

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА
МАХСУСТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
ЧИРЧИҚ ДАВЛАТ ПЕДАГОГИКА ИНСТИТУТИ**

**АНИҚ ФАНЛАР ФАКУЛЬТЕТИ
МАТЕМАТИКА КАФЕДРАСИ**

МАТЕМАТИКА

Фанидан

Маърузалар матни

ЧИРЧИҚ

Мавзу: Кириш. Тўпламлар ва улар устида амаллар

Режа:

1. Тўплам тушунчаси. Тўпламнинг элементи.
2. Бўш тўплам. Чекли ва чек сиз тўпламларга мисоллар.
3. Тўпламларнинг берилиш усуллари.

Таянч ибора ва тушунчалар:

Тўплам тушунчаси, тўпламнинг элементи, бўш тўплам, тўпламнинг берилиш усуллари, тўплам ости, универсал тўплам.

Тўплам деганда нарсалар, буюмлар, объектларни бирор хоссасига кўра биргаликда (битта бутун деб) қарашга тушунилади.

Масалан, ҳамма натурал сонларни биргаликда қарасак, натурал сонлар тўплами ҳосил бўлади. Бир талабалар уйида яшовчи талабларни биргаликда қараш билан шу талабалар уйидаги талабалар тўпламини ҳосил қиламиз. Тўғри чизикда ётувчи ҳамма нуқталарни битта бутун деб қараш шу тўғри чизикдаги нуқталар тўпламини, мактабдаги ўқувчиларни биргаликда қараш ўқувчилар тўпламини беради ва ҳ.к.

1-таъриф: Тўпламни ташкил этувчи нарсалар, буюмлар, объектлар – бу тўпламнинг элементлари деб аталади. Масалан, юқоридаги мисоллардаги ўқувчилар, талабалар, натурал сонлар мос тўпламларининг элементлари ҳисобланади. Тўпламлар одатда, латин ёки грек алфавитининг катта ҳарфлари билан, уларнинг элементлари эса алфавитнинг кичик ҳарфлари билан белгиланади. A тўплам $a, b, s, d, \dots, \alpha, \beta$ элементларидан тузилганлиги $A = \{a, b, s, d, \dots, \alpha, \beta\}$ кўринишда ёзилади.

2-таъриф: Битта ҳам элементга эга бўлмаган тўплам бўш тўплам деб аталади ва $\emptyset$ билан белгиланади.

a элемент A тўпламнинг элементи эканлиги $a \in A$ кўринишда белгиланади ва « a элемент A тўпламнинг элементи», « a элемент A тўпламга тегишли», « a элемент A тўпламда мавжуд» ёки « a элемент A тўпламга киради» деб айтилади.

a элемент A тўпламнинг элементи эмаслиги $a \notin A$ белги билан кўрсатилади. Масалан, $A = \{a, b, s\}$ тўплам учун $a \in A$, $b, s \in A$ лекин $l \notin A$.

Тўпламни ташкил этувчи элементлар сони чекли ёки чексиз бўлиши мумкин. Биринчи ҳолда чекли тўпламга, иккинчи ҳолда эса чексиз тўпламга эга бўламиз. Масалан: $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{a, b, s\}$ тўпламлар чекли бўлиб, улар мос равишда битта, иккита ва учта элементлардан тузилган. Қуйидаги $A = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, $B = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$ тўпламлар чексиз тўплам.

Изоҳ. A тўпламда фақат ҳар бир a элементи ўз-ўзига тенг, лекин ҳар қандай иккита бошқа-бошқа a ва b элементни тенгмас деб ҳисоблаймиз, бундан A тўпламнинг ҳар бир элементи бу тўпламда бир мартагина олинганлиги (бир мартагина учраганлиги) маълум бўлади. a элементнинг ўз-ўзига тенглиги

$a = a$ кўринишда, a ва b элементларининг ҳар хиллиги $a \neq b$ кўринишда белгиланади.

Агар A тўплагининг a элементи B тўплагининг b элементига тенг, яъни $a = b$ десак, бундан битта элемент иккала тўпланда ҳар хил ҳарфлар билан белгиланганлигини тушунамиз.

3-ta'rif: A тўплагининг ҳар бир элементи B тўпланда ҳам мавжуд бўлса, / ва B тўплагини тенг (бир хил) деб атаб буни $A = B$ ёки $B = A$ кўринишда белгилаймиз.

Таърифдан маълумки икки тўплагининг тенглиги уларнинг аслида битта тўплагини элементлари эканлигини билдиради. Шунга ўхшаш бир қанча тўплагининг тенглиги ҳақида гапириш мумкин.

Тўплагинлар икки хил усулда берилади:

а) агар тўплагинлар чекли тўплагин бўлиб, элементлар сони кўп бўлмаса, тўплагин элементларини бевосита санаб орали берилади;

б) тўплагин элементларини характеристик хоссалари орали ҳам берилади. Масалан: 12 сонидан кичик/ натурал сонлар тўплагини. $M = \{x \mid x \in N, x < 12\}$ Бу эса тўплагиндагича ўқилади « M тўплагини шундай x элементлардан ташкил топган бўлиб, у натурал сонлар тўплагинидаги 12 сонидан кичик сонлардан ташкил топган».

4-ta'rif: B тўплагининг ҳар бир элементи A тўпланда ҳам мавжуд бўлса B ни A тўплагининг тўплагин ости, (қисми, қисм тўплагини) деймиз, буни қуйидагича белгилаймиз:

$$B \subset A \text{ yoki } A \supset B$$

Изоҳ: Бу таърифдан кўринадикки, B тўплагининг ҳамма элементлари A да мавжуд бўлган ҳолда, A да B га кирмаган бошқа элементлар бўлмаса, $A = B$, $B = A$ тенгликка келамиз.

Шунинг билан бирга 4-таърифдан бўш тўплагин ва ҳар бир тўплагин ўзининг тўплагин ости (қисм-тўплагини) эканлиги кўрилади.

Масалан, $A = \{a, b, s, d, e, f, g\}$ тўплагин учун $B = \{a\}$, $C = \{b, d, f\}$, $D = \{a, g\}$ тўплагинларнинг ҳар қайсиси тўплагин ости (қисм тўплагини)дир.

Агар A тўплагининг ҳар бир элементига B тўплагининг ягона бир элементи мос келса, A ва B тўплагинлар орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилади дейилади. Агар A ва B to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan bo'lsa, ular ekvivalent deyiladi va $A \sim B$ ko'rinishda belgilanadi. Масалан, натурал сонлар тўплагини N , барча жуфт сонлар тўплагини M билан эквивалент.

Ҳақиқатан ҳам натурал сонлар тўплагини N билан барча жуфт сонлар тўплагини M орасида ўзаро бир қийматли мосликни ўрнатиш мумкин, чунки ҳар бир натурал сон $n \in N$ га $2n \in N$ жуфт сони мос келади ва аксинча.

1. Иккита чекли тўплагин орасида эквивалентликни ўрнатишни иккита йўли бор:

2. Тўплагинлар элементлари орасида бевосита ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш орали;

3. Тўпламлар элементларини санаш ва уларни ҳар биридаги элементлар сонини таққослаш йўли билан.

Масалан, Агар $A = \{1, 2, 3\}$ ва $B = \{stol, stul, parta\}$ бўлса, у ҳолда бу тўпламлар чекли эквивалент бўлиб, ҳар бир тўплам учта элементга эга. Агар n элементдан ташкил топган чекли тўпламнинг элементларини бирор тарзда $1, 2, 3, \dots, p$ натурал сонлар билан номерлаш мумкин бўлса, у тартибланган дейилади.

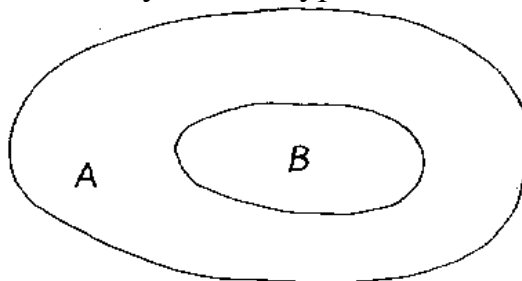
Масалан, гуруҳдаги талабалар тўплами тартибланган, чунки уларни отасининг исмларини гуруҳ журналида натурал сонлар ёрдамида тартиблаш мумкин.

5-Таъриф. B тўпламнинг барча элементлари A тўпламда мавжуд бўлиб, шу билан бирга A да B га тегишли бўлмаган элементлар ҳам мавжуд бўлса B тўплам A тўпламнинг хос қисм тўплами дейилади.

6-Таъриф. A тўпламнинг ўзи ва $\emptyset$ тўплам шу A тўпламнинг хосмас қисм тўплами дейилади.

7-Таъриф. Ҳар қандай тўпламнинг хос қисм тўплами деб қаралмаган тўплам универсал тўплам дейилади ва у U билан белгиланади. U универсал тўпламнинг барча қисм тўпламлари орасида иккита хосмас қисм тўплам мавжуд бўлиб, улардан бири U нинг ўзи, иккинчиси эса бўш тўплам, қолганлари эса хос қисм тўпламлар бўлади.

Тўпламларни геометрик нуқтаи назардан яққол кўз олдида келтириш учун, улар доирача кўринишида белгиланади. Масалан: B тўплам A тўпламнинг хусусий тўплам ости эканлиги қуйидаги кўринишда тасвирланади. (1-чизма)



1-chizma

Такрорлаш учун саволлар

1. Тўплам деб нимага айтилади?
2. Чекли тўплам деб нимага айтилади?
3. Тўпламлар бирлашмаси деб нимага айтилади?
4. Тўплам ости нима?

Мавзу: Детерминантлар ва уларнинг хоссалари

Режа

- 1 2,3-тартибли детерминантлар.
2. Детерминантларнинг хоссалари.
3. Минор ва алгебраик тўлдирувчилар.
4. n - тартибли детерминантлар.

Таянч ибора ва тушунчалар

Алгебра, алгоритм, 2,3 ва n -тартибли детерминантлар, бош диагонал, ёрдамчи диагонал, минор, алгебраик тўлдирувчи, учбурчаклар қоидаси, диагонал қоидаси, детерминантларнинг хоссалари, детерминантни бирор сатри (устуни) элементлари бўйича ёйиш.

2, 3 - тартибли детерминантлар. Детерминантларни ҳисоблашга келтириладиган ушбу масалани қарайлик. Масала. A ва B маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун 2 турдаги хом ашёдан фойдаланилади. Битта A маҳсулотни ишлаб чиқариш учун 5 бирлик 1-тур ва 4 бирлик 2-тур хом ашё сарфланади, битта B маҳсулотни ишлаб чиқариш учун эса, 3 бирлик 1-тур ва 5 бирлик 2-тур хом ашё ишлатилади. 1-тур хом ашё 62 бирлик, 2-тур хом ашё 73 бирликда берилган бўлса, энг катта фойда олинадиган ишлаб чиқаришни режалаштириш учун хом ашё сарфи моделини тузинг.

Бу масаланинг математик моделини тузиш мақсадида x_1 билан ишлаб чиқарилиши керак бўлган A маҳсулот миқдорини, x_2 билан эса ишлаб чиқарилиши керак бўлган B маҳсулот миқдорини белгилайлик. Бу ҳолда $5x_1$ A маҳсулотни ишлаб чиқариш учун сарфланган 1-тур хом ашё миқдорини, $3x_2$ эса B маҳсулотни ишлаб чиқариш учун сарфланган 1-тур хом ашё миқдорини ифодалайди. $5x_1 + 3x_2$ A ва B маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун сарфланадиган 1-тур хом ашё жами сарфи миқдорини ифодалайди, бу хом ашё чегараланган бўлиб, 62 бирликда мавжуд, демак $5x_1 + 3x_2 = 62$ тенглама келиб чиқади. Худди шундай қилиб, 2-тур хом ашё сарфи учун $4x_1 + 5x_2 = 73$ тенгламани ҳосил қилиш мумкин. Шундай қилиб,

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 62, \\ 4x_1 + 5x_2 = 73 \end{cases}$$

икки номаълумли иккита чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қилдик. Бу тенгламалар системаси берилган A ва B маҳсулотларни ишлаб чиқаришда, хом ашё сарфининг математик моделини ифодалайди.

Биз юқорида энг оддий иқтисодий масалани қарадик, ҳамда унинг модели икки номаълумли иккита чизиқли тенгламалар системасига келтирилишини кўрсатдик. Фан ва техниканинг жуда кўп масалаларининг математик моделлари чизиқли тенгламалар системаси орқали ифодаланади.

Бу ҳолатлар чизикли тенгламалар назариясини умумий ҳолда қарашимиз лозимлигини кўрсатади.

Икки номаълумли иккита чизикли тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ бўлса, (1) тенгламалар системаси ягона

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (2)$$

ечимга эга бўлади. (2) формуладаги суръат ва маҳраждаги ифодалар 2-тартибли детерминант (аникловчи)лар дейилади. 2-тартибли детерминантни

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{билан белгиланади. } a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \text{ ларга}$$

детерминантнинг элементлари дейилади. Шундай қилиб, (2) формулаларни детерминантлар ёрдамида

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad (3)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

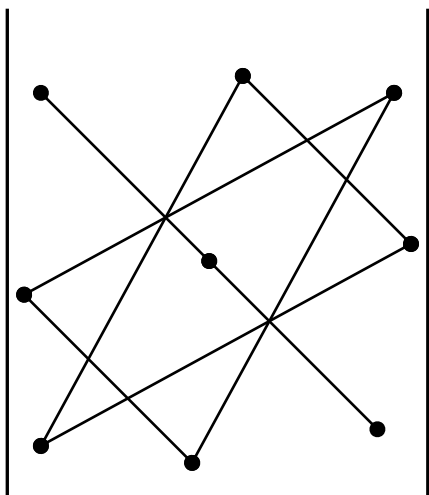
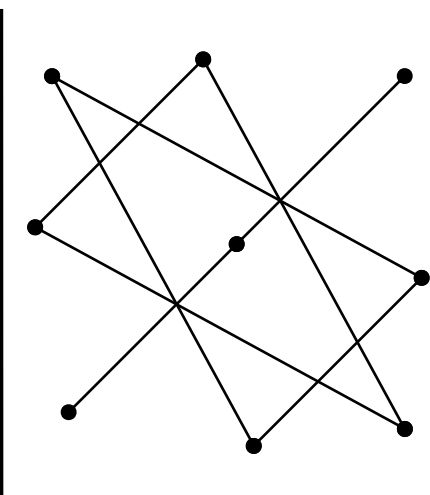
$$\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad (4)$$

ифодага 3- тартибли детерминант дейилади ва $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ билан

белгиланади. a_{11}, a_{22}, a_{33} элементлар бош диагонални, a_{13}, a_{22}, a_{31} ёрдмчи диагонални ифодалайди. (4) тенгликда 2- тартибли детерминантларни катталиклари билан алмаштирсак

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (5)$$

бўлади. (5) формулани эсда сақлаш учун учбурчак қондасидан фойдаланиш мумкин. Элементларни нуқталар билан белгиласак, ушбу схема ҳосил бўлади :

	
+	-

(+) ишора билан,

(-) ишора билан олинади.

3. Минор ва алгебраик тўлдирувчилар

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ детерминантда i - сатрни ва j - устунни ўчиришдан 2-

тартибли детерминант ҳосил бўлади, бунга a_{ij} элементга мос минор дейилади ва M_{ij} билан белгиланади. Масалан,

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ва бошқалар.

a_{ij} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси деб унга мос минорнинг мусбат ёки манфий ишора билан олинган катталигига айтилади, бунда $i + j$ жуфт бўлса, мусбат ишора билан, $i + j$ тоқ бўлса манфий ишора олинади. a_{ij} элементнинг алгебраик тўлдирувчисини A_{ij} билан белгиланади. Демак,

$$A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

бўлади ва бошқалар.

4. Детерминантларнинг хоссалари. Детерминантлар қуйидаги хоссаларга эга:

1. Детерминантнинг барча сатридаги элементларини мос устунэлементлари билан алмаштирилса унинг катталиги ўзгармайди, яъни

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

1-мисол. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 6 - 0 - 0 + 4 - 0 = 22$

бўлиб, бу детерминантда барча сатрларини мос устунлар билан алмаштирсак,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 6 + 0 - 0 + 4 - 0 = 22$$

бўлади. Бундан кўринадики, иккала ҳолда ҳам бир хил катталик ҳосил бўлди, бу биринчи хоссанинг тўғрилигини кўрсатади.

2. Иккита сатр (устун)ни ўзаро алмаштирилса детерминант катталигининг ишораси тескарисига ўзгаради; ҳақиқатан ҳам 1- мисолдаги детерминантда 1-сатрини 3-сатри билан ўзаро алмаштирсак,

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 4 - 24 - 0 + 6 = -28 + 6 = -22$$

бўлиб, бу 2-хоссанинг ўринли эканлигини кўрсатади.

3. Иккита бир хил сатр (устун)ли детерминант катталиги нўлга тенг; иккита сатри бир хил бўлган детерминантни ҳисобласак,

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -36 + 0 + 0 + 36 - 0 - 0 = 0$$

бўлади, бу эса 3-хоссанинг тўғрилигини кўрсатади.

4. Детерминантнинг бирор сатр (устун) нинг ҳамма элементларини $m \neq 0$ сонга кўпайтирилса, унинг катталиги шу m сонга кўпаяди.

Ҳақиқатан ҳам, 1-хоссада келтирилган детерминантнинг 2-сатри элементларини 2 га кўпайтирсак,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -4 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 48 - 12 + 0 - 0 + 8 - 0 = 44$$

бўлиб, бу хоссанинг ҳам тўғрилиги кўринади.

5. Детерминантнинг иккита сатри (устуни) элементлари ўзаро пропорционал (мутаносиб) бўлса, унинг катталиги нўлга тенг, мисол учун,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

детерминант берилган бўлсин. Бу детерминантнинг 1 ва 2-сатри элементлари ўзаро пропорционал, уни ҳисобласак

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 0 - 12 - 0 + 6 + 12 = 0$$

бўлиб, бу эса 5-хоссанинг тўғрилигини кўрсатади.

6. Детерминантнинг катталиги, бирор сатри (устуни) элементларини унга мос алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтириб қўшилганига тенг. 1-хоссада келтирилган мисолни қараймиз:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

бу детерминантни 3-сатр элементлари бўйича ёйиб ёзсак,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 0 + 28 = 22$$

келиб чиқади, бу эса 6-хоссанинг ҳам ўринли эканлигини кўрсатади.

7. Детерминант бирор сатри (устуни)нинг ҳар бир элементи иккита қўшилувчидан иборат бўлса, у ҳолда бу детерминант иккита детерминант йиғиндисига тенг бўлади, яъни

$$\begin{pmatrix} (a_{11} + b_1) a_{12} a_{13} \\ (a_{21} + b_2) a_{22} a_{23} \\ (a_{31} + b_3) a_{32} a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 a_{12} a_{13} \\ b_2 a_{22} a_{23} \\ b_3 a_{32} a_{33} \end{pmatrix}.$$

Ушбу детерминантни

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

қуйидагича алмаштирамиз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2+2 & -1-1 & 3+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

кейинги иккита детерминантни ҳисобласак,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 0 - 3 - 18 + 3 - 0 = 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 0 - 3 + 18 + 1 - 0 = 22;$$

1-хоссадаги мисолдан маълумки, у 22 га тенг эди, кейинги икки детерминант йиғиндиси ҳам 22га тенг бўлади,бу эса 7-хоссанинг ўринли эканлигини кўрсатади.

8. Детерминантнинг бирор устини (сатри) элементларига бошқа устини(сатри)нинг мос элементларини исталган умумий кўпайтувчига кўпайтириб қўшилса, унинг катталиги ўзгармайди, яъни:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11} + \lambda a_{12}) & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21} + \lambda a_{22}) & a_{22} & a_{23} \\ (a_{31} + \lambda a_{32}) & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Мисол учун,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

детерминантнинг 2-устун элементларини 2 га кўпайтириб, 1-устуннинг мос элементларига қўшиб, ҳосил бўлган детерминантни ҳисобласак:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 28 - 6 = 22$$

бўлади. Бу детерминантнинг катталиги 1- мисолда ҳисоблаганимиздек 22 га тенг эди, бу эса 8-хоссанинг ҳам тўғрилигини кўсатади;

Детерминантларнинг хоссаларидан фойдаланиш кўп ҳолларда қулай ҳисоблашларга олиб келади. Ушбу мисолни қараймиз.

$$2\text{-мисол. } \Delta = \begin{vmatrix} 12314 & 16536 & 20537 \\ 6157 & 8268 & 10268 \\ 513 & 689 & 126 \end{vmatrix} \quad \text{детерминантнинг катталигини}$$

ҳисобланг.

Ечиш. Бу детерминантни учбурчак қоидаси билан ҳисоблаш кўп хонали сонлар бўлганлиги учун анча ноқулайликларга олиб келади. Шунинг учун бу детерминантни ҳисоблаш учун, унинг хоссаларидан фойдаланишга уринамиз. Иккинчи сатр элементларини -2 га кўпайтириб 1-сатр мос элементларига қўшамиз, бу ҳолда ушбу детерминант ҳосил бўлади:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6157 & 8268 & 10268 \\ 513 & 689 & 126 \end{vmatrix};$$

ҳосил бўлган детерминантни 1- сатр элементлари бўйича ёйиб, ушбун

$$\Delta = 0 \cdot \begin{vmatrix} 8268 & 10268 \\ 689 & 126 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 6157 & 10268 \\ 513 & 126 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 6157 & 8268 \\ 513 & 689 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6157 & 8268 \\ 513 & 689 \end{vmatrix} (-12)$$

оламиз. Охирги детерминант 2-сатр элементларини (-12) га кўпайтириб 1-сатр мос элементларига қўшиб ушбу натижага эга бўламиз:

$$\begin{vmatrix} 6157 & 8268 \\ 513 & 689 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 513 & 689 \end{vmatrix} = 1 \cdot 689 - 0 \cdot 513 = 689.$$

Бу мисолдан кўринадики, детерминантларни ҳисоблашда унинг хоссаларидан фойдаланиш анча қулайликларга олиб келади.

3 –тартибли детерминантни **диагоналлар усули** деб аталувчи ушбу усул билан ҳам ҳисоблаш мумкин:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} -$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33}.$$

1-мисолдаги детерминантни диагонал усулидан фойдаланиб ҳисобласак,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 24 - 6 + 0 + 0 + 0 + 4 = 22$$

5. *n*- тартибли детерминантлар ҳақида. Кўпгина масалаларни ечишда 2 ва 3-тартибли детерминантлардан ташқари янада юқори тартибли детерминантлар ҳам учрайди. Масалан, 4-тартибли детерминант ушбу кўринишда бўлади:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{14} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} & \mathbf{a}_{24} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} & \mathbf{a}_{34} \\ \mathbf{a}_{41} & \mathbf{a}_{42} & \mathbf{a}_{43} & \mathbf{a}_{44} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

Юқори тартибли детерминантларни ҳисоблашда детерминантларнинг 6-хоссасидан фойдаланиб, унинг тартибини пасайтириш билан 3 ёки 2-тартибли детерминантларга келтириб ҳисобланади. Масалан, 4-тартибли детерминантни 1-сатр элеменлари бўйича ёйсақ ушбу кўринишда бўлади:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

12

детерминантларни ҳам бирор сатри ёки устуни элементлари бўйича ёйиб, 4-тартибли детерминантларга келтирилади ва ҳоказо.

Детерминантларнинг юқорида кўрсатилган хоссалари ҳамма тартибли детерминантлар учун ҳам тўғри. Энди юқори тартибли детерминантларни ҳисоблашга мисол қараймиз. Ушбу детерминантнинг катталигини ҳисобланг.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ечиш. Берилган детерминантни 1-сатр элементлари бўйича ёйиб ҳисоблаймиз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$2 \left[3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right] + 3 \cdot \left[(-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= 2(-9 + 4 + 16) + 3(2 + 6 - 16) = 22 - 24 = -2.$$

Детерминантларни ҳисоблашда унинг бирор сатри ёки устунларида нўллар кўпроқ бўлса, ўша сатр ёки устун элементлари бўйича ёйиб ҳисоблаш анча қулайлик келтиради, масалан, юқоридаги мисолда 1-сатр элементлари бўйича ёйганимиз учун, яъни унда 2 та нўл элемент бўлгани учун 2 та 3-тартибли детерминантларни ҳисоблаб чиқишга ҳожат қолмади. Бундай сатр ёки устунлар бўлмаса детерминантларнинг 8-хоссасидан фойдаланиб, уни бундай сатрга ёки устунга эга бўладиган қилиб ўзгартириш мумкин, мисол учун ушбу

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

детерминантни ҳисоблайлик. Бунинг учун 1-устун элементларини олдин 2 га кейин мос равишда 5 га, -4 га кўпайтириб, 2,3 ва 4- устунларнинг мос элементларига қўшамиз, бу ҳолда:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 13 & -11 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 7 & 13 & -11 \end{vmatrix}$$

бўлиб, кейинги 3-тартибли детерминантни 2-сатр элементлари бўйича ёйсак:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 7 & 13 & -11 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 7 & -11 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-33 + 21) = 7 \cdot (-12) = -84$$

бўлади.

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1. Куйидаги детерминантлар биринчи устун элементлари бўйича ёйиб ҳисоблансин:

$$\begin{array}{lll} \text{1)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; & \text{2)} \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}; & \text{3)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}. \end{array}$$

2. Куйидаги детерминантлар ноллар энг кўп бўлган сатр элементлари бўйича ёйиб ҳисоблансин:

$$\begin{array}{lll} \text{1)} \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}; & \text{2)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix} & \text{3)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}. \end{array}$$

3. Куйидаги детерминантлар ҳисоблансин:

$$\begin{array}{lll} \text{1)} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix}; & \text{2)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}; & \text{3)} \begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}; \\ \text{4)} \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{vmatrix}; & \text{5)} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 7 \end{vmatrix}; & \text{6)} \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}. \end{array}$$

4. Ушбу детерминантларни тартибини пасайтириш усулидан фойдаланиб ҳисобланг:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix};$$

$$2) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -4 & -2 \end{vmatrix};$$

$$3) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & -7 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 & 3 \end{vmatrix};$$

$$4) \begin{vmatrix} 6 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$5. \text{ Ушбу } 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} 35436 & 46343 & 22429 \\ 17718 & 23171 & 11214 \\ 5906 & 7723 & 3727 \end{vmatrix}$$

детерминантларнинг катталигини ҳисобланг.

17. Ушбу

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

детерминантларни биринчи сатр элементлари бўйича ёйиб ҳисобланг.

Такрорлаш учун саволлар

1. Алгебра ва алгоритм ибораси нима билан боғлиқ?
2. 2-тартибли детерминант қандай белгиланади ва у нимага тенг?
3. 3-тартибли детерминант қандай белгиланади ва у қандай ҳисобланади?
4. Детерминантларнинг хоссалари нималардан иборат.
5. 4-тартибли детерминантларнинг катталиги қандай ҳисобланади?
6. 5,6,..., n -тартибли детерминантлар қандай белгиланади ва ҳисобланади?

Мавзу. Матрицалар ва улар устида амаллар

Режа

1. Матрицалар ҳақида умумий тушунчалар.
2. Матрицалар устида амаллар.
3. Матрицанинг ранги ва уни ҳисоблаш.
4. Тескари матрица ва уни топиш.

Таянч ибора ва тушунчалар

Матрица, матрицанинг ўлчами, матрицанинг детерминанти, махсус матрица, махсусмас матрица, бош диагонал, диагонал матрица, бирлик матрица, транспонирланган матрица, тенг матрицалар, матрицаларнинг йиғиндиси, матрицани сонга кўпайтириш, матрицалар кўпайтмаси, матрицанинг k -тартибли минори, матрицанинг ранги, элементар алмаштиришлар, тескари матрица.

1 Матрицалар ҳақида умумий тушунчалар. Системаларни моделлаштиришда матрицалар алгебраси деган тушунча муҳим аҳамиятга эга. Режалаштириш муаммолари, ялпи маҳсулот, жами меҳнат сарфи, нархни аниқлаш ва бошқа масалалар ҳамда уларда компьютерларни қўллаш матрицалар алгебрасини қарашга олиб келади. Ишлаб чиқаришни режалаштириш, моддий ишлаб чиқариш орасидаги мавжуд боғланишларни ифодалашда ва бошқаларда, маълум даражада тартибланган ахборотлар системасига асосланган бўлиши лозим. Бу тартибланган ахборотлар системаси муайян жадваллар кўринишида ифодаланган бўлади. Мисол ўрнида моддий ишлаб чиқариш тармоқлари орасидаги ўзаро боғлиқлик ахборотлари системасини қарайлик. Ишлаб чиқариш 5 та (масалан, машинасозлик, электроэнергия, металл, кўмир, резина ишлаб чиқариш саноатлари) тармоқдан иборат бўлсин. Бунда улар орасидаги ўзаро боғлиқлик 1-жадвал билан ифодалансин.

1-жадвал.

Тармоқ-лар	1	2	3	4	5
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}

Бу жадвалда a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5$) лар билан, i -тармоқнинг j -тармоққа етказиб берадиган (таъминлайдиган) маҳсулоти миқдори белгиланган, чунончи, a_{21} , a_{22} , ..., a_{25} лар 2-тармоқнинг мос равишда

ҳамма тармоқларга; $a_{31}, a_{32}, \dots, a_{35}$ лар эса 3-тармоқнинг мос равишда ҳамма тармоқларга етказиб берадиган маҳсулотлари миқдорини билдиради. a_{22}, a_{33} лар мос равишда 2,3-тармоқларнинг ўз эҳтиёжларига сарфини ифодалайди.

Юқоридагига ўхшаш ишлаб чиқариш мезони (нормаси) ахборотлари системасига сонли мисол қарайлик. Корхона 3 турдаги хом ашё ишлатиб 4 хилдаги маҳсулот ишлаб чиқарадиган бўлсин, бунда хом ашё сарфи нормаси системаси 2-жадвал билан берилган бўлсин.

2-жадвал.

Хом ашёлар	Маҳсулотлар			
	1	2	3	4
1	2	3	2	0
2	4	0	3	5
3	3	5	2	4

2-жадвалда масалан, 1-турдаги хом ашё сарфи нормаси мос равишда 1,2,3,4-хилдаги маҳсулотлар ишлаб чиқариш учун 2,3,2,0 бўлади.

1 ва 2 жадваллар, математикада ўрганиладиган матрицалар тушунчасининг мисоллари бўлаолади. Матрицалар иқтисодий изланишларда кенг қўлланилмоқда, хусусан, улардан фойдаланиш ишлаб чиқаришни режалаштиришни осонлаштириб, меҳнат сарфини камайтиради, ҳамда режанинг ҳар хил вариантларини тузишни ихчамлаштиради. Бундан ташқари ҳар хил иқтисодий кўрсаткичлар орасидаги боғлиқликни текширишни осонлаштиради. Бу ҳолатлар матрицаларни умумий ҳолда қарашга олиб келади.

1-таъриф. m та сатрли ва n та устунли тўғри бурчакли $m \cdot n$ та элементдан тузилган жадвал

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ ўлчамли матрица дейилади. A матрицани қисқача (a_{ij}) ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$) билан ҳам белгилаш мумкин. Матрицаларда сатрлар сони устунлар сонига тенг бўлса, бундай матрицалар **квадрат матрица** деб аталади.

Ҳар бир n тартибли квадрат матрица учун унинг элементларидан тузилган детерминантни ҳисоблаш мумкин, бу детерминантга A матрицанинг детерминанти дейилади ва $\det A$ ёки $|A|$ билан белгиланади. $\det A = 0$ бўлса, A матрицага махсус матрица, $\det A \neq 0$ бўлса, махсусмас матрица дейилади. Квадрат матрицанинг $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ элементлар жойлашган диагонали бош диагональ, $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ элементлари

жойлашган диагонали ёрдмчи диагональ дейилади. Бош диагоналдаги элементлар 0 дан фаркли бошқа барча элементлари 0 га тенг квадрат матрица диагональ матрица дейилади. Масалан,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

матрица диагональ матрицадир. Диагоналдаги барча элементлари 1 га тенг диагональ матрица бирлик матрица дейилади ва

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

билан белгиланади.

Фақат битта сатрдан иборат $(a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14})$ матрицага сатр матрица дейилади. Фақат битта устунга эга

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix}$$

матрицага устун матрица деб аталади.

Барча элементлари 0 лардан иборат бўлган матрицага нўл матрица дейилади ва O билан белгиланади.

А матрицага қуйидаги матрицани мос қўйиш мумкин:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Бу матрицанинг ҳар бир сатри A матрицанинг унга мос устунидан иборат. A^T матрицани A матрицага нисбатан транспонирланган дейилади.

$A = (a_{ij})$ ва $B = (b_{ij})$ ($i = \overline{1m}, j = \overline{1n}$) матрицаларнинг мос элементлари $a_{ij} = b_{ij}$ тенг бўлса, бундай матрицалар тенг дейилади.

2. Матрицалар устида амаллар. Матрицаларни қўйиш, сонга қўпайтириш ва бир-бирига қўпайтириш мумкин.

Бир хил ўлчамли $A = (a_{ij})$ ва $B = (b_{ij})$ ($i = \overline{1m}, j = \overline{1n}$) матрицаларнинг йиғиндиси деб, элементлари $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ равишда аниқланадиган учинчи

$C = (c_{ij})$ матрицага айтилади. Равшанки, C матрицанинг ўлчами олдинги матрицаларнинг ўлчами билан бир хил бўлади. Масалан:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ ва } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

матрицалар йиғиндиси

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 & 0+3 \\ 3-2 & 1+4 & -1+2 \\ 0+5 & 4+0 & 5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix} = C$$

бўлади. Матрицаларни қўшиш амали куйидаги ўрин алмаштириш ва гуруҳлаш хоссаларига эга, яъни

$$A + B = B + A, \quad (A + B) + C = A + (B + C).$$

Матрицаларни қўшишда бирор матрицага O матрицани қўшиш одатдаги сонларни қўшишдаги нўл сони ролини ўйнайди, яъни

$$A + O = A.$$

масалан,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

A матрицани λ сонга кўпайтириш деб унинг ҳамма элементларини шу сонга кўпайтиришга айтилади, яъни

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$$

масалан,

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

матрицани $\lambda = 3$ га кўпайтирсак,

$$\lambda A = 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 0 \\ 12 & 9 & 3 \\ 15 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

бўлади.

$m \cdot k$ ўлчамли $A = (a_{ij})$ матрицанинг $k \cdot n$ ўлчамли $B = (b_{ij})$ матрицага, кўпайтмаси деб $m \cdot n$ ўлчамли шундай $C = (c_{ij})$ матрицага айтиладики унинг

c_{ij} элементи A матрица i -сатри элементларини B матрица j -устунининг мос элементларига кўпайтмалари йиғиндисига тенг, яъни:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}$$

Матрицалар кўпайтмаси $C = AB$ билан белгиланади. Демак, матрицаларни кўпайтириш учун биринчи кўпайтувчининг устунлари сони, 2- кўпайтувчининг сатрлари сонига тенг бўлиши талаб қилинади. Шу сабабли, умуман $AB \neq BA$.

