksiyalarning ayirmasi shaklida tasvirlaymiz, ya'ni $g(x) = F(x) - \Phi(x)$.

10.7-ta'rif. *$f : A \to \mathbb{R}$ funksiyadan $g : A \to \mathbb{R}$ o'zgarishi chegaralangan funksiya bo'yicha olingan Lebeg-Stiltes integrali deganda quyidagi integral tushuniladi:*

$$\int_A f(x)dg(x) := \int_A f(x)dF(x) - \int_A f(x)d\Phi(x).$$

10.1. $f(x) = x^2 + 3$, $[0,\ 1]$ funksiyani absolyut uzluksiz ekanligini ta'rif yordamida ko'rsating.

Yechish. $[0,\ 1]$ kesmada har ikkisi o'zaro kesishmaydigan va uzunliklari yig'indisi $\delta > 0$ dan oshmaydigan $\{(a_k,\ b_k)\}_{k=1}^n$ intervallar sistemasini olamiz va unga mos (10.1) yig'indini qaraymiz:

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| = \sum_{k=1}^n |b_k^2 + 3 - a_k^2 - 3| = \sum_{k=1}^n (b_k - a_k)(b_k + a_k) < 2\delta.$$

Bu yerda biz $b_k + a_k \leq 2$ tengsizlikdan foydalandik, chunki $b_k,\ a_k \in [0,\ 1]$. Endi ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $\delta = \varepsilon/2$ deb olamiz. U holda (10.1) tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, f absolyut uzluksiz funksiya ekan. $\square$

10.2. $f(x) = 2x^2 + 5$, $x \in [-1,\ 3]$ funksiyani ikkita kamaymaydigan absolyut uzluksiz funksiyalar ayirmasi shaklida tasvirlang.

Yechish. $f(x) = v(x) - \varphi(x)$, $v(x) = \vee_a^x[f]$, $\varphi(x) = v(x) - f(x)$.

Biz $f(x) = 2x^2 + 5$, $x \in [-1,\ 3]$ funksiyani ikkita kamaymaydigan absolyut uzluksiz funksiyalar ayirmasi shaklida tasvirlaymiz. Ma'lumki, har qanday absolyut uzluksiz funksiya o'zgarishi chegaralangan funksiya bo'ladi. O'zgarishi chegaralangan funksiya esa kamaymaydigan funksiyalar ayirmasi shaklida tasvirlanadi. Demak, kamaymaydigan $v(x) = V_{-1}^x[f]$ va $\varphi(x) = v(x) - f(x)$ funksiyalarni topamiz. f ning absolyut uzluksizligidan v va φ funksiyalarning absolyut uzluksiz ekanligi kelib chiqadi va $f(x) = v(x) -\ \varphi(x)$ tenglik o‘rinli. Berilgan funksiya $[-1,\ 0]$ kesmada kamayuvchi va $[0,\ 3]$ da o‘suvchi, shuning uchun 9.35 va 9.34-misollarga ko‘ra quyidagilarni olamiz:

$$v(x)=\begin{cases} 2-2x^2, & x\in[-1,\ 0] \\ 2+2x^2, & x\in(0,\ 3], \end{cases} \qquad \varphi(x)=\begin{cases} -3-4x^2, & x\in[-1,\ 0] \\ -3, & x\in(0,\ 3]. \end{cases} \qquad \square$$

10.3. Kantorning zinapoya funksiyasi $\mathfrak{K}$ ni (5.95-misolga qarang) $[0,\ 1]$ kesmada absolyut uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Kantor to‘plami K ning Lebeg o‘lchovi nolga teng. Lebeg o‘lchovi ta’rifiga ko‘ra, ixtiyoriy $\delta>0$ uchun shunday, o‘zaro kesishmaydigan $\{(a_k,\ b_k)\}_{k=1}^n$ invervallar sistemasi mavjudki, quyidagilar bajariladi:

$$K\subset\bigcup_{k=1}^n(a_k,\ b_k), \quad \sum_{k=1}^n(b_k-a_k)<\delta\,. \tag{10.3}$$

Ikkinchi tomondan, $\mu_{\mathfrak{K}}([0,\ 1]\backslash K)=0$ va $\mu_{\mathfrak{K}}([0,\ 1])=\mathfrak{K}(1)-\mathfrak{K}(0)=1$.

Bu yerda $\mu_{\mathfrak{K}}$ Kantorning zinapoya funksiyasi yordamida qurilgan Lebeg-Stiltes o‘lchovi. Bu tenglikdan kelib chiqadiki,

$$\mu_{\mathfrak{K}}(K)=1.$$

Endi o‘lchovning yarim additivlik xossasidan hamda (10.3) dan foydalansak, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\sum_{k=1}^n\left(\mathfrak{K}(b_k)-\mathfrak{K}(a_k)\right)=\mu_{\mathfrak{K}}\left(\bigcup_{k=1}^n(a_k,\ b_k)\right)\geq\mu_{\mathfrak{K}}(K)=1.$$

Demak, Kantorning zinapoya funksiyasi $-\ \mathfrak{K}$ absolyut uzluksiz funksiya ta’rifini qanoatlantirmaydi, ya’ni u absolyut uzluksiz emas. $\square$

10.4. $\int_{[0,\infty)}2^{-x}dF(x)$ Lebeg-Stiltes integralini hisoblang. Bu yerda $A=[0,\ \infty)-$ yarim o‘q, $F(x)=[x]$ funksiya esa x ning butun qismi.

Yechish. Ma'lumki, $F(x) = [x]$ o'ngdan uzluksiz kamaymaydigan sakrashlar funksiyasi bo'lib, uning $A = [0,\ \infty)$ dagi uzilish nuqtalari barcha natural sonlardir. Shuning uchun 10.43-misolga ko'ra, bu integral ((10.5) ga qarang)

$$\int_{[0,\infty)} 2^{-x} dF(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(F(n) - F(n-0)\right)$$

qator yig'indisiga teng. Agar barcha $n \in \mathbb{N}$ lar uchun $F(n) - F(n-0) = 1$ tenglikni e'tiborga olsak, so'nggi qator yig'indisini hisoblash mumkin. Bu qator birinchi hadi $b_1 = 1/2$, maxraji $q = \dfrac{1}{2}$ bo'lgan cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yig'indisini ifodalaydi. Shuning uchun,

$$\int_{[0,\infty)} \frac{1}{2^x}\, dF(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1. \qquad \square$$

10.5. Quyidagi Lebeg-Stiltes integralini hisoblang:

$$\int_{[0,3]} (x+1) dF(x).$$

Bu yerda $A = [0,\ 3]$ kesma, $F(x) = x^2 + 3$.

Yechish. Ma'lumki, $F(x) = x^2 + 3$ absolyut uzluksiz funksiya, shuning uchun (10.44-misolga qarang) (10.6) ga ko'ra, quyidagini olamiz:

$$\int_{[0,3]} (x+1)\, dF(x) = \int_{[0,3]} (x+1) \cdot 2x\, dx$$

So'nggi integralning qiymati 27 ga teng. Shunday qilib,

$$\int_{[0,3]} (x+1)\, dF(x) = 27. \qquad \square$$

10.6. $\int_{[0,\,1]} x\, d\,\mathfrak{K}(x)$ Lebeg-Stiltes integralini hisoblang.

Yechish. I usul. Bo'laklab integrallash usulidan foydalanamiz.

$$\int_{[0,\,1]} x d\mathfrak{K}(x) = x\mathfrak{K}(x)\big|_0^1 - \int_{[0,\,1]} \mathfrak{K}(x)\, dx = 1 - 0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Bu yerda biz $\int_{[0,\,1]} \mathfrak{K}(x)\, dx = 0,5$, ya'ni 7.67 f)-misol natijasidan foydalandik.

II usul. Shuni ta'kidlaymizki, bu integralni odatdagi Lebeg integrali yoki biror qator yig'indisi ko'rinishida tasvirlab bo'lmaydi. Shuning uchun integral ta'rifi va xossalaridan foydalanamiz. Malumki,

$$\int\limits_{[0,1]} xd\mathfrak{K}(x) = \int\limits_{[0,1/3]} xd\mathfrak{K}(x) + \int\limits_{[1/3,2/3]} xd\mathfrak{K}(x) + \int\limits_{[2/3,1]} xd\mathfrak{K}(x) \tag{10.4}$$

tenglik o'rinli. Agar biz $\mathfrak{K}(x) = 1/2, \ x \in [1/3, \ 2/3]$ ning $[1/3, \ 2/3]$ da o'zgarmas ekanligini hisobga olsak, (10.4) tenglikda o'rtadagi $[1/3, \ 2/3]$ to'plam bo'yicha olingan integral (10.45-misolga qarang) nolga teng bo'ladi, bundan

$$\int\limits_{[0,1]} xd\mathfrak{K}(x) = \int\limits_{[0,1/3]} xd\mathfrak{K}(x) + \int\limits_{[2/3,1]} xd\mathfrak{K}(x).$$

Birinchi integralda $3x = t$, ikkinchi integralda $x = \dfrac{2}{3} + \dfrac{t}{3}$ deb almashtirish olamiz, natijada

$$\int\limits_{[0,1]} xd\mathfrak{K}(x) = \frac{1}{3}\int\limits_{[0,1]} td\mathfrak{K}\left(\frac{t}{3}\right) + \frac{1}{3}\int\limits_{[0,1]} (2+t)d\mathfrak{K}\left(\frac{2}{3}+\frac{t}{3}\right)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Endi Kantor funksiyasining 10.34-misolda keltirilgan xossalaridan foydalansak,

$$\int\limits_{[0,1]} xd\mathfrak{K}(x) = \frac{1}{6}\int\limits_{[0,1]} td\mathfrak{K}(t) + \frac{1}{6}\int\limits_{[0,1]} (2+t)d\mathfrak{K}(t) = \frac{1}{3}\int\limits_{[0,1]} td\mathfrak{K}(t) + \frac{1}{3}$$

tenglikni olamiz. Bu yerdan

$$\int\limits_{[0,1]} xd\mathfrak{K}(x) = 0,5$$

ekanligini hosil qilamiz. □

10.7. $f(x) = \mathfrak{K}(x)$ va $F(x) = \mathfrak{K}(x)$ funksiyalar uchun Lebeg-Stiltes integrali

$$\int\limits_{[a,\, b]} f(x)\, dF(x)$$

ni hisoblang.

Yechish. 10.47-misolda keltirilgan bo‘laklab integrallash formulasidan ((10.7) ga qarang) foydalanamiz:

$$\int\limits_{[0,1]} \mathfrak{K}(x)\, d\mathfrak{K}(x) = \mathfrak{K}(1)\cdot\mathfrak{K}(1) - \mathfrak{K}(0)\cdot\mathfrak{K}(0) - \int\limits_{[0,1]} \mathfrak{K}(x)\, d\mathfrak{K}(x) = 1 - \int\limits_{[0,1]} \mathfrak{K}(x)\, d\mathfrak{K}(x).$$

Bu yerdan $\int\limits_{[0,1]} \mathfrak{K}(x)\, d\mathfrak{K}(x) = 0,5$ ekanligini olamiz. □

Uy vazifalari va mavzuni o‘zlashtirish uchun masalalar

10.8-10.16-misollarda berilgan funksiyalarning absolyut uzluksiz ekanligini ta’rifdan foydalanib ko‘rsating.

10.8. $f(x) = 3x + 1, \quad [0,\ 2].$

10.9. $f(x) = 2x^2 + 5, \quad [-1,\ 3].$

10.10. $f(x) = \sin x, \quad [0,\ \pi].$

10.11. $f(x) = 2|\cos x|, \quad [-\pi,\ \pi].$

10.12. $f(x) = tg\dfrac{x}{4}, \quad [-\pi,\ \pi].$

10.13. $f(x) = x\ln(1+x), \quad [0,\ e].$

10.14. $f(x) = 2^x + 5x, \quad [-1,\ 3].$

10.15. $f(x) = \sqrt{|x|}, \quad [-1,\ 1].$

10.16. $f(x) = 3|x-1| + 4, \quad [0,\ 2].$

10.17. Absolyut uzluksiz funksiyalar yig‘indisi, ayirmasi yana absolyut uzluksiz funksiyadir. Isbotlang.

10.18. Absolyut uzluksiz funksiyaning songa ko‘paytmasi yana absolyut uzluksiz funksiyadir. Isbotlang.

10.19. Agar f va g lar $[a,\ b]$ da absolyut uzluksiz funksiyalar bo'lsa, u holda $f \cdot g$ va $f : g$ $(g(x) \neq 0,\ \forall x \in [a,\ b])$ funksiyalar ham $[a,\ b]$ da absolyut uzluksiz funksiyalar bo'ladi. Isbotlang.

10.20. Agar f funksiya $[a,\ b]$ kesmada absolyut uzluksiz bo'lsa, u $[a,\ b]$ da o'zgarishi chegaralangan ham bo'ladi. Isbotlang.

10.21. Har qanday absolyut uzluksiz funksiyani ikkita monoton kamaymaydigan absolyut uzluksiz funksiyalar ayirmasi shaklida tasvirlash mumkin. Isbotlang.

10.22. 10.8-10.16-misollarda keltirilgan funksiyalarni ikkita ($v(x) = \vee_a^x[f]$, $\varphi(x) = v(x) - f(x)$) kamaymaydigan absolyut uzluksiz funksiyalar ayirmasi shaklida tasvirlang.

10.23. Agar $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ integrallanuvchi funksiya bo'lsa, u holda

$$F\,(x) = \int_{[a,x]} f\,(t)\,d\mu$$

funksiya $[a,\ b]$ da absolyut uzluksiz bo'ladi. Isbotlang.

10.24. $[a,\ b]$ kesmada absolyut uzluksiz F funksiyaning hosilasi $F'\,(x) = f\,(x)$ integrallanuvchi va deyarli barcha $x \in [a,\ b]$ lar uchun

$$F\,(x) - F(a) = \int_{[a,x]} f\,(t)\,d\mu$$

tenglik o'rinli. Isbotlang.

10.25. Agar $f-$ kamaymaydigan absolyut uzluksiz funksiya bo'lib, $f'\,(x) = 0$ tenglik deyarli barcha x lar uchun o'rinli bo'lsa, u holda f o'zgarmas funksiya bo'ladi. Isbotlang.

10.26. Har qanday o'zgarishi chegaralangan f funksiya uchta funksiya yig'indisi ko'rinishida tasvirlanadi,

$$f(x) = f_d(x) + f_s(x) + f_{ac}(x).$$

Bu yerda f_d sakrashlar funksiyasi, f_s singulyar funksiya, f_{ac} absolyut uzluksiz funksiya. Isbot qiling.

10.27. Agar f funksiya $[a,\ b]$ kesmada Lipshits shartini qanoatlantirsa, f ning $[a,\ b]$ kesmada absolyut uzluksiz bo‘lishini isbotlang.

10.28. Agar f funksiya $[a,\ b]$ kesmada absolyut uzluksiz, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiya Lipshits shartini qanoatlantirsa, u holda $\varphi(f(x)),\ x \in [a,\ b]$ funksiya $[a,\ b]$ da absolyut uzluksiz bo‘ladi. Isbotlang.

10.29. Agar f funksiya $[a,\ b]$ kesmada absolyut uzluksiz, $A \subset [a,\ b]$ - nol o‘lchovli to‘plam bo‘lsa, u holda $\mu(f(A)) = 0$ bo‘lishini isbotlang.

10.30. Shunday uzluksiz, syuryektiv $f : [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ akslantirishga va $A \subset [0,\ 1]$ to‘plamga misol keltiringki, quyidagilar bajarilsin:

1) $\mu(A) = 1,$ 2) $\mu(f(A)) = 0.$

10.31. Shunday uzluksiz $f : [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ funksiyaga va $A \subset [0,\ 1]$ to‘plamga misol keltiringki, quyidagilar bajarilsin:

1) $\mu(A) = 0,$ 2) $\mu(f(A)) = 1.$

10.32. $[a,\ b]$ kesmada uzluksiz hosilaga ega bo‘lgan f funksiyaning $[a,\ b]$ da absolyut uzluksiz bo‘lishini isbotlang.

10.33. Agar $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ kamaymaydigan funksiya bo‘lib,

$$\int_a^b f'(t)\, dt = f(b) - f(a)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda f absolyut uzluksiz bo‘ladi. Isbotlang.

10.34. $f(x) = x + \mathfrak{K}(x),\ \ x \in [0,\ 1]$ funksiyani qaraymiz. Bu yerda $\mathfrak{K}$ Kantorning zinapoya funksiyasi. Quyidagilarni isbotlang.

a) $f : [0,\ 1] \to [0,\ 2]$ uzluksiz va qat’iy o‘suvchi funksiya;

b) $f : [0,\ 1] \to [0,\ 2]$ biyektiv akslantirish;

c) $\mu(f(K)) = 1, \quad K -$ Kantor to'plami.

10.35. Kantor funksiyasining quyidagi xossalarini isbotlang.

a) $\mathfrak{K}\left(\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \mathfrak{K}(x), \quad x \in [0,\ 1]\,;$

b) $\mathfrak{K}\left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \mathfrak{K}(x), \quad x \in [0,\ 1].$

10.36. $[a,\ b]$ kesmada tekis uzluksiz, lekin absolyut uzluksiz bo'lmagan funksiyaga misol keltiring.

10.37. Agar f funksiya $[a,\ b]$ da absolyut uzluksiz bo'lsa, u holda $|f|$ ham absolyut uzluksiz funksiya bo'ladi. Isbotlang.

10.38. $|f|$ ning absolyut uzluksiz ekanligidan f ning absolyut uzluksiz ekanligi kelib chiqmaydi. Quyidagi misolni tahlil qiling.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$$

10.39. Agar f funksiya $[a,\ b]$ da uzluksiz bo'lib, $|f|$ absolyut uzluksiz bo'lsa, u holda f ham absolyut uzluksiz bo'ladi. Isbotlang.

10.40. Agar $f_n : [a,\ b] \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ lar kamaymaydigan absolyut uzluksiz funksiyalar bo'lib, har bir $x \in [a,\ b]$ da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ qator f ga yaqinlashsa, u holda limitik finksiya f ham $[a,\ b]$ da absolyut uzluksiz bo'ladi. Isbotlang.

10.41. Agar $f_n : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ singulyar funksiyalar ketma-ketligi uchun shunday $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ o'zgarishi chegaralangan funksiya mavjud bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} V_a^b[f - f_n] = 0$ bo'lsa, u holda limitik finksiya f yo o'zgarmas, yo singulyar funksiya bo'ladi. Isbotlang.

10.42. Agar $f_n : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ absolyut uzluksiz funksiyalar ketma-ketligi uchun shunday $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ oʻzgarishi chegaralangan funksiya mavjud boʻlib, $\lim\limits_{n\to\infty} V_a^b[f - f_n] = 0$ boʻlsa, u holda limitik finksiya f ham absolyut uzluksiz funksiya boʻladi. Isbotlang.

10.43. Agar $F : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ oʻngdan uzluksiz kamaymaydigan sakrashlar funksiyasi boʻlib, $c_1, c_2, \ldots$ lar uning $[a,\ b]$ dagi uzilish nuqtalari boʻlsa, u holda

$$\int_{[a,b]} f(x)dF(x) = \sum_{k=1} f(c_k)[F(c_k) - F(c_k - 0)] \tag{10.5}$$

tenglik oʻrinli. Isbotlang.

10.44. Agar $F : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ absolyut uzluksiz funksiya boʻlsa, u holda

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dF(x) = \int_{[a,b]} f(x)F'(x)\, d\mu \tag{10.6}$$

tenglik oʻrinli. Isbotlang.

10.45. Agar $F(x) = const$ boʻlsa, u holda ixtiyoriy $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ chegaralangan funksiya uchun

$$\int_{[a,\, b]} f(x)\, dF(x) = 0$$

tenglik oʻrinli. Isbotlang.

10.46. Quyidagi tenglikni isbotlang.

$$\int_A 1 \cdot dF(x) = \mu_F(A).$$

10.47. Lebeg-Stiltes integrali uchun ham *boʻlaklab integrallash* qoidasi oʻrinli. Ya'ni $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ va $g : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ lar oʻzgarishi chegaralangan funksiyalar boʻlsa, quyidagi tenglikni isbotlang.

$$\int_{[a,\, b]} f(x)\, dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_{[a,\, b]} g(x)\, df(x). \tag{10.7}$$

10.48. Aytaylik, $x = \varphi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ uzluksiz va o'suvchi funksiya bo'lib, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ bo'lsin. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uzluksiz, $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ kamaymaydigan funksiyalar bo'lsin. U holda

$$\int_{[a,\, b]} f(x)\, dF(x) = \int_{[\alpha,\, \beta]} f(\varphi(t))\, dF(\varphi(t))$$

tenglik o'rinli, ya'ni Lebeg-Stiltes integralida *o'zgaruvchilarni almashtirish mumkin.* Isbot qiling.

10.49. Agar $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ va $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funksiyalar uchun Riman-Stiltes integrali mavjud bo'lsa, u holda Lebeg-Stiltes integrali ham mavjud va ular o'zaro teng, ya'ni

$$(L - S) \int_{[a,\, b]} f(x)\, dg(x) = (R - S) \int_a^b f(x)\, dg(x)$$

10.50. $\int\limits_{[0,1]} \mathfrak{K}(x) dF(x)$ Lebeg-Stiltes integralini hisoblang. Bu yerda $\mathfrak{K}(x)-$ Kantorning zinapoya funksiyasi, $F(x) = 2x + 1$.

10.51. $\int\limits_{[0,1]} \mathfrak{K}(x) dF(x)$ Lebeg-Stiltes integralini hisoblang. Bu yerda $\mathfrak{K}(x)-$ Kantorning zinapoya funksiyasi, $F(x) = [3x] + 2x$.

10.52. Quyidagi $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ funksiyaning $[0, 1]$ da differensiallanuvchi ekanligini ko'rsating. Hosila funksiyaning $[0, 1]$ da integrallanuvchi emasligini isbotlang.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}, & 0 < x \le 1 \end{cases}.$$

10.53. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uzluksiz, $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ kamaymaydigan funksiyalar uchun o'rta qiymat haqidagi teoremani isbotlang, ya'ni

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)\, dF(x) = f(c)[F(b) - F(a)], \quad \exists\, c \in [a, b].$$

10.54. Quyida $f(x)$ va $F(x)$ funksiyalar berilgan. Lebeg-Stiltes integrali

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)\, dF(x)$$

ni hisoblang.

1) $f(x) = x, \;\; F(x) = \cos\, x, \;\; x \in [0, \; \pi].$

2) $f(x) = \sin x, \;\; F(x) = |x|, \;\; x \in [-\pi, \; \pi].$

3) $f(x) = x^2 + 3, \;\; F(x) = \begin{cases} x+2, & x \in [-2, \; -1], \\ 2, & x \in (-1, \; 0), \\ x^2+1, & x \in [0, \; 2]. \end{cases}$

4) $f(x) = x, \;\; F(x) = [x], \;\; x \in [0, \; n], \;\; n \in \mathbb{N}.$

5) $f(x) = x^2, \;\; F(x) = [x], \;\; x \in [0, \; n], \;\; n \in \mathbb{N}.$

6) $f(x) = x + 2, \;\; F(x) = \exp\, x \cdot \mathrm{sign}(\cos\, x), \;\; x \in [-\pi, \; \pi].$

7) $f(x) = x - 1, \;\; F(x) = \cos\, x, \;\; x \in [0, \; \pi].$

8) $f(x) = x^2, \;\; F(x) = \mathfrak{K}(x), \;\; x \in [0, \; 1].$

9) $f(x) = 1 + 2x, \;\; F(x) = \mathfrak{K}(x), \;\; x \in [0, \; 1].$

10) $f(x) = [3x], \;\; F(x) = \mathfrak{K}(x), \;\; x \in [0, \; 1].$

10.55. Quyidagi qatorni qaraymiz:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x), \quad b \in (0, \; 1), \;\; a \in \mathbb{N} \;\; va \;\; toq \;\; son.$$

Bu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiyaning usluksiz ekanligini isbotlang. Agar $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ bo‘lsa, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiya biror nuqtada ham chekli hosilaga ega emasligini ko‘rsating.

10.56. Quyida berilgan absolyut uzluksiz funksiyalarni kamaymaydigan absolyut uzluksiz funksiyalar ayirmasi shaklida tasvirlang:

a) $f(x) = x^2 + 2, \;\; x \in [-1, \; 2],$ b) $f(x) = \exp\, x^2, \;\; x \in [-1, \; 2],$

c) $f(x) = |\cos x|, \;\; x \in [-\pi, \; \pi],$ d) $f(x) = \sin\, x, \;\; x \in [-\pi, \; \pi].$

II bobni takrorlash uchun test savollari

1. Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \qquad f_-(x) = \frac{f(x) - |f(x)|}{2},$$

Quyidagi tasdiqlar ichidan to'g'rilarini ajrating.

1) f_+ o'lchovli bo'lsa, f ham o'lchovli bo'ladi.

2) f_- o'lchovli bo'lsa, f ham o'lchovli bo'ladi.

3) f_+ va f_- lar o'lchovli bo'lsa, f ham o'lchovli bo'ladi.

A) 1, 2 B) 1, 3 C) 2, 3 D) 3

2. Quyidagi tasdiqlar ichidan to'g'rilarini ajrating.

1) $|f|$ o'lchovli bo'lsa, f ham o'lchovli bo'ladi.

2) f^2 o'lchovli bo'lsa, f ham o'lchovli bo'ladi.

3) f_+ va f_- lar o'lchovli bo'lsa, f ham o'lchovli bo'ladi.

A) 1, 2 B) 1, 3 C) 2, 3 D) 3

3. $f(x) = 2x$, $x \in E = [0, 5]$ funksiya uchun $E(f < 6)$ to'plamni toping.

A) $[0,\ 2]$ B) $[0,\ 3)$ C) $[0,\ 5)$ D) $[0,\ 2)$

4. $f(x) = [2x]$, $x \in E = [0, 5]$ funksiya uchun $E(f = 4)$ to'plamni toping.

A) $[0,\ 2]$ B) $[2,\ \frac{5}{2})$ C) $[2,\ 5)$ D) $[2,\ 3)$

5. $f(x) = \ln\left(x^2 - 2x + 1\right)$, $x \in E = (0, \infty)$ funksiya uchun $\{x : f(x) < 0\}$ to'plamni toping.

A) $(0,\ 2)$ B) $(0,\ 1) \cup (1,\ 2)$ C) $(0,\ \infty)$ D) $(0,\ 3)$

6. $f(x) = 2^x - 1$, $x \in [0,\ 5]$ funksiya uchun $\{x : 3 < f(x) < 7\}$ to'plamni toping.

A) $[0,\ 3]$ B) $(2,\ 3)$ C) $[0,\ 3)$ D) $[2,\ 3)$

7. $\left\{x \in [0,\ \pi] : \sin x \le 2^{-1}\right\}$ to'plam o'lchovini toping.

A) $\dfrac{\pi}{3}$ B) $\dfrac{2\pi}{3}$ C) $\dfrac{\pi}{6}$ D) $\dfrac{\pi}{4}$

8. $\{x \in [0,\ \pi] : \sin x \le \cos x\}$ to'plam o'lchovini toping.

A) $\dfrac{\pi}{4}$ B) $\dfrac{2\pi}{3}$ C) $\dfrac{3\pi}{4}$ D) $\dfrac{\pi}{3}$

9. $A \subset [0,\ 1]-$ o'lchovsiz to'plam. $\mathfrak{D}-$ Dirixle funksiyasi. $f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ 1, & x \in [0,\ 1]\backslash A \end{cases}$, $f_2(x) = f_1(x) + \mathfrak{D}(x)$, $f_3(x) = f_1(x) \cdot \mathfrak{D}(x)$.
O'lchovli bo'lmagan funksiyalarni toping.

A) f_1 B) f_1, f_2 C) f_1, f_3 D) f_2, f_3

10. $A \subset [0,\ 1]-$ o'lchovsiz to'plam. $\mathfrak{R}-$ Riman funksiyasi.

$f_1(x) = 1 - \chi_A(x)$, $f_2(x) = f_1(x) - \mathfrak{R}(x)$, $f_3(x) = f_2(x) \cdot \mathfrak{D}(x)$.

O'lchovli funksiyalarni toping.

A) f_1 B) f_2, f_3 C) f_3 D) f_2

11. $[0,\ 1]$ kesmada nolga ekvivalent funksiyalarni toping:

$f_1(x) = \mathfrak{R}(x)$, $f_2(x) = \mathfrak{D}(x)$, $f_3(x) = x$.

A) f_1 B) f_2, f_3 C) f_3 D) f_1, f_2

12. $f_1(x) = 1 + \mathfrak{R}(x)$, $f_2(x) = 1 + \mathfrak{D}(x)$, $f_3(x) = 1 + \mathfrak{R}(x) + \mathfrak{D}(x)$ funksiyalar ichidan $f(x) \equiv 1$ ga ekvivalent funksiyalarni toping.

