11-Mavzu. Tekislikda affin koordinatalar sistemasi.

Adabiyot

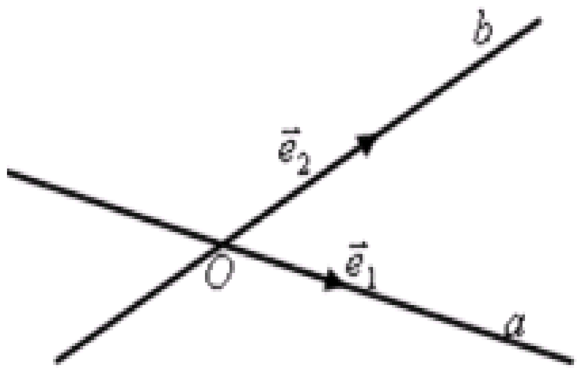
Klaus Helft Mathematical preparation course before studying physics. Institute of Theoretical Physics University of Heidelberg. Please send error messages to k.helft @thphys.uni- heidelberg.de November 11, 2013.

Reja:

- Tekislikda affin koordinatalar sistemasi.
- Kesmani berilgan nisbatda bo`lish.
- To`g`ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi.
- Ikki nuqta orasidagi masofa.

Tekislikdagi affin koordinatalar sistemasi

Tekislikda O nuqtaga qo'yilgan ikkita $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bazis vektorlar berilgan bo'lsin (16-chizma). Bu vektorlar orqali o'tuvchi a va b to'g'ri chiziqlarni olamiz ($a \cap b = 0$).



1-chizma

1 - Ta'rif. Musbat yo'nalishlari mos ravishda $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ vektorlar bilan aniqlanuvchi a va b to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lgan sistema tekislikdagi affin koordinatalar sistemasi deyiladi va $0, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ yoki

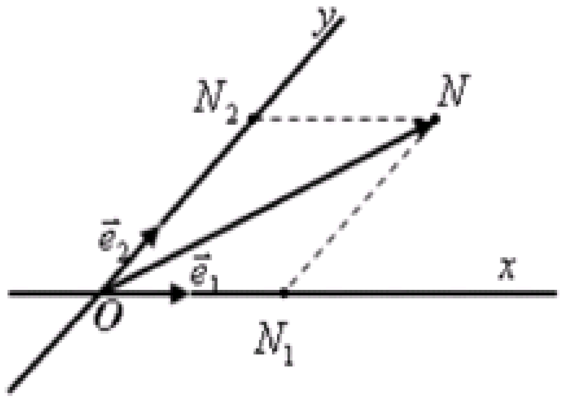
$(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ko'rinishda belgilanadi. 0 nuqta koordinatalar boshi $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ vektorlarni koordinat vektorlar deyiladi; a to'g'ri chiziqni Ox bilan belgilab absissalar o'qi, b to'g'ri chiziqni esa Oy bilan belgilab ordinatalar o'qi deb ataladi.

Tekislikda $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ affin koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. Shu tekislikda birorta N nuqtani olaylik (2- chizma) $\overline{ON}$ vektorni N nuqtaning radius vektori deyiladi.

$\dot{ON}$ vektorni hamma vaqt bazis vektorlari buyicha yoyib yozish mumkin:

$$\dot{ON} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \qquad (8.1)$$

$x, y \in R$. x, y sonlar $\overline{ON}$ radius



2-chizma

vektorning koordinatalari deyiladi va $\dot{ON}(x; y)$ kabi yoziladi.

Radius vektorning x, y koordinatalari N nuqtaning ham koordinatalari deyiladi va uni $N(x, y)$ kabi belgilaymiz. Bunda x soni N nuqtaning absissasi yoki birinchi koordinatasi, y son esa N nuqtaning ordinatasi yoki ikkinchi koordinatasi deyiladi.

Xullas, tekislikda affin koordinatalar sistemasi berilsa, istalgan N nuqtaga uning koordinatalari bo'lmish bir juft $x,\ y \in R^2 = R \times R$ sonlar mos keladi, aksincha, ma'lum tartibda olingan $x, y \in R$ sonlariga, koordinatalari shu sonlardan iborat bitta N nuqta mos keladi.