1-мисол. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ва $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \\ 5 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ матрицалар берилган. A ва

B матрицаларни кўпайтиринг.

Ечиш. Биринчи матрицанинг устунлар сони, иккинчи матрицанинг сатрлар сонига тенг, шунинг учун бу матрицаларни кўпайтириш мумкин:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \\ 5 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 & 1 \cdot 7 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 \\ 4 \cdot 2 + (-3) \cdot 0 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 6 & 4 \cdot 7 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6 & 2 \cdot 7 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 & 15 \\ 13 & 26 \\ 25 & 36 \end{pmatrix}.$$

Матрицаларни кўпайтириш ушбу

$$A \cdot (BC) = (AB) \cdot C$$

гуруҳлаш ҳамда

$$(A + B) \cdot C = AC + BC$$

тақсимот

хоссасига

эга.

Масалан,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

бўлсин. Бу ҳолда

$$A \cdot (BC) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) \\ 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot 0 & 1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -3 & -6 \\ -1 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 14 \\ -14 & -110 \end{pmatrix}.$$

Энди $(AB) \cdot C$ кўпайтиришни бажарамиз:

$$\begin{aligned}
 (AB)C &= \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 14 & 46 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 13 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 & 13 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) \\ 14 \cdot (-1) + 46 \cdot 0 & 14 \cdot 2 + 46 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 14 \\ -14 & -110 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Шундай қилиб

$$A \cdot (BC) = (AB) \cdot C$$

хосса ўринли бўлади. Энди тақсимот хоссасини қараймиз:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

бўлсин. Олдин тақсимот хоссасининг чап томонини

$$(A + B) \cdot C$$

ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned}
 (A + B) \cdot C &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 34 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ўнг томони

$$\begin{aligned}
 AC + BC &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & 19 \\ -1 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 15 \\ 6 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 34 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

бўлади.

Шундай қилиб

$$(A + B) \cdot C = AC + BC$$

тенглик ўринли бўлади.

Исталган квадрат матрица A ни мос бирлик E матрицага кўпайтирганда

$$AE = EA = A$$

тенглик ўринли бўлади, масалан

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ -3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) & -3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Худди шунга ўхшаш $EA = A$ тенгликни ҳам текшириб кўриш мумкин (буни бажаришни ўқувчига ҳавола қиламиз).

3. Матрицанинг ранги ва уни ҳисоблаш. A $m \times n$ ўлчовли матрицада k сатр ва k та устунини ажратамиз, бунда, k, m ва n сонлардан кичик ёки уларнинг кичигига тенг бўлиши мумкин. Ажратилган сатр ва устунларнинг кесишувида ҳосил бўлган k -тартибли детерминантга A матрицанинг k -тартибли минори дейилади.

Таъриф. A матрицанинг 0 дан фарқли минорларининг энг юқори тартибига A матрицанинг ранги дейилади. A матрицанинг ранги $\text{rang} A$ ёки $r(A)$ билан белгиланади.

Матрица рангини бевосита ҳисоблашда кўп сондаги детерминантларни ҳисоблашга тўғри келади. Қуйидаги амаллардан фойдаланиб матрица рангини ҳисоблаш қулайроқ. Матрицада: 1) фақат 0 лардан иборат сатри (устуни)ни ўчиришдан; 2) иккита сатр (устун)нинг ўринларини алмаштиришдан; 3) бирор сатр (устун)нинг элементларини бирор $\lambda \neq 0$ сонга кўпайтириб, бошқа сатр (устун) мос элементларига қўшиш; 4) матрицани транспонирлашдан, унинг ранги ўзгармайди. Бу амалларга одатда элементар алмаштиришлар дейилади.

$$\text{1-мисол. } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & -6 & -5 \\ 1 & -4 & -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

матрицанинг рангини ҳисобланг.

Ечиш. A матрицанинг рангини ҳисоблаш учун элементар алмаштиришлардан фойдаланамиз. Биринчи сатр элементларини иккинчи

сатр элементларига, биринчи сатр элементларини (-2) га кўпайтириб, учинчи сатр элементларига, ҳамда учинчи сатр элементларини тўртинчи сатр элементларига қўшиб қуйидаги матрицани ҳосил қиламиз:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Кейинги матрицада 2-сатрини (-1) га кўпайтириб тўртинчи сатрига қўшсак

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

матрица ҳосил бўлади. Бу матрицада

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 2 = 7 \neq 0$$

бўлиб, тўртинчи тартибли минорлар 0 га тенг. Шундай қилиб, берилган матрицанинг ранги 3 га тенг.

4. Тескари матрица ва уни топиш. A квадрат матрица учун $AB = BA = E$ бирлик матрица бўлса, B квадрат матрица A матрицага тескари матрица дейилади. Одатда, A матрицага тескари матрица A^{-1} билан белгиланади.

Теорема: A квадрат матрица тескари матрицага эга бўлиши учун A матрицанинг детерминанти 0 дан фарқли бўлиши зарур ва етарлидир. (Бу теоремани исботсиз келтирдик, унинг исботини кенгроқ дастурли курслардан топиш мумкин, масалан, В.Е.Шнейдер ва бошқалар. «Олий математика қисқа курси» 1том. Т. Ўқитувчи. 1985. 407 б.)

A квадрат матрица учун $\det A \neq 0$ бўлса, унга тескари бўлган ягона матрица A^{-1} мавжуд.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрицага тескари A^{-1} матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

формула билан топилади. Бунда A_{ij} мос равишда a_{ij} элементларнинг алгебраик тўлдирувчилари ва $\Delta = \det A$.

Тескари матрицани топишга мисол қараймиз.

2-мисол. Ушбу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

матрицага тескари матрицани топинг.

Ечиш. Олдин A матрицанинг детерминантини ҳисоблаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 18 + 4 + 3 - 2 - 12 - 9 = 2 \neq 0.$$

Юқоридаги теоремага асосан тескари матрица мавжуд, чунки

$$\Delta = 2 \neq 0$$

яъни, берилган матрица махсусмас матрицадир. A^{-1} ни топиш учун A матрица ҳамма элементларининг алгебраик тўлдирувчиларини топамиз:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Тескари матрицани топиш

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

формуласига асосан

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \end{pmatrix}$$

бўлади. A^{-1} тескари матрицанинг тўғри топилганлигини

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

тенгликнинг бажарилиши билан текшириб кўриш мумкин, ҳақиқатан ҳам,

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2,5) + 1 \cdot 0,5 & 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1,5) + 1 \cdot 0,5 \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2,5) + 4 \cdot 0,5 & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 + 4 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1,5) + 4 \cdot 0,5 \\ 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-2,5) + 9 \cdot 0,5 & 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 + 9 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1,5) + 9 \cdot 0,5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

яъни, $AA^{-1} = E$ бирлик матрица ҳосил бўлади, бу A^{-1} тескари матрицанинг тўғри топилганлигини исботлайди.

Такрорлаш учун саволлар

1. Матрица деб нимага айтилади?
2. Матрицанинг ўлчови нима ва у қандай ёзилади?
3. Квадрат матрица деб қандай матрицага айтилади?
4. Матрицанинг детерминанти нима?
5. Махсус ва махсусмас матрицалар қандай матрицалар?
6. Диагонал матрица деб нимага айтилади?
7. Бирлик матрица деб қандай матрицага айтилади?
8. Транспонирланган матрица деб нимага айтилади?
9. Қандай матрицалар тенг бўлади?
10. Матрицалар йиғиндиси нима?
11. Матрицани сонга кўпайтириш қандай бўлади?

12. Қандай матрицаларни кўпайтириш мумкин?
13. Матрицалар қандай кўпайтирилади?
14. Матрицанинг ранги нима?
15. Элементар алмаштиришлар деб қандай амалларга айтилади?
16. Тескари матрица қандай топилади?

Мустақил иш учун топшириқлар

1-мисол. Ушбу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ ва } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ матрицаларни кўпайтиринг.}$$

2-мисол. Ушбу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

матрицаларни кўпайтиринг.

3-мисол. Ушбу

$$\begin{aligned} 1) \quad A &= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}; \\ 2) \quad B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \text{ матрицаларга тескари матрицаларни топинг.} \end{aligned}$$

4-мисол. Ушбу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 & 34 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

матрицаларнинг рангини ҳисобланг.

Мавзу. Чизиқли тенгламалар системаси

Режа

1. Чизиқли тенгламалар системаси ҳақида умумий тушунчалар.
2. Чизиқли тенгламалар системасини Крамер усули билан ечиш.
3. Чизиқли тенгламалар системасини матрицалар ёрдамида ечиш.

Таянч иборалар

Чизиқли тенгламалар системаси(ЧТС),тенгламалар системасининг ечими, ягона ечим, система биргаликда, аниқ бўлмаган система,эквивалент система, биргаликда бўлмаган система, система матрицаси, кенгайтирилган матрица, Кронекер-Капелли теоремаси, бир жинсли система, бош ўзгарувчилар, номаълумларни йўқотиш, тескари қадам, Гаусс усулининг хусусияти, система биргаликда ва аниқмас, система биргаликда эмас, Гаусс усулининг Жордан модификацияси усули.

1.ЧТС ҳақида умумий тушунчалар. Маълумки бир неча тенгламалар биргаликда қаралса, уларга тенгламалар системаси дейилади.

Тенгламалар системасидаги ҳамма тенгламалар чизиқли (1-даражали) бўлса, бундай тенгламалар системасига чизиқли тенгламалар системаси дейилади.

Тенгламалар системасидаги номаълумлар ўрнига маълум сонлар мажмуини қўйганда, системанинг ҳамма тенгламалари айниятга айланса, бундай сонлар мажмуига тенгламалар системасининг ечими (илдизи) дейилади. Бундай сонлар мажмуи битта бўлса, тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлиб, бу система аниқланган (тайин, муайян) деб аталади ва бу тенгламалар системаси биргаликда дейилади. Биргаликда бўлган система биттадан кўп ечимга эга бўлса, бундай система аниқ бўлмаган система дейилади.

Биргаликда бўлган тенгламалар системаси бир хил ечимлар мажмуига эга бўлса, бундай системалар эквивалент дейилади.

Тенгламалар системаси бирорта ҳам ечимга эга бўлмаса, бундай системага биргаликда бўлмаган система дейилади.

Берилган тенгламалар системасининг бирорта тенгламасини 0дан фарқли сонга кўпайтириб, бошқа тенгламасига ҳадма-ҳад қўшиш билан ҳосил бўлган система берилган системага эквивалент бўлади (бу хоссадан келгусида кўп фойдаланилади).

Фан ва техниканинг кўп соҳаларида бўлганидек, иқтисодиётнинг ҳам кўп масалаларининг математик моделлари чизиқли тенгламалар системаси орқали ифодаланади.

Чизиқли тенгламалар системасини тузишга иқтисодиётдан мисол қараймиз.

1-мисол. Корхона уч хилдаги хом ашёни ишлатиб уч турдаги маҳсулот ишлаб чиқаради. Ишлаб чиқариш характеристикалари 1-жадвалда берилган.

хом хиллари	ашё	Маҳсулот турлари бўйича хом ашё сарфлари			хом ашё захираси
		1	2	3	
1		5	12	7	2000
2		10	6	8	1660
3		9	11	4	2070

Берилган хом ашё захирасини ишлатиб, маҳсулот турлари бўйича ишлаб чиқариш ҳажмини аниқланг.

Ечиш: Ишлаб чиқарилиши керак бўлган маҳсулотлар ҳажмини мос равишда x_1 , x_2 , x_3 лар билан белгилаймиз. 1-тур маҳсулотга, 1-хил хом ашё, биттаси учун сарфи 5 бирлик бўлганлиги учун $5x_1$ 1-тур маҳсулот ишлаб чиқариш учун кетган 1-хил хом ашёнинг сарфини билдиради. Худди шундай 2,3-тур маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун кетган 1-хил хом ашё сарфлари мос равишда $12x_2$, $7x_3$ бўлиб, унинг учун қуйидаги тенглама ўринли бўлади: $5x_1 + 12x_2 + 7x_3 = 2000$. Юқоридагига ўхшаш 2,3-хил хом ашёлар учун

$$10x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 1660,$$

$$9x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 2070$$

тенгламалар ҳосил бўлади. Демак, масала шартларида қуйидаги уч номаълумли учта чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 7x_3 = 2000, \\ 10x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 1660, \\ 9x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 2070 \end{cases}$$

Бу масаланинг математик модели уч номаълумли учта чизиқли тенгламалар системасидан иборат бўлди. Бу масала тенгламалар системасининг ечимини топиш билан ечилади. Бундай тенгламалар системасини ечишни умумий ҳолда қараймиз.

2. Чизиқли тенгламалар системасини Крамер усули билан ечиш

Чизиқли тенгламалар системасининг ечимини топишни олдин икки номаълумли иккита чизиқли тенгламалар системаси учун қараймиз. Ушбу икки номаълумли иккита чизиқли тенгламалар системаси

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

дан, биринчи тенгламани a_{22} га, иккинчи тенгламани $-a_{12}$ га ҳадма-ҳад кўпайтирамиз ва ҳосил бўлган тенгламаларни қўшамиз, натижада

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = b_1a_{22} - b_2a_{12} \quad (1)$$

тенглама ҳосил бўлади. Худди шунга ўхшаш, 1-тенгламани $-a_{21}$ га, 2-тенгламани a_{11} га ҳадма-ҳад кўпайтириб, ҳосил бўлган тенгламаларни қўшиб ушбуни ҳосил қиламиз:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = b_2a_{11} - b_1a_{21} \quad (2)$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

бўлгани учун, қуйидаги белгилашларни киритиб

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

(1) ва (2) тенгликларни

$$\Delta x = \Delta_1, \quad \Delta y = \Delta_2$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундан $\Delta \neq 0$ бўлса,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

бўлади, ёки детерминантлар орқали ёзсак

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Бу формулаларга Крамер формулалари дейилади, бунда Δ_1 ёрдамчи детерминант Δ детерминантнинг биринчи устунини озод ҳадлар билан, Δ_2 да эса иккинчи устун озод ҳадлар билан алмаштирилади. Δ детерминантга тенгламалар системасининг детерминанти дейилади.

Шундай қилиб, берилган чизиқли тенгламалар системасининг детерминанти 0 дан фарқли бўлса, система ягона ечимга эга бўлади.

Энди системанинг детерминанти 0 га тенг, яъни

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0 \quad \text{ёки} \quad a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12}$$

бўлсин. Бу ҳолда 1-тенгламанинг номаълумлари олдидаги коэффициентлари 2-тенгламанинг номаълумлари олдидаги коэффициентларига пропорционалдир. Ҳақиқатан, коэффициентлардан бири, масалан a_{11}

нолдан фарқли бўлсин деб $\frac{a_{22}}{a_{11}} = \lambda$ билан белгиласак, бундан $a_{21} = \lambda a_{11}$

бўлади. У ҳолда $a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12}$ тенгликдан

$a_{11}a_{22} = \lambda a_{11}a_{12}$ бўлиб, $a_{22} = \lambda a_{12}$ келиб чиқади. Буларни ҳисобга олиб, берилган системани

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ \lambda(a_{11}x + a_{12}y) = b_2 \end{cases} \quad (3)$$

кўринишда ёзиш мумкин. бунда иккита хусусий ҳол бўлиши мумкин:

1) иккала Δ_1 ва Δ_2 детерминантлар 0 га тенг, яъни $\Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} = 0$, $\Delta_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} = 0$ бундан $b_2 = \lambda b_1$, чунки $a_{22} = \lambda a_{12}$.

Бу ҳолда a_{21} , a_{22} , b_2 сонлар a_{11} , a_{12} , b_1 сонларга пропорционал бўлиб, берилган тенгламалар системаси ушбу кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ \lambda(a_{11}x + a_{12}y) = \lambda b_1 \end{cases}$$

Шундай қилиб, системанинг иккинчи тенгламаси, биринчи тенгламасидан унинг иккала қисмини λ га кўпайтириш билан ҳосил қилинади, яъни у 1-тенгламанинг натижасидир. Бу ҳолда берилган система чексиз кўп ечимлар тўпламига эга бўлади. Масалан, у га ихтиёрий

қийматлар бериб, x нинг тегишли қийматини $x = \frac{b_1 - a_{12}y}{a_{11}}$

тенгликдан топамиз.

2) Δ_1 ва Δ_2 детерминантлардан ҳеч бўлмаганда биттаси 0 дан фарқли, масалан,

$\Delta_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \neq 0$ бўлсин. У ҳолда $b_2a_{11} \neq b_1a_{21}$ бўлади, демак $b_2 \neq \lambda b_1$.

бу ҳолда (3) системадан маълум бўладики, $\lambda(a_{11}x + a_{12}y) = b_2$ тенглама биринчи $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ тенгламага қарама-қаршидир. Демак, берилган система ечимга эга эмас, яъни биргаликда эмас.

Энди уч номаълумли учта тенгламалар системасини қараймиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (4)$$

тенгламалар системаси берилган бўлсин. Бу система номаълумлари коэффициентларидан ушбу детерминантни тузамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

бунга (4) системанинг детерминанти ёки аниқловчиси дейилади.
 $\Delta \neq 0$ бўлса, (4) система ягона

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} \quad (5)$$

ечимга эга бўлади, бунда

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

(5) формулага ҳам икки номаълумли иккита тенгламалар системасидагидек **Крамер формуллари дейилади**. Крамер формуллари n номаълумли n та тенгламалар системаси учун ҳам умумлаштирилади.

Энди мисоллар қараймиз:

1-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1, \\ 3x_1 + x_2 = 18 \end{cases}$$

тенгламалар системасининг ечимини топинг.

Ечиш.

Бу

системанинг

детерминанти

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-3) \cdot 3 = 2 + 9 = 11 \neq 0.$$

Демак, берилган тенгламалар системаси ягона ечимга эга.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 18 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 18 \cdot 3 = 55, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 18 \end{vmatrix} = 36 - 3 = 33.$$

$$\text{Шундай қилиб, } x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{55}{11} = 5, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{33}{11} = 3.$$

2-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечинг.

Ечиш. Система детерминантини тузиб, унинг учинчи сатри элементларини (-1)га кўпайтириб, 1 сатр мос элементларига кўшиб, ҳосил

бўлган детерминантни 1-сатр элементлари бўйича ёйиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Охирги 3-тартибли детерминантда 1- устун элементларини (-2)га кўпайтириб 3- устун мос элементларига қўшиб, ҳамда 3- устун элементлари бўйича ёйиб

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3-4) = 1$$

ни ҳосил қиламиз. $\Delta \neq 1$, демак, тенгламалар системаси ягона ечимга эга. Энди бошқа детерминантларни ҳисоблаймиз:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta x_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 4.$$

(Бу детерминантларни ҳисоблаб кўришни ўқувчига ҳавола этамиз).

Шундай қилиб, Крамер формулаларига асосан,

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{2}{1} = 2, \quad x_2 = \frac{1}{1} = 1, \quad x_3 = \frac{-3}{1} = -3, \quad x_4 = \frac{4}{1} = 4$$

бўлади.

Топилган ечимни тенгламалар системасига бевосита қўйиб унинг тўғрилигига ишонамиз.

3-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

тенгламалар системасининг ечимини топинг.

Ечиш. Олдин системанинг детерминантини ҳисоблаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 24 - 18 + 4 + 18 - 24 - 4 = 0.$$

Система детерминанти 0 га тенг, бунда икки ҳол бўлиши мумкин. Тенгламалар системаси ечимга эга бўлмаслиги ёки чексиз кўп ечимга эга бўлиши мумкин. Бунини аниқлаш учун Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 ёрдамчи детерминантларни ҳисоблаймиз:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 6 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Иккинчи ва биринчи тенгламаларни солиштириб, иккинчи тенглама биринчи тенгламадан иккига кўпайтириш билан ҳосил бўлганлигини пайқаймиз. Демак, берилган система

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} \quad (6)$$

тенгламалар системасига тенг кучли бўлади. Бу системанинг бирорта номаълумига ихтиёрий қийматлар бериш билан чексиз кўп ечимлар тўпламига эга бўламиз, масалан,

$x_3 = 1$ бўлсин, уни охириги системага қўйсак,

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ 3x_1 - x_2 = -3 \end{cases}$$

система ҳосил бўлиб, $x_1 = -\frac{5}{11}$, $x_2 = \frac{18}{11}$ бўлади. Бу ҳолда

$\left(-\frac{5}{11}, \frac{18}{11}, 1\right)$ ечим ҳосил бўлади. $x_3 = -2$ бўлсин, бунини (6) системага

қўйиб, қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 3x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

бундан, $x_1 = \frac{10}{11}$, $x_2 = -\frac{3}{11}$ бўлиб, $\left(\frac{10}{11}, -\frac{3}{11}, -2\right)$ ечимни оламиз.

Шундай қилиб, номаълумларнинг бирига ихтиёрий қийматлар бериб, чексиз кўп ечимларни оламиз.

4-мисол. Ушбу

ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИ ЕЧИНГ.

Ечиш. Берилган система детерминантини ҳисоблаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

бўлиб, ёрдамчи детерминантлар ҳам $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ бўлади. Бу тенгламалар системаси ечимга эга эмас, чунки 1-тенглама билан 3-тенглама ўзаро зиддир, яъни 1-тенгламани -3 га кўпайтириб 3- тенгламага ҳадма-ҳад қўшсак, $0=-3$ тенглик ҳосил бўлиб, бу тенгламалар системасининг биргаликда бўлмаслигини билдиради.

3. Чизикли тенгламалар системасини матрицалар ёрдамида ечиш
Энди матрицалар ёрдамида чизикли тенгламалар системасини ечишга ўтамиз.

[illegible]

n номаълумли, n та тенгламалар системаси берилган бўлсин.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \text{---} & \text{---} \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

белгилашларни киритамиз. Энди (7) системани матрицаларни кўпайтириш қонунидан фойдаланиб,

$$AX = B \quad (8)$$

кўринишда ёзиш мумкин. $\det A \neq 0$ бўлса, тескари матрица A^{-1} мавжуд ва $A^{-1}AX = A^{-1}B$ ҳосил бўлади. Шундай қилиб, номуайюн X матрица $A^{-1}B$ матрицага тенг бўлади, яъни

$$X = A^{-1}B.$$

Бу (7) тенгламалар системасини ечишнинг матрицавий ёзувини билдиради.
1-мисол. Матрицалар ёрдамида ушбу тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases}.$$

Ечиш. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Бу матрицалар ёрдамида берилган тенгламалар системасини

$$AX = B \quad (9)$$

кўринишда ёзамиз. Энди A матрицанинг детерминантини ҳисоблаймиз.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 9 + 1 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 9 - 1 \cdot 4 \cdot 3 = 2.$$

A матрицанинг детерминанти 0 дан фарқли бўлганлиги учун, унга тескари ягона A^{-1} матрица мавжуд ва тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлади. Энди A^{-1} тескари матрицани топиш учун Δ детерминант элементларининг ҳамма алгебраик тўлдирувчиларини ҳисоблаймиз:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 12 = 6, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Тескари A^{-1} матрицани топиш формуласига асосан,

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \end{pmatrix}$$

(9) тенгликнинг икки томонини чапдан A^{-1} га кўпайтирсак, $A^{-1}AX = A^{-1}B$ ёки $X = A^{-1}B$ бўлиб, яъни

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + (-3) \cdot 4 + 1 \cdot 2 \\ -2,5 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + (-1,5) \cdot 2 \\ 0,5 \cdot 4 - 1 \cdot 4 + 0,5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

тенглик ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ёки $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -1$.

(Топилган ечимларни тенгламалар системасига бевосита қўйиб, ечимнинг тўғрилигини текшириб кўриш мумкин).

Такрорлаш учун саволлар

1. Чизиқли тенгламалар системасининг детерминанти деб нимага айтилади?
2. Чизиқли тенгламалар системаси қачон ягона ечимга эга бўлади?
3. Чизиқли тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлса, у қандай топилади?
4. Крамер формулалари нимадан иборат?
5. Тенгламалар системасининг матрицали ёзуви қандай бўлади?
6. Тенгламалар системаси матрицалар ёрдамида қандай ечилади?
7. Тескари матрица қандай топилади?
8. Қандай тенгламалар системасига биргаликда дейилади?

Мустақил ечиш учун топшириқлар

1. Ушбу

$$\begin{cases} 4x + y = 5 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

тенгламалар системасини Крамер қонунидан билан ечинг.

2. Ушбу

$$\begin{cases} 6x_1 + 7x_2 + 13 = 0 \\ 5x_1 - 19x_2 - 14 = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечинг.

3. Ушбу

$$1) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 4, \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 4y + 7z + 1 = 0, \\ -2x + 5y - 3z - 1 = 0, \\ 5x - 6y + 11z + 3 = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасини Крамер формулалари ёрдамида ечинг.

4. Ушбу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \text{-----} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ва } B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \text{-----} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

A матрицага (1) системанинг матрицаси, B матрицага системанинг кенгайтирилган матрицаси дейилади. Қуйидаги теорема ўринли.

1- теорема. (Кронекер-Капелли теоремаси). Чизиқли тенгламалар системасининг биргаликда бўлиши учун система матрицаси A нинг ранги система кенгайтирилган B матрицасининг рангига тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Исбот. Зарурлиги. (1) система биргаликда бўлсин. $k_1, k_2, \dots, k_s$ унинг ечимларидан бири бўлсин. Бу сонларни системадаги номаълумлар ўрнига қўйиб, s та айният ҳосил қиламиз. Бу айниятлар B матрицанинг охириги устуни қолган барча устунларининг мос равишда коэффицентлар билан кўпайтмасидан олинган йиғиндиси эканлигини кўрсатади. B матрицанинг ҳар қандай бошқа устуни A матрицага ҳам киради ва шунинг учун у матрицанинг барча устунлари орқали чизиқли ифодаланади. Аксинча, A матрицанинг ҳар қандай устуни B матрицани ҳам устуни бўлади, яъни бу матрицанинг устунлари орқали чизиқли ифодаланади. Бундан A ва B матрицаларнинг устунлари системаси ўзаро эквивалент эканлиги келиб чиқади, шунинг учун бу матрицаларнинг ранги бир хил бўлади, яъни $r(A) = r(B)$ келиб чиқади.

Етарлилиги. A ва B матрицалар бир хил рангга эга бўлсин. Бундан A матрица устунларининг исталган максимал чизиқли эркили системаси B матрицада ҳам максимал чизиқли эркили система бўлиб қолишлиги келиб чиқади. Шунда қилиб A матрица устунлари системаси орқали B матрицанинг охириги устуни чизиқли ифодаланади. Демак, шундай $k_1, k_2, \dots, k_s$ сонлар мажмуи мавжуд бўладиги, A матрицанинг бу сонлар билан кўпайтиришдан олинган устунлари йиғиндиси озод ҳадлардан иборат устунга тенг, яъни $k_1, k_2, \dots, k_s$ сонлар (1) системанинг ечими бўлади, шундай қилиб, A ва B матрицалар ранглариининг бир хилда бўлишидан (1) системанинг биргаликда бўлиши келиб чиқади. Теорема тўлиқ исботланди.

Кронекер-Капелли теоремаси ечим мавжуд эканлигини тасдиқлайди, лекин бу системанинг барча ечимларини амалда топиш учун усулни бермайди. Энди, ихтиёрий чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг қуйидаги қондасини келтирамиз.

A матрицанинг ранги B матрицанинг рангига тенг бўлиб, $r(A) = r(B) = k$ бўлсин. Бунда k сон A матрицанинг чизиқли эркили сатрларининг максимал сонига тенг бўлиб, k номаълумлар сонига тенг бўлса, у ҳолда система тенгламалари сони номаълумлари сонига тенг ва

унинг детерминанти нолдан фарқли бўлади, бундай системанинг ечими ягона бўлиб уни Крамер қоидаси бўйича топиш мумкин бўлади.

Энди матрицаларнинг ранги k номаълумлар сонидан кичик, яъни $k < n$ бўлсин. Бу ҳолда k - тартибли минор нолдан фарқли бўлади. Система тенгламаларининг ҳар қайсисида $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ номаълумли ҳадларини тенгламаларнинг ўнг томонига ўтказамиз ва бу номаълумлар учун бирор $c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n$ қийматлари мажмуини танлаб олиб k номаълумли k та тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Ҳосил бўлган системага Крамер қоидасини қўллаш мумкин ва ягона $c_1, c_2, \dots, c_k$ ечим мажмуи мавжуд бўлади. Система тенгламаларининг ўнг томонига ўтказилган номаълумларни **озод номаълумлар** деб атаимиз. Чап томондаги номаълумлар **бош(базис) ўзгарувчилар**, Озод номаълумлар учун $c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n$ сонларни ихтиёрий танлаб олишиёиз мумкин бўлганлиги учун ҳосил бўлган системанинг чексиз кўп турлича ечимлари шу йўл билан ҳосил қилинади. Шундай қилиб, бу ҳолда чексиз кўп ечимлар тўпламига эга бўламиз.

$x_1, x_2, \dots, x_k$ номаълумларнинг $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ озод номаълумлар катнашган ечимига **умумий ечим** деб аталади, чунки бошқа чексиз кўп ечимлар $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ озод номаълумларга ихтиёрий қийматлар мажмуини бериш билан олинади.

Тенгламалар системасини ечишга бир неча мисоллар қараймиз.

1-мисол. Ушбу тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 1. \end{cases}$$

Ечиш. Система коэффициентларидан матрица тузамиз.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Бу матрицанинг ранги 2 га тенг, чунки

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 4 = 14 \neq 0$$

бўлиб,

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 10 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

бўлади. Кенгайтирилган матрица

$$B = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 1 & 12 \\ 4 & 1 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

нинг ранги 3 га тенг, чунки

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$$

$r(A) = 2$, $r(B) = 3$ бўлиб, $r(A) \neq r(B)$ бўлади, демак исботланган теоремага асосан система биргаликда эмас.

2-мисол. Ушбу тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 - 4x_2 = -1, \\ 7x_1 + 10x_2 = 12. \end{cases}$$

Ечиш. Система коэффициентларидан тузилган матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

бўлиб, $r(A) = 2$, чунки $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$, лекин

3-тартибли минори йўқ. Кенгайтирилган матрицанинг ранги ҳам 2 га тенг, чунки

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & -1 \\ 7 & 10 & 12 \end{vmatrix} = -144 + 40 - 14 + 112 - 24 + 30 = 0.$$

Биринчи иккита тенгламанинг чап қисмлари чизиқли эркили, бу иккита тенгламалар системасини ечиб, номаълумлар учун ушбу қийматларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 - 4x_2 = -1. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -14 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -14, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

Бу ечим 3-тенгламани ҳам қаноатлантиради.

3-мисол. Ушбу тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Ечиш. Система матрицасининг ранги $r(A)=2$, чунки

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

бўлганлигини, яъни кенгайтирилган матрицанинг барча 3-тартибли минорлари 0 га тенг бўлганлиги учун, унинг ҳам ранги $r(B)=2$. Шундай қилиб, система биргаликда ва $r(A)=r(B)=k=2 < 4$ номаълумлар сонидан кичик, бу ҳолда биринчи ва учинчи тенгламалар системасини олайлик, чунки

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 10 = -7 \neq 0;$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

бундан

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4x_3 - 3x_4, \\ 5x_1 + 3x_2 = 1 - 8x_3 - x_4 \end{cases}$$

бўлиб, тенгламалар системасини x_1, x_2 асосий номаълумларга нисбатан ечсак:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - 4x_3 - 3x_4 & 5 \\ 1 - 8x_3 - x_4 & 3 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{2}{7} - 4x_3 + \frac{4}{7}x_4,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - 4x_3 - 3x_4 \\ 5 & 1 - 8x_3 - x_4 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{4}{7} - \frac{12}{7}x_3 - 2x_4$$

бўлади. Озод номаълумларни $x_3 = C_1, x_4 = C_2$ деб

$$x_2 = \frac{4}{7} - \frac{12}{7}C_1 + 2C_2$$

$$\left(-6, \frac{22}{7}, 2, 3\right) \quad \text{ечимни,} \quad C_1 = 0, C_2 = -3 \quad \text{бўлганда}$$
$$x_1 = -\frac{10}{7}, x_2 = -\frac{38}{7}, x_3 = 0, x_4 = -3, \text{ яъни } \left(-\frac{10}{7}, -\frac{38}{7}, 0, -3\right) \text{ ва ҳоказо}$$

2. Бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси. (1) тенгламалар системасида озод ҳадлар 0 лардан иборат бўлса, бундай системага **бир жинсли система** дейилади, яъни

[illegible]

Бир жинсли система 0 дан фарқли ечимга эгалигини аниқлаш муҳимдир.

2-теорема. Бир жинсли система нолдан фаркли ечимга эга бўлиши учун система матричасининг ранги номаълумлар сонидан кичик бўлиши зарур ва етарлидир.

1-натижа. Бир жинсли системада номаълумлар сони тенгламалар сонидан катта бўлса, система 0 дан фарқли ечимларга ҳам эга бўлиши мумкин.

2-натижа. n номаълумли n та бир жинсли тенгламалар системаси 0 дан фарқли ечимларга эга бўлиши учун системанинг детерминанти 0 га тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

4-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

Ечиш. Система матричасини ва унинг кенгайтирилган матричасини тузамиз:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ва } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

В матрицада охирги устунни сақлаб элементар алмаштиришлар бажарамиз:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0 лардан иборат сатрни ташлаб

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ матрицани ҳосил қиламиз. Бундай}$$

алмаштиришларда B матрица рангини аниқлаш билан A матрицанинг ҳам рангини аниқлаш имконияти туғилади. Шундай қилиб, B матрицанинг ранги 2 га тенг, A матрицанинг ранги ҳам 2 га тенг. Демак, берилган система биргаликда бўлади. Маълум бўлдики, учинчи тенглама биринчи иккита тенгламаларнинг чизикли комбинациясидан иборат. Шунинг учун учинчи тенгламани чиқариб

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

тўрт номаълумли иккита тенгламалар системасига эга бўламиз. Иккита номаълумни қолганлари орқали ифодалаймиз. Маълумки, x_1, x_2 номаълумларга нисбатан ечиш мумкин эмас, чунки уларнинг коэффициентларидан тузилган детерминант 0 га тенг. Системани x_2, x_3 ларга нисбатан ечиш мумкин, яъни

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 - x_1 - x_4, \\ x_2 + 2x_3 = -x_1 - x_4 \end{cases}$$

x_2, x_3 ларни **бош (базис) ўзгарувчилар**, x_1, x_4 лар эса озод(эркин) ўзгарувчилар бўлади. Бу системани ечиб $x_3 = -1, x_2 = 2 - x_1 - x_4$ ни аниқлаймиз. x_1, x_4 ўзгарувчиларга кетма-кет қийматлар бериб, чексиз кўп ечимлар тўпламига эга бўламиз. Масалан, $x_1 = 0, x_4 = 1$ бўлганда $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1, x_4 = 1$ ечим ҳосил бўлади ва ҳоказо. Текшириб кўриш мумкинки, бу ечим берилган системани қаноатлантиради.