A) f_1, f_2 B) f_1, f_2, f_3 C) f_2, f_3 D) f_1, f_3

13. $f_{1n}(x) = \sin^{2n} x$, $f_{2n}(x) = \cos^n x$, $f_{3n}(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$, $f_{4n}(x) = 1 + x^n$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketliklaridan qaysilari $[0,\ 1]$ to'plamda $f(x) \equiv 0$ funksiyaga tekis yaqinlashadi?

A) f_{1n} B) f_{2n}, f_{3n} C) f_{1n}, f_{3n}, f_{4n} D) f_{1n}, f_{2n}

14. $f_{1n}(x) = \sin^n x$, $f_{2n}(x) = \cos^n x$, $f_{3n}(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$, $f_{4n}(x) = x^n$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketliklaridan qaysilari $[0,\ 1]$ to'plamda

$f(x) \equiv 0$ funksiyaga nuqtali yaqinlashadi?

A) f_{1n} B) f_{1n}, f_{3n} C) f_{1n}, f_{3n}, f_{4n} D) f_{1n}, f_{2n}

15. $E = [0,\ 4]$ to‘plamda berilgan f sodda funksiyani toping.

A) $f(x) = x$ B) $f(x) = [x]$ C) $f(x) = e^x$ D) $f(x) = \sin x$

16. $E = [0,\ 3]$ to‘plamda berilgan sodda funksiyalarni ko‘rsating.

$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = 1, \quad f_3(x) = \mathfrak{D}(x)$

A) f_1, f_2, f_3 B) f_1, f_3 C) f_1, f_2 D) f_2, f_3

17. $f(x) = 1 + \operatorname{sign} x$ sodda funksiya uchun $A_1 = \{x \in [-2, 3] : f(x) = 0\}$ to‘plamni toping.

A) $[-2,\ 0]$ B) $[-2,\ 0)$ C) $[-2,\ -1]$ D) $[-2,\ 3]$

18. $f(x) = 5 - [2x]$ sodda funksiya uchun $A_1 = \{x \in [-2, 3] : f(x) = 1\}$ to‘plamni toping.

A) $[2,\ 3]$ B) $[2,\ 3)$ C) $[2,\ 2,5)$ D) $[2,\ 2,6]$

19. Integralning additivlik xossasini toping.

A) Agar $\mu(A) = 0$ bo‘lsa, u holda $\int_A f(x)d\mu = 0$

B) $\int_A [f(x) + g(x)]d\mu = \int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu$

C) $\int_A k \cdot f(x)d\mu = k \int_A f(x)d\mu$

D) Agar $f(x) \geq 0$ bo‘lsa, u holda $\int_A f(x)d\mu \geq 0$

20. Integralning bir jinslilik xossasini toping.

A) Agar $\mu(A) = 0$ bo‘lsa, u holda $\int_A f(x)d\mu = 0$

B) $\int_A [f(x) + g(x)]d\mu = \int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu$

C) $\int_A k \cdot f(x)d\mu = k \int_A f(x)d\mu$

D) Agar $f(x) \geq 0$ bo‘lsa, u holda $\int_A f(x)d\mu \geq 0$

21. Integralning monotonlik xossasini toping.

A) Agar $\mu(A) = 0$ bo‘lsa, u holda $\int_A f(x)d\mu = 0$

B) $\int_A [f(x)+g(x)]d\mu = \int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu$

C) $\int_A k\cdot f(x)d\mu = k\int_A f(x)d\mu$

D) Agar $f(x)\geq g(x)$ bo‘lsa, u holda $\int_A f(x)d\mu \geq \int_A g(x)d\mu$

22. Lebeg integralining monotonlik xossasidan foydalanib, quyidagi sonlar ichidan eng kattasini toping.

$a_0=0,\ \ a_1=\int\limits_{(0,1)}\dfrac{\sin^2 x}{x}d\mu,\ \ a_2=\int\limits_{(0,1)}\dfrac{\sin^4 x}{x^3}d\mu,\ \ a_3=\int\limits_{(0,1)}\sin x d\mu$

A) a_1 B) a_2 C) a_3 D) a_0

23. $A=[0,\ 3]$ to‘plamda berilgan $f(x)=3+\mathfrak{D}(x)$ sodda funksiyaning integralini hisoblang.

A) 3 B) 2 C) 6 D) 9

24. $A=[0,\ 2]$ to‘plamda berilgan $f(x)=4-[x]$ sodda funksiyaning integralini hisoblang.

A) 3 B) 7 C) 6 D) 4

25. $[-2,\ 2]$ kesmada berilgan monoton funksiyani toping.

A) $f(x)=\cos x$ B) $f(x)=[x]$ C) $f(x)=e^{x^2}$ D) $f(x)=\sin x$

26. $f(x)=[x],\ x\in[-2,\ 2]$ zinapoya funksiyaning uzulish nuqtalarini toping.

A) $\{-1;\ 0;\ 1\}$ B) $\{-1;\ 0;\ 1;\ 2\}$ C) $\{-1;\ 1\}$ D) $\{-2;\ -1;\ 0;\ 1\}$

27. $[0,\ 3]$ kesmada aniqlangan zinapoyasimon funksiyalarni ko‘rsating.

$f_1(x)=x,\ \ f_2(x)=1,\ \ f_3(x)=[x]$

A) f_1, f_2, f_3 B) f_2, f_3 C) f_1, f_2 D) f_1, f_3

28. $[0,\ 1]$ kesmada o‘suvchi funksiyalarni ko‘rsating.

$f_1(x)=-\cos x,\quad f_2(x)=\sin x,\quad f_3(x)=1+[x]$

A) f_1, f_2, f_3 B) f_2, f_3 C) f_1, f_2 D) f_1, f_3

29. $[-1,\ 1]$ kesmada o‘smaydigan funksiyalarni ko‘rsating.

$f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = (1-x)^2, \quad f_3(x) = 1 - [x]$

A) f_1, f_2, f_3 B) f_2, f_3 C) f_1, f_2 D) f_1, f_3

30. $[0,\ 1]$ kesmada kamayuvchi funksiyalarni ko‘rsating.

$f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = [x], \quad f_3(x) = \cos x$

A) f_1, f_2, f_3 B) f_2, f_3 C) f_1, f_2 D) f_3

31. $f(x) = \mathrm{sign} x$ funksiyaning $x_0 = 0$ nuqtadagi sakrashini toping.

A) 2 B) 0 C) 1 D) 3

32. $f(x) = [x]$ funksiyaning $x_0 = 0$ nuqtadagi chap limitini toping.

A) 2 B) 0 C) -1 D) 1

33. $f(x) = 2x - \{x\}$ funksiyani uzluksiz monoton funksiya va sakrash funksiyalarining yig‘indisi shaklida yozing.

A) $x + [x]$ B) $x - [-x]$ C) $2x + [x]$ D) $\{x\} + [x]$

34. $f(x) = [2x]$ funksiyaning $[-2,\ 3]$ dagi to‘la o‘zgarishini toping.

A) 3 B) 5 C) 10 D) 6

35. $f(x) = \sin x$ funksiyaning $[-\pi,\ \pi]$ dagi to‘la o‘zgarishini toping.

A) 2 B) 4 C) 1 D) 5

36. $[-2,\ 2]$ kesmada berilgan absolyut uzluksiz funksiyani toping.

A) $\{x\}$ B) $[x]$ C) e^{x^2} D) $\mathrm{sign} x$

37. $[-2,\ 2]$ kesmada absolyut uzluksiz bo‘lmagan funksiyani toping.

A) x B) $[x]$ C) e^{x^2} D) $\sin \pi x$

38. $[0,\ 1]$ kesmada berilgan singulyar funksiyani toping.

A) $\cos x$ B) $\mathfrak{R}(x)$ C) $\mathfrak{D}(x)$ D) $\mathfrak{K}(x)$

39. Lebeg-Stiltes integralining xossalaridan foydalanib, $f(x) = x$ funksiyaning $A = [0,\,3]$ to‘plam bo‘yicha olingan $\int_A f(x)\,dF(x)$, $F(x) = [x]$ integralini hisoblang.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6

40. Lebeg-Stiltes integralining xossalaridan foydalanib, $f(x) = 2x$ funksiyaning $A = [1,\,3]$ to‘plam bo‘yicha olingan $\int_A f(x)\,dF(x)$, $F(x) = \ln x$ integralini hisoblang.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6

II bob uchun javoblar va ko‘rsatmalar

6-§. O‘lchovli funksiyalar

11. O‘lchovsiz funksiyalar yig‘indisi o‘lchovli ham, o‘lchovsiz ham bo‘lishi mumkin. Tahlil qilinishi taklif qilngan f va g larning yig‘indisi $(f+g)(x) = 1,\ x \in [0,\,1]$ bo‘lib, u o‘lchovlidir.

12. O‘lchovsiz funksiyalar ko‘paytmasi o‘lchovli ham, o‘lchovsiz ham bo‘lishi mumkin. Tahlil qilinishi taklif qilngan f va g funksiyalarning ko‘paytmasi $f(x) \cdot g(x) = 0,\ x \in [0,\,1]$ bo‘lib u o‘lchovlidir.

13. Mumkin emas.

14. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ -1, & x \in [0,\,1] \setminus A, \end{cases}$ bu yerda $A \subset [0,\,1]$ o‘lchovsiz to‘plam.

15. 14 ga qarang.

17. 6.18 – misolda keltirilgan $\mathfrak{L}(x)$ funksiya.

18. Har bir $a \in \mathbb{R}$ da $\{x \in \mathbb{R} : \mathfrak{L}(x) = a\}$ to‘plam ko‘pi bilan ikki elementli to‘plam bo‘ladi. Haqiqatan ham $\mathfrak{L}(x_1) = \mathfrak{L}(x_2)$ bo‘lsin. Agar $x_1,\ x_2 \in A$ bo‘lsa, u holda $\mathfrak{L}(x_1) = \mathfrak{L}(x_2)$ tenglikdan $x_1 = x_2$ kelib chiqadi. Xuddi shunday $x_1,\ x_2 \notin A$ bo‘lsa, u holda $\mathfrak{L}(x_1) = \mathfrak{L}(x_2)$ tenglikdan $-x_1 = -x_2$ yoki $x_1 = x_2$ kelib chiqadi. Agar $x_1 \in A$ va $x_2 \notin A$ bo‘lsa, u holda $\mathfrak{L}(x_1) = \mathfrak{L}(x_2)$

tenglikdan $x_1 = -x_2$ kelib chiqadi. Shunday qilib, $\{x \in \mathbb{R} : \mathfrak{L}(x) = a\}$ to'plam $a \in A \setminus \{0\}$ uchun ikki elementli to'plam, qolgan a lar uchun bir elementli to'plam bo'ladi. Shuning uchun ham $\{x \in \mathbb{R} : \mathfrak{L}(x) = a\}$ o'lchovli to'plamdir.

19. $\{x \in [0,\ 1] : \mathfrak{L}(x) < 0\} = [0,\ 1] \setminus A$ tenglik o'rinli. A o'lchovsiz to'plam bo'lgani uchun $[0,\ 1] \setminus A$ ham o'lchovli emas.

20. Barcha $x \in [-1,\ 0]$ larda $\mathfrak{L}(x) \geq 0$ bo'lganligi uchun $\{x \in [-1,\ 1] : \mathfrak{L}(x) < 0\} = [0,\ 1] \setminus A$ tenglik o'rinli bo'ladi (19-misolga qarang). $[0,\ 1] \setminus A$ o'lchovsiz bo'lgani uchun $\mathfrak{L}$ funksiya E da o'lchovsiz funksiya bo'ladi.

22. $\mathfrak{K}^{-1}(K_1) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $\mathfrak{K}^{-1}(K_2) = \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$, $\mathfrak{K}^{-1}(K_3) = \left\{\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right\}$, $\mathfrak{K}^{-1}(K_n) = \left\{\frac{2k-1}{2^k},\ k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}\right\}$.

24. $A \subset [-2,\ 2]$ o'lchovsiz to'plam $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in [-2,\ 2] \setminus A. \end{cases}$

25. $A \subset [-2,\ 2]$ o'lchovsiz to'plam $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ -1, & x \in [-2,\ 2] \setminus A. \end{cases}$

27. $A \subset [0,\ 1] = E$ o'lchovsiz to'plam va $f(x) = \chi_A(x),\ g(x) = \chi_{E \setminus A}(x)$ o'lchovli funksiya emas. $f(x) + g(x) = 1$.

28. $A \subset [0,\ 1] = E$ o'lchovsiz to'plam $f(x) = \chi_A(x),\ g(x) = -\chi_{E \setminus A}(x)$. $f(x) \cdot g(x) \equiv 0,\ x \in E,$

29. $E(\mathfrak{D} < c) = \begin{cases} \emptyset, & c \leq 0 \\ E \setminus \mathbb{Q}, & 0 < c \leq 1 \\ E, & c > 1. \end{cases}$

36. Agar $f : E \to \mathbb{R}$ o'lchovli funksiya bo'lsa, $\{x \in E : f(x) < a\} = \{x \in E : f^3(x) < a^3\}$ tenglikdan f^3 o'lchovli funksiya ekanligi kelib chiqadi. Chunki a soni $-\infty$ dan $+\infty$ gacha bo'lgan qiymatlarni qabul qilganda a^3 ham $(-\infty,\ \infty)$ to'plamni to'la bosib o'tadi. $\{x \in E : f^3(x) < c\} = \{x \in E : f(x) < c^{\frac{1}{3}}\}$ tenglik o'rinli. Demak, f va f^3 lar bir vaqtda o'lchovli yoki o‘lchovsiz funksiyalar bo‘ladi.

41. Eyler formulasi $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ dan, hamda $\cos x$ va $\sin x$ larning $[-\pi,\ \pi]$ kesmada o‘lchovli ekanligidan, $f(x) = e^{ix}$ funksiyaning $[-\pi,\ \pi]$ to‘plamda o‘lchovli ekanligini olamiz.

49. $[0,\ 1] = A \cup B$ shaklda yozamiz. A va B o‘lchovli to‘plamlar va $\mu(A) > 0,5;\quad \mu(B) = 0,5$. A va B lar quyidagi xossalarga ega. Barcha $x \in [0,\ 1]$ va ixtiyoriy $\delta > 0$ uchun $\mu(A \cap (x-\delta, x+\delta)) > 0$ va $\mu(B \cap (x-\delta, x+\delta)) > 0$ bo‘lsin. U holda $\chi_A(x)$ misol shartlarini qanoatlantiruvchi funksiya bo‘ladi.

58. $[0,\ 1]$ kesmani teng n bo‘lakka bo‘lamiz. Har bir $n \in \mathbb{N}$ uchun

$$\{\chi_{[\frac{k-1}{n},\, \frac{k}{n}]}(x)\}_{k=1}^{n}$$

xarakteristik funksiyalar oilasini qaraymiz. Bu funksiyalar oilasini quyidagicha nomerlaymiz.

$$f_1(x) = \chi_{[0,\,1]}(x), \quad f_2(x) = \chi_{[0,\,\frac{1}{2}]}(x), \quad f_3(x) = \chi_{[\frac{1}{2},\,1]}(x)$$

va hokazo biror ν uchun

$$f_\nu(x) = \chi_{[0,\,\frac{1}{n}]}(x),\ f_{\nu+1}(x) = \chi_{[\frac{1}{n},\,\frac{2}{n}]}(x), \ldots, f_{\nu+n-1}(x) = \chi_{[\frac{n-1}{n},\,1]}(x), \ldots$$

Hosil bo‘lgan f_n ketma-ketlik $[0,\ 1]$ da o‘lchov bo‘yicha nol funksiyaga yaqinlashadi, lekin biror nuqtada ham nolga yaqinlashmaydi.

60. $E(f < c) = \{x \in [-1,\,2] : \operatorname{sign} x < c\}$ to‘plamni barcha $c \in \mathbb{R}$ larda o‘lchovli ekanligini ko‘rsating.

64. $E_\delta = \left(\dfrac{\varepsilon}{10^3},\ \pi - \dfrac{\varepsilon}{10^3}\right) \bigcup \left(\pi + \dfrac{\varepsilon}{10^3},\ 2\pi - \dfrac{\varepsilon}{10^3}\right),\ \ \varepsilon \in \left(0,\ \dfrac{1}{4}\right).$

65. $\varphi(x) = 0,\ \ x \in [0,\ 1]\,.$

66. $f(x) = 0,\ x \in [0,\ 1)\,,\ f_n(x) = x^n,\ \ x \in [0,\ 1)\,.$

67. $f_n(x) = x^n,\ \ x \in [0,1]$ funksional ketma-ketlik $\theta(x) \equiv 0$ funksiyaga deyarli va o‘lchov bo‘yicha yaqinlashadi, nuqtali yaqinlashmaydi.

68. Ha. **69.** Yo'q.

70. a) $g(x) \equiv 0$, *b)* $g(x) = \pi$, *c)* $g(x) = 0$, *d)* $g(x) = \ln(1 + |x|)$.

71. a) $g(x, y) = x^2$, *b)* $g(x, y) = \cos x - \sin y$, *c)* $g(x, y) = xy$,

d) $g(x, y) = chx$.

74. a) $g(x) \equiv 0$, b) $g(x) \equiv 0$, c) $g(x) \equiv 0$, d) $g(x) \equiv 1$,

e) $g(x) \equiv 0$, f) $g(x) \equiv 0$.

75. a) $g_1(x, y) \equiv 0$, $g_2(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\ 0, & (x, y) \notin \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \end{cases}.$

b) $g_1(x, y) \equiv 0$, $g_2(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\ 0, & (x, y) \notin \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \end{cases}.$

c) $g_1(x, y) \equiv 0$, $g_2(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \\ 0, & (x, y) \notin \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \end{cases}.$

d) $g_1(x, y) \equiv 1$, $g_2(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \notin Q \times Q \\ 2, & (x, y) \in Q \times Q \end{cases}.$

e) $g_1(x, y) = \begin{cases} |x|, & |x| \geq |y| \\ |y|, & |x| < |y| \end{cases}$, $g_2(x, y) = \begin{cases} |x|, & |x| > |y| \\ |y|, & |x| < |y| \\ 0, & |x| = |y| \end{cases}.$

f) $g_1(x, y) = |\,x\,| + |\,y\,|$, $g_2(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ |x| + |y|, & x \neq y \end{cases}.$

g) $g_1(x, y) = e^x$, $g_2(x, y) = \begin{cases} e^x, & x \neq -y \\ 0, & x = -y \end{cases}.$

h) $g_1(x, y) = 1$, $g_2(x, y) = \begin{cases} 0, & x^2 = y^2 \\ 1, & x^2 \neq y^2 \end{cases}.$

76. a) $A_\varepsilon = \left[\frac{1}{50}, \pi - \frac{1}{50}\right] \cup \left[\pi + \frac{1}{50}, 2\pi - \frac{1}{50}\right]$. b) $A_\varepsilon = \left[0, 1 - \frac{1}{101}\right]$.

c) $A_\varepsilon = \left[\frac{1}{1001}, 1\right]$. d) $A_\varepsilon = \left[\frac{10^{-4}}{2}, 1\right]$.

e) $A_\varepsilon = \left[\frac{1}{5 \cdot 10^5} - 1, -\frac{1}{5 \cdot 10^5}\right] \cup \left[\frac{1}{5 \cdot 10^5}, 1 - \frac{1}{5 \cdot 10^5}\right]$.

f) $A_\varepsilon = \left[0,\ 2 - \dfrac{1}{2\cdot 10^6}\right]$.

77. Sababi $\mu(\mathbb{R}) = \infty$. **78-79.** $f(x) \equiv 0$. **80.** $f(x) \equiv 0$. **85.** Yo‘q.

7-§. Chekli o‘lchovli to‘plamlarda Lebeg integrali

13. Xarakteristik funksiya ikkita 0 va 1 qiymatlarni qabul qiladi. 7.1-misoldan va $A_1 = \{x \in E:\ \chi_A(x) = 0\} = E\backslash A$, $A_2 = \{x \in E:\ \chi_A(x) = 1\} = A$ to‘plamlarning o‘lchovli ekanligidan χ_A ning o‘lchovli, sodda funksiya ekanligi kelib chiqadi.

14. $A_1 = \{x \in E:\ \operatorname{sign} x = -1\} = [-1,\ 0)$, $A_2 = \{x \in E:\ \operatorname{sign} x = 0\} = \{0\}$, $A_3 = \{x \in E:\ \operatorname{sign} x = 1\} = (0,\ 3]$ to‘plamlarning o‘lchovli ekanligidan $y = \operatorname{sign} x$ ning E da sodda funksiya ekanligi kelib chiqadi.

16. $\mathfrak{K}: [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ o‘lchovli funksiya 6.23-misolga ko‘ra $\mathfrak{K}$ funksiya $[0,\ 1]\backslash K$ da o‘lchovli funksiya bo‘ladi. Har bir $n \in \mathbb{N}$ uchun K_n da (7.2-misol yechimiga qarang) $\mathfrak{K}$ funksiya cheklita qiymat qabul qiladi. Shuning uchun $\mathfrak{K}$ funksiya $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n = [0,\ 1]\backslash K$ da sanoqlita qiymat qabul qiladi, demak u sodda funksiya.

18. a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\cdot 2^{n-1}}{3^n}$. *b)* $\dfrac{1}{4}$. **24.** $f_n(x) = \dfrac{[n\mathfrak{K}(x)]}{n}$.

26. Bu funksiya $y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 2, y_4 = 3, y_5 = 4$, qiymatlarni mos ravishda $A_1 = [0,1)$, $A_2 = [1,2)$, $A_3 = [2,3)$, $A_4 = [3,4)$, $A_5 = [4,5)$ to‘plamlarda qabul qiladi. Uning integrali 7.2-ta’rifga ko‘ra 10 ga teng.

28. $\dfrac{4\pi}{3}$.

29. Dirixle funksiyasi o‘lchovli va ikkita (0 va 1) qiymat qabul qiladi. Uning $[0,\ 3]$ to‘plam bo‘yicha olingan integrali 0 ga teng.

30. Riman funksiyasi o‘lchovli va sanoqlita $\left\{0,\ 1,\ \dfrac{1}{2}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots\right\}$ qiymat qabul qiladi. Uning $[0,\ 1]$ to‘plam bo‘yicha olingan integrali 0 ga teng.

31. 3. **32.** 2. **33.** 1. **34.** 1. **35.** 4. **36.** $\dfrac{3}{2}$. **37.** $e - 2$.

56. 7.5-misolga qarang. **57.** $5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$.

58. O‘zgarmasdan farqli uzluksiz funksiya sodda funksiya bo‘la olmaydi.

59. Ikkalasi ham sodda funksiya, ularning integrallari 0 ga teng.

60. 12. **61.** 0. **62.** 2. **63.** -6. **64.** $\dfrac{4}{\ln 2}+5$. **65.** $e+\dfrac{1}{2}$.

66. a) 0, b) $\ln 4-1$, c) 6, d) $\dfrac{5+3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$.

67. a) $\dfrac{1}{2}$, b) 6, c) 10, d) $\dfrac{2}{\ln 2}+1$, e) $\ln 3+e$, f) $\dfrac{1}{2}$, g) $\dfrac{1}{2}$, h) $\dfrac{1}{2}$, i) 1, j) $\dfrac{5}{16}$, k) 0.

8-§. Lebeg integrali belgisi ostida limitga o‘tish

2. a) Yo‘q, b) Yo‘q, c) Yo‘q, d) Yo‘q, e) Ha, f) Ha.

4. a) 0, b) 1, c) 0, d) π.

6. a) $\alpha>1$, b) $\alpha>1$, c) $\alpha>2$.

7. $\alpha>1$. **8.** Ha. **10.** a) π, b) $\dfrac{\pi}{2}$. **13.** Ha.

9-§. Monoton va o‘zgarishi chegaralangan funksiyalar

10. Kamaymaydigan funksiya, o‘ngdan uzluksiz, uzilish nuqtalari 0, 1, 2, 3. Barcha uzilish nuqtalaridagi sakrashi 1 ga teng.

11. Kamaymaydigan funksiya, faqat $x=0$ nuqtada uzilishga ega. $x=0$ da o‘ngdan ham, chapdan ham uzluksiz emas. $x=0$ nuqtadagi sakrashi 2 ga teng.

12. Kamaymaydigan funksiya, faqat $x=0$ nuqtada uzilishga ega. $x=0$ da chapdan uzluksiz, uzilish nuqtasidagi sakrashi 1 ga teng.

13. $[-4,\ 0)$ da va $[0,\ 5]$ da kamaymaydigan funksiya. Bu funksiyaning uzilish nuqtalari $x=-1$, $x=0$. $x=-1$ nuqtada o‘ngdan uzluksiz va bu nuqtadagi sakrashi 3 ga teng. $x=0$ da o‘ngdan ham, chapdan ham uzluksiz emas. Funksiyaning $x=0$ nuqtadagi sakrashi 1 ga teng.

17. $$f_d(x)=\begin{cases} 0, & x\in[-2,\ -1) \\ 1, & x\in[-1,\ 0] \\ 2, & x\in(0,\ 2], \end{cases} \qquad f_c(x)=x-1.$$

18. $f_d(x)=\begin{cases}0, & x\in[-10,\ -2)\\ 1, & x\in[-2,\ 0)\\ 5, & x\in[0,\ 4],\end{cases}$ $\quad f_c(x)=\begin{cases}x^3, & x\in[-10,\ -2)\\ -8, & x\in[-2,\ 0)\\ x-8, & x\in[0,\ 4].\end{cases}$

19. $f_d(x)=\begin{cases}0, & x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)\\ 1, & x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right],\end{cases}$ $\quad f_c(x)=\begin{cases}\sin^3(x)-1, & x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)\\ \sin^2-1, & x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right].\end{cases}$

20. $f(x)=f_c(x)+f_d(x),\ \ f_d(x)=[x]+2,\ \ f_c(x)=2x-2\,.$

29. Monoton funksiyalar yig‘indisi monoton bo‘lmasligi mumkin.

30. Monoton funksiyalar ko‘paytmasi monoton bo‘lmasligi mumkin.

32. Ha. **33.** Ha.

54. 36. $V[f]=6$, 37. $V[f]=20$, 38. $V[f]=2$, 39. $V[f]=8$, 40. $V[f]=2$, 41. $V[f]=\ln(1+e)$, 42. $V[f]=32\dfrac{3}{4}$, 43. $V[f]=e^2+1$, 44. $V[f]=6$.

55. $\overset{2}{\underset{0}{\vee}}[f]=3,\ \ \overset{2}{\underset{0}{\vee}}[g]=7.$

56. $\overset{2}{\underset{0}{\vee}}[f]=4+|a|+|1-a|$ barcha $a\in[0,\ 1]$ larda $\overset{2}{\underset{0}{\vee}}[f]$ minimal bo‘ladi.

60. $f(x)=v(x)-\varphi(x),\ \ v(x)=\vee_a^x[f]\,.$

$v_f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]\\ 2-\sin x, & x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]\end{cases},\ \ \varphi_f(x)=\begin{cases}2\sin x-1, & x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]\\ 1, & x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]\end{cases}$

$v_g(x)=\overset{x}{\underset{0}{\vee}}[g]=1-\cos x,\ \ x\in[0,\ 2\pi]\,,\ \varphi_g(x)=|\cos x|+\cos x\ ,\ v_\phi(x)=$

$=\begin{cases}4-(x-2)^2, & x\in[0,\ 2]\\ 4+(x-2)^2, & x\in(2,\ \pi]\end{cases},\ \ \varphi_\phi(x)=\begin{cases}4-2(x-2)^2, & x\in[0,\ 2]\\ 4, & x\in(2,\ \pi].\end{cases}$

$v_\psi(x)=\begin{cases}\sin^2 x, & x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]\\ 2-\sin^2 x, & x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]\end{cases},\ \ \varphi_\psi(x)=\begin{cases}0, & x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]\\ 2-2\sin^2 x, & x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]\end{cases}$

61. $\{36.\ v(x)=3x,\ \ \varphi(x)=-1.$

37. $v(x)=\begin{cases}2-2x^2, & x\in[-1,\ 0]\\ 2+2x^2, & x\in(0,\ 3],\end{cases}$ $\quad \varphi(x)=\begin{cases}-4x^3-3, & x\in[-1,\ 0]\\ -3, & x\in(0,\ 3].\end{cases}$

38. $v(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]\\ 2-\sin x, & x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right],\end{cases}$ $\quad \varphi(x)=\begin{cases}0, & x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]\\ 2-2\sin^2 x, & x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right].\end{cases}$

39. $v(x) = \begin{cases} 2\cos x + 2, & x \in [-\pi, 0] \\ 6 - 2\cos x, & x \in [0, \pi], \end{cases}$ $\varphi(x) = \begin{cases} 2, & x \in [-\pi, 0] \\ 6 - 4\cos x, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$

40. $v(x) = \mathrm{tg}x + 1, \ \ \varphi(x) = 1.$

41. $v(x) = \ln(1 + x), \ \ \varphi(x) = 0.$

42. $v(x) = 2^x + 5x + 9\frac{3}{4}, \ \ \varphi(x) = 9\frac{3}{4}.$

43. $v(x) = xe^{x+1} + 1, \ \ \varphi(x) = -4.$

44. $v(x) = 3 + 3(x - 1), \varphi(x) = 3x - 4 - 3|x - 1| \}.$

62. $\lambda_l = -\beta, \ \wedge_l = -\alpha, \ \lambda_r = a, \ \ \wedge_r = b.$

63. Yo‘q (9.65 – misolga qarang).

64. Agar f funksiya $[a, b]$ kesmada chegaralangan hosilaga ega bo‘lsa, u holda f ning $[a, b]$ kesmada o‘zgarishi chegaralangan bo‘lishini isbotlang.

