2-mavzu: Matematik mantiq elementlari, mulohazalar ustida mantiq amallari

Elements of mathematical logic, operations on propositions

Adabiyot: Mathematical Literacy for Humanists, Herbert Gintis, p.p2-7.

Mulohaza matematik mantiqning asosiy tushunchalaridan bo’lib, u rost yoki yolg’onligi bir qiymatli aniqlanadigan darak gapdir. Masalan, «Kvadrat to’g’ri to’rtburchakdir», «7-tub son», «2>5» kabi tasdiqlar mulohazalar bo’lib, birinchi va ikkinchi mulohazalar rost, uchinchi mulohaza esa yolg’on mulohazadir.

Demak, biror bir gap mulohaza bo’lishi uchun, u albatta darak gap bo’lishi va rost yoki yolg’onligi bir qiymatli aniqlanishi shart.

Undov, so’roq gaplar mulohaza bo’la olmaydi. Rost mulohazaga 1 qiymatni, yolg’on mulohazaga 0 qiymatni mos qo’yamiz. Mulohazalarni lotin alifbosining bosh harflari bilan belgilashni kelishib olamiz.

Quyida biz berilgan mulohazalardan mantiq amallari deb ataladigan amallar yordamida boshqa mulohazalar hosil qilish usullarini ko’rib chiqamiz.

Ta'rif. Berilgan A mulohaza rost bo'lganda yolg'on, A mulohaza yolg'on bo'lganda rost bo'ladigan mulohaza A mulohazaning <u>inkori</u> deyiladi va $\rceil$A yoki $\bar{A}$ orqali belgilanadi.

Inkor amali quyidagi jadval yordamida to'liq aniqlanadi:

A	$\rceil$A
1	0
0	1

Bunday jadvallarni rostlik jadvali deb ataymiz.

Masalan, A mulohaza - «7-tub son» degan rost mulohaza bo'lsin, u holda

$\rceil$A - «7-tub son emas» degan yolg'on mulohazadan iborat.

Ta'rif. A va V mulohazalar rost bo'lgandagina rost bo'lib, qolgan hollarda yolg'on bo'ladigan mulohaza A va V mulohazalarning kon'yunksiyasi deyiladi va $A \wedge V$ yoki A & V ko'rinishda belgilanadi

Kon'yunksiya amalining rostlik jadvali quyidagichadir:

A	V	$A \wedge V$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Ta'rif. A va V mulohazalar diz'yunksiyasi deb, A va V mulohazalarning ikkalasi ham yolg'on bo'lgandagina yolg'on, qolgan hollarda rost bo'ladigan $A \vee V$ mulohazaga aytiladi.

Ta'rif. A va V mulohazalar <u>implikasiyasi</u> deb, A mulohaza rost va V mulohaza yolg'on bo'lgandagina yolg'on, qolgan hollarda rost bo'ladigan $A \to V$ mulohazaga aytiladi.

Ta'rif. A va V mulohazalar <u>ekvivalensiyasi</u> deb, A va V mulohazalarning ikkalasi ham yolg'on yoki rost bo'lganda rost, qolgan hollarda yolg'on bo'ladigan $A \leftrightarrow V$ mulohazaga aytiladi

Bu amallar uchun rostlik jadvallarini keltiramiz:

A	V	$A \vee V$	$A \to V$	$A \leftrightarrow V$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	1	0
0	0	0	1	1

$\wedge$ - mantiqiy ko'paytirish, $\vee$ - mantiqiy qo'shish amallari deb yuritiladi. A $\wedge$ V mulohazani A va V; A $\vee$ V mulohazani A yoki V; A $\rightarrow$ V mulohazani A mulohazadan V mulohaza kelib chiqadi yoki agar A bo'lsa, u xolda V bo'ladi; A $\leftrightarrow$ V mulohazani A mulohazadan V mulohaza va V mulohazadan A mulohaza kelib chiqadi yoki A bo'ladi, faqat va faqat shu holda-ki, agar V bo'lsa, deb o'qiymiz.

Mulohazalar to'plamini M harfi bilan belgilaylik. U holda M to'plam, unda bajariladigan barcha $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ amallar bilan birgalikda <u>mulohazalar algebrasi</u> deb yuritiladi. Mulohazalar algebrasini qisqacha MA orqali belgilaymiz.

M to’plamda bajariladigan amallarni bajarilish tartibi quyidagicha: avval inkor amali bajariladi, agar inkor amali qavslardan tashqarida bo’lsa, u xolda qavs ichidagi amallar bajariladi. Keyin kon’yunksiya, undan so’ng diz’yunksiya, implikasiya va nihoyat ekvivalensiya amallari bajariladi.

Suppose we have a set of sentences p, q, r, s that are either true or false. We define logical connectives, which are operations on sentences, as follows:

$p \wedge q$	p and q
$p \vee q$	p or q
$\neg p$	not p
$p \Rightarrow q$	p implies q
$p \Leftrightarrow q$	p if and only if q

Mulohazalar odatda lotin alifbosining kichik harflari bilan belgilanadi. Masalan, a, b, c, …. Mulohazalar algebrasining logik amallari maxsus harflar va belgilar orqali berilganda quyidagicha o'qiladi:

$p \wedge q$	p va q
$p \vee q$	p yoki q
$\neg p$	p emas
$p \rightarrow q$	p dan q kelib chiqadi
$p \leftrightarrow q$	p agar faqat va faqat agar q
$\perp$	yolg'on
$\top$	rost.

The easiest way to clarify the meaning of these logical connectives is by using *truth tables*. The truth table for $\wedge$ is

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F.

The truth table for $\vee$ is

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F.

This says that $p \vee q$ is true exactly when at least one of p and q is true.
The truth table for $\neg$ is simplest of all:

p	$\neg p$
T	F
F	T.

Thus, $\neg p$ is true exactly when p is false.
The truth table for $\leftrightarrow$ is

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T.

Agar mulohazalar o’rtasiga mantiq amalllaridan qo’ysak, yangi mulohaza hosil bo’lib, bunday mulohazaga qo’shma mulohaza deyiladi. Mulohazalar algebrasida rost yoki yolg’on tushunchalari asosiy tushunchalardan hisoblanadi. Qo’shma mulohazaning rost yoki yolg’on ekanligini ta’rifdan kelib chiqqan holda jadval asosida ko’rish birmuncha qulaylik tug’diradi. Bunday jadvalga rostlik jadvali ham deyiladi. Mulohazalar ustida konyunksiya, dizyunksiya, implikatsiya va ekvivalensiya amallari mavjud bo’lib ularning rostlik jadvali quydagicha bo’ladi.

p	$\neg p$
T	F
F	T.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F.

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T.

A *tautology* is a well-formed proposition that is true no matter what the truth value of the atomic propositions of which it is composed. The following are some tautologies from propositional logic. Prove them using truth tables, and say what they mean in words.

- Modus Ponens: $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$;
- Modus Tollens: $(p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$;
- $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$;
- $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$;
- $((p \vee q) \vee r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$
- $((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$
- $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)) \rightarrow (q \vee s)$;
- $p \wedge q \rightarrow p$
- $p \rightarrow p \vee q$
- $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$;
- De Morgan's Theorem I: $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
- De Morgan's Theorem II: $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
- Double Negation: $\neg\neg p \leftrightarrow p$;
- Distributive I: $p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;
- Distributive II: $p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$;
- Law of Excluded Middle: $p \vee \neg p$.