5-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

бир жинсли тенгламалар системасини ечинг.

Ечиш. Система матрицасининг рангини топамиз.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Биринчи учта сатрини кўшиб, тўртинчи сатридан айирамиз:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ҳосил бўлган матрицанинг рангги 3 га тенг, чунки

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 21 \neq 0.$$

Шундай қилиб, A матрицанинг ранги 3 га тенг, номаълумлар сони тўртта, 2-теоремага асосан система 0 дан фарқли ечимга эга. Берилган система

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

системага тенг кучли. x_1, x_2, x_3 номаълумлар коэффициентидан тузилган детерминант 0 дан фарқли бўлгани учун x_4 ни ўнг томонга ўтказиб тенгламалар системасини ечамиз.

$$\Delta = 21, \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} -x_4 & -1 & -3 \\ 2x_4 & 3 & 2 \\ -3x_4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -31x_4, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2-x_4 & -3 \\ 1 & 2x_4 & 2 \\ 3 & -3x_4 & 2 \end{vmatrix} = 43x_4,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -x_4 \\ 1 & 3 & 2x_4 \\ 3 & 2 & -3x_4 \end{vmatrix} = -28x_4.$$

Крамер формулаларига асосан:

$$x_1 = -\frac{31}{21}x_4, x_2 = \frac{43}{21}x_4, x_3 = -\frac{28}{21}x_4 = -\frac{4}{3}x_4.$$

Бу ечимни берилган системага бевосита қўйиб ечимнинг тўғрилигига ишониш мумкин.

3. Чизиқли тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечиш.

Чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг энг кўп ишлатиладиган усулларида бири Гаусс усулидир. Унинг моҳиятини уч номаълумли учта чизиқли тенглама учун кўрсатамиз.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (1)$$

Бунда $a_{11} \neq 0$ бўлсин. Биринчи тенгламанинг ҳамма ҳадларини a_{11} га бўламиз ва уни $-a_{21}$, $-a_{31}$ га кўпайтириб мос равишда иккинчи ва учинчи тенгламаларга қўшамиз. Бу ҳолда қуйидаги тенгламалар системаси ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}}, \\ \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 = \beta_2, \\ \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 = \beta_3 \end{cases}$$

бу ерда $\alpha_{22} = a_{22} - a_{21} \frac{a_{12}}{a_{11}}$, $\alpha_{23} = a_{23} - a_{21} \frac{a_{13}}{a_{11}}$ ва ҳ.к.

$a_{11} = 0$ бўлиб, бошқа тенгламаларда номаълумлар олдидаги коэффицентлари орасида нўлдан фарқлилари бўлса, у ҳолда бу тенгламалардан бирини биринчи тенгламанинг ўрни билан алмаштирамиз, кейин юқоридаги амалларни бажарамиз. Бу биринчи қадам бўлади. Демак, биринчи қадамда биринчи тенгламада x_1 - номаълум қолиб, қолган тенгламалардан кетма-кет x_1 - номаълумни йўқотамиз. Иккинчи қадамда биринчи тенглама ўз ўрнида қолиб, иккинчи ва учинчи тенглама учун юқоридаги амалларни бажарамиз, яъни иккинчи тенгламада x_2 номаълумни қолдириб, учинчи тенгламадан уни йўқотамиз. Шундай қилиб, бу амаллар натижасида (1) тенгламалар системаси

$$\begin{cases} x_1 + \alpha'_{12}x_2 + \alpha'_{13}x_3 = \beta'_1, \\ \alpha'_{22}x_2 + \alpha'_{23}x_3 = \beta'_2, \\ \alpha'_{33}x_3 = \beta_3 \end{cases} \quad (2)$$

кўринишга келади. Энди ҳамма номаълумларни сўнгги тенгламадан бошлаб **тескари қадам** билан топиш қолди.

6-мисол.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 9, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$$

тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечинг.

Ечиш. Биринчи тенгламани (-4) ва (-3) га кўпайтириб мос равишда иккинчи ва учинчи тенгламаларга қўшамиз:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ (4 - 4)x_1 + (1 - 8)x_2 + (4 - 12)x_3 = 9 - 4 \cdot 6, \\ (3 - 3)x_1 + (5 - 6)x_2 + (2 - 9)x_3 = 10 - 3 \cdot 6 \end{cases}$$

яъни

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 7x_2 - 8x_3 = -15 \\ -x_2 - 7x_3 = -8 \end{cases}$$

бўлади.

Шу билан биринчи қадам тугади.

Иккинчи қадамда, биринчи тенгламани ўз ўрнида қолдириб, иккинчи тенгламани (-7) га бўлиб ёзамиз:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_2 + \frac{8}{7}x_3 = \frac{15}{7}, \\ x_2 + 7x_3 = 8. \end{cases}$$

Учинчи тенгламадан x_2 номаълумни йўқотамиз, бунинг учун иккинчи тенгламани (-1) га кўпайтириб учинчи тенгламага қўшамиз:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_2 + \frac{8}{7}x_3 = \frac{15}{7}, \\ \frac{41}{7}x_3 = \frac{41}{7}. \end{cases}$$

Охирги тенгламадан $x_3 = 1$ ни топамиз. $x_3 = 1$ ни иккинчи тенгламага кўйсак, $x_2 + \frac{8}{7} = \frac{15}{7}$ ёки $x_2 = \frac{15}{7} - \frac{8}{7} = 1$, $x_2 = 1$ бўлади. $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ ларни биринчи тенгламага кўйсак $x_1 = 1$ бўлади. Шундай қилиб, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

Гаусс усулининг хусусияти шундан иборатки, унда системанинг биргаликда масаласини олдиндан аниқлаб олиш талаб этилмайди ва:

1) система биргаликда ва аниқ бўлса, у ҳолда усул ягона ечимга олиб келади;

2) система **биргаликда ва аниқмас бўлса**, бу ҳолда бирор қадамда иккита айнан тенг тенглама ҳосил бўлади ва шундай қилиб, тенгламалар сони номаълумлар сонидан битта кам бўлиб қолади;

3) система **биргаликда бўлмаса**, у ҳолда бирор қадамда чиқарилаётган (йўқотилаётган) номаълум билан биргаликда қолган барча номаълумлар ҳам йўқотилади, ўнг томонда эса нолдан фарқли овоз ҳад қолади.

Жардоно-Гаусс модификациялашган усули. Маълумки, Гаусс усули билан чизиқли тенгламалар системасини ечишда тенгламалар системаси учбурчак кўринишдаги системага келтирилади. Номаълумларнинг қиймати бевосита топиладиган, яъни тескари қадам билан номаълумлар қийматини кетма-кет топишга ҳожат қолмайдиган усулни қараймиз. Бу усулни ушбу чизиқли тенгламалар системасининг ечимини топиш билан ифодалаймиз.

7-мисол.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23 \end{cases}$$

тенгламалар системаси ечимини топимиз.

Ечиш. 1-тенгламани ўзгаришсиз қолдириб системанинг қолган тенгламаларидан x_1 номаълумни йўқотамиз, бунинг учун 1- тенгламани кетма-кет (-4), (-1) га кўпайтириб мос равишда 3,4-тенгламаларга ҳадма-ҳад қўшиб ушбу системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 0 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 0 - 8x_2 - 3x_3 + x_4 = 21, \\ 0 - x_2 - x_3 + 5x_4 = 15. \end{cases}$$

Энди 2-тенгламани ўзгаришсиз қолдириб, бошқа тенгламалардан x_2 номаълумни йўқотамиз, бунинг учун 2 тенгламани (-2), 8,1 ларга кетма-кет

кўпайтириб, мос равишда 1,3,4 – тенгламаларга ҳадма –ҳад қўшамиз ва ушбунни ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1 + 0 - 5x_2 - 2x_3 = -22, \\ 0 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 0 + 0 + 21x_3 + 9x_4 = 99, \\ 0 + 0 + 2x_3 + 6x_4 = 30. \end{cases}$$

Эндиги қадамда 3-тенгламани ўзгаришсиз қолдириб бошқа тенгламалардан x_3 номаълумни йўқотамиз, бунинг учун 3- тенгламани кетма-кет $(5/21)$, $(-3/21)$ $(-2/21)$ ларга кўпайтириб мос равишда 1,2,4 – тенгламаларга ҳадма-ҳад қўшсак, ушбу тенгламалар системаси ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} x_1 + 0 + 0 + \frac{3}{21} x_4 = \frac{33}{21}, \\ 0 + x_2 + 0 - \frac{6}{21} x_4 = \frac{18}{21}, \\ 0 + 0 + 21x_3 + 9x_4 = 99, \\ 0 + 0 + 0 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Охирги қадамда 4-тенгламани ўзгаришсиз қолдириб бошқа тенгламалардан, x_4 номаълумни йўқотамиз, бунинг учун 4 – тенгламани кетма-кет $(-\frac{21}{3})$, $(\frac{21}{6})$, (-9) ларга кўпайтириб, мос равишда 1,2,3- тенгламаларга ҳадма-ҳад қўшамиз натижада, ушбуга эга бўламиз:

$$\begin{cases} x_1 + 0 - 0 + 0 = 1, \\ 0 + x_2 + 0 + 0 = 2, \\ 0 + 0 + 21x_3 + 0 = 63, \\ 0 + 0 + 0 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Охирги системадан $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$ ягона ечимни оламиз. Юқоридаги тенгламалар системасини ечишда x_1 , x_2 , x_3 , x_4 номаълумларни кетма-кет йўқотдик, ҳисоблашларни ихчамлаштириш учун ҳар сафар коэффиценти 1 га тенг бўлган номаълумни чиқариш ҳам мумкин эди.

У усулда ҳам Гаусс усулининг хусусиятлари ўз кучида қолади, яъни тенгламалар системаси аниқ бўлса, бу усул ягона ечимга, тенгламалар системаси биргиликда лекин аниқ бўлмаса бирор қадамда $0=0$ тенглик ҳосил бўлиб чексиз кўп ечимга олиб келади. Тенгламалар системаси биргиликда бўлмаса, бирор қадамда тенгликларнинг бирининг чап томонида 0 ўнг томонида 0 дан фарқли сон бўлиб, система ечимга эга бўлмайди.

Такрорлаш учун саволлар

1. Кронекер-Капелли теоремасининг шarti нимадан иборат?
2. Қандай матрицага кенгайтирилган матрица дейилади?
3. Бир жинсли система деб қандай системага айтилади?
4. Бир жинсли система қандай ҳолда биргаликда?
5. Бир жинсли система нўлдан фарқли ечимга эга бўлиши учун қандай шарт бажарилиши керак?
6. Бош (базис) ўзгарувчилар нима?
7. Гаусс усулининг моҳияти нима?
8. Номаълумларни кетма-кет йўқотишнинг 1-қадами нимадан иборат?
9. Иккинчи қадам қандай?
10. Тескари қадам нима?
11. Система биргаликда ва аниқ дегани нима?
12. Система биргаликда ва аниқмас деганда нима тушунилади?
13. Гаусс усулининг Жордан модификацияси нимадан иборат?

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. Ушбу

$$1) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 11x_4 = -4 \end{cases} ; \quad 2) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

тенгламалар системасининг биргаликдалигини текширинг ва уларнинг ечимини топинг.

2. Қуйидаги тенгламалар системасини ечинг:

$$1) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases} ; \quad 2) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0. \end{cases}$$

3. Қуйидаги бир жинсли тенгламалар системасини ечинг:

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} ; \quad 2) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 12x_2 + 13x_3 - x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

4-7. Қуйидаги тенгламалар системасини ечинг:

$$4. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases} \quad 5. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12. \end{cases} \quad 7. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -6. \end{cases}$$

Мавзу: Векторлар назарияси. Векторлар устида чизиқли амаллар. Векторнинг проекциялари, йўналтирувчи бурчаклари ва модули. Базис, векторларнинг ташкил этувчилари.

Режа

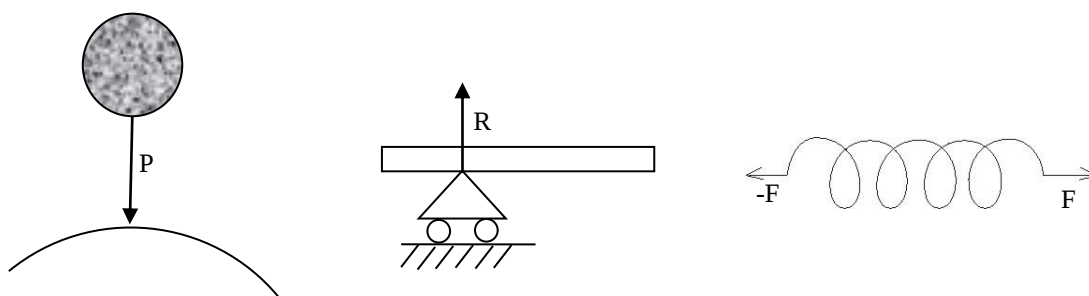
1. Скаляр ва вектор миқдорлар.
2. Векторлар устида чизиқли амаллар (қўшиш, айириш ва скалярга кўпайтириш).
3. Векторнинг ўқдаги проекцияси.
4. Векторнинг йўналтирувчи бурчаклари (йўналтирувчи косинуслари).
5. Текисликдаги ва фазодаги векторлар базиси. Ортогонал ва ортонормал базислар. Векторларнинг ташкил этувчилари.

Таянч сўз ва иборалар: скаляр миқдор, вектор миқдор, проекция (соя), координаталар системаси, базис, бирлик вектор, ортогонал векторлар, модуль, йўналтирувчи бурчак, векторнинг координаталари, векторнинг компонентлари (ташкил этувчилари).

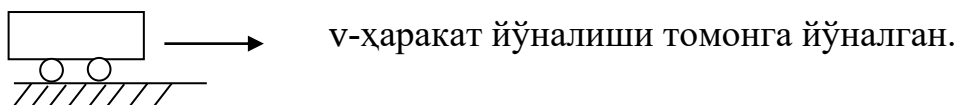
Таъсир муҳитларни ўрганар эканмиз, кўпинча икки хил миқдорни бири-биридан фарқ қиламиз. Улардан бири **скаляр** миқдор. Иккинчи эса **вектор** миқдордир.

Вектор – бу ҳам миқдор ўлчовига, ҳамда йўналишга эга бўлган катталиқ.

Мисол: Куч (оғирлик кучи, реакция кучи, эластиклик кучи),



ёки тезлик ва тезланиш



Ана шу мисол қилганимиз кучлар физик қонунларда :

- а) $P=mg$ (g – эркин тушиш тезланиши. m - жисм массаси, P -шу жисмнинг ерга тортиш кучи);
- б) $R=-kF$ F таянчга босувчи актив куч (масалан юк), R - реакция кучи;
- с) F ва $-F$ лар пружинани икки ёққа чўзувчи кучлар ($F=\rho slg$). g - қаттиқлик коэффисиенти. ρ – зичлик. l – пружина узунлиги, s – кўндаланг кесим юзаси;

д) $J = \frac{mv^2 - mv_o^2}{2}$ - инерция кучи

формулалар билан ифодаланадики, бунда иштрок этаётган m – масса, (ρ – зичлик, s – кўндаланг кесим юзи, ... кабилар ҳеч қандай йўналишга эга эмас, аммо маълум бир катталиқни ифодаловчи фактор.

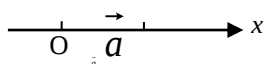
Масалан $P=mg$ – ни олсак P - куч миқдор ва у ер марказига йўналган. Аммо жисм ҳаракатдами ёки тинч турибдими, барибир ундаги модда миқдори ўзгармайди. Яъни жисмдаги модда миқдори – скаляр миқдордир.

Вектор $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ уoki $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \dots$ каби ҳарфлар билан белгиланиб, каби стрелка билан ифодаланади.

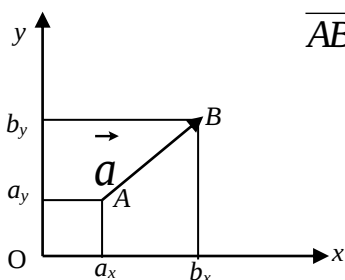
$A \xrightarrow{\quad} B$ $\overrightarrow{AB}$ А нуқта векторнинг боши, В- эса охири (uchi) стрелка эса Унинг йўналиши дейилади.

У ётган тўғри чизик векторнинг йўналтирувчи чизиғи (ўқи) деб юритилади. Координаталар системасида: вектор ўзининг координаталари билан берилади:

а)

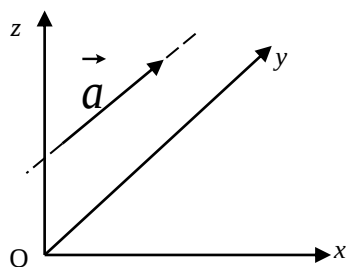


б)



$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} = \{a_x, a_y\} \text{ yoki } \overrightarrow{AB}; A(a_x, a_y), B(b_x, b_y)$$

с)



$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$$

Бундай берилишларни векторнинг декарт координаталари системасидаги берилиши деймиз.

Хусусан $\vec{AB} = \{b_x - a_x, b_y - a_y\}$ ни $\vec{AB}$ вектор учлари (A va B) ning координат ари билан берилган деймиз. $\vec{a} = \{a_x, a_y\}$ ни эса $\vec{a}$ -вектор ўзининг координата ўқларидаги соялари (проекциялари) билан берилган деймиз.

Албатта биз ўрта мактабда нуктанинг геометрик ўрнини аниқлашни ўрганганмиз.

Келинг тушунишни осонлаштириш учун икки ўлчовли (xOy) тўғри бурчакли координаталар системасини олиб, бу катталикларни ясаймиз ва миқдорлар муносабатини аниқлаймиз.

Берилган $A(a_x, a_y)$ va $B(b_x, b_y)$; 1) $\vec{AB}$ ясалсин. 2) Унинг проекциялари ва модули топилсин.

Эслатма. A нуктани яшаш учун Oх- ўқидан a_x кесма ажратиб, унинг охиридан Oу-га параллел штрих Oу ўқидан a_y кесмани ажратиб, уни охиридан Oх-га параллел чизиклар чиқарамиз, уларнинг кесушуви ягона бўлиб, A нуктанинг ўрнини белгилайди. Шундай қилиб, B ни ясаймиз. Уларни тўғри чизик кесмаси билан туташтириб, B томонга стрелка қўямиз, / вектор ясалди. Ординаталарга параллел штрих чизиклар билан $\triangle ABD$ ни ясаймиз. Мулоҳаса қилиб кўрайлик.

1. $\triangle ABD$ - тўғри бурчакли.

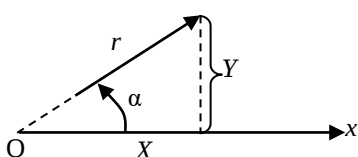
2. $\angle BAD$ ни α деб белгиласак ва $\vec{AB}$ нинг Oх ўқиға оғиш бурчаги.

3. $|\vec{AB}| = r$ билан $\vec{AB}$ вектор узунлигини белгиласак ва уни векторнинг модули деб атасак: α - оғиш бурчагини Oх га нисбатан $\vec{AB}$ ни йўналтирувчи бурчаги деб атасак, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\begin{aligned} 1. \quad X &= b_x - a_x = np_{Ox} \vec{AB} = r \cos \alpha \quad | \Rightarrow r = |\vec{AB}| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2} \\ Y &= b_y - a_y = np_{Oy} \vec{AB} = r \sin \alpha \quad | \end{aligned}$$

кўриниб турибдики, α ва r – берилган $\vec{AB}$ векторни ягона равишда ифодалайди.

2. Демак, вектор $r = (r, \alpha)$ -кўринишда ҳам берилар экан .



Бундай берилишга кутб координаталар системасида векторнинг берилиши деб атаймиз. У вақтда:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$3. \quad \left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{X}{r} = \frac{X}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \alpha &= \frac{Y}{r} = \frac{Y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \right| \quad \left. \begin{aligned} x &= r \cos \alpha \\ y &= r \sin \alpha \end{aligned} \right\}$$

Формулаларни координаталар алмаштириш формулалари деб атаймиз.

4. Эслатма : $AB = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2}$ формула икки нукта орасидаги масофа (кесманинг узунлиги)ни топиш формуласи деб ҳам юритишади. Векторлар майдон тушунчасини вужудга келтириш учун қуйидаги тушунчаларни киритамиз.

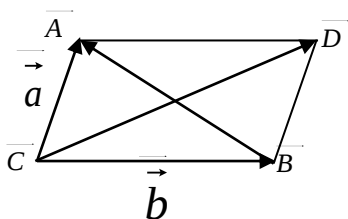
а) Модули (узунлиги) 1га тенг векторни бирлик вектор деб атаймиз ва уларни $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ деб атаймиз. ($|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$).

б) Агар $\vec{i} \perp \vec{j}, \vec{j} \perp \vec{k}, \vec{k} \perp \vec{i}$ бўлса бу векторларни ортогонал векторлар деб атаймиз

в) Векторни k скаляр (сонга) кўпайтирганда, аввалги $(\vec{a})$ векторга нисбатан скаляр k баробар узайган, аммо йўналиши аввалгича қолган вектор ҳосил бўлади.

$$\begin{array}{c} \text{-----} \rightarrow \text{-----} \rightarrow \\ k\vec{a} = \vec{a}_1 \end{array} \quad \vec{a} \parallel \vec{a}_1$$

г) Эслатма. Ўрта мактабдан биламизки, икки вектор қўшилганда улардан параллелограмм ясашиб, улар қўйилган нуктадан чиққан диагонални эса уларнинг йиғиндиси деб, иккинчи диагонални эса уларнинг айирмаси деб олинади.



$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \vec{c} = \overrightarrow{AD} \\ \vec{a} - \vec{b} &= \vec{d} = \overrightarrow{BD} \end{aligned}$$

Эътибор қилинг:

$$\begin{aligned} \vec{b} \parallel \overrightarrow{AD}, |\vec{b}| &= |\overrightarrow{AD}| \\ \vec{a} \parallel \overrightarrow{BD}, |\vec{a}| &= |\overrightarrow{BD}| \end{aligned}$$

Демак, $\overrightarrow{AD}$ вектор берилган $\vec{b}$ векторга коллинеар (бир текисликда ётувчи а йўналтирувчи чизиклари ўзаро параллел) векторлардир.

Чизмадан кўриниб турибди: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \overrightarrow{AD} = \vec{c}$ экан.

1. Демак, икки векторни қўшиш учун уларни бирин -кетин қўйиб, очик учларини туташтириш лозим экан.

2. Икки векторни бирдан икинчисини айириш учун уларни $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ шаклда бирин-кетин қўйиб, очик учларини туташтириш лозим экан.

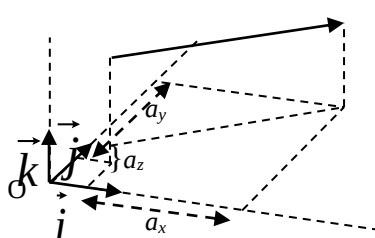
Демак, n та вектор берилганда ҳам, бу амал қўшиш ёки айиришда муаммо вужудга келтирмас экан.

векторларни қўшиш ва айириш.

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\} \quad \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\} \quad \vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \{a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z\}$$

Таъриф : $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ -ortonormal vektorlar sistemasi bo'lsa, uni bazis deb ataymiz va uni **вектор координаталар системаси** деб қабул қиламиз.



$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$$

$$\vec{a}_x = a_x \vec{i}$$

$$\vec{a}_y = a_y \vec{j}$$

$$\vec{a}_z = a_z \vec{k}$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

ифодалар $\vec{a}$ vektorning $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ -ортонормал базисдаги берилиши дейилади.

Чизмага яхшироқ эътибор берилса, $\vec{a}$ қолган учта $a_x \vec{i}, a_y \vec{j}, a_z \vec{k}$ векторлар йиғиндиси (қўшилиувидан) ҳосил бўлган вектордир.

Демак, a_x, a_y, a_z - larni $\vec{a}$ vektorning $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ йўналишлардаги проекцияси дейиш билан бирга $a_x \vec{i}, a_y \vec{j}, a_z \vec{k}$ векторларни унинг ташкил этувчилари деб айта оламиз.

Мисол : $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ | berilgan $\vec{a} + \vec{b}$ - ni tashkil etuvchilari bilan yozing.

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \quad |$$

Жавоб:

$$\vec{a} + \vec{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\} = (\text{yoki}) = (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k}$$

деб ёза оламиз.

Албатта, йўналтирувчи бурчаклар ортонормал базис ҳам ўз маъно-эътиборини сақлайди.

$$(\vec{i} \wedge \vec{a}) = \alpha, (\vec{j} \wedge \vec{a}) = \beta, (\vec{k} \wedge \vec{a}) = \gamma, a_x = n p_i \vec{a}, a_y = n p_j \vec{a}, a_z = n p_k \vec{a}$$

Теорема : $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

$$\text{Исбот : } \cos \alpha = \frac{a_x}{r}, \cos \beta = \frac{a_y}{r}, \cos \gamma = \frac{a_z}{r}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{a_x^2}{r^2} + \frac{a_y^2}{r^2} + \frac{a_z^2}{r^2} = \frac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Мустақил иш учун топшириқлар.

1. Учлари $A(1,2,3)$, $B(3, -2, 3)$ нуқталарда бўлган вектор ясалсин ва модули, проекциялари, ташкил этувчилари топилсин, йўналтирувчи бурчаклари топилсин.
2. $\vec{a} = \{1; 2; 3\}$ $\vec{b} = \{2; 4; 5\}$ векторлар ясалсин.
 $\vec{a} + \vec{b} = ?$ $\vec{a} - \vec{b} = ?$ Уларнинг модули топилсин.

Мавзу: Икки векторнинг кўпайтмаси, унинг механик маъноси ва хоссалари, векторлар орасидаги бурчакни топиш формуласи. Икки векторнинг перпендикулярлик (ортогоналлик) шarti. Икки векторнинг векторли кўпайтмаси. Векторли кўпайтманинг хоссалари ва геометрик маъноси. Икки векторнинг коллинеарлик шarti. Уч векторнинг аралаш кўпайтмаси, унинг геометрик маъноси. Уч векторнинг компланарлик шarti.

Режа:

1. Кўпайтманинг таърифи, унинг хоссалари.
2. Кўпайтманинг механик маъноси.
3. Кўпайтманинг координаталар орқали ифодаси.
4. Икки вектор орасидаги бурчак косинусини топиш.
5. Икки векторнинг перпендикулярлик (ортогоналлик) шarti.
6. Икки векторнинг векторли кўпайтмаси, унинг хоссалари;
7. Векторли кўпайтманинг геометрик маъноси;
8. Икки векторнинг коллинеарлик шarti;
9. Уч векторнинг аралаш кўпайтмаси, унинг хоссалари;
10. Аралаш кўпайтманинг геометрик маъноси;
11. Уч векторнинг компланарлик шarti.

Таянч сўз ва иборалар: ko'paytma, ikki vektor orasidagi burchak, ikki vektorning ortogonalligi. vektorli ko'paytma, aralash ko'paytma, ikki vektorning kollinearligi, uch vektorning komplanarligi, o'ng va chap sistemalar.

Маъруза матни.

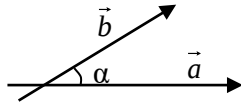
Ўтган дарсимиздан маълумки, векторни скалярга кўпайтирсак, скаляр баробар ўзгарган (миқдоран) ва ёналиши аввалгича қолган янги вектор вужудга келади.

Векторга механик маъно берсак, биз тезлик, тезланиш ва кучларни эслаймиз V ҳам тезлик, $V_1 = kV$ ҳам тезлик.

V ни k (скаляр) сонга кўпайтириш билан яна янги тезликни олдик, бунда $V_1 \| kV : |V_1| = k|V|$.

Бу дарсимизда иккита векторни (тезликни) ўзаро кўпайтиришга уриниб кўрамиз.

Албатта биз кўпайтириш натижасига қараб уларни номлаймиз. Айтайлик $\vec{a}$ va $\vec{b}$ -векторлар берилган бўлсин.



($\vec{i}$, $\vec{j}$) –ортономал базис бўлсин.

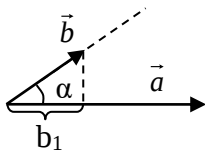
$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j}$$

$$\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j}$$

1-таъриф . Икки вектор орасидаги бурчак деб, уларнинг йўналтирувчи чизиқлари орасидаги бурчакка (α) айтамыз.

2-таъриф . $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = ab \cos \alpha$ $[(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \alpha]$ son miqdorga $\vec{a}$ va $\vec{b}$ векторларнинг кўпайтмаси деб айтамыз. (Ана кўрдингизми, кўпайтма натижаси скаляр миқдор бўлгани учун, уни скаляр кўпайтма деб атаган эканмиз.)

Геометрик жиҳатдан таҳлил қилиб кўрайлик. Векторларни ўзи бўйлаб хоҳлаган нуқтага кўчириш мумкин. Бу билан унинг таъсир даражаси ўзгармайди. Демак, берилган икки векторни уларнинг таъсир даражаси кесишган нуқтага келтириш мумкин.



$$b_1 = np_{\vec{a}} \vec{b} = b \cos \alpha$$

$$a_1 = np_{\vec{b}} \vec{a} = a \cos \alpha$$

Бу яшаш ва улардан келиб чиққан иборалар кўрсатаяптики:

$$\vec{a} \cdot np_{\vec{a}} \vec{b} = ab \cos \alpha = ba \cos \alpha = b np_{\vec{b}} \vec{a}$$

Яъни, икки векторнинг скаляр кўпайтмаси скаляр миқдор бўлиб, уларнинг бирини иккинчисининг ундаги проэкцияси баробар орттириш (кўпайтириш) экан.

Агар бу ифодада механик маъно берсак, хусусан $\vec{a} = \vec{F}, \vec{b} = \vec{S} = \vec{v}t$ маънода олсак, $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (Fvt) = (\vec{F} \cdot \vec{v})t = F \cdot vt = FS = A$ бажарилган иш келиб чиқади ва бунда $A = (FS) = (SF) = (b \cdot a)$ – ишнинг миқдори кўпайтувчиларнинг ўрнига боғлиқ эмас.

Скаляр кўпайтма қуйидаги хоссаларга эгаллиги ҳам бу орада келиб чиқди.

$$1) (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{a})$$

$$2) (\lambda \vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$3) (\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{c})$$

Энг кейинги хоссани қуйидагича исбот қиламиз.

$$(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = anp_{\alpha} (\vec{a} + \vec{c}) = a [np_{\vec{a}} \vec{b} + np_{\vec{a}} \vec{c}] = anp_{\vec{a}} \vec{b} + anp_{\vec{a}} \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{c})$$

Ҳамонки биз скаляр кўпайтма ифодасида икки вектор орасидаги бурчакдан фойдаланар эканмиз, икки ҳолатни ($\alpha=0$; $\alpha=90$) алоҳида қайд этамиз.

а) Демак, икки вектор ўзаро ортогонал бўлса, $(\vec{a} \vec{b}) = 0$ бўлар экан.
Бундан кейин $(\vec{a} \vec{b}) = 0$ тенгликни икки векторнинг ортогоналлик шарти деймиз.

Демак (i, j, k) ортонормал базисда $(i, j)=0$, $(i, k)=0$, $(k, j)=0$ экан.

б) ҳолатни, яъни $\alpha = (\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$ ҳолатни кейинги дарсга қолдириб, скаляр кўпайтмага оид бошқа формулаларни келтириб чиқарамиз.

$(\vec{a} \vec{b}) = (a_1 i + a_2 j; b_1 i + b_2 j) = a_1 b_1 (i i) + a_1 b_2 (i j) + a_2 b_1 (j i) + a_2 b_2 (j j) = a_1 b_1 + a_2 b_2$
келиб чиқар экан, чунки

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} \text{ bo'lsa,} & (i i) &= |i| \cdot |i| \cos 0^\circ = 1 \cdot 1 = 1 \\ \vec{b} &= b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} & (i j) &= |i| |j| \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \\ (\vec{a} \cdot \vec{b}) &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ \cos \alpha &= \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{a \cdot b} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \end{aligned}$$

Ҳосил бўлган формулаларни икки вектор ортонормал базисда ўз координаталари (компонентлари) билан берилганда мос равишда уларнинг кўпайтмасини ва улар орасидаги бурчак косинусини топиш формуласи деб атаймиз.

Икки векторнинг ортогоналлик шартига эътибор берсак :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0 \text{ kelibchiqadi yoki bundan}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = -\frac{b_2}{b_1} \text{ shart hosil bo'ladi.}$$

Кейинги ифоданинг ҳар иккаласи ҳам икки векторнинг ўзаро ортогоналлик шарти дейилади.

Уч ўлчовли фазо учун бу формула ва шартларни исботсиз келтирамиз.

$$(i j k) \quad \vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad \vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$$

$$(a \cdot b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad \cos \alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{a \cdot b}$$

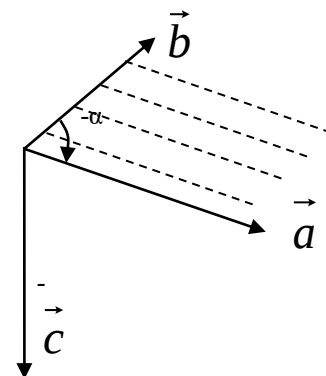
$$a \perp b \text{ bo'lsa } a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \text{ bajariladi.}$$

Маъруза матни

1. Айтайлик, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ва улар орасидаги $(a \wedge b)$ – бурчак (α) берилган бўлсин.

Таъриф: $[\vec{a} \vec{b}] = \vec{a} \vec{b} \sin \alpha$ катталиқ билан ифодаланувчи вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг векторли кўпайтманинг натижаси- вектор экан. Уни $\vec{c}$ деб белгилаймиз: $[\vec{a} \vec{b}] = \vec{c}$.

$\vec{c}$ – ning yo'nalishi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ векторлар текислигига перпендикуляр ва $\vec{c}$ – ning uchidan qaraganda o'ngda $\vec{a}$, chapda esa $\vec{b}$ вектор ётган бўлади.



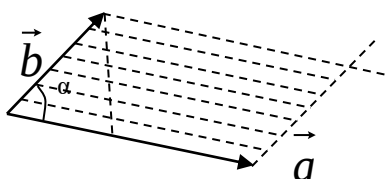
$$[\vec{a} \vec{b}] = \vec{c} \quad [\vec{a} \vec{b}] = |\vec{b}| |\vec{a}| \sin(-\alpha) = -\vec{b} \vec{a} \sin \alpha = -\vec{c}$$

$$\text{Demak } [\vec{a} \vec{b}] = -[\vec{b} \vec{a}] \text{ Vektorli } [\vec{a} \vec{b}] = ab \sin(\alpha \wedge b)$$

кўпайтманинг қиймат маъносини текшириб кўрайлик.

$$|\vec{c}| = ab \sin \alpha = a \cdot n p_h b = ah = S = \vec{a} \vec{b}$$

Демак, икки векторнинг векторли кўпайтмасининг модули шу векторлардан тузилган параллелограмм юзини берар экан.