69. A sodda to‘plam bo‘lsa, $A = [a, b]$ bo‘lsa $\overset{b}{\underset{a}{\vee}}[\chi_A]$ minimal bo‘ladi.

10-§. Absolyut uzluksiz funksiyalar. Lebeg-Stiltes integrali

8. $\sum\limits_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| = \sum\limits_{k=1}^{n} |3b_k + 1 - 3a_k - 1| = 3\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < 3\delta$ va $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ desak, $\sum\limits_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Demak, $f(x) = 3x + 5$ funksiya $[0, 2]$ kesmada absolyut uzluksiz funksiya ekan.

9. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ dan foydalaning. 10.1-misol yechimiga qarang.

10. $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$ dan foydalaning.

11. $||\cos x| - |\cos y|| \le |\cos x - \cos y| \le |x - y|$ dan foydalaning.

16. Bo‘linish nuqtasiga $x_k = 1$ ni qo‘shib, moduldan qutiling.

22. $\{$8. $v(x) = 3x, \ \ \varphi(x) = -1.$

9. $v(x) = x^2, \ \ \varphi(x) = -3.$

10. $v(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 2 - \sin x, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right], \end{cases}$ $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 2 - 2\sin^2 x, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$

11. $v(x) = \begin{cases} 2 + 2\cos x, & x \in [-\pi, 0] \\ 6 - 2\cos x, & x \in (0, \pi], \end{cases}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2 + 2\cos x - 2\left|\cos x\right|, & x \in [-\pi,\ 0] \\ 6 - 2\cos x - 2\left|\cos x\right|, & x \in (0,\ \pi]. \end{cases}$$

12. $v(x) = tg\,\dfrac{x}{4} + 1, \ \ \varphi(x) = 1.$

13. $v(x) = x\ln(1 + x), \ \varphi(x) = 0.$

14. $v(x) = 2^x + 5x + 4,5, \ \varphi(x) = 4,5.$

15. $v(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{-x} & x \in [-1,\ 0] \\ 1 + \sqrt{x} & x \in (0,\ 1], \end{cases}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - 2\sqrt{-x} & x \in [-1,\ 0] \\ 1 + \quad & x \in (0,\ 1], \end{cases}$$

16. $v(x) = 3x, \ \ \varphi(x) = 3x - 3|1 - x| - 4.\}$

30. $f(x) = \mathfrak{K}(x), \ A = [0,1] \setminus K.$

31. $f(x) = \mathfrak{K}(x), \ A = K.$

36. Kantorning zinapoya funksiyasi.

50. 1. **51.** 3.

54. 1) $-\pi$, 2) 4, 3) $25\dfrac{1}{3}$, 4) $\dfrac{n(n+1)}{2}$, 5) $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
6) $2e^{-\pi/2} - 2e^{\pi/2} - (1 + \pi)e^{\pi} + (1 - \pi)e^{-\pi}$, 7) $2 - \pi$, 8) $\dfrac{3}{8}$,
9) 2, 10) 1.

II bobda keltirilgan test javoblari

1-D 2-D 3-B 4-B 5-B 6-B 7-A 8-A 9-B 10-C 11-D 12-B 13-A 14-B 15-B 16-D 17-B 18-C 19-B 20-C 21-D 22-C 23-D 24-B 25-B 26-B 27-B 28-C 29-B 30-C 31-A 32-C 33-A 34-C 35-B 36-C 37-B 38-D 39-D 40-C.

III. METRIK FAZOLAR

Bu bob 7 paragraf (11-17) dan iborat. Bobning 11-paragrafida metrik fazolar, undagi asosiy tushunchalarning mohiyatini ochib beruvchi misol va masalalar jamlangan. 12-paragrafda yaqinlashuvchi va fundamental ketma-ketliklarga doir misollar qaralgan. 13-paragrafda ochiq va yopiq sharlar hamda ochiq va yopiq to'plamlarning xossalarini tekshirishga doir misollar qaralgan. 14-paragraf to'la metrik fazolar va metrik fazolarni to'ldirishga doir misollarga bag'ishlangan. Bu yerda Ber teoremasining qo'llanishiga hamda hamma yerda zich va hech yerda zichmas to'plamlarga doir qiziqarli misollar bor. 15-paragrafda metrik fazolarni uzluksiz akslantirishlar hamda izometrik, gomeomorf metrik fazolarga doir misollar jamlangan. 16-paragrafda qisqartirib akslantirish prinsipining qo'llanishiga doir misollar qaralgan. Kompakt to'plamlar va kompakt metrik fazolarga doir misollar 17-paragrafda jamlangan.

11-§. Metrik fazolar

Bu paragrafda foydalaniladigan asosiy tushunchalar va ta'riflarni keltiramiz. X bo'sh bo'lmagan to'plam va $X \times X$ bilan X ni o'zini-o'ziga dekart ko'paytmasini belgilaymiz.

11.1-ta'rif. *Agar* $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ *akslantirish quyidagi uchta shartni qanoatlantirsa unga* X *dagi masofa yoki metrika deyiladi:*

1) $\rho(x, y) \geq 0, \ \ \forall\, x, y \in X, \ \rho(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y$ *(ayniyat aksiomasi),*

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x), \ \ \forall\, x, y \in X$ *(simmetriklik aksiomasi),*

3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$, $\forall\, x, y, z \in X$ *(uchburchak aksiomasi).*

(X, ρ) *juftlik esa metrik fazo deyiladi.*

Odatda metrik fazo, ya'ni (X, ρ) juftlik bitta X harfi bilan belgilanadi. Agar X to'plamda $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ metrikalar aniqlangan bo'lsa, u holda

$(X, \rho_1), (X, \rho_2), \ldots, (X, \rho_n)$ metrik fazolar mos ravishda X_1, X_2, $\ldots$, X_n harflari bilan belgilanadi.

11.2-ta'rif. *Agar shunday $C_1 > 0$ va $C_2 > 0$ sonlar mavjud bo'lib, barcha $x, y \in X$ lar uchun*

$$C_1\rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq C_2\rho_1(x, y)$$

tengsizliklar o'rinli bo'lsa, ρ_1 va ρ_2 lar ekvivalent metrikalar deyiladi.

Bu bobda va bundan keyingi boblarda foydalaniladigan asosiy belgilashlarni keltiramiz.

$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \ \ x_i \in \mathbb{R}\} - n$ o'lchamli vektor fazo, $m-$ barcha chegaralangan ketma-ketliklar to'plami. $c-$ barcha yaqinlashuvchi ketma-ketliklar to'plami. $c_0 -$ nolga yaqinlashuvchi barcha ketma-ketliklar to'plami. $\ell_2 -$ kvadrati bilan jamlanuvchi barcha ketma-ketliklar to'plami, ya'ni

$$\ell_2 = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

$\ell_p (p \geq 1) -$ absolyut qiymatining $p-$darajalaridan tuzilgan qator yaqinlashuvchi bo'lgan barcha ketma-ketliklar to'plami, ya'ni

$$\ell_p = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

Xususan $p = 1$ da ℓ_p to'plam – hadlarining modullaridan tuzilgan qator yaqinlashuvchi bo'ladigan barcha ketma-ketliklardan iborat bo'ladi. $C[a, \ b]-$ $[a, \ b]$ kesmada aniqlangan barcha uzluksiz funksiyalar to'plami. $M[a, \ b] -$ $[a, \ b]$ kesmada aniqlangan chegaralangan funksiyalar to'plami. $C^{(1)}[a, \ b] -$ $[a, \ b]$ kesmada aniqlangan barcha uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to'plami. $C^{(n)}[a, \ b]-[a, \ b]$ kesmada aniqlangan n marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to'plami. $V[a, \ b] - [a, \ b]$ kesmada aniqlangan o'zgarishi chegaralangan funksiyalar to'plami. $AC[a, \ b] - [a, \ b]$ kesmada aniqlangan barcha absolyut uzluksiz funksiyalar to'plami. $\widetilde{L}_p[a, \ b]-$ o'lchovli va $[a, \ b]$

kesmada $(p \geq 1)$ $p-$ darajasi bilan Lebeg ma'nosida integrallanuvchi bo'lgan funksiyalar to'plami. $\widetilde{L}_p^{(0)}[a,\ b] \subset \widetilde{L}_p[a,\ b]$ bilan nolga ekvivalent funksiyalar to'plamini belgilaymiz. Agar $f-g \in \widetilde{L}_p^{(0)}[a,\ b]$ bo'lsa ularni φ munosabatda deymiz. Bu munosabat ekvivalentlik munosabati bo'ladi va u $\widetilde{L}_p[a,\ b]$ ni o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajratadi. Hosil bo'lgan sinflar to'plamini $L_p[a,\ b]$ bilan belgilaymiz. Xususan $p=1$ bo'lganda, $[a,\ b]$ kesmada Lebeg ma'nosida integrallanuvchi ekvivalent funksiyalar sinflari to'plami hosil bo'ladi va u $L_1[a,\ b]$ bilan belgilanadi. Xuddi shunday $p=2$ bo'lganda $[a,\ b]$ kesmada kvadrati Lebeg ma'nosida integrallanuvchi bo'lgan ekvivalent funksiyalar sinflari hosil bo'ladi va u $L_2[a,\ b]$ bilan belgilanadi.

Bu paragrafda metrik fazolar va akslantirishlarga doir misollar qaraladi.

11.1. $\mathbb{R}^2$ to'plamda $x=(x_1,\, x_2)$ va $y=(y_1,\, y_2)$ elementlar uchun kiritilgan ushbu

$$\rho_1(x,y) = |\,x_1 - y_1| + |\,x_2 - y_2|\,; \qquad \rho_2(x,y) = |\,x_1 - x_2| + |\,y_1 - y_2|\,;$$

$$\rho_3(x,y) = |\,x_1 - y_2| + |\,x_2 - y_1|\,; \qquad \rho_4(x,y) = |\,x_1x_2 - y_1y_2|$$

akslantirishlardan qaysi biri metrika bo'ladi?

Yechish. ρ_1 akslantirishning metrika aksiomalarini qanoatlantirishini tekshiramiz.

$\rho_1(x,y) \geq 0$ shart modulning manfiymasligidan kelib chiqadi. Faraz qilaylik, $\rho_1(x,y) = |x_1-y_1|+|x_2-y_2| = 0$ bo'lsin. U holda $|x_1-y_1| = |x_2-y_2| = 0$ bo'ladi. Bundan $x_1=y_1,\ \ x_2=y_2$, ya'ni $x=y$. Endi $x=y$ bo'lsin, ya'ni $x_1=y_1,\ \ x_2=y_2$. Bu yerdan

$$\rho_1(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2| = 0$$

ekanligini olamiz. Demak, 1-aksioma bajariladi. Quyidagi tenglikdan

$$\rho_1(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2| = |y_1-x_1| + |y_2-x_2| = \rho_1(y,\, x)$$

2-aksiomaning bajarilishi kelib chiqadi. Nihoyat,

$$\rho_1(x,z) = |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| = |x_1 - y_1 + y_1 - z_1| + |x_2 - y_2 + y_2 - z_2| \leq$$

$$\leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2| = \rho_1(x,\, y) + \rho_1(y,\, z)$$

tengsizlikdan 3-aksiomaning bajarilishi kelib chiqadi. Shunday qilib, $\left(\mathbb{R}^2,\, \rho_1\right) = \mathbb{R}^2_1$ metrik fazo bo‘ladi. $\square$

11.2. $\rho\left(x,y\right) = \sup\limits_{1\leq n<\infty} |x_n - y_n|\ ,\ x, y \in c_0$ akslantirishning metrika shartlarini qanoatlantirishini tekshiring.

Yechish. $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar nolga yaqinlashuvchi bo‘lganligi uchun ular chegaralangan bo‘ladi. Shuning uchun $\sup\limits_{1\leq n<\infty} |x_n - y_n|$ barcha $x, y \in c_0$ larda chekli bo‘ladi. Ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ da $|x_n - y_n| \geq 0$ ekanligidan $\rho(x,y) = \sup\limits_{n\geq 1} |x_n - y_n| \geq 0$ ekanligi kelib chiqadi. Endi $\rho(x,y) = \sup\limits_{n\geq 1} |x_n - y_n| = 0$ bo‘lsin, u holda barcha $n \in \mathbb{N}$ larda $|x_n - y_n| = 0$ bo‘ladi. Bu yerdan $x = y$ tenglikka kelamiz. Agar $x = y$ bo‘lsa, u holda $\rho(x,y) = 0$ bo‘ladi. Demak, 1-shart bajarilar ekan. $|x_n - y_n| = |y_n - x_n|$ tenglikdan 2-shartning bajarilishi kelib chiqadi. Uchburchak tengsizligi

$$|x_n - z_n| \leq |x_n - y_n| + |y_n - z_n|\,, \qquad \sup_n (x_n + y_n) \leq \sup_n x_n + \sup_n y_n$$

tengsizliklardan kelib chiqadi. Demak, berilgan $\rho : c_0 \times c_0 \to \mathbb{R}$ akslantirish uchun metrikaning barcha shartlari bajariladi. $\square$

11.3. $\rho\left(x,y\right) = \left(x-y\right)^2,\ \ x,\ y \in \mathbb{R}$ akslantirish metrikaning qaysi shartini qanoatlantirmasligini aniqlang.

Yechish. $\rho\left(x,y\right) = \left(x-y\right)^2,\ x,\ y \in \mathbb{R}$ akslantirish metrikaning $1-$ va $2-$ shartlarini qanoatlantiradi. Bu akslantirish uchun uchburchak tengsizligi o‘rinli emasligini ko‘rsatamiz. Buning uchun $x = 0,\ \ y = 3,\ \ z = 5$ nuqtalarni olamiz. U holda $\rho(x,z) = 25,\ \ \rho(x,y) = 9,\ \ \rho(y,z) = 4$ bo‘lib,

$$25 = \rho(x,z) > \ \rho(x,y)\ +\ \rho(y,z) = 9 + 4 = 13.$$

Demak, ρ uchun uchburchak aksiomasi o'rinli emas. $\square$

11.4. $X = AC[0,\pi]$, $x(t) = \sin t$, $y(t) = 0$ metrik fazoda $x \in X$ va $y \in X$ elementlar orasidagi masofani toping.

Yechish. $AC[0,\pi]$ metrik fazoda x va y nuqtalar orasidagi masofa $\rho(x,y) = |x(0) - y(0)| + V_0^{\pi}[x - y]$ tenglik bilan hisoblanadi. Ma'lumki, $x(t) = \sin t$ funksiyaning $[0,\ \pi]$ kesmadagi to'la o'zgarishi 2 ga teng. Shuning uchun $x(t) = \sin t$ va $y(t) = 0$ nuqtalar orasidagi masofa quyidagiga teng: $\rho(x,y) = |x(0) - y(0)| + V_0^{\pi}[x - y] = V_0^{\pi}[x] = 2.$ $\square$

Uy vazifalari va mavzuni o'zlashtirish uchun masalalar

11.5. $\mathbb{R}$ sonlar o'qida $\rho(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$ akslantirish metrika bo'lishini tekshiring. $\rho_1(x,y) = \operatorname{arctg}|x - y|$ akslantirish $\mathbb{R}$ to'plamda metrika bo'ladimi?

11.6. $\mathbb{R}^n$ to'plamda ushbu akslantirishlar metrika bo'ladimi?

$$\rho_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|; \qquad \rho_2(x,y) = \left| \max_{1\le k\le n}(x_k - y_k) \right|;$$

$$\rho_3(x,y) = \begin{cases} 1, & agar\ \ x \neq y \\ 0, & agar\ \ x = y \end{cases}; \qquad \rho_4(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sign}|x_k - y_k|.$$

11.7. $\mathbb{R}^3$ fazoda boshi koordinatalar markazida bo'lgan barcha birlik (uzunligi birga teng) vektorlar to'plamida

$$\rho(\vec{x},\ \vec{y}) = \arccos(\vec{x},\ \vec{y}) = \arccos(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$$

akslantirish metrika bo'lishini isbotlang.

11.8. $[0,\ 1]$ kesmadagi barcha ochiq to'plamlardan iborat sistema X bo'lsin. Agar $\mu-$ sonlar o'qidagi Lebeg o'lchovi bo'lsa,

$$\rho(A,\ B) = \mu(A \,\Delta\, B)$$

akslantirish X da metrika bo'lishini isbotlang.

11.9. Barcha ko'phadlardan iborat $\mathbb{P}$ to'plamda

$$\rho(p,\, q) = \sum_{i=0}^{\infty} \left| p^{(i)}(0) - q^{(i)}(0) \right|$$

akslantirish metrika bo'lishini isbotlang.

11.10. Natural sonlar to'plami $\mathbb{N}$ da

$$\rho_1\,(n,\, m) = |e^{in} - e^{im}|\ ;\ \rho_2\,(n, m) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n+m},\ agar\ \ n \neq m \\ 0,\ agar\ \ n = m \end{cases};$$

akslantirishlar metrika bo'lishini isbotlang.

11.11. Butun sonlar to'plami $\mathbb{Z}$ da

$$\rho_1\,(n, m) = \frac{|m - n\,|}{\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{1+n^2}}; \qquad \rho_2\,(n,\, m) = 10^{-k},$$

(bu yerda k son $|\,n - m\,|$ ayirmaning oxiridagi nollar soni, agar $n = m$ bo'lsa, $k = \infty$ deb hisoblaymiz) ifodalar metrika bo'lishini ko'rsating.

11.12. Ushbu $|\,z\,| < 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi kompleks sonlar to'plamida

$$\rho(z_1,\, z_2) = \ln \frac{1 + \left|\dfrac{z_2 - z_1}{1 - z_2\bar{z}_1}\right|}{1 - \left|\dfrac{z_2 - z_1}{1 - z_2\bar{z}_1}\right|}$$

akslantirish metrika bo'lishini isbotlang. Bu metrika *Lobachevskiy metrikasi* deyiladi.

11.13. $[a,\, b]$ kesmada aniqlangan x funksiya uchun shunday α va β o'zgarmas sonlar mavjud bo'lib, barcha $t_1,\, t_2 \in [a,\, b]$ lar uchun

$$|\,x\,(t_1) - x\,(t_2)\,| \leq \beta \cdot |\,t_1 - t_2|^{\alpha}$$

tengsizlik bajarilsa, x funksiya α *ko'rsatkichli Gyolder shartini qanoatlantiradi* deyiladi. Bu shartni qanoatlantiruvchi barcha funksiyalar to'plamini $H^{\alpha}[a,\, b]$ orqali belgilaylik. Agar $\alpha > 1$ bo'lsa, $H^{\alpha}[a,\, b]$ faqat o‘zgarmas funksiyalardan iborat ekanligini isbotlang. Agar $0 < \alpha \le 1$ bo‘lsa,

$$\rho(x, y) = \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)| + \sup_{t_1 \ne t_2} \frac{|(x(t_1) - y(t_1)) - (x(t_2) - y(t_2))|}{|t_1 - t_2|^\alpha}$$

akslantirish $H^\alpha[a,\ b]$ to‘plamda metrika bo‘lishini isbotlang. $H^\alpha[a,\ b]$ Gyolder fazosi, $\alpha = 1$ bo‘lganda *Lipshits fazosi* deyiladi.

11.14. $[a,\ b]$ kesmada cheksiz marta differensiallanuvchi funksiyalar to‘plami $C^\infty[a,\ b]$ da

$$\rho(x,\ y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\max\limits_{a \le t \le b} \left|x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)\right|}{1 + \max\limits_{a \le t \le b} \left|x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)\right|}$$

akslantirish metrika bo‘lishini isbotlang.

11.15. (X, ρ) metrik fazo bo‘lsa, X to‘plamda

$$\rho_1(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}; \qquad \rho_2(x, y) = \ln(1 + \rho(x, y));$$

$$\rho_3(x, y) = e^{\rho(x,y)} - 1; \qquad \rho_4(x, y) = \min\{1;\ \rho(x, y)\}$$

akslantirishlarning har biri metrika bo‘lishini isbotlang.

11.16-11.34-misollarda $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ akslantirishning metrika shartlarini qanoatlantirishini tekshiring. *Ular asosiy metrik fazolardir.*

11.16. $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$, $x,\ y \in \mathbb{R}^n$.

11.17. $\rho_\infty(x,\ y) = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$, $x,\ y \in \mathbb{R}^n$.

11.18. $\rho_1(x,\ y) = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$, $x,\ y \in \mathbb{R}^n$.

11.19. $\rho_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p}$, $p \ge 1$, $x,\ y \in \mathbb{R}^n$.

11.20. $\rho(x,y) = \sup\limits_{1 \le n < \infty} |x_n - y_n|\ ,\ x, y \in m.$

11.21. $\rho(x,y) = \sup\limits_{1 \le n < \infty} |x_n - y_n|\ ,\ x, y \in c.$

11.22. $\rho(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2}\ ,\ x,\ y \in \ell_2.$

11.23. $\rho(x,\ y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|,\ \ x,\ y \in \ell_1.$

11.24. $\rho(x,y) = \sqrt[p]{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p}\ ,\ x,\ y \in \ell_p.$

11.25. $\rho(f,g) = \max\limits_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|\ ,\ f,\ g \in C[a,\ b].$

11.26. $\rho_1(f,\ g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx,\ \ f,\ g \in C[a,\ b].$

11.27. $\rho_2(f,\ g) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2\, dx},\ \ f,\ g \in C[a,\ b].$

11.28. $\rho_p(f,\ g) = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x) - g(x)|^p\, dx},\ \ \ p \ge 1,\ \ f,\ g \in C[a,\ b].$

11.29. $\rho(x,y) = \max\limits_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)| + \max\limits_{a \le t \le b} |x'(t) - y'(t)|,\ \ \ x, y \in C^{(1)}[a,\ b].$

11.30. $\rho(x,y) = |x(a) - y(a)| + V_a^b[x - y],\ \ x,\ y \in V[a,\ b].$

11.31. $\rho(x,y) = |x(a) - y(a)| + V_a^b[x - y],\ \ x,\ y \in AC[a,\ b].$

11.32. $\rho(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx,\ \ \ \ f,\ g \in L_1[a,\ b].$

11.33. $\rho(f,g) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx},\ \ \ \ f,\ g \in L_2[a,\ b].$

11.34. $\rho(f,g) = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx},\ \ p \ge 1,\ \ f,\ g \in L_p[a,\ b].$

Yuqorida aytilganiga amal qilib quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$(\mathbb{R}^n,\ \rho_1) = \mathbb{R}^n_1,\quad (\mathbb{R}^n,\ \rho_p) = \mathbb{R}^n_p,\quad (\mathbb{R}^n,\ \rho_\infty) = \mathbb{R}^n_\infty,\quad (\mathbb{R}^n,\ \rho) = \mathbb{R}^n.$$

$$(C[a,\ b], \rho_1) = C_1[a,\ b],\ \ (C[a,\ b], \rho_2) = C_2[a,\ b],\ \ (C[a,\ b], \rho_p) = C_p[a,\ b].$$

11.35-11.43-misollarda $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ akslantirish metrikaning qaysi shartini qanoatlantirmasligini aniqlang.

11.35. $\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ EKUK(x,\ y), & x \neq y \end{cases}, \quad x,\ y \in \mathbb{N}.$

11.36. $\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ EKUB(x,\ y), & x \neq y \end{cases}, \quad x,\ y \in \mathbb{N}.$

11.37. $\rho(x,y) = |\sin x - \sin y|\,, \ x,\ y \in \mathbb{R}.$

11.38. $\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x < y \\ 2, & x > y, \end{cases} \quad x,\ y \in \mathbb{R}.$

11.39. $\rho(x,y) = |x_1 - y_2| + |y_1 - x_2|\,, \ \ x,\ y \in \mathbb{R}^2.$

11.40. $\rho(x,y) = |x_1 - y_1| + 2\,|x_2 - y_2|^2\,, \ \ x,\ y \in \mathbb{R}^2.$

11.41. $\rho(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|\,, \ \ x,\ y \in \mathbb{R}^3.$

11.42. $\rho(f,g) = |f(0) - g(0)| + |f(1) - g(1)|\,, \ \ f,g \in C[0,1].$

11.43. $\rho(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2\,, \ x,y \in \ell_2.$

11.44-11.58-misollarda $x \in X$ va $y \in X$ elementlar orasidagi masofani toping. Masofa ko‘rsatilmagan misollarda tabiiy metrika qaraladi. Ularni 11.16-11.34 misollardan qarab oling.

11.44. $X = \mathbb{N}, \quad x = 5, \ \ y = 25, \ \ \rho(x,y) = 0,1 \cdot |x - y|\,.$

11.45. $X = \mathbb{R}^3, \quad x = (8,\ 4,\ 3), \quad y = (6,\ 0,\ -1).$

11.46. $X = \mathbb{R}^4_\infty, \quad x = (-1,\ -2,\ 3,\ 0), \quad y = (4,\ 2,\ 0,\ -2).$

11.47. $X = \mathbb{R}^4_1, \quad x = (4,\ 5,\ 0,\ 1), \quad y = (-3,\ 0,\ 2,\ 7).$

11.48. $X = P_{\leq n}, \ \ x(t) = 1 + t, \ \ y(t) = 2t, \quad \rho(x,\ y) = \int\limits_0^1 |x(t) - y(t)|\,dt.$

11.49. $X = C[0,\ \pi], \quad x(t) = \sin t, \quad y = \cos t.$

11.50. $X = C_2[-\pi, \pi], \quad x(t) = e^{it}, \quad y(t) = e^{-it}.$

11.51. $X = m, \quad x_n = (-1)^n, \quad y_n = \dfrac{n}{n+1}.$

11.52. $X = c, \quad x_n = \dfrac{n+1}{n}, \quad y_n = 1 - (-1)^n \dfrac{1}{n}.$

11.53. $X = c_0, \quad x_n = 2^{2-n}, \quad y_n = -2^{1-n}$.

11.54. $X = \ell_2, \quad x = (1, 1, 0, 1, 0, 0, ...), \quad y = (0, 0, 0, ...)$.

11.55. $X = L_1[0, \ \pi], \quad x(t) = \sin t, \quad y(t) = \cos t.$

11.56. $X = L_2[0, \ \pi], \quad x(t) = \sin t, \quad y(t) = \cos t.$

11.57. $X = V[-\pi, \pi], \quad x(t) = \cos t, \quad y(t) = 1.$

11.58. $X = M[0, \ 2\pi], \ \rho(x, y) = \sup\limits_{0 \le t \le 4} |x(t) - y(t)|, \ x(t) = t, \ y(t) = \sin t.$

12-§. Yaqinlashuvchi va fundamental ketma-ketliklar

X metrik fazoda $x_1, \ x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ketma-ketlik va x nuqta berilgan bo‘lsin. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$ munosabat bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik x nuqtaga *yaqinlashadi* deyiladi. x nuqta esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *limiti* deyiladi. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday N_ε natural son mavjud bo‘lib, barcha $n > N_\varepsilon$ va $m > N_\varepsilon$ lar uchun $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\{x_n\}$ *ga fundamental ketma-ketlik* deyiladi.

12.1. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0$ va $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(y_n, x_0) = 0$ ekanligini isbotlang.

Isbot. Metrikaning 1 va 3-aksiomalaridan foydalansak,

$$0 \le \rho(y_n, x_0) \le \rho(y_n, x_n) + \rho(x_n, x_0)$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Bu sonli tengsizlkda limitga o‘tib,

$$\lim_{n\to\infty} \rho(y_n, x_0) = 0$$

ni olamiz. □

12.2. $x_n(t) = n^2 t \cdot e^{-nt}$ funksiyalar ketma-ketligi $x(t) = 0$ funksiyaga har bir nuqtada yaqinlashuvchi, ammo $C_1[0,\ 1]$ metrik fazoda yaqinlashuvchi emas. Isbot qiling.

