

1—2-MAVZU: To'plam va ular ustida amallar.

Reja:

1. To'plam va uning elementlari.
2. To'plamlar ustida amallar va ularning hossalari.
3. Eyler-Venn diagrammalari

Tayanch so'zlar: To'plam va uning elementlari, to'plamlar kesishmasi, birlashmasi, ayirmasi, bo'sh to'plam, universal to'plam.

To'plam tushunchasi matematikaning boshlang'ich tushunchalaridan bo'lib, u ta'rifsiz qabul qilinadi. To'plamni tashkil qiluvchi obyektlar uning elementlari deyiladi. To'plamlarni A , a , a , A yoki A harflari bilan belgilaymiz. To'plam bir qancha elementlardan iborat bo'lishi mumkin, quyidagi yozuv:

$$a \in A \quad (1.1)$$

a elementni A to'plamga tegishlilikini bildiradi.

$$a \notin A \quad (1.2)$$

a elementni A to'plamga tegishli emasligini bildiradi, yoki mantiq belgisidan foydalangan holda $\neg(a \in A)$ ko'rinishda yozishimiz mumkin. Agar $a \in A$ bo'lsa, u holda a element A to'plamga tegishli deyiladi¹.

Hajmlilik Aksiomasiga ko'ra to'plam elementlarini quyidagicha belgilashimiz ham mumkin,

$$A = \{1, a, t, x\}, \quad (1.3)$$

bunda, A to'plam tarkibida 1 soni va a, t, x harfiy belgilar kiradi.

To'liqlik Aksiomasiga ko'ra to'plam elementlari soni uning tarkibiga kiruvchi elementlar bilan aniqlanib ularning qanday tartiblanganiga bog'liq emas.

(3) A to'plam $\{a, x, 1, t\}$ to'plam bilan xam va $\{x, t, a, 1, 1, t, a, t, x\}$ to'plam bilan xam bir xildir².

To'plamlar ustida amallar

Agar A va B to'plamlar bir xil elementlardan tashkil topgan bo'lsa bu to'plamlar teng deyiladi. U holda to'liqlik aksiomasiga ko'ra agar ikkita to'plam bir xil elementlar jamlanmasidan tuzilgan bo'lsa ular teng bo'ladi. Masalan

Agar A to'plamning xar bir elementi B to'plamning ham elementi bo'lsa, A to'plam B to'plamning to'plamostisi deyiladi va

$$A \subset B \text{ yoki } \{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} = \{1, 1, 2, 3\}. \quad A \subseteq B \text{ orqali belgilanadi.}$$

Bu belgilshlardan birinchisi A to'plam B to'plamning qismi va $A \neq B$ ekanligini ikkinchisi esa A to'plam B to'plamning qismi bo'lib ular teng bo'lishiyam va teng bo'lmasligiyam mumkinligini bildiradi. Masalan $\{x, t\} \subset \{x, t, 1\}$.

Ihtiyoriy A to'plam uchun $A \subseteq A$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Yuqoridagilarni matematik tilda quyidagicha yozish mumkin:

$$A \subseteq B \equiv (\forall x \in A)(x \in B)$$

$$A \subsetneq B \equiv (\forall x \in A)(x \in B) \wedge (A \neq B)$$

Bu yozuvda $\wedge$ yozuvi "va" ma'nosini bildiradi. Ba'zida ayrimlar $\subset$ belgisi o'rniga $\subseteq$ belgisini ayrimlar esa $\subsetneq$ belgisini ishlatadi. $A \not\subseteq B$ bo'lganda A to'plam B to'plamning xos to'plam ostisi deyiladi.

¹ Herbert Gintis, Mathematical Literacy for Humanists, 11-12, 14-15 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

² Herbert Gintis, Mathematical Literacy for Humanists, 11-12, 14-15 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

Ixtiyoriy A to'plam uchun $\emptyset \subseteq A$, agar $A \neq \emptyset$ u holda $\emptyset \subsetneq A$.

A va B to'plamlarning ayirmasi deb, A to'plamning B to'plamga kirmagan barcha elementlardan tashkil topgan to'plamga aytiladi va $A \setminus B$ yoki $A-B$

Ko'rinishlarda belgilanadi. A va B to'plamlarning ayirmasini mantiq qoidalariga ko'ra bunday yozamiz:

$$A - B = A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

A va B to'plamlarning kamida biriga tegishli bo'lgan barcha elementlardan tashkil topgan $A \cup B$ to'plam A va B to'plamlarning birlashmasi yoki yig'indisi deyiladi. Buni matematik tilda quyidagicha yozamiz

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$

Masalan: $\{1, x, a\} \cup \{2, 7, x\} = \{1, x, a, 2, 7\}$

A va B to'plamlarning kesishmasi yoki ko'paytmasi deb, A va B to'plamlarning barcha umumiy, ya'ni A ga ham, B ga ham tegishli elementlardan tashkil topgan $A \cap B$ to'plamga aytiladi. A va B to'plamlarning kesishmasi mantiq qoidalariga ko'ra bunday yozamiz:

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

Matematikaning ba'zi sohalarida faqatgina birorta to'plam va uning barcha to'plamostilari bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Masalan, planimetriya tekislik va uning barcha to'plamostilari bilan, stereometriya esa fazo va uning barcha to'plamostilari bilan ish ko'radi.

Agar biror E to'plam va faqat uning to'plamostilari bilan ish ko'rsak, bunday E to'plamni universal to'plam deb ataymiz. Universal to'plamning barcha to'plamostilari to'plamini $\beta(E)$ orqali belgilaymiz.

To'plamlar ustida bajariladigan algebraik amallar quyidagi xossalarga ega.

1⁰. $A \cap A = A$ kesishmaning idempotentligi;

2⁰. $A \cup A = A$ birlashmaning idempotentligi;

3⁰. $A \cap B = B \cap A$
 $A \cup B = B \cup A$ kesishma va birlashmaning kommutativligi;

4⁰. 2⁰. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ kesishma va birlashmaning assosiativligi

5⁰. Kesishmaning birlashmaga nisbatan distributivligi:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

6⁰. Birlashmaning kesishmaga nisbatan distributivligi:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

7⁰. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C);$

$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$ birlashmani $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots$ kesishmani $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ deb belgilab

olsak, yana quyidagi xossalarga ega bo'lamiz. $A_i, i = 1 \dots$ to'plamlar birorta X to'plamning to'plamostilari bo'lsin, u holda

$$8^{\circ}. X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i);$$

$$9^{\circ}. X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i).$$

Bu tengliklarni isbotlash uchun, tengliklarning chap tomonidagi to'plamga tegishli ixtiyoriy element, tenglikning o'ng tomonidagi to'plamga tegishli va to'plamning chap tomonidagi

to'plamga tegishli ixtiyoriy element chap tomonidagi to'plamga ham tegishli bo'lishini ko'rsatish etarli.

To'mlamlar ustida amallarni Eyler-Venn diagrammalari deb ataladigan quyidagi shakllar yordamida ifoda qilish, amallarning xossalarini isbot qilishni ancha engillashtiradi.

Universal to'plam to'g'ri to'rt burchak shaklida, uning to'plamostilarini to'g'ri to'rtburchak ichidagi doiralar orqali ifoda qilinadi. U xolda, ikki to'plam birlashmasi, kesishmasi, ayirmasi, to'lduruvchi to'plamlar, ikki to'plamning simmetrik ayirmasi mos ravishda quyidagicha ifodalanadi:

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar:

1. To'plam tushunchasini misollar yordamida tushuntiring.
2. To'plamlar ustida bajariladigan amallarni tushuntiring.
3. To'plamlar ustida bajariladigan amallarni diogrammalar orqali tushuntiring.

3-4-mavzu: Matematik mantiq elementlari. Mulohazalar va ustida amallar.

Reja:

1. Mulohaza haqida tushuncha.
2. Mulohazalar ustida amallar.

Tayanch so'zlar: Mulohaza, mulohazalar inkori, mulohazalar konyunksiyasi, mulohazalar dizyunksiyasi mulohazalar implikasiyasi, mulohazalar ekvivalensiyasi.

Mulohazalar odatda lotin alifbosining kichik harflari bilan belgilanadi. Masalan, a, b, c, Mulohazalar algebrasining logik amallari maxsus harflar va belgilar orqali berilganda quyidagicha o'qiladi:

$p \wedge q$	p va q
	p yoki q
$p \vee q$	p emas
	p dan q kelib chiqadi
$\neg p$	p agar faqat va faqat agar q
$p \rightarrow q$	yolg'on
	rost.
$p \leftrightarrow q$	
$\perp$	
$\top$	

Agar mulohazalar o'rtasiga mantiq amallaridan qo'ysak, yangi mulohaza hosil bo'lib, bunday mulohazaga qo'shma mulohaza deyiladi. Mulohazalar algebrasida rost yoki yolg'on tushunchalari asosiy tushunchalardan hisoblanadi. Qo'shma mulohazaning rost yoki yolg'on ekanligini ta'rifdan kelib chiqqan holda jadval asosida ko'rish birmuncha qulaylik tug'diradi. Bunday jadvalga rostlik jadvali ham deyiladi.

Mulohazalar ustida konyunksiya, dizyunksiya, implikasiya va ekvivalensiya amallari mavjud bo'lib ularning rostlik jadvali quyidagicha bo'ladi.

p	$\neg p$	p	q	$p \wedge q$	p	q	$p \vee q$	p	q	$p \leftrightarrow q$
T	F	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F	T	T	F	T	F
F	T	F	F	F	F	F	F	F	F	T

Mulohaza matematik mantiqning asosiy tushunchalaridan bo'lib, u rost yoki yolg'onligi bir qiymatli aniqlanadigan darak gapdir. Masalan, «Kvadrat to'g'ri to'rtburchakdir», «7-tub son», « $2 > 5$ » kabi tasdiqlar mulohazalar bo'lib, birinchi va ikkinchi mulohazalar rost, uchinchi mulohaza esa yolg'on mulohazadir.

Demak, biror bir gap mulohaza bo'lishi uchun, u albatta darak gap bo'lishi va rost yoki yolg'onligi bir qiymatli aniqlanishi shart.

Undov, so'roq gaplar mulohaza bo'la olmaydi. Rost mulohazaga 1 qiymatni, yolg'on mulohazaga 0 qiymatni mos qo'yamiz. Mulohazalarni lotin alifbosining bosh harflari bilan belgilashni kelishib olamiz.

Quyida biz berilgan mulohazalardan mantiq amallari deb ataladigan amallar yordamida boshqa mulohazalar hosil qilish usullarini ko'rib chiqamiz.

Ta'rif. Berilgan A mulohaza rost bo'lganda yolg'on, A mulohaza yolg'on bo'lganda rost bo'ladigan mulohaza A mulohazaning inkori deyiladi va $\neg A$ yoki $\bar{A}$ orqali belgilanadi.

Inkor amali quyidagi jadval yordamida to'liq aniqlanadi:

A	$\neg A$
1	0
0	1

Bunday jadvallarni rostlik jadvali deb ataymiz.

Masalan, A mulohaza - «7-tub son» degan rost mulohaza bo'lsin, u holda

$\neg A$ - «7-tub son emas» degan yolg'on mulohazadan iborat.

Ta'rif. A va V mulohazalar rost bo'lgandagina rost bo'lib, qolgan hollarda yolg'on bo'ladigan mulohaza A va V mulohazalarning kon'yunksiyasi deyiladi va $A \wedge V$ yoki $A \& V$ ko'rinishda belgilanadi

Kon'yunksiya amalining rostlik jadvali quyidagichadir:

A	V	$A \wedge V$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Ta'rif. A va V mulohazalar diz'yunksiyasi deb, A va V mulohazalarning ikkalasi ham yolg'on bo'lgandagina yolg'on, qolgan hollarda rost bo'ladigan $A \vee V$ mulohazaga aytiladi.

Ta'rif. A va V mulohazalar implikasiyasi deb, A mulohaza rost va V mulohaza yolg'on bo'lgandagina yolg'on, qolgan hollarda rost bo'ladigan $A \rightarrow V$ mulohazaga aytiladi.

Ta'rif. A va V mulohazalar ekvivalensiyasi deb, A va V mulohazalarning ikkalasi ham yolg'on yoki rost bo'lganda rost, qolgan hollarda yolg'on bo'ladigan $A \leftrightarrow V$ mulohazaga aytiladi

Bu amallar uchun rostlik jadvallarini keltiramiz:

A	V	$A \vee V$	$A \rightarrow V$	$A \leftrightarrow V$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	1	0
0	0	0	1	1

$\wedge$ - mantiqiy ko'paytirish, $\vee$ - mantiqiy qo'shish amallari deb yuritiladi. $A \wedge V$ mulohazani A va V; $A \vee V$ mulohazani A yoki V; $A \rightarrow V$ mulohazani A mulohazadan V mulohaza kelib chiqadi yoki agar A bo'lsa, u xolda V bo'ladi; $A \leftrightarrow V$ mulohazani A mulohazadan V mulohaza va V

mulohazadan A mulohaza kelib chiqadi yoki A bo'ladi, faqat va faqat shu holda-ki, agar V bo'lsa, deb o'qiymiz.

Mulohazalar to'plamini M harfi bilan belgilaylik. U holda M to'plam, unda bajariladigan barcha $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ amallar bilan birgalikda mulohazalar algebrasini deb yuritiladi. Mulohazalar algebrasini qisqacha MA orqali belgilaymiz.

M to'plamda bajariladigan amallarni bajarilish tartibi quyidagicha: avval inkor amali bajariladi, agar inkor amali qavslardan tashqarida bo'lsa, u xolda qavs ichidagi amallar bajariladi. Keyin kon'yunksiya, undan so'ng diz'yunksiya, implikasiya va nihoyat ekvivalensiya amallari bajariladi.

Matematik mulohazalarni yuqoridagi belgilar yordamida ifoda etishga doir misollar keltiramiz:

1-misol. Agar $a > b$ va $b > c$ bo'lsa, $a > c$ bo'ladi. $(a > b) \wedge (b > c) \Rightarrow (a > c)$.

2-misol. $a > b$ bo'lsa, $a + c > b + c$ bo'ladi. $(a > b) \Rightarrow (a + c > b + c)$.

3-misol. $a = 0$ yoki $b = 0$ bo'lsa, $ab = 0$ bo'ladi va aksincha, $ab = 0$ bo'lsa, $a = 0$ yoki $b = 0$ bo'ladi. $(ab = 0) \Leftrightarrow ((a = 0) \vee (b = 0))$.

4-misol. $a > 0$ va $b > 0$ bo'lsa, $ab > 0$ bo'ladi. $(a > 0) \wedge (b > 0) \Rightarrow (ab > 0)$.

5-misol. Ixtiyoriy x haqiqiy son uchun $|x| \geq x$. $\forall x \in R: |x| \geq x$.

6-misol. Ixtiyoriy $a \geq 0$ son uchun, shunday $x \in R$ son mavjudki, $x^2 = a$ bo'ladi, ya'ni $\forall a \geq 0, \exists x \in R: x^2 = a$.

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar:

1. Mulohaza tushunchasiga ta'rif bering.
2. Mulohazaga misollar keltiring.
3. Mulohazalar inkorini ta'riflang.
4. Mulohazalar konyunksiyasini ta'riflang.
5. Mulohazalar dizyunksiyasini ta'riflang.
6. Mulohazalar implikasiyasini ta'riflang.
7. Mulohazalar ekvivalensiyasini ta'riflang.

5-6- MAVZU. TEKISLIKDA TO'G'RI CHIZIQ VA UNING TENGLAMALARI DOIR MASALALAR

Reja:

1. Chiziq va uning tenglamasi haqida.
2. To'g'ri chiziq va uning tenglamalari:
3. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi.
4. Berilgan bitta va ikkita nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamalari.
5. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi va uning xususiy hollari.
6. To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi.
7. To'g'ri chiziqning normal tenglamasi
8. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.
9. To'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari.
8. Ikkita to'g'ri chiziqning kesishuvi.
9. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa.

Tayanch ibora va tushunchalar

Tekislikda chiziq va uning tenglamasi, burchak koeffitsiyent, to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi, to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi, to'g'ri chiziqning o'qlardan ajratgan kesmalarga nisbatan tenglamasi, berilgan bitta nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar tenglamasi, berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi, to'g'ri chiziqning normal

tenglamasi. To'g'ri chiziqlar orasidagi burchak, to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarligi va parallelligi, ikkita to'g'ri chiziqlarning kesishuvi, berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa bo'lgan masofa, ikkita parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa.

1. Chiziq va uning tenglamasi haqida. Analitik geometriyaning eng muhim tushunchalaridan biri, **chiziq tenglamasi** tushunchasidir. Tekislikda to'g'ri burchakli koordinatlar sistemasida L chiziq berilgan bo'lsin (4-chizma).

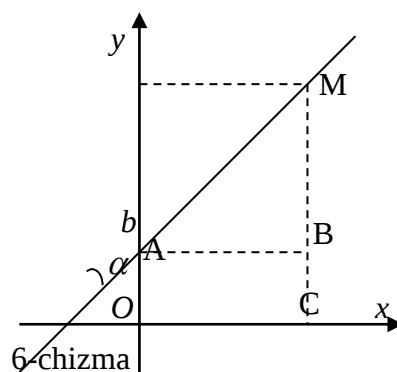
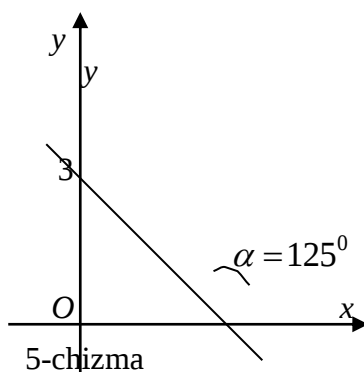
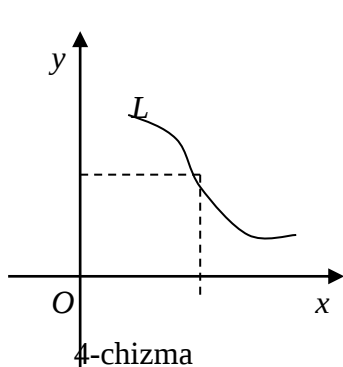
Ta'rif. L chiziqda yotuvchi istalgan $M(x, y)$ nuqtaning koordinatlari

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

tenglamani qanoatlantirib, unda yotmagan nuqtalarning koordinatlari qanoatlantirmasa, bu tenglama L chiziqning tenglamasi deyiladi. Bundan L chiziq, koordinatlari (1) tenglamani qanoatlantiruvchi barcha nuqtalar to'plamidan iborat ekanligi kelib chiqadi. Chiziqning tenglamasini tuzish deganda unga tegishli ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqtaning koordinatlari orasidagi munosabatni (bog'lanishni) tenglama ko'rinishida ifodalashdan iborat. Topilgan chiziq tenglamasi uchun: chiziqdagi istalgan nuqtaning koordinatlari uni qanoatlantiradi va aksincha, nuqtaning koordinatlari tenglamani qanoatlantirsa, bu nuqta shu chiziqda yotadi.

2. To'g'ri chiziq va uning tenglamalari. To'g'ri chiziq tushunchasi analitik geometriyaning asosiy tushunchalaridan biridir. Quyida har xil holatlarda to'g'ri chiziqning analitik ifodalarini (tenglamalarini) keltirib chiqaramiz va ular yordamida to'g'ri chiziqning tekislikdagi vaziyatlarini o'rganamiz.

1) To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi. To'g'ri chiziqning OX o'qi musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagi va to'g'ri chiziqning ordinatlar o'qidan ajratgan kesmasining kattaligi b berilganda, uning tekislikdagi holati aniq bo'ladi. Masalan, $b = 3$, $\alpha = 125^\circ$ bo'lsa, uning holati aniq bo'ladi (5-chizma).



Yuqoridagi miqdorlar berilganda to'g'ri chiziqning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x, y)$ to'g'ri chiziqqa tegishli ixtiyoriy nuqta bo'lsin (6-chizma). AMB to'g'ri burchakli uchburchakdan

$$\frac{BM}{AB} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ bundan } BM = AB \operatorname{tg} \alpha$$

6-chizmadan $y = BC + BM$; ёки $y = AB \operatorname{tg} \alpha + b$, $AB = x$ bo'lganligi uchun $y = x \operatorname{tg} \alpha + b$ bo'ladi. $\operatorname{tg} \alpha$ to'g'ri chiziqning **burchak koeffitsiyenti** deyiladi va $\operatorname{tg} \alpha = k$ bilan belgilaymiz. Shunday qilib,

$$y = kx + b \quad (2)$$

munosabat kelib chiqadi. Bunga to'g'ri chiziqning **burchak koeffitsiyentli tenglamasi** дейилади. $b = 0$ bo'lsa, to'g'ri chiziq koordinatlar boshidan o'tib, tenglamasi $y = kx$ bo'ladi. $k = 1$ bo'lsa, $y = x$ bo'lib, bu birinchi koordinatlar burchagining bissektrisasi bo'ladi.

1-misol. OX o'qi bilan 120° burchak hosil qiluvchi va OY o'qini $A(0; 3)$ nuqtada kesib o'tuvchi to'g'ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

Yechish. Shartga ko'ra, to'g'ri chiziq OY o'qini $A(0; 3)$ nuqtada kesib o'tadi, demak $b = 3$. Bu nuqtadan OX o'qiga parallel chiziq o'tkazamiz, hamda shu to'g'ri chiziq bilan 120° burchak hosil qiluvchi tomon, yasalishi kerak bo'lgan to'g'ri chiziq bo'ladi.

Endi shu to'g'ri chiziq tenglamasini yozamiz. Bu holda $k = \operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$, $b = 3$ bo'lganligi uchun, $y = -\sqrt{3}x + 3$ to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi bo'ladi.

2) Berilgan bitta nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasi. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin.

$$y = kx + b \quad (3)$$

to'g'ri chiziq A nuqtadan o'tsin. Bu holda A nuqtaning koordinatlari to'g'ri chiziq tenglamasini qanoatlantiradi, ya'ni $y_1 = kx_1 + b$ bo'ladi. (3) tenglikdan oxirgi tenglikni ayirsak:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad (4)$$

hosil bo'ladi. (4) tenglamaga berilgan **bitta nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasi** deyiladi.

To'g'ri chiziq $B(x_2, y_2)$ ikkinchi nuqtadan ham o'tsa,

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

bo'lib,

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

bo'ladi. ning yuqoridagi qiymatini (4)ga qo'yib,

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (5)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (5) **берилган икки** $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ нукталардан **ўтувчи тўғри чизик тенгламаси** дейилади.

2-мисол. Бирор хил маҳсулотдан 100 донасини ишлаб чиқаришга 300 минг сўм харажат қилинсин. 500 донаси учун эса харажат 1300 минг сўм бўлсин. Харажат функцияси чизикли (тўғри чизик) бўлса, шу маҳсулотдан 400 дона ишлаб чиқариш харажати топинг.