Xususiyl holda $a=0$ bo'sa, $a \parallel b$ degan xulosa келиб чиқади. $\sin 0 = 0$ бўлганидан $[\vec{a} \vec{b}] = 0$ ҳосил бўлади. Бу ифодани икки векторнинг параллеллик шарти деб айтамыз.

1. Векторлар (i, j, k) базисдаги ўз координатлари билан берилган бўлсин. $a = \{a_1 a_2 a_3\}$ $b = \{b_1 b_2 b_3\}$. Юқоридаги катталиклар ва ҳолатлар ифодаланадиган формулаларни топамиз. Аввало (i, j, k) базис векторларини векторли кўпайтирамыз. $[i j] = |i| |j| \sin 90 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = k$

Яхшироқ ўйлаб қарасак, векторлар жойлашувининг ўнг системаси юзага

$$[i j] = k, [j i] = -k$$

келди: Демак: $[j k] = i, [k j] = -i$

$$[k i] = j, [i k] = -j$$

Табиийки $[i j] = 0, [j j] = 0, [k k] = 0$ chunki $[i i] = 1 \cdot 1 \sin 0 = 1 \cdot 0 = 0$

$$\begin{aligned} [a b] &= [a_1 i + a_2 j + a_3 k; b_1 i + b_2 j + b_3 k] = a_1 b_1 [i i] + a_1 b_2 [i j] + a_1 b_3 [i k] + \\ &+ a_2 b_1 [j i] + a_2 b_2 [j j] + a_2 b_3 [j k] + a_3 b_1 [k i] + a_3 b_2 [k j] + a_3 b_3 [k k] = a_1 b_2 k - \\ &- a_1 b_3 j - a_2 b_1 k + a_2 b_3 i + a_3 b_1 j - a_3 b_2 i = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + \\ &+ (a_1 b_2 - a_2 b_1) k. \end{aligned}$$

1-савол: Биз амални бажаришда аввалдан билган қандай қоидалардан фойдаландик? Жавоб: а) Биринчидан, вектор базисдаги компонентлари билан берилганда уни базис векторлари орқали (ёйилма шаклида) ифодаланишдан фойдаландик.

б) Иккинчидан, ёйилмалар алгебраик кўпхад шаклида бўлганлигидан кўпхадни кўпхадга кўпайтиришдан фойдаландик.

с) Учинчидан, векторли кўпайтманинг $[\lambda \bar{a} \bar{b}] = \lambda [\bar{a} \bar{b}]$ хусусиятидан, ҳамда базис векторларнинг векторли кўпайтмаси натижаларидан ойдаландик.

$$\text{Демак, } [\bar{a} \bar{b}] = (a_2 b_3 - a_3 b_2)i + (a_3 b_1 - a_1 b_3)j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)k$$

$$|\bar{c}| = |[\bar{a} \bar{b}]| = \sqrt{(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}$$

Векторли кўпайтмада «коэффициентлар кўпайтмаси» да адашиб қолмайдиган яна бир ифода формаси бор!

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2)i + (a_3 b_1 - a_1 b_3)j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)k =$$

$$\text{Қаранг! } \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \text{ Demak } [\bar{a} \bar{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Бу икки векторнинг векторли кўпайтмасини аниқловчи (матрицавий) шаклидаги ифодасидир.

2-савол: Икки векторнинг векторли кўпайтмасининг модули геометрик жиҳатдан шу икки вектордан тузилган параллелограммнинг юзини белгилашни биламиз. Айтингчи, бу икки вектордан тузилган Δ нинг юзи қандай топилади?

Жавоб:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} S_{\bar{a}\bar{b}\text{napr.}} = \frac{1}{2} \sqrt{(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}$$

$(i \ j \ k)$ – ortonormal bazisda $\bar{a}(a_1 \ a_2 \ a_3)$, $\bar{b}(b_1 \ b_2 \ b_3)$ va $\bar{d}(d_1 \ d_2 \ d_3)$,

векторлар берилган бўлсин.

$[\bar{a} \bar{b}]$, $\bar{d}$ кўпайтмани уч векторнинг аралаш кўпайтмаси деб атаيمиз.

Уларнинг биринчи икkitаси, ўзаро векторли кўпайтирилиб: $[\bar{a} \bar{b}] = \bar{c}$, натижаси учинчи вектор билан скаляр кўпайтирилади.

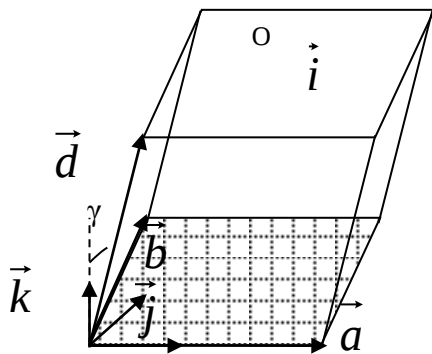
Геометрик жиҳатдан аралаш кўпайтма қиймати нимани беришини аниқлаймиз. Соддалик учун (i, j, k) базисни шундай танлайликки, $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar $(i \ j)$ – текисликда ётсин.

Эслатма: Албатта векторларнинг ўзаро жойлашувигина уларнинг ўзига мос мазмунни ҳосил қилади ва базисни танлаш улар берадиган мазмунни ҳеч қачон ўзгартирмайди. Шу сабабли биз базисни жойлаштиришда эркинликка эгамиз.

Яшадан кўриниб турибдики, $\bar{c} = [\bar{a} \bar{b}]$ – вектор k – bazis yo'nalishiga

$$\text{Лишда } \bar{c} \bar{d} = |\bar{c}| \cdot |\bar{d}| \cos(\angle \bar{c} \wedge \bar{d}) =$$

$$= |\bar{c}| \cdot |\bar{d}| \cos = |\bar{c}| H = S_{\text{napall}} \cdot H = V_{\text{nrizma}} \cdot \bar{a} \bar{b} \bar{d}.$$



Демак, уч векторнинг аралаш кўпайтмаси шу уч вектордан тузилган тўртбурчакли призма яъни параллелепипеднинг ҳажмини берар экан. Бу кўпайтма координаталар орқали қуйидагича ифодаланади:

$$[\vec{a} \ \vec{b}] \vec{d} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

Хусусий ҳолларда:

1. Агар $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ ўзаро ортогонал бўлса, $V_{\vec{a}\vec{b}\vec{d}} = abd$.
2. Агар учаласи бир текисликда ётса, $V=0$.

Демак, $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0$ келиб чиқади. Бу уч векторнинг компланарлик

шарти ҳам деб юритилади.

Мустақил шуғулланиш учун топшириқлар.

1. $|\vec{a}| = 4$ бўлган вектор 1- ўқ билан 45° ва 2-ўқ билан 60° -ли бурчак ташкил этади. Бу ўқлар ва вектор бир нуқтага келтирилган деб, $\vec{a}$ нинг 1 ва 2-ўқлардаги проэкциялари топилсин.
2. Агар $|\vec{a}| = 4$ вектор $(i \ j \ k)$ базисда берилиб, 1 -ўқ билан 45° , j вектор билан 60° бурчак ташкил этган бўлса, $\vec{a}$ векторнинг k вектор билан ташкил этган бурчагини топинг.
3. Агар $\vec{a} = \{-2, 3\}$, $\vec{b} = \{3, 5\}$, $\vec{c} = \{-2, 8\}$ bo'lsa $(2a + 3c; b - 2c)$ скаляр кўпайтмани топинг.

Қандай шарт берилганда икки вектор ўзаро параллел бўлади?

2. Қандай шарт бажарилганда икки вектор ўзаро перпендикуляр бўлади?

3. Қандай шарт бажарилганда уч вектор компланар бўлади?

4. Дарвоқе: компланар дегани нима дегани ?

Машқлар. 1) $\vec{a} = 5\vec{i}$, $\vec{b} = 4\vec{j}$

а) Улар ўзаро қандай жойлашган?

б) Улардан ясалган параллелограммнинг юзи нечага тенг?

2) $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (4, 2)$

а) Улар ўзаро қандай жойлашган?

б) $(\vec{a}, \vec{b}) = ?$

$$v) [a \ b] = ?$$

$$3) \bar{a} = 5i, \bar{b} = 4j, \bar{d}(2; 1; 3) \text{ bo'lsa}$$

a) (i, j, k) базисда векторларни ва улар ҳосил қилувчи параллелепипедни ясанг.

b) Параллелепипеднинг ҳажмини ҳисобланг.

ТЕКИСЛИКДА АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ

МАВЗУ. Текисликда аналитик геометрия. Координатлар усули

Режа:

1. Геометриянинг ривожланиш тарихидан.

Координатлар усули ва содда масалалар.

Таянч ибора ва тушунчалар

Геометрия ривожланиш тарихи, аналитик геометрия, координатлар усули ва содда(асосий) масалалар, координатлар, икки нукта орасидаги масофа, кесмани берилган нисбатда бўлиш, координатлар орқали учбурчак юзини топиш.

1. Геометриянинг ривожланиш тарихидан. Геометрия фани қадимий тарихга эга бўлиб, унга оид бошланғич тушунчалар бундан 4000 йил муқаддам Миср ва Бобилда вужудга келган. Геометрик билимларнинг вужудга келиши одамларнинг амалий фаолияти билан боғлиқ. Бу кўпгина геометрик фигураларнинг номларида ўз аксини топган. Масалан, трапеция номи юнонча *trapezion* - сўзидан олинган бўлиб, «столча» ни билдиради. «Чизиқ» термини латинча *linem* - «зиғир ип» сўзидан ҳосил бўлган.

Қадимдаёқ геометрия аксиомалар системасига асосан тузилган қатъий мантикий фанга айланган. У узлуксиз ривожланиб янги теоремалар, ғоялар ва усуллар билан бойиб борган.

Эрампдан аввалги III асрда юнон олими Евклид «Негизлар» номли асарини ёзади. Евклид шу давргача бўлган геометрик билимларни жамлади ва бу фаннинг тугалланган аксиоматик баёнини беришга ҳаракат қилди. Евклиддан сўнг яшаган олимлар унинг «Негизлар»ига баъзи мавзуларни қўшдилар, аниқликлар киритдилар.

Геометриянинг ҳозирги замон физикаси билан боғланишини кузатиш ғоят қизиқарли. Кўпинча математикани бойитган янги тушунчалар физика ҳамда химия ва табиатшуносликнинг бошқа бўлимларидан келади. Масалан, вектор механикадан олинганлиги мисол бўлаолади. Геометриянинг келгуси ривожланишида эса математиканинг ички талаби ва ўзига хос мантикий ривожланиши натижасида унинг ичида вужудга келган, янги геометрик тушунчалар янги замонавий физикани яратишга йўл очди. Масалан,

Лобачевский геометрияси нисбийлик назариясини очишга асос бўлиб хизмат қилди.

Ҳозирги замон геометрияси жуда кўп йўналишларга эга. Улардан бири геометрияни сонлар назарияси билан, иккинчиси квант физикаси билан, учинчиси эса математик таҳлил билан яқинлаштиради. Ҳозирги замон математикаси бўлимлари шундайки унда геометрия кўпроқми, алгебрами ёки таҳлил (анализ) айтиш қийин.

Геометриянинг ривожланишида Марказий Осиёдан чиққан математиклар Муҳаммад ибн Мусо ал-Хоразмий, Абу Райҳон Беруний, Абу Али ибн Сино, Абдурахмон ал-Ҳазиний, Абул Вафо Бузмоний, Умар Хайём, Мирзо Улуғбек, Ғиёсиддин ал-Коший ва бошқаларнинг хизмати каттадир.

XVII асрда француз математиги ва философи Рене Декарт ишлари туфайли, бутун математикани, хусусан геометрияни инқилобий қайта қурган координатлар усули (методи) вужудга келди. Алгебраик тенглик (тенгсизлик) ларни геометрик образ (график) лар орқали талқин қилиш ва аксинча геометрик масалаларни ечишни аналитик, формулалар, тенгламалар системалари ёрдамида излаш имкониятини пайдо қилди. Математика фанининг янги тармоғи аналитик геометрия вужудга келди. **Аналитик геометриянинг моҳияти, геометрик объектларга унинг алгебраик (аналитик) ифодасини мос қўйиб, уларнинг хусусиятларини ўрганишни, унга мос алгебраик ифодаларни текшириш орқали амалга оширилади.**

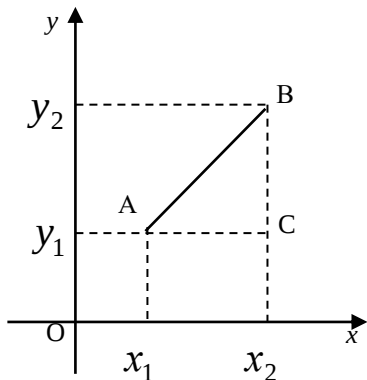
2. Координатлар усули ва содда масалалар. Маълумки, ўзаро перпендикуляр бўлган горизонтал ва вертикал сонлар ўқи Декарт тўғри бурчакли координатлар системасини ташкил қилади. Бу система орқали текисликдаги нуқта билан бир жуфт ҳақиқий сон ўртасида бир қийматли мослик ўрнатилади. Текисликда нуқта $A(x, y)$ билан белгиланади. x, y сонларга унинг координатлари дейилади. „Нуқта берилган“ деган ибора унинг координатларининг берилганлигини, „Нуқтани топинг“ деган ибора эса, шу координатларни топишни тушунилади. Координатлар системаси орқали ўрнатилган бундай мосликка **координатлар усули** дейилади.

Бу усулни геометриянинг **содда масалаларини ечишга** қўллаймиз.

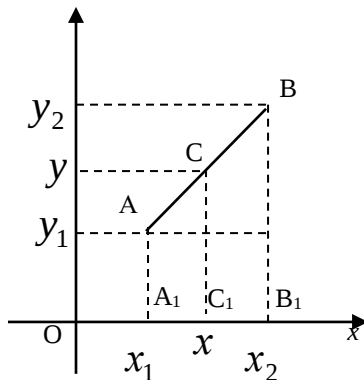
1) Текисликда берилган $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ нуқталар орасидаги масофани топиш талаб этилсин. Маълумки, $AC = x_2 - x_1$, $BC = y_2 - y_1$. ABC тўғри бурчакли учбурчакдан, $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, шундай қилиб,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1)$$

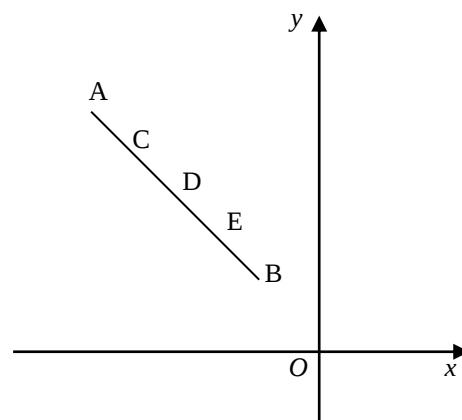
бўлади. (1) формулага текисликда берилган иккита нуқта орасидаги масофани топиш формуласи дейилади (1-чизма).



1-чизма



2-чизма



3-чизма

2) AB кесма берилган бўлиб, унинг учлари $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ бўлсин. AB кесмани $AC : BC = \lambda$ нисбатда бўлувчи $C(x, y)$ нуқтани топиш масаласи қўйилган бўлсин. Ўрта мактаб геометриясидан маълумки (2-чизма),

$$AC : A_1C_1 = BC : B_1C_1 = \lambda,$$

ёки

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \lambda$$

бўлиб,

$$A_1C_1 = x - x_1, \quad B_1C_1 = x_2 - x$$

бўлганлиги учун,

$$(x - x_1) : (x_2 - x) = \lambda, \quad x - x_1 = \lambda (x_2 - x); \quad x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2;$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

бўлади. Худди шундай ,

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Демак, C нуқтанинг координатлари учун

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad (2)$$

формулани ҳосил қилдик. (2) формулага AB кесмани λ нисбатда бўлувчи $C(x, y)$ нуқтани топиш формуласи дейилади. Хусусий ҳолда $C(x; y)$ нуқта AB кесмани тенг иккига бўлса, у ҳолда

$$\frac{AC}{CB} = \lambda = 1 \text{ бўлиб, } x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

кесмани тенг иккига бўлиш формуласи келиб чиқади.

3) Тўғри бурчакли координатлар системасида учлари $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ нуқталарда бўлган учбурчак юзи куйидаги формула орқали топилади:

$$S = \frac{1}{2}[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3)] \quad (3)$$

1-мисол. $M(5; 3)$ ва $N(2; -1)$ нуқталар орасидаги масофани топинг.

Ечиш. Шартга кўра: $x_1 = 5, y_1 = 3, x_2 = 2, y_2 = -1$. Буларни (1) формулага қўйсак:

$$MN = \sqrt{(2-5)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

бўлади.

2-мисол. Текисликда $A(5; 3)$, $B(2; 1)$ нуқталар берилган. AB кесмани $\frac{AC}{CB} = \lambda = 0,2$ нисбатда бўлувчи $C(x; y)$ нуқтанинг координатларини топинг.

Ечиш. Шартга кўра $x_1 = 5, x_2 = 2, y_1 = 3, y_2 = 1, \lambda = 0,2$.

(2) формулага асосан:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{5 + 0,2 \cdot 2}{1 + 0,2} = \frac{5 + 0,4}{1,2} = \frac{5,4}{1,2} = \frac{54}{12} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = 4,5;$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{3 + 0,2 \cdot 1}{1 + 0,2} = \frac{3 + 0,2}{1,2} = \frac{3,2}{1,2} = \frac{32}{12} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}.$$

Шундай қилиб, $C\left(4,5; \frac{8}{3}\right)$ бўлади.

3-мисол. Учлари $A(2; 0)$, $B(5; 3)$ ва $C(2; 6)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг юзини топинг.

Ечиш. (3) формулага кўра $x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 2, y_1 = 0, y_2 = 3, y_3 = 6$ бўлганлиги учун,

$$S = \frac{1}{2}[(2 \cdot 3 - 5 \cdot 0) + (5 \cdot 6 - 3 \cdot 2) + (0 \cdot 2 - 2 \cdot 6)] = \frac{1}{2}(6 + 24 - 12) = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9$$

бўлади.

4-мисол. $A(-6; 7)$ ва $B(-2; 3)$ нуқталар берилган. AB кесма C, D, E нуқталар орқали 4 та тенг қисмларга ажратилган. C, D, E бўлиниш нуқталарини топинг (3-чизма).

Ечиш: Маълумки $\frac{AC}{CB} = \frac{1}{3}, \frac{AD}{DB} = 1, \frac{AE}{EB} = 3.$

C нуқтанинг координатларини (2) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$x_c = \frac{-6 + \frac{1}{3}(-2)}{1 + \frac{1}{3}} = -5, \quad y_c = \frac{-6 + \frac{1}{3} \cdot 3}{1 + \frac{1}{3}} = 6$$

Демак, $C(-5, 6)$. (D ва E нуқталарни топиш ўқувчига ҳавола этилади).

Такрорлаш учун саволлар

1. Геометрия қачон пайдо бўлган ва қандай тарихга эга?
2. Геометрик билимларнинг келиб чиқиши нима билан боғлиқ?
3. Геометрия табиатшуносликнинг бошқа бўлимлари билан қандай боғланган?
4. Геометриянинг ривожда катта ҳисса қўшган Марказий Осиёлик олимлардан кимларни биласиз?
5. Координатлар усули нима?
6. Аналитик геометрия нимани ўрганади?
7. Берилган икки нуқта орасидаги масофа қандай топилади?
8. Кесмани берилган нисбатда бўлиш қандай бажарилади?
9. Учбурчакнинг учлари берилган бўлса, унинг юзи қандай топилади?

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. Координаталар бошидан $A(-3; 4)$ нуқтагача бўлган масофани топинг.
2. Учлари $A(4; 3), B(0; 0)$ ва $C(10, -5)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг периметрини топинг.
3. OY ўқида $A(4; 5)$ ва $B(3; 2)$ нуқталардан тенг узоқликда ётган $C(x; y)$ нуқтани топинг.
4. OX ўқида $A(0; 5)$ ва $B(-3; -2)$ нуқталардан тенг узоқликда бўлган нуқтани топинг.
5. $A(5, -4)$ нуқта ва AB кесманинг ўртаси $C(0; -3)$ берилган. Кесманинг иккинчи $B(x, y)$ учини топинг.

6. Учлари $A(3; 4)$, $B(7; 7)$, $C(4; 3)$ нукталарда бўлган учбурчакнинг тенг ёнли эканлигини кўрсатинг.

7. $A(2; 8)$ ва $B(6; -4)$ нукталар билан чегараланган AB кесма C, D, E нукталар билан 4 та тенг бўлақларга бўлинган. C, D , ва E нукталарни топинг.

8. AB кесма $C(-1; -2)$ ва $D(2; 0)$ нукталар орқали тенг уч бўлақларга бўлинган. A ва B нукталарни топинг.

9. Учлари $A(2; 5)$, $B(6; 3)$ ва $C(4; 0)$ нукталарда бўлган учбур- чакнинг юзи ҳисоблансин.

10. Учлари $A(3; 1)$, $B(4; 6)$, $C(6; 3)$ ва $D(5; -2)$ нукталарда бўлган тўртбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

Мавзу. Текисликда тўғри чизик ва унинг тенгламалари

Режа

2. Чизик ва унинг тенгламаси ҳақида.
3. Тўғри чизик ва унинг тенгламалари:
4. Тўғри чизикнинг бурчак коэффициентли тенгламаси.
5. Берилган битта ва иккита нуктадан ўтувчи тўғри чизик тенгламалари.
6. Тўғри чизикнинг умумий тенгламаси ва унинг хусусий ҳоллари.
7. Тўғри чизикнинг кесмаларга нисбатан тенгламаси.
8. Тўғри чизикнинг нормал тенгламаси.

Таянч ибора ва тушунчалар

Текисликда чизик ва унинг тенгламаси, бурчак коэффициент, тўғри чизикнинг бурчак коэффициентли тенгламаси, тўғри чизикнинг умумий тенгламаси, тўғри чизикнинг ўқлардан ажратган кесмаларга нисбатан тенгламаси, берилган битта нуктадан ўтувчи тўғри чизиклар тенгламаси, берилган икки нуктадан ўтувчи тўғри чизик тенгламаси, тўғри чизикнинг нормали, тўғри чизикнинг нормал тенгламаси.

1. Чизик ва унинг тенгламаси ҳақида. Аналитик геометриянинг энг муҳим тушунчаларидан бири, **чизик тенгламаси** тушунчасидир. Текисликда тўғри бурчакли координатлар системасида L чизик берилган бўлсин(4-чизма).

Таъриф. L чизикда ўтувчи исталган $M(x, y)$ нуктанинг координатлари

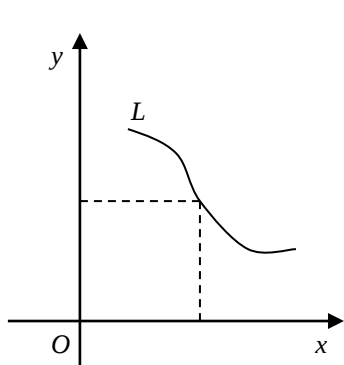
$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

тенгламани қаноатлантириб, унда ётмаган нукталарнинг координатлари қаноатлантирмаса, бу тенглама L чизикнинг тенгламаси дейилади. Бундан L чизик, координатлари (1) тенгламани қаноатлантирувчи барча нукталар тўпламидан иборат эканлиги келиб чиқади. Чизикнинг тенгламасини тузиш деганда унга тегишли ихтиёрий $M(x, y)$ нуктанинг координатлари орасидаги муносабатни(боғланишни) тенглама кўринишида ифодалашдан иборат. Топилган чизик тенгламаси учун: чизикдаги исталган нуктанинг

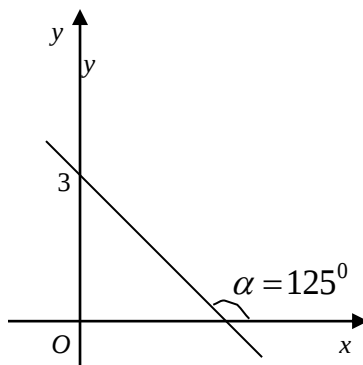
координатлари уни қаноатлантиради ва аксинча, нуқтанинг координатлари тенгламани қаноатлантирса, бу нуқта шу чизикда ётади.

2. Тўғри чизик ва унинг тенгламалари. Тўғри чизик тушунчаси аналитик геометриянинг асосий тушунчаларидан биридир. Қуйида ҳар хил ҳолатларда тўғри чизикнинг аналитик ифодаларини (тенгламаларини) келтириб чиқарамиз ва улар ёрдамида тўғри чизикнинг текисликдаги вазиятларини ўрганамиз.

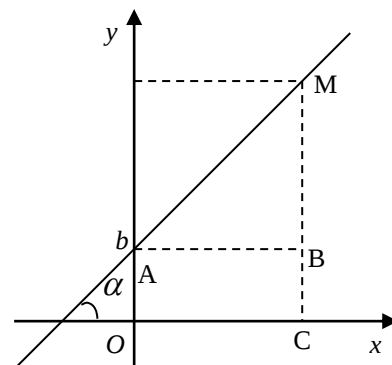
1) Тўғри чизикнинг бурчак коэффицентли тенгламаси. Тўғри чизикнинг OX ўқи мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчаги α ва тўғри чизикнинг ординатлар ўқидан ажратган кесмасининг катталиги b берилганда, унинг текисликдаги ҳолати аниқ бўлади. Масалан, $b = 3$, $\alpha = 125^\circ$ бўлса, унинг ҳолати аниқ бўлади (5-чизма).



4-чизма



5-чизма



6-чизма

Юқоридаги миқдорлар берилганда тўғри чизикнинг тенгламасини келтириб чиқарамиз. $M(x, y)$ тўғри чизикқа тегишли ихтиёрий нуқта бўлсин (6-чизма). AMB тўғри бурчакли учбурчакдан

$$\frac{BM}{AB} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ бундан } BM = AB \operatorname{tg} \alpha$$

6-чизмадан $y = BC + BM$; ёки $y = AB \operatorname{tg} \alpha + b$, $AB = x$ бўлганлиги учун $y = x \operatorname{tg} \alpha + b$ бўлади. $\operatorname{tg} \alpha$ тўғри чизикнинг **бурчак коэффиценти** дейилади ва $\operatorname{tg} \alpha = k$ билан белгилаймиз. Шундай қилиб,

$$y = kx + b \quad (2)$$

муносабат келиб чиқади. Бунга тўғри чизикнинг **бурчак коэффицентли тенгламаси** дейилади. $b = 0$ бўлса, тўғри чизик координатлар бошидан ўтиб, тенгламаси $y = kx$ бўлади. $k = 1$ бўлса, $y = x$ бўлиб, бу биринчи координатлар бурчагининг биссектрисаси бўлади.

1-мисол. OX ўқи билан 120° бурчак ҳосил қилувчи ва OY ўқини $A(0; 3)$ нуқтада кесиб ўтувчи тўғри чизикни ясанг ва унинг тенгламасини ёзинг.

Ечиш. Шартга кўра, тўғри чизик OY ўқини $A(0; 3)$ нуқтада кесиб ўтади, демак $b = 3$. Бу нуқтадан OX ўқига параллел чизик ўтказамиз, ҳамда шу тўғри чизик билан 120° бурчак ҳосил қилувчи томон, ясаилиши керак бўлган тўғри чизик бўлади.

Энди шу тўғри чизик тенгламасини ёзамиз. Бу ҳолда $k = \operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$, $b = 3$ бўлганлиги учун, $y = -\sqrt{3}x + 3$ тўғри чизикнинг бурчак коэффициентли тенгламаси бўлади.

2) Берилган битта нуқтадан ўтувчи тўғри чизиклар дастасининг тенгламаси. Берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизик тенгламаси. $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ нуқталар берилган бўлсин.

$$y = kx + b \quad (3)$$

тўғри чизик A нуқтадан ўтсин. Бу ҳолда A нуқтанинг координатлари тўғри чизик тенгламасини қаноатлантиради, яъни $y_1 = kx_1 + b$ бўлади. (3) тенгликдан охириги тенгликни айирсак:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad (4)$$

ҳосил бўлади. (4) тенгламага берилган **битта нуқтадан ўтувчи тўғри чизиклар дастасининг тенгламаси** дейилади.

Тўғри чизик $B(x_2; y_2)$ иккинчи нуқтадан ҳам ўтса,

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

бўлиб,

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

бўлади. k нинг юқоридаги қийматини (4)га қўйиб,

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (5)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (5) **берилган икки** $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизик тенгламаси дейилади.

2-мисол. Бирор хил маҳсулотдан 100 донасини ишлаб чиқаришга 300 минг сўм харажат қилинсин. 500 донаси учун эса харажат 1300 минг сўм бўлсин. Харажат функцияси чизикли (тўғри чизик) бўлса, шу маҳсулотдан 400 дона ишлаб чиқариш харажати топинг.

Ечиш. Масала шарти бўйича $A(100, 300)$ ва $B = (500, 1300)$ нуқталар берилган. Берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизик тенгламасига асосан,

$$\frac{y - 300}{1300 - 300} = \frac{x - 100}{500 - 100}, \text{ ёки } y = 2,5x + 50$$

тенглик ўринли бўлади. Охириги тенгламадан $x = 400$ учун, $y = 1050$ эканлигини топамиз. Демак, маҳсулотдан 400 дона ишлаб чиқариш учун 1050 минг сўм харажат қилинади.

3). Тўғри чизикнинг умумий тенгламаси ва унинг хусусий ҳоллари. Икки номаълумли

$$Ax + By + C = 0$$

тенгламани қараймиз.

Бундан, $By = -Ax - C$, $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ бўлиб, $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$ билан белгиласак, $y = kx + b$ тенглама ҳосил бўлади. Шундай қилиб, $Ax + By + C = 0$ тенглама ҳам тўғри чизик тенгламаси эканлиги келиб чиқади.

$$Ax + By + C = 0 \quad (6)$$

тенгламага тўғри чизикнинг **умумий тенгламаси** дейилади.

Тўғри чизик умумий тенгламасининг хусусий ҳоллари: 1) $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C = 0$ бўлса, $Ax + By = 0$ бўлиб, тўғри чизик координатлар бошидан ўтади, чунки $O(0;0)$ нуқтанинг координатлари тенгламани қаноатлантиради;

2) $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ бўлса, $y = -\frac{C}{B}$ бўлиб, OY ўқдан $-\frac{C}{B}$ кесма ажратиб, OX ўқига параллел тўғри чизик тенгламаси бўлади;

3) $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$ бўлса, $x = -\frac{C}{A}$ бўлиб, OX ўқдан $-\frac{C}{A}$ кесма ажратиб, OY ўқига параллел тўғри чизик тенгламаси бўлади;

4) $A = 0$, $C = 0$, $B \neq 0$ бўлса, $y = 0$ бўлиб, OX ўқининг тенгламаси ҳосил бўлади;

5) $B = 0$, $C = 0$, $A \neq 0$ бўлса, $x = 0$ бўлиб, OY ўқининг тенгламаси ҳосил бўлади;

6) $A = 0$, $B = 0$, $C \neq 0$ бўлса, $C = 0$ бўлиб, ўзгармас миқдор, бир пайтда 0 дан фарқли ҳамда 0 га тенг келиб чиқади, бундай бўлиши мумкин эмас.

3-мисол. $x - 2y + 6 = 0$ тўғри чизик учун k ва b параметрларни топинг.

Ечиш: Бунинг учун берилган тенгламани y га нисбатан ечамиз: $2y = x + 6$, $y = 1/2 \cdot x + 3$ бундан (2) тенглама билан таққослаб $k = 1/2$, $b = 3$, эканлигини топамиз. Шундай қилиб, тўғри чизик умумий тенгламасини бурчак коэффицентли тенгламага келтириб k ва b параметрларни топдик.

4). Тўғри чизикнинг кесмаларга нисбатан тенгламаси. Тўғри чизик координат ўқларидан мос равишда a ва b кесмалар ажратиб ўтсин(7-чизма). Тўғри чизик $A(a; 0)$ ва $B(0; b)$ нуқталардан ўтади. Берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизик тенгламасига асосан

$$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a}, \quad \frac{y}{b} = \frac{x-a}{-a}, \quad \frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1$$

$$\text{ёки} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (7)$$

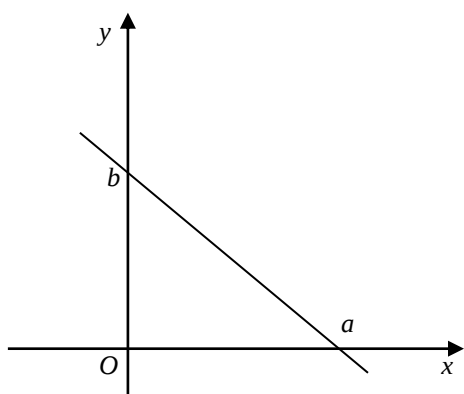
тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламага тўғри чизиқнинг **кесмаларга нисбатан тенгламаси** дейилади.

4-мисол. $3x + 5y - 15 = 0$ тўғри чизиқнинг кесмаларга нисбатан тенгламасини ёзинг ва уни ясанг.

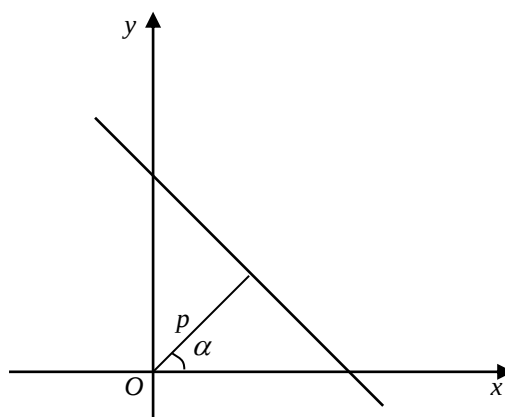
Ечиш. $3x + 5y - 15 = 0$ тўғри чизиқнинг умумий тенгламасини (7) кўринишдаги тенгламага келтирамиз.

$$3x + 5y = 15, \quad \frac{3x}{15} + \frac{5y}{15} = 1 \quad \text{ёки} \quad \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$$

бу тўғри чизиқнинг кесмаларга нисбатан тенгламаси бўлади. Энди координат ўқларидан мос равишда 5 ва 3 кесмаларни ажратиб, ажратилган кесмалар охиридан ясаши керак бўлган тўғри чизиқни ўтказамиз.



7- чизма.



8- чизма.

5). Тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси. Тўғри чизиққа координат бошидан туширилган перпендикулярнинг (нормал) узунлиги ва унинг OX ўқи мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчаги α берилганда тўғри чизиқнинг текисликдаги ҳолати аниқ бўлади (8-чизма) ва унинг тенгламаси

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad (8)$$

бўлади. (8) тенгламага тўғри чизиқнинг **нормал тенгламаси** дейилади.

Маълумки, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Нормал тенгламада шу шарт бажарилиши керак. Тўғри чизиқ умумий тенгламасини нормал тенглама келтириш учун

$$M = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

нормалловчи кўпайтувчини ҳисоблаб, уни $Ax + By + C = 0$

тенгламага кўпайтирамиз. Бу ҳолда

$$\frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} y + \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

нормал тенглама ҳосил бўлади. Нормалловчи кўпайтувчининг ишораси озод ҳад ишорасига тескари олинади.