Isbot. Har bir $t \in [0,\ 1]$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = 0$ tenglik matematik analiz kursidan ma'lum. Demak, $x_n(t)$ funksiyalar ketma-ketligi $x(t) = 0$ funksiyaga har bir nuqtada yaqinlashadi. Endi $\rho_1(x_n,\ 0)$ masofani hisoblaymiz.

$$\rho_1(x_n, x) = \int\limits_0^1 |x_n(t) - 0|\, dt = \int\limits_0^1 |x_n(t)|\, dt = \int\limits_0^1 n^2 t e^{-nt} dt = 1 - (n+1)e^{-n}.$$

Integralni hisoblashda bo'laklab integrallash usulidan foydalanildi. Bu yerdan

$$\lim_{n\to\infty} \rho_1(x_n,\ x) = 1$$

ni olamiz. Demak, $\{x_n\}$ ketma-ketlik $x(t) = 0$ funksiyaga $C_1[0,\ 1]$ fazo metrikasida yaqinlashuvchi emas. $\square$

Uy vazifalari va mavzuni o'zlashtirish uchun masalalar

12.3. (X, ρ) metrik fazoning ixtiyoriy $x,\ y,\ z,\ t$ nuqtalari uchun

a) $|\,\rho(x, z) - \rho(y, t)\,| \le \rho(x, y) + \rho(z, t)$;

b) $|\,\rho(x, z) - \rho(y, z)\,| \le \rho(x, y)$ tengsizliklarni isbotlang.

12.4. $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_{2n}, a) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_{2n+1}, b) = 0$ va $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, c) = 0$ bo'lsa, $a = b = c$ hamda $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0$ munosabatlarni isbotlang.

12.5. $C[0,\ 1]$ metrik fazoda ushbu

a) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$; b) $y_n(t) = t^n - t^{2n}$;

c) $z_n(t) = t^n - 2t^{n+1} + t^{n+2}$; d) $u_n(t) = \dfrac{t^n}{n} - \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$

ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'ladimi?

12.6. Oldingi misoldagi funksiyalar ketma-ketligi $C^{(1)}[0,\ 1]$, $C_1[0,\ 1]$ metrik fazolarda yaqinlashuvchi bo‘ladimi?

12.7. $C_1[0,\ 1]$ metrik fazoda yaqinlashuvchi, ammo $C[0,\ 1]$ metrik fazoda yaqinlashuvchi bo‘lmagan $x_n(t)$ uzluksiz funksiyalar ketma-ketligiga misol keltiring.

12.8. $C_1[0,\ 1]$ metrik fazoda $x(t) = 0$ funksiyaga yaqinlashuvchi, ammo hech bir $t \in [0,\ 1]$ nuqtada 0 ga yaqinlashmaydigan funksiyalar ketma-ketligiga misol keltiring.

12.9. Agar $x_n(t)$ uzluksiz funksiyalar ketma-ketligi $C[0,\ 1]$ metrik fazoda $x\,(t)$ funksiyaga yaqinlashsa, bu ketma-ketlik $C_1[0,\ 1]$ va $C_2[0,\ 1]$ metrik fazolarda ham shu $x\,(t)$ funksiyaga yaqinlashadi. Isbotlang.

12.10. $C[0,\ 1]$ metrik fazoda yaqinlashuvchi, ammo $C^{(1)}[0,\ 1]$ metrik fazoda yaqinlashuvchi bo‘lmagan uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalardan iborat ketma-ketlikka misol keltiring.

12.11. Ushbu

a) $x_n = (1,\ 2,\ \ldots, n,\ 0, \ldots)\,;$ b) $y_n = (-1,\ 2,\ \ldots,\ (-1)^n\, n,\ 0, \ldots)\,;$

c) $z_n = (\underbrace{1,\ 1,\ \ldots,\ 1}_{n},\ 0, \ldots);$ d) $u_n = \left(1,\ \dfrac{1}{2}, \ldots,\ \dfrac{1}{n},\ 0, \ldots\right);$

e) $e_n = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{n},\ 0,\ \ldots);$ f) $w_n = (\underbrace{\dfrac{1}{n^\alpha},\ \ldots, \dfrac{1}{n^\alpha}}_{n}, 0, \ldots);\ \alpha > 0$

ketma-ketliklarning qaysilari c_0, c, ℓ_p , m metrik fazolarda yaqinlashuvchi bo‘ladi.

12.12. $\mathbb{R}$ da metrika $\rho\,(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y\,|$ tenglik bilan aniqlangan bo‘lsin. U holda ixtiyoriy monoton ketma-ketlik (masalan, $x_n = n$) fundamentaldir. Isbotlang.

12.13. Biror qismiy ketma-ketligi yaqinlashuvchi bo‘lgan fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchidir. Isbotlang.

12.14. Biror tayinlangan $\varepsilon > 0$ son uchun $\rho(x_k, x_m) \geq \varepsilon > 0, \quad k \neq m$ shartni qanoatlantiruvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi va hatto fundamental qismiy ketma-ketlik ajratib olish mumkin emas. Isbotlang.

12.15. (X, ρ) metrik fazo, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ esa undan olingan fundamental ketma-ketliklar bo‘lsin. U holda $\{a_n = \rho(x_n, y_n)\}$ sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang.

12.16. $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo‘lsin. Agar biror $\{y_n\}$ ketma-ketlik uchun $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$ bo‘lsa, $\{y_n\}$ ketma-ketlik ham fundamental bo‘lishi kelib chiqadimi?

12.17. $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ fundamental ketma-ketliklar uchun

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$$

shart bajarilsa, bu ketma-ketliklarni ekvivalent deylik va $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ ko‘rinishda yozaylik. Bu (vaqtincha) kiritilgan munosabat refleksiv, simmetrik va tranzitiv ekanligi, ya’ni haqiqatan ham ekvivalentlik munosabati bo‘lishini isbotlang.

12.18. $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, $\{t_n\}$ fundamental ketma-ketliklar uchun $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ va $\{z_n\} \sim \{t_n\}$ bo‘lsa, quyidagi tenglikni isbotlang

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, z_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, t_n).$$

13-§. Ochiq va yopiq to‘plamlar

Bizga X metrik fazo, uning x_0 nuqtasi va $r > 0$ son berilgan bo‘lsin. X metrik fazoda markazi x_0 nuqtada, radiusi r bo‘lgan *ochiq shar deb*

$\{x \in X : \rho(x, x_0) < r\}$ to‘plamga aytiladi va u $B(x_0, r)$ kabi belgilanadi. Berilgan $x_0 \in X$ va $r > 0$ da $\rho(x, x_0) \leq r$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ elementlar to‘plami $B[x_0, r]$ orqali belgilanadi va u markazi x_0 nuqtada, radiusi r bo‘lgan *yopiq shar* deyiladi. $\rho(x, x_0) = r$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ elementlar to‘plami $S[x_0, r]$ orqali belgilanadi va u markazi x_0 nuqtada, radiusi r bo‘lgan *sfera* deyiladi. Metrik fazoda markazi x_0 nuqtada va radiusi $\varepsilon > 0$ bo‘lgan $B(x_0, \varepsilon)$ ochiq shar x_0 *nuqtaning* $\varepsilon-$ *atrofi* deyiladi va u $O_\varepsilon(x_0)$ ko‘rinishda belgilanadi. X metrik fazo, M uning qism to‘plami va $x \in X$ bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $O_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$ munosabat bajarilsa, x nuqta M ning *urinish nuqtasi* deyiladi. M to‘plamning barcha urinish nuqtalaridan iborat to‘plam M ning *yopig‘i* deyiladi va u $[M]$ yoki $\overline{M}$ ko‘rinishda belgilanadi. Agar $x \in X$ ning ixtiyoriy $O_\varepsilon(x)$ atrofi M ning cheksiz ko‘p elementlarini saqlasa, u holda $x \in X$ nuqta M to‘plamning *limitik nuqtasi* deyiladi. M to‘plamga tegishli x nuqta uchun shunday $\varepsilon > 0$ mavjud bo‘lib, $O_\varepsilon(x) \cap M = \{x\}$ bo‘lsa, u holda x nuqta M to‘plamning *yakkalangan (yolg‘iz) nuqtasi* deyiladi. Agar X metrik fazodagi M to‘plam uchun $M = [M]$ tenglik bajarilsa, M *yopiq to‘plam* deyiladi. Boshqacha aytganda, agar to‘plam o‘zining barcha limitik nuqtalarini saqlasa, u *yopiq to‘plam* deyiladi. Agar $x \in M$ nuqta uchun shunday $\varepsilon > 0$ mavjud bo‘lib, $O_\varepsilon(x) \subset M$ bo‘lsa, x nuqta M to‘plamning *ichki nuqtasi* deyiladi. Agar to‘plamning barcha nuqtalari ichki nuqta bo‘lsa, u *ochiq to‘plam* deyiladi. Ya’ni faqat ichki nuqtalardan tashkil topgan to‘plam *ochiq to‘plam* deyiladi. Agar metrikaning 3-aksiomasi, ya’ni uchburchak tengsizligi $\rho(x, z) \leq \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}$ tengsizlik bilan almashtirilsa, (X, ρ) ga *ultrametrik fazo* deyiladi. Ochiq va yopiq to‘plamlar haqida quyidagi tasdiqlar o‘rinli.

13.1-teorema. *Ixtiyoriy sondagi yopiq to‘plamlar kesishmasi va chekli* *sondagi yopiq to‘plamlar yig‘indisi yopiqdir.*

13.2-teorema. *Ixtiyoriy sondagi ochiq to‘plamlar yig‘indisi va chekli sondagi ochiq to‘plamlar kesishmasi yana ochiq to‘plamdir.*

13.3-teorema. *M to‘plam ochiq bo‘lishi uchun uning butun fazogacha to‘ldiruvchisi $X\backslash M$ yopiq bo‘lishi zarur va yetarli.*

13.1. $\mathbb{R}$ da ochiq va yopiq to‘plamlarning tuzilishi

Ixtiyoriy metrik fazodagi ochiq va yopiq to‘plamlar haqida 13.1-13.3-teoremalar o‘rinli. Sonlar o‘qidagi ochiq to‘plam tavsifi quyidagi teorema orqali ifodalanadi.

13.4-teorema. *Sonlar o‘qidagi ixtiyoriy ochiq to‘plam chekli yoki sanoqli sondagi o‘zaro kesishmaydigan intervallar yig‘indisi ko‘rinishida tasvirlanadi.*

13.1. Kattaroq radiusli shar kichikroq radiusli sharning qismi bo‘lishi mumkinmi? Misol keltiring.

Yechish. Faraz qilaylik, $X = \mathbb{R}_+$ va $\rho(x,y) = |x-y|$ bo‘lsin. Agar $B(1,5) = \{x \in [0,\ \infty):\ |x-1| < 5\}$ deb markazi 1 nuqtada va radiusi 5 ga teng sharni, hamda $B(3,4) = \{x \in [0,\ \infty):\ |x-3| < 4\}$ deb markazi 3 nuqtada va radiusi 4 ga teng bo‘lgan ochiq sharlarni olsak, u holda
$r_2 = 5 > r_1 = 4$, ammo $[0,\ 6) = B(1,5) \subset B(3,4) = [0,\ 7)$. □

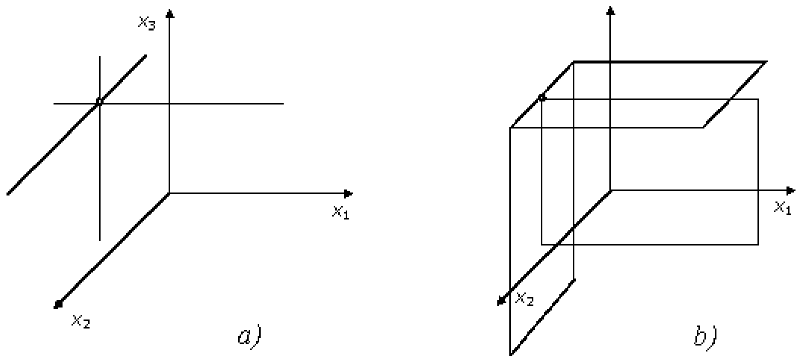
13.2. $\mathbb{R}^3$ to‘plamda

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \operatorname{sign} |\, x_i - y_i|$$

metrika kiritilgan. Markazi (0, 1, 2) nuqtada radiusi esa a) 1 ga; b) 2 ga; c) 3 ga teng bo‘lgan sferalarni chizing.

Yechish. Radiusi 1 ga teng sfera - $(0,\ 1,\ 2)$ nuqtadan o‘tuvchi va koordinata o‘qlariga parallel to‘g‘ri chiziqlardan ularning kesishish nuqtasi $(0,\ 1,\ 2)$

nuqtani chiqarib tashlashdan hosil bo‘lgan to‘plam bo‘ladi, 13.1 chizmaning a) siga qarang. Radiusi 2 ga teng sfera - $(0,\ 1,\ 2)$ nuqtadan o‘tuvchi va koordinata tekisliklariga parallel tekisliklardan, har juft tekislikning kesishish chizig‘ini chiqarib tashlashdan hosil bo‘lgan to‘plam bo‘ladi, 13.1 chizmaning b) siga qarang. Radiusi 3 ga teng sfera – $\mathbb{R}^3$ fazodan $(0,\ 1,\ 2)$ nuqtadan o‘tuvchi va koordinata tekisliklariga parallel tekisliklarni chiqarib tashlashdan hosil bo‘lgan to‘plam bo‘ladi. $\square$



13.1-chizma

13.3. Diskret metrik fazoda har qanday to‘plam ham ochiq, ham yopiq to‘plam ekanligini isbotlang.

Isbot. Diskret metrik fazoda ixtiyoriy M uchun $[M] = M$ tenglik o‘rinli. Shuning uchun M yopiq to‘plam. Faraz qilaylik, $x \in M$ ixtiyoriy nuqta bo‘lsin, u holda ixtiyoriy $\varepsilon \in (0,\ 1)$ uchun $O_\varepsilon(x) = \{x\}$ atrof M da saqlanadi. Demak, M ochiq to‘plam. $\square$

13.4. Interval ochiq, kesma yopiq to‘plam ekanligini isbotlang.

Isbot. $\mathbb{R}$ da ixtiyoriy $(a,\ b)$ interval ochiq to‘plamdir. Haqiqatan ham, agar $x \in (a,\ b)$ desak, $\varepsilon = \min\{x - a,\ b - x\}$ son uchun $O_\varepsilon(x) \subset (a,\ b)$. Endi $(-\infty,\ a)$ to‘plamning ochiq ekanligini ko‘rsatamiz. Agar ixtiyoriy $x \in (-\infty,\ a)$ uchun, $\varepsilon = a - x$ desak, $O_\varepsilon(x) \subset (-\infty,\ a)$. Xuddi shunday $(b,\ \infty)$ to‘plamning ochiq ekanligi ko‘rsatiladi. Ochiq to‘plamlarning birlashmasi ochiq ekanligidan $(-\infty,\ a)\cup(b,\ \infty)$ to‘plamning ochiq ekanligi kelib chiqadi. 13.3-teoremaga ko‘ra bu ochiq to‘plamning to‘ldiruvchi to‘plami bo‘lgan $[a,\ b]$ kesma yopiqdir. $\square$

13.5. $K+K:=\{z=x+y:\quad x,\,y\in K\}=[0,\ 2]$ tenglikni isbotlang.

Isbot. Kantor to‘plami K dan ixtiyoriy

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_i}{3^i}\quad \text{va}\quad y=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\delta_i}{3^i}$$

larni olamiz. Bu yerda ε_i va δ_i lar 0 yoki 2 raqamlaridan birini qabul qiladi. Agar

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_i}{3^i}=2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}\quad \text{va}\quad y=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\delta_i}{3^i}=2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{3^i}$$

shaklda yozsak, u holda a_i va b_i lar 0 yoki 1 raqamlaridan birini qabul qiladi va ularning yig‘indisi $x+y=2\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{c_i}{3^i}$, $c_i=a_i+b_i$ bo‘lib, $c_i-\ 0,\ 1$ yoki 2 raqamlaridan istalgan birini qabul qila oladi. Ya’ni $x+y,\ x\in K,\ y\in K$ shakldagi yig‘indini $[0,\ 2]$ kesmadagi ixtiyoriy songa teng qilish mumkin. Demak, $K+K=[0,\ 2]$ tenglik o‘rinli. $\square$

Uy vazifalari va mavzuni o‘zlashtirish uchun masalalar

13.6. Agar radiusi 7 ga teng bo‘lgan shar, radiusi 3 ga teng bo‘lgan shar ichiga joylashsa ular ustma-ust tushadi. Isbotlang.

13.7. $\mathbb{R}^2$ to‘plamda $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$ uchun

a) $\rho_1(x,\ y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$;

b) $\rho_2\,(x,y)=\max\left(|\,x_1-y_1|\,,\,|\,x_2-y_2|\,\right)$;

c) $\rho_3\,(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$;

d) $\rho_4(x,\ y)=\operatorname{sign}|x_1-y_1|+\operatorname{sign}|x_2-y_2|$

tengliklar orqali kiritilgan metrikalarning har birida markazi $0=(0,0)$ nuqtada va radiusi 1 ga teng ochiq shar $B(0,\ 1)$, yopiq shar $B[0,\ 1]$ va $S[0,\ 1]$ sferalarni chizib ko‘rsating.

13.8. Kengaytirilgan to‘g‘ri chiziq $\mathbb{R}^* = (-\infty,\ +\infty) \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ da

a) $\rho_1(x,y) = \dfrac{|\,x-y\,|}{1+|\,x-y\,|}$; b) $\rho_2(x,y) = \left|\dfrac{x}{1+|x|} - \dfrac{y}{1+|y|}\right|$

metrikalar kiritilgan. Agar $0 < r < 1$ bo‘lsa, $B(-\infty, r)$; $B(\infty, r)$ to‘plamlarni, ya’ni markazi $\pm\infty$, radiusi r bo‘lgan ochiq sharlarni chizing.

13.9. $M \subset (X, \rho)$ to‘plamning diametri $diamM = \sup\limits_{x,y\in M} \rho(x,y)$ tenglik bilan aniqlanadi. U holda:

a) $diamB(x_0, r) \leq 2r$ tengsizlikni isbotlang;

b) $diamB(x_0, r) < 2r$ bo‘lgan sharga misol keltiring;

c) $diamB(x_0, r) = diamB[x_0, r]$ tenglik to‘g‘rimi?

13.10. Ochiq shar - ochiq to‘plam, yopiq shar esa yopiq to‘plam bo‘lishini isbotlang.

13.11. $\mathbb{R}^2$ tekislikda $(0,\ 1)$ va $(0,\ -1)$ nuqtalardan hamda OX o‘qidagi $(-1,\ 1)$ intervaldan iborat to‘plamni M deb belgilab, M to‘plamda Evklid metrikasini kiritamiz:

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}\,; x = (x_1, x_2)\ ,\ y = (y_1, y_2) \in M.$$

U holda markazi $(0,0)$ nuqtada, radiusi 1 ga teng ochiq sharning yopiq to‘plam, ammo yopiq shar emasligini isbotlang.

13.12. Shunday yopiq sharga misol keltiringki, u ochiq to‘plam bo‘lsin, ammo ochiq shar bo‘lmasin.

13.13. Diskret metrik fazoda ixtiyoriy ikkita shar yoki kesishmaydi yoki biri ikkinchisining qismi bo‘lishini isbotlang.

13.14. Diskret metrik fazoda ixtiyoriy "uchburchak" teng tomonli, ultrametrik fazoda esa har qanday "uchburchak" teng yonli ekanligini isbotlang.

13.15. F_1 va F_2 yopiq to‘plamlar o‘zaro kesishmasin, ya’ni $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. U holda shunday $G_1 \supset F_1$ va $G_2 \supset F_2$ ochiq to‘plamlar mavjudki, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Isbot qiling.

13.16. O‘zaro kesishmaydigan intervallardan iborat to‘plamlarning quvvati chekli yoki sanoqli ekanligini isbotlang.

13.17. $\mathbb{R}$ da ixtiyoriy ochiq to‘plam chekli yoki sanoqli sondagi o‘zaro kesishmaydigan intervallarning birlashmasidan iborat bo‘lishini isbotlang. Bu yerda $(-\infty,\ a)$, $(a,\ \infty)$,
$(-\infty,\ \infty)$ va $(a,\ a) = \emptyset$ to‘plamlar ham intervallar jumlasiga kiradi.

13.18. $\mathbb{R}$ dagi ixtiyoriy yopiq to‘plamni $(-\infty,\ \infty)$ dan o‘zaro kesishmaydigan chekli yoki sanoqli sondagi intervallarni chiqarib tashlash natijasida hosil qilish mumkin. Isbot qiling.

13.19. Ixtiyoriy $x \in [0,\ 1]$ sonni uchlik kasrga yoyish mumkinligini isbotlang: $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{\varepsilon_i}{3^i}$, bu yerda ε_i – 0, 1, 2 raqamlardan biri. U holda $x = 0,\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots$ ko‘rinishda yozamiz. Agar biror $x \in [0,\ 1]$ uchun shunday n mavjud bo‘lib, $\varepsilon_n \neq 0$ va $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+2} = ... = 0$ bo‘lsa, x soni chekli uchlik kasrga yoyilgan deyiladi. Bu x sonini cheksiz yoyilma ko‘rinishda ham yozish mumkin: $x = 0,\ \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n 0 \ldots = \ = 0,\ \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1} (\varepsilon_n - 1) 22 \ldots$ masalan, 0,100... =0,0222.... F_1 orqali yoyilmasida 1 raqami qatnashmaydigan usulda yozish mumkin bo‘lgan barcha $x \in [0,\ 1]$ sonlar to‘plamini belgilaylik. Masalan, 0,1=0,0222... yoki $\dfrac{1}{4}$=0,020202.... F_1 to‘plamning yopiq va kontinuum quvvatli to‘plam ekanligini isbotlang. $F_1 = K$ to‘plam *Kantor to‘plami* deyiladi.

13.20. $0,25 \in K$ ekanligini isbotlang.

13.21. Ixtiyoriy $x \in K$ uchun shunday $y \in K$ mavjudki, $\rho(x,y) = |x - y|$ son irratsional bo‘ladi. Isbot qiling.

14-§. To'la metrik fazolar

Agar X metrik fazoda ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda X *ga to'la metrik fazo* deyiladi. X metrik fazoning ikkita A va B qism to'plamlari berilgan bo'lsin. Agar $B \subset [A]$ bo'lsa, u holda A to'plam B to'plamda *zich* deyiladi. Xususan, agar $[A] = X$ bo'lsa, A to'plam *hamma yerda zich (X da zich)* deyiladi. Agar A to'plam birorta ham sharda zich bo'lmasa (ya'ni har bir $B \subset X$ sharda A to'plam bilan umumiy elementga ega bo'lmagan B' shar saqlansa), u holda A *hech yerda zichmas* deyiladi. (X, ρ) metrik fazoda x nuqta va M to'plam *orasidagi masofa* deganda

$$\rho(x, M) = \inf_{y \in M} \rho(x, y)$$

miqdor tushiniladi. Xuddi shunday (X, ρ) metrik fazoda A va B to'plamlar *orasidagi masofa* deganda

$$\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x, y)$$

miqdor tushiniladi. Metrik fazolarning to'laligini tekshirishda quyidagi teoremadan foydalaniladi.

14.1-teorema. *X metrik fazo to'la bo'lishi uchun undagi ixtiyoriy ichma-ich joylashgan va radiuslari nolga intiluvchi yopiq sharlar ketma-ketligining kesishmasi bo'sh bo'lmasligi zarur va yetarlidir.*

Agar R metrik fazo to'la bo'lmasa, uni biror usul bilan (aslini olganda yagona usul bilan) biror to'la metrik fazo ichiga joylashtirish mumkin.

14.1-ta'rif. *Agar:* 1) *R metrik fazo R^* to'la metrik fazoning qism fazosi bo'lsa;* 2) *R to'plam R^* ning hamma yerida zich, ya'ni $[R] = R^*$ bo'lsa, u holda R^* metrik fazo R metrik fazoning to'ldirmasi deyiladi.*

14.2-teorema. *Har bir R metrik fazo to'ldirmaga ega va bu to'ldirma fazo R ning nuqtalarini qo'zg'almas holda qoldiruvchi izometriya aniqligida yagonadir.*

14.1. $\mathbb{R}$ metrik fazo to'la. Isbotlang.

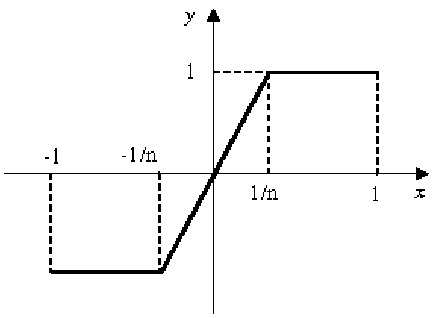
Isbot. Matematik analiz kursidan ma'lumki, ixtiyoriy fundamental sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchidir. Demak, $\mathbb{R}$ to'la metrik fazo. □

14.2. $C_1[-1,\ 1]$ metrik fazo to'la emas. Isbotlang.

Isbot. $C_1[-1,\ 1]$ fazoning to'la emasligini ko'rsatamiz. Buning uchun $C_1[-1,\ 1]$ fazoda uzluksiz funksiyalarning

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & agar \quad x \in [-1,\ -n^{-1}] \\ n\,x, & agar \quad x \in (-n^{-1},\ n^{-1}) \\ 1, & agar \quad x \in [n^{-1},\ 1] \end{cases}$$

ketma-ketligini (funksiya grafigi 14.1-chizmada keltirilgan) qaraymiz. Bu ketma-ketlik $C_1[-1,\ 1]$ fazoda fundamentaldir, chunki barcha $x \in [-1,\ 1]$ lar uchun $|f_n(x) - f_m(x)| \le 1$ ekanligini hisobga olsak va $n < m$ desak,



14.1-chizma

$$\rho(f_n, f_m) = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|dx < \int_{-1/n}^{1/n} 1dx = \frac{2}{n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Biroq $\{f_n\}$ ketma-ketlik $C_1[-1,\ 1]$ fazodagi birorta ham funksiyaga yaqinlashmaydi. Haqiqatan ham, $f \in C_1[-1,\ 1]$ ixtiyoriy funksiya va

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1, & agar \ \ x \in [-1,\ 0), \\ 1, & agar \ \ x \in [0,\ 1] \end{cases}$$

nol nuqtada uzilishga ega funksiya bo'lsin. Ko'rinib turibdiki,

$$f_n(x) - \varphi(x) = \begin{cases} 0, \quad x \in [-1, \ \ -1/n] \bigcup [1/n, \ \ 1], \\ n\,x + 1, \quad x \in (-1/n, \ 0), \\ nx - 1, \qquad x \in [0, \ 1/n). \end{cases}$$

Bundan tashqari barcha $x \in [-1, \ 1]$ lar uchun $|f_n(x) - \varphi(x)| \leq 1$. Shuning uchun

$$\int_{-1}^{1} |f_n(x) - \varphi(x)| dx = \int_{-1/n}^{1/n} |f_n(x) - \varphi(x)| dx \leq \frac{2}{n} \to 0, \ n \to \infty. \qquad (14.1)$$

Agar integralning monotonlik xossasidan foydalansak

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - \varphi(x)|\, dx \leq \int_{-1}^{1} |f(x) - f_n(x)|\, dx + \int_{-1}^{1} |f_n(x) - \varphi(x)|\, dx. \quad (14.2)$$

tengsizlikka kelamiz. Endi quyidagi

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - \varphi(x)|\, dx > 0 \qquad (14.3)$$

tengsizlikni isbotlaymiz. Uning isbotini ikki holga ajratamiz.

1) Faraz qilaylik, $f(0) \leq 0$ bo'lsin, u holda f ning uzluksizligiga ko'ra shunday $\delta_1 > 0$ mavjudki, barcha $x \in [0, \delta_1]$ lar uchun $f(x) < 1/2$ bo'ladi. Bundan

$$|f(x) - \varphi(x)| \geq 1/2, \qquad x \in [0, \ \delta_1] \qquad (14.4)$$

tengsizlik kelib chiqadi. (14.4) tengsizlikni $[0, \delta_1]$ kesma bo'yicha integrallab,

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - \varphi(x)|\, dx \geq \int_{0}^{\delta_1} |f(x) - \varphi(x)|\, dx > \frac{\delta_1}{2}$$

tengsizlikka kelamiz.

2) Agar biz $f(0) > 0$ deb faraz qilsak, u holda shunday $\delta_2 > 0$ mavjudki, barcha $x \in [-\delta_2, \ 0)$ lar uchun $|f(x) - \varphi(x)| > 1/2$ bo'ladi. Bundan

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - \varphi(x)|\, dx \geq \int_{-\delta_2}^{0} |f(x) - \varphi(x)|\, dx > \frac{\delta_2}{2}.$$

Demak, (14.3) tengsizlik isbot bo‘ldi. (14.2) tengsizlikdan

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - f_n(x)|\, dx \geq \int_{-1}^{1} |f(x) - \varphi(x)|\, dx - \int_{-1}^{1} |f_n(x) - \varphi(x)|\, dx \qquad (14.5)$$

ni olamiz. (14.1), (14.3) va (14.5) lardan

$$\rho\,(f, f_n) = \int_{-1}^{1} |f\,(x) - f_n\,(x)|\, dx$$

ning nolga yaqinlasha olmasligi kelib chiqadi, ya’ni $\{f_n\}$ ketma-ketlik $C_1[-1,\ 1]$ dagi birorta ham funksiyaga yaqinlasha olmaydi. □

14.1. Separabel metrik fazolar

Hamma yerda zich sanoqli qism to‘plamga ega bo‘lgan metrik fazolar *separabel metrik fazolar* deyiladi. M to‘plamning barcha ichki nuqtalaridan iborat to‘plam M to‘plamning *ichi* deyiladi va $\overset{0}{M}$ bilan belgilanadi. A to‘plamning *chegarasi* $FrA = \overline{A} \cap \overline{(X \backslash A)}$ tenglik bilan aniqlanadi.

