# 9-mavzu. Chiziqli erkli va chiziqli bog’liq vektorlar ortogonal va ortonormal bazis

## Topic-9.

**Adabiyot.** (Mathematical preparation course before studying physics. Klaus Hefft. November 11. 2013

**REJA:**

1. **Vektorlarning chiziqli bog’liqligi**
2. **Ortoganal va ortoganal bazis**

**Ta'rif.** Ixtiyoriy $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n$, vektorlar sistemasi va $c_1, c_2, \dots, c_n$, haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin.

$$\vec{A} = c_1\vec{A}_1 + c_2\vec{A}_2 + \dots + c_n\vec{A}_n,$$

vektorni berilgan $\vec{A}$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deyiladi. Bunda $\vec{A}$ vektor $c_1, c_2, \dots, c_n$, vektorlar sistemasi orqali chiziqli ifodalangan deyiladi, $c_1, c_2, \dots, c_n$, sonlar chiziqli kombinatsiya koeffitsentlari deyiladi.

**12-ta'rif.** Ixtiyoriy $\vec{A}$ va $\vec{B}$ vektorlarning, $k_1, k_2$ haqiqiy sonlar bilan berilgan chiziqli kombinatsiyasi

$$k_1\vec{A} + k_2\vec{B} = \vec{0} \qquad (1)$$

koeffitsentlarning kamida bittasi noldan farqli bo'lganda (1) bajarilsa , u holda $\vec{A}$ va $\vec{B}$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq deyiladi.

Agar (1) tenglik $k_1, k_2$ sonlarning hammasi nolga teng bo'lgandagina o'rinli bo'lsa, $\vec{A}$ va $\vec{B}$ vektorlar sistemasi chiziqli erkli deyiladi.

**1.2-teorema.** Agar (3.1) vektorlar sistemasining biror vektori nol vektor bo'lsa, u holda bu vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'ladi[1].

Isbot. Faraz qilaylik $\vec{a}_k = \vec{0}$ bo'lsin, u holda

$\alpha_k \neq 0, \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$, sonlar uchun $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$ munosabat o'rinli bo'ladi. Demak, ta'rifga asosan (3.1) vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq.

Quyidagi teoremalarni talabalar o'zlari isbotlasin.

**1.2-teorema.** Agar (3.1) vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'lsa, sistemaning kamida bitta vektori uning qolgan vektorlari orqali chiziqli ifodalanadi.

**1.3-teorema.** Ikkita vektor chiziqli bog'liq bo'lishi uchun ularning kollinear bo'lishi zarur va etarli.

**1.4-teorema.** Uchta vektor chiziqli bog'liq bo'lishi uchun ularning komplanar bo'lishi zarur va etarli.

$n$ o'lchovli $m$ ta vektorlardan iborat vektorlar sistemasi berilgan bo'lsin.

$$\begin{cases} \overline{a_1}(a_{11} a_{12} \ldots\ldots a_{1n}) \\ \overline{a_2}(a_{21} a_{22} \ldots\ldots a_{2n}) \\ - - - - - - - - - - \\ \overline{a_m}(a_{m1} a_{m2} \ldots\ldots a_{mn}) \end{cases} \qquad (1)$$

---

[1] Introduction to Calculus Volume II. pp 3-4

(1) vektorlar sistemasi chiziqli erkli yoki chiziqli bog'liq ekanini aniqlash uchun berilgan vektorlar sistemasi vektorlaridan vektor tenglama tuzamiz:

$$\overline{a_1}x_1 + \overline{a_2}x_2 + \ldots\ldots + \overline{a_m}x_m = \overline{\theta} \qquad (2)$$

bu yerda $\overline{\theta}$ - $n$ o'lchovli nol vektor. (1) Tenglama $m$ noma'lum $n$ ta bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi. Bu sistema aniq bo'lib, yagona nol yechimga ega bo'lsa, berilgan vektorlar sistemasi o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan yoki chiziqli erkli vektorlar sistemasi bo'ladi.

Agar sistema aniq emas bo'lib, nol yechimdan tashqari nol bo'lmagan yechimlarga ega bo'lsa, vektorlar sistemasi chiziqli bog`liq sistema bo'ladi; bunda $x_1, x_2, \ldots, x_m$ lardan kamida bittasi noldan farqli bo'lsa, $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_m}$ lardan birini qolgan vektorlar orqali chiziqli ifodalash mumkin, bu esa sistema chiziqli bog'liq ekanini ko'rsatadi. (1) sistemaning chiziqli bog'liq yoki chiziqli erkli ekanini topish uchun vektorlar koordinatalaridan matritsa tuzamiz. Agar $r(A)=m$ bo'lsa, sistema chiziqli erkli, agar $r(A)<m$ bo'lsa, chiziqli bog'liq bo'ladi.