5-мисол. Нормалнинг узунлиги $p = 3$ ва унинг OX ўқи билан ҳосил қилган бурчаги 30^0 бўлса, тўғри чизиқни ясанг ва унинг тенгламасини ёзинг.

Ечиш. Шартга кўра нормал OX ўқи билан 30^0 ли бурчак ташкил этади. Бу бурчакни ясаймиз ва унинг қўзғалувчи томони нормал тўғри чизиқ бўлади. Шу тўғри чизиқда $p = 3$ кесма ажратиб унинг охиридан унга перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу ясалиши керак бўлган тўғри чизиқ бўлади. Энди тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзамиз. Шартга кўра нормалнинг узунлиги ва унинг OX ўқи билан ҳосил қилган бурчаги берилган, бу ҳолда маълумки, тўғри чизиқнинг (8) нормал тенгламасини ёзамиз. $p = 3$, $\alpha = 30^0$ бўлганлиги учун

$$x \cos 30^0 + y \sin 30^0 - 3 = 0 \quad \text{ёки} \quad \sqrt{3}/2 \cdot x + 1/2 \cdot y - 3 = 0$$

Натижада $\sqrt{3}x + y - 6 = 0$ тенглама ҳосил бўлади.

6-мисол.. $4x - 3y - 5 = 0$ тўғри чизиқ тенгламасини нормал тенгламага келтиринг.

Ечиш. Нормалловчи кўпайтувчини топамиз: $M = \frac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{1}{5}$ бўлади.

Берилган тенгламани $M = 1/5$ кўпайтириб, $4/5 \cdot x - 3/5 \cdot y - 1 = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси, чунки

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = \frac{25}{25} = 1, \quad (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1) \quad \text{эди.}$$

Такрорлаш учун саволлар

1. Чизиқнинг тенгламаси деганда нима тушунилади?
2. Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси қандай ёзилади?
3. Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти деб нимага айтилади?
4. Берилган битта нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси қандай?
5. Берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси қандай?
6. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси ва унинг хусусий холлари нималардан иборат?
7. Тўғри чизиқнинг координат ўқларидан ажратган кесмаларига нисбатан тенгламаси қандай ёзилади?
8. Тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси қандай?
9. Нормалнинг узунлиги нима?
10. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламасини нормал тенгламага қандай қилиб келтирилади?
11. Тўғри чизиқнинг тенгламаси нормал кўринишдалигини қандай текширилади?

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. OY ўқидан $b = 4$ кесма ажратиб OX ўқи билан 135^0 бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқни ясанг ва унинг тенгламасини ёзинг.

2. OY ўқидан $b = -2$ кесма ажратиб OX ўқи билан 60^0 бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқни ясанг ва унинг тенгламасини ёзинг.

3. Координатлар бошидан ўтиб, OX ўқи билан:
1). 45^0 , 2). 120^0 , 3). 60^0 , 4). 90^0 бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқларни ясанг ва уларнинг тенгламаларини ёзинг.

4. 1) $3x + 5y + 15 = 0$; 2) $3x + 2y = 0$; 3) $y = -2$; 4) $x/4 + y/4 = 1$ тўғри чизиқлар учун k ва b параметрларни аниқланг.

5. 1) $4x + 3y - 12 = 0$; 2) $4x + 3y = 0$; 3) $2x - 7 = 0$; 4) $2y + 7 = 0$ тўғри чизиқларнинг кесмаларга нисбатан тенгламаларини ёзинг ва уларни ясанг.

6. $A(2; 3)$ нуқтадан ўтиб, OX ўқи билан 60^0 бурчак ҳосил қилувчи тўғри чизиқни ясанг ва унинг тенгламасини ёзинг.

7. 1) $2x - 3y - 6 = 0$; 2) $3x - 2y + 4 = 0$ тўғри чизиқ тенгламаларини, кесмалар бўйича тенгламасига келтиринг.

8. $Ax + 5y - 40 = 0$ тўғри чизиқ A нинг қандай қийматларида координат ўқларидан бир хил кесмалар ажратади.

9. Учлари $A(3; 4)$, $B(3; 2)$ ва $C(-1; 2)$ нуқталарда бўлган учбурчак томонларининг тенгламаларини ёзинг.

10. Тўғри чизиқнинг координатлар бошидан узоқлиги 3, унга координатлар бошидан туширилган перпендикуляр OX ўқи билан $\alpha = 45^0$ бурчак ҳосил қилса, тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг.

11. $x - y + 3 = 0$ тўғри чизиққа координатлар бошидан туширилган перпендикулярнинг узунлигини ва унинг OX ўқи билан ташкил қилган бурчагини топинг.

12. Ушбу 1) $\frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y - 6 = 0$, 2) $\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 7 = 0$

3) $\frac{3}{5}x + \frac{3}{4}y - 2 = 0$, 4) $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - 4 = 0$

тўғри чизиқ тенгламаларидан қайсилари нормал кўринишда?

13. Ушбу 1) $5x + 12y - 26 = 0$, 2) $3x - 4y + 10 = 0$,

3) $y = 3x + 5$, 4) $2x + 2y + 7 = 0$

тўғри чизиқ тенгламаларини нормал кўринишга келтиринг.

Мавзу. Иккинчи тартибли чизиклар

Режа

1. Иккинчи тартибли чизик ва унинг тенгламаси.
2. Айлана ва унинг тенгламаси.
3. Эллипс ҳамда унинг тенгламаси.
4. Гипербола ва унинг тенгламаси.
5. Парабола ва унинг тенгламаси.

Таянч ибора ва тушунчалар

Иккинчи тартибли чизик, айлана, эллипс, гипербола, парабола, эллипс ва гипербола ярим ўқлари, асимптота, қўшма гипербола, каноник тенглама, симметрия маркази, симметрия ўқи, эксцентриситет, фокус, директриса, парабола фокуси.

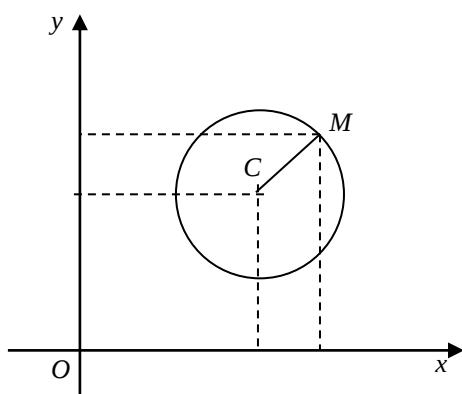
1. Иккинчи тартибли чизик ва унинг тенгламаси. Маълумки, текисликда тўғри чизик x ва y ўзгарувчи координатларга нисбатан биринчи даражали эди. Энди текисликда иккинчи тартибли чизикларни ўрганамиз. Иккинчи тартибли чизиклар x ва y ўзгарувчи координатларга нисбатан иккинчи даражали тенглама билан ифодаланади. Иккинчи даражали тенгламанинг умумий кўриниши

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

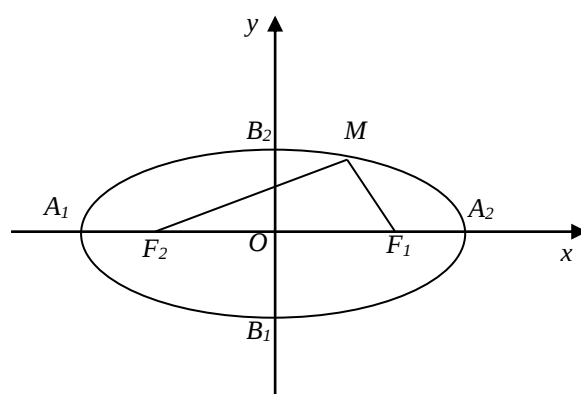
бўлади. (1) тенгламага **иккинчи тартибли чизикнинг умумий тенгламаси** дейилади. Қуйида муайян ҳолларда, иккинчи тартибли чизикларнинг аналитик ифодаларини топиб, уларнинг хусусиятларини ўрганамиз.

2. Айлана ва унинг тенгламаси. Таъриф. Текисликда бирор $C(a, b)$ нуқтадан тенг узоқликда жойлашган нуқталар геометрик ўрнига **айлана** дейилади.

$M(x, y)$ айланага тегишли ихтиёрий нуқта бўлсин (1-чизма). Айлана таърифига кўра CM масофа ўзгармас, бу масофани R билан белгилайлик.



1-чизма



2-чизма

икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласига асосан,

$$CM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \quad \text{ёки} \quad \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

бўлади. Охирги тенгликнинг иккала тарафини квадратга кўтариб,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (2)$$

тенгламага келамиз. Бу тенгламага маркази $C(a, b)$ нуктада, радиуси R га тенг **айлананинг каноник(қонуний) тенгламаси** деб аталади. (2) дан

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = R^2 \text{ ёки}$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

бўлади. Бу тенглама (1) тенгламанинг $A=C, B=0$ бўлган хусусий ҳолидир. Демак, айлана иккинчи тартибли чизикдир.

1-мисол. Иккинчи тартибли чизик $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$ тенглама билан берилган бўлсин. Унинг айлана эканлигини кўрсатинг ҳамда марказини ва радиусини топинг.

Ечиш. x ва y ли ҳадлар бўйича тўла квадратлар ажратамиз:

$$x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 + 4y + 4 - 4 - 23 = 0,$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 - 9 - 4 - 23 = 0 \text{ ёки } (x-3)^2 + (y+2)^2 = 36$$

бўлади. Бу айлананинг каноник тенгламасидир. Унинг маркази $C(3; -2)$, нуктада, радиуси $R=6$ бўлади.

3. Эллипс ҳамда унинг тенгламаси. Таъриф. Текисликда, ҳар бир нуктасидан берилган иккита нукталаргача бўлган масофалар йиғиндиси ўзгармас миқдордан иборат бўлган нукталар геометрик ўрнига **эллипс дейилади**. Берилган нукталар F_1 ва F_2 бўлсин. Бу нукталарга эллипснинг фокуслари дейилади. Ўзгармас миқдори $2a$, фокуслар орасидаги масофани $2c$ билан белгилаб, координатлар системасини шундай оламизки, Ox ўқи фокуслардан ўтсин ва координатлар боши F_1F_2 масофанинг ўртасида бўлсин (2-чизма). $M(x, y)$ эллипсга тегишли ихтиёрий нукта бўлса, таърифга кўра

$$F_1M + F_2M = 2a \quad (3)$$

бўлади. Маълумки, $F_1(+c; 0)$ ва $F_2(-c; 0)$ бўлиб, икки нукта орасидаги масофани топиш формуласига асосан:

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламадан иррационалликни йўқотиб,

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

кўринишга келтирамиз. $a^2 - c^2 = b^2$ билан белгилаймиз (чунки, $a > c$). Бу ҳолда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (4) тенгламага **эллипснинг каноник** тенгламаси дейилади.

Координатлар боши, эллипснинг **симметрия маркази**, координатлар ўқи **симметрия ўқлари** бўлади.

$$A_1(-a, 0), \quad A_2(a, 0), \quad B_1(0, -b), \quad B_2(0, +b)$$

нуқталар эллипснинг учлари, $a = OA_2$ ва $b = OB_2$ масофалар мос равишда эллипснинг катта ва кичик ярим ўқлари дейилади.

Шундай қилиб, эллипс иккита симметрия ўқиға, симметрия марказига эга бўлган ёпиқ эгри чизиқдир.

$\varepsilon = c/a < 1$ катталиқ эллипснинг эксцентриситети дейилади. Айланани эллипснинг $a = b$, $\varepsilon = 0$ бўлган хусусий ҳоли деб қараш мумкин.

$M(x, y)$ нуқтадан фокусларгача бўлган масофаға эллипснинг фокал радиуслари дейилади, уларни r_1 ва r_2 билан белгиласак, $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$ бўлади.

2-мисол. $16x^2 + 25y^2 = 400$ эллипснинг ярим ўқларини, фокусларини ва эксцентриситетини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани 400 га бўлиб,

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

кўринишға келтирамиз. Бу тенгламадан $a^2 = 25$, $b^2 = 16$ бўлиб, ярим ўқлари мос равишда $a = 5$, $b = 4$ бўлади. Маълумки, $b^2 = a^2 - c^2$, бўлиб, $c^2 = 25 - 16 = 9$, $c = \pm 3$ бўлади. Демак, фокуслари $F_1(3, 0)$ ва $F_2(-3, 0)$

нуқталарда бўлади. Эксцентриситети эса, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$.

4. Гипербола ва унинг тенгламаси. Таъриф. Текисликда, ҳар бир нуқтасидан берилган иккита (фокус) нуқталаргача бўлган масофалар айирмаси ўзгармас миқдордан иборат бўлган нуқталар геометрик ўрниға гипербола дейилади (кўрсатилган айирма абсолют қиймати бўйича олиниб, у фокуслар орасидаги масофадан кичик ва 0 дан фарқли).

Ўзгармас миқдорни $2a$, фокуслар орасидаги масофани $2c$ ва координат ўқларини эллипсдагидек олиб, $c^2 - a^2 = b^2$ белгилаш киритиб,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (5) тенгламага гиперболанинг каноник тенгламаси дейилади. Гиперболанинг фокуслари $F_1(+c; 0)$ ва $F_2(-c; 0)$ бўлади (3-чизма). Координатлар ўқи **симметрия ўқлари** ва координатлар боши $O(0; 0)$ **симметрия марказидир**. Гипербола координат ўқларини $A_1(-a; 0)$ ва $A_2(a; 0)$ нуқталарда кесиб ўтиб, бу нуқталарға **ҳақиқий учлари** ва $a = OA_2$ масофа **ҳақиқий ярим ўқи** дейилади. $B_1(0, -b)$, ва $B_2(0, b)$ нуқталар гиперболанинг **мавҳум учлари**, $b = OB_2$ — **мавҳум ярим ўқи** дейилади.

Гипербола иккита асимптоталарға эга бўлиб, унинг тенгламалари

$$y = \pm \frac{b}{a} x \quad (6)$$

бўлади.

$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ катталиққа гиперболанинг эксцентриситети деб

аталади.

Гипербола ўқлари $a = b$ бўлса, унга **тенг томонли гипербола** дейилади ва унинг тенгламаси

$$x^2 - y^2 = a^2$$

бўлади.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

гиперболаларга ўзаро қўшма гипербола деб аталади.

3-мисол. $9x^2 - 16y^2 = 144$ гиперболанинг ярим ўқларини, фокусларини, эксцентриситетини ҳамда асимптоталарининг тенгламаларини топинг.

Ечиш. Берилган тенламани 144 га бўлиб тенгламани каноник

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

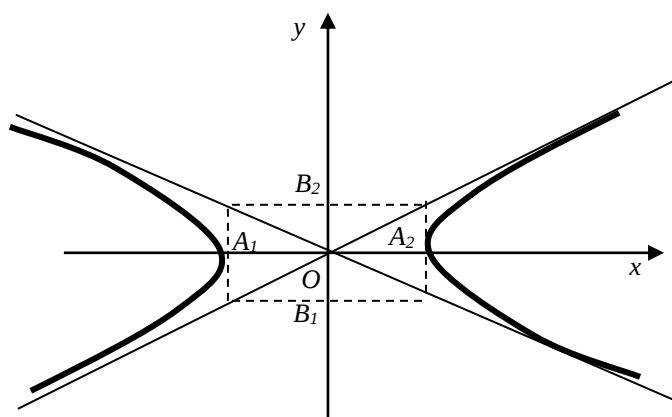
кўринишга келтирамыз. Бундан $a^2 = 16$, $b^2 = 9$ бўлиб, ҳақиқий ярим ўқ $a = 4$, мавҳум ярим ўқ $b = 3$ бўлади. $c^2 = a^2 + b^2$, $c^2 = 16 + 9$, $c = \pm 5$ бўлиб, фокуслари $F_1(+5; 0)$, $F_2(-5; 0)$ нуқталарда бўлади.

Эксцентриситет $\varepsilon = c/a = 5/4$.

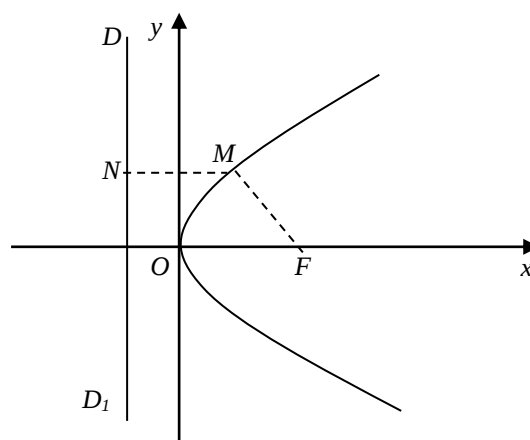
a ва b ларнинг қийматини (6) асимптота тенгламасига қўйиб,

$$y = \pm \frac{3}{4} x$$

тенгламаларни ҳосил қиламыз. Бу асимптоталар тенгламасидир.



3-чизма



4-чизма

5. Парабола ва ўнинг тенгламаси. Таъриф. Текисликда, ҳар бир нуқтасидан берилган нуқта(фокус)гача ва берилган тўғри чизик (директриса)гача масофалари ўзаро тенг бўлган нуқталар геометрик ўрнига **парабола** дейилади.

Координатлар системасини шундай оламизки, OX ўқи F (фокус)дан ўтиб, DD_1 директрисага перпендикуляр, OY ўқи эса фокус ва директрисанинг ўртасидан ўтсин(4-чизма). $M(x, y)$ параболага тегишли ихтиёрий нуқта бўлсин. F нуқтадан DD_1 тўғри чизиккача бўлган масофани p ($p > 0$) билан белгилаймиз. Бунда $F(p/2, 0)$ бўлиб, директрисанинг тенгламаси

$$x = -\frac{p}{2}$$

бўлади.

Таърифга асосан, $MN = MF$. $N(-\frac{p}{2}, y)$.

Икки нуқта орасидаги масофа формуласига асосан,

$$x + p/2 = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}.$$

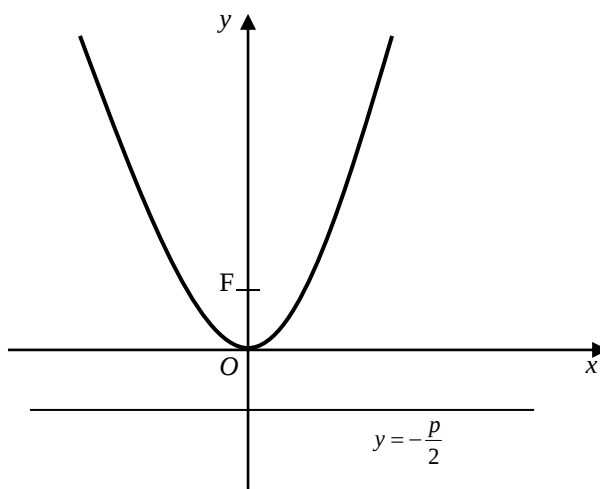
Бу тенгламадан иррационаликни йўқотиб,

$$y^2 = 2px \quad (7)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу абциссалар ўқиға симметрик **параболанинг каноник** тенгламаси бўлади. Ординатлар ўқи **симметрия ўқи** бўлса, парабола тенгламаси

$$x^2 = 2py \quad (p > 0)$$

кўринишда бўлади. Бу ҳолда $y = -p/2$ директриса тенгламаси, $F = (0; p/2)$ нуқта фокус бўлади(5-чизма).



5-чизма

$M(x, y)$ нуктадан $F(p/2; 0)$ фокусгача масофага фокал радиус дейилади ва $r = x + p/2$. $M(x, y)$ нуктадан $F(0, p/2)$ фокусгача масофа $r = y + p/2$ бўлади.

4-мисол.. $y^2 = 12x$ параболанинг фокусини ва директрисасининг тенгламасини топинг. $M(3; 6)$ нуктадан фокусгача бўлган масофани аниқланг.

Ечиш. Берилган тенгламани (7) тенглама билан солиштириб $2p = 12$, бундан $p = 6$, $p/2 = 3$. Шундай қилиб, фокус $F(3; 0)$ нуктада директриса тенгламаси $x = -3$ эканлигини топамиз. $M(3; 6)$ нукта учун $x = 3$, бўлиб, фокал радиус $r = 3 + 3 = 6$, $r = 6$ бўлади.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

- 1.. Иккинчи тартибли чизиклар деб қандай чизикларга айтилади?
2. Айлана, эллипс, гипербола ва парабола деб нималарга айтилади ва уларнинг каноник тенгламалари қандай бўлади?
3. Эллипс ва гипербодаларнинг эксцентриситети нимага айтилади?
4. Эксцентриситет айлана учун нимага тенг?
5. Эллипс, гипебала ва параболаларнинг фокал радиуслари нима?
6. Эллипс ва гипербодаларнинг симметрия маркази ва симметрия ўқлари борми?
7. Эллипс ва гипербодаларнинг ярим ўқлари нималардан иборат?

Мустақил ечиш учун мисоллар

1.. $N(7; -2)$ нуктадан ўтиб, маркази $C(3; -5)$ нуктада бўлган айлана тенгламасини ёзинг.

2. $M(4; 2)$ ва $N(12; 8)$ нукталар берилган. Диаметри MN кесмадан иборат бўлган айлана тенгламасини ёзинг.

3. Ушбу 1) $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$;

2) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 8y - 29/3 = 0$;

3) $x^2 + y^2 + 7x = 0$;

4) $5x^2 + 5y^2 + 9y = 0$

айланаларнинг марказларини ва радиусларини топинг.

4. $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$, ва $x^2 + y^2 + 8x + 12y - 14 = 0$

айланалар марказларидан ўтувчи тўғри чизик тенгламасини ёзинг.

5. Фокуслари орасидаги масофа 24, катта ўқи 26 га тенг бўлган эллипснинг каноник тенгламасини ёзинг ва уни ясанг.

6. Қуйидагилар берилганда эллипснинг каноник тенгламасини топинг:

1) катта ярим ўқ 10, эксцентриситет 0,8;

2) кичик ярим ўқ 12, эксцентриситет 5/13 ;

3) эксцентриситет 0,6, фокуслар орасидаги масофа 6 .

7. 1) $9x^2 + 25y^2 = 225$, 2) $9x^2 + y^2 = 36$ эллипслар учун ўқларининг узунликларини, фокусларини ва эксцентриситетларини топинг ва ясанг.

8. Координат ўқларига нисбатан симметрик бўлган эллипс $M(2; \sqrt{3})$ ва $N(0; 2)$ нуқталардан ўтади. Эллипс тенгламасини ёзинг. M нуқтадан фокусларгача масофаларни топинг.

9. Эллипснинг эксцентриситети ε берилган. Эллипс ярим ўқларининг b/a нисбатини топинг.

10. Қуйидагилар берилганда гиперболанинг каноник тенгламасини ёзинг:

1) фокуслари орасидаги масофа 10, эксцентриситет $5/3$;

2) ҳақиқий ярим ўқ $\sqrt{20}$ ва гипербола $N(-10; 4)$ нуқтадан ўтади;

3) фокуслар орасидаги масофа 10, учлари орасидаги масофа 4.

11. 1) $144x^2 - 25y^2 = 3600$; 2) $9x^2 + y^2 = 144$ гиперболалар учун ўқларнинг узунликларини, фокусларини ва эксцентриситетини топинг.

12. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ гиперболада абсциссаси 3 га тенг нуқта олинган. Бу нуқтанинг фокал радиусларини топинг.

13. $x^2/25 + y^2/9 = 1$ эллипс берилган. Учлари эллипснинг фокусларида, фокуслари эса унинг учларида бўлган гипербола тенгламасини ёзинг ва уни ясанг.

14. Гипербола бирор учидан фокусларигача бўлган масофалар 9 ва 1 бўлса, унинг тенгламасини ёзинг.

15. $x^2 - 4y^2 = 16$ гиперболани ва унинг асимптоталарини ясанг. Фокусларини, эксцентриситетини ва асимптоталари орасидаги бурчакни топинг.

16. Координатлар бошидан ва $N(-3; 6)$ нуқтадан ўтиб, OX ўқига симметрик бўлган парабола тенгламасини ёзинг ва уни ясанг.

17. Координатлар бошидан ва $N(6; 3)$ нуқтадан ўтиб, OY ўқига симметрик бўлган парабола тенгламасини ёзинг ва уни ясанг.

18. 1) $y^2 = 6x$; 2) $y^2 = -6x$; 3) $x^2 = -4y$; 4) $x^2 = 4y$ параболалар учун фокусларини ва директрисаларининг тенгламаларини топинг.

19. $y^2 = 16x$ параболада фокал радиуси 5 га тенг бўлган нуқтани топинг.

20. OY ўқига нисбатан симметрик бўлган парабола, $x + y = 0$ тўғри чизиқ ва $x^2 + y^2 + 4y = 0$ айлана кесишган нуқталардан ўтади. Парабола тенгламасини ёзинг. Айланани, тўғри чизиқни ва параболани ясанг.

Мавзу. Тўғри чизикларга доир асосий масалалар

Режа

1. Икки тўғри чизик орасидаги бурчак.
2. Тўғри чизикларнинг перпендикулярлик ва параллеллик шартлари.
3. Иккита тўғри чизикнинг кесишуви.
4. Нуқтадан тўғри чизиккача бўлган масофа.

Таянч ибора ва тушунчалар

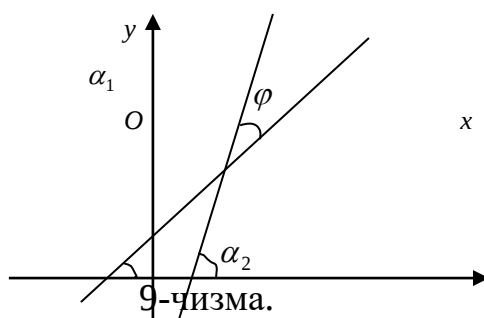
Тўғри чизиклар орасидаги бурчак, тўғри чизикларнинг перпендикулярлиги ва параллеллиги, иккита тўғри чизикларнинг кесишуви, берилган нуқтадан берилган тўғри чизиккача бўлган масофа, иккита параллел тўғри чизиклар орасидаги масофа.

1. Икки тўғри чизик орасидаги бурчак. Иккита

$$y = k_1x + b_1,$$

$$y = k_2x + b_2$$

тўғри чизиклар берилган бўлсин. Бунда $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ бу тўғри чизиклар параллел бўлмасин ва улар орасидаги бурчакни топиш талаб этилсин. Тўғри чизиклар орасидаги бурчакни φ билан белгилаймиз.



Яъни, $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ (9-чизма). Маълумки,

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}$$

ёки

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \quad (1)$$

бўлади. (1) икки тўғри чизик орасидаги бурчакнинг тангенсини топиш формуласи деб аталади.

1-мисол. $y = 3x + 1$, $y = 2x + 5$ тўғри чизиклар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. (1) формулага асосан,

$$\varphi = \frac{3 - 2}{1 + 2 \cdot 3} = \frac{1}{7} \text{ бўлиб, } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{7} \approx \operatorname{arctg} 0.14 \approx 8^\circ, \varphi \approx 8^\circ$$

бўлади.

2. Тўғри чизикларнинг перпендикулярлик ва параллеллик шартлари
Тўғри чизиклар перпендикуляр бўлса, улар орасидаги бурчак

$$\varphi = 90^0 \text{ бўлиб, } tg90^0 = \infty \text{ ёки } \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \infty, \quad 1 + k_1 \cdot k_2 = 0$$

келиб чиқади, бундан

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

бўлади, бунга икки тўғри чизикнинг **перпендикулярлик шarti** дейилади.

Тўғри чизиклар параллел бўлса, $\varphi = 0$ бўлиб, $tg0^0 = 0$, ёки

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 0, \quad k_2 - k_1 = 0, \quad k_1 = k_2$$

келиб чиқади.

$$k_1 = k_2$$

тенгликка **икки тўғри чизикнинг параллеллик шarti** дейилади.

3. Иккита тўғри чизикнинг кесишуви. Иккита тўғри чизикнинг кесишиш нуқтасини топиш учун уларнинг тенгламаларини биргаликда ечиб, кесишиш нуқтасининг координатлари топилади.

$$\text{2-мисол.} \quad \begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

тўғри чизикларнинг кесишиш нуқтасини топим.

Ечиш. Иккинчи тенгламани (-1) га кўпайтириб, ҳосил бўлган тенгламаларни ҳадма-ҳад қўшиб $x - 1 = 0$, $x = 1$ ни ҳосил қиламиз. $x = 1$ ни биринчи тенгламага қўйсак, $2 \cdot 1 + y - 3 = 0$ ёки $y = 1$ бўлади. Шундай қилиб, бу тўғри чизиклар $A(1;1)$ нуқтада кесишади.

4. Нуқтадан тўғри чизикқача бўлган масофа. $M(x_0; y_0)$ нуқта ва $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ тўғри чизик берилган бўлсин. Берилган нуқтадан, берилган тўғри чизикқача бўлган масофа

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p| \quad (2)$$

формула ёрдамида топилади. Тўғри чизик тенгламаси умумий

$$Ax + By + C = 0$$

кўринишда берилган бўлса, нуқтадан тўғри чизикқача бўлган масофа,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (3)$$

формула билан топилади.

3-мисол. $A(3; \sqrt{5})$ нуқтадан $2x + \sqrt{5}y - 2 = 0$ тўғри чизикқача бўлган масофани топим.

Ечиш. Тўғри чизик тенгламаси умумий ҳолда берилган. Шунинг учун (3) формулага асосан,

$$d = \left| \frac{2 \cdot 3 + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} - 2}{\pm \sqrt{2^2 + \sqrt{5}^2}} \right| = \left| \frac{6 + 5 - 2}{3} \right| = \frac{9}{3}, \quad d = 3$$

бўлади.

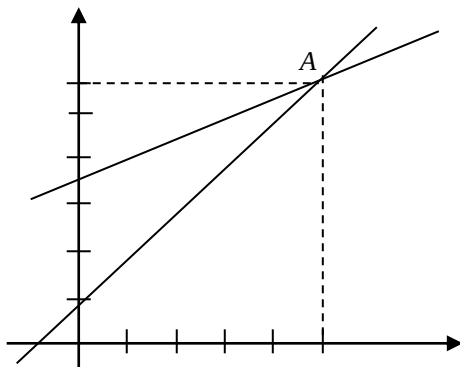
4-мисол. Икки хил транспорт воситасида юк ташиш харажатлари функцияси

$$y = 100 + 50x \quad \text{ва} \quad y = 200 + 30x$$

билан ифодалансин. Бунда, y транспорт харажати, x ҳар юз километрга юк ташиш масофаси. Қандай масофадан бошлаб 2-хил транспорт воситаси билан юк ташиш тежамлироқ бўлади.

Ечиш. Масала шартида берилган $y = 100 + 50x$ ва $y = 200 + 30x$ тўғри чизиклар кесишадиган нуқтани топамиз: тенгликларнинг чап томонлари тенг бўлганлиги учун $100 + 50x = 200 + 30x$ тенгламани ҳосил қиламиз, бундан $x = 5$, $y = 350$ бўлади. Демак, тўғри чизиклар $A(5, 350)$ нуқтада кесишади.

Энди тўғри чизикларни ясаймиз: (10-чизма).



10- чизма

10-чизмадан кўринадики, юк ташиш масофаси 500 км дан ортиқ бўлганда 2-хил транспорт воситаси билан юк ташилса, харажат камроқ бўлади.

5. Иккита параллел тўғри чизиклар орасидаги масофани топиш

$$5x - 2y + 10 = 0 \quad \text{ва} \quad 5x - 2y + 36 = 0$$

параллел тўғри чизиклар берилган бўлсин. Бу тўғри чизиклар орасидаги масофани топиш учун, бу тўғри чизикларнинг биттасида ихтиёрий бир нуқтани танлаймиз ва танланган нуқтадан иккинчи тўғри чизикқача бўлган масофани топамиз: биринчи тўғри чизикда $x = 4$ десак, $y = 15$ бўлиб, $A(4, 15)$ 1-тўғри чизикдаги нуқта бўлади. $A(4, 15)$ нуқтадан иккинчи $5x - 2y + 36 = 0$ тўғри чизикқача бўлган масофани (3) формулага асосан, ҳисобласак,

$$d = \left| \frac{5 \cdot 4 - 2 \cdot 15 + 36}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} \right| = \frac{26}{\sqrt{29}}, \quad d = \frac{26}{\sqrt{29}}$$

бўлади.

Такрорлаш учун саволлар

1. Икки тўғри чизик орасидаги бурчак қандай топилади?
2. Икки тўғри чизикнинг перпендикулярлик шарти нима?
3. Икки тўғри чизикнинг параллеллик шарти қандай бўлади?
4. Иккита тўғри чизикнинг кесишиш нуқтаси қандай топилади?
5. Нуқтадан тўғри чизиккача бўлган масофа қандай формуладан фойдаланиб топилади?
6. Иккита параллел тўғри чизиклар орасидаги масофани топиш қандай бажарилади?

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. $y = 1/2 \cdot x + 4$ тўғри чизик берилган. Унинг координат ўқлари билан кесишиш нуқталарини топинг.
2. Бошланғич ординатаси $b = -3$ бўлган ва $y = 2x + 3$ тўғри чизикка параллел бўлган тўғри чизикни ясанг ва тенгламасини ёзинг.
3. $y = \sqrt{3}x - 2$ ва $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 3$ тўғри чизиклар берилган. Уларнинг абсцисса ўқи билан ташкил қиладиган бурчакларини топинг.
4. $y = -2/5 \cdot x + 3$; $y = 3/7 \cdot x + 2/7$ тўғри чизиклар орасидаги бурчакни топинг.
5. $6x + 8y + 5 = 0$; $2x - 4y - 3 = 0$ тўғри чизиклар орасидаги бурчакни топинг.
6. 1) $3x - 15y + 16 = 0$, 2) $3x + 15y - 8 = 0$, 3) $6x - 30y + 13 = 0$,
4) $30x + 6y + 7 = 0$
тўғри чизиклардан қайсилари перпендикуляр ва қайсилари параллел.
7. Қуйидаги тўғри чизиклар орасидаги бурчакларни топинг:
1) $y = 2/3 \cdot x - 7$; 2) $2x - 4y + 9 = 0$
 $y = 5x + 9$; 3) $6x - 2y - 3 = 0$
4) $y = 3/7 \cdot x - 2$; 5) $x/4 - y/5 = 1$
6) $7x + 3y + 5 = 0$; 7) $x/2 + y/18 = 1$
8. Томонлари $4x - 3y + 5 = 0$, $3x + 4y + 4 = 0$, $x - 7y + 18 = 0$ тўғри чизикларда ётган учбурчакнинг ички бурчакларини топинг.
9. $A(4; 5)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиклар дастасининг тенглама-сини ёзинг ва улардан $2x - 3y + 6 = 0$ тўғри чизикка перпендикуляр ва параллел бўлганларини ажратинг.
10. Учбурчак томонлари
 $7x - 6y + 9 = 0$; $5x + 2y - 25 = 0$; $3x + 10y + 29 = 0$
тенгламалар билан берилган. Унинг учларини ва баландликларининг тенгламаларини топинг.
11. Учлари $P(-4; 0)$, $Q(0; 4)$ ва $R(2; 2)$

нуқталарда бўлган учбурчак медианаларининг тенгламаларини топинг.
12. Тўғри чизикнинг координатлар бошидан узоқлиги 3, унга координатлар бошидан туширилган перпендикуляр OX ўқи билан $\alpha = 45^0$ бурчак ҳосил қилса, тўғри чизик тенгламасини ёзинг.