14.3-teorema *(Ber teoremasi). To‘la metrik fazoni hech yerda zich bo‘lmagan sanoqli sondagi to‘plamlar yig‘indisi ko‘rinishida tasvirlash mumkin emas.*

Endi, mukammal to‘plam, 1-va 2-kategoriya to‘plamlar tushunchalarini keltiramiz. M to‘plamning barcha limitik nuqtalaridan iborat to‘plamni M' bilan belgilaymiz. Agar $M = M'$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, M ga *mukammal to‘plam* deyiladi. Agar X to‘la metrik fazodagi M to‘plamni hech yerda zich bo‘lmagan sanoqli sondagi to‘plamlar birlashmasi ko‘rinishida tasvirlash mumkin bo‘lsa M to‘plamga 1-*kategoriyali to‘plam* deyiladi. Agar M to‘plamni hech yerda zich bo‘lmagan sanoqli sondagi to‘plamlar birlashmasi ko‘rinishida tasvirlash mumkin bo‘lmasa M ga 2-*kategoriyali to‘plam* deyiladi.

14.3. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ to‘plamlarning har biri $\mathbb{R}$ metrik fazoda zich ekanligini isbotlang.

Isbot. Faraz qilaylik, $x \in \mathbb{R}$ ixtiyoriy haqiqiy son bo'lsin. U holda $x_n = [nx] : n$ ratsional sonlar ketma-ketligi x ga yaqinlashadi. Bu yerda $[x]$ deb x ning butun qismi belgilangan. Demak, ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q}$ haqiqiy sonlar to'plami $\mathbb{R}$ ning hamma yerida zich ekan. Endi irratsional sonlar to'plami $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ haqiqiy sonlar to'plami $\mathbb{R}$ da zich ekanligini isbotlaymiz. Ixtiyoriy $x \in \mathbb{R}$ haqiqiy son uchun $y_n = \dfrac{[nx]}{n} + \dfrac{\pi}{n}$ irratsional sonlar ketma-ketligi x ga yaqinlashadi. Ya'ni, $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ to'plam $\mathbb{R}$ da zich ekan. Demak, $[\mathbb{Q}] = [\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}] = \mathbb{R}$. $\square$

14.4. $\mathbb{R}$ metrik fazoda $\mathbb{Q}$ to'plam 1-kategoriyali, $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ to'plam 2-kategoriyali to'plam ekanligini isbotlang.

Isbot. Ma'lumki, $\mathbb{Q}$ - sanoqli to'plam, shuning uchun uning elementlarini $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$ ko'rinishda nomerlab chiqish mumkin. Shunday ekan

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \quad M_n = \{x_n\}$$

yoyilma o'rinli va $M_n, \ n = 1, 2, \ldots$ lar $\mathbb{R}$ ning hech yerida zich emas. Ta'rifga ko'ra $\mathbb{Q}$ 1-kategoriyali to'plam. Endi irratsional sonlar to'plami $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ ning 2-kategoriyali to'plam ekanligini isbotlaymiz. Teskaridan faraz qilaylik, $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ 1-kategoriyali to'plam bo'lsin. U holda 14.44-misolga ko'ra, to'la metrik fazo $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$, 1-kategoriyali to'plam bo'lar edi. Bu esa Ber teoremasiga zid. Demak, $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ 2-kategoriyali to'plam. $\square$

14.5. x haqiqiy sonning kasr qismi $\{x\}$ ko'rinishda belgilanadi. $\{n \cdot \sqrt{2}\}$, $n \in \mathbb{N}$ sonlar to'plami $[0, \ 1]$ kesmada zich ekanligini isbotlang. Umuman, $a-$ irratsional son bo'lsa, $\{n \cdot a\}$, $n \in \mathbb{N}$ sonlar to'plami $[0, \ 1]$ kesmada zich. Isbot qiling.

Isbot. Biz a irratsional son bo'lsa, $\{n \cdot a\}$, $n \in \mathbb{N}$ sonlar to'plamining $[0, \ 1]$ kesmada zich ekanligini ko'rsatamiz. $[0, \ 1]$ kesmani teng N bo'lakka bo'lamiz. $\{a\},\ \{2a\},\ldots,\{Na\},\{(N+1)a\}$ sonlari har xil bo'ladi. Haqiqatan ham, agar biror $k_1 \neq k_2$ uchun $\{k_1a\} = \{k_2a\}$ bo'lsa, u holda $(k_2-k_1)a = [k_2a]-[k_1a] = m$ bo'lib, $a = \dfrac{m}{k_2-k_1}$ bo'lar edi. Bu esa a ning irratsional son ekanligiga zid. $N+1$ ta $\{a\},\ \{2a\},\ldots,\{Na\},\{(N+1)a\}$ nuqta N ta

$$\left[\frac{0}{N},\frac{1}{N}\right),\ \left[\frac{1}{N},\frac{2}{N}\right),\ldots,\left[\frac{N-2}{N},\frac{N-1}{N}\right),\ \left[\frac{N-1}{N},\ \frac{N}{N}\right]$$

to'plamda yotgani bois hech bo'lmaganda ulardan ikkitasi bir oraliqqa qarashli bo'ladi. Masalan, $\{k_1a\},\ \{k_2a\} \in \left[\dfrac{\ell-1}{N},\dfrac{\ell}{N}\right)$ bo'lsin. U holda umumiylikka ziyon yetkazmagan holda $k_2 > k_1$ deb faraz qilib, $|\{k_2a\}-\{k_1a\}| < \dfrac{1}{N}$ ni olamiz. Sonning kasr qismi ta'rifiga ko'ra

$$\{k_2a\}-\{k_1a\} = (k_2a-[k_2a])-(k_1a-[k_1a]) = (k_2-k_1)a+[k_1a]-[k_2a]$$

ni olamiz. Agar $x = y+n,\ n\in\mathbb{Z}$ bo'lsa, u holda $\{x\}=\{y\}$ yoki $\{x\} = 1-\{y\}$ tenglik o'rinli bo'ladi. Demak, $|\{k_2a\}-\{k_1a\}| = \{(k_2-k_1)a\}$ yoki $|\{k_2a\}-\{k_1a\}| = 1-\{(k_2-k_1)a\}$ bo'ladi. N ixtiyoriy natural son bo'lganligi uchun shunday xulosa qilish mumkinki, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $n\in\mathbb{N}$ mavjudki, $\{na\} < \varepsilon$ yoki $1-\{na\} < \varepsilon$ tengsizligi bajariladi. Faraz qilaylik, $1-\{na\} < \varepsilon$ bo'lsin. Agar $1-\{na\} = \delta$ desak, $\delta\in(0,\ \varepsilon)$ bo'ladi. $1-\{na\} = \delta$ tenglikdan foydalanib, na uchun

$$na = [na]+1-\delta \tag{14.6}$$

ifodani olamiz. Aniqlik uchun $a > 0$ deb faraz qilamiz. U holda $[na] \geq 0$ butun son bo'ladi. Agar $1-2\delta > 0$ bo'lsa, u holda $2na = 2[na]+2-\delta$ ((14.6) ga qarang) $\{2na\} = 1-2\delta$ ni olamiz. Va hokazo agar $1-m\delta > 0$ bo'lsa, u holda $\{mna\} = 1-m\delta$ tenglik o'rinli. Shunday eng kichik m sonini topamizki $1-(m+1)\delta < 0$ bo'lsin. U holda $\delta > 1-m\delta > 0$ tengsizligi o'rinli va $\{mna\} = 1-m\delta < \delta$ tengsizlik ham bajariladi. Demak, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ mavjudki $\{n_\varepsilon a\} < \varepsilon$ tengsizligi bajariladi. Endi $x=0$ soni

$x_n = \{na\}$ ketma-ketlikning limitik nuqtasi ekanligini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $n \in \mathbb{N}$ mavjudki $0 < \{na\} = \delta < \varepsilon < 0,5$ tengsizligi bajariladi. U holda shunday eng kichik m sonini topamizki $0 < m\delta < 1$ va $(m+1)\delta > 1$ bo'lsin. U holda $\{mna\} = m\delta$ va $\{(m+1)na\} = \delta_1 < \delta, \varepsilon$ bo'ladi. Demak, $(0,\ \varepsilon)$ oraliqda $x_n = \{na\}$ ketma-ketlikning cheksizta hadi bor, ya'ni $x = 0$ bu ketma-ketlikning limitik nuqtasi. Endi ε ni yetarlicha kichik musbat son deb olamiz. U holda shunday $n \in \mathbb{N}$ soni mavjudki, $\{na\} = \delta < \varepsilon$ bo'ladi. U holda

$$\delta,\ 2\delta,\ 3\delta, \ldots,\ m\delta \in (0,\ 1) \tag{14.7}$$

bo'lib, $(m+1)\delta > 1$ bo'ladi. Bu yerda δ ham irratsional son bo'ladi. Aks holda $\{na\} = na - [na] = \delta$ bo'lgani uchun $a = \dfrac{\delta + [na]}{n}$ bo'lib, bu a ning irratsional ekanligiga zid. Shuning uchun ixtiyoriy $m \in \mathbb{N}$ da $m\delta \neq 1$. (14.7) munosabatdan ixtiyoriy $x \in [0,\ 1]$ uchun shunday m topiladiki $|\{mna\} - x| = |m\delta - x| \leq \delta$ tengsizlik bajariladi. Yuqoridagi mulohazalarni tokrorlab ixtiyoriy $x \in [0,\ 1]$ va $\varepsilon > 0$ uchun $(x - \varepsilon,\ x + \varepsilon)$ oraliqda $x_n = \{na\}$ ketma-ketlikning cheksizta elementi yotishini ko'rsatish mumkin. Demak, $[0,\ 1]$ dagi barcha nuqtalar $x_n = \{na\}$ ketma-ketlikning limitik nuqtalari bo'ladi. $\square$

14.6. Diskret metrik fazoda ixtiyoriy to'plamning chegarasi bo'sh ekanligini isbotlang.

Isbot. M diskret metrik fazodagi ixtiyoriy to'plam bo'lsin. Ma'lumki (8.3-misolga qarang), bu fazoda ixtiyoriy M to'plam uchun $M = \overline{M}$ tenglik o'rinli. Shunday ekan $X \backslash M = \overline{X \backslash M}$ tenglik ham o'rinli. To'plam chegarasi ta'rifiga ko'ra M uchun $Fr\, M = \overline{M} \cap \overline{(X \backslash M)} = M \cap (X \backslash M) = \emptyset$ tenglikni olamiz. $\square$

Uy vazifalari va mavzuni o'zlashtirish uchun masalalar

14.7. c metrik fazoning to‘laligini isbotlang.

14.8. To‘la metrik fazolarning dekart ko‘paytmasi yana to‘la metrik fazo bo‘lishini isbotlang. Demak, $\mathbb{R}^n$ metrik fazo to‘la.

14.9. $C[a,\ b]$ uzluksiz funksiyalar to‘plamida metrika

$$\rho(x, y) = \int_a^b \operatorname{sign} |x(t) - y(t)|\, dt$$

ifoda bilan aniqlangan bo‘lsa, $(C[a,\ b],\ \rho)$ metrik fazo to‘la bo‘ladimi?

14.10. $C^{(1)}[a,\ b]-$ uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to‘plamida metrika

$$\rho(x, y) = \max_{a \le t \le b} |\, x(t) - y(t)\,|$$

tenglik bilan aniqlangan bo‘lsa, $(C^{(1)}[a,\ b], \rho)$ metrik fazo to‘la emas. $(C^{(1)}[a,\ b], \rho)$ metrik fazoning to‘ldirmasini toping.

14.11. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiya qanday shartlarni qanoatlantirsa $\rho(x, y) = |\, f(x) - f(y)\,|$ akslantirish $\mathbb{R}$ to‘plamda: a) metrika bo‘ladi; b) $(\mathbb{R},\ \rho)$ to‘la metrik fazo bo‘ladi?

14.12. Agar $\rho(x,\ y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$ bo‘lsa, $(\mathbb{R},\ \rho)$ metrik fazoning to‘ldirmasini toping.

14.13. $\Phi -$ barcha finit ketma-ketliklar, ya’ni faqat cheklita hadi noldan farqli $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ ketma-ketliklar to‘plami bo‘lsin. Agar

$$\rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} |\, x_i - y_i|\ ; \qquad \rho_2(x, y) = \max_{1 \le i < \infty} |\, x_i - y_i|$$

bo‘lsa, (Φ, ρ_1) va (Φ, ρ_2) metrik fazolarning to‘ldirmasini toping.

14.14. $X = (-\pi,\ \pi)$ to‘plamda $\rho(x, y) = \left|\sin \dfrac{x - y}{2}\right|$ metrika kiritilgan. (X, ρ) metrik fazoning to‘ldirmasini toping.

14.15. $\mathbb{P}$ – barcha haqiqiy koeffitsiyentli ko'phadlar to'plamida $x,\ y \in \mathbb{P}$ uchun

a) $\rho_1(x,y) = \max\limits_{0\le t\le 1} |x(t) - y(t)| + \max\limits_{0\le t\le 1} |x''(t) - y''(t)|;$

b) $\rho_2(x,y) = \max\limits_{0\le t\le 1} |x(t) - y(t)| + \max\limits_{0\le t\le 1} |x'(t) - y'(t)|;$

c) $\rho_3(x,y) = \max\limits_{-1\le t\le 1} |x(t) - y(t)| + |x'(0) - y'(0)|$

metrikalar kiritilgan. $(\mathbb{P},\ \rho_1)$, $(\mathbb{P},\ \rho_2)$, $(\mathbb{P},\ \rho_3)$ metrik fazolarning to'ldirmasini toping.

14.16. $\left\{\dfrac{m}{2^n}:\ m,n \in \mathbb{Z}\right\}$ to'plamning $\mathbb{R}$ da zich ekanligini isbotlang.

14.17. $\mathbb{Z}$, $\left\{\dfrac{1}{n}:\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\right\}$, $\left\{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}:\ n,\ m \in \mathbb{Z},\ n \cdot m \neq 0\right\}$ to'plamlar $\mathbb{R}$ metrik fazoning hech yerida zich emas. Isbotlang.

14.18. Hamma yerda zich, ichi bo'sh bo'lgan to'plamga misol keltiring.

Kantor to'plamining quyidagi (9.19-9.23) xossalarini isbotlang.

14.19. Kantor to'plamining o'lchovi nolga teng.

14.20. Kantor to'plamining yakkalangan nuqtalari mavjud emas.

14.21. Kantor to'plamining ichki nuqtalari mavjud emas, ya'ni $\overset{0}{K} = \emptyset$.

14.22. Kantor to'plami $[0,\ 1]$ kesmaning hech yerida zich emas.

14.23. Kantor to'plami mukammal to'plam, ya'ni $K = K'$.

14.24. $\mathbb{R}$ metrik fazoda shunday A to'plamga misol keltiringki, A, $\overset{0}{A}$, $\overline{\overset{0}{A}}$, $\overset{0}{\overline{A}}$, $\overline{\overset{0}{\overline{A}}}$, $\overset{\overset{0}{0}}{A}$ to'plamlar turli, ya'ni hech qaysi ikkisi teng bo'lmasin.

14.25. $A \subset (X,\rho)$ hech yerda zich bo'lmasa, $X\backslash A$ to'plam hamma yerda zichligini isbotlang.

14.26. Agar A hamma yerda zich va ochiq to'plam bo'lsa, $X\backslash A$ to'plam hech yerda zich emas. Isbotlang.

14.27. Shunday A to'plamga misol keltiringki, A va $X\backslash A$ to'plamlarning har biri hamma yerda zich bo'lsin.

14.28. $\Phi-$ finit ketma-ketliklar to'plami c_0 va $\ell_p\,(p\geq 1)$ metrik fazolarda zich joylashgan, ammo c va m metrik fazolarda zich emasligini isbot qiling.

14.29. Agar A to'plam B da, B esa C da zich joylashgan bo'lsa, A to'plam C da zich ekanligini isbotlang.

14.30. $\mathbb{P}-$barcha ko'phadlar to'plami $C[a,\ b]$ metrik fazoda zich. Isbotlang.

14.31. $[a,\ b]$ kesmada $a=t_1<t_2<\cdots<t_n=b$ nuqtalar va ixtiyoriy $x_1,x_2,\ldots,x_n$ sonlar berilgan bo'lsin. U holda $x\,(t_i)=x_i,\ i=\overline{1,n}$ va $[t_i,\ t_{i+1}]$ oraliqlarning har birida chiziqli bo'lgan $x(t)$ funksiya *qisman chiziqli uzluksiz funksiya* deyiladi. Barcha qisman chiziqli uzluksiz funksiyalar to'plami $C[a,\ b]$ metrik fazoda zich ekanligini isbotlang.

14.32. Barcha sodda funksiyalar (o'lchovli va qiymatlari to'plami ko'pi bilan sanoqli bo'lgan funksiyalar) to'plami $L_1[a,\ b]$ metrik fazoda zich ekanligini isbotlang.

14.33. Sodda funksiyalar to'plami $L_p[a,\ b]\ (p\geq 1)$ metrik fazoda zich. Isbotlang.

14.34. $[a,\ b]$ kesmada $a=t_1<t_2<\cdots<t_n=b$ nuqtalar berilgan bo'lsin. $(t_i,t_{i+1}),\quad i=\overline{1,n-1}$ intervallarning har birida o'zgarmas, t_i bo'linish nuqtalaridagi qiymatlari esa ixtiyoriy bo'lgan funksiya *pog'onasimon funksiya* deyiladi. Ravshanki, pog'onasimon funksiya sodda funksiya bo'ladi. Pog'onasimon bo'lmagan sodda funksiyaga misol keltiring.

14.35. Pog'onasimon funksiyalar $L_p[a,\ b]\ (p\geq 1)$ metrik fazodagi barcha sodda funksiyalar to'plamida zich joylashgan. Isbotlang.

14.36. Pog‘onasimon funksiyalar $L_p[a,\ b]$ $(p \geq 1)$ metrik fazoda zich ekanligini isbotlang.

14.37. Barcha uzluksiz funksiyalar $L_p[a,\ b]$ $(p \geq 1)$ metrik fazodagi pog‘onasimon funksiyalar to‘plamida zich. Isbotlang. Demak, $C[a,\ b]$ to‘plam sifatida $L_p[a,\ b]$ metrik fazoda zich.

14.38. $[a, b]$ kesmada aniqlangan ixtiyoriy uzluksiz funksiyani istalgancha aniqlikda $L_p[a, b]$ fazo metrikasida ko‘phad bilan yaqinlashtirish mumkin, ya’ni $x(t)$ uzluksiz funksiya va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $p(t)$ ko‘phad mavjudki,

$$\rho\,(x,\ p) = \left(\int_a^b |\,x\,(t) - p\,(t)\,|^p\,dt\right)^{1/p} < \varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli. Isbotlang.

14.39. Oldingi 14.38-masaladagi $p(t)$ ko‘phadning barcha koeffitsiyentlarini ratsional sonlar qilib tanlash mumkin. Isbot qiling.

14.40. Separabel metrik fazoning to‘ldirmasi ham separabel bo‘ladimi? Misol keltiring.

14.41. Separabel fazoda ixtiyoriy G ochiq to‘plamni sanoqli yoki chekli sondagi o‘zaro kesishmaydigan ochiq sharlarning yig‘indisi ko‘rinishida:

$$G = \bigcup_n B\,(x_n,\ r_n)\,, \quad B\,(x_i,\ r_i) \cap B\,(x_j,\ r_j) = \emptyset,\ \ i \neq j$$

tasvirlash mumkin. Isbot qiling.

14.42. Separabel metrik fazoda ixtiyoriy F yopiq to‘plamni mukammal M va chekli yoki sanoqli N to‘plamlarning birlashmasi ko‘rinishida tasvirlash mumkin. Isbotlang.

14.43. Diskret metrik fazo separabel bo‘lishining zarur va yetarli shartini toping.

14.44. M va N lar 1-kategoriyali to‘plamlar bo‘lsin. U holda $M \cup N$ ning 1-kategoriyali to‘plam ekanligini isbotlang.

14.45. Darajasi n dan oshmaydigan ko‘phadlarning $\mathbb{P}_{\leq n}$ to‘plami $C[a,\ b]$ metrik fazoning hech yerida zich emas. Isbot qiling.

14.46. $\mathbb{P} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{\leq n}$ barcha ko‘phadlar to‘plami $C[a,\ b]$ metrik fazoda 1- kategoriyali to‘plam bo‘lishini ko‘rsating.

14.47. $L_2[a,\ b]$ to‘plam $L_1[a,\ b]$ metrik fazoda 1-kategoriyali to‘plam. Isbotlang.

14.48. $x_n(t) -$ uzluksiz funksiyalar va ixtiyoriy $t \in \mathbb{R}$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\,(t) = x_0\,(t)$ bo‘lsa, $x_0\,(t)$ funksiyaning uzilish nuqtalaridan iborat to‘plam 1-kategoriyali to‘plam ekanligini isbotlang.

14.49. $C[a,\ b]$ to‘plamda

$$\rho\,(x, y) = \int_a^b \operatorname{sign} |\, x\,(t) - y\,(t)\,|\, dt$$

metrika kiritilgan. $(C[a,\ b], \rho)$ separabel emas. Isbotlang.

14.50. $C[a,\ b]$ metrik fazoda

$$M_n = \{x : |x(t') - x(t'')| \leq n \cdot |t' - t''|\,, \quad \forall t',\ t'' \in [a,\ b]\}$$

to‘plam yopiq va hech yerda zich emas. Isbotlang.

14.51. $C[a,\ b]$ fazoda Lipshits shartini qanoatlantiruvchi funksiyalar to‘plami $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ (14.50-masalaga qarang) 1-kategoriyali to‘plam. M to‘plam yopiq emas va $C[a,\ b]$ fazoda zich ekanligini isbotlang.

14.52. $C[a, b]$ fazoda har bir $n \in \mathbb{N}$ da

$$D_n = \{x : \quad x'(t) \in C[a, b] \quad \text{va} \quad \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)| \ \leq n\,\}$$

to‘plam yopiq va yech yerda zich emasligini isbotlang.

14.53. $C[a,b]$ fazoda uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to'plami $C^{(1)}[a,b] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$ (D_n – 14.52-misolda aniqlangan) 1-kategoriyali to'plam, yopiq emas va hamma yerda zich ekanligini isbotlang.

14.54. Hech yerda zich bo'lmagan to'plamning qism to'plami hech yerda zich emas. Isbotlang.

14.55. Chekli sondagi hech yerda zich bo'lmagan to'plamlarning yig'indisi hech yerda zich emas. Isbot qiling.

14.56. (X,ρ) to'la metrik fazo, $M \subset X$ esa 1-kategoriyali to'plam bo'lsin. U holda $X \backslash M$ to'plam X fazoda zich bo'lishini ko'rsating.

14.57. (X,ρ) to'la metrik fazo, $G_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$ esa ochiq va hamma yerda zich to'plamlar bo'lsin. U holda $M = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ to'plam ham hamma yerda zich ekanligini isbotlang.

14.58. M to'plam hech yerda zich bo'lmasligi uchun $\overset{0}{\bar{M}} = \emptyset$ shartning bajarilishi zarur va yetarli. Isbotlang.

14.59. X - to'la metrik fazo, $M \subset X$ esa 1-kategoriyali to'plam bo'lsin. U holda $X \backslash M$ 2-kategoriyali to'plam. Isbot qiling.

14.60. Agar $y_0 \in B(x_0, r)$ bo'lsa, $B(y_0, r) \subset B(x_0, 2r)$ munosabatni isbot qiling.

14.61. Biror A to'plamning $\varepsilon-$ atrofi ushbu

$$V_\varepsilon(A) = \left\{ x \in X : \inf_{y \in A} \rho(x,y) < \varepsilon \right\}$$

tenglik bilan aniqlanadi. U holda $\bar{A} = \bigcap\limits_{\varepsilon > 0} V_\varepsilon(A)$ tenglikni isbotlang.

14.62. To'g'ri chiziqda $[a,\ b]$, $(a,\ b)$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $[a,\ \infty)$, $\emptyset$ to'plamlarning chegaralarini toping.

14.63. Hech yerda zich boʻlmagan toʻplamning yopigʻi ham hech yerda zich emas. Isbotlang

14.64. $Fr(A \cup B) \subset FrA \cup Fr\,B$ munosabatni isbotlang. Agar $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ boʻlsa, $Fr(A \cup B) = FrA \cup Fr\,B$ tenglikni isbot qiling.

14.65. Separabel metrik fazoda ixtiyoriy toʻplamning yakkalangan nuqtalari chekli yoki sanoqli toʻplam boʻladi. Isbotlang.

14.66. $\{x_n\} \subset [a,\, b]$ boʻlsin. Ixtiyoriy $(\alpha, \beta) \subset [a,\, b]$ interval uchun $n(\alpha; \beta)$ orqali $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nuqtalarning $(\alpha,\, \beta)$ oraliqqa tushganlarining sonini belgilaylik. Agar ixtiyoriy $(\alpha,\, \beta) \subset [a,\, b]$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(\alpha; \beta)}{n} = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

tenglik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik $[a,\ b]$ kesmada *tekis taqsimlangan* deyiladi. Ushbu $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}, \ldots$ ketma-ketlik $[0,\ 1]$ kesmada tekis taqsimlangan boʻladimi?

14.67. $\alpha-$ irratsional son boʻlsin. $\{n\,\alpha\} = n\,\alpha - [n\,\alpha]$, yaʼni $n\,\alpha$ sonining kasr qismlaridan tuzilgan ketma-ketlik $[0,\ 1]$ kesmada tekis taqsimlangan boʻlishini isbotlang.

14.68. 14.67-masaladan foydalanib, $1, 5, 5^2, \ldots, 5^n, \ldots$ ketma-ketlikdagi 5^n sonning (oʻnlik sanoq sistemasida) 13 dan boshlanish ehtimolligini toping.

14.69. X toʻla metrik fazo, $\{f_n\}$ esa X da aniqlangan uzluksiz funksiyalar boʻlsin. Agar ixtiyoriy $x \in X$ uchun chekli $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ mavjud boʻlsa, f funksiyaning uzilish nuqtalari toʻplami 1-kategoriyali toʻplam ekanligini isbot qiling.

14.70. Agar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiya har bir nuqtada chekli hosilaga ega boʻlsa, $f'(x)$ funksiya uzluksiz boʻladigan nuqtalar toʻplami 2- kategoriyali toʻplam ekanligini isbotlang.

15-§. Uzluksiz akslantirishlar

$X=(X,\rho)$ va $Y=(Y,d)$ – metrik fazolar, f esa X ni Y ga akslantirish bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ mavjud bo‘lib, $\rho(x,x_0)<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\in X$ nuqtalar uchun $d(f(x),f(x_0))<\varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda f akslantirish $x_0\in X$ *nuqtada uzluksiz* deyiladi. Agar f akslantirish X ning hamma nuqtalarida uzluksiz bo‘lsa, u holda f akslantirish X *da uzluksiz* deyiladi. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ mavjud bo‘lib, $\rho(x,y)<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x,y\in X$ nuqtalar uchun $d(f(x),f(y))<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda f akslantirish X *da tekis uzluksiz* deyiladi. Agar $f:X\to Y$ biyektiv akslantirish bo‘lib, f va f^{-1} akslantirishlar uzluksiz bo‘lsa, u holda f *gomeomorf akslantirish yoki gomeomorfizm* deyiladi, X va Y fazolar esa *gomeomorf fazolar* deyiladi. Agar (X,ρ) va (Y,d) metrik fazolar o‘rtasida biyektiv moslik o‘rnatuvchi f akslantirish ixtiyoriy $x_1,x_2\in X$ lar uchun $\rho(x_1,x_2)=d(f(x_1),f(x_2))$ shartni qanoatlantirsa, u holda f akslantirishga *izometriya* deyiladi, X va Y fazolar esa *izometrik fazolar* deyiladi.

15.1. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ funksiya har bir tayinlangan x da y o‘zgaruvchi bo‘yicha ko‘phad va har bir tayinlangan y da x o‘zgaruvchi bo‘yicha ko‘phad bo‘lsa, $f(x,y)$ funksiya ikkala argumenti bo‘yicha ham ko‘phad ekanligini isbotlang.