Ечиш. Масала шarti бўйича $A(100, 300)$ ва $B = (500, 1300)$ нукталар берилган. Берилган икки нуктадан ўтувчи тўғри чизик тенгламасига асосан,

$$\frac{y - 300}{1300 - 300} = \frac{x - 100}{500 - 100}, \text{ ёки } y = 2,5x + 50$$

тенглик ўринли бўлади. Охириги тенгламадан $x = 400$ учун, $y = 1050$ эканлигини топамиз. Демак, маҳсулотдан 400 дона ишлаб чиқариш учун 1050 минг сўм харажат қилинади.

3). Тўғри чизикнинг умумий тенгламаси ва унинг хусусий ҳоллари. Икки номаълумли

$$Ax + By + C = 0$$

тенгламани қараймиз.

Бундан, $Bu = -Ax - C$, $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ бўлиб, $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$ билан

белгиласак, $y = kx + b$ тенглама ҳосил бўлади. Шундай қилиб, $Ax + Bu + C = 0$ тенглама ҳам тўғри чизик тенгламаси эканлиги келиб чиқади.

$$Ax + Bu + C = 0 \quad (6)$$

тенгламага тўғри чизикнинг **умумий тенгламаси** дейилади.

Тўғри чизик умумий тенгламасининг хусусий ҳоллари: 1) $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C = 0$ бўлса, $Ax + Bu = 0$ бўлиб, тўғри чизик координатлар бошидан ўтади, чунки $O(0;0)$ нуқтанинг координатлари тенгламани қаноатлантиради;

2) $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ бўлса, $y = -\frac{C}{B}$ бўлиб, OY ўқдан $-\frac{C}{B}$ кесма

ажратиб, OX ўқиға параллел тўғри чизик тенгламаси бўлади;

3) $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$ бўлса, $x = -\frac{C}{A}$ бўлиб, OX ўқдан $-\frac{C}{A}$

кесма ажратиб, OY ўқиға параллел тўғри чизик тенгламаси бўлади;

4) $A = 0$, $C = 0$, $B \neq 0$ бўлса, $y = 0$ бўлиб, OX ўқининг тенгламаси ҳосил бўлади;

5) $B = 0$, $C = 0$, $A \neq 0$ бўлса, $x = 0$ бўлиб, OY ўқининг тенгламаси ҳосил бўлади;

6) $A = 0$, $B = 0$, $C \neq 0$ бўлса, $C = 0$ бўлиб, ўзгармас миқдор, бир пайтда 0 дан фарқли ҳамда 0 га тенг келиб чиқади, бундай бўлиши мумкин эмас.

3-мисол. $x - 2y + 6 = 0$ тўғри чизик учун k ва b параметрларни топинг.

Ечиш: Бунинг учун берилган тенгламани y га нисбатан ечамиз:
 $2y = x + 6$, $y = 1/2 \cdot x + 3$ бундан (2) тенглама билан таққослаб $k = 1/2$, $b = 3$, эканлигини топамиз. Шундай қилиб, тўғри чизик умумий тенгламасини бурчак коэффициентли тенгламага келтириб k ва b параметрларни топдик.

4). Тўғри чизикнинг кесмаларга нисбатан тенгламаси. Тўғри чизик координат ўқларидан мос равишда a ва b кесмалар ажратиб ўтсин(7-чизма). Тўғри чизик $A(a; 0)$ ва $B(0; b)$ нуқталардан ўтади. Берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизик тенгламасига асосан

$$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a}, \quad \frac{y}{b} = \frac{x-a}{-a}, \quad \frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1$$

ёки
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (7)$$

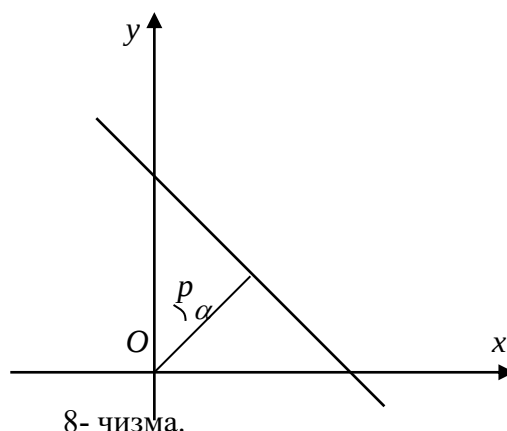
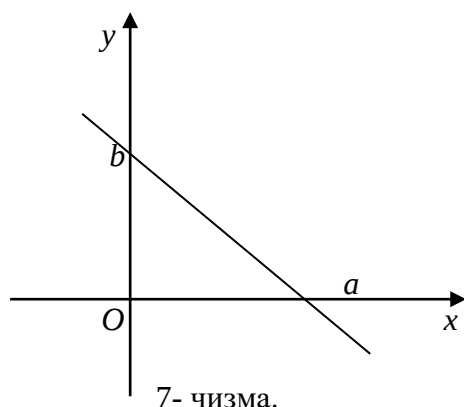
тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламага тўғри чизикнинг **кесмаларга нисбатан тенгламаси** дейилади.

4-мисол. $3x + 5y - 15 = 0$ тўғри чизикнинг кесмаларга нисбатан тенгламасини ёзинг ва уни ясанг.

Ечиш. $3x + 5y - 15 = 0$ тўғри чизикнинг умумий тенгламасини (7) кўринишдаги тенгламага келтираемиз.

$$3x + 5y = 15, \quad \frac{3x}{15} + \frac{5y}{15} = 1 \quad \text{ёки} \quad \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$$

бу тўғри чизикнинг кесмаларга нисбатан тенгламаси бўлади. Энди координат ўқларидан мос равишда 5 ва 3 кесмаларни ажратиб, ажратилган кесмалар охиридан ясаилиши керак бўлган тўғри чизикни ўтказамиз.



5). Тўғри чизикнинг нормал тенгламаси. Тўғри чизикқа координат бошидан туширилган перпендикулярнинг (нормал) узунлиги ва унинг OX ўқи мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчаги α берилганда тўғри чизикнинг текисликдаги ҳолати аниқ бўлади (8-чизма) ва унинг тенгламаси

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad (8)$$

бўлади. (8) тенгламага тўғри чизикнинг **нормал тенгламаси** дейилади. Маълумки, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Нормал тенгламада шу шарт бажарилиши керак. Тўғри чизик умумий тенгламасини нормал тенглама келтириш учун

$$M = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

нормалловчи кўпайтувчини ҳисоблаб, уни

$$Ax + By + C = 0$$

тенгламага кўпайтирамиз. Бу ҳолда

$$\frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} y + \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

нормал тенглама ҳосил бўлади. Нормалловчи кўпайтувчининг ишораси озод ҳад ишорасига тескари олинади.

5-мисол. Нормалнинг узунлиги $p = 3$ ва унинг OX ўқи билан ҳосил қилган бурчаги 30° бўлса, тўғри чизикни ясанг ва унинг тенгламасини ёзинг.

Ечиш. Шартга кўра нормал OX ўқи билан 30° ли бурчак ташкил этади. Бу бурчакни ясаймиз ва унинг кўзгалувчи томони нормал тўғри чизик бўлади. Шу тўғри чизикда $p = 3$ кесма ажратиб унинг охиридан унга перпендикуляр тўғри чизик ўтказамиз. Бу ясаилиши керак бўлган тўғри чизик бўлади. Энди тўғри чизикнинг тенгламасини ёзамиз. Шартга кўра нормалнинг узунлиги ва унинг OX ўқи билан ҳосил қилган бурчаги берилган, бу ҳолда маълумки, тўғри чизикнинг (8) нормал тенгламасини ёзамиз. $p = 3$, $\alpha = 30^\circ$ бўлганлиги

$$\text{учун } x \cos 30^\circ + y \sin 30^\circ - 3 = 0 \quad \text{ёки} \quad \sqrt{3}/2 \cdot x + 1/2 \cdot y - 3 = 0$$

Натижада $\sqrt{3}x + y - 6 = 0$ тенглама ҳосил бўлади.

6-мисол.. $4x - 3y - 5 = 0$ тўғри чизик тенгламасини нормал тенгламага келтиринг.

Ечиш. Нормалловчи кўпайтувчини топамиз: $M = \frac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{1}{5}$ бўлади.

Берилган тенгламани $M = 1/5$ кўпайтириб, $4/5 \cdot x - 3/5 \cdot y - 1 = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тўғри чизикнинг нормал тенгламаси, чунки

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = \frac{25}{25} = 1, \quad (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1) \text{ эди.}$$

Takrorlash uchun savollar

1. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak qanday topiladi?
2. Ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik sharti nima?
3. Ikki to'g'ri chiziqning parallellik sharti qanday bo'ladi?
4. Ikkita to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasi qanday topiladi?
5. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa qanday formuladan foydalanib topiladi?
6. Ikkita parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani topish qanday bajariladi?
7. Chiziqning tenglamasi deganda nima tushuniladi?
8. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi qanday yoziladi?
9. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti deb nimaga aytiladi?
10. Berilgan bitta nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasi qanday?
11. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi qanday?
12. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi va uning xususiy xollari nimalardan iborat?
13. To'g'ri chiziqning koordinat o'qlaridan ajratgan kesmalariga nisbatan tenglamasi qanday yoziladi?

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. $y = 1/2 \cdot x + 4$ тўғри чизик берилган. Унинг координат ўқлари билан кесишиш нуқталарини топинг.
2. Бошланғич ординатаси $b = -3$ бўлган ва $y = 2x + 3$ тўғри чизикқа параллел бўлган тўғри чизикни ясанг ва тенгламасини ёзинг.
3. $y = \sqrt{3}x - 2$ ва $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 3$ тўғри чизиклар берилган. Уларнинг абсцисса ўқи билан ташкил қиладиган бурчакларини топинг.
4. $y = -2/5 \cdot x + 3$; $y = 3/7 \cdot x + 2/7$ тўғри чизиклар орасидаги бурчакни топинг.
5. $6x + 8y + 5 = 0$; $2x - 4y - 3 = 0$ тўғри чизиклар орасидаги бурчакни топинг.
6. 1) $3x - 15y + 16 = 0$, 2) $3x + 15y - 8 = 0$, 3) $6x - 30y + 13 = 0$,
4) $30x + 6y + 7 = 0$
тўғри чизиклардан қайсилари перпендикуляр ва қайсилари параллел.
7. Қуйидаги тўғри чизиклар орасидаги бурчакларни топинг:
1) $y = 2/3 \cdot x - 7$; 2) $2x - 4y + 9 = 0$
 $y = 5x + 9$; 2) $6x - 2y - 3 = 0$
3) $y = 3/7 \cdot x - 2$ 4) $x/4 - y/5 = 1$
3) $7x + 3y + 5 = 0$ 4) $x/2 + y/18 = 1$

8. Томонлари $4x - 3y + 5 = 0$, $3x + 4y + 4 = 0$, $x - 7y + 18 = 0$ тўғри чизикларда ётган учбурчакнинг ички бурчакларини топинг.
9. $A(4; 5)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиклар дастасининг тенглама-сини ёзинг ва улардан $2x - 3y + 6 = 0$ тўғри чизикқа перпендикуляр ва параллел бўлганларини ажратинг.
10. Учбурчак томонлари $7x - 6y + 9 = 0$; $5x + 2y - 25 = 0$; $3x + 10y + 29 = 0$ тенгламалар билан берилган. Унинг учларини ва баландликларининг тенгламаларини топинг.
11. Учлари $P(-4; 0)$, $Q(0; 4)$ ва $R(2; 2)$ нуқталарда бўлган учбурчак медианаларининг тенгламаларини топинг.
12. Тўғри чизикнинг координатлар бошидан узоқлиги 3, унга координатлар бошидан туширилган перпендикуляр OX ўқи билан $\alpha = 45^\circ$ бурчак ҳосил қилса, тўғри чизик тенгламасини ёзинг.
13. $x - y + 3 = 0$ тўғри чизикқа координатлар бошидан туширилган перпендикулярнинг узунлигини ва унинг OX ўқи билан ташкил қилган бурчагини топинг.
14. Учлари $P(0; 5)$, $Q(-3; 1)$ ва $R(-1; -2)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг R нуқтасидан ўтказилган баландлигининг узунлигини топинг.
15. $5x - 12y - 26 = 0$, $5x - 12y - 65 = 0$ параллел тўғри чизиклар орасидаги масофани топинг.
16. Трапеция асосларининг тенгламалари $3x - 4y - 15 = 0$, $3x - 4y - 35 = 0$ берилган. Трапециянинг баландлигини топинг.
17. Учлари $A(-2; 0)$, $B(2; 4)$ ва $C(4; 0)$ нуқталарда бўлган учбурчак томонларининг, AE медианасининг, AD баландлигининг тенгламаларини ҳамда AE медиананинг узунлигини топинг.

7-8-MA'RUZA. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMALARI. IKKINCHI VA UCHINCHI TARTIBLI DETERMINANTLAR, ULARNING XOSSALARI. KRAMER FORMULALARI.

Dars rejasi

1. Chiziqli tenglamalar sistemalari haqida tushuncha.
2. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar.
3. Determinantning asosiy xossalari.
4. Determinantning satri bo'yicha yoyilmasi.
5. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli.
6. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usuli.

Tayanch so'zlar: Chiziqli tenglamalar sistemasii, bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi, ChTSni yechishning Gauss usuli, ChTSni yechishning Kramer usuli, matritsa

Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar

2x2- matrisaning determinanti quyidagicha hisoblanadi³

³ Fanchi J.R. - Math refreshser for scientists and engineers, 2006. 76 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

1- misol. $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 6 - 3 \cdot (-2) = 30 + 6 = 36.$

Shuningdek, 3x3- matrisaning determinanti quyidagicha hisoblanadi⁴

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = [a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}]$$

Uchinchi tartibli kvadrat matritsa determinanti $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ni hisoblash uchun

uchinchi darajali o'rniga qo'yishlar yordamida ko'paytmalar tuzamiz. Unga qo'yishning ishorasi u yordamida hosil qilingan ko'paytmani qo'shish yoki ayirish kerakligini aniqlab beradi. Bundan quyidagi ifodani hosil qilamiz.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

2-ta'rif. n -tartibli kvadrat matritsa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ ning}$$

determinanti deb $|A| = \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\tau(n)}$ ($n!$ qo'shiluvchilardan iborat) yig'indiga aytiladi.

Determinantning xossalari.

1-teorema. Nol satr yoki ustunga ega kvadrat matritsaning determinanti nolga teng.

2-teorema. Diagonal matritsaning determinanti asosiy diagonal elementlari ko'paytmasiga teng.

3-teorema. Uchburchak matritsaning determinanti asosiy diagonal elementlari ko'paytmasiga teng.

4-teorema. Kvadrat matritsa va unga transponirlangan matritsalar determinantlari teng.

5-teorema. Kvadrat matritsaning ikkita satr (ustun)lari o'rnini almashtirish natijasida determinant ishorasi o'zgaradi.

⁴ Fanchi J.R. - Math refreshser for scientists and engineers, 2006. 76 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

6-teorema. Ikkita bir xil satr (ustun)ga ega kvadrat matritsa determinanti nolga teng.

7-teorema. A kvadrat matritsaning biror bir satr (ustun) elementlarini noldan farqli λ skalyarga ko'paytirilsa, u holda A matritsaning determinanti λ skalyarga ko'paytiriladi.

8-teorema. Qandaydir ikkita satr (ustun)lari proporsional bo'lgan kvadrat matritsaning determinanti nolga teng.

9-teorema. Kvadrat matritsa i - qatori (ustuni)ning har bir elementi m ta qo'shiluvchilardan iborat bo'lsa, bunday kvadrat matritsaning determinanti m ta determinantlar yig'indisidan iborat bo'lib, birinchi determinant i - qatori (ustuni)da birinchi, ikkinchi determinantda ikkinchi qo'shiluvchilar va h.z. boshqa qatorlar A matritsanikidek bo'ladi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a & a_{22} + b & a_{23} + c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a & b & c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

10-teorema. Kvadrat matritsaning biror-bir satr (ustun)iga noldan farqli skalyarga ko'paytirilgan boshqa satr (ustun)ni qo'shish natijasida determinant o'zgarmaydi.

11-teorema. Kvadrat matritsaning biror-bir satr (ustun)iga qolgan satr (ustun)lar chiziqli kombinatsiyasini qo'shish natijasida determinant o'zgarmaydi.

12-teorema. Kvadrat matritsaning biror-bir satri (ustuni) qolganlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsa, uning determinanti nolga teng.

13-teorema. Har qanday elementar matritsaning determinanti noldan farqli.

14-teorema. Kvadrat matritsalar ko'paytmasining determinanti berilgan matritsalar determinantlari ko'paytmasiga teng.⁵

Deteminantning nolga teng bo'lish sharti.

15-teorema. Kvadrat matritsaning determinanti nolga teng bo'lishi uchun uning satr (ustun)lari chiziqli bog'langan bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. 1. Matritsaning satrlari chiziqli erkli bo'lsa, $|A| \neq 0$ ekanligini isbotlaymiz.

Agar berilgan kvadrat matritsaning satrlari chiziqli erkli bo'lsa, u holda uni elementar matritsalar ko'paytmasi ko'rinishida ifodalash mumkin, ya'ni $A = E_1 \cdot E_2 \cdot \dots \cdot E_k$. U holda determinant xossalriga ko'ra

$$|A| = |E_1| \cdot |E_2| \cdot \dots \cdot |E_k| \text{ va } |E_i| \neq 0 (i = \{1, \dots, k\}). \text{ Bundan } |A| \neq 0.$$

To'g'ri teorema bilan teskari teoremaga qarama-qarshi teoremlar teng kuchli bo'lganligidan, $|A| = 0$ ekanligidan A matritsa chiziqli erkliligi kelib chiqadi.

2. A matritsaning satrlari chiziqli bog'liq bo'lsa, $|A| = 0$ ekanligini isbotlaymiz.

Satrlari chiziqli bog'liq matritsaning kamida bitta satri qolganlari orqali chiziqli ifodalanadi. Determinantlar xossalriga ko'ra $|A| = 0$.

$$\text{1-misol. } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

16-teorema. Har qanday kvadrat matritsa uchun quyidagi shartlar teng kuchli:

1. $|A| \neq 0$.
2. Matritsaning satr (ustun)lari chiziqli erkli.
3. A matritsa teskarilanuvchi.

⁵ J.H. Heinbockel January 2016, Introduction to Calculus Volume II, 326 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

4. A matritsa elementar matritsalar yordamida ifodalanadi.

17-teorema. A matritsaning rangi uning noldan farqli minorlarining eng yuqori tartibiga teng.

Isboti. Noldan farqli $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ matritsa berilgan

bo'lsin. U holda uning rangi $r = r(A) > 0$. Matritsaning kamida bitta noldan farqli r tartibli minori mavjudligini isbotlaymiz.

$r = r(A) > 0$ bo'lganligi uchun, A matritsaning r ta chiziqli erkli satrlari bor. Shu satrlardan

tuzilgan A matritsaning $B \in F^{r \times n}$ matritsaostisini tuzamiz $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}$, bu

matritsaning rangi $r(B) = r$. Matritsaning satr va ustun ranglari tengligidan $\rho(B) = r$. Demak, B matritsaning r ta chiziqli erkli ustunlari mavjud. B matritsaning r ta chiziqli erkli ustunlaridan tashkil topgan matritsaostisini C bilan belgilaymiz. U holda $C \in F^{r \times r}$ va $r(C) = r$. Yuqoridagi 18.2-teorema shartlariga ko'ra, C matritsaning ustunlari chiziqli erkli bo'lganligi uchun $|C| \neq 0$.

Demak, C matritsa A matritsaning tartibi r ga teng bo'lgan noldan farqli minori bo'ladi.

Agar $k > r(A)$ bo'lsa, A matritsaning k tartibli har qanday minori nolga teng bo'ladi.

Haqiqatdan ham, $k > r(A)$ bo'lsa, A matritsaning har qanday k ta satri chiziqli bog'langan bo'ladi. Bundan A matritsaning har qanday $(k \times k)$ tartibli qismmatritsasida satrlari chiziqli bog'langan bo'ladi va 18.1-teoremaga ko'ra bunday qismmatritsalar determinanti, ya'ni A matritsaning k tartibli har qanday minori nolga teng.

2-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ matritsa rangini minorlar yordamida aniqlang.

Yechish. Matritsa rangi haqidagi teoremaga ko'ra matritsaning noldan farqli minorlarini aniqlaymiz.

Matritsaning berilishidan, unda kamida bitta noldan farqli birinchi tartibli minor mavjud, masalan, $A_1 = (1)$ matritsaostining determinanti 1 ga teng, ya'ni $M_1 = |1| = 1 \neq 0$.

Matritsaning $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaostining determinanti

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-2) = 3 \neq 0.$$

Matritsaning $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaostining determinanti

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 1 - 0 - 0 - (-2) = 4 \neq 0.$$

Matritsaning 4-tartibli minori berilgan matritsaning determinantidan iborat, uni hisoblaymiz:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Demak, berilgan matritsaning noldan farqli minorlari 1-tartibli, 2-tartibli va 3-tartibli. Ulardan yuqori tartibligi 3-tartibli minor bo'lganligi uchun, berilgan matritsaning rangi 3 ga teng.

$$F = \langle F; +, \cdot, -, ^{-1}, 0, 1 \rangle$$
 maydon va maydon ustida

[illegible]

[illegible]

bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi BJChTS berilgan bo'lsin.

Yuqorida ta’kidlanganidek, (1^1) sistemaning yechimlari to’plami F^n arifmetik vektor fazoning biror W qism fazosini tashkil etadi.

1-ta'rif. F^n arifmetik vektor fazoning W qism fazosining bazisini tashkil etuvchi istalgan vektorlar sistemasi (5.1¹) sistemaning fundamental (asosiy) yechimlari sistemasi deyiladi.

Bazis vektorlar sistemasining ta'rifiga asosan $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r$ sistema (1^1) ning fundamental yechimlari sistemasi bo'lishi uchun quyidagi ikkita shart bajarilishi lozim:

1. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r$ sistema chiziqli bog'lanmagan sistema bo'ladi;
2. (1) sistemaning ixtiyoriy yechimi $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r$ sistema vektorlari orqali chiziqli ifodalanadi.

(1) sistemaning umumiy yechimi ushbu

$$a = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_r a_r \quad (k_i \in F, i = \overline{1, r})$$

ko'rinishda ifodalanadi. Endi (1) yechimlarining fundamental sistemasini topaylik. Buning uchun (1) da bir necha marta elementar almashtirishlar bajargandan so'ng o'ziga ekvivalent bo'lgan ushbu

[illegible]

Teorema. Agar $|A| \neq 0$ bo'lsa, u holda CHTS yagona yechimga ega va u quyidagi formulalar orqali ifodalanadi:

$$x_1 = \frac{|A(1)|}{|A|}, \dots, x_n = \frac{|A(n)|}{|A|} \quad (5.3).$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad \text{chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini Kramer}$$

formulari yordamida topish uchun sistemaning asosiy matritsasi va $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$ matritsalarini tuzib, ularning determinantlarini hisoblaymiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

$$\Delta_1 = |A(1)| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = |A(2)| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_3 = |A(3)| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$$\text{U holda } x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar:

- 1.1. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlarni hisoblash formulalarini yozing.
- 2.2. Determinantning qanday hossalari bor?
- 3.3. Determinantning satri bo'yicha yoyish qanday amalga oshiriladi?
4. Minor nima?
- 5.1. Chiziqli tenglamalar sistemasini turlarini ayting.
6. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli qanday?
7. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usuli qanday?