13. $x - y + 3 = 0$ тўғри чизикқа координатлар бошидан туширилган перпендикулярнинг узунлигини ва унинг OX ўқи билан ташкил қилган бурчагини топинг.

14. Учлари $P(0; 5)$, $Q(-3; 1)$ ва $R(-1; -2)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг R нуктасидан ўтказилган баландлигининг узунлигини топинг.

15. $5x - 12y - 26 = 0$, $5x - 12y - 65 = 0$ параллел тўғри чизиклар орасидаги масофани топинг.

16. Трапеция асосларининг тенгламалари $3x - 4y - 15 = 0$, $3x - 4y - 35 = 0$ берилган. Трапециянинг баландлигини топинг.

17. Учлари $A(-2; 0)$, $B(2; 4)$ ва $C(4; 0)$ нуқталарда бўлган учбурчак томонларининг, AE медианасининг, AD баландлигининг тенгламаларини ҳамда AE медиананинг узунлигини топинг.

ФАЗОДА АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ

Мавзу. Фазода текислик тенгламалари

Режа

1. Фазода Декарт координатлар системаси ва асосий масалалар.
2. Фазода сирт ва унинг тенгламаси.
3. Берилган нуқтадан ўтиб, берилган векторга перпендикуляр бўлган текислик тенгламаси.
4. Текисликнинг умумий тенгламаси ва унинг хусусий ҳоллари.
5. Текисликнинг кесмалар бўйича тенгламаси.
6. Берилган учта нуқталардан ўтувчи текислик тенгламаси.

Таянч ибора ва тушунчалар

Фазода нуқтанинг ўрни, аппликата, октантлар, координат текисликлари, икки нуқта орасидаги масофа, кесмани берилган нисбатда бўлиш, сирт ва унинг тенгламаси, сиртнинг тартиби, сферик сирт, фазода текислик, нормал вектор, текисликнинг умумий тенгламаси, текисликнинг кесмалар бўйича тенгламаси, берилган учта нуқтадан ўтувчи текислик, икки текислик орасидаги бурчак, нуқтадан текисликкача бўлган масофа, икки текисликнинг параллеллиги ва перпендикулярлиги.

1. Фазода Декарт координатлар системаси ва асосий масалалар. Текисликдаги Декарт координатларига ўхшаш фазодаги координатлар ҳам аниқланади, ўзаро перпендикуляр OX , OY , OZ сон ўқлари, умумий O нуқтадан ўтсин. Фазода A нуқтага учта ҳақиқий сон (x, y, z) ва аксинча учта ҳақиқий сонга битта нуқта мос келади. Бу мослик ҳам бир қийматлидир. Бу сонларга нуқтанинг фазодаги координатлари дейилади. x абциссаси, y ординатаси, z *аппикатаси* деб

аталади. Координат ўқларидан ўтувчи текисликларга **координат текисликлари** дейилади ва улар фазони 8 та бўлакларга - **октантларга** ажратади. $A(x, y, z)$ нуқтанинг координатлари OA радиус векторнинг ҳам координатлари бўлади.

Фазодаги аналитик геометрияда ҳам қуйидаги содда масалалар қаралади:

1) фазодаги берилган $A(x_1, y_1, z_1)$ ва $B(x_2, y_2, z_2)$ нуқталар орасидаги масофа,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

формула билан аниқланади;

2) AB кесмани $\lambda = AC : CB$ нисбатда бўлувчи $C(x, y, z)$ нуқтанинг координатлари

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

формулалар ёрдамида топилади.

2. Фазода сирт ва унинг тенгламаси. Маълумки, текисликда

$$F(x, y) = 0$$

тенглама бирор чизикни ифодалайди.

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

тенглама $OXYZ$, R^3 фазода координатлари (1) тенгламани қаноатлантирувчи нуқталар тўплами, бирор **сиртни аниқлайди**. Бу тенгламага **сирт тенгламаси** дейилади. (1) тенглама даражасига **сиртнинг тартиби** деб аталади. Масалан, OYZ координат текислигида ётган исталган $A(x, y, z)$ нуқтанинг абсциссаси $x = 0$ бўлади ва аксинча $A(0, y, z)$ нуқта OYZ координат текислигида ётади. Демак, OYZ координат текислигининг тенгламаси $x = 0$ бўлиб, у биринчи тартибли бўлади. Худди, юқоридагидек $y = 0, z = 0$ мос равишда OXZ ва OXY координат текисликлари тенгламаларини ифодалайди.

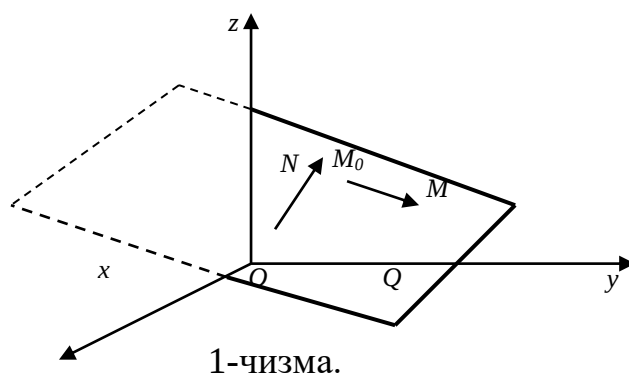
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R$$

тенглама маркази $C(a, b, c)$ нуқтада радиуси R бўлган сферик сирт тенгламаси иккинчи тартиблидир.

3. Берилган нуқтадан ўтиб, берилган векторга перпендикуляр бўлган текислик тенгламаси. $OXYZ$ тўғри бурчакли координатлар

системасида $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқта ва $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ вектор

берилган бўлсин. M_0 нуқтадан ўтувчи, $\vec{N}$ векторга перпендикуляр Q текислиكنинг фазодаги вазияти аниқ бўлади. Унинг тенгламасини келтириб чиқарамиз. Q текисликда ихтиёрий $M(x, y, z)$ нуқта оламиз(1-чизма).



$\vec{M_0M}$ ва $\vec{N}$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлганда ва фақат шундагина M нукта Q текисликда ётади. Маълумки $\vec{M_0M}$ векторнинг координатлари $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, $(z - z_0)$ бўлади. Икки векторнинг перпендикулярлик шартига асосан:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (2)$$

бўлади. Бу Q **текислик тенгламаси** бўлади.

Таъриф. Q текисликка перпендикуляр $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ векторга бу текисликнинг **нормал** вектори дейилади.

1-мисол. $M_0(4, -3, 5)$ нуктадан ўтиб, $\vec{N} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ векторга перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини ёзинг.

Ечиш. (2) формулага асосан,
 $2(x - 4) + (-3)(y + 3) + 4(z - 5) = 0$, $2x - 8 - 3y - 9 + 4z - 20 = 0$
 ёки

$$2x - 3y + 4z - 37 = 0$$

бўлиб, бу изланаётган текислик тенгламасидир.

4. Текисликнинг умумий тенгламаси ва унинг хусусий ҳоллари.

(2) тенгламадан

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0 \text{ ёки } Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$$

билан белгилашдан кейин

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (3)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (3) тенгламага фазода текисликнинг **умумий тенгламаси** дейилади.

Умумий тенгламанинг хусусий ҳолларини қараймиз:

1) $D = 0$ бўлса, $Ax + By + Cz = 0$ бўлиб, текислик координатлар бошидан ўтади;

2) $C = 0$ бўлса, $Ax + By + D = 0$ бўлиб, текислик OZ ўқига параллел; худди шундай $Ax + Cz + D = 0$, $By + Cz + D = 0$ текисликлар мос равишда OY ва OX ўқларига параллелдир;

3) 2-ҳолда $D = 0$ бўлса, текислик тенгламалари $Ax + By = 0$, $Ax + Cz = 0$, $By + Cz = 0$ бўлиб, улар мос равишда OZ , OY , OX координат ўқларидан ўтади;

4) $B = C = 0$, бўлса, $Ax + D = 0$ текислик YOZ координат текислигига параллел, худди шундай $By + D = 0$, $Cz + D = 0$ текисликлар мос равишда XOZ , XOY координат текисликларига параллел бўлади;

5) $B = C = D = 0$ бўлса, $Ax = 0$ бўлиб, YOZ координат текислиги билан устма-уст тушади, яъни $x = 0$, YOZ координат текислигининг тенгламаси бўлади. Худди шундай $y = 0$ ва $z = 0$, мос равишда XOZ ва XOY координат текисликларининг тенгламасини ифодалайди.

5. Текисликнинг кесмалар бўйича тенгламаси. (3) тенгламада A, B, C, D коэффициентлар ҳаммаси 0 дан фарқли бўлса, текислик координат ўқларидан OL , ON ва OP кесмалар ажратади (2-чизма). (3) тенгламани қуйидагича ўзгартирамиз:

$$Ax + By + Cz = D, \quad \frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1.$$

Охирги тенгламада

$$-D/A = a, \quad -D/B = b, \quad -D/C = c$$

белгилаш критсак,

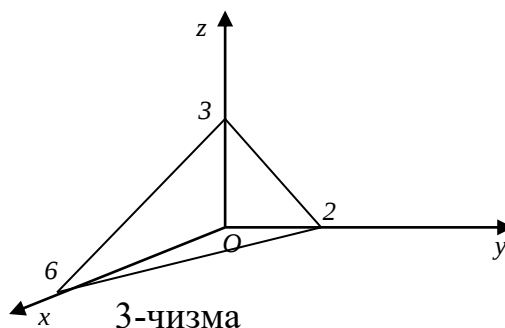
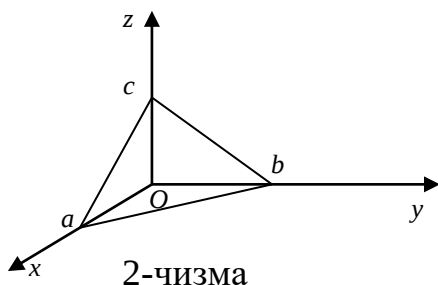
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

тенглама келиб чиқади. Бу тенгламага фазода текисликнинг кесмаларга нисбатан тенгламаси дейилади.

2-мисол. Текисликнинг $x + 3y + 2z - 6 = 0$ умумий тенгламаси берилган, бу текисликни ясанг.

Ечиш. Тенгламани текисликнинг кесмаларга нисбатан тенгламасига келтирамиз:

$$x + 3y + 2z = 6, \quad \frac{x}{6} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$$



Охирги тенгламадан маълумки, текислик координат ўқларидан мос равишда 6, 2, 3 кесмалар ажратади. Бу кесмаларнинг охиридан текисликни ўтказамиз (3-чизма).

6. Берилган учта $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ ва $C(x_3; y_3; z_3)$ нуқталардан ўтувчи текислик тенгламаси

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

кўринишда бўлиб, учта векторнинг компланарлигидан келиб чиқади.

$M(x, y, z)$ текисликдаги ихтиёрий нуқта. $\vec{AM}, \vec{AB}, \vec{AC}$ векторлар компланардир.

7. Икки текислик орасидаги бурчак. Нуқтадан текисликкача масофа.

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}$$

текисликлар орасидаги бурчак уларнинг нормал $\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ векторлари орасидаги бурчакка тенг бўлиб,

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (5)$$

формула ўринли бўлади. (5) га иккита текислик орасидаги бурчак косинусини топиш формуласи дейилади.

$\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ нормал векторлар коллинеар бўлса,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

бўлиб, **бу икки текисликнинг параллеллик шarti дейилади..**

$\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ нормал векторлар перпендикуляр бўлса,

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

бўлиб, **бу икки текисликнинг перпендикулярлик шarti** бўлади.

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтадан $Ax + By + Cz + D = 0$ текисликкача бўлган масофа

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (6)$$

формула билан топилади.

3-мисол. $x + 2y - 3z + 4 = 0$ ва $2x + 3y + z + 8 = 0$ текисликлар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. $n_1(1, 2, -3)$ ва $n_2(2, 3, 1)$ мос равишда берилган текисликларнинг нормал векторлари бўлганлиги учун (5) формулага асосан,

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{5}{14}, \quad \varphi \approx 69^{\circ}05'$$

бўлади.

4-мисол. $2x - y - 2z + 4 = 0$ ва $2x - y - 2z - 8 = 0$ текисликларнинг параллеллигини кўрсатинг ва улар орасидаги масофани топинг.

Ечиш. Берилган текисликларнинг нормал векторлари $n_1 (2, -1, -2)$ ва $n_2 (2, -1, -2)$ параллеллик шартини қаноатлантиради, демак берилган текисликлар ҳам параллелдир. Энди биринчи текисликда бирор нуқтани аниқлаб ундан иккинчи текисликкача бўлган масофани топамиз. $x = z = 0$ бўлса, биринчи текислик тенгламасидан $y = 4$ бўлиб, $M_0 (0; 4; 0)$ нуқта биринчи текисликдаги нуқта бўлади. (6) формулага асосан,

$$d = \frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot 4 - 2 \cdot 0 - 8|}{\pm \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{|-12|}{3} = 4.$$

Демак, параллел текисликлар орасидаги масофа $d = 4$ бўлади.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. R^3 фазода нуқтанинг ўрни қандай аниқланади?
2. Қандай мосликка бир қийматли мослик дейилади?
3. R^3 фазодаги координатлар қандай аниқланади?
4. Координат текисликлари нима?
5. Координат текисликлари R^3 фазони нечта бўлакка ажратади?
6. R^3 фазода икки нуқта орасидаги масофа қандай топилади?
7. R^3 фазода сирт ва унинг тенгламаси қандай аниқланади?
8. Сиртнинг тартиби деб нимага айтилади?
9. Сферик сирт нечанчи тартибли?
10. Берилган нуқтадан ўтиб ва берилган векторга перпендикуляр текислик тенгламаси қандай бўлади?
11. Қандай векторга текисликнинг нормал вектори дейилади?
12. Текисликнинг умумий тенгламаси ва унинг хусусий ҳоллари қандай бўлади?
13. Текисликнинг кесмалар бўйича тенгламаси қандай ёзилади?
14. Берилган учта нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси детерминант орқали қандай бўлади?
15. Иккита текислик орасидаги бурчак қандай топилади?
16. Нуқтадан текисликкача бўлган масофа нима ва у қандай топилади?
17. Икки текисликнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари нима?

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1. $A(2, 5, 0)$ ва $B(5, 1, 12)$ нуқталар орасидаги масофани топинг.

2. Учлари $A(5, 2, 6)$, $B(6, 4, 4)$, $C(4, 3, 2)$ ва $D(3, 1, 4)$ нуқталарда бўлган тўртбурчакнинг квадрат эканлигини кўрсатинг.

3. $A(3, 7, 4)$ ва $B(8, 2, 3)$ нуқталарни туташтирувчи AB кесмани $\lambda = 2:3$ нисбатда бўлувчи $C(x, y, z)$ нуқтани топинг.

4. AB кесманинг бошланғич нуқтаси $A(-1, 2, 4)$ ва уни $\lambda = 1:2$ нисбатда бўлувчи $C(2, 0, 2)$ нуқта берилган. $B(x, y, z)$ нуқтани топинг.

5. Учлари $A(5, 3, -10)$, $B(0, 1, 4)$ ва $C(-1, 3, 2)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг AE медианасининг узунлигини топинг.

6. $A(3, 6, -5)$ ва $B(1, -1, 2)$ нуқталарга параллел йўналган F_1 ва F_2 кучлар қўйилган. Уларнинг тенг таъсир этувчиси F қўйилган $N(x, y, z)$ нуқтани топинг. $|F_1| = 5H$ ва $|F_2| = 2H$. Кўрсатма: Физикадан маълумки параллел кучларни қўшганда AN ва NB елкалар унга қўйилган кучларга тескари пропорционалдир, яъни $AN : NB = |F_2| : |F_1| = 2:5 = \lambda$ бўлади.

7. $M_1(4, 2, -6)$ ва $M_2(2, -2, 4)$ нуқталарга P_1 ва P_2 параллел кучлар қўйилган. $|P_1| = 2$, $|P_2| = 6$ бўлса тенг таъсир этувчи P кучнинг қўйилган нуқтасини топинг.

8. $M(2; -3; 2)$ нуқтадан ўтиб, $N(5, 4, 3)$ векторга перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини ёзинг.

9. $M_0(2; 5; 4)$ нуқтадан ўтиб, ординат ўқидан $b = -6$, аппликата ўқидан $c = 3$ кесма ажратиб ўтган текислик тенгламасини ёзинг.

10. Ox ўқига параллел ва $P(4; 0; -2)$, $Q(5, 1, 7)$ нуқталардан ўтувчи текислик тенгламасини ёзинг.

11. Қуйидаги текисликларни ясанг:

1) $2x - 3y + z - 6 = 0$; 2) $x + 2y - 4 = 0$; 3) $y - 3 = 0$;

4) $2x + 3y = 0$; 5) $x - 2y - z = 0$; 6) $3z - 7 = 0$.

12. YOZ координат текислигига параллел ва $M(2; -5; 4)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламасини ёзинг.

13. $A(3, 5, 6)$ ва $B(5, -7, 4)$ нуқталар берилган. A нуқтадан ўтиб, $\overline{AB}$ векторга перпендикуляр текислик тенгламасини ёзинг.

14. OY ўқига параллел ва $M_1(3, 2, 1)$, $M_2(4, -3, 5)$ нуқталардан ўтувчи текислик тенгламасини ёзинг.

15. $M(2, -6, 5)$ нуқтадан ўтиб, абсциссалар ўқидан $a = 4$, ординаталар ўқидан $b = 3$ кесмалар ажратиб ўтувчи текислик тенгламасини ёзинг.

16. OY ўқидан ва $M(2, 4, 1)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламасини ёзинг.

17. OZ ўқидан ва $M(2, 3, 4)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламасини ёзинг.

18. $M_1(1, 3, -2)$, $M_2(4, -5, 6)$ ва $M_3(-3, 1, 2)$ нуқталардан ўтувчи текислик тенгламасини ёзинг.

19. 1) $2x - 3y + 4z - 24 = 0$; 2) $4x + y - 6z - 2 = 0$ текисликларнинг координат ўқларидан ажратган кесмаларининг катталикларини топинг.

20. $2x - y - 2z + 3 = 0$ ва $x + y - 5 = 0$ текисликлар орасидаги бурчакни топинг.

21. $M_0(2, 4, -3)$ нуқтадан ўтиб, $3x - 2y + 5z - 4 = 0$ текисликка параллел текислик тенгламасини ёзинг.

22. $M(1, -4, -5)$ нуқтадан $6x - 3y - 6z + 7 = 0$ текисликкача бўлган масофани топинг.

23. $2x - 11y + 10z - 15 = 0$ ва $2x - 11y + 10z + 45 = 0$ текисликлар орасидаги масофани топинг.

Мавзу. Фазода тўғри чизик ва унинг тенгламалари

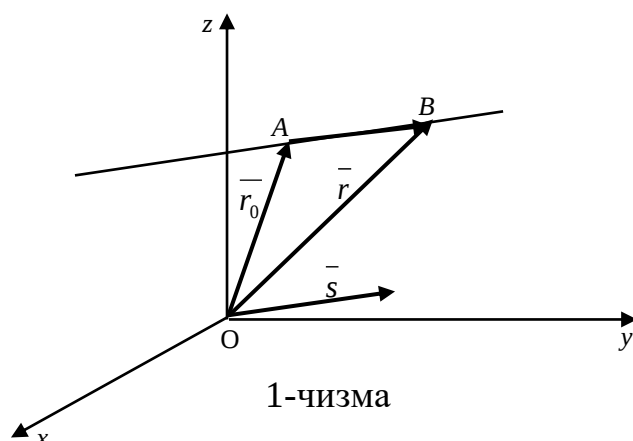
Режа

- 1. Фазода берилган нуқтадан ўтувчи ва берилган йўналтирувчи векторга эга бўлган тўғри чизик векторли тенгламаси.**
- 2. Фазода тўғри чизик(ФТЧ)нинг параметрик ва каноник тенгламалари.**
- 3. Фазода умумий ва проекцияларга нисбатан ҳамда берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизик тенгламалари.**
- 4. Икки тўғри чизик орасидаги бурчак.**
- 5. Фазода тўғри чизик ва текислик орасидаги бурчак.**

Таянч ибора ва тушунчалар

Йўналтирувчи вектор, векторли, параметрик, каноник, умумий, проекцияларга нисбатан тенгламалар, икки текисликнинг кесими, фазода икки тўғри чизик орасидаги бурчак ҳамда уларнинг параллеллиги ва перпендикулярлиги, фазода тўғри чизик ва текислик орасидаги бурчак ҳамда уларнинг параллеллиги, перпендикулярлиги, фазода тўғри чизикнинг координат текисликларидаги излари.

1. Фазода берилган нуқтадан ўтувчи ва берилган йўналтирувчи векторга эга бўлган тўғри чизик векторли тенгламаси. Фазода тўғри чизикнинг ҳолати у ўтадиган бирор $A(x_1, y_1, z_1)$ нуқта ва тўғри чизик параллел бўлган $\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ йўналтирувчи векторнинг берилиши билан тўла аниқланади. Унинг тенгламасини ёзиш учун унда ихтиёрий $B(x, y, z)$ нуқта олампиз (1-чизма).



Маълумки, $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$ бўлиб, $\vec{AB}$ вектор $\vec{s}$ векторга коллинеар, яъни $\vec{AB} = t \vec{s}$, t – скаляр параметр. $\vec{OA} = \vec{r}_0$, $\vec{OB} = \vec{r}$ десак,

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{s} \quad (1)$$

бўлади. (1) тенгликка **фазода тўғри чизиқнинг векторли тенгламаси** дейилади.

2. **Фазода тўғри чизиқ(ФТЧ)нинг параметрик ва каноник тенгламалари.**

$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$, $\vec{r}_0 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$, $\vec{s} = m \vec{i} + n \vec{j} + p \vec{k}$ бўлганлиги учун (1) тенгламадан векторларнинг тенглигига асосан,

$$\begin{cases} x = x_1 + tm, \\ y = y_1 + tn, \\ z = z_1 + tp \end{cases} \quad (2)$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Бунга **тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси** дейилади, бунда t – параметр.

(2) тенгламадан t параметрни йўқотсак, яъни

$$x - x_1 = tm, \quad \frac{x - x_1}{m} = t, \quad \text{худди шундай} \quad \frac{y - y_1}{n} = t, \quad \frac{z - z_1}{p} = t, \quad \text{булиб, охирги}$$

тенгликларнинг унги томонлари тенг бўлганлиги учун

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} \quad (3)$$

тенглама келиб чиқади. (3) тенгламага тўғри чизиқнинг **каноник тенгламаси** дейилади.

1-мисол. $M_0(2; -3; 5)$ нуктадан ўтиб координат ўқлари билан $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/3$, $\gamma = \pi/3$ бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқнинг каноник ва параметрик тенгламаларини ёзинг.

Ечиш. Тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори сифатида

$$s = \cos \alpha \cdot i + \cos \beta \cdot j + \cos \gamma \cdot k = \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k \quad \text{векторни}$$

оламиз.

(3) тенгламага асосан,

$$\frac{x-2}{\sqrt{2}/2} = \frac{y+3}{1/2} = \frac{z-5}{1/2}$$

тўғри чизикнинг каноник тенгламасини ҳосил қиламиз.

Охирги тенгликларнинг ҳар бирини t билан белгилаб,

$$\frac{x-2}{\sqrt{2}/2} = t \quad \frac{y+3}{1/2} = t \quad \frac{z-5}{1/2} = t \quad \text{ёки}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}t + 2;$$

$$y = \frac{1}{2}t - 3;$$

$$z = \frac{1}{2}t + 5$$

тўғри чизикнинг параметрик тенгламасини ҳосил қиламиз.

3. Фазода умумий ва проекцияларга нисбатан ҳамда берилган икки нуктадан ўтувчи тўғри чизик тенгламалари. Фазода тўғри чизикни икки текисликнинг кесимида иборат деб ҳам қараш мумкин. Шунинг учун тўғри чизикни аналитик ҳолда қуйидаги система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

орқали ҳам ифодалаш мумкин. (4) тенгламада A_1, B_1, C_1 коэффициентлар мос равишда A_2, B_2, C_2 коэффициентларга пропорционал бўлмаса у тўғри чизикни ифодалайди. Бунга тўғри чизикнинг умумий тенгламаси дейилади.

(4) системадан биринчи u номаълумни, кейин x номаълумни йўқотсак,

$$\begin{cases} x = x_1 + mz, \\ y = y_1 + nz \end{cases} \quad (5)$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Бундаги биринчи тенглама OY ўққа параллел бўлган текислик, иккинчиси OX ўққа параллел бўлган текислик бўлиб, берилган тўғри чизикни XOZ ва YOZ координат текисликларига проекциялайди. (5) системага тўғри чизикнинг проекцияларга нисбатан тенгламаси дейилади.

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ ва $M_2(x_2, y_2, z_2)$ берилган икки нуктадан ўтувчи тўғри чизик тенгламаси текисликда берилган икки нуктадан ўтувчи тўғри чизик тенгламасидагидек ушбу кўринишда

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (6)$$

бўлади.

$$\text{2-мисол. } \begin{cases} 2x + y - 5z + 3 = 0, \\ 3x + 2y - 4z + 2 = 0 \end{cases}$$

тўғри чизикнинг проекцияларга нисбатан ва каноник тенгламаларини ёзинг.

Ечиш. Берилган тенгламалар системасидан олдин y ни йўқотамиз, бунинг учун биринчи тенгламани (-2) кўпайтириб тенгламаларни ҳадма-ҳад қўшиб $-x + 0 + 6z - 4 = 0$, ёки $x = 6z - 4$ тенгламани ҳосил қиламиз. Энди x номаълумни йўқотамиз, бунинг учун биринчи тенгламани (3) га иккинчи тенгламани (-2) га кўпайтириб ҳадма - ҳад қўшиб $-y - 7z + 5 = 0$ ёки $y = -7z + 5$ тенгламани келтириб чиқарамиз. Шундай қилиб,

$$\begin{cases} x = 6z - 4, \\ y = -7z + 5 \end{cases}$$

система тўғри чизикнинг проекцияларга нисбатан тенгласи бўлади.

Охирги тенгламалар системасини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\begin{aligned} x + 4 &= 6z & \text{ёки} & \quad \frac{x + 4}{6} = z, & \quad \frac{y - 5}{-7} = z. \\ y - 5 &= -7z \end{aligned}$$

$$\text{Демак, } \frac{x + 4}{6} = \frac{y - 5}{-7} = \frac{z - 0}{1}.$$

Бу тўғри чизикнинг каноник тенгласидир.

3-мисол. Учбурчакнинг учлари $A(3, -2, 1)$, $B(6, 5, -7)$ ва $C(5, -4, 3)$ берилган. BD медиананинг каноник тенгласини ёзинг.

Ечиш. D нуқта AC томонни тенг иккига бўлади. Кесмани берилган нисбатда бўлиш формуласига асосан:

$$x_D = \frac{3+5}{2} = 4, \quad y_D = \frac{-2-4}{2} = -3, \quad z_D = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Демак, $D(4, -3, 2)$ бўлади. Медиана B ва D нуқталардан ўтади. (6) формулага асосан:

$$\frac{x - 6}{4 - 6} = \frac{y - 5}{-3 - 5} = \frac{z + 7}{2 + 7} \quad \text{ёки} \quad \frac{x - 6}{-2} = \frac{y - 5}{-8} = \frac{z + 7}{9}.$$

Бу BD медиананинг каноник тенгласидир.

4. Икки тўғри чизик орасидаги бурчак. Фазода иккита тўғри чизик каноник тенгламалари билан берилган бўлсин:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}; \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Бу тўғри чизиклар орасидаги бурчак, уларнинг йўналтирувчи векторлари орасидаги бурчакка тенг бўлиб,

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad (7)$$

формула ёрдамида топилади.

Берилган тўғри чизиклар параллел бўлса,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad (8)$$

бўлиб, бу фазода **икки тўғри чизикнинг параллеллик шарти** дейилади.

Тўғри чизиклар перпендикуляр бўлса, йўналтирувчи векторлар ҳам перпендикуляр бўлиб,

$$m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0 \quad (9)$$

бўлади, бу **икки тўғри чизикнинг перпендикулярлик шартидир**.

$$\text{4-мисол. } \frac{x-5}{7} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-2}{1} \quad \text{ва} \quad \frac{x-8}{7} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-4}{-1}$$

тўғри чизиклар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. Олдин тўғри чизикларнинг йўналтирувчи векторларини топамиз:

$$\vec{s}_1 = 7\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{s}_2 = 7\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$$

Тўғри чизиклар орасидаги бурчак уларнинг йўналтирувчи векторлари орасидаги бурчакка тенг. (7) формулага асосан:

$$\cos \varphi = \frac{7 \cdot 7 + 5 \cdot (-4) + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{7^2 + 5^2 + 1^2} \cdot \sqrt{7^2 + (-4)^2 + (-1)^2}} = \frac{28}{15\sqrt{22}} \approx 0.3127,$$

$$\cos \alpha \approx 0.3127.$$

Жадвалдан $\varphi \approx 71^0 48^1$ эканлигини топамиз.

5-мисол. $M_0 (2, -1, 3)$ нуқтадан ўтиб,

$$\frac{x+4}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-2}{4}$$

тўғри чизикқа параллел тўғри чизикнинг каноник тенгламасини ёзинг.

Ечиш. Изланаётган тўғри чизик йўналтирувчи вектори учун берилган тўғри чизик йўналтирувчи векторини олиш мумкин, чунки улар шартга кўра

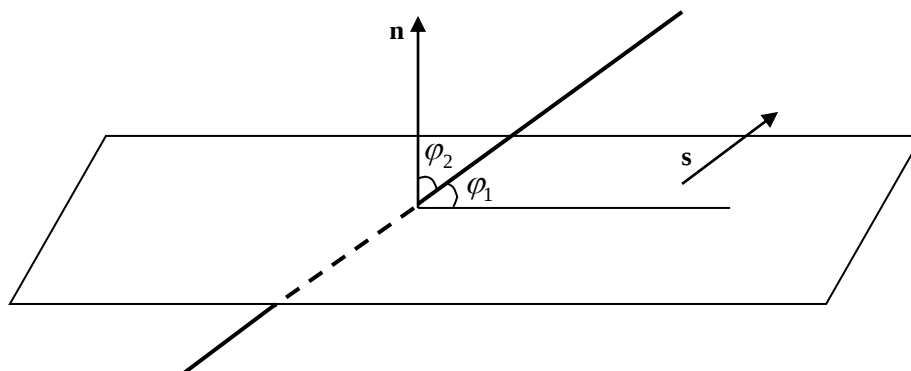
параллел, яъни $\vec{s} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ йўналтирувчи вектор бўлади. Берилган

нуқтадан ўтиб, $\vec{s}$ йўналтирувчи векторга эга бўлган, изланаётган тўғри чизик тенгламаси (3) га асосан,

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{4}$$

бўлади.

5.Фазода тўғри чизик ва текислик орасидаги бурчак. Фазода тўғри чизик ва текислик орасидаги бурчак деб, тўғри чизикнинг текисликдаги проекцияси билан тўғри чизик орасидаги қўшни бурчаклардан бири олинди (2-чизма).



2-чизма.

Тўғри чизик $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ каноник тенгламаси

билан текислик $Ax + By + Cz + D = 0$ умумий тенгламаси билан берилган бўлсин. φ_1 бурчакни топиш учун тўғри чизикнинг йўналтирувчи вектори $\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ вектор билан текисликнинг нормал вектори орасидаги φ_2 бурчакни ҳисоблаймиз:

$$\cos \varphi_2 = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + p^2 + n^2}}.$$

φ_1 бурчак φ_2 бурчакни $\pi/2$ гача тўлдиради. Демак,

$$\cos \varphi_2 = \cos (\pi/2 - \varphi_1) = \sin \varphi_1$$

Шундай қилиб,

$$\sin \varphi_1 = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + p^2 + n^2}} \quad (10)$$

бўлади. (10) фазода тўғри чизик ва текислик орасидаги бурчакни топиш формуласи бўлади.

Тўғри чизик текисликка параллел бўлса $\vec{s}(m, n, p)$ ва $\vec{n}(A, B, C)$ векторлар перпендикуляр бўлиб,

$$Am + Bn + Cp = 0 \quad (11)$$

тенглик ўринли бўлади. (11) тенгликка **тўғри чизик ва текисликнинг параллеллик шарт** дейилади. Тўғри чизик текисликка перпендикуляр бўлса, $\vec{s}(m, n, p)$ ва $\vec{n}(A, B, C)$ векторлар параллел бўлади ва

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \quad (12)$$

муносабат келиб чиқади. (12) тенглик **тўғри чизик ва текисликнинг перпендикулярлик шарти** бўлади.

(11) шарт бажарилмаса тўғри чизик ва текислик кесишади. Кесишиш нуқтасини топиш учун, ушбу

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

уч номаълумли тенгламалар системасини ечиш керак бўлади.

6-мисол. $A(5, 1, -4)$ ва $B(6, 1, -3)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизик билан $2x - 2y + z - 3 = 0$ текислик орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. AB нуқталардан ўтувчи тўғри чизикнинг йўналтирувчи вектори сифатида $\vec{s} = \vec{AB}(1, 0, 1)$ ни оламиз. Текисликнинг нормал вектори $\vec{n}(2, -2, 1)$ бўлганлиги учун (10) формулага асосан:

$$\sin \varphi = \frac{2 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin \varphi = \sqrt{2}/2, \quad \varphi = 45^\circ.$$

$$7\text{-мисол.} \quad \begin{cases} 2x + 3y + 3z - 7 = 0, \\ x + 2y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

тўғри чизикни ясанг.

Ечиш. Маълумки тўғри чизикни яшаш учун у ўтадиган иккита нуқтани аниқлаш етарли. Бунинг учун тўғри чизикнинг координат текисликлари билан кесишиш нуқталарини топамиз. Бу нуқталарга **тўғри чизикнинг координат текисликларидаги излари** дейилади.

Тўғри чизикнинг XOY текисликдаги **изини** топиш учун берилган системада $z = 0$ деб оламиз, яъни

$$\begin{cases} 2x + 3y - 7, \\ x + 2y - 4 = 0. \end{cases}$$

Бу системани x, y номаълумларга нисбатан ечсак, $x = 2, y = 1$ бўлади. Демак, берилган тўғри чизикнинг XOY координата текислигидаги изи $M_1(2, 1, 0)$ нуқта бўлади.