Isbot. Shartga ko‘ra $f(x,y)$ funksiyani quyidagicha tasvirlash mumkin

$$f(x,y)=a_0(x)+a_1(x)\,y+a_2(x)\,y^2+\cdots+a_n(x)\,y^n, \tag{15.1}$$

$$f(x,y)=b_0(y)+b_1(y)\,x+b_2(y)\,x^2+\cdots+b_m(y)\,x^m. \tag{15.2}$$

Bundan f ning x va y o‘zgaruvchilar bo‘yicha differensiallanuvchi ekanligi kelib chiqadi. Agar $y=0$ bo‘lsa, u holda (15.1) va (15.2) lardan quyidagini olamiz

$$f(x,0) = a_0(x) = b_0(0) \, + \, b_1(0)\,x + \, b_2(0)\,x^2 + \cdots + b_m(0)\,x^m \,.$$

Xuddi shunday (15.1) va (15.2) lardan y bo'yicha xususiy hosila olib, ularning $y=0$ dagi qiymatlarini tenglashtirib

$$a_1(x) = b_0'(0) \, + \, b_1'(0)\,x + \, b_2'(0)\,x^2 + \cdots + b_m'(0)\,x^m$$

tenglikni olamiz. Va hokazo $f(x,y)$ ning (15.1) va (15.2) ifodalaridan y bo'yicha $n-$tartibli hosila olib, ularning $y=0$ dagi qiymatlarini tenglashtirib

$$a_n(x) = b_0^{(n)}(0) \, + b_1^{(n)}(0)\,x + \, b_2^{(n)}(0)\,x^2 + \cdots + b_m^{(n)}(0)\,x^m$$

tenglikka ega bo'lamiz. $a_0(x)$, $a_1(x), \ldots,$ $a_n(x)$ lar uchun topilgan bu ifodalarni (15.1) ga qo'yib, $f(x,y)$ ning ikkala argumenti bo'yicha ham ko'phad ekanligiga ishonch hosil qilamiz. $\square$

15.2. Shunday $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uzluksiz funksiya va $G-$ ochiq, $F-$ yopiq to'plamlarga misol keltiringki, $f(G)$ to'plam ochiq emas, $f(F)$ to'plam esa yopiq emas.

Yechish. Agar F chegaralangan yopiq (kompakt) to'plam bo'lsa, u holda $f(F)$ ham kompakt, xususan yopiq chegaralangan to'plam bo'ladi. Demak, F yopiq, lekin chegaralanmagan to'plam bo'ladi.

$$f\,(x) = \begin{cases} \cos x, \quad agar \;\; x \in [-4\pi, \; 4\pi], \\ 1 + (x-4\pi)^2 : x^2, \qquad agar \;\; |x| > 4\pi. \end{cases}$$

$G = (-2\pi - 1, \, 1)$ ochiq to'plamni olsak, $f(G) = [-1, \; 1]$ yopiq bo'ladi. $F = [4\pi, \; \infty)$ yopiq to'plamni olsak, $f(F) = [1, \; 2)$ yopiq to'plam emas. $\square$

15.3. $f \; : \; C[0, \; 1] \; \to \; L_1[0, \; 1]$ akslantirish $f(x(t)) \; = \; x(t)$ tenglik bilan aniqlangan bo'lsa, uning uzluksiz ekanligini isbotlang.

Isbot. $x_0 \in C[0,\ 1]$ ixtiyoriy nuqta bo'lsin, u holda

$$\rho(f(x), f(x_0)) = \int\limits_0^1 |x(t) - x_0(t)|\, dt \le \max_{0\le t\le 1} |x(t) - x_0(t)| \int\limits_0^1 dt \ = \ \rho(x, x_0)$$

tengsizlik o'rinli. Berilgan $\varepsilon > 0$ uchun $\delta = \varepsilon$ desak, u holda $\rho\,(x,\, x_0) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ larda $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ tengsizlik ham o'rinli bo'ladi. $x_0 \in C[0,\ 1]$ ixtiyoriy nuqta bo'lgani uchun f akslantirish uzluksiz bo'ladi. □

15.4. $f : C[0,\ 1] \to C[0,\ 1]$ akslantirish quyidagi

a) $f(x(t)) = \int\limits_0^t x(s)ds\,;$ b) $f(x(t)) = \int\limits_0^1 \sin(t-s)x(s)ds\ ;$

c) $f(x(t)) = \int\limits_0^t x^2(s)ds\ ;$ d) $f(x(t)) = x(t^\alpha), \quad \alpha \ge 0$

tenglik bilan aniqlangan. Ularning qaysilari uzluksiz, qaysilari tekis uzluksiz bo'ladi?

Yechish. a), b) va d) lar tekis uzluksiz, c) uzluksiz, lekin tekis uzluksiz emas. Biz misolning a) qismini tekshirish bilan cheklanamiz. f akslantirishni tekis uzluksizlikka tekshiramiz. Barcha $x,\, y \in C[0,\ 1]$ lar uchun

$$\rho(f(x), f(y)) = \max_{0\le\, t\,\le 1} \left| \int_0^t (x(s) - y(s))\, ds \right| \le \max_{0\le\, s\,\le 1} |x(s) - y(s)| \int_0^t ds,$$

ya'ni $\rho(f(x), f(y)) \le \rho(x, y)$ tengsizlik o'rinli. Tekis uzluksizlik ta'rifidagi δ ni ε ga teng desak, u holda $\rho\,(x,\, y) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x,\ y \in X$ larda $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Demak, f akslantirish tekis uzluksiz ekan. Tekis uzluksiz akslantirish uzluksiz bo'ladi. □

15.5. $\mathbb{R}$ da $\rho_1(x, y) = |x - y|$ va $\rho_2\,(x, y) = \begin{cases} 1, \ agar \ \ x \ne y \\ 0, \ agar \ \ x = y \end{cases}$

metrikalar ekvivalent emas. Isbotlang.

Isbot. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni ρ_1 va ρ_2 metrikalar ekvivalent bo'lsin. U holda shunday $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ sonlar mavjud bo'lib, barcha $x \neq y$, $x, y \in (-\infty, \infty)$ lar uchun

$$C_1\rho_1(x,y) \leq \rho_2(x,y) \leq C_2\rho_1(x,y) \iff C_1|x-y| \leq 1 \leq C_2|x-y|$$

tengsizliklar bajarilishi kerak. Lekin $|x-y| = \dfrac{1}{2C_2}$ desak, oxirgi tengsizlik bajarilmaydi. Demak, ρ_1 va ρ_2 metrikalar ekvivalent emas. $\square$

15.6. $C[a, b]$ to'plamda kiritilgan

$$\rho_\infty(x,y) = \max_{a\leq t\leq b} |x(t)-y(t)|, \qquad \rho_2(x,y) = \sqrt{\int_a^b |x(t)-y(t)|^2\,dt}\,,$$
$$\rho_1(x,y) = \int_a^b |x(t)-y(t)|dt, \qquad \rho_4(x,y) = \int_a^b \operatorname{sign}|x(t)-y(t)|\,dt$$

metrikalarning ixtiyoriy ikkitasi ekvivalent emas. Isbotlang.

Isbot. Biz ρ_1 va ρ_∞ metrikalarni ekvivalent emasligini ko'rsatamiz. $C[a, b]$ fazoda $y(t) = 0$ va

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 - n(t-a), & agar\ \ t \in [a,\ a+\frac{1}{n}] \\ 0, & agar\ \ t \in (a+\frac{1}{n},\ b] \end{cases}$$

funksiyalar uchun $\rho_\infty(x_n, y) = 1 \leq C\rho_1(x_n, y)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $C > 0$ soni mavjud emas. Chunki $n \to \infty$ da

$$\rho_1(x_n,\ y) = \int_a^{a+\frac{1}{n}} (1-n(t-a))dt = \frac{1}{n} - \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}$$

sonlar ketmaketligi nolga intiladi. Demak, ρ_1 va ρ_∞ metrikalar ekvivalent emas. $\square$

Uy vazifalari va mavzuni o'zlashtirish uchun masalalar

15.7. Ikki argumentli $f : [0,\ 1] \times [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ funksiya har bir x da y bo'yicha va har bir y da x bo'yicha uzluksiz bo'lsa, shunday (x_0, y_0) nuqta mavjudki, bu nuqtada f funksiya ikkala argumenti bo'yicha birgalikda uzluksiz bo'ladi. Isbot qiling.

15.8. f funksiya $(0,\ 1)$ intervalda cheksiz marta differensiallanuvchi bo'lsin. Agar ixtiyoriy $x \in (0,\ 1)$ uchun shunday $n = n(x) \in \mathbb{N}$ mavjud bo'lib, $f^{(n)}(x) = 0$ bo'lsa, f ning ko'phad ekanligini isbotlang.

15.9. (X, ρ) va (Y, d) metrik fazolar bo'lsin. $f : X \to Y$ akslantirishning uzluksizligi quyidagi shartlarning har biriga teng kuchli ekanligini isbotlang:

a) ixtiyoriy $G \subset Y$ ochiq to'plam uchun $f^{-1}(G) \subset X$ ham ochiq to'plam;

b) ixtiyoriy $F \subset Y$ yopiq to'plam uchun $f^{-1}(F) \subset X$ ham yopiq to'plam;

c) ixtiyoriy $\{x_n\} \subset X$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik uchun $\{f(x_n)\} \subset Y$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi.

15.10. Ixtiyoriy fundamental ketma-ketlikni yana fundamental ketma-ketlikka akslantiruvchi funksiya uzluksiz bo'lishi shartmi?

15.11. Agar X diskret metrik fazo bo'lsa, har qanday $f : X \to Y$ akslantirish uzluksiz bo'ladi. Isbotlang.

15.12. $f_i : X \to Y,\ \ (i = 1, 2)$ uzluksiz akslantirishlar bo'lsin. U holda $M = \{x \in X :\ f_1(x) = f_2(x)\}$ to'plam yopiq ekanligini isbotlang.

15.13. $f_i : X \to Y,\ \ (i = 1, 2)$ uzluksiz akslantirishlar va X da zich bo'lgan biror M to'plam berilgan bo'lsin. Agar barcha $x \in M$ uchun $f_1(x) =$

$f_2(x)$ bo'lsa, $f_1 \equiv f_2$, ya'ni akslantirishlar butun X fazoda teng. Isbot qiling.

15.14. $f : X \to Y$ uzluksiz akslantirish bo'lsin. Quyidagi implikatsiyalardan qaysi biri to'g'ri? Ixtiyoriy $M \subset X$ to'plam uchun:

a) $x \in \bar{M} \Rightarrow f(x) \in \overline{f(M)}$;

b) $x \in \overset{0}{\bar{M}} \Rightarrow f(x) \in \overset{0}{\overline{f(M)}}$;

c) $x \in M' \Rightarrow f(x) \in (f(M))'$;

d) $x \in Fr\,M \Rightarrow f(x) \in Fr\,(f(M))$.

15.15. X separabel metrik fazo va $f : X \to Y$ haqiqiy funksiya bo'lsin. M orqali X fazodagi barcha shunday nuqtalarni belgilaymizki, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ mavjud va $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ bo'lsin. M to'plamning ko'pi bilan sanoqli ekanligini isbotlang.

15.16. $S = \{z \in C : |z| = 1\}$ aylanada $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ metrika kiritilgan. Ixtiyoriy $f : S \to \mathbb{R}$ uzluksiz funksiya uchun shunday $z_0 \in S$ mavjudki, $f(z_0) = f(-z_0)$ tenglik o'rinli. Demak, aylanada aniqlangan uzluksiz funksiya qandaydir diametral qarama-qarshi nuqtalarda teng qiymatlarni qabul qiladi. Isbotlang.

15.17. $f : C[a,\ b] \to C[0,\ 1]$ akslantirish $f(x(t)) = x(a+(b-a)t)$, $0 \le t \le 1$ tenglik bilan aniqlangan. Bu akslantirish:

a) uzluksiz, b) izometriya bo'ladimi?

15.18. $f(x(t)) = x(t^2)$ tenglik bilan a) $f : C[-1,\ 1] \to C[0,\ 1]$; b) $f : L_p[-1,\ 1] \to L_p[0,\ 1]$; c) $f : C[-1,\ 1] \to L_1[0,\ 1]$ akslantirishlar aniqlangan. Ularning har birini uzluksizlikka tekshiring.

15.19. $f(x(t)) = x^2(t)$ tenglik bilan a) $f : C[0,\ 1] \to C[0,\ 1]$; b) $f : L_p[0,\ 1] \to L_2[0,\ 1]$; c) $f : L_1[0,\ 1] \to L_2[0,\ 1]$;

d) $f: L_2[0,\ 1] \to L_1[0,\ 1]$; e) $f: L_1[0,\ 1] \to L_1[0,\ 1]$ akslantirishlar aniqlangan. Ularni uzluksizlikka tekshiring.

15.20. $f: L_2[0,\ 1] \to L_2[0,\ 1]$ akslantirish quyidagi

a) $f(x(t)) = \int\limits_0^t x(s)ds$; b) $f(x(t)) = \int\limits_0^1 \sin(t-s)x(s)ds$;

c) $f(x(t)) = \int\limits_0^t x^2(s)ds$; d) $f(x(t)) = \int\limits_0^t x(s^\alpha)ds, \quad \alpha \geq 0$

tenglik bilan aniqlangan. Ularning qaysilari uzluksiz, qaysilari tekis uzluksiz bo'ladi?

15.21. $f: L_2[0,\ 1] \to L_2[0,\ 1]$ akslantirish ushbu

a) $f(x(t)) = u(t) \cdot x(t), \ u \in C[0,\ 1]$; b) $f(x(t)) = x(t^\alpha), \quad \alpha > 0$

tenglik bilan aniqlangan. Ularni uzluksizlikka tekshiring.

15.22. $\mathbb{R}$ da uzluksiz, lekin tekis uzluksiz bo'lmagan funksiyaga misol keltiring.

15.23. $X,\ Y-$metrik fazolar bo'lib, $Y-$to'la bo'lsin. Agar $M \subset X$ hamma yerda zich, $f: M \to Y$ tekis uzluksiz akslantirish bo'lsa, shunday $F: X \to Y$ tekis uzluksiz akslantirish mavjudki, $F|_M = f$, ya'ni ixtiyoriy $x \in M$ uchun $F(x) = f(x)$. Isbotlang.

15.24. Lipshits shartini qanoatlantiruvchi akslantirish tekis uzluksiz akslantirish bo'lishini isbotlang.

15.25. $K(t,s)$ funksiya $[a,\ b] \times [a,\ b]$ kvadratda ikkala argumenti bo'yicha uzluksiz bo'lsa,

$$Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

tenglik bilan aniqlangan $A: C[a,b] \to C[a,b]$ akslantirish Lipshits shartini qanoatlantirishini isbotlang.

15.26. O'lchovli $K(t,s)$ funksiya uchun

$$\int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 dtds \leq M$$

tengsizlik oʻrinli boʻlsa, $A : L_2[a,\ b] \to L_2[a,\ b]$

$$Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

akslantirish tekis uzluksiz boʻlishini isbotlang.

15.27. $f : X \to Y$ tekis uzluksiz va $g : Y \to Z$ Lipshits shartini qanoatlantiruvchi akslantirishlar boʻlsin. U holda $g \circ f : X \to Z$ akslantirish tekis uzluksiz (Lipshits shartini qanoatlantiruvchi) boʻladimi?

15.28. $[0,\ 1]$ kesmada tekis uzluksiz, ammo Lipshits shartini qanoatlantirmaydigan funksiyaga misol keltiring.

15.29. (X, ρ) metrik fazo boʻlsin. $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ akslantirish

a) uzluksiz; b) tekis uzluksiz boʻladimi?

15.30. (X, ρ) metrik fazo, $A \neq \emptyset$, $A \subset X$ biror toʻplam boʻlsin. $d : X \to \mathbb{R}$ funksiya $d(x) = \inf\limits_{y \in A} \rho(x, y)$ tenglik bilan aniqlangan. Shu akslantirishning tekis uzluksiz ekanligini isbotlang.

15.31. $\mathbb{R}^2$ da $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ metrika, $\mathbb{C}$ kompleks sonlar toʻplamida $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ metrika kiritilgan. Bu fazolarning izometrik ekanligini isbotlang.

15.32. X va Y lar metrik fazolar boʻlsin. $X \times Y$ va $Y \times X$ metrik fazolarning izometrik ekanligini isbotlang.

15.33. c va $\mathbb{R} \times c_0$ fazolarning izometrik ekanligini isbotlang.

15.34. $C[0,\ 1]$ va $C[a,\ b]$ metrik fazolar orasida izometriya oʻrnating.

15.35. Izometriya ekvivalentlik munosabati boʻlishini isbotlang.

15.36. $\mathbb{R}$ metrik fazoning barcha izometriyalarini toping.

15.37. $\mathbb{R}^2$ metrik fazoning ($\rho(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$) barcha izometriyalarini toping.

15.38. Metrik fazoni oʻzini-oʻziga akslantiruvchi barcha izometriyalar gruppa tashkil etishini isbotlang.

15.39. Biror X toʻplamda ρ_1 va ρ_2 ekvivalent metrikalar berilgan boʻlsin. X toʻplamdagi barcha metrikalar uchun kiritilgan bu munosabat haqiqatda ham ekvivalentlik munosabati boʻlishini isbotlang.

15.40. X chekli toʻplam boʻlsa, unda kiritilgan ixtiyoriy ikki metrika ekvivalent ekanligini isbotlang.

15.41. $\mathbb{R}^n$ da kiritilgan ρ_1, $\rho_2 = \rho$ va ρ_∞ metrikalar ekvivalent ekanligini isbotlang.

15.42. Ekvivalent metrikalarning birida yaqinlashuvchi (fundamental) boʻlgan ketma-ketlik ikkinchisida ham yaqinlashuvchi (fundamental) boʻlishini isbotlang.

15.43. Ekvivalent metrikalarning birida ochiq (yopiq) boʻlgan toʻplam ikkinchisida ham ochiq (yopiq) ekanligini isbotlang.

15.44. ρ_1 va ρ_2 ekvivalent metrikalar boʻlsin. Agar (X,ρ_1) metrik fazo a) toʻla; b) separabel; c) diskret boʻlsa, (X,ρ_2) metrik fazo ham shu xossaga ega boʻladi. Isbot qiling.

15.45. $\mathbb{C}^n$ toʻplamda $\rho_\infty(x,y) = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i - y_i|$, $\quad \rho_1(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ $\rho_2(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i-y_i|^2}$ metrikalarning ixtiyoriy ikkitasi ekvivalent ekanligini isbotlang.

15.46. X to'plam $[a,\ b]$ kesmada o'lchovli va chegaralangan funksiyalardan iborat. Shu to'plamda aniqlangan

$$\rho_1(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^{p_1}dt\right)^{1/p_1};\ \rho_2(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^{p_2}dt\right)^{1/p_2}$$

metrikalar $p_1\neq p_2,\ (p_1\geq 1,\, p_2\geq 1)$ bo'lganda ekvivalent emasligini isbotlang.

15.47. Gomeomorfizm ekvivalentlik munosabati ekanligini isbotlang.

15.48. $f:\ X\to Y$ gomeomorfizm, $M\subset X$ to'plam berilgan bo'lsin. Ushbu tasdiqlarni isbotlang:

a) M ochiq to'plam bo'lsa, $f(M)$ ham ochiq;

b) M yopiq to'plam bo'lsa, $f(M)$ ham yopiq;

c) $f(\bar{M})=\overline{f(M)}$.

15.49. Gomeomorf metrik fazolardan biri separabel bo'lsa, ikkinchisi ham separabel bo'lishini ko'rsating.

15.50. $\mathbb{R}$ to'plamda $\rho_1(x,y)=|x-y|$ va $\rho_2(x,y)=|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y|$ metrikalar kiritilgan, $(\mathbb{R},\ \rho_1)$ va $(\mathbb{R},\ \rho_2)$ metrik fazolar gomeomorf ekanligini isbotlang. $x_n=n$ ketma-ketlik $(\mathbb{R},\ \rho_2)$ metrik fazoda fundamental, $(\mathbb{R},\ \rho_1)$ fazoda esa fundamental emasligini isbotlang.

$(\mathbb{R},\ \rho_1)$ to'la metrik fazo, $(\mathbb{R},\ \rho_2)$ esa to'la emas. Demak, gomeomorf metrik fazolarning biri to'la bo'lsa, ikkinchisi to'la bo'lishi shart emas.

Xulosa. Metrik fazoning to'laligi topologik xossa emas.

15.51. (X,ρ) metrik fazo bo'lsin. Agar $\rho_1(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ bo'lsa, (X,ρ) va (X,ρ_1) metrik fazolar gomeomorf ekanligini isbotlang.

15.52. $\mathbb{R}$ va $\mathbb{R}^2$ metrik fazolar gomeomorf emas. Umuman $n \neq m$ da $\mathbb{R}^n$ va $\mathbb{R}^m$, metrik fazolar gomeomorf emasligini isbotlang.

15.53. $C^{(2)}[a,\ b]$ to'plamda aniqlangan

$$\rho_1(x,y) = \max_{a\le t\le b} |x(t)-y(t)| + \max_{a\le t\le b} |x'(t)-y'(t)| + \max_{a\le t\le b} |x''(t)-y''(t)|,$$

$$\rho_2(x,y) = \max_{a\le t\le b} |x(t)-y(t)| + \max_{a\le t\le b} |x''(t)-y''(t)|$$

metrikalarning ekvivalent ekanligini isbotlang.

15.54. (X,ρ) va (Y,d) metrik fazolar bo'lsin. Agar (Y,d) fazoning biror metrik qism fazosi (X,ρ) metrik fazoga izometrik (gomeomorf) bo'lsa, (X,ρ) fazoni (Y,d) fazoga *izometrik (gomeomorf) joylashtirish mumkin* deyiladi. Agar $n \le m$ bo'lsa, $\mathbb{R}^n$ metrik fazoni $\mathbb{R}^m$ fazoga izometrik joylashtirish mumkinligini isbotlang. Bu yerda metrika sifatida

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|^2},$$

$$\rho_\infty(x,y) = \max_{1\le i\le k} |x_i - y_i|, \quad \rho_1(x,y) = \sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|$$

$(k = n$ yoki $k = m)$ ifodalardan biri olingan.

15.55. S tabiiy metrika kiritilgan aylana bo'lsin. U holda $S \times [0,\ 1]$ va $S \times S$ metrik fazolarning har birini $\mathbb{R}^3$ metrik fazoga gomeomorf joylashtirish mumkinligini isbotlang.

15.56. Uchta nuqtadan iborat bo'lgan ixtiyoriy metrik fazoni $\mathbb{R}^2$ metrik fazoga izometrik joylashtirish mumkinligini isbotlang. To'rtta nuqtadan iborat bo'lgan diskret metrik fazoni $\mathbb{R}^2$ metrik fazoga izometrik joylashtirish mumkin emas, ammo $\mathbb{R}^3$ metrik fazoga izometrik joylashtirish mumkinligini isbotlang.

15.57. To‘rtta nuqtadan iborat shunday metrik fazo mavjudki, uni $\mathbb{R}^n$ metrik fazolarning birortasiga ham izometrik joylashtirish mumkin emasligini isbotlang.

15.58. $L_2[0,\ 1]$ metrik fazoni $L_1[0,\ 1]$ metrik fazoga

a) gomeomorf, b) izometrik joylashtirish mumkinmi?

16-§. Qisqartirib aks ettirish prinsipi

Agar $f:(X,\rho)\to(Y,d)$ akslantirish uchun shunday $L>0$ son mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $x_1,x_2\in X$ lar uchun $d\left(f\left(x_1\right),f\left(x_2\right)\right)\le L\,\rho\left(x_1,x_2\right)$ shart bajarilsa, u holda f akslantirish *Lipshits shartini qanoatlantiradi* deyiladi. Agar $f:X\to X$ akslantirish Lipshits shartini qanoatlantirsa va Lipshits o‘zgarmasi $L<1$ bo‘lsa, f akslantirish *qisuvchi* deyiladi. Agar $A:X\to X$ akslantirish uchun shunday $x\in X$ nuqta mavjud bo‘lib, $Ax=x$ tenglik bajarilsa x nuqta A akslantirishning *qo‘zg‘almas nuqtasi* deyiladi.

16.1-teorema *(Qisuvchi akslantirishlar prinsipi). To‘la metrik fazoda aniqlangan har qanday qisuvchi akslantirish yagona qo‘zg‘almas nuqtaga ega.*

16.1. $x=\dfrac{1}{3}\cos\ x-2$ tenglama yagona yechimga ega ekanligini isbotlang. Kalkulyator yordamida yechimni 0,001 aniqlik bilan toping.

Yechish. Haqiqiy sonlar to‘plami $\mathbb{R}-$ to‘la metrik fazo,
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{3}\cos\ x-2$ akslantirish esa

$$\rho\left(f\left(x_1\right),f\left(x_2\right)\right)\le\frac{1}{3}\,\rho\left(x_1,x_2\right)$$

shartni qanoatlantiradi, ya’ni – qisuvchi. Shuning uchun 16.1-teoremaga ko‘ra, berilgan tenglama yagona yechimga ega. Uning yechimi taqriban
$x\approx-2,194749.$ $\square$

16.2. $C[-a,\ a]$ metrik fazo va $f_i : C[-a,\ a] \to C[-a,\ a]$ $(i = 1, 2)$ akslantirishlar $f_1(x(t)) = x(-t)$ va $f_2(x(t)) = -x(-t)$ tengliklar bilan aniqlangan. Shu akslantirishlarning qo‘zg‘almas nuqtalarini toping.

Yechish. $C[-a, a]$ metrik fazoda juft funksiyalar to‘plamini $C^+[-a,\ a]$ bilan, toq funksiyalar to‘plamini esa $C^-[-a,\ a]$ bilan belgilaylik. U holda ixtiyoriy $x^+ \in C^+[-a,\ a]$ uchun $f_1(x^+) = x^+$ tenglik o‘rinli. Xuddi shunday ko‘rsatish mumkinki, har bir $x^- \in C^-[-a,\ a]$ da $f_2(x^-) = x^-$ tenglik o‘rinli. Demak, barcha juft funksiyalar f_1 akslantirishning qo‘zg‘almas nuqtalari, barcha toq funksiyalar esa f_2 ning qo‘zg‘almas nuqtalari bo‘lar ekan. $\square$

16.3. $\mathbb{R}$ metrik fazoda shunday $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ akslantirishga misol keltiringki, barcha $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ lar uchun

$$\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$$

tengsizlik o‘rinli, ammo $f(x) = x$ tenglama yechimga ega bo‘lmasin.

Yechish. Barcha $x \in \mathbb{R}$ lar $f(x) = \sqrt{x^2+1} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ funksiya musbat qiymatlar qabul qiladi. Bu funksiya uchun barcha $x,\ y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ larda $\rho(f(x),\ f(y)) < \rho(x,\ y)$ tengsizlik o‘rinli, ammo $f(x) = x$ tenglama yechimga ega emasligini ko‘rsatamiz. Funksiya qiymatlari musbat bo‘lganligi uchun $x \leq 0$ larda $f(x) = x$ tenglama yechimga ega emas. Shuning uchun $x > 0$ holni qaraymiz:

$$f(x) - x = \sqrt{x^2+1} - x + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0.$$

Demak, barcha $x \in \mathbb{R}$ larda $f(x) > x$ o‘rinli. Endi

$$\rho(f(x),\ f(y)) < \rho(x,\ y) \Longleftrightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|$$

tengsizlikni isbotlaymiz. Funksiya hosilasi uchun

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{(\sqrt{x^2+1})^3} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}(1 - \frac{1}{x^2+1}) = \frac{x^3}{(x^2+1)^{3/2}}$$

tenglik o'rinli. Bu yerdan kelib chiqadiki, barcha $x \in \mathbb{R}$ larda $f'(x) < 1$ o'rinli. Shuning uchun

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)|\,|x-y| < |x-y|, \quad x \neq y$$

tengsizlik o'rinli. □

Uy vazifalari va mavzuni o'zlashtirish uchun masalalar

16.4. Agar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ va $|f'(x)| \leq q < 1$ bo'lsa, $x = f(x)$ tenglama yagona yechimga ega ekanligini isbotlang.

16.5. Agar $f : [a,\ b] \to [a,\ b]$ uzluksiz funksiya bo'lsa, $x = f(x)$ tenglamaning yechimi mavjudligini isbotlang.

16.6. Agar $0 \leq a \leq 1$ bo'lsa,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n^2 - a), \qquad x_0 = 0$$

rekurrent usulda aniqlanuvchi $\{\, x_n\}$ ketma-ketlikning $\sqrt{a}$ soniga yaqinlashishini isbotlang.

16.7. Diskret metrik fazoda qanday akslantirish qisuvchi bo'ladi?

16.8. $S = \{z : \ |z| = 1\}$ aylana bo'lsin. $f : S \to S$ qisuvchi akslantirish mavjudmi?

16.9. X metrik fazo, $f : X \to X$ qisuvchi akslantirish bo'lsin. U holda f akslantirish uzluksiz va hatto tekis uzluksiz bo'lishini isbotlang.

16.10. X to'la metrik fazo va $f_i : X \to X$ $(i = 1, 2)$ akslantirishlar berilgan bo'lsin. Agar f_1 qisuvchi bo'lsa, hamda $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ tenglik o'rinli bo'lsa, f_2 akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi mavjudligini isbotlang.