Misol-1. $\overline{a_1}(1;4;5)$, $\overline{a_2}(2;-1;1)$, $\overline{a_3}(-1;1;3)$ vektorlarning chiziqli bog'liq yoki chiziqli erkli ekanini aniqlang.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ matritsa rangini aniqlaymiz.

$$M=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-3+10-4-5-24-1=-27\neq 0$$

$r(A)=3,\qquad r(A)=m=3.$

Vektorlar sistemasi chiziqli erkli.

Misol-2. $\overline{a_1}(1;3;2)$, $\overline{a_2}(2;7;3)$, $\overline{a_3}(-1;2;-7)$ vektorlarning chiziqli bog'liq yoki chiziqli erkli ekanini aniqlang:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix};\qquad M=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix}=-49+8-9+14+42-6=64-64=0$$

$$M_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=7-6=1\neq 0 \qquad r(A)=2,$$

vektorlar soni $m=3$. $r(A)\neq m$. Vektorlar sistemasi chiziqli bogliq

***a***$_1$, ***a***$_2$ ...., ***a***$_n$ vektorlar sistemasi berilgan bo`lsin. Berilgan *vektorlar sistemasining bazisi* deb uning chiziqli bog'liq bo'lmagan shunday bir qismiga aytiladiki, bunda berilgan sistemaning har bir vektori bazis vektorlari orqali yoyilishi mumkin bo'ladi. Berilgan vektorlar sistemasining ixtiyoriy bazisi tarkibidagi vektorlar soniga uning *ranggi* deyiladi.

1. Misol. Quyidagi vektorlar sistemasining bazislaridan birini quring va rangini aniqlang:

$\boldsymbol{a}_1(1;2;-1;3)$, $\boldsymbol{a}_2(0;3;4;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;-1;6;-5)$, $\boldsymbol{a}_4(5;1;2;-4)$

Yechish: $\boldsymbol{a}_1x_1+\boldsymbol{a}_2x_2+\boldsymbol{a}_3x_3+\boldsymbol{a}_4x_4=\theta$ vektor tenglama umumiy yechimini Gauss-Jordan usulida quramiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -19 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -19 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Yechilgan sistemadan $x_1$, $x_2$, $x_4$ – erkli bo`lmagan noma'lumlar, $x_3$ esa erkli noma'lum ekanligi ko'rinib turibdi. Demak, berilgan vektorlar sistemasining bazisi ***a***$_1$, ***a***$_2$ va ***a***$_4$ vektorlar sistemasi bo'lib, sistemaning ranggi bazisidagi vektorlar soni 3 ga teng.

Yechilgan sistemadan $x_1, x_2, x_4$ – erkli bo`lmagan noma'lumlar, $x_3$ esa erkli noma'lum ekanligi ko'rinib turibdi. Demak, berilgan vektorlar sistemasining bazisi $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ va $\boldsymbol{a}_4$ vektorlar sistemasi bo'lib, sistemaning ranggi bazisidagi vektorlar soni 3 ga teng.

Agar berilgan ikkita $n$ o'lchovli $\boldsymbol{a}_1$ va $\boldsymbol{a}_2$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, $\boldsymbol{a}_1$ va $\boldsymbol{a}_2$ vektorlar o'zaro *ortogonal vektorlar* deyiladi.

$n$ o'lchovli nolmas vektorlardan tarkib topgan vektorlar sistemasi berilgan bo'lib, sistema vektorlarining har qanday ikki jufti o'zaro ortogonal bo'lsa, u holda sistemaga *ortogonal vektorlar sistemasi* deyiladi[2].