Haqiqatan, tekislikda $(O, \vec{e}_1, \ \vec{e}_2)$ affin koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin (17-chizma) absissalar o'qiga O nuqtadan boshlab $\dot{ON_1} = x\vec{e}_1$ vektorni, ordinatalar o'qiga esa $\dot{ON_2} = y\vec{e}_2$ vektorlarni qo'yib, N_1 va N_2 nuqtalardan Oy va Ox o'qlarga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz, ularning kesishgan nuqtasi izlanayotgan N nuqta bo'ladi, chunki $\dot{ON} = \dot{ON_1} + \dot{ON_2} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$

Shunday qilib, $(O, \vec{e}_1, \ \vec{e}_2)$ ga nisbatan

$$N(x,\ y) \Leftrightarrow \dot{ON} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

Agar $x = 0$ bo'lsa $\dot{ON} = y\vec{e}_2 \Rightarrow \dot{ON} \parallel x\vec{e}_1 \Rightarrow N \in oy$

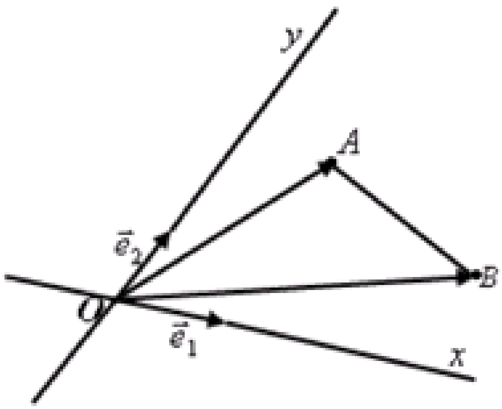
Agar $y = 0$ bo'lsa $N \in ox$, ya'ni Ox o'qida yotadi.

Shunday qilib, absissa o'qida yotgan nuqta koordinatalari $(x, 0)$ va ordinata o'qida yotgan nuqtaning koordinatalari $(0, y)$ bo'ladi. Koordinatalar boshining koordinatalari $O(0, 0)$ bo'ladi.

Koordinat o'qlari tekislikni to'rtta qismga ajratadi. Har bir qismni chorak deyiladi.

$M(x,y)$ nuqta koordinat o'qlarida yotmasa uning qaysi chorakda yotishini x, y sonlarning ishorasiga qarab aniqlash mumkin.

1-masala. AB vektorning boshi $A(x_1, y_1)$ va oxiri $B(x_2, y_2)$ koordinatalari bilan berilgan bo'lsa, $\dot{AB}$ vektor koordinatasini toping.(18-chizma)



18-chizma

Yechish:

$\overline{OA} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$

$\overline{OB} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 \quad \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (x_2 - x_1)\vec{e}_1 - (y_2 - y_1)\vec{e}_2$

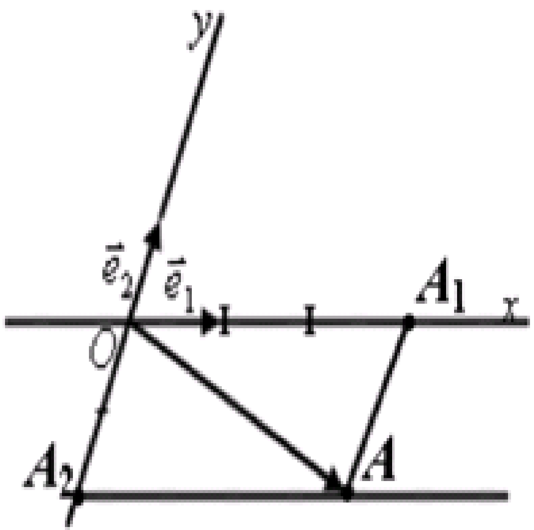
bundan $\dot{AB}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$

2-misol. Affin koordinatalar sistemasi berilgan $A(3,\ -2)$, $B(0,\ 3)$, $C(-2,\ 0)$ nuqtalarni yasang.