16.11. $\mathbb{R}^2$ metrik fazoda yagona qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan izometriya shu nuqta atrofida burishdan iborat ekanligini isbotlang.

16.12. X to'la metrik fazo, $f : X \to X$ biror akslantirish bo'lsin. f akslantirishning iteratsiyalari (darajalari) ushbu

$$f^2 = f \circ f, \quad f^n = f^{n-1} \circ f$$

tengliklar bilan aniqlanadi. Agar biror n uchun f^n qisuvchi bo'lsa, $f : X \to X$ akslantirish yagona qo'zg'almas nuqtaga ega bo'ladi. Isbot qiling.

16.13. $K(t, s)$ funksiya $[a,\ b] \times [a,\ b]$ kvadratda uzluksiz bo'lsin. U holda Veyershtrass teoremasiga ko'ra $K(t, s)$ funksiya chegaralangan, ya'ni barcha $t, s \in [a, b]$ lar uchun

$$|K(t, s)| \leq M$$

tengsizlik o'rinli. Ushbu

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)ds$$

akslantirish $C[a,\ b]$ metrik fazoni o'zini-o'ziga akslantirishi va barcha $x,\ y \in C[a,\ b]$ funksiyalar uchun

$$\rho(Ax, Ay) \leq M(b - a)\rho(x, y)$$

tengsizlikning bajarilishini isbotlang.

16.14. $K(t, s)$ o'lchovli funksiya uchun

$$\int_a^b \int_a^b |K(t, s)|^2 dtds \leq M$$

tengsizlik o'rinli bo'lsin. U holda $L_2[a,\ b]$ fazoda aniqlangan

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)\, ds + y(t), \quad y \in L_2[a,\ b]$$

integral tenglama λ parametrning yetarlicha kichik (moduli bo'yicha) qiymatlarida yagona yechimga ega ekanligini isbotlang.

16.15. $K(t,s)$ funksiya $a \le s \le t \le b$ uchburchakda (sohani chizib ko'rsating) uzluksiz bo'lsin. U holda

$$(Ax)(t) = \int_a^t K(t,s)x(s)ds$$

tenglik bilan aniqlangan $A: C[a,\ b] \to C[a,\ b]$ akslantirish uchun shunday n natural son mavjudki, $A^n: C[a,\ b] \to C[a,\ b]$ akslantirish qisuvchi bo'ladi. Isbotlang.

16.16. $K(t,s)$ funksiya $a \le s \le t \le b$ uchburchakda, $y(t)$ funksiya esa $[a,\ b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa,

$$x(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)x(s)ds + y(t)$$

integral tenglama ixtiyoriy $\lambda \in \mathbb{R}$ uchun yagona uzluksiz yechimga ega. Isbotlang.

16.17. $(Ax)(t) = \int\limits_0^t x^2(s)ds$ tenglik bilan aniqlangan $A: C[0,\ a] \to C[0,\ a]$ akslantirish hech bir $a > 0$ uchun qisuvchi emas. Isbot qiling.

16.18. $a > 0$ sonning qanday qiymatlarida

$$x(t) = 1 + \int_0^t x^2(s)ds$$

integral tenglama $C[0,\ a]$ fazoda yechimga ega?

16.19. $\mathbb{R}^n$ fazoda

$$S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n): \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad x_i \ge 0 \right\}$$

qism to'plam *simpleks* deyiladi. Agar $P = (p_{ij}),\ \ i,j = \overline{1,n}$ matritsa elementlari $p_{ij} \ge 0$ va $\sum\limits_{i=1}^n p_{ij} = 1,\ \ j = 1, 2, \ldots, n$ shartlarni qanoatlantirsa, P *stoxastik matritsa* deyiladi. $x \mapsto Px$ akslantirish S^{n-1} simpleksni o'zini-o'ziga akslantirishini ko'rsating. S^{n-1} to'plamda

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad x,\ y \in S^{n-1}$$

metrika kiritilgan bo'lsin. Agar P matritsaning biror satri musbat elementlardan iborat bo'lsa ($p_{i1} > 0, p_{i2} > 0, \ldots, p_{in} > 0$), $Px = x$ tenglama S^{n-1} simpleksda yagona yechimga ega bo'lishini isbotlang.

16.20. $K(t,s)$ funksiya $[0,\ 1] \times [0,\ 1]$ kvadratda uzluksiz bo'lsin.

$$\max_{0 \le t \le 1} \int_0^1 |K(t,s)|\, ds = M$$

belgilash kiritaylik. Agar $4M|\lambda| < 1$ tengsizlik bajarilsa,

$$x(t) = 1 + \lambda \int_0^1 K(t,s)x(s)ds$$

integral tenglama $C[0,\ 1]$ fazoda yagona yechimga ega ekanligini isbotlang.

16.21. Kalkulyatordan foydalanib,

a) $5x - 3\sin x = 7$, b) $3x + e^{-|x|} = 10$, c) $x = \ln \sqrt[3]{1 + x^2} - 3$ tenglamalar yechimini 0,01 aniqlikda toping.

16.22. f biror uzluksiz funksiya bo'lsa,

$$x(t) - \frac{1}{2} \sin\, x(t) + f(t) = 0$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $x \in C[0,\, 1]$ funksiya mavjud. Isbotlang.

16.23. Ushbu

$$x(t) = e^{-x(t)} + \sin t$$

tenglamaning $C[0,\, 1]$ fazoga tegishli yechimi mavjud. Isbotlang.

16.24. X to'la metrik fazo, $A : X \to X$, $\rho(Ax, Ay) \le q\,\rho(x,y)$, $0 \le q < 1$ qisuvchi akslantirish bo'lsin. Ixtiyoriy $x_0 \in X$ uchun $Ax = x$ tenglamaning yechimi $B[x_0, \dfrac{\rho(x_0, Ax_0)}{1-q}]$ sharga tegishli. Isbotlang.

16.25. X to'la metrik fazo, $B[x_0, r] \subset X$ yopiq shar va $f : B[x_0, r] \to X$ biror akslantirish bo'lsin. Agar f akslantirish $B[x_0, r]$ sharni qisqartirib akslantirsa, ya'ni

$$\rho(f(x), f(y)) < q \cdot \rho(x, y), \quad 0 \le q < 1, \quad x, y \in B[x_0, r]$$

shartni qanoatlantirsa va $\rho(f(x), x_0) \le (1 - q) \cdot r$ tengsizlik bajarilsa, $f(x) = x$ tenglama $B[x_0, r]$ sharda yagona yechimga ega. Isbotlang.

16.26. X to'la metrik fazo, $f : X \to X$ uzluksiz akslantirish

$$\rho(f(x), f(y)) \ge \alpha \cdot \rho(x, y), \quad \alpha > 1, \quad x, y \in X$$

shartni qanoatlantirsin. U holda $f(x) = x$ tenglama yechimga ega bo'lishi shartmi?

16.27. $\mathbb{R}^n$ fazoda metrika

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

tenglik bilan aniqlangan. $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$ matritsa elementlari

$$\max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| < 1$$

shartni qanoatlantirsa, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ akslantirish qisuvchi bo'ladi. Isbotlang.

16.28. $A = (a_{ij})$ cheksiz matritsa bo'lsin. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ uchun

$$Ax = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{1i} x_i, \sum_{i=1}^{\infty} a_{2i} x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} x_i, \ldots \right)$$

belgilash kiritaylik. Quyidagi tasdiqlarni isbotlang:

a) agar $\sup\limits_{1 \le j < \infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| < 1$ bo'lsa, $A : \ell_1 \to \ell_1$ - qisuvchi:

b) agar $\sup\limits_{1 \le i < \infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < 1$ bo'lsa, $A : m \to m$ - qisuvchi:

c) agar $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < 1$ bo'lsa, $A : \ell_2 \to \ell_2$ - qisuvchi.

16.29. Akslantirish $A : C[0,\ 1] \to C[0,\ 1]$, $Ax(t) = \lambda\, x(t^\alpha)$, $\alpha \geq 0$ tenglik bilan berilgan. Parametr λ ning qanday qiymatlarida bu akslantirish qisuvchi bo'ladi?

16.30. f va g uzluksiz funksiyalar bo'lib, $|f(0)| < 1$, $|f(1)| < 1$ shart bajarilsa,

$$x(t) = f(t) \cdot x(t^\alpha) + g(t)$$

tenglama $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ bo'lganda, $C[0,\ 1]$ fazoda yagona yechimga ega ekanligini isbotlang.

16.31. $A : L_2[0,\ 1] \to L_2[0,\ 1]$, $(Ax)(t) = \lambda \cdot x(t^\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$ akslantirish λ parametrning qanday qiymatlarida qisuvchi bo'ladi?

16.32. $K(t, s)$ uzluksiz va $\alpha < 1$ bo'lsin. Parametr λ ning qanday qiymatlarida $A : C[0,\ 1] \to C[0,\ 1]$

$$(Ax)(t) = \lambda \cdot \int_0^1 \frac{K(t, s)}{|t-s|^\alpha}\, x(s)\, ds$$

akslantirish qisuvchi bo'ladi?

17-§. Metrik fazolarda kompakt to'plamlar

Agar $K \subset X$ to'plamning istalgan ochiq qoplamasidan chekli qism qoplama ajratish mumkin bo'lsa, u holda K *kompakt to'plam* deyiladi. Agar X fazoning istalgan ochiq qoplamasidan chekli qism qoplama ajratish mumkin bo'lsa, u holda X *kompakt metrik fazo* deyiladi. Kompakt to'plamni quyidagicha ham ta'riflash mumkin. Agar K to'plamdan olingan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan K da yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, K ga *kompakt to'plam* deyiladi. Agar M to'plamning yopig'i $[M]$ kompakt to'plam bo'lsa, M *nisbiy kompakt to'plam* deyiladi. Agar ixtiyoriy $x \in M$ uchun shunday $a \in A$ mavjud bo'lib, $\rho(x, a) \leq \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa,

A to‘plam M to‘plam uchun ε *to‘r* deyiladi. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun M to‘plamning chekli ε to‘ri mavjud bo‘lsa, M *to‘la chegaralangan to‘plam* deyiladi.

Har qanday to‘la chegaralangan to‘plam chegaralangan bo‘ladi, lekin teskarisi o‘rinli emas. Metrik fazolarda to‘plamning nisbiy kompakt bo‘lishligi haqida quyidagi tasdiq o‘rinli.

17.1-teorema. (X, ρ) *to‘la metrik fazodagi* M *to‘plam nisbiy kompakt bo‘lishi uchun, uning to‘la chegaralangan bo‘lishi zarur va yetarli.*

$C[a, b]$ fazoda F funksiyalar oilasi berilgan bo‘lsin. Agar shunday $C > 0$ mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $\phi \in F$ va barcha $x \in [a,b]$ lar uchun $|\phi(x)| \leq C$ tengsizlik bajarilsa, u holda F funksiyalar oilasi *tekis chegaralangan* deyiladi. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo‘lib, $|x_1 - x_2| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x_1, x_2 \in [a,b]$ hamda barcha $\phi \in F$ lar uchun $|\phi(x_1) - \phi(x_2)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, F funksiyalar oilasi *tekis darajada uzluksiz* deyiladi.

17.2-teorema *(Arsela teoremasi).* $M \subset C[a,b]$ *to‘plam nisbiy kompakt bo‘lishi uchun uning tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz bo‘lishi zarur va yetarli.*

Endi biz $\mathbb{R}^n$ yoki $\mathbb{C}^n$ fazoda to‘plamning kompaktlik va nisbiy kompaktlik kriteriysini beramiz.

17.3-teorema. $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ *metrik fazodagi* K *to‘plam kompakt bo‘lishi uchun, uning chegaralangan va yopiq bo‘lishi zarur va yetarli.*

17.1-natija. $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ *metrik fazodagi* K *to‘plam nisbiy kompakt bo‘lishi uchun, uning chegaralangan bo‘lishi zarur va yetarli.*

17.1. X metrik fazoda A va B nisbiy kompakt to‘plamlar bo‘lsa, $A \cup B$, $A \cap B$ to‘plamlar ham nisbiy kompakt bo‘lishini isbotlang.

Isbot. A va B nisbiy kompakt to‘plamlar bo‘lgani uchun, 17.1-teoremaga ko'pa, ular to'la chegaralangan bo'ladi. Demak, A va B to'plamlar uchun A_ε va B_ε chekli ε to'rlar mavjud. U holda $A \cup B$ to'plam uchun $A_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ to'plam chekli ε to'r bo'ladi. Bundan $A \cup B$ to'plamning to'la chegaralangan ekanligi, 17.1-teoremadan esa $A \cup B$ ning nisbiy kompakt to'plam ekanligi kelib chiqadi. 17.3-misol tasdig'iga ko'ra kesishma $A \cap B \subset A$ nisbiy kompakt to'plam bo'ladi. $\square$

17.2. $C[a,b]$ fazoda

$$F = \left\{ y(s) = \int_a^b K(s,t)\, x(t)\, dt\,, \quad x \in B[0,\,1] \right\} \tag{17.1}$$

funksiyalar oilasini nisbiy kompaktlikka tekshiring. Bu yerda $B[0,\,1]$ to'plam - $C[a,b]$ fazodagi markazi nol $(x(t) \equiv 0)$ nuqtada radiusi 1 ga teng bo'lgan yopiq shar. $K(s,t)$ - $[a,b] \times [a,b]$ kvadratda aniqlangan uzluksiz funksiya.

Yechish. Arsela teoremasiga ko'ra F funksiyalar oilasining tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz ekanligini ko'rsatish yetarli. $K(s,t)$ funksiya - $[a,b] \times [a,b]$ kvadratda uzluksiz bo'lganligi uchun u chegaralangan, ya'ni shunday $C > 0$ son mavjudki, barcha $s,\, t \in [a,b]$ lar uchun $|K(s,t)| \leq C$ tengsizlik o'rinli. $x \in B[0,\,1]$ shartdan $\max\limits_{a \leq t \leq b} |x(t)| \leq 1$ ekanligi kelib chiqadi. Endi F funksiyalar oilasining tekis chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz:

$$|y(s)| = \left| \int_a^b K(s,t)\, x(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |K(s,t)| \cdot |x(t)|\, dt \leq C \cdot 1 \cdot (b-a)\,.$$

Bu tengsizlik F funksiyalar oilasining tekis chegaralangan ekanligini isbotlaydi. Endi F funksiyalar oilasining tekis darajada uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz:

$$|y(s_1) - y(s_2)| = \left| \int_a^b K(s_1,t)\, x(t)\, dt - \int_a^b K(s_2,t)\, x(t)\, dt \right| \leq$$
$$\leq \int_a^b |K(s_1,t) - K(s_2,t)| \cdot |x(t)|\, dt \leq \varepsilon \cdot 1 \cdot (b-a)\,.$$

So'nggi munosabat $|s_1 - s_2| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $s_1, s_2 \in [a,b]$ va hamma $x \in B[0,\,1]$ lar uchun o'rinli. Demak, F funksiyalar oilasi tekis darajada uzluksiz ekan. Shunday qilib, Arsela teoremasiga ko‘ra (17.1) tenglik bilan aniqlangan F funksiyalar oilasi nisbiy kompakt to‘plam bo‘ladi. $\square$

17.3. $C[0,\ 1]$ fazoda

$$\Phi = \left\{ x_\alpha(t) = \frac{2\,\alpha\, t}{1 + \alpha^2 t^2}; \quad \alpha \in (0,\ \infty) \right\} \tag{17.2}$$

funksiyalar oilasini nisbiy kompaktlikka tekshiring.

Yechish. Arsela teoremasiga ko‘ra, (17.2) tenglik bilan aniqlangan Φ funksiyalar oilasining tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz ekanligini tekshirishimiz kerak. $(1-\alpha\, t)^2 = 1 - 2\,\alpha\, t + \alpha^2 t^2 \geq 0$ tengsizlikdan $|\, x_\alpha(t)\,| \leq 1$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, Φ funksiyalar oilasi tekis chegaralangan ekan. Tekis darajada uzluksiz emas degan tushunchani ta’riflaymiz. Agar biror $\varepsilon > 0$ son va ixtiyoriy $\delta > 0$ uchun shunday $x_\alpha \in \Phi$ va shunday $t_1,\ t_2 \in [0,\ 1]$ lar mavjud bo‘lib, $|\, t_1 - t_2| < \delta$ tengsizlik bajarilganda

$$|\, x_\alpha(t_1) - x_\alpha(t_2)\,| \geq \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, Φ funksiyalar oilasi *tekis darajada uzluksiz emas* deyiladi. Endi $\varepsilon = 1/2$ va $\delta > 0$ - ixtiyoriy son bo‘lsin. Agar $\alpha > \dfrac{1}{\delta}$ va $t_1 = \dfrac{1}{\alpha}, \ \ t_2 = 0$ bo‘lsa, u holda $|\, t_1 - t_2| = \dfrac{1}{\alpha} < \delta$ bo‘ladi, ammo

$$|\, x_\alpha(t_1) - x_\alpha(t_2)\,| = \frac{2\,\alpha \cdot \dfrac{1}{\alpha}}{1 + \alpha^2 \cdot \dfrac{1}{\alpha^2}} = 1 > \varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli. Demak, Φ funksiyalar oilasi tekis darajada uzluksiz emas ekan. Shunday qilib, (17.2) tenglik bilan aniqlangan Φ funksiyalar oilasi nisbiy kompakt to‘plam emas ekan. $\square$

17.4. X metrik fazoda sanoqli va kompakt bo‘lgan to‘plamga misol keltiring.

Yechish. $X=(-\infty,\ \infty)$ va $M=\{0,\ 2,\ 2^{-1},\ \dots\ ,\ 2^{-n},\ \dots\}$ bo‘lsin. M to‘plam sanoqli va yagona limitik nuqtasi 0 ni saqlaydi. Demak, M yopiq to‘plam. M to‘plam quyidan 0, yuqoridan 2 bilan chegaralangan, ya’ni chegaralangan to‘plam. 17.3-teoremaga ko‘ra, M kompakt to‘plam bo‘ladi. $\square$

Uy vazifalari va mavzuni o‘zlashtirish uchun masalalar

17.5. X metrik fazo A undagi kompakt to‘plam bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $B(B\subset A)$ to‘plamning nisbiy kompakt bo‘lishini isbotlang.

17.6. X metrik fazo A undagi kompakt to‘plam bo‘lsin. Shunday $B(B\subset A)$ to‘plamga misol keltiringki, u kompakt to‘plam bo‘lmasin.

17.7. X metrik fazo A undagi nisbiy kompakt to‘plam bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $B(B\subset A)$ to‘plamning nisbiy kompakt bo‘lishini isbotlang.

17.8. X metrik fazoda A va B kompakt to‘plamlar bo‘lsa, $A\cup B$, $A\cap B$ to‘plamlar ham kompakt bo‘lishini isbotlang.

17.9. Kompakt metrik fazo to‘la ekanligini isbotlang.

17.10. Kompakt metrik fazo separabel. Isbot qiling.

17.11. Kompaktning uzluksiz akslantirishdagi tasviri yana kompakt bo‘lishini isbotlang.

17.12. X kompakt metrik fazo, $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ esa undagi yopiq to‘plamlar bo‘lsin. Agar F_α to‘plamlarning ixtiyoriy cheklitasi bo‘sh bo‘lmagan kesishmaga ega bo‘lsa, u holda $\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha$ kesishma ham bo‘sh emas. Isbotlang.

17.13. Kompakt metrik fazolarning dekart ko‘paytmasi yana kompakt bo‘lishini isbotlang.

17.14. X, Y metrik fazolar, Y kompakt va $f:X\to Y$ uzluksiz va inyektiv akslantirish bo‘lsin. U holda X va $f(X)$ gomeomorf ekanligini isbotlang.

17.15. X kompakt metrik fazo va $f : X \to X$ akslantirish uchun

$$\rho(f(x), f(y)) \geq \rho(x, y), \quad \forall\, x, y \in X$$

tengsizlik bajarilsa, f izometriya bo‘lishini isbotlang.

17.16. X kompakt metrik fazo va $f : X \to X$ akslantirish

$$\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y), \quad x \neq y$$

shartni qanoatlantirsin. U holda $f(x) = x$ tenglama yagona yechimga ega bo‘lishini isbotlang.

17.17. X kompakt metrik fazo va $f : X \to X$ izometriya bo‘lsin. U holda $f(X) = X$ ekanligini isbotlang.

17.18. $\mathbb{R}$ metrik fazoda a) $\mathbb{Z}$, b) $M_n = \left\{\frac{k}{n} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ to‘plam $\mathbb{R}$ uchun qanday to‘rni tashkil etadi?

17.19. $\mathbb{Z}^2$ to‘plam $\mathbb{R}^2$ da qanday to‘rni tashkil etadi?

17.20. Tekislikdagi $A = \{1 \leq x \leq 5, \quad 0 \leq y \leq 4\}$ to‘plam uchun chekli $\varepsilon = \sqrt{2}$ to‘r quring. Chekli $\varepsilon = \sqrt{2}$ to‘rlar ichidan eng kam elementlisining elementlari sonini toping.

17.21. $f : X \to Y$ tekis uzluksiz, $M \subset X$ to‘plam to‘la chegaralangan bo‘lsa, $f(M)$ to‘plam ham to‘la chegaralangan. Isbot qiling. Agar tekis uzluksizlik shartini faqat uzluksizlik sharti bilan almashtirilsa, xulosa noto‘g‘ri bo‘ladi. Misol keltiring.

17.22. X metrik fazo. Agar ixtiyoriy uzluksiz $f : X \to \mathbb{R}$ funksiya chegaralangan bo‘lsa, X kompakt metrik fazo bo‘lishini isbotlang.

Demak, X metrik fazoda uzluksiz, ammo chegaralanmagan funksiya mavjud bo‘lsa, X kompakt metrik fazo emas.

17.23. Agar $M-$kompakt to'plam, $F-$yopiq to'plam va $M \cap F = \emptyset$ bo'lsa, quyidagi tengsizlikni isbotlang

$$d(M, F) = \inf_{x \in M, y \in F} \rho(x, y) > 0.$$

17.24. Shunday M va F yopiq to'plamlarga misol keltiringki, $M \cap F = \emptyset$ va $d(M, F) = \inf_{x \in M, y \in F} \rho(x, y) = 0$ bo'lsin.

17.25. Ushbu

a) $\{ t^\alpha \}$, $\alpha > 0$; b) $\{\sin \alpha t\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

c) $\left\{ \dfrac{1}{\alpha + t^2} \right\}$, $\alpha > 0$; d) $\left\{ \dfrac{t^\alpha}{1 + t^2} \right\}$, $\alpha > 0$; e) $\{\ln^\alpha t\}$, $\alpha > 0$

funksiyalar oilalarining qaysilari $[0,\ 1]$ kesmada tekis darajada uzluksiz? Qaysilari tekis chegaralangan?

17.26. K kompakt, $C(K)$ shu kompaktda uzluksiz bo'lgan barcha haqiqiy (kompleks) qiymatli funksiyalar to'plami bo'lsin. Agar

$$\rho(x, y) = \max_{t \in K} |x(t) - y(t)|$$

deb olsak, $C(K)$ to'la va separabel metrik fazo ekanligini isbotlang.

17.27. X metrik fazo va $K \subset X$ kompakt to'plam bo'lsin. Ixtiyoriy $x \in X$ uchun shunday $y \in K$ mavjudki,

$$\rho(x, y) = \inf_{z \in K} \rho(x, z)$$

ya'ni x uchun K da unga eng yaqin element mavjud. Isbotlang.

17.28. X metrik fazoda K to'plam berilgan. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun K to'plamning kompakt ε to'ri mavjud bo'lsa, K kompakt bo'lishini isbotlang.

17.29. Arsela teoremasidan foydalanib, $C^{(1)}[a,\ b]$ metrik fazoda K to'plamning nisbiy kompakt bo'lishining zarur va yetarli shartini toping.

17.30. $C[0,\ 1]$ metrik fazoda ushbu

$M_1 = \{x \in C[0,\ 1] : \quad |x(t)| \le 1\}$;

$M_2 = \{x \in C[0,\ 1] : \quad |x(t)| \le 1, \quad |x'(t)| \le 2\}$;

$M_3 = \{x \in C[0,\ 1] : \quad |x(t)| \le 1, \quad |x'(t)| \le 2, \quad |x''(t)| \le 3\}$;

$M_4 = \{x \in C[0,\ 1] : \quad |x(t)| \le 1, \quad |x''(t)| \le 2\}$;

$M_5 = \{x \in C[0,\ 1] : \quad |x'(t)| \le 1, \quad |x''(t)| \le 2\}$,

to‘plamlardan qaysilari nisbiy kompakt to‘plam bo‘ladi?

17.31. $K = [0,\ 1] \times [0,\ 1]$ kvadratda uzluksiz differensiallanuvchi va

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t_1}\right| \le 1, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial t_2}\right| \le 1; \quad f(0,0) = 1$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $f(t_1, t_2)$ funksiyalardan iborat to‘plam $C(K)$ metrik fazoda kompakt ekanligini isbotlang.

17.32. $\{a_n\}$ sonlar qanday bo‘lganda $M = \{x \in \ell_2 : \ |x_n| \le a_n\}$ "parallelepiped" ℓ_2 metrik fazoda kompakt bo‘ladi?

17.33. $K \subset X$ kompakt, f_n lar shu kompaktda aniqlangan, haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiyalar. Agar ixtiyoriy $x \in K$ uchun $\{f_n(x)\}$ monoton kamaymovchi

$$f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f_n(x) \le \cdots$$

bo‘lsa, hamda $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ uzluksiz funksiya bo‘lsa, $\{f_n\}$ funksional ketma-ketlik f funksiyaga tekis yaqinlashadi, ya’ni $C(K)$ metrik fazoda $\rho(f_n, f) \to 0$. Isbot qiling.

III bobni takrorlash uchun test savollari

1. $\mathbb{R}$ fazo metrikasini ko‘rsating.

A) $\rho(x,y) = |x-y|$ B) $\rho(x,y) = |x| - |y|$

C) $\rho(x,y) = |x-y|^2$ D) $\rho(x,y) = |x| + |y|$

2. $\mathbb{R}^n$ fazo metrikasini koʻrsating.

A) $\rho(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$ B) $\rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k-y_k|$

C) $\rho(x,y)=\max\limits_{1\le k\le n}|x_k-y_k|$ D) $\rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2$

3. $\mathbb{R}_1^n$ fazo metrikasini koʻrsating.

A) $\rho(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$ B) $\rho(x,\ y)=\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k-y_k|$

C) $\rho(x,y)=\max\limits_{1\le k\le n}|x_k-y_k|$ D) $\rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2$

4. $\mathbb{R}_\infty^n$ fazo metrikasini koʻrsating.

A) $\rho(x,\ y)=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$ B) $\rho(x,\ y)=\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k-y_k|$

C) $\rho(x,\ y)=\max\limits_{1\le k\le n}|x_k-y_k|$ D) $\rho(x,\ y)=\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2$

5. $C[a,\ b]$ fazo metrikasini koʻrsating.

A) $\rho(x,y)=\sqrt{\int\limits_a^b|x(t)-y(t)|^2\,dt}$ B) $\rho(x,y)=\int\limits_a^b|x(t)-y(t)|\,dt$

C) $\rho(x,y)=\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$ D) $\rho(x,y)=\int\limits_a^b|x(t)-y(t)|^2\,dt$

6. $C_1[a,\ b]$ fazo metrikasini koʻrsating.

A) $\rho(x,y)=\sqrt{\int\limits_a^b|x(t)-y(t)|^2\,dt}$ B) $\rho(x,y)=\int\limits_a^b|x(t)-y(t)|\,dt$

C) $\rho(x,y)=\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$ D) $\rho(x,y)=\int\limits_a^b|x(t)-y(t)|^2\,dt$

7. $C_2[a,\ b]$ fazo metrikasini koʻrsating.

A) $\rho(x,y)=\sqrt{\int\limits_a^b|x(t)-y(t)|^2\,dt}$ B) $\rho(x,y)=\int\limits_a^b|x(t)-y(t)|\,dt$

C) $\rho(x,y)=\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$ D) $\rho(x,y)=\int\limits_a^b|x(t)-y(t)|^2\,dt$

8. $\ell_p,\ p\ge 1$ fazo metrikasini koʻrsating.

A) $\rho(x,y)=\sup\limits_{1\le k\le\infty}|x_k-y_k|$ B) $\rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}e^{-k}\,|x_k-y_k|$

C) $\rho(x,y) = \sqrt[p]{\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p}$ D) $\rho(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p$

9. ℓ_2 fazo metrikasini ko'rsating.

A) $\rho(x,y) = \sup\limits_{1\leq k\leq\infty} |x_k - y_k|$ B) $\rho(x,\ y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{-k}\ |x_k - y_k|$

C) $\rho(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^2}$ D) $\rho(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2$

10. Ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q}$ ning barcha limitik nuqtalarini toping.