10-11- mavzu. FUNKSIYA LIMITI, LIMITLAR HAQIDAGI TEOREMLAR

Режа

1. Ўзгармас ва ўзгарувчи миқдорлар.
2. Функция тушунчаси.
3. Функциянинг берилиш усуллари.
4. Функциянинг айрим ҳоллари

5. Функциянинг лимит ива унинг асосий хоссалари.

6. Аниқмасликлар ва уларни очиш.

Таянч иборалар ва тушунчалар

Ўзгармас ва ўзгарувчи миқдорлар, функция тушунчаси, функция аниқланиш соҳаси, қийматлар тўплами, аналитик усул, график усул, жадвал усул, ошкор ва ошкормас функциялар, функциянинг алгоритмик берилиши, мураккаб функция, тескари функция, функция лимити ва унинг хоссалари, кетма-кетлик, чексиз катта миқдор, чап ва ўнг лимитлар, чексиз кичик функция, кўпайтманинг ва бўлинманинг лимити, биринчи ажойиб лимит, аниқмасликларни очиш,

1. Ўзгармас ва ўзгарувчи миқдорлар. Қаралаётган жараёнда бир хил сон қийматларини қабул қиладиган миқдорларга ўзгармас миқдорлар дейилади. Масалан, қандай радиусли айлана олмайлик, унинг узунлигининг деаметрига нисбати бир хил π сондан иборат бўлади. Бу ҳолда нисбат ўзгармас миқдордир.

Қаралаётган жараёнда ҳар хил сон қийматлари қабул қиладиган миқдорларга ўзгарувчи миқдорлар дейилади. Масалан, ҳаво ҳарорати (температураси), вақт, ҳаракатнинг тезлиги ўзгарувчи миқдорлардир. Бундай мисолларни кўплаб келтириш мумкин. Ҳамма ўзгарувчи миқдорларни бирданига ўрганиб бўлмайди. Энди иккита ўзгарувчи миқдорлар орасидаги боғланишни қараймиз.

2. Функция тушунчаси. *Функция тушунчаси* математиканинг энг асосий тушунчаларидан бири бўлиб, унинг ёрдамида табиат ва жамиятдаги кўп жараён ва ҳодисалар моделлаштирилади.

Математик таҳлилда элементлари ҳақиқий сонлардан иборат, бўлган тўпламларни қараймиз. X ва Y лар ҳақиқий сонлар тўплами бўлсин. $x \in X$ тўпланда, $y \in Y$ тўпланда ўзгарсин.

Таъриф. $x \in X$ ҳар бир X га бирор қоида ёки қонун бўйича $y \in Y$ дан битта y мос қўйилса, X тўпланда функция берилган (аниқланган) деб аталади ва у

$$y = f(x)$$

символ билан белгиланади. Айрим ҳолларда $y = xf$ ҳам деб белгиланадики, бунда компьютерда олдин X қиймати олиниб, кейин ҳисобланадиган символ олинади. Бунда X тўпламга функциянинг аниқланиш соҳаси, Y тўпламга ўзгариш соҳаси ёки қийматлар тўплами дейилади. Одатда функция аниқланиш соҳасини D , қийматлар тўпламини E билан белгиланади.

Шундай қилиб, ҳар бир элемент $x \in X$ га битта ва фақат битта $y \in Y$ мослик ўрнатилган бўлса, бу мосликка X тўпланда функция аниқланган дейилади. X га эркин ўзгарувчи ёки аргумент, y га эса эркин ўзгарувчи ёки X нинг функцияси дейилади.

Шундай қилиб, функция берилган бўлиши учун: 1) X тўплам берилиши керак (кўп ҳолларда уни X билан Y ўзгарувчиларнинг боғланишига кўра топилади); 2) X ўзгарувчининг X тўпламдан олинган ҳар бир қийматига унга мос қўйиладиган y ни аниқлайдиган қоида ёки қонун берилиши керак. (таърифда уни f символ билан белгиладик).

Масалан; 1) $f: X = (-\infty, +\infty)$ тўпламга тегишли бўлган ҳар бир сонга унинг ўзини ўзига кўпайтириб, яъни квадратга кўтариб мос қўйувчи қоида бўлсин. Бу ҳолда

$y = x^2$ функция ҳосил бўлади. Бу функция $(-\infty, +\infty)$ оралиқда аниқланган; 2) f ҳар

бир $x \in [0, +\infty)$ сонга шу сондан олинган квадрат илдизни мос қўйсин. Бу $y = \sqrt{x}$ функцияни ифодалайди. Унинг аниқланиш соҳаси $[0, +\infty)$ бўлади.

1-мисол. $y = \sqrt{x-3} + \frac{1}{\sqrt{4-x}}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Маълумки, функциянинг аниқланиш соҳаси X нинг шундай қийматлари тўпламики, бунда y функция ҳақиқий сон қийматларга эга бўлиши керак. Берилган функцияда

$$x - 3 \geq 0,$$

$$4 - x > 0$$

бўлгандагина X нинг ҳар бир қийматига мос келадиган y нинг қиймати ҳақиқий бўлади. Бу тенгсизликлар системасидан, $x \geq 3$, $x < 4$ бўлиб, яъни $3 \leq x < 4$ бўлишини топамиз. Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси $[3, 4)$ бўлади.

3. Функциянинг берилиш усуллари. Функция таърифида келтирилган X ўзгарувчининг ҳар бир қийматига мос қўйиладиган y ни аниқловчи қоида ёки қонун турлича бўлиши мумкин. Демак, функциянинг берилиши ҳам турличадир. Функция **аналитик, жадвал ва график** ҳамда **компьютер** усуллари ёрдамида берилиши мумкин:

1) функциянинг **аналитик усул** билан берилишида, X ўзгарувчининг ҳар бир қийматига мос келадиган y нинг қиймати, X аргумент устида алгебраик амалларнинг бажарилиши натижасида, яъни формулалар ёрдамида берилади. Масалан,

$$y = x^3 + 1, \quad y^2 = \frac{x+5}{x^2-3}, \quad y = 3^{x+1}, \quad y = \log_2(x+3);$$

2) ўзгарувчилар орасидаги боғланиш **жадвал** кўринишида берилиши мумкин. Масалан, кузатиш натижасида сутни ёпиқ идишда қиздирилганда P_1 босим остида унинг қайнаш температураси t_1 , P_2 босим остида қайнаш температураси t_2 ва ҳ.к. бўлишини топганда қўйидаги жадвал келиб чиқади.

Босим P	P_1	P_2	...	P_n
Температура t	t_1	t_2	...	t_n

Бундан кўринадики P босим билан t температура орасида боғланиш бўлиб, P аргумент, t функция бўлади. Функциянинг бундай берилишига **жадвал усулда** берилган дейилади. Бундай усул кўпроқ тажрибаларда ишлатилади.

3) Функциянинг **график усулида** берилишида, X ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш текисликдаги бирор чизиқ ёрдамида берилади. Бунда X ва Y тўпламлар орасидаги мослик график билан берилади. XOY текис-ликда l чизиқ берилган бўлсин. X нинг қийматига мос келган y нинг қийматини, топиш учун X нуқтадан OX ўқига перпендикуляр ўтказамиз. У l чизиқни битта A нуқтада кесиб ўтади. A нуқтадан OY ўқига перпендикуляр ўтказамиз, бу перпендикулярнинг OY ўқи билан кесишиш нуқтаси, y нинг X га мос қиймати бўлади. Маълумки, бундай мослик l чизиқ ёрдамида бажарилади. Функциянинг бундай берилиши, **график усулда берилган** дейилади. Функциянинг график усулида берилишидан, уни аналитик усул билан ифодалаш қийин бўлган ҳолларда ва функциянинг сифат ўзгариши график усулда яхши кўринадиган ҳолларда фойдаланилади. Масалан, физикавий тажрибалар жараёнида осциллографдан олинadиган график.

4) алгоритмик ёки компьютер усули. Функциянинг бундай усулда берилишида X нинг ҳар бир қиймати учун, $y = f(x)$ функциянинг қийматини ҳисоблайдиган алгоритм ёки программа берилган бўлади. Бундай программа ЭХМга қўйилган бўлиб функциянинг қиймати автоматик ҳисобланади.

4. Функциянинг айрим ҳоллари

1. Ошкор ва ошкормас функциялар. Функция $y = f(x)$ кўринишда, яъни y га нисбатан ечилган бўлса, унга ошкор функция дейилади. Функция $F(x, y) = 0$ кўринишда берилган бўлса, яъни y га нисбатан ечилмаган бўлса, ошкормас функция кўринишда берилган дейилади. Масалан, $y = 3x^2 + 5$, $y = \sin x$, $y = 4^x$ функциялар ошкор кўринишда; $2x - 3y + 6 = 0$, $x^2 + e^{xy} + 3 = 0$ функциялар ошкормас кўринишда берилган. Шунинг таъкидлаш мумкин ҳатто $F(x, y) = 0$ кўринишдаги тенглик ҳам функцияни ифода қилади. Масалан, $x^2 + y^2 + 4 = 0$ тенглама функцияни ифода қиламайди, чунки X нинг ҳар бир қийматига y нинг ҳақиқий сон қийматини мос қўйиш мумкин эмас.

2. Мураккаб функция. $y = f(u)$ бўлиб, $u = \varphi(x)$ функция берилган бўлса, y функцияга $\varphi(x)$ функциянинг функцияси ёки y га X нинг мураккаб функцияси дейилади. Масалан, $y = \lg(x^2 + 1)$ функцияда $u = x^2 + 1$ бўлиб. y X нинг мураккаб функцияси бўлади. Бундан ташқари $y = \sin(x^2 + 1)$, $y = 3^{x+5}$, $y = \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}$ ва ҳ.к. лар ҳам, мураккаб функцияга мисол бўла олади.

3. Тескари функция. $y = f(x)$ функция берилган бўлсин. y функциянинг қийматлар тўпламидаги ҳар бир қийматига X аргументнинг аниқланиш соҳасидан битта қиймати мос қўйилган бўлса, берилган функцияга **тескари** $x = d(y)$ функция берилган бўлади ва $D(f) = E(d)$ ва $E(f) = D(d)$ ҳар бир $x_0 \in D(f) = E(d)$ ва $y_0 = E(f) = D(d)$ бўлиб. $y_0 = f(x_0)$ фақат $x_0 = d(y_0)$ учун бажарилади. Масалан $y = 2x - 3$ функцияга тескари функция $2x = y + 3$, $x = (y + 3)/2$ бўлади. $y = x^3$ функция $x = \sqrt[3]{y}$ тескари функцияга эга бўлади. Ўзаро тескари бўлган функцияларнинг графиклари $y = X$ тўғри чизикқа нисбатан симметрик бўлади.

5. Функциянинг лимити ва унинг асосий хоссалари

1. 1-таъриф. $y = f(x)$ функция $X = a$ нуктанинг бирор атрофида аниқланган бўлиб, исталган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон мавжуд бўлсаки, $|x - a| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча $x \neq a$ нукталар учун $|f(x) - A| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, A чекли сон $y = f(x)$ функциянинг $X = a$ нуктадаги лимити деб аталади ва қуйидагича ёзилади

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{ёки} \quad x \rightarrow a \quad \text{да} \quad f(x) \rightarrow A \quad (1)$$

Функция лимитининг таърифидан келиб чиқадики $x - a = \alpha$ чексиз кичик бўлганда $f(x) - A$ ҳам чексиз кичик бўлади.

2-таъриф. $y = f(x)$ функция, X нинг етарлича катта қийматларида аниқланган бўлиб, исталган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай, $N > 0$ мавжуд бўлсаки, $|x| > N$ тенгсизликни

қаноатлантирувчи барча x лар учун $|f(x) - A| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, ўзгармас A сон, $y = f(x)$ функциянинг $x \rightarrow \infty$ даги limiti дейилади, ва

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad (2)$$

билан белгиланади.

1-таърифда фақат $x < a$ ёки $x > a$ бўлган қийматлар қаралса, функциянинг **чан ёки ўнг лимит** тушунчаси келиб чиқади ва

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \quad (3)$$

билан белгиланади.

3-таъриф. Limit $A = 0$ бўлган функцияга **чексиз кичик функция (ч. кич. ф.)** дейилади.

4-таъриф. Limit $A = +\infty$ ёки $A = -\infty$ бўлган функцияларга **чексиз катта функция (ч. кат. ф.)** дейилади ва

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \quad (4)$$

билан белгиланади.

Limitнинг таърифидан келиб чиқадики $y = C$ ўзгармас микдорнинг limiti ўзига тенг.

Функция лимитининг асосий хоссалари:

1) **йиғиндининг лимити.** Чекли сондаги функциялар алгебраик йиғиндисининг limiti, қўшилувчи функциялар limitларининг алгебраик йиғиндисига тенг, яъни $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларнинг $x \rightarrow a$ даги limitлари мавжуд бўлса,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \quad (5)$$

2) **чекли** сондаги функциялар **кўпайтмасининг лимити** функциялар limitларининг кўпайтмасига тенг, яъни

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \quad (6)$$

Натижа: Ўзгармас кўпайтувчини limit белгисидан ташқарига чиқариш мумкин, яъни,

$$\lim_{x \rightarrow a} [cf_1(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \quad (7)$$

3) **Иккита функция** **нисбатининг лимити.** махражнинг limiti нўлдан фарқли бўлса, бу функциялар limitларининг нисбатига тенг, яъни

$$\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0$$

бўлса,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)} \quad (8)$$

бўлади.

Limitларни ҳисоблашда қуйидаги limitлардан фойдаланилади:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e, \quad e = 2,71828... \quad (10)$$

Бу лимитларга мос равишда биринчи ва иккинчи ажойиб лимитлар дейилади.

6. Аниқмасликлар ва уларни очиш

1. Аниқмасликлар. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ лимитни ҳисоблашда $f(x)$, $\varphi(x)$

функциялар ч.кич.ф. лар бўлса, $f(x)/\varphi(x)$ нисбатга $x \rightarrow a$ да (0/0) кўринишдаги аниқмаслик дейилади. $f(x)$, $\varphi(x)$ функциялар ч.кат.ф. лар бўлса, $f(x)/\varphi(x)$ нисбатга $x \rightarrow a$ да (∞/∞) кўринишдаги аниқмаслик дейилади. Худди шунга ўхшаш $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 аниқмасликлар

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) - \varphi(x)], \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot \varphi(x)] \quad \text{ва} \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)}$$

лимитларни ҳисоблашда келиб чиқади. Бундай ҳолларда лимитларни ҳисоблашга аниқмасликларни очиш дейилади.

(0/0) ва (∞/∞) кўринишдаги аниқмасликларни очишда қуйидаги хоссадан фойдаланилади: $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $x = a$ нуктанинг бирор атрофидаги ҳамма нукталарда ўзаро тенг бўлса, уларнинг $x \rightarrow a$ даги лимити ҳам тенг бўлади.

$$\text{Масалан, } f(x) = \frac{x^2 - 9}{2(x - 3)} \quad \text{ва} \quad \varphi(x) = \frac{x + 3}{2} \quad \text{функциялар } x \text{ нинг}$$

$x = 3$ дан бошқа ҳамма қийматлари учун тенг, чунки

$$\frac{x^2 - 9}{2(x - 3)} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{2(x - 3)} = \frac{x + 3}{2}$$

Юқоридаги хоссага асосан,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$$

бўлади, яъни

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

натижага эга бўламиз.

Функцияларнинг лимитини топишга бир неча мисоллар қараймиз.

1-мисол.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 6}{6x} = \frac{5}{6}$$

эканлигини функция лимитининг таърифидан фойдаланиб исботланг.

Ечиш. Буни исботлаш учун $f(x) = (5x + 6)/6x$ ўзгарувчи миқдор ва $A = 5/6$ ўзгармас миқдор орасидаги фарқ $x \rightarrow \infty$ да чексиз кичик функция эканлигини кўрсатиш кифоя. Демак,

$$\frac{5x+6}{6x} - \frac{5}{6} = \frac{5x+6-5x}{6x} = \frac{6}{6x} = \frac{1}{x}$$

$1/x$ ўзгарувчи миқдор $x \rightarrow \infty$ да чексиз кичик функциядан иборат. Шундай қилиб,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (5x + 6)/6x = 5/6.$$

2-мисол.

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 5x + 4) = 7$$

эканлигини исботланг ҳамда x ва $(2x^2 - 5x + 4)$ ларнинг қийматлари жадвали билан тушунтиринг.

Ечиш. $x \rightarrow 3$ бўлганлиги учун $x - 3 = \alpha$ чексиз кичик миқдордир.

$x = 3 + \alpha$ ни $(2x^2 - 5x + 4) - 7$ айирмага қўйиб,

$$2(3 + \alpha)^2 - 5(3 + \alpha) + 4 - 7 = 2(9 + 6\alpha + \alpha^2) - 15 - 5\alpha + 4 - 7 =$$

$$= 18 + 12\alpha + 2\alpha^2 - 15 - 5\alpha + 4 - 7 = 2\alpha^2 + 7\alpha$$

натижага эга бўламиз.

α чексиз кичик функция бўлганлиги учун $2\alpha^2 + 7\alpha$ ҳам чексиз кичик бўлади. Шундай

қилиб, $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 5x + 4) = 7$ исбот бўлди.

Энди юқоридаги ҳолатни x аргумент, $2x^2 - 5x + 4$ функция қийматлари жадвали билан кўрсатайлик. Маълумки $x \rightarrow 3$ интилади.

x	2	2,5	2,8	2,9	2,99	2,999 $\rightarrow 3$
$2x^2 - 5x + 4$	2	4	5,68	6,32	6,9302	6,993002 $\rightarrow 7$

Бу жадвалдан кўринадики, аргументнинг 3 га яқинлашиб боровчи қийматлари учун, функциянинг мос қийматлари 7 га яқинлашиб боради, яъни $x - 3$ чексиз кичик миқдорга $2x^2 - 5x + 4 - 7$ айирманинг ҳам чексиз кичик миқдори тўғри келади. Юқоридаги жадвалда $x < 3$ бўлиб, $x \rightarrow 3$ ҳолни қарадик. $x > 3$ бўлиб, $x \rightarrow 3$ ҳолни ўқувчига мустақил кўрсатишни тавсия қиламиз.

3-мисол.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 - 6x + 3)$$

лимитни ҳисобланг.

Ечиш. Алгебраик йиғиндининг лимити, (5) формула, ўзгармас кўпайтувчини лимит ишорасидан чиқариш (7) формулаларга асосан:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2}(4x^2 - 6x + 3) &= \lim_{x \rightarrow 2} 4x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 6x + \lim_{x \rightarrow 2} 3 = 4 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 6 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 3 = \\ &= 4(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 6 \lim_{x \rightarrow 2} x + 3 = 4 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 3 = 7\end{aligned}$$

ҳосил бўлади.

Юқоридаги мисолда, лимитларнинг хоссаларига асосан, аргумент X нинг ўрнига унинг лимитик қийматини қўйишга олиб келди.

4-мисол.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 4x + 7) / (2x^2 - 5x + 6) \quad \text{лимитни ҳисобланг.}$$

Ечиш. Иккита функция нисбатининг лимити (8) формула ҳамда олдинги мисолда фойдаланилган лимитларнинг хоссаларини қўлласак,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 7}{2x^2 - 5x + 6} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 4x + 7)}{\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 5x + 6)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 3x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 4x + \lim_{x \rightarrow 1} 7}{\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 5x + \lim_{x \rightarrow 1} 6} = \\ &= \frac{3(\lim_{x \rightarrow 1} x)^2 - 4(\lim_{x \rightarrow 1} x) + 7}{2(\lim_{x \rightarrow 1} x)^2 - 5 \lim_{x \rightarrow 1} x + 6} = \frac{3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 7}{2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6} = \frac{6}{3} = 2\end{aligned}$$

бўлади.

Рационал функциянинг лимитини ҳисоблаш шу функциянинг аргумент X нинг лимитик қийматидаги, қийматини ҳисоблашга келтирилди.

Эслатма. $f(x)$ элементар функцияларнинг $X \rightarrow a$ интилгандаги лимити (a аниқланиш соҳасига тегишли) функциянинг $X = a$ нуқтадаги қийматига тенг бўлади. Масалан,

$$\lim_{t \rightarrow 1} [\lg(t + \sqrt{t^2 + 80}) + \sqrt{t^2 + 8}] = \lg(1 + \sqrt{1^2 + 80}) + \sqrt{1 + 8} = \lg 10 + 3 = 1 + 3 = 4$$

5-мисол. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{4x^2 - 5x + 2}$ лимитни ҳисобланг.

Ечиш. $x = 1$ да сурат ҳам, махраж ҳам нолга айланиб $(0/0)$ кўриниш-даги аниқмаслик ҳосил бўлади.

Сурат ва махражни $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ формула ёрдамида чизиқли кўпайтувчиларга ажратамиз. Бунда x_1 ва x_2 лар $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тенгламанинг илдизлари. Демак,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{4x^2 - 5x + 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x - 1)(x + 2/3)}{4(x - 1)(x - 1/4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x + 2/3)}{4(x - 1/4)} = \frac{3(1 + 2/3)}{4(1 - 1/4)} = 5/3\end{aligned}$$

бўлади.

6-мисол. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 + 5x + 4}{3x^2 + 7x - 2}$ лимитни ҳисобланг.

Ечиш. $x \rightarrow \infty$ да (∞/∞) кўринишдаги аниқмас ифодага эга бўламиз. Бундай аниқмасликни очиш учун касрнинг сурат ва махражини x нинг энг юқори даражалисига, яъни x^2 га бўламиз, ҳамда лимитларнинг хоссаларидан фойдалансак

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 5x + 4}{3x^2 + 7x - 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + 5/x + 4/x^2}{3 + 7/x - 2/x^2} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (6 + 5/x + 4/x^2)}{\lim_{x \rightarrow \infty} (3 + 7/x - 2/x^2)} = \frac{6 + 0 + 0}{3 + 0 + 0} = 2\end{aligned}$$

бўлади. Бунда $5/x$, $4/x^2$, $7/x$, $2/x^2$ лар $x \rightarrow \infty$ да чексиз кичик функциялардир.

7-мисол. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2}$ лимитни ҳисобланг.

Ечиш. $x = 3$ да сурат ва махраж 0 га тенг бўлади. Махражда $\sqrt{x+1}$ иррационал ифода мавжуд, уни суратга ўтказамиз, бунинг учун касрнинг сурат ва махражини $\sqrt{x+1} + 2$ га кўпайтирамиз.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)(\sqrt{x+1} + 2)}{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1} + 2)}{\sqrt{(x+1)^2 - 2^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1} + 2)}{x+1-4} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x-3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) \cdot (\sqrt{x+1} + 2) = (3+3)(\sqrt{3+1} + 2) = 6 \cdot 4 = 24.\end{aligned}$$

8-мисол. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$ лимитни ҳисобланг.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x} &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-(\cos x - \sin x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = - \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1}{\cos x + \sin x} = \\ &= - \frac{1}{\cos \pi/4 + \sin \pi/4} = - \frac{1}{\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2} = - \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

натижани оламиз.