Yechish. A nuqtani yasash uchun $\overline{OA} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ vektorni yasaymiz.

Buning uchun 0 nuqtadan boshlab $\vec{e}_1$ vektorga kollinear $\overline{OA_1} = 3\vec{e}_1$ vektorni, $\vec{e}_2$ vektorga kollinear $\overline{OA}_2 = -2\vec{e}_2$ vektorlarni yasaymiz.

Bu vektorlarning yig'indisini yasasak $\overline{OA}$ vektorga ega bo'lamiz va A nuqtani topamiz.



19-chizma

Kesmani berilgan nisbatda bo'lish.

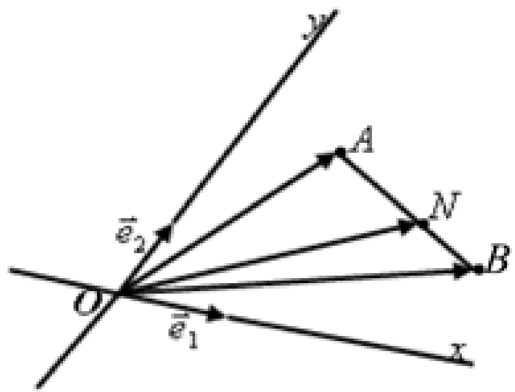
Tekislikni A va B nuqtalari va $\lambda \neq -1$ haqiqiy son berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar $$\vec{AN} = \lambda \vec{NB} \qquad (9.1)$$

shart o'rinli bo'lsa, u holda N nuqta AB kesmani berilgan λ nisbatda bo'ladi deyiladi.

λ sonni uchta A, B, N nuqtalarning oddiy nisbati deyiladi va $\lambda=(AB,N)$ ko'rinishda yoziladi. (20-chizma)

Agar $\lambda>0$ bo'lsa, $\vec{AN}$ va $\overline{NB}$ vektorlar bir xil yo'nalgan bo'ladi, $N \in \vec{AB}$ kesmada yotadi, agar $\lambda<0$ bo'lsa, $N \notin \vec{AB}$. $\vec{AN}$ va $\overline{NB}$ vektorlar qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi.



20-chizma

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $N(x, y)$ koordinatalarga ega bo'lsin.

Bo'luvchi N nuqtani koordinatalarini topaylik.

$\vec{AN}(x - x_1, \ y - y_1), \ \vec{NB}(x_2 - x, \ y_2 - y)$

(9.1) formuladan foydalanib quyidagini yozamiz.

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$$

$$y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$$

Bundan:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$$
$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (9.2)$$

(9.2) formula berilgan kesmani λ nisbatda bo'luvchi nuqta koordinatalarini topish formulasidir.

Agar $\lambda=1$ bo'lsa, u holda N nuqta berilgan kesmani teng ikkiga bo'ladi, (9.2)

formula quyidagi

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$
$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (9.3)$$

ko'rinishda bo'lib, uni kesma o'rtasining koordinatalarini topish formulasi deyiladi.

1-misol. Uchlari $A(1,\ \ 2)$, $B(0,\ 5)$, $C(-2,\ 3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak medianalarining kesishgan nuqtasini toping.

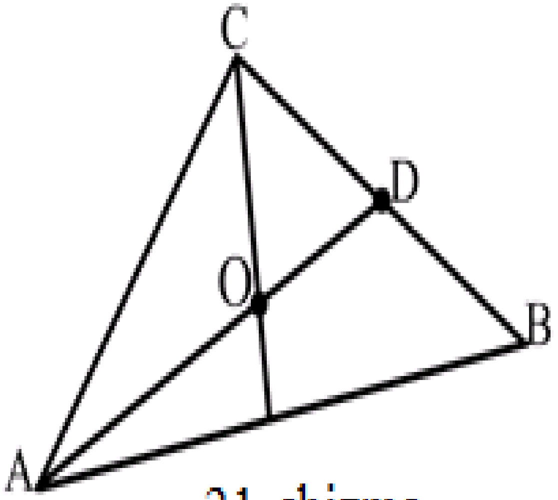
Yechish AD mediana $D(x, y)$ nuqta BC tomon o'rta nuqtasi $x_D=-1$, $y_D=4$, $D(-1,\ 4)$.