In the definition of the scalar product, among other things we were motivated by the wish to be able to describe the **orthogonality** of the three normalized **basis vectors** $\vec{e}_k$ of the Cartesian coordinate system in a simple way. As desired we now get three equations:

$$\boxed{\textbf{orthogonality:}\quad (\vec{e}_k \cdot \vec{e}_l) = |\vec{e}_k||\vec{e}_l| \cos\angle(\vec{e}_k, \vec{e}_l) = \cos\varphi_{kl} = 0 \text{ for } k \neq l = 1, 2, 3,}$$

because $\varphi_{kl} = \pi/2$ or equivalently $\vec{e}_k \perp \vec{e}_l$ for $k \neq l$. For $k = l$ we obtain three further equations:

$$\boxed{\textbf{normalization:}\quad (\vec{e}_k \cdot \vec{e}_k) = |\vec{e}_k||\vec{e}_k| \cos\angle(\vec{e}_k, \vec{e}_k) = \cos 0 = 1 \text{ for } k = 1, 2, 3.}$$

---

[2] Mathematical preparation course before studying physics pp 234-235

2. Misol. Quyidagi vektorlar sistemasi ortogonalmi?

$\boldsymbol{a_1}(0;5;-2)$, $\boldsymbol{a_2}(29;-2;-5)$, $\boldsymbol{a_3}(2;4;10)$

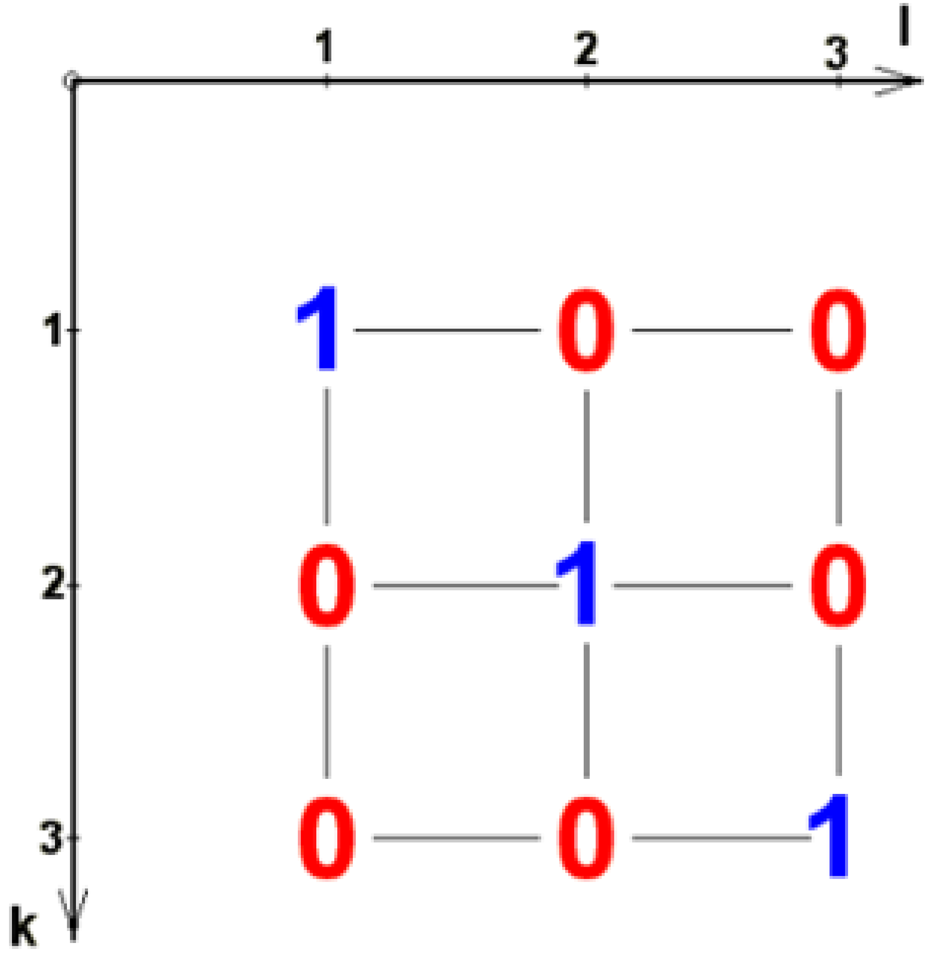
Yechish:

$(\boldsymbol{a_1} * \boldsymbol{a_2})=0-10+10=0$

$(\boldsymbol{a_1} * \boldsymbol{a_3})=0+20-20=0$

$(\boldsymbol{a_2} * \boldsymbol{a_3})=58-8-50=0$

Berilgan vektorlar sistemasi ortogonal vektolar sistemasi ekan.