9-мисол. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$ лимитни биринчи ажойиб лимитдан

фойдаланиб ҳисобланг.

Ечиш. $5x = \alpha$, деб алмаштирсак, бундан $x = \alpha/5$, $x \rightarrow 0$ $\alpha \rightarrow 0$ бўлади.

Шунинг учун,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha/5} = 5 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 5 \cdot 1 = 5,$$

чунки

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

10-мисол. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 3/x)^x$ лимитни иккинчи ажойиб лимитдан фойдаланиб ҳисобланг.

Ечиш. $x \rightarrow \infty$ да лимитга ўтсак, 1^∞ кўринишдаги аниқмаслик келиб чиқади. $3/x = \alpha$ билан алмаштирсак, бу ердан $x = 3/\alpha$ ҳамда $x \rightarrow \infty$ да $\alpha \rightarrow 0$ бўлади. Демак,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 3/x)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{3/\alpha} = \left[\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} \right]^3 = e^3$$

келиб чиқади.

Шундайқилиб, $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 3/x)^x = e^3$.

11-мисол. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$ лимитни ҳисобланг.

Ечиш: $x \rightarrow 1$ да $1/(x-1) \rightarrow \infty$ ва $2/(x^2-1) \rightarrow \infty$ бўлиб, $(\infty - \infty)$ кўринишдаги аниқмаслик келиб чиқади.

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{x+1-2}{x^2-1} = \frac{x-1}{x^2-1}.$$

Охирги ифода $x \rightarrow 1$ да $(0/0)$ аниқмас ифода бўлади. Шундай қилиб,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

12-мисол. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$ лимитни ҳисобланг.

Ечиш. $x \rightarrow +\infty$ да $\infty - \infty$ кўринишдаги аниқмаслик келиб чиқади. Қуйидаги шакл алмаштиришни бажарамиз:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 3x} - x &= \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x)(\sqrt{x^2 + 3x} + x)}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{(\sqrt{x^2 + 3x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \\ &= \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x}. \end{aligned}$$

Охирги ифода $x \rightarrow \infty$ да (∞/∞) кўринишдаги аниқмаслик бўлиб, 11-мисолдагидек x нинг юқори даражалисига сурат ва махражини бўлиб,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x/x}{\sqrt{x^2/x^2 + 3x/x^2} + x/x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{1 + 3/x} + 1} = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2} = 1,5$$

бунда $x \rightarrow +\infty$ да $3/x \rightarrow 0$ бўлади.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Қандай миқдорлар ўзгарувчи деб аталади?
2. Қандай ҳолда функция аниқланган дейилади?
3. Функционал боғланиш қандай белгиланади?
4. Функциянинг аниқланиш соҳаси деб нимага айтилади?
5. Функциянинг қийматлар тўплами нима?
6. Қандай мослик функцияни ифодалаши мумкин?
7. Функция қандай ўзгарувчи?
8. Аргумент қандай ўзгарувчи?
9. Функция қандай усулларда берилиши мумкин?
10. Ошкор ва ошкормас функциялар қандай?
11. Функциянинг функцияси ёки мураккаб функция деб нимага айтилади?
12. Тескари функция қандай функция?
13. Функциянинг лимити деб нимага айтилади ва у қандай ёзилади?
14. Чап ва ўнг лимитлар нималар ва у қандай ёзилади?
15. Чексиз катта ва чексиз кичик миқдорлар қандай миқдорлар?
16. Икки функция алгебраик йиғиндисининг лимити нимага тенг?
17. Чекли сондаги функциялар кўпайтмасининг лимити нимага тенг?
18. Ўзгармас кўпайтувчини лимит ишорасидан чиқариш мумкинми?
19. Иккита функция нисбатининг лимити нимага тенг?
20. Биринчи ажойиб лимит деб нимага айтилади?
21. Иккинчи ажойиб лимит нимага тенг?
22. Аниқмасликларни очиш нимадан иборат?

Мустақил иш учун топшириқлар

1. $f(x) = x^2 + 1$ функция берилган: 1) $f(4)$; 2) $f(\sqrt{2})$; 3) $f(a+1)$; 4) $f(2a)$ ларни ҳисобланг.
 2. Қуйидаги функцияларнинг $D(f)$ аниқланиш соҳасини ва $E(f)$ қийматлар тўпламини топинг:
 - 1) $f(x) = \ln(x+3)$; 2) $f(x) = \sqrt{5-2x}$; 3) $f(x) = \sqrt{1-|x|}$.
 3. Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг:
 - 1) $f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt[4]{7-x}$; 2) $f(x) = (a+x)/(a-x)$;
 - 3) $f(x) = \lg(5x - x^2 - 6)$; 4) $f(x) = 2^{\arccos(1-x)}$.
 4. Ҳажми $V = 1$ бирликка тенг бўлган цилиндр асосининг радиуси r ва баландлиги h орасидаги функционал боғланишни топинг.
 5. 1) $f(u) = 1-u$, $u = x^2$; 2) $f(u) = 1/(1-u)$, $u(x) = x - 1/x$;
 - 3) $f(u) = u^2$, $u(x) = 4x$
- функциялардан X нинг мураккаб функцияларини тузинг.

6. Қуйидаги функцияларга тескари функцияларни топинг ва топилган функцияларнинг аниқланиш ва ўзгариш соҳаларини аниқланг:

- 1) $f(x) = x^2 - 1, x \in [0, +\infty)$; 2) $f(x) = 2x + 3, x \in (-\infty, +\infty)$;
 3) $f(x) = (x-1)^3, x \in (-\infty, +\infty)$; 4) $f(x) = x^2 - 1, x \in (-\infty, 0]$.

7. Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топинг ва уларнинг графикларини ясанг.

1) $y = \frac{1}{x}$; 2) $y = -\frac{3}{x}$; 3) $y = 2 - \frac{1}{x}$; 4) $y = \frac{2}{x-1}$.

8. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+3}{5x} = \frac{4}{5}$, 2) $\lim_{x \rightarrow 3} (4x-7) = 5$,
 3) $\lim_{x \rightarrow -1} (5x+8) = 3$, 4) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2) - 4x + 6 = 10$

эканлигини функция лимити таърифидан фойдаланиб исботланг ҳамда X ва берилган функциялар кийматлари жадвали билан тушунтиринг.

9. Қуйидаги лимитларни, лимитларнинг хоссаларидан фойдаланиб ҳисобланг:.

1) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 7x + 6)$; 2) $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 4x + 7)$;
 3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 6x + 4}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 7x + 6}$;
 5) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 6x + 5}$; 6) $\lim_{t \rightarrow 3} [2t + \sqrt{t^2 - 8} + \lg(3t + \sqrt{t^2 - 8})]$.

10. Ушбу $(0/0)$ ва (∞/∞) кўринишдаги аниқмасликларни очинг:

1) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 7x + 6}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 7x + 2}{4x^2 - 5x - 6}$;
 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$; 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^3 - 6x^2 + 7x + 5}{8 - 4x + 3x^2 - 2x^3}$;
 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 8x - 9}{3x^5 + 6x^3 + 4x^2 - 2x + 11}$; 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + 8x^6 + 5x^4 - 3x^2 - 12}{10x^6 + 7x^5 - 6x^3 - 4x - 17}$.

11. Қуйидаги лимитларни ҳисобланг:

1) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{2 - \sqrt{x-1}}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1}$;
 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}$;
 5) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{\sqrt{3x} - 3}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$.

12. Қуйидаги лимитларни биринчи ва иккинчи ажойиб лимитлардан фойдаланиб ҳисобланг:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x/3}{x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x/2}{x^2}$;

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin 1/x;$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2/n)^n; \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{1/x}; \quad 9) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 5/n)^n;$$

$$10) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 1/3n)^n; \quad 11) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2x)^{1/x}; \quad 12) \lim_{n \rightarrow \infty} [n/(n+1)]^n.$$

13. Куйидаги аниқмасликларни очинг:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - x + 1} \right); \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - a^2} \right);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right); \quad 4) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right).$$

11-12--MAVZU: FUNKSIYA HOSILASI TA'RIFI, UNING GEOMETRIK VA MEXANIK MA'NOLARI.

REJA

1. Hosila tushunchasiga olib keladigan masalalar.
2. Fuksiya hosilasi.
3. Differentsiallashtirish, uning asosiy qoidalar va formulalari.
4. Hosilaning geometrik va mexanik ma'nosi.
5. Hosilaning fizik ma'nosi.
6. Hosilani hisoblash qoidalar.

Tayanch so'zlar: Fuksiya hosilasi, fuksiyadifferentsiali.

1. Hosila tushunchasiga olib keladigan masalalar.

Hosila tushunchasiga olib keladigan masalalar jumlasiga qattiq jismni to'g'ri chiziqli harakatini, yuqoriga vertikal holda otilgan jismning harakatini yoki dvigatel silindridagi porshen harakatini tekshirish kabi masalalarni kiritish mumkin. Bunday harakatlarni tekshirganda jismning konkret o'lchamlarini va shaklini e'tiborga olmay, uni harakat qiluvchi moddiy nuqta shaklida tasavvur qilamiz. Biz bitta masalani olib qaraymiz.

Harakat tezligi masalasi. Aytaylik, M moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli harakat qonuniga ko'ra uning $t=t_0$ paytdagi tezligini (oniy tezligini) topish talab qilinsin. Nuqtaning t_0 va $t_0 + \Delta t$ ($\Delta t \neq 0$) vaqtlar orasidagi bosib o'tgan yo'li $\Delta S = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ bo'ladi.

Uning shu vaqtdagi o'rtacha tezligi $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$ ga teng.

Ma'lumki, Δt qanchalik kichik bo'lsa, $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ o'rtacha tezlik nuqtaning t_0 paytdagi tezligiga shunchalik yaqin bo'ladi. Shuning uchun nuqtaning t_0 paytdagi tezligi quyidagi limitdan iborat.
$$V(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

2. Fuksiya hosilasi.

Hosila ta'rifi.

Faraz qilaylik biz $y = f(x)$ chiziqning $A(x, f(x))$ nuqtasidagi urinmasini topmoqchimiz. m_T - A nuqtada chiziqqa o'tkazilgan urinmaning burchak koeffisienti bo'lsin. A nuqtaga o'tkazilgan urinmaning ikkinchi $B(x+h, f(x+h))$ nuqtasini olaylik.

Hamda AB vatarining gradientini m_{AB} deb qaraylik. Yetalicha kichik h uchun

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Agar biz B nuqtani A ga yaqinlashtirsak $B_1, B_2, B_3 \dots$ nuqtalar ketma-ketligi hosil bo'ladi. Bu nuqtalarga mos $AB_1, AB_2, AB_3 \dots$ vatarlarni chiziqning A nuqtasidagi urinmasiga qadar yaqinlashtiraylik.

$$f'(x) = \lim_{B_n \rightarrow A} m_{AB_n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (*)^6$$

(*) tenglikka funksiyaning x nuqtadagi hosilasi deyiladi.

Namunaviy misollar.

1. $f(x) = x^2$ funksiya limitini hisoblang.

Yechish.

Agar $f(x) = x^2$ bo'lsa u holda $f(x+h) = (x+h)^2$ bo'ladi. Bundan

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} = 2x \end{aligned}$$

Misollar:

Quyidagi funksiylarning hosilalarini (*) formulasidan foydalanib toping.

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = 3x^2$
3. $f(x) = \sqrt{x}$

$y=f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lsin (a,b) intervalga tegishli x_0 va $x_0 + \Delta x$ nuqtalarni olamiz.

Argument biror (musbat yoki manfiy - bari bir) Δx orttirmasini olsin, u vaqtda y funksiya biror Δy orttirmani oladi. Shunday qilib argumentning x_0 qiymatida $y_0=f(x_0)$ ga, argumentning $x_0 + \Delta x$ qiymatda $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ ga ega bo'lamiz. Funksiya orttirmasi Δy ni topamiz.

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad (14.1)$$

Funksiya orttirmasini argument orttirmasiga nisbatini tuzamiz.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (14.2)$$

Bu – nisbatning $\Delta x \rightarrow 0$ dagi limitini topamiz.

⁶ Jane S Paterson, Dorothy A Watson “SQA Advanced Higher Mathematics” Unit1 43-44226 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

Agar bu limit mavjud bo'lsa, u berilgan $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi va $f'(x_0)$ bilan belgilanadi. Shunday qilib, ta'rifga ko'ra $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ yoki

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (14.3)$$

Demak, berilgan $y=f(x)$ funksiyaning argument x bo'yicha hosilasi deb, argument orttirmasi Δx ixtiyoriy ravishda nolga intilganda funksiya orttirmasi Δy ning argument orttirmasi Δx ga nisbatining limitiga aytiladi.

Umumiy holda x ning har bir qiymati uchun $f'(x)$ hosila ma'lum qiymatga ega, ya'ni hosila ham x ning funksiyasi bo'lishini qayd qilamiz. Hosilada $f'(x)$ belgi bilan birga boshqacha belgilar ham ishlatiladi.⁷ $y'; y'_x, \frac{dy}{dx}$

Hosilaning $x=a$ dagi konkret qiymati $f'(a)$ yoki $y' \Big|_{x=a}$ bilan belgilanadi.

Funksiya hosilasini hosila ta'rifiga ko'ra hisoblashni ko'ramiz.

3. Differensiallash, uning asosiy qoidalari va formulalari.

Berilgan $f(x)$ funksiyadan hosila topish amali shu funksiyani differensiallash deyiladi.

Differensiallashning asosiy qoidalari.

1. O'zgaras miqdorning hosilasi nolga teng, ya'ni agar $y=c$ bo'lsa ($c=\text{const}$) $y'=0$ bo'ladi.
2. O'zgaras ko'paytuvchini hosila ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin: $y=cu(x)$ bo'lsa $y'=cu'(x)$ bo'ladi.
3. Chekli sondagi differensiallanuvchi funksiyalar yig'indisining hosilasi shu funksiyalar hosilalarining yig'indisiga teng:

$$y = U(x) + V(x) + W(x); \quad y' = U'(x) + V'(x) + W'(x)$$

4. Ikki differensiallanuvchi funksiyalar ko'paytmasining hosilasi birinchi funksiya hosilasining ikkinchi funksiya bilan ko'paytmasi hamda birinchi funksiyaning ikkinchi funksiya hosilasi bilan ko'paytmasining yig'indisiga teng:

$$y=ug \text{ bo'lsa } y' = u'g + ug'.$$

5. Ikki differensiallanuvchi funksiyalar bo'linmasining hosilasi (kasrda ifodalanib) bo'linuvchi funksiya hosilasini bo'luvchi funksiya bilan ko'paytmasi hamda bo'linuvchi funksiyani bo'luvchi funksiya hosilasi bilan ko'paytmasining ayirmasini bo'luvchi(maxrajdagi) funksiya kvadratining nisbatiga teng:⁸

$$y = \frac{u}{g} \text{ bo'lsa } y' = \frac{u'g - ug'}{g^2}$$

6. Aytaylik, $y=F(u)$ murakkab funksiya bo'lsin ya'ni $y=F(u)$, $u = \varphi(x)$ yoki $y = F[\varphi(x)]$, u - o'zgaruvchi, oraliq argumenti deyiladi. $y=F(u)$ va $u = \varphi(x)$ differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsin.

⁷ Canuto, C., Tabacco, A. Mathematical Analysis I, 168 226 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

⁸ Canuto, C., Tabacco, A. Mathematical Analysis I, 172 226 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

Murakkab funksiyaning differensiallash qoidasini keltirib chiqaramiz.

Teorema: Murakkab $F(u)$ funksiyaning erkli o'zgaruvchi x bo'yicha hosilasi bu funksiya oraliq argumenti bo'yicha hosilasini oraliq argumentining erkli o'zgaruvchi x bo'yicha hosilasining ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$y'_x = F'_u(u) \cdot u'_x(x) \dots (1)$$

Misol: $y = (x^5 + 4x^4 + 3x^2 + 2)^5$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish: berilgan funksiyaning murakkab funksiya deb qaraymiz ya'ni $y = u^5$; $u = x^5 + 4x^4 + 3x^2 + 2$ (1) formulaga asosan

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = ((x^5 + 4x^4 + 3x^2 + 2)^5)' = 5(x^5 + 4x^4 + 3x^2 + 2)^4 \cdot (5x^4 + 16x^3 + 6x);$$

Differensiallashning asosiy formulalari jadvali:

$$1) y = \text{const}; \quad y' = 0$$

$$2) y = x^\alpha; \quad y' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$3) y = \sqrt{x}; \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$4) y = \frac{1}{x}; \quad y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$5) y = a^x; \quad y' = a^x \ln a$$

$$6) y = e^x; \quad y' = e^x$$

$$7) y = \log_a x; \quad y' = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$8) y = \ln x; \quad y' = \frac{1}{x}$$

$$9) y = \sin x; \quad y' = \cos x$$

$$10) y = \cos x; \quad y' = -\sin x$$

$$11) y = \tan x; \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$12) y = \cot x; \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

isollar.

1) $f(x) = (x^3 + 4x + 7)^4$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish: Bu yerda $y(u) = u^4$ va $u(x) = x^3 + 4x + 7$ U holda $f(x) = (u^4)' \cdot (x^3 + 4x + 7)' = 4u^3(3x^2 + 4) = 4(x^3 + 4x + 7)^3(3x^2 + 4)$

$$2) (x^2 + x)' = (x^2)' + (x)' = 2x + 1$$

$$(2x \sin x)' = (2x)' \sin x + 2x(\sin x)' = 2(x)' \sin x + 2x \cos x =$$

$$3) 2 \sin x + 2x \cos x = 2(\sin x + x \cos x)$$

$$4) y = \sin 3x \quad y' = ? \quad y' = (\sin 3x)' = 3 \cos 3x$$

1. Hosilaning geometrik va mexanik ma'nosi.

Bizga berilgan $u=f(x)$ funksiya x nuqta va uning atrofida aniqlangan bo'lsin. Argument x ning biror qiymatida $u=f(x)$ funksiya aniq qiymatga ega bo'ladi, biz uni $M_0(x, u)$ deb belgilaylik. Argumentga Δx ortirma beramiz va natija funksiyaning $u+\Delta u=f(x+\Delta x)$ orttirilgan qiymati to'g'ri keladi. Bu nuqtani $M_1(x+\Delta x, u+\Delta u)$ deb belgilaymiz va M_0 kesuvchi o'tkazib uning OX o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchagini φ bilan belgilaymiz.

Endi $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni qaraymiz. Rasmdan ko'rinadiki, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \varphi$ (1) ga teng.

Agar $\Delta x \rightarrow 0$ ga, u holda M_1 nuqta egri chiziq bo'yicha harakatlanib, M_0 nuqtaga yaqinlasha boradi. $M_0 M_1$ kesuvchi ham $\Delta x \rightarrow 0$ da o'z holatini o'zgartira boradi, xususan φ burchak ham

o'zgaradi va natijada φ burchak α burchakka intiladi. M_0M_1 kesuvchi esa M_0 nuqtadan o'tuvchi urinma holatiga intiladi. Urinmaning burchak koeffitsienti quyidagicha topiladi

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \quad (24.4)$$

Demak, $f'(x) = tg\alpha$, ya'ni, argument x ning berilgan qiymatida $f'(x)$ hosilaning qiymati $f(x)$ funksiyaning grafigiga uning $M_0(x, u)$ nuqtasidagi urinmaning OX o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchak tangensiga teng.

1. Geometrik ma'nosi.

Faraz qilaylik bizga $y = f(x)$ funksiya grafiga va unga tegishli bo'lgan $P_0(x_0, f(x_0))$ nuqta berilgan bo'lsin.

$f'(x_0)$ - f funksiyaning grafigiga $P_0(x_0, f(x_0))$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientiga teng. Bundan foydalanib biz urinma tenglamasini keltirib chiqaramiz. Faraz qilaylik urinma tenglamasi

$$y = kx + l$$

ko'rinishida bo'lsin. Bu yerda $k = f'(x_0)$

$$P_0(x_0, f(x_0)) \text{ nuqta bu to'g'ri chiziqqa tegishli ekanidan } f(x_0) = f'(x_0)x_0 + l$$

$$l = f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

Bundan

$$y = t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x \in R$$

2. Fizik ma'nosi

$$v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (**)$$

(**) formula, $s = s(t)$ qonun bo'yicha harakatlanayotgan M jismning t_0 vaqtdagi oniy tezligini ifodalaydi.⁹

3. Hosilaning geometrik va fizik ma'nolari.

Hosilaning fizik ma'nosi. Hosila tushunchasiga olib keladigan ikkinchi masalada harakat qonuni $s=s(t)$ funksiya bilan tavsiflanadigan to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanayotgan moddiy nuqtaning t

vaqt momentidagi oniy tezligi $v_{oniy} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ekanligini ko'rgan edik. Bundan hosilaning fizik

(mexanik) ma'nosi kelib chiqadi.

$s=s(t)$ funksiya bilan tavsiflanadigan to'g'ri chiziqli harakatda t vaqt momentidagi harakat tezligining son qiymati hosilaga teng: $v_{oniy} = s'(t)$.

Hosilaning mexanik ma'nosini qisqacha quyidagicha ham aytish mumkin: yo'ldan vaqt bo'yicha olingan hosila tezlikka teng.

Hosila tushunchasi nafaqat to'g'ri chiziqli harakatning oniy tezligini, balki boshqa jarayonlarning ham oniy tezligini aniqlashga imkon beradi. Masalan, faraz qilaylik $y=Q(T)$ jismni T temperaturaga qadar qizdirish uchun uzatilayotgan issiqlik miqdorining o'zgarishini tavsiflovchi funksiya bo'lsin. U holda jismning issiqlik sig'imi issiqlik miqdoridan temperatura bo'yicha olingan hosilaga teng bo'ladi:

⁹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical analysis I" 168-169 226 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

$$C = \frac{dQ}{dT} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

Umuman olganda, hosilani $f(x)$ funksiya bilan tavsiflanadigan jarayon oniy tezligining *matematik modeli* deb aytish mumkin.

4. Hosila hisoblash qoidalar

Quyida keltirilgan teoremlar isbotida hosila topish algoritmidan, limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar haqidagi teoremlardan foydalanamiz. Shuningdek $\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$ va $\Delta v = v(x + \Delta x) - v(x)$ ekanligini hisobga olgan holda, $u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u$, $v(x + \Delta x) = v(x) + \Delta v$ tengliklardan foydalanamiz.

$u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar (a, b) intervalda aniqlangan bo'lsin.

Yig'indining hosilasi.

1-teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalarning $x \in (a, b)$ nuqtada hosilalari mavjud bo'lsa, u holda $f(x) = u(x) + v(x)$ funksiyaning ham x nuqtada hosilasi mavjud va

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) \quad (24.5)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Ko'paytmaning hosilasi.

2-teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $x \in (a, b)$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda ularning $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ ko'paytmasi ham $x \in (a, b)$ nuqtada hosilaga ega va

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \quad (24.6)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bo'linmaning hosilasi.