Энди тўғри чизикнинг XOZ текисликдаги изини топамиз. Бунинг учун берилган тенгламалар системасида $y = 0$ деб, ҳосил бўлган системани ечиб, $x = 2, z = 1$ топамиз. Демак, тўғри чизикнинг XOZ текисликдаги изи $M_2(2, 0, 1)$ бўлади. Топилган M_1 ва M_2 нуқталардан тўғри чизик ўтказамиз.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. R^3 фазода тўғри чизик қандай аниқланади?
2. Тўғри чизикнинг векторли, параметрик ва каноник тенгламалари қандай ёзилади?
3. Тўғри чизикнинг умумий ва проекцияларга нисбатан тенгламалари нималардан иборат?
4. R^3 фазода икки тўғри чизик орасидаги бурчак қандай топилади?
5. Фазода икки тўғри чизикнинг параллеллик шarti қандай?
6. Фазода икки тўғри чизикнинг перпендикулярлик шarti нима?
7. Фазода тўғри чизик ва текислик орасидаги бурчак деб қайси бурчак олинади?
8. Фазода тўғри чизик ва текисликнинг параллеллик шarti нимадан иборат?
9. Фазода тўғри чизик ва текисликнинг перпендикулярлик шarti қандай?
10. . Тўғри чизикнинг координат текисликларидаги излари нимадан иборат ва қандай топилади?
11. Тўғри чизикнинг йўналтирувчи вектори нима?

Мустақил иш учун тошириқлар

1. $M_0(2, 5, -4)$ нуқтадан ўтиб $\vec{s}(3,6,7)$ векторга параллел бўлган тўғри чизикнинг каноник ва параметрик тенгламаларини ёзинг.
2. $M(1, -3, -5)$ нуқтадан ўтиб, координат ўқлари билан $\alpha = \pi/4$, $\beta = 2\pi/3$, $\gamma = \pi/3$ бурчаклар ташкил этувчи тўғри чизикнинг каноник ва параметрик тенгламаларини ёзинг.
3. $M_1(3, -2, 5)$ ва $M_2(6, 1, 7)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизик каноник ва параметрик тенгламаларини ёзинг.
4. 1) $\begin{cases} 5x + y - 3z - 3 = 0, \\ 4x + y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x - 5y + 3z + 4 = 0, \\ x - 2y - z + 3 = 0 \end{cases}$.
тўғри чизикларнинг проекцияларга нисбатан ва каноник тенгламаларини ёзинг.
5. Учлари $A(1, 4, 2)$, $B(3, 5, 4)$ ва $C(-1, 1, 2)$ нуқталарда бўлган учбурчак AD медианасининг каноник тенгламасини ёзинг.
6. $\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 2 = 0, \\ 3x - 5y - 4z - 2 = 0 \end{cases}$
тўғри чизикнинг параметрик тенгламасини ёзинг.
7. $3x - 2y + 5z - 4 = 0$ текисликка координатлар бошидан ўтказилган перпендикулярнинг каноник тенгламасини ёзинг.

$$8. 1) \frac{x-5}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$$

$$\text{ва} \quad \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{-4};$$

$$2) \begin{cases} 2x-3y-4z+5=0, \\ x-2y-3z-1=0 \end{cases}$$

$$\text{ва} \quad \frac{x-5}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{4}$$

тўғри чизиклар орасидаги бурчакни топинг.

$$9. \quad \frac{x+3}{5} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{-1} \quad \text{ва}$$

$$\begin{cases} -3y+z-5=0, \\ x-2y-z+2=0 \end{cases}$$

тўғри чизикларнинг параллеллигини кўрсатинг.

$$10. 1) \quad \frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-6}{-1}$$

$$\text{ва} \quad \begin{cases} x+2y-3z-1=0, \\ x-y+2z-3=0 \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} 3x+4y-z-1=0, \\ 2x+3y+z+2=0 \end{cases} \quad \text{ва}$$

$$\begin{cases} x=1+2t, \\ y=2+3t, \\ z=5+t \end{cases}$$

тўғри чизикларнинг ўзаро перпендикулярлигини кўрсатинг.

$$11. \quad \frac{x-3}{1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-6}{1} \quad \text{тўғри чизик ва} \quad 4x+2y+2z+5=0$$

текислик орасидаги бурчакни топинг.

12. $A(3, 6, 2)$ ва $B(4, 5, -2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизик ва $2x+y-2z-5=0$ текислик орасидаги бурчакни топинг.

13. $M_0(-2, 3, 4)$ нуқтадан ўтиб, $3x-2y+5z-6=0$ текисликка перпендикуляр тўғри чизик тенгламасини ёзинг.

$$14. \quad \begin{cases} 2x-3y+4z-2=0, \\ x+2y-5z-3=0 \end{cases} \quad \text{тўғри чизик ва} \quad 2x-7y+12z-15=0$$

текисликнинг параллеллигини кўрсатинг.

МАТЕМАТИК ТАҲЛИЛГА КИРИШ

Мавзу. Тўпламлар назарияси

Режа

1. Тўпламлар ва улар ҳақида асосий тушунчалар.
2. Тўпламлар устида амаллар.
3. Тартибланган тўпламлар ҳақида.
4. Тўпламларнинг эквивалентлиги.
5. Тўпламнинг қуввати.

Таянч ибора ва тушунчалар

Тўплам, чекли ва чексиз тўпламлар, қаварик тўплам, нуқтанинг атрофи, чегараланган тўплам, тўпламнинг ички нуқтаси, чегаравий нуқта, қуюқланиш нуқтаси, ёпиқ ва очиқ тўпламлар, тўпламларнинг бирлашмаси, тўпламлар кесишмаси, тўпламларнинг фарқи, тўпламларнинг эквивалентлиги, компакт, тўпламнинг қуввати.

1. Тўпламлар ва улар ҳақида асосий тушунчалар. Тўплам тушунчаси математиканинг бошланғич ва муҳим тушунчалардан биридир. Масалан: Натурал сонлар тўплами, аудиториядаги талабалар тўплами, библиотекадаги китоблар тўплами, бир нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар тўплами бирор хилдаги маҳсулот ишлаб чиқарувчи корхоналар тўплами ва бошқалар.

Тўпламни ташкил этган нарсалар тўпламнинг элементлари дейилади. Математикада тўпламлар бош ҳарфлар билан, масалан: $A, B, X, Y, \dots$ унинг элементлари эса кичик ҳарфлар, масалан: $a, b, x, y, \dots$ билан белгиланади.

Тўплам чекли сондаги элементлардан ташкил топган бўлса, унга чекли тўплам деб аталади. Масалан, библиотекадаги китоблар сони ёки гуруҳдаги талабалар сони чекли бўлади. Чексиз элементлардан ташкил топган тўплам чексиз тўплам деб аталади. Масалан, натурал сонлар тўплами, битта нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар тўплами ва бошқалар.

x элемент X тўпламга тегишли бўлса, $x \in X$ деб белгиланади, акс ҳолда $x \notin X$ ёзилади. $\{x \in X / P(x)\}$ белги P хоссага эга бўлган $x \in X$ лар тўпламини билдиради. Бўш тўпламни

$\emptyset = \{x \in \emptyset / x \neq x\}$ деб ёзиш мумкин.

1-мисол. Қуйидаги хоссаларга эга бўлган тўпламлар элементларини аниқланг.

$$1) A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}; 2) B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 0\}; 3) C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\}$$

Ечиш. 1) Тўплам 5 дан кичик ва тенг бўлган натурал сонлардан иборатлигини билдиради, яъни $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2) манфий натурал сон йўқ шунинг учун $B = \emptyset$;

3) бу ҳолда $|x| \leq 2$ тенгсизликни қаноатлантирувчи фақат бутун сонлар олинади, бу $[-2; 2]$ кесмада бўлади. Шундай қилиб, $C = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Қаварик тўплам. 1-таъриф. Исталган икки нукта шу тўпламга тегишли бўлганда, бу нукталарни туташтирувчи тўғри чизик кесмаси ҳам шу тўпламга тегишли бўлса, бундай тўпламга қаварик тўплам дейилади.

Нуктанинг атрофи. 2-таъриф. r бирор мусбат сон бўлсин. $M_0 \in R^n$ фазонинг нуктаси учун $\rho(M, M_0) < r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳамма $M \in R^n$ нукталар тўпламига M_0 нуктанинг r -атрофи дейилади ва $S_r(M_0)$ билан белгиланади, яъни

$$S_r(M_0) = \{M \in R^n \mid \rho(M, M_0) < r\}.$$

Масалан, $M_1(2; 3; -1; 3) \in S_2(M_0), M_0(1; 2; -1; 2)$ нуктанинг $S_r(M_0)$ атрофига тегишли, чунки

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(1-2)^2 + (2-3)^2 + (-1+1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{3}$$

бўлиб, $\sqrt{3} < 2$ бўлади. $M_2(3; 3; -1; 3)$ нукта $S_2(M_0)$ атрофга тегишли эмас, чунки $\rho(M_2, M_0) = \sqrt{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (-1+1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{6}$ бўлиб, $\sqrt{6} > 2$ бўлади.

R^1 (сонлар ўқи) фазода $M_0(a)$ нуктанинг r атрофи $(a-r, a+r)$ интервалдан иборат.

R^2 (текислик) фазода $M_0(a, b)$ нуктанинг r атрофи, радиуси r , маркази $M_0(a, b)$ нуктада бўлган доиранинг ички нукталаридан иборат бўлади. R^3 фазода эса, $M_0(a, b, c)$ нуктанинг r атрофи, радиуси, r , маркази. $M_0(a, b, c)$ нуктада бўлган шарнинг ички қисмидан иборат бўлади.

Тўпламнинг чегараланганлиги. 3-таъриф. R^n фазонинг V тўпламнинг исталган $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in V$ нуктаси учун шундай $A > 0$ сон мавжуд бўлиб,

$$|x_1| \leq A, |x_2| \leq A, \dots, |x_n| \leq A$$

муносабатлар бажарилса, V тўпламга чегараланган тўплам дейилади. Масалан, n ўлчовли фазода исталган нуктанинг r атрофи чегараланган тўпламдир.

Тўпламнинг ички ва чегаравий нукталари. 4-таъриф. $M_0 \in V$ нукта V тўпламга ўзининг бирор r атрофи билан кирса, унга V тўпламнинг ички нуктаси дейилади.

5-таъриф. $M_0 \in V$ нукта ўзининг ҳар бир атрофида V тўпламга тегишли бўлган ҳамда тегишли бўлмаган нукталар билан кирса, M_0 нуктага V тўпламнинг чегаравий нуктаси дейилади.

Тўпламнинг қуюқланиш нуктаси. 6-таъриф. M_0 нуктанинг ихтиёрий атрофи V тўпламнинг M_0 нуктадан фарқли чексиз кўп нукталари (M_0 нуктадан фарқли)ни ўз ичига олса, M_0 нукта V тўпламнинг қуюқланиш нуктаси дейилади. Қуюқланиш нуктаси тўпламнинг ўзига қарашли бўлиши

хам, қарашли бўлмаслиги ҳам мумкин. Масалан, $V = [a, b]$ ёки $V = (a, b)$ бўлса, иккала ҳолда ҳам a нукта V учун қуюқланиш нуктаси бўлади, лекин биринчи ҳолда бу нукта V тўпдамда ётади, иккинчи ҳолда эса у V тўпдамда ётмайди.

Ёпиқ ва очик тўпдамлар. 7-таъриф. V тўпдам ўзининг ҳамма қуюқланиш нукталарини ўзида сақласа, унга **ёпиқ тўпдам** дейилади. Масалан, $[a, b]$ кесма R^1 сонлар ўқида, $\{M(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$ R^2 доира текисликда ёпиқ тўпдамлардир.

8-таъриф. V тўпдамнинг ҳамма нукталари ички нукталар бўлса, бундай тўпдамга **очик тўпдам** дейилади. Масалан, (a, b) R^1 да, $\{M(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 < r^2\}$ R^2 да очик тўпдамлардир. R^n фазода исталган нуктанинг r атрофи очик тўпдамдир.

R^n фазода чегараланган ёпиқ тўпдамга **компакт** деб аталади.

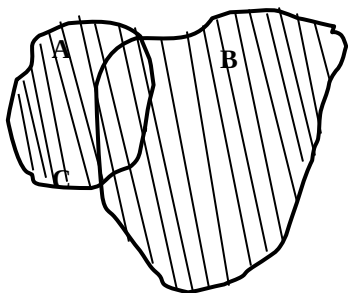
2. Тўпдамлар устида амаллар. B тўпдамнинг ҳар бир элементи A тўпдамнинг ҳам элементи бўлса, B тўпдамга A тўпдамнинг **қисм тўпдами** дейилади ва $B \subset A$ ёки $A \supset B$ билан белгиланади. $A \subset B$ ва $B \subset A$ бўлса, A ва B тўпдамлар тенг дейилади ва $A = B$ билан белгиланади.

1) A ва B **тўпдамларнинг бирлашмаси** (**йиғиндиси**) деб учинчи бир C тўпдамга айтиладики, бу тўпдамнинг исталган элементи A ёки B тўпдамга тегишлай бўлади ва $A \cup B$ билан белгиланади, яъни

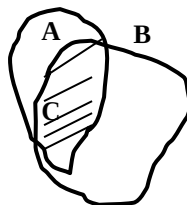
$$C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ёки } x \in B\} \text{ (1-чизма).}$$

2) A ва B **тўпдамларнинг кесишмаси** (**кўпайтмаси**) деб, учунчи бир C тўпдамга айтиладики, унинг ҳар бир элементи A тўпдамга ҳам, B тўпдамга ҳам тегишли бўлади ва $A \cap B$ билан белгиланади, яъни $C = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ва } x \in B\}$ (2-чизма).

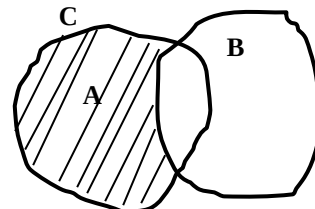
3) A тўпдамдан B тўпдамнинг **фарқи** (**айирмаси**) деб шундай учинчи бир C тўпдамга айтиладики, унинг ҳар бир элементи A га тегишли бўлса, B га тегишли бўлмайди, ва уни $A/B = \{x \mid x \in A \text{ ва } x \notin B\}$ (3-чизма).



1-чизма



2-чизма



3-чизма

2-мисол. $A = \{1, 2\}$ тўпламнинг ҳамма қисм тўпламларидан иборат бўлган B тўпламни тузинг.

Ечиш. Қисм тўплам таърифига асосан,
 $\emptyset \in A, \{1\} \in A, \{2\} \in A, \{1, 2\} \in A$, Демак, $B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

3-мисол. $A = (4, 8)$ ва $B = (1, 4]$ бўлса, уларнинг бирлашмасини ва кесишмасини топинг.

Ечиш. Бирлашманинг таърифидан $A \cup B = (1, 8)$ бўлиб кесишманинг таърифидан $A \cap B = \emptyset$ бўлади.

4-мисол. $A = (-3, 7]$ ва $B = [5, 6]$ бўлса, уларнинг бирлашмаси ва кесишмасини топинг.

Ечиш. Таърифга асосан $A \cup B = (-3, 7]$, $A \cap B = [5, 6]$ бўлади.

5- м и с о л. Ушбу

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8\}, \quad C = \{1, 3\}$$

тўпламларни қарайлик. Бу тўпламлар учун

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\},$$

$$A \cap B = \{2, 4, 6\},$$

$$A \setminus B = \{1, 3, 5\},$$

$$B \setminus A = \{8\},$$

$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$A \cap C = \{1, 3\},$$

$$B \cap C = \emptyset,$$

$$B \times C = \{(2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3), (6, 3), (8, 1), (8, 3)\}.$$

бўлади.

Юқорида келтирилган таърифлардан

$$E \cup E = E, \quad E \cap E = E, \quad E \setminus E = \emptyset,$$

шунингдек $E \subset F$ бўлганда

$$E \cup F = F, \quad E \cap F = E$$

бўлиши келиб чиқади.

Барча $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ - натурал сонлардан иборат тўплам натурал сонлар тўплами дейилади ва у N ҳарфи билан белгиланади:

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

Барча $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ - бутун сонлардан иборат тўплам **бутун сонлар тўплами** дейилади ва у Z ҳарфи билан белгиланади:

$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Равшанки,

$$N \subset Z$$

бўлади.

3.Тартибланган тўпламлар ҳақида

Агар бирор E тўпламнинг элементлари учун қуйидаги тасдиқлар:

1) $n = m, n > m, n < m$ муносабатлардан биттаси ва фақат биттаси ўринли;

2) $n < m$, $m < p$ тенгсизликлардан $n < p$ тенгсизлик ўринли бўлса, E тўплам тартибланган тўплам дейилади.

Тартибланган тўпламларга дастлабки мисол, $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ натурал сонлар тўплами бўлади. Бундан ташқари бутун, рационал, ҳақиқий сонлар тўпламлари ҳам тартибланган тўпламларга мисол бўлаолади.

4. Тўпламларнинг эквивалентлиги

Ихтиёрий иккита E ва F тўпламлар берилган ҳолда, табиийки, уларнинг қайси бирининг элементи «кўп» деган савол туғилади. Натижада тўпламларни солиштириш (элементлар сони жиҳатидан солиштириш) масаласи юзага келади. Одатда бу масала икки усул билан ҳал қилинади:

1) тўпламларнинг элементларини бевосита санаш билан уларнинг элементлари сони солиштирилади ;

2) бирор қоидага кўра бир тўпламнинг элементларига иккинчи тўпламнинг элементларини мос қўйиш йўли билан уларнинг элементлари солиштирилади.

Масалан, $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{1, 4, 9, 16\}$ тўпламларнинг элементлари сонини солиштириб, F тўпламнинг элементлари сони E тўпламнинг элементлари сонидан кўп эканлигини аниқлаймиз. Ёки, E тўпламнинг ҳар бир элементига F тўпламнинг битта элементини

$$1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 9$$

тарзда мос қўйиб, F тўпламда E тўплам элементига мос қўйилмай қолган элемент борлигини (у 16) ҳисобга олиб, яна F нинг элементлари сони E нинг элементлари сонидан кўп деган хулосага келамиз. Агар тўпламлар чексиз бўлса, равшанки, уларни 1- усул билан солиштириб бўлмайди. Бундай вазиятда фақат 2 - усул билангина иш кўрилади. Масалан, $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ натурал сонлар тўпламининг ҳар бир n элементига ($n = 1, 2, \dots$) жуфт сонлар тўплами $N_1 = \{2, 4, \dots, 2n, \dots\}$ нинг $2n$ элементини ($n = 1, 2, \dots$) мос қўйиш билан ($n \rightarrow 2n$) солиштириб, уларнинг элементлари сони «тенг» деган хулосага келамиз.

1 – т а ъ р и ф. Агар E тўпламнинг ҳар бир a элементига F тўпламнинг битта b элементи мос қўйилган бўлиб, бунда F тўпламнинг ҳар бир элементи учун E тўпламда унга мос келадиган биттагина элемент бор бўлса, у ҳолда E ва F тўпламлар элементлари орасида **ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилган** дейилади.

2 – т а ъ р и ф. Агар E ва F тўплам элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин бўлса, улар бир-бирига **эквивалент тўпламлар** деб аталади ва

$$E \sim F$$

каби белгиланади.

6-м и с о л. 1. Ушбу

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad F = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$$

тўпламлар эквивалент тўпламлар бўлади. Бу тўплам элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд. Уни қуйидагича

$$1 \leftrightarrow 1, \quad 2 \leftrightarrow \frac{1}{2}, \quad 3 \leftrightarrow \frac{1}{3}, \quad 4 \leftrightarrow \frac{1}{4}, \quad 5 \leftrightarrow \frac{1}{5},$$

ўрнатиш мумкин. Демак, $E \sim F$.

7-мисол. Ушбу

$$E = \{2, 4, 6, 8\}, \quad F = \{2, 4, 6, 8, 10\},$$

тўпламлар эквивалент тўпламлар бўлмайди. Чунки бу тўплам элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиб бўлмайди.

8-мисол. Ушбу

$$E = N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}, \quad F = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\},$$

тўпламлар эквивалент тўпламлар бўлади. Бу тўплам элементлари орасидаги ўзаро бир қийматли мослик ҳар бир n га ($n \in N$) $\frac{1}{n}$ ни ($\frac{1}{n} \in F$) мос қўйиш

билан ўрнатилади. Демак, $E \sim F$.

9-мисол. Ушбу

$$E = N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}, \quad N_1 = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$$

тўпламлар ўзаро эквивалент бўлади. Бу тўплам элементлари орасида ўзаро бир қиймати мосликни қуйидагича ўрнатиш мумкин: ҳар бир натурал n ($n \in N$) сонга $2n$ сон ($2n \in N_1$) мос қўйилади $n \leftrightarrow 2n$). Демак, $E = N \sim N_1$.

Равшанки, $N_1 \subset N$. Бу эса тўпламнинг қисми ўзига эквивалент бўлиши мумкин эканлигини кўрсатади. Бундай ҳолат фақат чексиз тўпламларгина хосдир.

Юқорида келтирилган таъриф ва мисоллардан икки чекли тўпламнинг ўзаро эквивалент бўлиши учун уларнинг элементлари сони бир-бирига тенг бўлиши зарур ва етарли эканлигини кўрамиз.

Эквивалентлик муносабати қуйидаги хоссаларига эга:

- 1) $E \sim E$ (рефлексивлик хоссаси) ;
- 2) $E \sim F$ бўлса, $F \sim E$ бўлади (симметрик хоссаси) ;
- 3) $E \sim F$, $F \sim G$ бўлади (транзитивлик хоссаси).

Тўпламларнинг эквивалентлик тушунчаси тўпламларни синфларга ажратиш имконини беради.

Масалан,

$$\begin{aligned} N_1 &= \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}, \\ N_2 &= \{1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots\}, \\ N_3 &= \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\} \end{aligned}$$

тўпламлар санокли тўпламлардир, чунки

$$N_1 \sim N \quad (2n \leftrightarrow n, n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$N_2 \sim N \quad (2n-1 \leftrightarrow n, n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$N_3 \sim N \left(\frac{1}{n} \leftrightarrow n, n = 1, 2, 3, \dots \right).$$

5. Тўплагнинг қуввати. Тўплагнинг қуввати, тўплаг “элементларининг сони” тушунчасининг ихтиёрий (чекли ва чексиз) тўплаглар учун умумлаштирилганидир. Тўплагнинг қуввати берилган тўплагга эквивалент бўлган барча тўплагларга, яъни элементлари берилган тўплагнинг элементлари билан ўзаро бир қийматли мосликда бўла оладиган барча тўплагларга умумий бўлган нарсасифатида аниқланади.

Тўплаг қуввати тушунчасини математикага тўплаглар назариясининг асосчиси немис математиги Г.Кантор (1845-1918) киритган (1879 йилда). Кантор чексиз тўплаглар учун ҳар хил қувватлар мавжудлигини исботлаган.

3-таъриф. Натурал сонлар қаторига эквивалент бўлган тўплаг, яъни ҳамма элементларини натурал сонлар билан рақамлаб (белгилаб) чиқиш мумкин бўлган тўплагга санокли тўплаг дейилади. Масалан,

$$N_1 = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\},$$

$$N_2 = \{1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots\},$$

$$N_3 = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$$

тўплаглар санокли тўплаглардир, чунки

$$N_1 \sim N \quad (2n \leftrightarrow n, n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$N_2 \sim N \quad (2n-1 \leftrightarrow n, n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$N_3 \sim N \quad \left(\frac{1}{n} \leftrightarrow n, n = 1, 2, 3, \dots \right).$$

Санокли тўплагнинг қуввати чексиз тўплаглар қуввати орасида энг кичиги бўлиб ҳисобланади.

Санокли бўлмаган тўплаг саноксиз тўплаг деб аталади.

$0 \leq x \leq 1$ кесмадаги сонларнинг L тўплагининг қуввати номи континуум дейилади. L ни натурал сонлар тўплагига ўзаро бир қийматли акслантириш мумкин эмас. “**Континуум математикаси**” термини узлуксизлик тушунчаси билан боғлиқ бўлган назарияларда қўлланилиб, у дискрет математикага қарама-қарши қўйилади. Континуум қувват санокли тўплаг қувватидан катта. Бир неча ўн йил муқаддам санокли тўплаг қувватидан катта ва континуум қувватдан кичик бўлган тўплаг мавжудми? деган муаммо қўйилган.

Математик белгилар ҳақида. Математикада тез-тез учрайдиган сўз ва сўз бирикмалари ўрнига махсус белгилар ишлатилади. Улардан энг муҳимларини келтирамиз:

1) «Агар бўлса, у ҳолда бўлади» ибораси « $\Rightarrow$ » белгиси орқали ёзилади;

2) икки иборанинг эквивалентлиги ушбу « $\Leftrightarrow$ » белгиси орқали ёзилади;

3) «Ҳар қандай», «ихтиёрий», «барчаси учун» сўзлари ўрнига « $\forall$ » умумийлик белгиси ишлабитади;

4) «Мавжудки», «топиладики» сўзлари ўрнига « $\exists$ » мавжудлик белгиси ишлатилади.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Чекли ва чексиз тўпламлар қандай тўпламлар?
2. Қавариқ тўплам қандай тўплам?
3. Нуқтанинг атрофийи деб нимага айтилади?
4. Тўпламнинг ички нуқтаси нима?
5. Тўпламнинг чегаравий нуқтаси қандай бўлади?
6. Очиқ тўплам деб нимага айтилади?
7. Ёпиқ тўплам деб қандай тўпламга айтилади?
8. Очиқ ва ёпиқ тўпламлар қандай хоссаларга эга?
9. Қандай тўпламга чегараланган дейилади?
10. Тўпламнинг қуюқланиш нуқтаси деб нимага айтилади?
11. Қисм тўплам деб қандай тўпламга айтилади?
12. Қандай тўпламлар тенг дейилади?
13. Бирлашма (йиғинди) тўплам қандай тўплам?
14. Тўпламларнинг кесишмаси нима ва у қандай белгиланади?
15. Тўпламларнинг фарқи (айирмаси) нима?
16. Ўзаро бир қийматли мослик нима?
17. Тўпламларнинг эквивалентлиги қандай бўлади?
18. Тўпламнингш қуввати нима?
19. Санокли тўплам деб нимага айтилади?

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. N натурал сонлар тўплами ва Z бутун сонлар тўплами бирлашмасини топинг.

2. G рационал сонлар тўплами, R ҳақиқий сонлар тўплами бўлса $G \cap R$ ни топинг.

3. Рационал ва иррационал сонлар тўплами бирлашмасини топинг.

4. A тўғри тўртбурчаклар тўплами, B ромблар тўплами бўлса, $A \cap B$ ни топинг.

5. A жуфт сонлар тўплами Z бутун сонлар тўплами бўлса, уларнинг кесишмасини топинг.

6. A жуфт сонлар тўплами B тоқ сонлар тўплами бўлса, A ва B ларнинг кесишмасини топинг.

7. $\{0; 1,2\}$ бўлса ҳамма қисм тўпламлар тўпламини топинг.

8. A жуфт сонлар тўплами, B тоқ сонлар тўплами, C туб сонлар тўплами бўлса, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$ топинг.

9. $\{1,2,4,6,9\}$, $B = \{3,4,5,8,10\}$ бўлса $A \setminus B$ ва $B \setminus A$ ларни топинг.

10. топинг. G рационал сонлар тўплами, R ҳақиқий сонлар тўплами бўлса $G \setminus R$ ни топинг.

Мавзу. Сонли кетма-кетликлар

Режа

1. Сонли кетма-кетлик таърифи ва умумий тушунчалар.
2. Чегараланган ва чегараланмаган сонли кетма-кетликлар.
3. Чексиз катта ва чексиз кичик кетма-кетликлар ҳамда уларнинг хоссалари.
4. Сонли кетма-кетликнинг лимити ва унинг хоссалари.

Таянч ибора ва тушунчалар

Сонли кетма-кетлик, умумий ҳад, чегараланган ва чегараланмаган кетма-кетликлар, қуйидан чегараланган, чексиз катта ва чексиз кичик кетма-кетликлар, кетма-кетликнинг лимити, яқинлашувчи кетма – кетлик, нуқтанинг атрофи, чексиз лимит, чекли лимит.

1. Сонли кетма-кетлик таърифи ва умумий тушунчалар

1-таъриф. Натурал сонлар қаторидаги

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

ҳар бир n сонга ҳақиқий x_n сон мос қўйилган бўлса,

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (1)$$

(1) ҳақиқий сонлар тўпламига сонли кетма-кетлик ёки қисқача кетма-кетлик дейилади.

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ сонларга сонли кетма-кетликнинг ҳадлари дейилиб, x_n га кетма – кетликнинг умумий ҳади ёки n – ҳади деб аталади, (1) сонли кетма-кетликни қисқача $\{x_n\}$ символ билан белгиланади. Масалан, 1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

сонлар кетма-кетлиги

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

бўлади;

2) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ сонлар кетма-кетлиги $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$

бўлади.

Сонли кетма-кетликнинг умумий ҳадини олиш усули кўрсатилган бўлса, у берилган дейилади. Мисол учун, 1) $x_n = 2 + (-1)^n$ бўлса, у 1, 3, 1, 3, 1, 3, ..., 1, 3, ... ;

3) $\frac{2}{3}$ касрни ўнли касрга айлантирганда вергулдан кейин битта, иккита, учта ва ҳоказо рақамларни олиб,

$$x_1 = 0,6, x_2 = 0,66, x_3 = 0,666, \dots$$

сонлар кетма-кетлигини олиш мумкин;

4) $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-1)d, \dots$

арифметик прогрессия ҳам сонли кетма-кетликдир, бунда a_1 биринчи ҳад, d арифметик прогрессия айирмаси;

$$4) b_1, b_1 q, b_1 q^2, \dots, b_1 q^{n-1}, \dots$$

сонлар кетма-кетлиги ҳам кетма-кетликка мисол бўлади, бу биринчи ҳади b_1 махражи q бўлган геометрик прогрессиядир.

Сонли кетма-кетликнинг таърифидан маълумки, у чексиз сондаги элементларга эга бўлиб, улар ҳеч бўлмаганда ўзларининг тартиб рақами билан фарқ қилади.

Сонлар кетма-кетлигининг геометрик тасвири сонлар ўқидаги нуқталар билан ифодаланади.

Сонли кетма-кетликлар устида ушбу арифметик амалларини бажариш мумкин: 1) $\{x_n\}$ сонлар кетма-кетлигини сонга кўпайтириш,

$$mx_1, mx_2, mx_3, \dots, mx_n, \dots$$

кўринишда бўлади;

2) иккита $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ сонлар кетма-кетлигининг йиғиндиси

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots;$$

кўринишда аниқланади;

3) иккита $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ сонлар кетма-кетлигини айирмаси

$$x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n, \dots$$

кўринишда бўлади;

4) иккита $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ сонлар кетма-кетлиги кўпайтмаси

$$x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \dots, x_n \cdot y_n, \dots;$$

каби аниқланади;

5) иккита $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ сонлар кетма-кетлигининг нисбати, махраж 0 дан фарқли бўлганда,

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \dots, \frac{x_n}{y_n}, \dots$$

кўринишда бўлади ҳамда мос равишда $\{mx_n\}$, $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$,

$\{x_n \cdot y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ символлар билан белгиланади.

2. Чегараланган ва чегараланмаган сонли кетма-кетликлар. 1-таъриф. $\{x_n\}$ сонлар кетма – кетлиги учун шундай M (m сон) сон мавжуд бўлиб, кетма-кетликнинг исталган элементи учун $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$) тенгсизлик бажарилса $\{x_n\}$ кетма-кетлик юқоридан (қуйидан) чегараланган дейилади.

2-таъриф. $\{x_n\}$ сонлар кетма-кетлиги қуйидан ва юқоридан чегараланган бўлса, яъни шундай m ва M сонлар мавжуд бўлиб, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг исталган элементи учун $m \leq x_n \leq M$ тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик чегараланган дейилади.

3-таъриф. $\{x_n\}$ сонлар кетма-кетлиги учун шундай A мусбат сон мавжуд бўлиб, x_n элемент мавжуд бўлиб, $|x_n| > A$ (яъни $x_n > A$ ёки $x_n < -A$) тенгсизлик бажарилса $\{x_n\}$ сонлар кетма-кетлиги чегараланмаган дейилади.

Юқоридаги таърифлардан келиб чиқадики, $\{x_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланган бўлса, унинг ҳамма элементлари $(-\infty, M]$ ораликқа тегишли, $\{x_n\}$ кетма-кетлик қуйидан чегараланган бўлса, унинг ҳамма элементлари $[m, +\infty)$ ораликқа тегишли, юқоридан ва қуйидан чегараланган бўлса, $[m, M]$ ораликқа тегишли бўлади.

Мисоллар:

- 1) $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ сонлар кетма-кетлиги қуйидан чегараланган, лекин юқоридан чегараланган;
- 2) $-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$ сонлар кетма-кетлиги юқоридан чегараланган;
- 3) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ сонлар кетма-кетлиги чегараланган, чунки унинг ҳамма элементлари учун $0 \leq x_n \leq 1$ тенгсизлик бажарилади, бунда $m = 0$ $M = 1$ бўлади;
- 4) $-1, 2, -3, 4, -5, \dots, -(-1)^n n, \dots$ сонлар кетма-кетлиги чегараланмаган, чунки қандай A сон олмайлики, бу кетма-кетлик ичида $|x_n| > A$ тенгсизликни қаноатлантирувчи элементлари мавжуд бўлади.

3.Чексиз катта ва чексиз кичик кетма-кетликлар ҳамда уларнинг хоссалари

1-таъриф. $\{x_n\}$ сонлар кетма-кетлиги исталган A сон учун, шундай N рақам мавжуд бўлиб, ҳамма $n > N$ лар учун $|x_n| > A$ тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ сонлар кетма-кетлиги чексиз катта кетма-кетлик дейилади.
 $\{x_n\}$ чексиз катта кетма-кетлик чегараланмаган бўлади.

2-таъриф. Исталган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай N рақам мавжуд бўлиб, $n > N$ лар учун $|x_n| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса $\{x_n\}$ кетма-кетлик чексиз кичик сонлар кетма-кетлиги дейилади.

Мисоллар:

- 1) натурал сонлар кетма-кетлиги $\{n\}$ чексиз катта кетма-кетликдир;
- 2) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ сонлар кетма-кетлиги чексиз кичикдир, ҳақиқатан ҳам, исталган $\varepsilon > 0$ сон олсак, $|x_n| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ дан $n > \frac{1}{\varepsilon}$ бўлиб, N учун $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ (бутун қисми) олиб, ҳамма $n > N$ лар учун $\frac{1}{n} = |x_n| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. 2-

таърифга асосан $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ кетма-кетлик чексиз кичик бўлади. Чексиз кичик ва чексиз катта кетма-кетликлар орасида ушбу боғлиқлик бор.

1-теорема. $\{x_n\}$ чексиз катта кетма-кетлик ва унинг ҳамма элементлари 0 дан фарқли бўлса, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ кетма-кетлик чексиз кичик кетма-кетлик ва аксинча

$\{\alpha_n\}$ чексиз кичик кетма-кетлик ва $\alpha_n \neq 0$ бўлса, $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ кетма-кетлик чексиз катта кетма-кетлик бўлади.