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{Q}$ C) $\emptyset$ D) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

11. Ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q}$ ning barcha urinish nuqtalarini toping.

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{Q}$ C) $\emptyset$ D) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

12. Ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q}$ ning barcha yakkalangan nuqtalarini toping.

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{Q}$ C) $\emptyset$ D) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

13. Butun sonlar to'plami $\mathbb{Z}$ ning barcha limitik nuqtalari to'plamini toping.

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{Q}$ C) $\emptyset$ D) $\mathbb{Z}$

14. Butun sonlar to'plami $\mathbb{Z}$ ning barcha urinish nuqtalari to'plamini toping.

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{Q}$ C) $\emptyset$ D) $\mathbb{Z}$

15. Butun sonlar to'plami $\mathbb{Z}$ ning barcha yakkalangan nuqtalari to'plamini toping.

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{Q}$ C) $\emptyset$ D) $\mathbb{Z}$

16. $\mathbb{R}$ dagi ochiq to'plamni toping.

A) $(0,\ 2)$ B) $(0,\ 2]$ C) $[0,\ 2)$ D) $[0,\ 2]$

17. $\mathbb{R}$ dagi yopiq to'plamni toping.

A) $(0,\ 1)$ B) $[0,\ 1)$ C) $(0,\ 2]$ D) $[0,\ 4]$

18. $\mathbb{R}$ dagi chegaralangan to'plamni toping.

A) $[0,\ 1]$ B) $(-\infty,\ 0)$ C) $\mathbb{Q}$ D) $(0,\ \infty)$

19. $(X,\,\rho)$ metrik fazoda chegaralangan to‘plam ta’rifini keltiring.

A) $F \subset X$ to‘plam X dagi birorta sharda saqlansa;

B) $F \subset X$ - yopiq to‘plam bo‘lsa;

C) $F \subset X$ - ochiq to‘plam bo‘lsa;

D) $F \subset X$ - chekli yoki sanoqli dona elementdan iborat bo‘lsa.

20. Quyidagilar ichidan metrika shartlarini ajrating.

1) $\rho(x,\,y)=0 \Leftrightarrow x=y;$ 2) $\rho(x,\,y)=\rho(y,\,x),\ \forall x,y\in X$

3) $\rho(\lambda x,\,y)=\lambda\rho(y,\,x),$ 4) $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y),\ \forall x,y,z\in X.$

A) 1, 2, 3 B) 1, 2, 4 C) 1, 3, 4 D) 1, 2, 3, 4

21. Quyidagilarning qaysilari (X,ρ) metrik fazodagi yopiq to‘plam ta’rifi bo‘ladi?

1. Agar F to‘plam barcha limitik nuqtalarini o‘zida saqlasa;
2. Agar F ning barcha nuqtalari ichki nuqta bo‘lsa;
3. Agar $F=[F]$ bo‘lsa;
4. Agar F ning to‘ldiruvchisi ochiq to‘plam bo‘lsa.

A) 1, 2, 3 B) 1, 3, 4 C) 2, 3, 4 D) 1, 2, 3, 4

22. Quyidagilarning qaysilari (X,ρ) metrik fazodagi ochiq to‘plam ta’rifi bo‘ladi?

1. Agar F to‘plam barcha limitik nuqtalarini o‘zida saqlasa;
2. Agar F ning barcha nuqtalari ichki nuqta bo‘lsa;
3. Agar $F=[F]$ bo‘lsa;
4. Agar F ning to‘ldiruvchisi yopiq to‘plam bo‘lsa.

A) 1, 2, 3 B) 1, 3, 4 C) 2, 3, 4 D) 2, 4

23. $\mathbb{R}$ metrik fazoning hamma yerida zich to‘plamni toping.

A) $\mathbb{Q}$ - ratsional sonlar to‘plami B) tub sonlar to‘plami

C) $\mathbb{Z}$ - butun sonlar to‘plami D) $\mathbb{N}$ - natural sonlar to‘plami

24. $\mathbb{R}$ metrik fazoning hamma yerida zich to‘plamni toping.

A) murakkab sonlar to‘plami B) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ - irratsional sonlar to‘plami

C) $\mathbb{Z}$ - butun sonlar to‘plami D) $\mathbb{N}$ - natural sonlar to‘plami

25. $\mathbb{R}$ metrik fazoning hech yerida zich bo‘lmagan to‘plamni toping.

A) $\mathbb{Q}$ - ratsional sonlar to‘plami B) $\mathbb{Z}$ - butun sonlar to‘plami

C) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ - irratsional sonlar to‘plami D) $[0,\ \infty)$

26. Quyidagi tasdiqlardan to‘g‘rilarini ajrating.

1) Ochiq to‘plamning to‘ldiruvchisi yopiq to‘plamdir.

2) Ochiq to‘plamning to‘ldiruvchisi ochiq to‘plamdir.

3) Sanoqli sondagi ochiq to‘plamlarning birlashmasi ochiq to‘plamdir.

4) Sanoqli sondagi ochiq to‘plamlarning kesishmasi ochiq to‘plamdir.

A) 1, 2, 4 B) 1, 2, 3 C) 1, 4 D) 1, 3

27. Quyidagi tasdiqlardan to‘g‘rilarini ajrating.

1) Yopiq to‘plamning to‘ldiruvchisi ochiq to‘plamdir.

2) Yopiq to‘plamning to‘ldiruvchisi yopiq to‘plamdir.

3) Sanoqli sondagi yopiq to‘plamlarning birlashmasi yopiq to‘plamdir.

4) Sanoqli sondagi yopiq to‘plamlarning kesishmasi yopiq to‘plamdir.

A) 1, 2, 4 B) 1, 2, 3 C) 1, 4 D) 1, 3

28. Quyida keltirilganlardan qaysilari to‘la metrik fazo bo‘ladi?

1) $\mathbb{R}$ 2) $\mathbb{R}^n$ 3) $C[a,\ b]$ 4) ℓ_2 5) $C_2[a,\ b]$.

A) 1, 2, 3, 4 B) 1, 2, 4, 5 C) 1, 2, 3, 5 D) 2, 3, 4, 5

29. $C_1[-1,\ 1]$ fazoda quyidagi ketma-ketliklardan qaysilari nolga yaqinlashadi? 1) $f_n(x) = x^n$, 2) $f_n(x) = 1 - x^n$,

3) $f_n(x) = (\sin x)^n$, 4) $f_n(x) = (\cos x)^n$

A) 1, 3, 4 B) 1, 2 C) 2, 4 D) 1, 2, 3

30. $C_2[0,\,1]$ fazoda $x_n(t) = t^n + t^{n+1}$ ketma-ketlikning limitini toping.

A) $x(t) = 0$ B) $x(t) = 2t$ C) $x(t) = 1$ D) $x(t) = 2$

31. $\mathbb{R}^n$ fazoda Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini ko‘rsating.

A) $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k \cdot b_k| \le \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2$

B) $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k \cdot b_k| \le \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},\ p,\, q > 1,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

C) $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ p \ge 1$

D) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right| \le \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2}$

32. $\mathbb{R}^n$ fazoda Minkovskiy tengsizligini ko‘rsating.

A) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right| \le \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2$

B) $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ p \ge 1$

C) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right|^2 \le \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2$

D) $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k \cdot b_k| \le \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},\ p,\, q > 1,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

33. $\mathbb{R}^n$ fazoda Gyolder tengsizligini ko‘rsating.

A) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right|^2 \le \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2$

B) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right| \le \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2$

C) $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k \cdot b_k| \le \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},\ p,\, q > 1,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

D) $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ p \ge 1$

34. Yopiq birlik shar qaysi fazoda kompakt to‘plam bo‘ladi?

A) $\mathbb{R}^n$ da B) $C\,[a,\,b]$ da C) ℓ_2 da D) m da

35. $\mathbb{R}^n$ fazoda kompaktlik kriteriysini keltiring.

A) To‘plamning chegaralangan va ochiq bo‘lishi

B) To‘plamning chegaralangan va yopiq bo‘lishi

C) To‘plamning chegaralangan va sanoqli bo‘lishi

D) To‘plamning chegaralangan bo‘lishi

36. $\mathbb{R}^n$ fazoda nisbiy kompaktlik kriteriysini keltiring.

A) To‘plamning chegaralangan va ochiq bo‘lishi

B) To‘plamning chegaralangan va yopiq bo‘lishi

C) To‘plamning chegaralangan va sanoqli bo‘lishi

D) To‘plamning chegaralangan bo‘lishi

37. To‘la metrik fazoni ko‘rsating.

A) $C[a, b]$ B) $C_1[a, b]$ C) $C_2[a, b]$ D) $C_3[a, b]$

38. Separabel metrik fazolar keltirilgan javobni toping.

A) $\mathbb{R}^n,\ C[a,\ b],\ \ell_2,\ m$ B) $\mathbb{R}^n_1,\ C[a,\ b],\ \ell_2,\ c_0$

C) $\mathbb{R}^n_\infty,\ C[a,\ b],\ \ell_2,\ m$ D) $C^n,\ \mathbb{R}^n_p,\ C_2[a,\ b],\ m$

39. Separabel bo‘lmagan metrik fazoni ko‘rsating.

A) $\mathbb{R}^n$ B) $C[a, b]$ C) m D) ℓ_2

40. Birlik shar qaysi fazoda nisbiy kompakt to‘plam bo‘ladi?

A) $\mathbb{R}^n$ da B) $L_2[0, 1]$ da C) ℓ_2 da D) m da

III bob uchun javoblar va ko‘rsatmalar

11-§. Metrik fazolar

1. Agar $x = (1,\ 1)$, $y = (2,\ 2)$ deb olsak, u holda $\rho_2(x, y) = |1-1| + |2-2| = 0$ tenglik o‘rinli, ammo $x \neq y$. Demak, ρ_2 akslantirish uchun metrikaning 1-aksiomasi bajarilmaydi.

Xuddi shunday ko‘rsatish mumkinki, $x = (2, 3)$, $y = (3, 2)$ har xil nuqtalar uchun $\rho_3(x, y) = |2-2| + |3-3| = 0$ va $\rho_4(x, y) = |2 \cdot 3 - 3 \cdot 2| = 0$ tengliklar bajariladi. Demak, ρ_3 va ρ_4 akslantirishlar uchun metrikaning 1-aksiomasi bajarilmaydi.

5. Ha. **6.** ρ_2 metrika bo‘lmaydi, ρ_1, ρ_3, ρ_4 lar metrika bo‘ladi.

16-34 misollarda keltirilgan $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ akslantirish metrikaning barcha shartlarini qanoatlantiradi.

35, 36 va **40, 43**-misollarda metrikaning 3-sharti bajarilmaydi.

37, 39, 41, 42-misollarda metrikaning 1-sharti bajarilmaydi.

38-misolda metrikaning 2-sharti bajarilmaydi.

44. 2. **45.** 6. **46.** 5. **47.** 20. **48.** 0,5. **49.** $\sqrt{2}$. **50.** $2\sqrt{\pi}$. **51.** 2.
52. 1. **53.** 3. **54.** $\sqrt{3}$. **55.** $2\sqrt{2}$. **56.** $\sqrt{\pi}$. **57.** 4. **58.** 2π.

12-§. Yaqinlashuvchi va fundamental ketma-ketliklar

5. a) Ha. b) Yo‘q. c) Ha. d) Ha.

6. $C^{(1)}[0, 1]$ da yo‘q, $C_1[0, 1]$ da ha.

7. $y_n(t) = t^n - t^{2n}$.

8. Har bir $k \in \mathbb{N}$ uchun $[0,\ 1]$ kesmada $f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)}$ funksiyalarni quyidagi usul bilan aniqlaymiz: $f_i^{(k)}(0) = 1$ va

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar} \quad \dfrac{i-1}{k} < x \leq \dfrac{i}{k}, \\ 0, & \text{agar} \quad x \in (0, 1] \backslash \left(\dfrac{i-1}{k}; \dfrac{i}{k} \right] \end{cases}$$

Bu funksiyalarni tartib bilan nomerlab, $\{g_{\mathrm{n}}\}$ ketma-ketlikni hosil qilamiz. $\{g_{\mathrm{n}}\}$ ketma-ketlik nol funksiyaga $C_1[0,\ 1]$ fazoda yaqinlashadi, lekin biror nuqtada ham nolga yaqinlashmaydi.

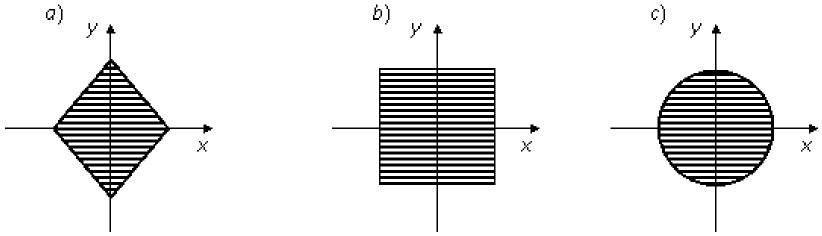
10. $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$.

11. $x_n,\ y_n,\ z_n,\ e_n$ ketma-ketliklar barcha metrik fazolarda uzoqlashuvchi, u_n ketma-ketlik c_0, c va m metrik fazolarda yaqinlashuvchi, agar $\alpha\, p > 1$ bo'lsa, u ℓ_p fazoda ham yaqinlashuvchi, ℓ_1 da uzoqlashuvchi.

16. Ha.

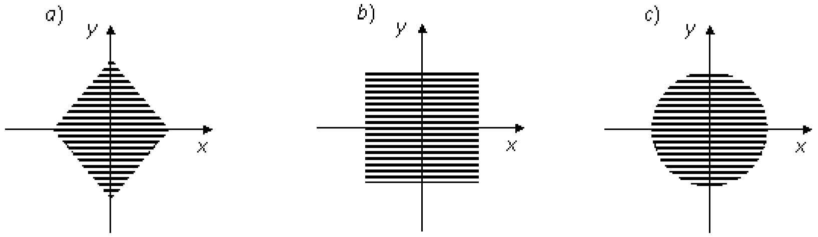
13-§. Ochiq va yopiq to'plamlar

7. a), b), c) larga mos yopiq sharlar 13.1k chizmada a), b), c) lar,



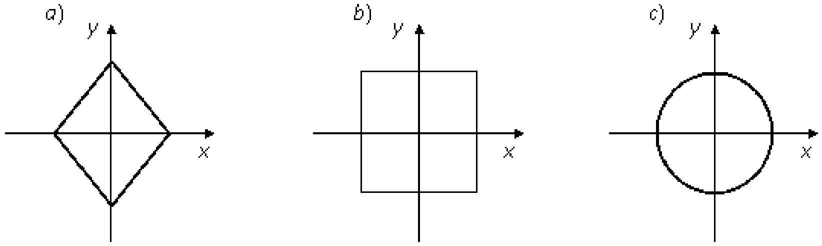
13.1k-chizma

a), b), c) larga mos ochiq sharlar 13.2k-chizmada a), b), c) lar,



13.2k-chizma

a), b), c) larga mos sferalar 13.3k-chizmada a), b), c) lar



13.3k-chizma

d) $B(0,1)=\{0\}$, $B[0,1]$-yopiq shar $0x_1$ va $0x_2$ o‘qlarining birlashmasidan iborat. $S[0,1]$ sfera esa koordinat o‘qlaridan $(0,1)$ nuqtani chiqarib tashlangan to‘plamdan iborat.

8. a) $B(-\infty, r) = B(\infty, r) = \emptyset$. b) $B(-\infty, r) = (-\infty, -(1-r)/r)$, $B(\infty, r) = = ((1-r)/r, \infty.)$

9. b) Diskret metrik fazodagi birlik ochiq shar uchun

$diam\, B(x_0, 1) = 0 < 2 \cdot 1$. c) Har doim to‘g‘ri emas.

Diskret metrik fazoda $0 = diam\, B(x_0, 1) <\ diam\, B[x_0, 1] = 1$.

12. Diskret metrik fazodagi birlik yopiq shar.

20. $\dfrac{1}{4}$ ni $\dfrac{1}{4} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{2}{3^{2i}}$ ko‘rinishda uchlik kasrga yoyish mumkin. Bu yoyilmada 1 raqami qatnashmayapti. Demak, $0,25 \in K$ ekan.

14-§. To‘la metrik fazolar

9. Yo‘q. **10.** $C[a,b]$.

11. a) f - qat’iy monoton funksiya bo‘lsa. b) f - qat’iy monoton funksiya bo‘lib, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ bo‘lsa.

12. To‘ldirmasi $X = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ to‘plamga izomorf.

13. $(\Phi, \rho_1) \cong \ell_1$, $(\Phi, \rho_2) \cong m$.

15. a) $(\mathbb{P}, \rho_1) = C^{(2)}[0,\ 1]$, b) $\mathbb{P}, \rho_2) = C^{(1)}[0,\ 1]$,

c) $(\mathbb{P}, \rho_3) = \{x \in C[-1,\ 1]$ va t=0 da hosilasi mavjud funksiyalar$\}$.

18. $\mathbb{R}$ da ratsional sonlar to‘plami.

24. $(5,\ 6)$ oraliqdagi ratsional sonlarni nomerlab chiqamiz:

$$\{x_k\} = (5,\ 6) \cap \mathbb{Q}.$$

Quyidagi ochiq to‘plamni kiritamiz:

$$A_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(x_k - \frac{1}{10 \cdot 2^k},\ x_k + \frac{1}{10 \cdot 2^k} \right).$$

A to‘plam sifatida $A=((0,\ 1)\cap\mathbb{Q})\cup(2,\ 3)\cup\{4\}\cup A_1$ ni olamiz. U holda

$$\overset{0}{A}=(2,\ 3)\cup A_1,\quad \overset{\overline{0}}{A}\supset[2,\ 3]\cup[5,\ 6],\quad \overset{0}{\overline{A}}=(0,\ 1)\cup(2,\ 3)\cup(5,\ 6)$$

$$\overset{\overline{0}}{\overline{A}}=[0,\ 1]\cup[2,\ 3]\cup[5,\ 6],\quad \overset{\overset{0}{0}}{A}\supset(2,\ 3)\cup[5,\ 6].$$

27. $X=\mathbb{R},\ A=\mathbb{Q}$.

34. $[0,1]$ da Riman yoki Dirixle funksiyasi.

43. X ning sanoqli bo‘lishi.

44. Ta’rifga ko‘ra quyidagi yoyilmalar o‘rinli:

$$M=\bigcup_{n=1}^{\infty}N_{2n},\ \ N=\bigcup_{n=1}^{\infty}N_{2n-1}.$$

Bu yerda N_{2n} va N_{2n-1} lar X metrik fazoning hech yerida zich bo‘lmagan to‘plamlar. U holda $M\cup N=\bigcup_{n=1}^{\infty}N_n$ tenglik o‘rinli. Demak, $M\cup N$ 1-kategoriyali to‘plam.

62. $Fr[a,\ b]=\ Fr(a,\ b)=\{a,b\},\ Fr\,\mathbb{Z}=\mathbb{Z},\ Fr\mathbb{Q}=\mathbb{R}$,

$Fr[a,\ \infty)=\{a\},\ Fr\emptyset=\emptyset$.

66. $\{x_n\}$ ketma-ketlikning $[a,\ b]$ kesmada tekis taqsimlangan bo‘lishi uchun, ixtiyoriy $f\in C[a,\ b]$ da

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)$$

bo‘lishi zarur va yetarli. Har bir $(\alpha,\ \beta)\subset[a,\ b]$ uchun $\chi_{(\alpha,\,\beta)}(x)$ funksiyani uzluksiz funksiya bilan yaqinlashtirib tekis taqsimlangan ketma-ketlik uchun

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b\chi_{(\alpha,\,\beta)}(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_{(\alpha,\,\beta)}(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\alpha,\ \beta)}{n}=\frac{\beta-\alpha}{b-a}$$

tenglikka kelamiz. $0,\ 1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\dots,\ \frac{1}{k},\ \frac{2}{k},\dots,\ \frac{k-1}{k},\dots$ ketma-ketlik $\{x_n\}$ bo‘lsin. U holda $n=k(k+1):2$ deb olamiz.

$$\mathfrak{S}_k=\frac{1}{k}\sum_{\ell=1}^{k-1}f\left(\frac{\ell}{k}\right)$$

deb olsak

$$\mathfrak{S}'_k = \frac{1}{k}\sum_{\ell=1}^{k} f\left(\frac{\ell}{k}\right)$$

integral yig‘indi va bular uchun

$$\lim_{k\to\infty} |\mathfrak{S}_k - \mathfrak{S}'_k| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{f(1)}{k}\right| = 0$$

munosabat o‘rinli. Shuning uchun

$$\lim_{k\to\infty} \mathfrak{S}_k = \int_0^1 f(x)dx$$

tenglik o‘rinli. Endi $n = \dfrac{k(k-1)}{2}$ uchun 0 va 1 sonlarini tashlab,

$$\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} f(x_\ell) = \frac{1}{n}\mathfrak{S}_1 + \frac{2}{n}\mathfrak{S}_2 + \cdots + \frac{k}{n}\mathfrak{S}_k$$

ni olamiz. Matematik analizdagi Tyoplits teoremasiga ko‘ra

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n}\mathfrak{S}_1 + \frac{2}{n}\mathfrak{S}_2 + \cdots + \frac{k}{n}\mathfrak{S}_k) = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{S}_k = \int_0^1 f(x)dx$$

tenglikka kelamiz. Endi $\dfrac{k(k-1)}{2} < n < \dfrac{k(k-1)}{2}$ bo‘lsin. U holda

$$\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} f(x_\ell) = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{\frac{k(k-1)}{2}} f(x_\ell) + \frac{1}{n}\sum_{\ell=\frac{k(k-1)}{2}+1}^{\frac{k(k+1)}{2}} f(x_\ell)$$

bo‘ladi. Ko‘rinib turibdiki

$$\frac{1}{n}\sum_{\ell=\frac{k(k-1)}{2}+1}^{\frac{k(k+1)}{2}} f(x_\ell) \le \frac{Mk}{\frac{k(k-1)}{2}} = \frac{2M}{k-1} \longrightarrow 0, \quad k\to\infty.$$

lsin. Bu yerda $M = \max\limits_{x\in[0,\,1]} |f(x)|$, hamda $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k(k-1)}{2n} = 1$. Shuning uchun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} f(x_\ell) = \int_0^1 f(x)dx.$$

Demak, $\{x_n\}$ ketma-ketlik $[0,\ 1]$ kesmada tekis taqsimlangan bo‘ladi.

15-§. Uzluksiz akslantirishlar

10. Ha. **14.** a) to‘g‘ri. b), c) va d) lar doim to‘g‘ri emas.

17. a) uzluksiz. b) izometriya bo‘ladi.

18. a) va c) uzluksiz, b) uzluksiz emas.

19. a) va d) uzluksiz, b), c) va e) lar uzluksiz emas.

20. a) va b) lar tekis uzluksiz, c) uzluksiz, lekin tekis uzluksiz emas, d) $\alpha \in (0,\ 2)$ da tekis uzluksiz, $\alpha \geq 2$ da tekis uzluksiz emas.

21. a) tekis uzluksiz, b) $\alpha \in (0,\ 2)$ da tekis uzluksiz, $\alpha \geq 2$ da tekis uzluksiz emas.

22. $f(x) = x^\alpha,\ \alpha > 1$. **27.** Tekis uzluksiz bo‘ladi. **28.** $f(x) = \sqrt{x}$.

29. a) Uzluksiz bo‘ladi. b) har doim tekis uzluksiz emas.

34. 15.17-misolga qarang.

36. $f(x) = a \pm x,\ \ x \in \mathbb{R}$.

37. $\mathbb{R}^2$ fazodagi evklid harakati, ya’ni

$f(x_1,\ x_2) = (x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi + a_1,\ x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi + a_2)$ va

$g(x_1,\ x_2) = (x_2,\ x_1)$ shakldagi izometriyalar va ularning kombinatsiyasi.

58. a) Ha. b) Yo‘q.

16-§. Qisqartirib aks ettirish prinsipi

8. Ha. **18.** $a < 1$. **21.** a) $x = 1,414$, b) $x = 3,321$, c) $x = -2,369$.

26. Shart emas. **29.** $\lambda \in (-q,\ q),\ \ 0 < q < 1$. **31.** $\lambda \in (0,\ 1)$.

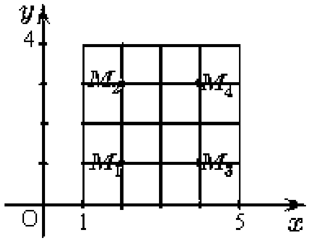
17-§. Metrik fazolarda kompakt to‘plamlar

5. A kompakt to‘plam bo‘lgani uchun, istalgan $\varepsilon > 0$ da uning A_ε chekli ε to‘ri mavjud. $B \subset A$ bo‘lganligi uchun A_ε to‘plam B uchun ham chekli ε to‘r bo‘ladi. 17.1-teoremaga ko‘pa B nisbiy kompakt to‘plam bo‘ladi.

6. $X = \mathbb{R},\ A = [0,1],\ B = (0,1)$. **7.** 17.5-misol kabi isbotlanadi.

18. a) $\varepsilon = 0,5$. b) $\varepsilon = \dfrac{1}{2n}$. **19.** $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

20. Tekislikning 4 ta $M_1(2,1), M_2(2,3)$, $M_3(4,1)$ va $M_4(4,3)$ nuqtalaridan tashkil topgan to'plam A uchun eng kam elementli $\varepsilon = \sqrt{2}$ to'r (17.1k-chizma) bo'ladi.



17.1k-chizma

21. $X = \mathbb{R}$, $M = (0,1)$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

24. $X = \mathbb{R}^2$, $M = \{(x,y) : y = 0\}$, $F = \{(x,y) : x > 0, \; y = x^{-1}\}$ yoki tekislikda M sifatida $y = x$ to'g'ri chiziqni, F sifatida esa asimptotikasi $y = x$ bo'lgan va u bilan kesishmaydigan biror egri chiziqni olish mumkin.

25. Birortasi ham tekis darajada uzluksiz emas. a), b), d) lar tekis chegaralangan.

29. $C^{(1)}[a, b]$ fazodagi K to'plam nisbiy kompakt bo'lishi uchun uning tekis chegaralangan hamda o'zi va hosilalari tekis darajada uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli.

30. M_2, M_3, M_4. **32.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

III bobda keltirilgan test javoblari

1-A 2-A 3-B 4-C 5-C 6-B 7-A 8-C 9-C 10-A 11-A 12-C 13-C 14-D 15-D 16-A 17-D 18-A 19-A 20-B 21-B 22-D 23-A 24-B 25-B 26-D 27-C 28-A 29-A 30-A 31-D 32-B 33-C 34-A 35-B 36-D 37-A 38-B 39-C 40-A.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционалного анализа. Москва: Наука. 1989.

2. Sarimsoqov T.A. Haqiqiy o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi. Toshkent: Fan. 1994.

3. Sarimsoqov T.A. Funksional analiz kursi. Toshkent: O'qituvchi. 1986.

4. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. Москва: Наука. 1965.

5. В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Москва: Наука. 1984.

6. Ayupov Sh. A., Ibragimov M.M., Kudaybergenov K.K. Funksional analizdan misol va masalalar. O'quv qo'llanma. Nukus. Bilim. 2009.

7. J.I. Abdullayev, R.N. G'anixo'jayev, M.H. Shermatov, O.I. Egamberdiyev. Funksional analiz. O'quv qo'llanma. Toshkent-Samarqand. 2009.

8. Чилин В.И., Муминов К.К. Метрические пространства, Ташкент, 2010.

9. А.Б. Антоневич, П.Н. Князов, Я.В. Радыно. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск. Высшая школа. 1978.

10. Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П. Методы решения задач по функциональному анализу. Киев 1990.

11. Ю.М. Березанский, Г.Ф. Ус., З.Г. Шефтель. Функциональный анализ. Киев: Выщая школа. 1990.

12. Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу, - Москва. Просвещение, 1981.

Mundarija

Janikul Ibragimovich ABDULLAYEV,

Yusup Xalbayevich ESHQOBILOV,

Rasul Nabiyevich G‘ANIXO‘JAYEV

FUNKSIONAL ANALIZ

(Misol va masalalar yechish)

I QISM

Muharrir: X. Po‘latxo‘jayev

Rassom: I.N. Bozorov

Sahifalovchi: Z. Shukurxo‘jayev

Musahhih: B. Tuyoqov

Nashriyot litsenziyasi AI N 190, 10.05.2011-y

Bosishga 14.10.2015-yilda ruxsat etildi.

Qog‘oz bichimi 60x84 1/16. Nashr tabog‘i. 16,0. Shartli b. t. 15,75.

Shartnoma 31/18. Adadi 500 nusxa. Buyurtma N 31-18

"TAFAKKUR BO‘STONI" nashriyoti.

Toshkent sh. Yunusobod tumani, 9-13.

"TAFAKKUR BO‘STONI" MCHJ bosmaxonasida chop etildi.

Toshkent sh. Chilonzor ko‘chasi, 1-uy.