3-teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $x \in (a, b)$ nuqtada hosilaga ega, $v(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda ularning $f(x) = u(x)/v(x)$ bo'linmasi $x \in (a, b)$ nuqtada hosilaga ega va

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (24.7)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Shunday qilib biz ushbu paragrafda hosilani hisoblashning quyidagi qoidalarini keltirib chiqardik:

1. Ikki, umuman chekli sondagi funksiyalar yig'indisining hosilasi hosilalar yig'indisiga teng.
2. O'zgaras ko'paytuvchini hosila belgisi oldiga chiqarish mumkin.
3. Ikki $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar ko'paytmasining hosilasi $u'v + uv'$ ga teng.
4. Ikki $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar bo'linmasining hosilasi $(u'v - uv')/v^2$ ga teng.

1- va 2-teorema natijalaridan foydalangan holda quyidagi qoidaning ham o'rinli ekanligini ko'rish qiyin emas:

5. Chekli sondagi differensiallanuvchi funksiyalar chiziqli kombinatsiyasining hosilasi hosilalarning aynan shunday chiziqli kombinatsiyasiga teng, ya'ni agar $f(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \dots + c_n u_n(x)$ bo'lsa, u holda $f'(x) = c_1 u_1'(x) + c_2 u_2'(x) + \dots + c_n u_n'(x)$.

Bu qoidaning isbotini o'quvchilarga havola qilamiz.

Eslatma. Yuqoridagi teoremlar funksiyalar yig'indisi, ko'paytmasi, bo'linmasining hosilaga ega bo'lishining yetarli shartlarini ifodalaydi. Demak, ikki funksiya yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbatidan iborat bo'lgan funksiyaning hosilaga ega bo'lishidan bu funksiyalarning har biri hosilaga ega bo'lishi har doim kelib chiqavermaydi. Masalan, $u(x) = |x|$, $v(x) = |x|$ deb, ularning ko'paytmasini tuzsak, $y = x^2$ ko'rinishdagi funksiya hosil bo'ladi. Bu funksiyaning $\forall x \in (-\infty; +\infty)$ nuqtada, xususan, $x = 0$ nuqtada hosilasi mavjud. Ammo, ma'lumki $y = |x|$ funksiyaning $x = 0$ nuqtada hosilasi mavjud emas.

Asosiy trigonometrik jadvallar¹⁰

$$D x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$$

$$D \sin x = \cos x$$

$$D \cos x = -\sin x$$

$$D \tan x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$D a^x = (\log a) a^x \quad \text{in particular,} \quad D e^x = e^x$$

$$D \log_a |x| = \frac{1}{(\log a) x} \quad \text{in particular,} \quad D \log |x| = \frac{1}{x}$$

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar:

1. Hosila tushunchasiga olib keladigan qanday masalalarni bilasiz?
2. Fuksiya hosilasi ta'rifini ayting.
3. Hosilaning geometrik va mexanik ma'nosi qanday?
4. Hosilani hisoblash qoidalarini yozing.

13-14-mavzu. BOSHLANG'ICH FUNKSIYA, ANIQMAS INTEGRAL TA'RIFI, HISOBLASH USULLARI.

Reja:

1. Boshlang'ich funksiya haqida tushuncha.
2. Aniqmas integral va uning xossalari.
3. Asosiy integrallash jadvali.

Tayanch so'zlar: Boshlang'ich funksiya, aniqmas integral, integrallash jadvali.

1. Boshlang'ich funksiya. Differensial hisobning asosiy vazifasi berilgan $F(x)$ funksiyaga ko'ra uning hosilasi $f(x) = F'(x)$ ni yoki differensialini topishdan iborat edi.

¹⁰ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical analysis I" 175 226 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

Integral hisobning asosiy vazifasi buning teskarisi bo'lib, $F(x)$ funksiyani uning ma'lum $f(x)$ hosilasiga yoki $f(x)dx$ differensialiga ko'ra topishdan iborat. Demak, $f(x)$ funksiya berilgan, shunday $F(x)$ funksiyani topish kerakki, uning hosilasi $f(x)$ ga teng bo'lsin, ya'ni

$$F'(x) = f(x) \quad (16.1)$$

bo'lsin.

Ta'rif. Agar $[a,b]$ kesmada aniqlangan $f(x)$ funksiya uchun bu kesmaning barcha nuqtalarida $F'(x)=f(x)$ tenglik bajarilsa, $F(x)$ funksiya shu kesmada $f(x)$ funksiyaga nisbatan boshlang'ich funksiya deb ataladi.

Masalan: Boshlang'ich funksiya ta'rifiga asosan, $F(x)=\frac{x^4}{4}$ funksiya $f(x)=x^3$ funksiyasi uchun boshlang'ich ekani kelib chiqadi, chunki $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$

Agar $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya mavjud bo'lsa, u boshlang'ich yagona bo'lmashligini ko'rish oson. $F(x)=\frac{x^4}{4}+6$; $F(x)=\frac{x^4}{4}+7$. Umuman $F(x)=\frac{x^4}{4}+c$.

Agar $F_1(x)$ va $F_2(x)$ funksiyalar $f(x)$ funksiyadan $[a,b]$ kesmada boshlang'ich funksiyalari bo'lsa, ular orasida ayirma o'zgarmas songa teng bo'ladi. Agar berilgan $f(x)$ funksiya uchun qanday bo'lmasin birgina $F(x)$ boshlang'ich funksiya topilgan bo'lsa, $F(x)$ funksiya uchun har qanday boshlang'ich funksiya $F(x)+C$ ko'rinishga ega bo'ladi.

2. Aniqmas integral va uning xossalari.

Ta'rif. Agar $F(x)$ funksiya biror oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda $F(x)+C$ (bu yerda C – ixtiyoriy doimiy) funksiyalar to'plami shu kesmada $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deyiladi va $\int f(x)dx = F(x) + C$ kabi belgilanadi.

Bu yerda $f(x)$ – integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ integral ostidagi ifoda,

$\int$ – integral belgisi deyiladi.

Aniqmas integralni topish jarayoni yoki berilgan funksiyaning boshlang'ich funksiyasini topish jarayoni **integrallash** deyiladi.

1-misol: $\int \cos x dx = \sin x + C$, chunki $(\sin x)' = \cos x$

Aniqmas integralning xossalari:

1) Aniqmas integralning hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng, ya'ni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

2) Aniqmas integralning differensial integral belgisi ostidagi ifodaga teng, ya'ni

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

3) Biror funksiyaning hosilasidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy o'zgarmasning yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

4) Biror funksiyaning differentsialidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy o'zgarmasning yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

5) If $\int f(x)dx = F(x) + C$, then $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx = \alpha[F(x) + C] = \alpha F(x) + K$

for all constants α . Here $k = \alpha C$ is just some new constant of integration. This property is read, “The integral of a constant times a function equals the constant times the integral of the function.”

Agar $\int f(x)dx = F(x) + C$ bo'lsa, u holda barcha o'zgarmas α lar uchun

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx = \alpha [F(x) + C] = \alpha F(x) + K \text{ bo'ladi. Bu yerda } k = \alpha C -$$

integraldagi yangi o'zgarmas sonidir. Bu xossa quyidagichadir: “funktsiyani o'zgarmas songa ko'paytmasining integrali o'zgarmas sonni shu funktsiya integraliga ko'paytmasiga teng”¹¹.

6) Chekli sondagi funksiyalarning algebralik yig'indisidan olingan aniqmas integral shu funksiyalarning har biridan olingan aniqmas integrallarning algebralik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int (f_1(x) + f_2(x) + f_3(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \int f_3(x)dx$$

7) Agar $F(x)$ funktsiya $f(x)$ uchun boshlang'ich funktsiya bo'lsa, ya'ni

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ bo'lsa u holda } \int f(u)du = F(u) + C$$

tenglik to'g'ri bo'ladi, bu yerda $u = u(x)$ x ning differensiallanuvchi funksiyasi. Bu xossa integrallash formulalarining invariantligi deyiladi.

3. Asosiy integrallash jadvali:

$$1) \int 0 \cdot dx = C$$

$$2) \int 1 \cdot dx = x + C$$

$$3) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$4) \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$5) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + C$$

$$6) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$7) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$8) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$9) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$10) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tg x + C$$

$$11) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\ctg x + C$$

The following integrals occur quite often and should be memorized.

If $\frac{d}{dx} x = 1$, then $\int 1 dx = x + C$ or $\int dx = x + C$.

If $\frac{d}{dx} x^2 = 2x$, then $\int 2x dx = x^2 + C$ or $\int d(x^2) = x^2 + C$.

If $\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$, then $\int 3x^2 dx = x^3 + C$ or $\int d(x^3) = x^3 + C$

If $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$, then $\int nx^{n-1} dx = x^n + C$ or $\int d(x^n) = x^n + C$.

If $\frac{d}{dx} \left(\frac{u^{m+1}}{m+1} \right) = u^m$, then $\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C$ or $\int d\left(\frac{u^{m+1}}{m+1} \right) = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C$.

¹¹ J.H.Heinbockel. Introduction to Calculus Volume 1, 181 226 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

If $\frac{d}{dt} \sin t = \cos t$, then $\int \cos t dx = \sin t + C$ or $\int d(\sin t) = \sin t + C$.

If $\frac{d}{dt} \cos t = -\sin t$, then $\int \sin t dx = -\cos t + C$ or $-\int d(\cos t) = -\cos t + C$.

Quyidagi integrallar ko'p qo'llanilgani uchun eslab qolish lozim:

Agar $\frac{d}{dx} x = 1$ bo'lsa, u holda $\int 1 dx = x + C$ yoki $\int dx = x + C$ bo'ladi.

Agar $\frac{d}{dx} x^2 = 2x$ bo'lsa, u holda $\int 2x dx = x^2 + C$ yoki $\int d(x^2) = x^2 + C$ bo'ladi.

Agar $\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$ bo'lsa, u holda $\int 3x^2 dx = x^3 + C$ yoki $\int d(x^3) = x^3 + C$ bo'ladi.

Agar $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$ bo'lsa, u holda $\int nx^{n-1} dx = x^n + C$ yoki $\int d(x^n) = x^n + C$ bo'ladi.

Agar $\frac{d}{dx} \left(\frac{u^{m+1}}{m+1} \right) = u^m$ bo'lsa, u holda $\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C$ yoki $\int d\left(\frac{u^{m+1}}{m+1}\right) = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C$ bo'ladi.

Agar $\frac{d}{dt} \sin t = \cos t$ bo'lsa, u holda $\int \cos t dx = \sin t + C$ yoki $\int d(\sin t) = \sin t + C$ bo'ladi.¹²

Agar $\frac{d}{dt} \cos t = -\sin t$ bo'lsa, u holda $\int \sin t dx = -\cos t + C$ yoki $-\int d(\cos t) = -\cos t + C$ bo'ladi.

1-misol. $\int 5dx$.

Yechilishi: 1-xossaga asosan o'zgarmas ko'paytuvchi 5 ni integral ishorasi tashqarisiga chiqaramiz va formulani qo'llab quyidagini hosil qilamiz:

$$\int 5dx = 5 \int dx = 5x + C.$$

Tekshirish. $d(5x + C) = 5dx$. Integral ostidagi ifodani hosil qildik, demak, integral to'g'ri olingan.

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar:

1. Boshlang'ich funksiya haqida tushuncha bering.
2. Aniqmas integral ta'rifini ayting.
3. Aniqmas integral xossalari ayting.
4. Asosiy integrallash jadvalini yozing.

15-16-MAVZU. Aniq integral, xossalari. Nyuton – Leybnits formulasi.

REJA:

1. Aniq integralning ta'rifi.
2. Aniq integralning asosiy xossalari.
3. Nyuton-Leybnits formulasi.
4. O'zgaruvchini almashtirish.
5. Aniq integralni bo'laklab integrallash.

Tayanch so'zlar: aniq integral, quyi va yuqori chegara, integral yig'indi.

Aniq integral - matematik analizning eng muhim tushunchalaridan biridir. Egri chiziq bilan chegaralangan yuzalarni, egri chiziqli yoylar uzunliklarini, hajmlarni, bajarilgan ishlarni, yo'llarni, inersiya momentlarini va hokazolarni hisoblash masalasi shu tushuncha bilan bog'liq. $[a, b]$ kesmada $y=f(x)$ uzluksiz funksiya berilgan bo'lsin. Quyidagi amallarni bajaramiz.

1. $[a, b]$ kesmani qo'yidagi nuqtalar bilan ixtiyoriy n ta qismga bo'lamiz, va ularni qisman intervallar deb ataymiz.

¹² J.H.Heinbockel. Introduction to Calculus Volume 1, p.181 226 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

$$a=x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

2. Qismaniy intervallarning uzunliklarini bunday belgilaymiz: ¹³

$$\Delta x_1 = x_1 - a \quad \Delta x_2 = x_2 - x_1 \quad \dots \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \dots \quad \Delta x_n = b - x_{n-1}$$

σ_n yig'indi $f(x)$ funksiya uchun $[a, b]$ kesmada tuzilgan integral yig'indi deb ataladi. σ_n integral yig'indi qisqacha bunday yoziladi:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

Integral yig'indining geometrik ma'nosi ravshan: Agar $f(x) \geq 0$ bo'lsa, u holda σ_n - asoslari $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_i, \dots, \Delta x_n$ va balandliklari mos ravishda $f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_i), \dots, f(c_n)$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchak yuzlarining yig'indisidan iborat (1-rasm).

Endi bo'lishlar soni n ni orttira boramiz ($n \rightarrow \infty$) va bunda eng katta intervalning uzunligi nolga intilishini, ya'ni $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ deb faraz qilamiz.

Ushbu ta'rifni beramiz.

Ta'rif. Agar σ_n integral yig'indi $[a, b]$ kesmani qismaniy $[x_i, x_{i+1}]$ kesmalarga ajratish usuliga va ularning har biridan c_i nuqtani tanlash usuliga bog'liq bo'lmaydigan chekli songa intilsa, u holda shu son $[a, b]$ kesmada $f(x)$ funksiyadan olingan aniq integral deyiladi va bunday belgilanadi:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Bu yerda $f(x)$ integral ostidagi funksiya. $[a, b]$ kesma integrallash oralig'i, a va b sonlar integrallashning qo'yi va yuqori chegarasi deyiladi.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \quad 14$$

Aniq integralning ta'rifidan ko'rinadiki, aniq integral hamma vaqt mavjud bo'lavermas ekan. Biz qo'yida aniq integralning mavjudlik teoremasini isbotsiz keltiramiz.

Teorema. Agar $u=f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u integrallanuvchidir, ya'ni bunday funksiyaning aniq integrali mavjuddir.

Agar yuqoridan $y=f(x) \geq 0$ funksiyaning grafigi, qo'yidan OX o'qi, yon tomonlaridan esa $x=a$, $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan sohani egri chiziqli trapetsiya deb atasak, u holda

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Aniq integralning geometrik ma'nosi ravshan bo'lib qoladi: $f(x) \geq 0$ bo'lganda u shu egri chiziqli trapetsiyaning yuziga son jihatdan teng bo'ladi.

1-izoh. Aniq integralning qiymati funksiyaning ko'rinishiga va integrallash chegarasiga bog'liq. Masalan:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz.$$

¹³ Larson Edvards. /Calculus/ 2010. 272 226 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

¹⁴ Larson Edvards. /Calculus/ 2010. 273 226 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

2-izoh. Aniq integralning chegaralari almashtirilsa, integralning ishorasi o'zgaradi.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

3-izoh. Agar aniq integralning chegaralari teng bo'lsa, har qanday funksiya uchun ushbu tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

Aniq integralning asosiy xossalari.

1-xossa. O'zgarmas ko'paytuvchini aniq integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \quad (17.1)$$

2-xossa. Bir nechta funksiyaning algebraik yig'indisining aniq integrali qo'shiluvchilar integralining yig'indisiga teng (ikki qo'shiluvchi bo'lgan hol bilan chegaralanamiz):

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \quad (17.2)$$

3-xossa. Agar $[a, b]$ kesmada ikki $f(x)$ va $g(x)$ funksiya ($a < b$) $f(x) \leq g(x)$ shartni qanoatlantirsa, ushbu tengsizlik o'rinli.

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx. \quad (17.3)$$

4-xossa. Agar $[a, b]$ kesma bir necha qismga bo'linsa, u holda $[a, b]$ kesma bo'yicha aniq integral har bir qism bo'yicha olingan aniq integrallar yig'indisiga teng. $[a, b]$ kesma ikki qismga bo'lingan hol bilan cheklanamiz, ya'ni $a < c < b$ bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (17.4)$$

5-xossa. Agar m va M sonlar $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmada eng kichik va eng katta qiymati bo'lsa, ushbu tengsizlik o'rinli.

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \quad (17.5)$$

Isboti Shartga ko'ra $m \leq f(x) \leq M$ ekani kelib chiqadi. 3-xossaga asosan qo'yidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx \quad (17.6)$$

Biroq

$$\int_a^b m dx = m \int_a^b dx = m \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = m(b-a)$$

$$\int_a^b M dx = M \int_a^b dx = M \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = M(b-a)$$

bo'lgani uchun (17.6) tengsizlik

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

bo'ladi.

6-xossa (o'rta qiymat haqidagi teorema).

Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, bu kesmaning ichida shunday $x=s$ nuqta topiladiki, bu nuqtada funksiyaning qiymati uning shu kesmadagi o'rtacha qiymatiga teng bo'ladi, ya'ni

$$f(s) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx.$$

Isboti. Faraz qilaylik, m va M sonlar $f(x)$ uzluksiz funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymati bo'lsin. Aniq integralni baholash haqidagi xossaga ko'ra qo'yidagi qo'sh tengsizlik to'g'ri:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

tengsizlikning hamma qismlarini $b-a>0$ ga bo'lamiz. Natijada

$$m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

ni hosil qilamiz. Ushbu $\mu = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx$ belgilashni kiritib, qo'sh tengsizlikni qayta

yozamiz. $m \leq \mu \leq M$

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lgani uchun u m va M orasidagi hamma oraliq qiymatlarni qabul qiladi.

Demak, biror $x=s$ qiymatda $\mu=f(s)$ bo'ladi, ya'ni

$$f(s) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx. \quad ^{15}$$

Teorema isbotlandi.

Nyuton-Leybnits formulasi.

Aniq integrallarni integral yig'indining limiti sifatida bevosita hisoblash ko'p hollarda juda qiyin, uzoq hisoblashlarni talab qiladi va amalda juda kam qo'llaniladi. Integrallarni topish formulasi Nyuton-Leybnits teoremasi bilan beriladi.

¹⁵ Larson Edvards. /Calculus/ 2010. 276226 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

Teorema. Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda aniq integral boshlang'ich funksiyaning integrallash oralig'idagi orttirmasiga teng, ya'ni

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (17.7)$$

(1) tenglik Nyuton-Leybnits formulasi deyiladi.¹⁶

Isboti. $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning biror boshlang'ich funksiyasi bo'lsin, u holda 1-teoremaga ko'ra $\int_a^x f(t)dt$ funksiya ham $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi.

Berilgan funksiyaning ikkita istalgan boshlang'ich funksiyalari bir-biridan o'zgarmas C qo'shiluvchiga farq qiladi, ya'ni $F(x)=F(x)+C$.

Shuning uchun:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

C -o'zgarmas miqdorni aniqlash uchun bu tenglikda $x=a$ deb olamiz:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C, \quad \int_a^a f(t)dt = 0$$

bo'lgani uchun $F(a)+C=0$. Bundan, $S=-F(a)$. Demak, $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$

Endi $x=b$ deb Nyuton-Leybnits formulasini hosil qilamiz:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

yoki integrallash o'zgaruvchisini x bilan almashtirsak:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$F(b)-F(a)=F(x)|_a^b$ belgilash kiritib, oxirgi formulani qo'yidagicha qayta yozish mumkin:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorema isbotlandi.

Integral ostidagi funksiyaning boshlang'ich funksiyasi ma'lum bo'lsa, u holda Nyuton-Leybnits formulasi aniq integrallarni hisoblash uchun amalda qulay usulni beradi. Faqat shu formulaning kashf etilishi aniq integralni hozirgi zamonda matematik analizda tutgan o'rnini

¹⁶ Larson Edvards. /Calculus/ 2010. 283226 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

olishga imkon bergan. Nyuton-Leybnits formulasi aniq integralning tatbiqi sohasini ancha kengaytirdi, chunki matematika bu formula yordamida xususiy kurinishdagi turli masalalarni yechish uchun umumiy usulga ega bo'ldi.

Misollar.

$$1) \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^1 = \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$2) \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1+x^2) = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1.$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

17-18-mavzu. EHTIMOLLAR NAZARIYASINING BOSHLANG'ICH TUSHUNCHALARI.

Reja:

1. Ehtimollar nazariyasi elementlari.
2. Ehtimolliklar ustida amallar.

Tayanch so'zlar: Tasodifiy hodisa, birgalikda bo'lmagan hodisalar, ehtimolliklarini qo'shish.

Elementar hodisalar fazosi – ehtimolliklar nazariyasi uchun asosiy tushuncha bo'lib, unga ta'rif berilmaydi. Formal nuqtai nazardan bu ixtiyoriy to'plam hisoblanib, uning elementlari o'rganilayotgan tajribaning “bo'linmaydigan” va bir vaqtda ro'y bermaydigan natijalardan iborat bo'ladi.

Elementar hodisalar fazosi Ω harfi bilan belgilanib, uning elementlari (elementar hodisalar) $A, B, C, \dots$ lardan tashkil topgan to'plamni χ harf bilan belgilanadi. Faraz qilaylik χ to'plam chekli yig'indiga nisbatan (agar $A_1, A_2, \dots, A_n$ - hodisalar bo'lsa, u holda $\bigcup_{i=1}^n A_i$ - hodisa), kesishmaga nisbatan (agar $A_1, A_2, \dots, A_n$ - hodisalar bo'lsa, u holda $\bigcap_{i=1}^n A_i$ - hodisa) va to'ldiruvchiga (Ω ning A tegishli bo'lmagan elementlaridan tashkil topgan to'plam bo'lib, bu to'plam A^c orqali belgilanadi) nisbatan yopiq bo'lsin. Agar A va B lar hodisalar bo'lsa, $A \cap B = AB$ sifatida A va B hodisalar bir vaqtda yuz beradigan hodisani, $A \cup B$ sifatida A yoki B hodisalardan biri yuz beradigan hodisani A^c sifatida esa A hodisa yuz bermaydigan hodisani tushunamiz.¹⁷

Ehtimollar nazariyasi “Tasodifiy tajribalar”, yani natijasini oldindan aytib bo'lmaydigan tajribalardagi qonuniyatlarni o'rganuvchi matematik fandir. Bunda shunday tajribalar qaratiladi, ularni o'zgarimas (yani bir xil) shartlar kompleksida xech bo'lmaganda nazariy ravishda ixtiyoriy sonda takrorlash mumkin, deb hisoblanadi.

Bunday tajribalar har birining natijasi **tasodifiy hodisa** ro'y berishidan iboratdir. Biz kuzatadigan hodisalarni quyidagi uch turga ajratish mumkin: muqarrar, ro'y bermaydigan va tasodifiy hodisalar.

Muqarrar hodisa deb tayin shartlar to'plami S bajarilganda albatta ro'y beradigan hodisaga aytiladi.

Mumkin bo'lmagan hodisa deb shartlar to'plami S bajarilganda mutloqo ro'y bermaydigan hodisaga aytiladi.