Uchburchak medianalar kesishgan nuqtasi $O(x, y)$ bo'lsin, u holda

$$\frac{AO}{OD}=\lambda=2:1,\ \lambda=2$$

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{1+2(-1)}{3}=-\frac{1}{3}$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{2+2\cdot 4}{3}=\frac{10}{3}$$

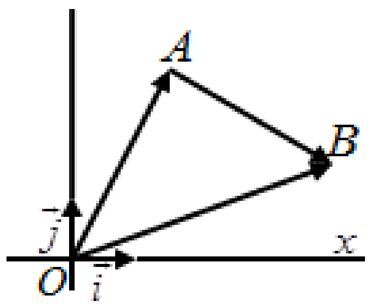


21-chizma

Demak, $O(-\frac{1}{3},\ \frac{10}{3})$.

To'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasi.

Affin koordinatalar sistemasining $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ koordinat vektori ortogonal bazisni tashkil qilsa, ya'ni $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$ bo'lsa, u holda affin koordinatalar sistemasi



22-chizma

dekart koordinatalar sistemasi bo'ladi. Bunday koordinatalar sistemasini $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ko'rinishida belgilaymiz (22-chizma).

Bu yerda $i^2 = j^2 = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.

Dekart koordinat sistemasi affin koordinatalar sistemasining xususiy holi bo'lgani uchun affin koordinatalar sistemasiga nisbatan o'rinli mulohazalar Dekart koordinatalar sistemasida ham o'z kuchini saqlaydi.

Ammo dekart koordinatalar sistemada o'rinli bo'lgan ba'zi mulohazalar affinda o'rinli bo'lavermaydi.

Ikki nuqta orasidagi masofa.

Tekislikda to'g'ri burchakli $(O,\vec{i},\vec{j})$ dekart koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. Bu koordinatalar sistemasiga nisbatan $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalar koordinatalari bilan berilgan (21-chizma).

$$\begin{aligned} \vec{OA} &= x_1\vec{i} + y_1\vec{j} \\ \overrightarrow{OB} &= x_2\vec{i} + y_2\vec{j} \end{aligned} \qquad (11.1)$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}.$$

Bundan $\vec{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$.

Ikkita A va B nuqtalar orasidagi masofa deb, $\vec{AB}$ vektor moduliga $|\overrightarrow{AB}|$ aytiladi va $\rho(A,\ B) = AB = |\vec{AB}|$ ko'rinishida yoziladi.

$$\rho(A,\ B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (11.2)$$

Shunday qilib A va B nuqtalar orasidagi masofa (11.2) formula bilan hisoblanadi.

1-masala. *A(-1, 0)* va *B(2, 3)* nuqtalar orasidagi masofani hisoblang.

Yechish (11.2) formuladan topamiz.

$$\overline{AB} = |\overline{AB}| = \sqrt{(2-(-1))^2+(3-0)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}.$$

2-masala. Uchburchak uchlarining koordinatalari to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida *A(3, 2), B(6, 5), C(1, 10)* berilgan. Uchburchakning to'g'ri burchakli uchburchak ekanligini isbotlang.

Yechish Uchburchak tomonlarini topamiz.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(6-3)^2+(5-2)^2} = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(1-6)^2+(10-5)^2} = \sqrt{5^2+5^2} = 5\sqrt{2}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(1-3)^2+(10-2)^2} = \sqrt{(-2)^2+9^2} = 2\sqrt{17}$$

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ ikkinchi tomondan

$$\overline{AB}(3,3), \overline{BC}(-5,5) \quad \overline{AB}\cdot\overline{BC} = -15+15 = 0, \Rightarrow \angle B = 90^0.$$