Teng o`lchovli $n$ ta $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots \boldsymbol{a}_k$ chiziqli erkli vektorlar sistemasi ustida *ortogonal vektorlar sistemasini* qurish, ya'ni mos ravishda $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots \boldsymbol{b}_k$ ortogonal sistema bilan almashtirish mumkin. Buning uchun *Shmidt formulalaridan* foydalanamiz:

$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$

$$\mathrm{b}_t = a_t - \sum_{i=1}^{t-1} \frac{(b_i \cdot a_t)}{(b_i \cdot b_i)} b_i \qquad t \in \{2;3;\ldots k\}$$

3. Misol. $\boldsymbol{a}_1(1;1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(0;1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(0;0;1)$ vektorlar sistemasi ustida ortogonal sistema quring. rang $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=3$ chiziqli erkli sistema ekan.

$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1(1;1;1)$

$$b_2 = a_2 - \frac{(b_1 \cdot a_2)}{(b_1 \cdot b_1)} b_1 = (0;1;1) - \frac{2}{3}(1;1;1) = \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

$$b_3 = a_3 - \frac{(b_1 \cdot a_3)}{(b_1 \cdot b_1)} b_1 - \frac{(b_2 \cdot a_3)}{(b_2 \cdot b_2)} b_2 = (0;0;1) - \frac{1}{3}(1;1;1) - \frac{1/3}{2/3}\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \left(0; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Berilgan vektorlar sistemasi ustida qurilgan ortogonal sistema vektorlarini butun koordinatali vektorlarga aylantirib, (1;1;1); (-2;1;1); ( 0;-1;1) natijani olamiz.

Nol bo'lmagan ***b*** *vektorning normallangan* yoki *birlik vektori* deb, $\frac{b}{|b|}$ vektorga aytiladi.

Those nine equations contain all information about the orthogonality and normalization of the basis vectors. They can **be combined** into one single equation

$$\boxed{\textbf{orthonormality:} \quad (\vec{e}_k \cdot \vec{e}_l) = \delta_{k\,l},}$$

if we introduce the symbol $\delta_{k\,l}$ named after Leopold Kronecker, which is defined as follows:

$$\boxed{\textbf{Kronecker symbol:} \quad \delta_{k\,l} := \begin{cases} 1 & \text{for} \quad k = l \\ 0 & \text{for} \quad k \neq l. \end{cases}}$$

Like the scalar product, this number pattern is symmetrical against exchange of the two indices: $\delta_{k\,l} = \delta_{l\,k}$. In the following figure the pattern is pictorially represented in a plane:

Har bir vektorni normallangan, ya'ni birlik vektor ko'rinishiga keltirilgan ortoganal sistemaga *ortonormallangan vektorlar sistemasi* deyiladi.

4. Misol. Yuqoridagi misolda topilgan ortonormal $\boldsymbol{b_1}(1;1;1)$; $\boldsymbol{b_2}(-2;1;1)$; $\boldsymbol{b_3}(0;-1;1)$ sistemaning har bir vektorini birlik ko'rinishga keltiramiz.

$$\frac{b_1}{|b_1|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}(1;1;1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{b_2}{|b_2|} = \frac{1}{\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}}(-2;1;1) = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\frac{b_3}{|b_3|} = \frac{1}{\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}}(0;-1;1) = \left(0;-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

n o`lchovli birlik $e_1(1;0;0;\dots;0), e_2(0;1;0;\dots;0), \dots, e_n(0;0;0;\dots;1)$ vektorlar *kanonik bazis*ni tashkil qiladi.

# CHIZIQLI ERKLI VA CHIZIQLI BOG'LIQ BO'LGAN VEKTORLAR SISTEMASINING XOSSALARI

- **$1^0$.** Agar vektorlar sistemasining kamida bitta vektori nol vektordan iborat bo'lsa, bu vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'ladi.
- **$2^0$.** Agar vektorlar sistemasining qandaydir sistemaostisi chiziqli bog'liq bo'lsa, bu vektorlar sistemasining o'zi ham chiziqli bog'liq bo'ladi.
- **$3^0$.** $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'langan bo'lishi uchun ulardan kamida bittasi qolganlari orqali chiziqli ifodalanishi zarur va yetarli.
- **$4^0$.** Agar $a_1, a_2, \dots, a_n$ (1) vektorlar sistemasi chiziqli erkli bo'lib, $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ vektorlar chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda $b$ vektor (1) vektorlar orqali yagona tarzda chiziqli ifodalanadi.