Tasodifiy xodisa deb shartlar to'plami S bajarilganda ro'y berishi ham, ro'y bermasligi ham mumkin bo'lgan xodisaga aytiladi.

¹⁷ Mathematical Literacy for Humanists, Herbert Gintis, 57-64 226 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

Masalan, tanga tashlaganda, u gerbli tomoni, yoki raqamli tomoni bilan tushishi mumkin. Shu sababli “tanga tashlaganda gerbli tomoni bilan tushdi” xodisasi tasodifiydir.

Masalan,

1) Tangani ikki marta tashlash (yoki ikkita tangani birdaniga tashlash)

tajribasi uchun $\Omega = \{GG, GR, RG, RR\}$.

Bu yerda GG– tangani ikki marta ham “gerb” tomoni bilan tushish

hodisasi, RG– birinchi marta “raqam” tomoni, ikkinchi marta esa “gerb” tomoni

bilan tushish hodisasi va qolgan GR, RR hodisalar shularga o‘xshash hodisalar

bo‘ladi. Bu holda $|\Omega| = 4$ va GR, RG hodisalar bir-biridan farq qiladi.

2) Tajriba o‘yin kubigini 2 marta tashlashdan iborat bo‘lsin. Bu holda elementar hodisalar ushbu ko‘rinishga ega: $A_{i,j} = (i, j)$ $i, j = 1, 2, \dots, 6$.

Bunda $A_{i,j}$ hodisa kubikni birinchi tashlashda i raqamli yoq, ikkinchi tashlashda j raqamli yoq tushganligini bildiradi.

Bu tajribada elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{A_{i,j}, i, j = 1, 2, \dots, 6\}$. Elementar hodisalar soni $|\Omega| = 36$.

Agar tajriba natijasida A ga kirgan ω elementar hodisalarning birortasi ro‘y bersa, A hodisa ro‘y bergan deyiladi.

Agar shu elementar hodisalardan birortasi ham ro‘y bermasa, A hodisa ro‘y bermaydi, unda A xodisaga teskari xodisa ro‘y bergan deyiladi.

($\bar{A}$ orqali belgilanadi)

A va $\bar{A}$ o‘zaro qarama-qarshi hodisalar deyiladi.

Muqarrar hodisani Ω bilan belgilaymiz. Mumkin bo‘lmagan xodisani $\emptyset$ bilan belgilaymiz.

1. Agar A hodisani tashkil etgan elementar hodisalar B hodisaga ham tegishli bo‘lsa, A hodisa B hodisani ergashtiradi deyiladi va $A \subset B$ kabi belgilanadi.

42-rasm

1. Agar $A \subset B$ va $B \subset A$, ya’ni A hodisa B ni ergashtirsa, va aksincha, B hodisa A ni ergashtirsa, A va B hodisalar *teng* deyiladi va $A = B$ kabi belgilanadi.

2. A va B tasodifiy hodisalarning *yig‘indisi* deb, shunday C hodisaga aytiladiki, bu hodisa A va B hodisalarning kamida bittasi ro‘y berganda ro‘y beradi va $C = A \cup B$ (yoki $C = A + B$) kabi belgilanadi.

3. A va B tasodifiy hodisalarning *ko‘paytmasi* deb, shunday C hodisaga aytiladiki, bu hodisa A va B hodisalar bir paytda ro‘y berganda ro‘y beradi va $C = A \cap B$ (*ëku* $C = A \cdot B$) kabi belgilanadi (3-rasm).

4. A va B tasodifiy hodisalarning *ayirmasi* deb, shunday C hodisaga aytiladiki, u A hodisa ro‘y berib, B hodisa ro‘y bermaganda ro‘y beradi va $C = A \setminus B$ (*ëku* $C = A - B$) kabi belgilanadi.

1. Agar $A \cap B = \emptyset$ bo‘lsa, A va B hodisalar *birgalikda bo‘lmagan hodisalar* deyiladi.

Agar $A_i A_j = \emptyset$ ($i \neq j$) *ea* $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$ bo‘lsa, u holda $A_1, A_2, \dots, A_n$ lar hodisalar to‘la guruxini tashkil etadi deyiladi.

Murakkab hodisaning ehtimolliklarini oddiy hodisalarning ehtimolliklarini hisoblash orqali topiladi.

Birgalikda bo‘lmagan hodisalarning ehtimolliklarini qo‘shish qoidasi. Ikkita birgalikda bo‘lmagan hodisadan istalgan birining ro‘y berish ehtimolligi bu hodisalar ehtimolliklarining yig‘indisiga teng:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Natija: Har ikkitasi birgalikda bo'lmagan bir nechta hodisalardan istalgan birining ro'y berish ehtimolligi bu hodisalar ehtimolligining yig'indisiga teng.

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

Birgalikda bo'lgan hodisalar ehtimolliklarini qo'shish qoidasi. Ikkita birgalikda bo'lgan hodisadan kamida bittasining (hech bo'lmaganda birining) ro'y berish ehtimolligi bu hodisalar ehtimolliklari yig'indisidan ularning birgalikda ro'y berish ehtimolligini ayirilganiga teng:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (1)$$

Bu qoida istalgan chekli sondagi birgalikda bo'lgan hodisalar uchun umumlashtirilishi mumkin. Masalan, uchta birgalikda bo'lgan hodisa uchun:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

Natija. Qarama-qarshi hodisalarning ehtimolliklari yig'indisi birga teng:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Bundan

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

1-masala: Idishda 40 ta shar bor, ulardan 15tasi oq rangda, 5 tasi yashil rangda, 20 tasi sariq rangda. Rangli shar chiqish ehtimolligini toping.

Yechilishi: Rangli shar chiqishi bu yashil shar yoki sariq shar chiqishini bildiradi.

$$A = \{ \text{yashil shar chiqish hodisasi} \}$$

$$B = \{ \text{sariq shar chiqish hodisasi} \}$$

$$\text{Ularning mos ravishda ehtimolliklari } P(A) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8} \quad P(B) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

A va B hodisalar birgalikda emas (bir rangli shar chiqishi boshqa rangli shar chiqishini yo'qqa chiqaradi).

Izlanayotgan ehtimollik quyidagiga teng

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

Takroriy ehtimollik

Faraz qilaylik Ω – hodisalar fazosi bo'lib, undagi hodisalar soni n ta, A hodisa esa bu elementlardan m tasini o'z ichiga olsin. U holda, A hodisaning ehtimolligi m/n ga teng. Bu ehtimollikni boshqacha ko'rinishda ham tariflash mumkin.

Faraz qilaylik, tajriba n ta alohida bir- biriga o'xshash natijalarga ega bo'lsin. Shuningdek A - natijalarning qism to'plami bo'lsin va A ning elementlar sonini n(A) harf bilan belgilanadi. U holda, A hodisaning ehtimolligi $P(A) = n(A)/n$ ga teng bo'ladi.¹⁸

Endi tajribani bir necha marta takrorlaylik va har bitta natija takrorlanmaydigan bo'lsin. Olaylik, A – har bir sinovda amalga oshadigan yoki oshmaydigan hodisa bo'lsin. $n_t(A)$ orqali t – tajribagacha A hodisa amalga oshgan natijalar soni bo'lsin. U holda, A hodisaning nisbiy chastotasi deb, $n_t(A)/t$ songa, A hodisaning ehtimolligi $\lim_{t \rightarrow \infty} n_t(A)/t$ songa aytiladi.

Agar A va B hodisalar uchun P(A) ning qiymati B hodisaning amalga oshish yoki oshmaslikka bog'liq bo'lmasa va P(B) ning qiymati A hodisaning amalga oshish yoki oshmaslikka bog'liq bo'lmasa, u holda A va B hodisalar bog'liqmas deyiladi.

Agar A va B bog'liqmas hodisalar bo'lsa, u holda $P(AB) = P(A)P(B)$ tenglik o'rinli.

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar:

1. Ehtimollar nazariyasining boshlang'ich tushunchalarini ayting.
2. Tasodifiy hodisa deb qanday hodisiga aytiladi?
3. Birgalikda bo'lgan va bo'lmagan hodisalarga misol keltiring.
4. Ehtimolliklarini qo'shish qoidasini tushuntiring.

¹⁸ Mathematical Literacy for Humanists, Herbert Gintis, 57-64226 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

1-2-Amaliy mashg'ulot. Mavzu: To'plamlar va ular ustida amallar.

To'plam tushunchasi matematikaning boshlang'ich tushunchalaridan bo'lib, u ta'rifsiz qabul qilinadi. To'plamni tashkil qiluvchi ob'ektlar uning elementlari deyiladi. To'plamlarni A , a , $\{a\}$, A yoki A harflari bilan belgilaymiz. To'plam bir qancha elementlardan iborat bo'lishi mumkin, Qo'yidagi yozuv: $a \in A$, a elementni A to'plamga tegishlilikini bildiradi.

$a \notin A$ a elementni A to'plamga tegishli emasligini bildiradi, yoki mantiq belgisidan foydalangan holda $\neg(a \in A)$ ko'rinishda yozishimiz mumkin

$A, V \subset M = \{1, \dots, 20\}$ to'plamlar uchun Qo'yidagilarni aniqlang:

$A \setminus V, V \setminus A, A \cup V, A \cap V, A', V'. A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, B = \{2, 4, 7, 8\}.$

Yechish: Berilgan to'plamlar uchun to'plamlar ustida bajariladigan amallarning ta'riflarini qo'llab qo'yidagi to'plamlarni hosil qilamiz:

$A \setminus B = \{1, 3, 5, 9\}; B \setminus A = \{2, 4, 8\}; A \cup V = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\};$

$A \cap V = \{7\}; A' = \{2, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\};$

$V' = \{1, 3, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}.$

$(A \cup V) \setminus S = (A \setminus S) \cup (V \setminus S)$ tenglikni isbotlang.

To'plamlarning tengligini isbotlash uchun $M = N \Leftrightarrow M \subset N \wedge N \subset M$ tasdiqdan foydalanamiz.

1) $\forall x \in ((A \cup V) \setminus S) \Rightarrow x \in (A \cup V) \wedge x \notin S \Rightarrow x \in A \vee x \in V \wedge x \notin S \Rightarrow (x \in A \wedge x \notin S) \vee (x \in V \wedge x \notin S) \Rightarrow x \in (A \setminus S) \vee x \in (V \setminus S) \Rightarrow x \in ((A \setminus S) \cup (V \setminus S)).$ Bundan $(A \cup V) \setminus S \subset (A \setminus S) \cup (V \setminus S)$ ekanligi kelib chiqadi.

2) $\forall u \in ((A \setminus S) \cup (V \setminus S)) \Rightarrow u \in (A \setminus S) \vee u \in (V \setminus S) \Rightarrow (u \in A \wedge u \notin S) \vee$

$\vee (u \in V \wedge u \notin S) \Rightarrow u \in A \vee u \in V \wedge u \notin S \Rightarrow u \in (A \cup V) \wedge u \notin S \Rightarrow$

$\Rightarrow u \in ((A \cup V) \setminus S).$ Bundan $(A \setminus S) \cup (V \setminus S) \subset (A \cup V) \setminus S$ ekanligi kelib chiqadi. Demak $(A \cup V) \setminus S = (A \setminus S) \cup (V \setminus S).$

3) To'plamlar jufti berilgan:

a) $A = \{\text{Navoi, Bobur, Furqat, Nodirabegim}\}$ va $B = \text{barcha shoir va shoirlar to'plami};$

b) $C = \text{qavariq to'rtburchaklar to'plami}$ va $D = \text{to'rtburchaklar to'plami};$

d) $J = \text{Samarqand olimlari to'plami}, F = \text{O'zbekiston olimlari to'plami};$

e) $K = \text{barcha tub sonlar to'plami}, M = \text{manfiy sonlar to'plami}.$

Juftlikdagi to'plamlardan qaysi biri ikkinchisining qism-to'plami bo'lishini aniqlang.

4. Qo'yidagi to'plamlar uchun $A \subset B$ yoki $B \subset A$ munosabatlardan qaysi biri o'rinni:

a) $A = \{a, b, c, d\}, B = \{a, c, d\};$ b) $A = \{a, b\}, B = \{a, c, d\};$ d) $A = \emptyset, B = \emptyset;$

e) $A = \emptyset, B = \{a, b, c\};$ f) $A = \emptyset, B = \{\emptyset\};$ g) $A = \{\{\emptyset\}, a, 0\}, B = \{a\};$

h) $A = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}, B = \{\{a, b\}, c\};$ i) $A = \{\{0\}, 0\}, B = \{\emptyset, \{\{0\}, 0\}\}?$

5. Munosabatning to'g'ri yoki noto'g'ri ekanligini aniqlang:

a) $\{1; 2\} \subset \{\{1; 2; 3\}; \{1; 3\}; 1; 2\};$ b) $\{1; 2\} \in \{\{1; 2; 3\}; \{1; 3\}; 1; 2\};$

d) $\{1; 3\} \subset \{\{1; 2; 3\}; \{1; 3\}; 1; 2\};$ e) $\{1; 3\} \in \{\{1; 2; 3\}; \{1; 3\}; 1; 2\}.$

6. Qo'yidagi to'plamlar tengmi?

a) $A = \{1; 4; 6\}$ va $B = \{6; 4; 2\};$ b) $A = \{1; 2; 3\}$ va $B = \{1; 11; 111\};$

d) $A = \{\{1; 2\}; \{2; 3\}\}$ va $B = \{2; 3; 1\};$ e) $A = \{\sqrt{256}; \sqrt{81}; \sqrt{16}\}$ va $B = \{2^2; 3^2; 4^2\}.$

7. $x = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$ va $A = \{2; 3\}$ to'plamlar haqida nima deyish mumkin?

8. $M = (36; 29; 15; 68; 27), P = (4; 15; 27; 47; 36; 90), Q = (90; 4; 47)$ to'plamlar berilgan.

$M \cap P, M \cap Q, P \cap Q, M \cap P \cap Q$ larni toping?

¹⁹ Herbert Gintis, Mathematical Literacy for Humanists. 2010. USA. 11-12, 14-15 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

²⁰ Herbert Gintis, Mathematical Literacy for Humanists. 2010. USA. 11-12, 14-15 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

9. A-18 ning hamma natural bo'luvchilari to'plami, B-24 ning hamma natural bo'luvchilari to'plami. $A \cap B$ to'plam elementlarini ko'rsating?

10. P ikki xonali natural sonlar to'plami, S barcha toq natural sonlar to'plami bo'lsa, $K = P \cup S$ to'plamga qaysi sonlar kiradi?

a) $21 \in K$; b) $32 \in K$; d) $7 \notin K$; e) $17 \notin K$ deush to'g'rimi?

11. "Matematika" va "grammatika" so'zlaridagi harflar to'plamini tuzing. Bu to'plamlar kesishmasini toping?

12. $[1, 5]_{\text{va}} [3, 7]$ kesmalarning kesishmasini toping?

13. $P = \{a, b, c, d, e, f\}$ va $J = \{a, g, z, e, k\}$ to'plamlar birlashmasini toping?

14. $A = \{n | n \in \mathbb{N}, n < 5\}$ va $B = \{n | n \in \mathbb{N}, n > 7\}$ to'plamlar birlashmasini toping?

a) $4 \in A \cup B$; b) $-3 \in A \cup B$; d) $6 \in 4 \cup 5$ deyish to'g'rimi?

15. $A = \{2, 4, 6, \dots, 40\}$, $B = \{1, 3, 5, \dots, 37\}$, $C = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}, g, h\}$ to'plamlarning har biridagi elementlar sonini aniqlang. $A \cup B$ da nechta element mavjud?

16. $A = \{2, 3, 4, 5, 7, 10\}$, $B = \{3, 5, 7, 9\}$, $C = \{4, 9, 11\}$ bo'lsin. Qo'yidagi to'plamlarda nechtdan element mavjud:

a) $A \cup (B \cup C)$; b) $(C \cup B) \cup A$; d) $A \cap (B \cup C)$;

e) $A \cup (B \cap C)$; f) $A \cap (B \cap C)$; g) $B \cap (A \cup C)$.²¹

17. $A = \{x | -5 \leq x \leq 10\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{N}, 3 \leq x \leq 15\}$ bo'lsin. $A \setminus B$ va $B \setminus A$ to'plam elementlarini toping?

18. Sinfdagi bir necha o'quvchi marka yig'dilar. 15 o'quvchi O'zbekiston markalarini, 11 kishi chet el markalarini, 6 kishi ham O'zbekiston markalarini, ham 16 chet el markalarini yig'di. Sinfdagi necha o'quvchi marka to'plagan?

19. 32 o'quvchining 12 tasi voleubol seksiyasiga, 15 tasi basketbol seksiyasiga, 8 kishi esa ikkala seksiyaga ham qatnashadi. Sinfdagi necha o'quvchi hech bir seksiyaga qatnashmaydi?

19. 30 o'quvchidan 18 tasi matematikaga, 17 tasi esa fizikaga qiziqadi. Ikkala fanga ham qiziqadigan o'quvchilar soni nechta bo'lishi mumkin?

(Ikkala fanga ham qiziqmaydigan o'quvchilar soni $k \in (0, 1, 2, 3, \dots, 12)$).

20. 100 odamdan iborat sayyohlar guruhida 10 kishi nemis tilini ham, fransuz tilini ham bilmaydi, 75 tasi nemis tilini, 83 tasi esa fransuz tilini biladi. Ikkala tilni ham biladigan sayyohlar sonini toping?

21. 26 o'quvchining 14 tasi shaxmatga, 16 tasi shashkaga qiziqadi. Ham shashkaga, ham shaxmatga qiziqadigan o'quvchilar nechta?

3-4-Amaliy mashg'ulotlar. Mavzular: Matematik mantiq elementlari. Mulohazalar va ular ustida amallar

Misollar.

Qo'yidagi misollarda keltirilgan formulalarning qiymati chinlik jadvali yordamida aniqlansin.

$$1. \overline{x \vee y \rightarrow x \& y} \cdot \overline{p_1 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)}$$

$$2. (x \wedge z) \vee (x \wedge \overline{z}) \rightarrow (y \wedge z) \rightarrow (\overline{x} \wedge y \wedge z)$$

$$3. ((p \rightarrow q) \& (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

$$4. \overline{(x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee y \rightarrow z))}$$

$$5. (p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow ((p_1 \vee p) \rightarrow (p_2 \vee p))$$

²¹ Herbert Gintis, Mathematical Literacy for Humanists. 2010. USA. 11-12, 14-15 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

6. $(P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow P_3)) \rightarrow ((P_1 \rightarrow P_2) \rightarrow (P_1 \rightarrow P_3))$
7. $(P_1 \rightarrow P_2) \rightarrow ((P_1 \wedge P) \rightarrow (P_2 \wedge P))$
8. $(x \leftrightarrow y) \& (x \vee y) \rightarrow (z \rightarrow x)$
9. $(x \rightarrow y) \& (y \rightarrow z) \rightarrow (z \rightarrow x)$
10. $(x \vee \bar{y} \rightarrow (z \rightarrow y \vee \bar{y} \vee x)) \& (x \vee \bar{x} \rightarrow (x \rightarrow x)) \rightarrow y$
11. $(x \& x \& \bar{x} \rightarrow y \& \bar{y} \rightarrow z) \vee x \vee (y \& z) \vee (y \& \bar{z})$
12. $(x \& (y \vee z \rightarrow y \vee z)) \vee (y \& x \& \bar{y}) \vee x \vee (y \& x \& \bar{x})$
13. $(x \rightarrow y) \& (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$
14. $(x \wedge z) \vee (x \wedge \bar{z}) \vee (y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z)$
15. $(x \wedge z) \vee (x \wedge \bar{z}) \vee (y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z)$
16. $((p \wedge q) \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$
17. $((p \rightarrow q) \& (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
18. $(x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee y \rightarrow z))$
19. $(P_1 \rightarrow P_2) \rightarrow ((P_1 \vee P) \rightarrow (P_2 \vee P))$
20. $(P_1 \rightarrow P_2) \rightarrow ((P_1 \wedge P) \rightarrow (P_2 \wedge P))$
21. $((p \rightarrow q) \& (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
22. $(x \rightarrow y) \& (y \rightarrow z) \rightarrow (z \rightarrow x)$
23. $(x \vee \bar{y} \rightarrow (z \rightarrow y \vee \bar{y} \vee x)) \& (x \vee \bar{x} \rightarrow (x \rightarrow x)) \rightarrow y$
24. $(x \& x \& \bar{x} \rightarrow y \& \bar{y} \rightarrow z) \vee x \vee (y \& z) \vee (y \& \bar{z})$
25. $(x \& (y \vee z \rightarrow y \vee z)) \vee (y \& x \& \bar{y}) \vee x \vee (y \& x \& \bar{x})$
26. $(x \rightarrow y) \& (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$
27. $\bar{x} \vee y \rightarrow x \& y$
28. $(x \wedge z) \vee (x \wedge \bar{z}) \vee (y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z)$
29. $P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow P_1) \quad \bar{x} \cdot \bar{y} \vee (x \rightarrow y) \cdot x$
30. $(xy) \leftrightarrow (z \rightarrow \bar{x})$

5-Amaliy mashg'ulot. Mavzu: Tekislikda to'g'ri chiziqli va uning tenglamalari.

1-masala. $M_0(1,-3)$ nuqtadan o'tuvchi $\vec{P}(2,-5)$ vektorga parallel to'g'ri chiziqli tenglamasini yozing. Yechish (3.7) formuladan foydalanamiz.

$a = 2, b = -5, x_0 = 1, y_0 = 0.$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{-5}; \quad -5x+5 = 2y+6$$

yoki $5x+2y+1=0.$

2-masala. Ushbu $M_1(1,-3), M_2(3,7)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri, chiziqli tenglamasini yozing.²² Yechish (9.5) formulaga koordinatalarning qiymatlarini qo'yib, ushbuga

²² C.Vineze, L.Kozma, Colleje Geometry. 2014. 160-190 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+3}{7+10}; \quad 10x-20 = y+3$$

Yoki $10x-y-23=0$.

Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar:

1. $x+2y-3=0$. 2) $y=2x+1$ tenglamalar bilan aniqlangan to'g'ri chiziqni yasang.
2. To'g'ri chiziqning $8x-3y+2=0$ umumiy tenglamasi berilgan. Uning parametrik tenglamasini yozing.
3. Qo'yidagi berilganlarga ko'ra to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing:
 - a) A(2,-6) nuqtadan o'tib, P(1,-1) vektorga parallel to'g'ri chiziq;
 - b) Koordinata o'qlaridan mos ravishda $a=3$, $b=-2$ kesmalar kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq;
 - s) A(3,5) nuqtadan o'tib, OX o'qqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq;
 - d) B(-1,2) nuqtadan o'tib, OY o'qqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq;
 - e) A(0,-2) va B(3,-4) nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.
4. Uchlari A(-3,-2), B(1,2), C(4,-5) nuqtalarda bo'lgan uchburchak berilgan (to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida):
 - 1) Uchburchakni yasang.
 - 2) Uchburchak tomonlari uzunliklarini hisoblang.
 - 3) Uchburchak tomonlari tenglamalarini yozing.
 - 4) A uchidan chiqqan mediana yotgan to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.
 - 5) A uchidan chiqqan balandlik yotgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.
 - 6) Uchburchak yuzini hisoblang.

6-Amaliy mashg'ulot. Mavzu: Tekislikda to'g'ri chiziqlarning turli tenglamalariga doir misollar yechish.

1-masala. M0(1,-3) nuqtadan o'tuvchi $\vec{P}$ (2,-5) vektorga parallel to'g'ri chiziq tenglamasini yozing. Yechish.

$$a = 2, b = -5, x_0 = 1, y_0 = 0.$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{-5}; \quad -5x+5 = 2y+6$$

$$\text{yoki } 5x+2y+1=0.$$

2-masala. Ushbu M1(1,-3), M2(3,7) nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri, chiziq tenglamasini yozing.

Yechish. Formulaga koordinatalarning qiymatlarini qo'yib, ushbuga

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+3}{7+10}; \quad 10x-20 = y+3$$

$$\text{Yoki } 10x-y-23=0.$$

Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar:

1. $x+2y-3=0$. 2) $y=2x+1$ tenglamalar bilan aniqlangan to'g'ri chiziqni yasang.
2. To'g'ri chiziqning $8x-3y+2=0$ umumiy tenglamasi berilgan. Uning parametrik tenglamasini yozing.
3. Qo'yidagi berilganlarga ko'ra to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing:
 - a) A(2,-6) nuqtadan o'tib, P(1,-1) vektorga parallel to'g'ri chiziq;
 - b) Koordinata o'qlaridan mos ravishda $a=3$, $b=-2$ kesmalar kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq;
 - s) A(3,5) nuqtadan o'tib, OX o'qqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq;
 - d) B(-1,2) nuqtadan o'tib, OU o'qqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq;
 - e) A(0,-2) va B(3,-4) nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.
4. Uchlari A(-3,-2), B(1,2), C(4,-5) nuqtalarda bo'lgan uchburchak berilgan (to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida):
 - 1) Uchburchakni yasang.
 - 2) Uchburchak tomonlari uzunliklarini hisoblang.
 - 3) Uchburchak tomonlari tenglamalarini yozing.
 - 4) A uchidan chiqqan mediana yotgan to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.
 - 5) A uchidan chiqqan balandlik yotgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

6) Uchburchak yuzini hisoblang.

7-Amaliy mashg'ulot. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinant uning xossalari.

Misol. Qo'yidagi determinantni $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ Sarrius usuli bilan hisoblang.²³

Yechim. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 \cdot 1 +$
 $+ (-1) \cdot 4 \cdot (-2) - (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 \cdot (-2) = 54$

Javob. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 54$

Determinantlarni hisoblang:

1. $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & a \\ -1 & \sqrt{a} \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

11. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -8 & 1 \\ 3 & 15 & 18 & 91 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 13 & 39 & 1 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 8 & 28 & 38 & 48 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 14 & 19 & 24 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

14. $\begin{vmatrix} 378 & 253 & 127 \\ 377 & 252 & 126 \\ -3 & -3 & -3 \end{vmatrix}$.

15. $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$.

17. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 9 & 9 \\ 13 & -1 & 17 & 4 \end{vmatrix}$.

18. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

²³ М.В.Воронов, Г.П.Мещерякова. Математика для студентов гуманитарных факультетов.2002.стр.116-121.

$$19. \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad 20. \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

8-9--Amaliy mashg'ulot. Mavzu: Chiziqli tenglamalar sistemalari. Kramer formulalari.

Misol. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer formulalari yordamida yeching:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Yechim: Sistemani Kramer formulalari yordamida yechamiz.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-4 - 2) + 2 \cdot (-3 + 4) + 4 \cdot (-3 - 8) = -18 + 2 - 44 = -60 \neq 0, \text{ demak, tizim yagona yechimga ega.}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 21 & -2 & 4 \\ 9 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 21 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 21 \cdot (-4 - 2) + 2 \cdot (-9 + 20) + 4 \cdot (-9 - 40) = -126 + 22 - 196 = -300$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-300}{-60} = 5$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 21 & 4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 2 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} - 21 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-9 + 20) - 21 \cdot (-3 + 4) + 4 \cdot (30 - 18) = 33 - 21 + 48 = 60$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{60}{-60} = -1$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 21 \\ 3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (40 + 9) - 3 \cdot (-20 + 21) + 2 \cdot (-18 - 84) = 147 - 3 - 284 = -60$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-60}{-60} = 1$$

Javob: $x_1 = 5, x_2 = -1, x_3 = 1$.

Misollar. Chiziqli tenglamalar sistemalarini Kramer formulalari yordamida yeching.

$$1. \begin{cases} 5x + 8y - z = 3, \\ x + 2y + 3z = -3, \\ 2x - 3y + 2z = 5. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + 2y + 4z = 31, \\ 5x + y + 2z = 29, \\ 3x - y + z = 10. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9, \\ 2x + 5y - 3z = 4, \\ 5x + 6y - 2z = 18. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x - y - z = 4, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 3x - y = 5, \\ -2x + y + z = 0, \\ 2x - y + 4z = 15. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 3x - y + z = 4, \\ 2x - 5y - 3z = -17, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x - y - 6z = -1, \\ 3x - 2y = 8. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 2x + y - z = 1, \\ x + y + z = 6, \\ 3x - y + z = 4. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 2x - y - 3z = 8, \\ 3x + 4y - 5z = 18, \\ 2y + 7z = -5. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x + 5y + z = -7, \\ 2x - y - z = 0, \\ x - 2y - z = 2. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 16, \\ 3x - 2y - 5z = 12. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 3x + 4y + 2z = 7, \\ 2x - y - 3z = 4, \\ x + 5y + z = -1. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 2x - y + 3z = 7, \\ x + 3y - 2z = 0, \\ 2y - z = 2. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 2x + y + 4z = 20, \\ 2x - y - 3z = 3, \\ 3x + 4y - 5z = -8. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x - y = 4, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x + 5y - z = 7, \\ 2x - y - z = 4, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 11x + 3y - z = 2, \\ 2x + 5y - 5z = 0, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$$

10-11-Amaliy mashg'ulot. Mavzu: Funksiyaning limiti, limitlar haqida teoremlar.

1- misol. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x-3}{x^2+1} = \frac{4 \cdot 2 - 3}{2^2 + 1} = \frac{8-3}{4+1} = \frac{5}{5} = 1$

2-misol. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$ bu misolda kasrning surati ham, mahraji ham $x \rightarrow 2$ da nolga intiladi. 0/0 ko'rinishdagi aniqmaslik bo'ladi. Kasrning surati va maxrajini ko'paytuvchilarga ajratsak,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x+2} = \frac{2-3}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

Misol. Funktsiyalarning limitlarini toping:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 3x - 4};$

a) $x_0 = 2$; б) $x_0 = -1$; в) $x_0 = \infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}.$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^x.$

4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 3x + 2}{-3x^2 - x + 4};$

a) $x_0 = -1$; б) $x_0 = 1$; в) $x_0 = \infty$.

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{2x \cos 3x}.$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^x.$

7. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - x - 10}{x^2 + 3x + 2};$

a) $x_0 = 2$; б) $x_0 = -2$; в) $x_0 = \infty$.

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 3x}{\sin^2 2x}.$

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x} \right)^{2x}.$

10. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 3x + 2}{-3x^2 - x + 14};$

a) $x_0 = 1$; б) $x_0 = 2$; в) $x_0 = \infty$.

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot \operatorname{tg} 3x}{x^2}.$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}.$

$$13. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 - 3x - 5};$$

$$a) x_0 = -2; \text{ б) } x_0 = -1; \text{ в) } x_0 = \infty.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(x+1) - \ln x].$$

$$16. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4x^2 - 5x + 1}{-x^2 + 3x - 2};$$

$$a) x_0 = -1; \text{ б) } x_0 = 1; \text{ в) } x_0 = \infty.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cos 5x}{\sin 3x}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+2x) [\ln(x+3) - \ln x].$$

$$19. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 5x + 6}{3x^2 - x - 14};$$

$$a) x_0 = 2; \text{ б) } x_0 = -2; \text{ в) } x_0 = \infty.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \operatorname{tg} 4x}{\sin^2 6x}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-5) [\ln(x-3) - \ln x].$$

$$22. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 7x + 6}{-x^2 - x + 6};$$

$$a) x_0 = 1; \text{ б) } x_0 = 2; \text{ в) } x_0 = \infty.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \operatorname{tg} 4x}{x^2}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 6x - 7}{3x^2 + x - 2};$$

$$a) x_0 = -2; \text{ б) } x_0 = -1; \text{ в) } x_0 = \infty.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 5x}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 2} (3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 + x - 4}{-x^2 + 4x - 3};$$

$$a) x_0 = -1; \text{ б) } x_0 = 1; \text{ в) } x_0 = \infty.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \cos 7x}{\sin 2x}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 3} (3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$$

12-Amaliy mashg'ulot. Mavzu: Funksiya hosilasi, differensiallash. Funksiya hosilasining fizik va mexanik ma'nolari

Misollar. Funktsiyalarning hosilalarini toping.

a) $y = x^3 + 2x + \sqrt{x}$;

б) $y = x^3 \cdot \sin x$;

в) $y = \sin 8x$;

г) $y = \sin^7 8x$.

Yechim:

a) $y' = (x^3 + 2x + \sqrt{x})' = (x^3)' + (2x)' + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = 3x^2 + 2 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$;

б) $y' = (x^3 \cdot \sin x)' = (x^3)' \cdot \sin x + x^3 \cdot (\sin x)' = 3x^2 \sin x + x^3 \cdot \cos x$;

в) $y' = (\sin 8x)' = \cos 8x \cdot (8x)' = 8 \cdot \cos 8x$;

г) $y' = (\sin^7 8x)' = 7 \sin^6 8x \cdot (\sin 8x)' = 7 \cdot \sin^6 8x \cdot \cos 8x \cdot (8x)' = 7 \cdot \sin^6 8x \cdot \cos 8x \cdot 8 = 56 \sin^6 8x \cdot \cos 8x$

Funktsiyalarning hosilalarini toping:

1. а) $y = (3x - 4\sqrt[3]{x} + 2)^4$; б) $y = \frac{4x + 7\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + 9x^2}}$; в) $y = \cos 3x \cdot e^{\sin x}$;

г) $y = \ln \operatorname{arctg} 2x$; д) $\operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right) = 5x$.

2. а) $y = (3x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} - 1)^2$; б) $y = \frac{\arcsin 3x}{1 - 8x^2}$; в) $y = 2^{3x} \cdot \operatorname{tg} 2x$;

г) $y = \cos \ln 5x$; д) $x - y + \operatorname{arctg} y = 0$.

3. а) $y = \left(x^2 - \frac{1}{x^3} + 5\sqrt{x}\right)^4$; б) $y = \frac{\arcsin 7x}{x^4 + e^x}$; в) $y = e^{\operatorname{tg} x} \cdot \ln 2x$;

г) $y = \cos \sqrt{x^2 + 3}$; д) $y \sin x = \cos(x - y)$.

4. а) $y = \left(4x^2 - \frac{3}{\sqrt{x}} + 4\right)^3$; б) $y = \frac{\sin 2x}{\cos 5x}$; в) $y = 2^{8x} \cdot \operatorname{tg} 3x$;

г) $y = \arcsin \ln 4x$; д) $\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$.

5. а) $y = (x^5 - \sqrt[3]{x} + 1)^5$; б) $y = \frac{\sqrt{1 - 4x^2}}{2^x + \operatorname{tg} x}$; в) $y = e^{\operatorname{tg} x} \cdot \sin 4x$;

г) $y = \sin \ln 5x$; д) $(e^x - 1)(e^y - 1) - 1 = 0$.

6. а) $y = \left(6x^2 - \frac{2}{x^4} + 5\right)^2$; б) $y = \frac{\cos 3x}{\sqrt{3x^2 + 4}}$; в) $y = 3^{\operatorname{tg} x} \cdot \arcsin(x^2)$;

г) $y = \ln \sin 6x$; д) $y^2 x = e^{\frac{y}{x}}$.

7. a) $y = (x^3 - 4\sqrt{x^3} + 2)^3$; б) $y = \frac{\operatorname{arctg} 7x}{2 - 9x^2}$; в) $y = e^{\operatorname{ctg} x} \cdot \cos 6x$;
 г) $y = \sin \ln 2x$; д) $x^3 + y^3 - 2axy = 0$.
8. a) $y = (x^2 - 2\sqrt{x} + 4)^4$; б) $y = \frac{x^3 + e^x}{\sqrt{4 - 9x^5}}$; в) $y = 4^{\cos x} \cdot \operatorname{arctg} 2x$;
 г) $y = \ln \cos 5x$; д) $x - y + a \sin y = 0$.
9. a) $y = \left(3x^5 - \frac{5}{x^3} - 2\right)^5$; б) $y = \frac{\cos 6x}{\sin 3x}$; в) $y = e^{x^3} \cdot \operatorname{tg} 7x$;
 г) $y = \arcsin \ln 2x$; д) $\ln y = \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y}\right)$.
10. a) $y = (x^4 + 2\sqrt{x} + 1)^2$; б) $y = \frac{\sqrt{3 - 5x^3}}{e^x - \operatorname{ctg} x}$; в) $y = 2^{\sin x} \cdot \arcsin 2x$;
 г) $y = \ln \cos 7x$; д) $x - y + e^y \operatorname{arctg} x = 0$.

Misol: $y = \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x}$ funksiyaning hosilasini hisoblang.

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ formuladan foydalanamiz. $u = \cos x$, $v = 1 + 2 \sin x$

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\cos x}{1 + 2 \sin x}\right)' = \frac{-\sin x(1 + 2 \sin x) - 2 \cos x \cos x}{(1 + 2 \sin x)^2} = \\ &= \frac{-\sin x - 2(\sin^2 x + \cos^2 x) - 2 \cos x \cos x}{(1 + 2 \sin x)^2} = -\frac{\sin x + 2}{(1 + 2 \sin x)^2} \\ y' &= -\frac{\sin x + 2}{(1 + 2 \sin x)^2} \end{aligned}$$

1-topshiriq. Quyidagi funksiylarning hosilalarini ta'rifga ko'ra hisoblang.

$y = \sqrt{1+x}$	$y = \sqrt[3]{x}$	$y = (x+1)^3$
$y = x^4$	$y = \operatorname{tg} x + x$	$y = x + \operatorname{ctg} x$
$y = \frac{1}{x+1}$	$y = 3x$	$y = x^2 + 5x$
$y = \sqrt{x}$	$y = \sin 2x$	$y = \sqrt{x+2}$
$y = \cos x$	$y = 2x^2 + 3x$	$y = \frac{1}{x^3}$
$y = 2 \sin x + 3 \cos x$	$y = 3x^3 + x$	
$y = \operatorname{tg} x$	$y = \cos 2x$	
	$y = (x+1)^2$	

2-topshiriq. Quyidagi funksiylarning hosilalarini va $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(-1)$ larni hisoblang:

$y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 4x$;	$y = x^2 \cdot \operatorname{ctg} x$
$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$;	$y = \frac{2x}{1-x^2}$
$y = 4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{x}$;	$y = \frac{\cos x}{x^2}$
$y = x - \sin x$	$y = \sqrt{x} \cdot \cos x$
$y = x^2 \cdot \operatorname{ctg} x$	

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$f(x) = \frac{x}{2x - 1}$$

$$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5$$

$$y = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x$$

$$y = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2$$

$$y = x + 2\sqrt{x}$$

$$y = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2$$

$$y = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}$$

$$y = 3x - 6\sqrt{x}$$

$$y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}$$

$$y = \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$$

13-Amaliy mashg'ulot. Mavzu: Hosilaning tatbiqlari. Lopital qoidasi.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^x) \operatorname{ctg} x = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\operatorname{tg} x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

1-misol. a)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^x)'}{(\operatorname{tg} x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = -\lim_{x \rightarrow 0} e^x \cdot \cos^2 x = -e^0 \cos^2 0 = -1 \cdot 1 = -1$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = (0^0) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\sin x)^{\operatorname{tg} x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \cdot \ln(\sin x)} = (0 \cdot \infty) =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg} x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(\sin x))'}{(\operatorname{ctg} x)'}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{-\frac{1}{\sin^2 x}}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \cos x} = e^0 = 1.$$

Misollar. Lopital qoidasidan foydalanib limitlarni hisoblang:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 3x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\ln x};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3};$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}};$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x};$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{1 - \sin \frac{\pi}{2} x};$$

$$9. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3};$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}};$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x;$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x;$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} x^x;$$

$$14. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5};$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin x}{1 - \cos x}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{1 - \cos x^3}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin x}{1 - \cos x}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x}{1 - \cos^2 x}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{1 - \cos x^3}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x}$$

14-Amaliy mashg'ulot. Mavzu: Funktsiyalarni tekshirishda hosilaning tadbiqu

Funksiyani monotonlikka va lokal ekstremumga 1-tartibli hosila yordamida tekshiring

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Yechim. Funksiyaning statsionar nuqtalarini topamiz:

$$y' = \frac{(x^2 + 1) \cdot x - (x^2 + 1) \cdot x'}{x^2} = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0;$$

$$\text{B } x^2 - 1 = 0 \text{ B } x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Ushbu funksiya $x = 0$ nuqtada aniqlanmagan. Demak:

X	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$		$(0; 1)$		$(1; +\infty)$
Y'	+		-	-	-		+
y		-2		-			

max min

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

funktsiasi $(-\infty; -1)$ $(1; +\infty)$ intervallarda o'sadi, $(-1; 0)$, $(0; 1)$ intervallarda kamayadi, $x_1 = -1$ nuqtada $y_{\max}(-1) = -2$ ga teng bo'lgan lokal maksimumga $x_2 = 1$ nuqtada $y_{\min}(1) = 2$ ga teng bo'lgan local minimumga ega ekan

Misollar. $y = f(x)$ funksiyaning to'la tekshiring:

$$1. y = \frac{4x}{4 + x^2}.$$

$$2. y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

$$3. y = \frac{(x+1)^2}{x^2 - 1}.$$

$$4. y = \frac{x^2}{x - 1}.$$

$$5. y = \frac{x^3}{x^2 + 1}.$$

$$6. y = \frac{4x^3 + 5}{x}.$$

$$7. y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}.$$

$$8. y = \frac{x^4}{x^3 - 1}.$$

$$9. y = \frac{4x^3}{x^3 - 1}.$$

$$10. y = \frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}.$$

$$11. y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

$$12. y = x e^{-x^2}.$$

$$13. y = e^{2x-x^2}.$$

$$14. y = x^2 - 2 \ln x.$$

$$15. y = \ln(x^2 - 4).$$

$$16. y = e^{\frac{1}{2-x}}.$$

$$17. y = \ln(x^2 + 1).$$

$$18. y = (2 + x^2) e^{-x^2}.$$

$$19. y = \ln(9 - x^2).$$

$$y = (x-1)e^{3x+1}$$

15-16-Amaliy mashg'ulot. Mavzu: Boshlang'ich funksiya, aniqmas integral.

1-misol. $\int_1^3 x^2 dx$ integralni hisoblang: $\int_1^3 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{1}{3}.$

2-misol. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \left. \frac{1}{2} \sin 2x \right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} (\sin 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \sin 2 \cdot 0) = \frac{1}{2} (\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) = \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2}$$

Misollar. Aniqmas integrallarni toping:

1. a) $\int \sqrt{\cos x} \sin x dx$; б) $\int \frac{4x-1}{x^2-4x+8} dx$; в) $\int \ln x dx$;

2. г) $\int \frac{x}{x^3+1} dx$; д) $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$.

3. а) $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x}$; б) $\int \frac{5x+8}{x^2+2x+5} dx$; в) $\int (2x+1) \sin 3x dx$;

4. г) $\int \frac{x+20}{x^3-8} dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

5. а) $\int \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$; б) $\int \frac{3x-2}{x^2+4x+8} dx$; в) $\int (x-1) e^{2x} dx$;

6. г) $\int \frac{3x+1}{x^3+x} dx$; д) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx$.

7. а) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$; б) $\int \frac{8x-3}{x^2+6x+10} dx$; в) $\int x \cos 2x dx$;

8. г) $\int \frac{2x+5}{x^3+2x} dx$; д) $\int \frac{\sin x}{1-\sin x} dx$.

$$\begin{array}{ll}
9. \text{ a) } \int e^{-x^2} x \, dx; & \text{ б) } \int \frac{7x+3}{x^2-4x+5} \, dx; \quad \text{ в) } \int \arctg 2x \, dx; \\
10. \text{ г) } \int \frac{3x-1}{x^3+3x} \, dx; & \text{ д) } \int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}. \\
11. \text{ а) } \int \frac{x^3}{2+x^4} \, dx; & \text{ б) } \int \frac{9x+10}{x^2-6x+10} \, dx; \quad \text{ в) } \int (5x+1) \ln x \, dx; \\
12. \text{ г) } \int \frac{8x+5}{x^3+x^2+2x+2} \, dx; & \text{ д) } \int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+3}. \\
13. \text{ а) } \int \sqrt{\ln x} \frac{dx}{x}; & \text{ б) } \int \frac{3x+10}{x^2-8x+10} \, dx; \quad \text{ в) } \int (8x-2) \sin 5x \, dx; \\
14. \text{ г) } \int \frac{7x-2}{x^3-3x^2+x-3} \, dx; & \text{ д) } \int \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} \, dx. \\
15. \text{ а) } \int \frac{x}{\sqrt{1-2x^2}} \, dx; & \text{ б) } \int \frac{3x+7}{x^2-8x+17} \, dx; \quad \text{ в) } \int (x-3)e^{-2x} \, dx; \\
16. \text{ г) } \int \frac{5x-11}{x^3+4x} \, dx; & \text{ д) } \int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3} \, dx. \\
17. \text{ а) } \int \frac{x^3}{2x^4+5} \, dx; & \text{ б) } \int \frac{5x-2}{x^2-2x+5} \, dx; \quad \text{ в) } \int \sqrt{x} \ln 3x \, dx; \\
18. \text{ г) } \int \frac{3x}{x^3+x^2+3x+3} \, dx; & \text{ д) } \int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} \, dx. \\
19. \text{ а) } \int \frac{dx}{x \ln x}; & \text{ б) } \int \frac{7x-3}{x^2+6x+13} \, dx; \quad \text{ в) } \int (2x+8)e^{-7x} \, dx; \\
20. \text{ г) } \int \frac{2x}{x^3-1} \, dx; & \text{ д) } \int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} \, dx.
\end{array}$$

17-18-Amaliy mashg'ulot. Mavzu: Aniq integral, xossalari. N'yuton-Leybnits formulasi.

Nyuton – Leybnits formulasi.

Agar $[a,b]$ oraliqda $f(x)$ ning biror boshlang'ich funksiyasi $F(x)$ bo'lsa, quyidagi Nyuton-

Leybnits formulasi o'rinalidir: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$

1-misol. 1) $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (1^2 - 0^2) = \frac{1}{2};$

2) $\int_2^3 x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_2^3 = \frac{1}{2} (3^2 - 2^2) = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2 \frac{1}{2}.$

2-misol.

$$\int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right) \Big|_{-1}^2 =$$

$$= \left[\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2^2 + 2 \right] - \left[\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 + (-1) \right] = 9$$

3-misol. $\int_0^4 \sqrt{x} dx = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{2}{3} (4^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}) = 5\frac{1}{3}$

4-misol. $\int_{-1}^1 e^x dx = e^x \Big|_{-1}^1 = e^1 - e^{-1} = e - \frac{1}{e} = \frac{e^2 - 1}{e}$

5-misol. $\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$

6-misol. $\int_0^1 \frac{dx}{x+2} = \ln(x+2) \Big|_0^1 = \ln(1+2) - \ln(0+2) = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2} = 0,4055$

8-misol. $\int_1^3 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_1^3 = \frac{1}{2} (e^{2 \cdot 3} - e^{2 \cdot 1}) = \frac{e^2}{2} (e - 1)$

9-misol. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

1-topshiriq. Aniq integrallarni hisoblang.

1. $\int_1^3 x^3 dx$

2. $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx$

3. $\int_1^4 \sqrt{x} dx$

4. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

5. $\int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2 + x^2}$

6. $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx$

7. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$

9. $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$

10. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$

11. $\int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx$

12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$

13. $\int_0^1 \ln(x+1) dx$

$$14. \int_1^3 x^3 dx$$

$$15. \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx$$

$$16. \int_1^4 \sqrt{x} dx$$

$$17. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

19-20- EHTIMOLLAR NAZARIYASINING BOSHLANG'ICH TUSHUNCHALARI.

Elementar hodisalar fazosi – ehtimolliklar nazariyasi uchun asosiy tushuncha bo'lib, unga ta'rif berilmaydi. Formal nuqtai nazardan bu ixtiyoriy to'plam hisoblanib, uning elementlari o'rganilayotgan tajribaning “bo'linmaydigan” va bir vaqtda ro'y bermaydigan natijalardan iborat bo'ladi.

Elementar hodisalar fazosi Ω harfi bilan belgilanib, uning elementlari (elementar hodisalar) $A, B, C, \dots$ lardan tashkil topgan to'plamni χ harf bilan belgilanadi. Faraz qilaylik χ to'plam chekli yig'indiga nisbatan (agar $A_1, A_2, \dots, A_n$ - hodisalar bo'lsa, u holda $\bigcup_{i=1}^n A_i$ - hodisa), kesishmaga nisbatan (agar $A_1, A_2, \dots, A_n$ - hodisalar bo'lsa, u holda $\bigcap_{i=1}^n A_i$ - hodisa) va to'ldiruvchiga (Ω ning A tegishli bo'lmagan elementlaridan tashkil topgan to'plam bo'lib, bu to'plam A^c orqali belgilanadi) nisbatan yopiq bo'lsin. Agar A va B lar hodisalar bo'lsa, $A \cap B = AB$ sifatida A va B hodisalar bir vaqtda yuz beradigan hodisani, $A \cup B$ sifatida A yoki B hodisalardan biri yuz beradigan hodisani A^c sifatida esa A hodisa yuz bermaydigan hodisani tushunamiz.²⁴

Ehtimollar nazariyasi “Tasodifiy tajribalar”, yani natijasini oldindan aytib bo'lmaydigan tajribalardagi qonuniyatlarni o'rganuvchi matematik fandır. Bunda shunday tajribalar qaraladi, ularni o'zgarimas (yani bir xil) shartlar kompleksida xech bo'lmaganda nazariy ravishda ixtiyoriy sonda takrorlash mumkin, deb hisoblanadi.

Bunday tajribalar har birining natijasi **tasodifiy hodisa** ro'y berishidan iboratdir. Biz kuzatadigan hodisalarni quyidagi uch turga ajratish mumkin: muqarrar, ro'y bermaydigan va tasodifiy hodisalar.

Muqarrar hodisa deb tayin shartlar to'plami S bajarilganda albatta ro'y beradigan hodisaga aytiladi.

Mumkin bo'lmagan hodisa deb shartlar to'plami S bajarilganda mutloqo ro'y bermaydigan hodisaga aytiladi.

Tasodifiy xodisa deb shartlar to'plami S bajarilganda ro'y berishi ham, ro'y bermasligi ham mumkin bo'lgan xodisaga aytiladi.

Masalan, tanga tashlaganda, u gerbli tomoni, yoki raqamli tomoni bilan tushishi mumkin. Shu sababli “tanga tashlaganda gerbli tomoni bilan tushdi” xodisasi tasodifiydir.

Masalan,

1) Tangani ikki marta tashlash (yoki ikkita tangani birdaniga tashlash)

tajribasi uchun $\Omega = \{GG, GR, RG, RR\}$.

Bu yerda GG – tangani ikki marta ham “gerb” tomoni bilan tushish

hodisasi, RG – birinchi marta “raqam” tomoni, ikkinchi marta esa “gerb” tomoni

bilan tushish hodisasi va qolgan GR, RR hodisalar shularga o'xshash hodisalar

bo'ladi. Bu holda $|\Omega| = 4$ va GR, RG hodisalar bir-biridan farq qiladi.

2) Tajriba o'yin kubigini 2 marta tashlashdan iborat bo'lsin. Bu holda elementar hodisalar ushbu ko'rinishga ega: $A_{i,j} = (i, j)$ $i, j = 1, 2, \dots, 6$.

Bunda $A_{i,j}$ hodisa kubikni birinchi tashlashda i raqamli yoq, ikkinchi tashlashda j raqamli yoq tushganligini bildiradi.

Bu tajribada elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{A_{i,j}, i, j = 1, 2, \dots, 6\}$. Elementar hodisalar soni $|\Omega| = 36$.

Agar tajriba natijasida A ga kirgan ω elementar hodisalarning birortasi ro'y bersa, A hodisa ro'y bergan deyiladi.

Agar shu elementar hodisalardan birortasi ham ro'y bermasa, A hodisa ro'y bermaydi, unda A xodisaga teskari xodisa ro'y bergan deyiladi.

($\bar{A}$ orqali belgilanadi)

A va $\bar{A}$ o'zaro qarama-qarshi hodisalar deyiladi.

²⁴ Mathematical Literacy for Humanists, Herbert Gintis, 57-64 226 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

Muqarrar hodisani Ω bilan belgilaymiz. Mumkin bo'lmagan xodisani $\emptyset$ bilan belgilaymiz.

2. Agar A hodisani tashkil etgan elementar hodisalar B hodisaga ham tegishli bo'lsa, A hodisa B hodisani ergashtiradi deyiladi va $A \subset B$ kabi belgilanadi.

42-rasm

5. Agar $A \subset B$ va $B \subset A$, ya'ni A hodisa B ni ergashtirsa, va aksincha, B hodisa A ni ergashtirsa, A va B hodisalar *teng* deyiladi va $A = B$ kabi belgilanadi.

6. A va B tasodifiy hodisalarning *yig'indisi* deb, shunday C hodisaga aytiladiki, bu hodisa A va B hodisalarning kamida bittasi ro'y berganda ro'y beradi va $C = A \cup B$ (yoki $C = A + B$) kabi belgilanadi.

7. A va B tasodifiy hodisalarning *ko'paytmasi* deb, shunday C hodisaga aytiladiki, bu hodisa A va B hodisalar bir paytda ro'y berganda ro'y beradi va $C = A \cap B$ (*ëku* $C = A \cdot B$) kabi belgilanadi (3-rasm).

8. A va B tasodifiy hodisalarning *ayirmasi* deb, shunday C hodisaga aytiladiki, u A hodisa ro'y berib, B hodisa ro'y bermaganda ro'y beradi va $C = A \setminus B$ (*ëku* $C = A - B$) kabi belgilanadi.

2. Agar $A \cap B = \emptyset$ bo'lsa, A va B hodisalar *birgalikda bo'lmagan hodisalar* deyiladi.

Agar $A_i A_j = \emptyset$ ($i \neq j$) *ëa* $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$ bo'lsa, u holda $A_1, A_2, \dots, A_n$ lar hodisalar to'la guruxini tashkil etadi deyiladi.

Murakkab hodisaning ehtimolliklarini oddiy hodisalarning ehtimolliklarini hisoblash orqali topiladi.

Birgalikda bo'lmagan hodisalarning ehtimolliklarini qo'shish qoidasi. Ikki birgalikda bo'lmagan hodisadan istalgan birining ro'y berish ehtimolligi bu hodisalar ehtimolliklarining yig'indisiga teng:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Natija: Har ikkitasi birgalikda bo'lmagan bir nechta hodisalardan istalgan birining ro'y berish ehtimolligi bu hodisalar ehtimolliklarining yig'indisiga teng.

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

Birgalikda bo'lgan hodisalar ehtimolliklarini qo'shish qoidasi. Ikki birgalikda bo'lgan hodisadan kamida bittasining (hech bo'lmaganda birining) ro'y berish ehtimolligi bu hodisalar ehtimolliklari yig'indisidan ularning birgalikda ro'y berish ehtimolliklarini ayirilganiga teng:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (1)$$

Bu qoida istalgan chekli sondagi birgalikda bo'lgan hodisalar uchun umumlashtirilishi mumkin. Masalan, uchta birgalikda bo'lgan hodisa uchun:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

Natija. Qarama-qarshi hodisalarning ehtimolliklari yig'indisi birga teng:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Bundan

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

1-masala: Idishda 40 ta shar bor, ulardan 15tasi oq rangda, 5 tasi yashil rangda, 20 tasi sariq rangda. Rangli shar chiqish ehtimollikini toping.

Yechilishi: Rangli shar chiqishi bu yashil shar yoki sariq shar chiqishini bildiradi.

$$A = \{ \text{yashil shar chiqish hodisasi} \}$$

$$B = \{ \text{sariq shar chiqish hodisasi} \}$$

$$\text{Ularning mos ravishda ehtimolliklari } P(A) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8} \qquad P(B) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

A va B hodisalar birgalikda emas (bir rangli shar chiqishi boshqa rangli shar chiqishini yo'qqa chiqaradi).

Izlanayotgan ehtimollik quyidagiga teng

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

Takroriy ehtimollik

Faraz qilaylik Ω – hodisalar fazosi bo'lib, undagi hodisalar soni n ta, A hodisa esa bu elementlardan m tasini o'z ichiga olsin. U holda, A hodisaning ehtimolligi m/n ga teng. Bu ehtimollikni boshqacha ko'rinishda ham tariflash mumkin.

Faraz qilaylik, tajriba n ta alohida bir- biriga o'xshash natijalarga ega bo'lsin. Shuningdek A - natijalarning qism to'plami bo'lsin va A ning elementlar sonini $n(A)$ harf bilan belgilanadi. U holda, A hodisaning ehtimolligi $P(A)=n(A)/n$ ga teng bo'ladi.²⁵

Endi tajribani bir necha marta takrorlaylik va har bitta natija takrorlanmaydigan bo'lsin. Olaylik, A – har bir sinovda amalga oshadigan yoki oshmaydigan hodisa bo'lsin. $n_t(A)$ orqali t – tajribagacha A hodisa amalga oshgan natijalar soni bo'lsin. U holda, A hodisaning nisbiy chastotasi deb, $n_t(A)/t$ songa, A hodisaning ehtimolligi $\lim_{t \rightarrow \infty} n_t(A)/t$ songa aytiladi.

Agar A va B hodisalar uchun $P(A)$ ning qiymati B hodisaning amalga oshish yoki oshmaslikka bog'liq bo'lmasa va $P(B)$ ning qiymati A hodisaning amalga oshish yoki oshmaslikka bog'liq bo'lmasa, u holda A va B hodisalar bog'liqmas deyiladi.

Agar A va B bog'liqmas hodisalar bo'lsa, u holda $P(AB)=P(A)P(B)$ tenglik o'rinli.

Ehtimolning klassik ta'rifi. Kombinatorika elementlari

Ehtimolning klassik va geometrik ta'riflari. Kombinatorika elementlari.

Ehtimollikni to'g'ridan-to'g'ri hisoblashga doir masalalar. Nisbiy chastota.

Ehtimol termini hodisaning amalga oshish, ro'y berish imkoniyatining obyektiv o'lchovini ifodalaydi.

Biror tajriba natijasida sondagi $e_1, e_2, \dots, e_n$ elementar hodisalardan birortasi ro'y berishi mumkin bo'lsin, ya'ni $U = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bo'lsin. Bu elementar hodisalarga quyidagi shartlarni qo'yamiz:

1) hodisalar juft-jufti bilan birgalikda emas, boshqacha qilib aytganda, istalgan ikkita e_i va e_j ($i \neq j$) hodisa uchun ulardan biri ro'y bersa, ikkinchisi albatta ro'y bermaydi.

2) $e_1, e_2, \dots, e_n$ hodisalar yagona mumkin bo'lgan hodisalar, ya'ni ularning birortasi albatta ro'y berishi lozim.

3) $e_1, e_2, \dots, e_n$ hodisalar teng imkoniyatli. Bu shart $e_1, e_2, \dots, e_n$ hodisalardan birortasining boshqalaridan ko'proq ro'y berishiga yordam beradigan hech qanday obyektiv sabablar yo'qligini anglatadi.

Aytaylik, A hodisa berilgan bo'lib, u e_i ($i = \overline{1, n}$) elementar hodisalardan ba'zilar ro'y bergandagina ro'y bersin.

Bunday holda biz e_i ($i = \overline{1, n}$) elementar hodisalardan ro'y berishi A hodisaning ro'y berishiga ham olib keladiganlarini A hodisa qulaylik tug'diradigan hodisalar deb ataymiz.

Aytaylik, qaralayotgan n ta $e_1, e_2, \dots, e_n$ elementar hodisadan m tasi A hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'dirsin, ya'ni $A = (e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_m})$ bo'lsin.

1. Ehtimolning klassik ta'rifi. A hodisaning ehtimoli deb A hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi hodisalar sonining teng imkoniyatli barcha elementar hodisalar soniga nisbatiga aytiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{A \text{ ga kirgan elementar hodisalar soni}}{\text{barcha elementar hodisalar soni}}$$

²⁵ Mathematical Literacy for Humanists, Herbert Gintis, 57-64226 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

Ehtimolning xossalari.

a) muqarrar hodisaning ehtimoli birga teng:

$$P(U) = 1.$$

b) mumkin bo'lmagan hodisaning ehtimoli nolga teng:

$$P(V) = 0,$$

c) istalgan A hodisaning ehtimoli quyidagi qo'sh tengsizlikni qanoatlantiradi:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Klassik ta'rifdan foydalanib masalalar yechishda kombinatorika elementlari muhim rol o'ynaydi, shuni e'tiborga olib kombinatorikaga doir ba'zi tushunchalar bilan tanishib o'taylik.

Har qanday narsalardan tuzilgan va bir – biridan yo shu narsalarning tartibi bilan, yoki shi narsalarning o'zlar bilan farq qiluvchi turli gruppalar birlashmalar deb ataladi.

Birlashmalar uch xil bo'lishi mumkin: o'rinashtirish, o'rin almashtirish va gruppalash. Ularning har birini ko'rib chiqaylik.

1) n elementini m tadan (bunda $m \leq n$) o'rinashtirish deb shunday birlashmalarga aytiladiki, ularning har birida berilgan n ta elementdan olingan m ta element bo'lib, ular bir – biridan yo elementlari bilan, yoki elementlarning tartibi bilan farq qiladi. n ta elementdan m tadan barcha o'rinashtirishlar soni A_n^m kabi belgilanib, u

$$A_n^m = n(n-1) \dots [n-(m-1)]$$

formula bilan hisoblanadi.

2) Agar o'rinashtirishlar n ta elementdan n tadan olingan bo'lsa (ya'ni faqat elementlarining tartibi bilan farq qilsa), bunday o'rinashtirishlar o'rin almashtirishlar deb ataladi, u holda yuqoridagi formulaga ko'ra n ta elementdan barcha o'rin almashtirishlar soni quyidagicha bo'ladi:

$$P_n = n(n-1) \dots 1 = n!$$

3) Agar n ta elementdan m tadan tuzish mumkin bo'lgan barcha o'rinashtirishlardan bir – biridan eng kamida bir element bilan farq qiladiganlarini tanlab olsak, u holda gruppalar (kombinatsiyalar) deb atalgan birlashmalarni hosil qilamiz.

n ta elementdan m tadan barcha gruppalashlar (kombinatsiyalar) soni

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1) \dots [n-(m-1)]}{m!}$$

formula yordamida topiladi.

Yuqoridagi 3 ta formula uchun $A_n^m = C_n^m \cdot P_n$ munosabat o'rinalidir.

Shartli ehtimollik. Ehtimollarini qo'shish teoremlari

Shartli ehtimollar.

Bog'liq va erkli hodisalar ehtimollari qo'shish teoremlari.

Ehtimolning geometrik ta'rifi. Biror Q soha berilgan bo'lib, bu soha Q_1 sohani o'z ichiga olsin, Q sohaga tavakkaliga tashlangan nuqtaning Q_1 sohaga tushish ehtimolini topish talab qilinadi. B yerda barcha elementlar hodisalar to'plami Q ning barcha nuqtalaridan iborat. Binobarin, bu holda klassik ta'rifdan foydalana olmaymiz. Tanlangan nuqta Q ga albatta tushsin va uning biror Q_1 qismiga tushish ehtimoli shu Q_1 qismining o'lchoviga (uzunligiga, yuziga, hajmiga) proporsional bo'lib, Q_1 ning formasiga va Q_1 qism Q ning qayerda joylashganligiga bog'liq bo'lmasin. Bu shartlarda qaralayotgan hodisaning ehtimoli

$$P = \frac{\text{mes} Q_1}{\text{mes} Q}$$

formula yordamida aniqlanadi. Bu formula yordamida aniqlangan p funksiya ehtimolning barcha xossalari qanoatlantirishini ko'rish qiyin emas.

60-mavzu. Ehtimollari ko'paytirish teoremlari: Bog'liq va erkli hodisalar ehtimollari ko'paytmasi haqidagi teorema. Birgalikda bo'lmagan hodisalar ehtimollari uchun qo'shish teoremasi.

Ehtimolning statistik ta'rifi. Ehtimollar nazariyasining ko'pgina tatbiqlarida ehtimolning statik ta'rifi deb ataluvchi ta'rifdan foydalaniladi. Har birida biror hodisaning ro'y berishi yoki ro'y bermasligi kuzatiladigan tajribalarni sharoitni o'zgartirmagan holda cheksiz ko'p marta tajrirlash mumkin bo'lsin deb faraz qilaylik. Masalan, o'yin soqqasini yoki tangani tahlash, nishonga o'q uzish va shunga o'xshash tajribalarni cheksiz ko'p marta takrorlash mumkin.

Aytaylik, tajribalar soni n yetatlicha katta bo'lganda bizni qiziqtirayotgan A hodisa m marta ro'y bergan bo'lsin.

$W(A) = \frac{m}{n}$ nisbat A hodisaning nisbiy chastotasi deb ataladi.

Ko'p kuzatishlar shuni ko'rsatadiki, agar bir xil shart-sharoitda tajribalar o'tkazilib, ularning har birida sinovlar soni yetarlicha katta bo'lsa, u holda nisbiy chastota turg'unlik xossasiga ega bo'ladi.

Фойдаланилган асосий дарсликлар ва ўқув қўлланмалар рўйхати:
Асосий адабиётлар

1. Sh. Mirziyoev. Erkin va farovon, demokratik O'zbekiston davlatini birgalikda barpo etamiz. Toshkent - "O'zbekiston" – 2016. 56 bet.
2. Sh. Mirziyoev. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. Буюк келажагимизни мард ва олижаноб халқимиз билан бирга қурамиз. Toshkent - "O'zbekiston" – 2016. 488 bet.
3. Sh. Mirziyoev. Qonun ustuvorligi va inson manfaatlarini ta'minlash – yurt taraqqiyoti va xalq farovonligi garovi. Toshkent - "O'zbekiston" – 2016. 480 bet.
4. Sh. Mirziyoev. Tanqidiy tahlil, qat'iy tartib-intizom va shaxsiy javobgarlik – har bir rahbar faoliyatining kundalik qoidasi bo'lishi kerak. Toshkent - "O'zbekiston" – 2017. 104 bet.
5. 2017-2021 yillarda O'zbekiston Respublikasini rivojlantirishning besh ustuvor yo'nalishi bo'yicha Xarakatlar strategiyasi. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi PF-4947 sonli Farmoni.
6. Xamedova N.A, Ibragimova Z, Tasetov T. Matematika. Darslik. T.: Turon-iqbol, 2007. 363b.(5-7 bet)
7. Abdullayeva B.S., Sadikova A.V., Muxitdinova M.N., Toshpo'latova M.I., Raximova F. Matematika. TDPU. (Boshlang'ich ta'lim va sport-tarbiyaviy ish bakalavriyat ta'lim yo'nalishi talabalari uchun darslik) Toshkent-2012, 284 bet (9-bet)
3. David Surovski. Advanced High-School Mathematics. 2011. 425s.
8. Yunusmetov M, Jurayeva M. Geometriya - 1. 1994.
9. Nazarov R.N, Toshpo'latov B.T, Dusumbetov A.F, "Algebra va sonlar nazariyasi". T.: O'qituvchi. I qism 1993., II qism 1995.
1. Жўраев Т.Ж. ва бошқалар. Олий математика асослари.1,2-қисм. Тошкент, 1995й.
2. N.M.Jabborov, E.O.Aliqulov, Q.S.Axmedova "Oliy matematika"»Қарши» 2010 й.
3. Xudoyberganov G.,Varisov A.K.,Mansurov X.T.,Shoimqulov B.A. Matematik analizdan ma,ruzalar. 1,2 q.«Ворис» 2010 у.
4. Минорский В.П. Олий математикадан масалалар тўплами. 1988 й.
5. Соатов Ё.У. Олий математика, Тошкент, 1993.

Қўшимча адабиётлар

1. B.A.Shoimqulov, T.T.Tuychiyev,D.X.Djumabaev Matematik analizdan mustaqil ishlar. «O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati» 2008
2. Абдушқуров А.А. Эхтимоллар назарияси ва математик статистика. ЎЗМУ 2010й. 169 б.
3. И.И. Баврин, В.Л.Матросов Общий курс высшей математики М. «Просвещение» 1995
4. В.Г.Скатецкий, Д.в.Свиридов, В.и.Яшкин Математические методы в химии «ТетраСистемс» 2006
5. А.Садуллаев, Г. Худойбергенов, Х.Мансуров, А.Ворисов, Р.Ғуломов «Математик анализдан мисол ва масалалар тўплами» Т. «Ўзбекистон» 1992
6. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть I, II. Учебное пособие. М.: «Высшая школа», 2007.
- 7.Claudio Canuto & Anita Tabacco. Mathematical Analysis II Second Edition. Springer International Publishing Switzerland 2015. 563 p.

Интернет ва Ziyonet сайтлари

1. <http://ziyonet.uz>
2. <http://txt.uz>
3. <http://www.exponenta.ru/soft/Mathemat./Mathemat.asp>.
4. <http://www.albest.ru/catalog/a5/a101275.html>
5. <http://student.km.ru/>. <http://mathc.chat.ru>.
6. <http://www.i.math.kiev.ua>.
7. <http://techlibrary.ru>