Исбот. $\{x_n\}$ чексиз катта кетма-кетлик бўлсин. Исталган $\varepsilon > 0$ сон олиб, $A = \frac{1}{\varepsilon}$ дейлик. 1-таърифдан шу A сон учун шундай N рақам мавжудки, $n > N$ лар учун $|x_n| > A$ бўлади. Бундан ҳамма $n > N$ учун $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \frac{1}{A} = \varepsilon$ келиб чиқади. Бу $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ кетма-кетликнинг чексиз кичиклигини билдиради. (Теореманинг иккинчи қисмини исбот қилишни ўқувчига ҳавола этамиз).

Чексиз кичик кетма-кетликлар қуйидаги хоссаларга эга.

2-теорема. Иккита чексиз кичик кетма-кетликларнинг алгебраик йиғиндиси яна чексиз кичик кетма-кетлик бўлади.

Исбот. $\{\alpha_n\}$ ва $\{\beta_n\}$ чексиз кичик кетма-кетликлар бўлсин. Бу чексиз кичик кетма-кетликлар учун, исталган ε сон учун N_1 рақам топиладики, $n > N_1$ лар учун, $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизлик, N_2 рақам топиладики, $n > N_2$ лар учун $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизликлар бажарилади. $N = \max\{N_1, N_2\}$ десак, $n > N$ лар учун бирданига $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизликлар бажарилади. Шундай қилиб,

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

бўлади.

Бу $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ кетма-кетликнинг чексиз кичик эканлигини билдиради.

Натижа. Исталган чекли сондаги чексиз кичикларнинг алгебраик йиғиндиси яна чексиз кичик кетма-кетликдир.

3-теорема. Иккита чексиз кичик кетма-кетликнинг қўпайтмаси, чексиз кичик кетма-кетлик бўлади.

Исбот. $\{\alpha_n\}$ ва $\{\beta_n\}$ лар чексиз кичик кетма-кетликлар бўлсин. $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ кетма-кетликнинг чексиз кичиклигини исботлаш талаб этилади. $\{\alpha_n\}$ чексиз кичик бўлганлиги учун, исталган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай N_1 рақам топиладики, $n > N_1$ лар учун $|\alpha_n| < \varepsilon$, $\{\beta_n\}$ чексиз кичик кетма-кетлик бўлганлиги учун $\varepsilon = 1$ учун шундай N_2 топиладики $n > N_2$ лар учун $|\beta_n| < 1$, бажарилади. $N = \max\{N_1, N_2\}$ деб олсак, $n > N$ лар учун иккала тенгсизлик ҳам бажарилиб,

$$|\alpha_n \cdot \beta_n| \leq |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$$

бўлади. Бу $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ кетма-кетликнинг чексиз кичиклигини билдиради.

Натижа. Исталган сондаги чексиз кичикларнинг кўпайтмаси яна чексиз кичик бўлади.

Эслатма. Иккита чексиз кичикларнинг нисбати чексиз кичик бўлмаслиги

мумкин, масалан, $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $\beta_n = \frac{1}{n}$ чексиз кичикларнинг нисбати ҳамма

элементлари 1 лардан иборат чегараланган кетма-кетликдир.

$\alpha_n = \frac{1}{n}$, $\beta_n = \frac{1}{n^2}$ чексиз кичик кетма-кетликларнинг нисбати $\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\} = \{n\}$

бўлиб, чексиз катта кетма-кетлик ҳосил бўлади. $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$, $\beta_n = \frac{1}{n}$ бўлса,

уларнинг нисбати $\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ чексиз кичик бўлади.

4-теорема. Чегараланган кетма-кетликнинг чексиз кичик кетма-кетликка кўпайтмаси чексиз кичик кетма-кетлик бўлади. (Бу теореманинг исботини ўқувчига ҳавола қиламиз).

4. Сонли кетма-кетликнинг лимити ва унинг хоссалари

1-таъриф. Исталган $\varepsilon > 0$ сон учун унга боғлиқ бўлган N сон топилсаки, барча $n > N$ лар учун $|x_n - a| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, a сонга $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг $n \rightarrow \infty$ даги лимити дейилади ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ ёки } n \rightarrow \infty \text{ да } x_n \rightarrow a$$

символлар билан белгиланади. Чекли лимитга эга сонли сонли кетма-кетликка, яқинлашувчи кетма-кетлик дейилади.

Лимитнинг таърифига мисол қараймиз.

Лимитнинг таърифидан фойдаланиб,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ эканлигини кўрсатамиз. Исталган $\varepsilon > 0$ сон оламиз.

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n - n - 1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}$$

бўлганлиги учун, $|x_n - 1| < \varepsilon$ тенгсизликни қаноатлантирувчи n ларнинг қийматини топиш, $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ тенгсизлик билан боғлиқ ва $1 < \varepsilon(n+1)$ ёки $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ бўлади. Шунинг учун N сифатида $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ соннинг бутун қисмини олиш мумкин, яъни $N = \left\lceil \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right\rceil$ бўлади. Бу ҳолда $|x_n - 1| < \varepsilon$ тенгсизлик ҳамма $n > N$ лар учун бажарилади. Масалан, $\varepsilon = 0,1$ бўлсин, бу ҳолда

$$N = \left\lceil \frac{1-0,1}{0,1} \right\rceil = \left\lceil \frac{0,9}{0,1} \right\rceil = 9. \quad n = 10 > N = 9$$

бўлсин. Бунда

$$x_{10} = \frac{10}{10+1} = \frac{10}{11}$$

бўлиб,

$$|x_{10} - 1| = \left| \frac{10}{11} - 1 \right| = \frac{1}{11} < \varepsilon = 0,1.$$

Шундай қилиб $n=10$ дан бошлаб, ҳамма n лар учун $|x_{10} - 1| < 0,1$ тенгсизлик бажарилади.

Демак, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ тенглик ўринли бўлади.

Бошқа бир неча $\varepsilon > 0$ лар олиб, қайси рақамлардан бошлаб, тенгсизликнинг бажарилишини кўрсатишни ўқувчига ҳавола этамиз.

Эслатма 1. $\{x_n\}$ сонлар кетма-кетлиги бирор a лимитга эга бўлса, уни $\alpha_n = x_n - a$ чексиз кичик миқдор кўринишида ифодалаш мумкин, чунки $\varepsilon > 0$ сон учун шундай N топиладики, $n > N$ лар учун

$$|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Шунинг учун a лимитга эга бўлган $\{x_n\}$ сонлар кетма-кетлигини

$$x_n - a = \alpha_n$$

кўринишда ифодалаш мумкин, бунда α_n чексиз кичик кетма-кетлик.

2-таъриф. $\varepsilon > 0$ бирор мусбат сон бўлсин. $|x_n - a| < \varepsilon$ тенгсизлик ҳамма n лар учун бажарилса, $\{x_n\}$ сонлар кетма-кетлиги a нуқтанинг ε атрофида дейилади.

2-эслатма. Маълумки $|x_n - a| < \varepsilon$ тенгсизлиги

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \text{ ёки } a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

тенгсизлик билан тенг кучли бўлиб, x_n элемент a нуқтанинг ε атрофида бўлади. Шунинг учун, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимитини қуйидагича ҳам

таърифлаш мумкин:- a нуқтанинг ε атрофи учун шундай N рақамни кўрсатиш мумкин бўлсаки, ҳамма $n > N$ лардан бошлаб, ҳамма x_n элементлар a нуқтанинг ε атрофида бўлса, a сонга $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити дейилади.

3-эслатма. Маълумки чексиз катта кетма-кетлик лимитга эга эмас ёки уни чексиз лимитга эга дейилади ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

билан белгиланади. Кетма-кетликнинг лимитини чексиз лимитдан фарк қилиши учун чекли лимит ҳам деб юритилади.

Эслатма. Тушунарлики, ҳар бир чексиз кичик кетма-кетлик яқинлашувчи ва унинг лимити $a = 0$ га тенг.

Яқинлашувчи кетма-кетликлар қуйидаги хоссаларга эга

1. Яқинлашувчи кетма-кетликнинг лимити ягонадир.

2. Яқинлашувчи кетма-кетлик чегараланган.

Эслатма. Чегараланган кетма-кетлик яқинлашувчи бўлмаслиги мумкин. Масалан,

$$-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$$

кетма-кетлик, чегараланган, лекин лимитга эга эмас.

3. $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ соли кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, мос равишда a ва b лимитларга эга бўлса, уларнинг алгебраик йиғиндиси ҳам яқинлашувчи бўлиб, $a \pm b$ лимитга эга бўлади.

4. $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ соли кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, мос равишда a ва b лимитларга эга бўлса, уларнинг кўпайтмаси ҳам яқинлашувчи бўлиб, лимити $a \cdot b$ га тенг бўлади.

5. $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ соли кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, мос равишда a ва b лимитларга эга бўлса, уларнинг нисбати ҳам махражнинг лимити нолдан фарқли бўлганда, яқинлашувчи бўлиб, унинг лимити $\frac{a}{b}$ га тенг бўлади.

Бу хоссаларни, кетма-кетликнинг лимити ва чексиз кичик кетма-кетликларнинг хоссаларидан фойдаланиб исботлаш мумкин. Масалан, 4-хоссани исботлайлик. Кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлганлиги учун

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n$$

қўринишда ифодаланади, бунда α_n, β_n лар чексиз кичик кетма-кетликлар. Бу ҳолда

$$x_n \cdot y_n - ab = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n$$

бўлади. $(a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n)$ ифода чексиз кичик кетма-кетликнинг хоссаларига асосан чексиз кичик кетма-кетликдир. Демак $x_n y_n - ab$ ҳам чексиз кичикдир, яъни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n - ab) = 0 \quad \text{ёки} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = ab$$

бўлади.

1-мисол. Ушбу лимитни ҳисобланг.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{4n^2 - 5}$$

Ечиш. $n \rightarrow \infty$ сурат ҳам махраж ҳам чексиз катта бўлиб, нисбатнинг лимити ҳақидаги хоссани қўллаш мумкин эмас, чунки бу хоссада сурат ва махражнинг лимити мавжуд бўлиши керак эди. Шунинг учун, бу кетма-кетликларни n^2 га бўлиб, шаклини ўзгартирамиз ҳамда лимитларнинг хоссаларини қўллаб, ушбунини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{4n^2 - 5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{4 - \frac{5}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (4 - \frac{5}{n^2})} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2}} = \frac{3 + 0 - 0}{4 - 0} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Сонли кетма-кетлик деб нимага айтилади?
2. Сонли кетма – кетликнинг умумий ҳади нима?
3. Сонлар кетма – кетлиги қандай белгиланади?
4. Сонли кетма – кетлик қачон берилган дейилади?
5. Арифметик ва геометрик прогрессиялар сонли кетма – кетликларга мисоллар бўладими?
6. Сонли кетма – кетлик нечта элементга эга?
7. Сонли кетма – кетликнинг геометрик тасвири қандай бўлади?
8. Сонли кетма – кетликлар устида қандай амалларни бажариш мумкин?
9. Қандай сонлар кетма – кетлиги чегараланган дейилади ва мисоллар келтиринг?
10. Қуйидан чегараланган сонлар кетма – кетлигига мисоллар келтиринг?
11. Қуйидан чегараланган сонлар кетма – кетлигига мисоллар келтиринг?
12. Юқоридан чегараланган сонлар кетма-кетлигига мисоллар келтиринг?
13. Чегараланган сонлар кетма – кетлигига мисоллар келтиринг?
14. Чегараланмаган сонлар кетма – кетлигига мисоллар келтиринг?
15. Чексиз кетма – кетлик деб нимага айтилади?
16. Чексиз кичик кетма – кетлик қандай таърифланади?
17. Чексиз катта ва кичик кетма – кетликларга мисоллар келтиринг?
18. Чексиз катта ва кичик кетма – кетликлар орасида қандай боғланиш бор?
19. Чексиз кичик кетма – кетликлар қандай хоссаларга эга?
20. Кетма-кетликнинг лимити деб нимага айтилади?

21. Қандай сонлар кетма – кетлиги яқинлашувчи дейилади?
22. Яқинлашувчи кетма-кетликни йиғинди кўринишда қандай ифодалаш мумкин?
23. Нуқтанинг атрофи нима?
24. Чексиз катта сонлар кетма-кетлигининг лимити нимага тенг?
25. Чекли лимит деганда нима тушунилади?
26. Чексиз кичик сонлар кетма-кетлигининг лимити нимага тенг?
27. Яқинлашувчи кетма-кетликлар қандай хоссаларга эга?
28. Яқинлашувчи кетма-кетликларнинг хоссалари қандай исботланади?

Мустақил иш учун топшириқлар

1. Ушбу

$$x_n = \frac{1}{3n}, \quad x_n = \frac{n}{5n-1}, \quad x_n = \frac{1}{4n-1}, \quad x_n = 3n$$

сонли кетма-кетликларнинг $n=1,2,3,4,5$, бўлгандаги қийматларини ёзинг?

2. $x_n = \frac{n}{n+2}$ сонли кетма-кетлигининг чегараланганлигини кўрсатинг.

3. $x_n = \frac{3}{n}, \quad x_n = \frac{3(-1)^n}{2n}, \quad x_n = 3 + (-1)^n$ сонлар кетма-кетлигининг

геометрик тасвирини $n=1,2,3,4,5,6$ бўлганда кўрсатинг.

4. Бир неча арифметик ва геометрик прогрессияларнинг умумий (n -хади)ни ёзинг ва $n=1,2,3,4,5,6$ бўлгандаги қийматларини ёзинг.

5. Ушбу

$$x_n = 3n, \quad x_n = -5n + 1, \quad x_n = \frac{1}{y_n + 1}, \quad x_n = (-1)^n 3n$$

сонлар кетма-кетликлари чегараланганми ва қандай?

6. Бир неча чексиз катта ва чексиз кичик сонлар кетма-кетликларини ёзинг.

7. Ушбу тенгликлар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n} = 3$$

нинг тўғрилигини сонли кетма-кетлигининг лимити, таърифидан фойдаланиб, исботланг ва ҳар бири учун $\varepsilon > 0$ ни аниқлаб қандай рақамдан бошлаб тенгсизлигининг бажарилишини кўрсатинг?

8. Ушбу сонлар кетма-кетликларининг лимитларга эга эканлиги ёки эга эмаслиги ва у нимага тенглигини кўрсатинг?

$$1) x_n = \frac{n}{3n+1}, \quad 2) x_n = \frac{5n-1}{2n}, \quad 3) x_n = \frac{(-1)^n n}{4n+1}, \quad 4) x_n = \frac{3n+1}{n^2},$$

$$5) x_n = \frac{n}{4n-3}, \quad 6) x_n = \frac{(-1)^n n}{3n-1}, \quad 7) x_n = \frac{3n^2}{n+1}, \quad 8) x_n = \frac{2n+5}{n^3}.$$

Мавзу. Функция ҳақида асосий тушунчалар
Режа

- 1. Ўзгармас ва ўзгарувчи миқдорлар.**
- 2. Функция тушунчаси.**
- 3. Функциянинг берилиш усуллари.**
- 4. Функциянинг айрим ҳоллари**
- 5. Функциянинг лимит ива унинг асосий хоссалари.**
- 6. Аниқмасликлар ва уларни очиш.**

Таянч иборалар ва тушунчалар

Ўзгармас ва ўзгарувчи миқдорлар, функция тушунчаси, функция аниқланиш соҳаси, қийматлар тўплами, аналитик усул, график усул, жадвал усул, ошкор ва ошкормас функциялар, функциянинг алгоритмик берилиши, мураккаб функция, тескари функция, функция лимити ва унинг хоссалари, кетма-кетлик, чексиз катта миқдор, чап ва ўнг лимитлар, чексиз кичик функция, кўпайтманинг ва бўлинманинг лимити, биринчи ажойиб лимит, аниқмасликларни очиш,

1. Ўзгармас ва ўзгарувчи миқдорлар. Қаралаётган жараёнда бир хил сон қийматларини қабул қиладиган миқдорларга **ўзгармас миқдорлар** дейилади. Масалан, қандай радиусли айлана олмайлик, унинг узунлигининг деаметрига нисбати бир хил π сондан иборат бўлади. Бу ҳолда нисбат ўзгармас миқдордир.

Қаралаётган жараёнда ҳар хил сон қийматлари қабул қиладиган миқдорларга **ўзгарувчи миқдорлар** дейилади. Масалан, ҳаво ҳарорати (температураси), вақт, ҳаракатнинг тезлиги ўзгарувчи миқдорлардир. Бундай мисолларни кўплаб келтириш мумкин. Ҳамма ўзгарувчи миқдорларни бирданига ўрганиб бўлмайди. Энди иккита ўзгарувчи миқдорлар орасидаги боғланишни қараймиз.

2. Функция тушунчаси. **Функция тушунчаси** математиканинг энг асосий тушунчаларидан бири бўлиб, унинг ёрдамида табиат ва жамиятдаги кўп жараён ва ҳодисалар моделлаштирилади.

Математик таҳлилда элементлари ҳақиқий сонлардан иборат, бўлган тўпламларни қараймиз. X ва Y лар ҳақиқий сонлар тўплами бўлсин. $x \in X$ тўпланда, $y \in Y$ тўпланда ўзгарсин.

Таъриф. $x \in X$ ҳар бир x га бирор қоида ёки қонун бўйича $y \in Y$ дан битта y мос қўйилса, X тўпланда **функция берилган** (аниқланган) деб аталади ва у

$$y = f(x)$$

символ билан белгиланади. Айрим ҳолларда $y = xf$ ҳам деб белгиланадики, бунда компьютерда олдин x қиймати олиниб, кейин ҳисобланадиган символ олинади. Бунда X тўпламга функциянинг **аниқланиш соҳаси**, Y тўпламга ўзгариш соҳаси ёки **қийматлар тўплами** дейилади. Одатда функция аниқланиш соҳасини D , қийматлар тўпламини E билан белгиланади.

Шундай қилиб, ҳар бир элемент $x \in X$ га битта ва фақат битта $y \in Y$ мослик ўрнатилган бўлса, бу мосликка X тўпламда функция аниқланган дейилади. X га **эркли ўзгарувчи** ёки **аргумент**, y га эса **эрксиз ўзгарувчи** ёки x **нинг функцияси** дейилади.

Шундай қилиб, функция берилган бўлиши учун: 1) X тўплам берилиши керак (кўп ҳолларда уни x билан y ўзгарувчиларнинг боғланишига кўра топилади); 2) x ўзгарувчининг X тўпламдан олинган ҳар бир қийматига унга мос қўйиладиган y ни аниқлайдиган қоида ёки қонун берилиши керак. (таърифта уни f символ билан белгиладик).

Масалан; 1) $f: X = (-\infty, +\infty)$ тўпламга тегишли бўлган ҳар бир сонга унинг ўзини ўзига кўпайтириб, яъни квадратга кўтариб мос қўйувчи қоида бўлсин. Бу ҳолда $y = x^2$ функция ҳосил бўлади. Бу функция $(-\infty, +\infty)$ ораликда аниқланган; 2) f ҳар бир $x \in [0, +\infty)$ сонга шу сондан олинган квадрат илдизни мос қўйсин. Бу $y = \sqrt{x}$ функцияни ифодалайди. Унинг аниқланиш соҳаси $[0, +\infty)$ бўлади.

1-мисол. $y = \sqrt{x-3} + \frac{1}{\sqrt{4-x}}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Маълумки, функциянинг аниқланиш соҳаси x нинг шундай қийматлари тўпламики, бунда y функция ҳақиқий сон қийматларга эга бўлиши керак. Берилган функцияда

$$x - 3 \geq 0,$$

$$4 - x > 0$$

бўлгандагина x нинг ҳар бир қийматига мос келадиган y нинг қиймати ҳақиқий бўлади. Бу тенгсизликлар системасидан, $x \geq 3$, $x < 4$ бўлиб, яъни $3 \leq x < 4$ бўлишини топамиз. Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси $[3, 4)$ бўлади.

3. Функциянинг берилиш усуллари. Функция таърифида келтирилган x ўзгарувчининг ҳар бир қийматига мос қўйиладиган y ни аниқловчи қоида ёки қонун турлича бўлиши мумкин. Демак, функциянинг берилиши ҳам турличадир. Функция **аналитик**, **жадвал** ва **график** ҳамда **компьютер** усуллари ёрдамида берилиши мумкин:

1) функциянинг **аналитик усул** билан берилишида, x ўзгарувчининг ҳар бир қийматига мос келадиган y нинг қиймати, x аргумент устида алгебраик амалларнинг бажарилиши натижасида, яъни формулалар ёрдамида берилади. Масалан,

$$y = x^3 + 1, \quad y^2 = \frac{x+5}{x^2-3}, \quad y = 3^{x+1}, \quad y = \log_2(x+3);$$

2) ўзгарувчилар орасидаги боғланиш **жадвал** кўринишида берилиши мумкин. Масалан, кузатиш натижасида сутни ёпиқ идишда қиздирилганда P_1

босим остида унинг қайнаш температураси t_1 , P_2 босим остида қайнаш температураси t_2 ва ҳ.к. бўлишини топганда қўйидаги жадвал келиб чиқади.

Босим P	P_1	P_2	...	P_n
Температура t	t_1	t_2	...	t_n

Бундан кўринадикки P босим билан t температура орасида боғланиш бўлиб, P аргумент, t функция бўлади. Функциянинг бундай берилишига **жадвал усулда** берилган дейилади. Бундай усул кўпроқ тажрибаларда ишлатилади.

3) Функциянинг **график усулида** берилишида, x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш текисликдаги бирор чизик ёрдамида берилади. Бунда X ва Y тўпламлар орасидаги мослик график билан берилади. XOY текисликда l чизик берилган бўлсин. x нинг қийматига мос келган y нинг қийматини, топиш учун x нуқтадан OX ўқиға перпендикуляр ўтказамиз. У l чизикни битта A нуқтада кесиб ўтади. A нуқтадан OY ўқиға перпендикуляр ўтказамиз, бу перпендикулярнинг OY ўқи билан кесишиш нуқтаси, y нинг x га мос қиймати бўлади. Маълумки, бундай мослик l чизик ёрдамида бажарилади. Функциянинг бундай берилиши, **график усулда берилган** дейилади. Функциянинг график усулида берилишидан, уни аналитик усул билан ифодалаш қийин бўлган ҳолларда ва функциянинг сифат ўзгариши график усулда яхши кўринадиган ҳолларда фойдаланилади. Масалан, физикавий тажрибалар жараёнида осциллографдан олинadиган график.

4) **алгоритмик ёки компьютер усули**. Функциянинг бундай усулда берилишида x нинг ҳар бир қиймати учун, $y = f(x)$ функциянинг қийматини ҳисоблайдиган алгоритм ёки программа берилган бўлади. Бундай программа ЭХМга қўйилган бўлиб функциянинг қиймати автоматик ҳисобланади.

4. Функциянинг айрим ҳоллари

1. **Ошкор ва ошкормас функциялар**. Функция $y = f(x)$ кўринишда, яъни y га нисбатан ечилган бўлса, унга **ошкор функция** дейилади. Функция $F(x, y) = 0$ кўринишда берилган бўлса, яъни y га нисбатан ечилмаган бўлса, **ошкормас функция** кўринишда берилган дейилади. Масалан, $y = 3x^2 + 5$, $y = \sin x$, $y = 4^x$ функциялар ошкор кўринишда; $2x - 3y + 6 = 0$, $x^2 + e^{xy} + 3 = 0$ функциялар ошкормас кўринишда берилган. Шунинг таъкидлаймизки ҳамма $F(x, y) = 0$ кўринишдаги тенглик ҳам функцияни ифодалай бермайди. Масалан, $x^2 + y^2 + 4 = 0$ тенглама функцияни ифодаламайди, чунки x нинг ҳар бир қийматига y нинг ҳақиқий сон қийматини мос қўйиш мумкин эмас.

2. **Мураккаб функция**. $y = f(u)$ бўлиб, $u = \varphi(x)$ функция берилган бўлса, y **функцияга** $\varphi(x)$ **функциянинг функцияси** ёки y га x нинг

мураккаб функцияси дейилади. Масалан, $y = \lg(x^2 + 1)$ функцияда $u = x^2 + 1$ бўлиб. y x нинг мураккаб функцияси бўлади. Бундан ташқари $y = \sin(x^2 + 1)$, $y = 3^{x+5}$, $y = \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}$ ва ҳ.к. лар ҳам, мураккаб функцияга мисол бўлаолади.

3. Тескари функция. $y = f(x)$ функция берилган бўлсин. y функциянинг қийматлар тўпламидаги ҳар бир қийматига x аргументнинг аниқланиш соҳасидан битта қиймати мос қўйилган бўлса, берилган функцияга **тескари** $x = d(y)$ **функция** берилган бўлади ва $D(f) = E(d)$ ва $E(f) = D(d)$ ҳар бир $x_0 \in D(f) = E(d)$ ва $y_0 = E(f) = D(d)$ бўлиб. $y_0 = f(x_0)$ фақат $x_0 = d(y_0)$ учун бажарилади. Масалан $y = 2x - 3$ функцияга тескари функция $2x = y + 3$, $x = (y + 3)/2$ бўлади. $y = x^3$ функция $x = \sqrt[3]{y}$ тескари функцияга эга бўлади. Ўзаро тескари бўлган функцияларнинг графиклари $y = x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлади.

5. Функциянинг лимити ва унинг асосий хоссалари

1. 1-таъриф. $y = f(x)$ функция $x = a$ нуқтанинг бирор атрофида аниқланган бўлиб, исталган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон мавжуд бўлсаки, $|x - a| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча $x \neq a$ нуқталар учун $|f(x) - A| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, A чекли сон $y = f(x)$ функциянинг $x = a$ нуқтадаги лимити деб аталади ва қуйидагича ёзилади

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{ёки} \quad x \rightarrow a \quad \text{да} \quad f(x) \rightarrow A \quad (1)$$

Функция лимитининг таърифидан келиб чиқадики $x - a = \alpha$ чексиз кичик бўлганда $f(x) - A$ ҳам чексиз кичик бўлади.

2-таъриф. $y = f(x)$ функция, x нинг етарлича катта қийматларида аниқланган бўлиб, исталган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай, $N > 0$ мавжуд бўлсаки, $|x| > N$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x лар учун $|f(x) - A| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, ўзгармас A сон, $y = f(x)$ функциянинг $x \rightarrow \infty$ даги лимити дейилади, ва

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad (2)$$

билан белгиланади.

1-таърифда фақат $x < a$ ёки $x > a$ бўлган қийматлар қаралса, функциянинг чап ёки ўнг лимит тушунчаси келиб чиқади ва

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \quad (3)$$

билан бегиланади.

3-таъриф. Лимити $A = 0$ бўлган функцияга **чексиз кичик функция (ч. кич. ф.)** дейилади.

4-таъриф. Лимити $A = +\infty$ ёки $A = -\infty$ бўлган функцияларга **чексиз катта функция (ч. кат. ф.)** дейилади ва

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad (4)$$

билан белгиланади.

Лимитнинг таърифидан келиб чиқадики $y = C$ ўзгармас миқдорнинг лимити ўзига тенг.

Функция лимитининг асосий хоссалари:

1) **йиғиндининг лимити.** Чекли сондаги функциялар алгебраик йиғиндисининг лимити, қўшилувчи функциялар лимитларининг алгебраик йиғиндисига тенг, яъни $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларнинг $x \rightarrow a$ даги лимитлари мавжуд бўлса,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \quad (5)$$

2) **чекли сондаги функциялар кўпайтмасининг лимити** функциялар лимитларининг кўпайтмасига тенг, яъни

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \quad (6)$$

Натижа: Ўзгармас кўпайтувчини лимит белгисидан ташқарига чиқариш мумкин, яъни,

$$\lim_{x \rightarrow a} [cf_1(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \quad (7)$$

3) **Иккита функция нисбатининг лимити,** махражнинг лимити нўлдан фарқли бўлса, бу функциялар лимитларининг нисбатига тенг, яъни $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0$ бўлса,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)} \quad (8)$$

бўлади.

Лимитларни ҳисоблашда қуйидаги лимитлардан фойдаланилади:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e, \quad e = 2,71828... \quad (10)$$

Бу лимитларга мос равишда **биринчи** ва **иккинчи** ажойиб лимитлар дейилади.

6. Аниқмасликлар ва уларни очиш

1. Аниқмасликлар. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ лимитни ҳисоблашда $f(x)$, $\varphi(x)$

функциялар ч.кич.ф. лар бўлса, $f(x)/\varphi(x)$ нисбатга $x \rightarrow a$ да **(0/0) кўринишдаги аниқмаслик** дейилади. $f(x)$, $\varphi(x)$ функциялар ч.кат.ф. лар бўлса, $f(x)/\varphi(x)$ нисбатга $x \rightarrow a$ да (∞/∞) **кўринишдаги аниқмаслик** дейилади. Худди шунга ўхшаш $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 аниқмасликлар

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) - \varphi(x)], \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot \varphi(x)] \quad \text{ва} \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)}$$

лимитларни ҳисоблашда келиб чиқади. Бундай ҳолларда лимитларни ҳисоблашга **аниқмасликларни очиш** дейилади.

$(0/0)$ ва (∞/∞) кўринишдаги аниқмасликларни очишда қуйидаги хоссадан фойдаланилади: $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $x = a$ нуктанинг бирор атрофидаги ҳамма нукталарда ўзаро тенг бўлса, уларнинг $x \rightarrow a$ даги лимити ҳам тенг бўлади.

Масалан, $f(x) = \frac{x^2 - 9}{2(x - 3)}$ ва $\varphi(x) = \frac{x + 3}{2}$ функциялар x нинг

$x = 3$ дан бошқа ҳамма қийматлари учун тенг, чунки

$$\frac{x^2 - 9}{2(x - 3)} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{2(x - 3)} = \frac{x + 3}{2}$$

Юқоридаги хоссага асосан,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$$

бўлади, яъни

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

натижага эга бўламиз.

Функцияларнинг лимитини топишга бир неча мисоллар қараймиз.

1-мисол.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 6}{6x} = \frac{5}{6}$$

эканлигини функция лимитининг таърифидан фойдаланиб исботланг.

Ечиш. Буни исботлаш учун $f(x) = (5x + 6)/6x$ ўзгарувчи миқдор ва $A = 5/6$ ўзгармас миқдор орасидаги фарқ $x \rightarrow \infty$ да чексиз кичик функция эканлигини кўрсатиш kifоя. Демак,

$$\frac{5x+6}{6x} - \frac{5}{6} = \frac{5x+6-5x}{6x} = \frac{6}{6x} = \frac{1}{x}$$

$1/x$ ўзгарувчи миқдор $x \rightarrow \infty$ да чексиз кичик функциядан иборат. Шундай қилиб,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (5x+6)/6x = 5/6.$$

2-мисол.

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 5x + 4) = 7$$

эканлигини исботланг ҳамда x ва $(2x^2 - 5x + 4)$ ларнинг қийматлари жадвали билан тушунтиринг.

Ечиш. $x \rightarrow 3$ бўлганлиги учун $x - 3 = \alpha$ чексиз кичик миқдордир.

$x = 3 + \alpha$ ни $(2x^2 - 5x + 4) - 7$ айирмага қўйиб,

$$2(3 + \alpha)^2 - 5(3 + \alpha) + 4 - 7 = 2(9 + 6\alpha + \alpha^2) - 15 - 5\alpha + 4 - 7 =$$

$$= 18 + 12\alpha + 2\alpha^2 - 15 - 5\alpha + 4 - 7 = 2\alpha^2 + 7\alpha$$

натижага эга бўламиз.

α чексиз кичик функция бўлганлиги учун $2\alpha^2 + 7\alpha$ ҳам чексиз кичик

бўлади. Шундай қилиб, $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 5x + 4) = 7$ исбот бўлди.

Энди юқоридаги ҳолатни x аргумент, $2x^2 - 5x + 4$ функция қийматлари жадвали билан кўрсатайлик. Маълумки $x \rightarrow 3$ интилади.

x	2	2,5	2,8	2,9	2,99	2,999	$\rightarrow 3$
$2x^2 - 5x + 4$	2	4	5,68	6,32	6,9302	6,993002	$\rightarrow 7$

Бу жадвалдан кўринадики, аргументнинг 3 га яқинлашиб боровчи қийматлари учун, функциянинг мос қийматлари 7 га яқинлашиб боради, яъни $x - 3$ чексиз кичик миқдорга $2x^2 - 5x + 4 - 7$ айирманинг ҳам чексиз кичик миқдори тўғри келади. Юқоридаги жадвалда $x < 3$ бўлиб, $x \rightarrow 3$ ҳолни қарадик. $x > 3$ бўлиб, $x \rightarrow 3$ ҳолни ўқувчига мустақил кўрсатишни тавсия қиламиз.

3-мисол.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 - 6x + 3)$$

лимитни ҳисобланг.

Ечиш. Алгебраик йиғиндининг лимити, (5) формула, ўзгармас кўпайтувчини лимит ишорасидан чиқариш (7) формулаларга асосан:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2}(4x^2 - 6x + 3) &= \lim_{x \rightarrow 2} 4x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 6x + \lim_{x \rightarrow 2} 3 = 4 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 6 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 3 = \\ &= 4(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 6 \lim_{x \rightarrow 2} x + 3 = 4 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 3 = 7\end{aligned}$$

ҳосил бўлади.

Юқоридаги мисолда, лимитларнинг хоссаларига асосан, аргумент x нинг ўрнига унинг лимитик қийматини қўйишга олиб келди.

4-мисол.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 4x + 7) / (2x^2 - 5x + 6)$$

лимитни ҳисобланг.

Ечиш. Иккита функция нисбатининг лимити (8) формула ҳамда олдинги мисолда фойдаланилган лимитларнинг хоссаларини қўлласак,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 7}{2x^2 - 5x + 6} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 4x + 7)}{\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 5x + 6)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 3x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 4x + \lim_{x \rightarrow 1} 7}{\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 5x + \lim_{x \rightarrow 1} 6} = \\ &= \frac{3(\lim_{x \rightarrow 1} x)^2 - 4(\lim_{x \rightarrow 1} x) + 7}{2(\lim_{x \rightarrow 1} x)^2 - 5 \lim_{x \rightarrow 1} x + 6} = \frac{3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 7}{2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6} = \frac{6}{3} = 2\end{aligned}$$

бўлади.

Рационал функциянинг лимитини ҳисоблаш шу функциянинг аргумент x нинг лимитик қийматидаги, қийматини ҳисоблашга келтирилди.

Эслатма. $f(x)$ элементар функцияларнинг $x \rightarrow a$ интилгандаги лимити (a аниқланиш соҳасига тегишли) функциянинг $x = a$ нуқтадаги қийматига тенг бўлади. Масалан,

$$\lim_{t \rightarrow 1} [\lg(t + \sqrt{t^2 + 80}) + \sqrt{t^2 + 8}] = \lg(1 + \sqrt{1^2 + 80}) + \sqrt{1 + 8} = \lg 10 + 3 = 1 + 3 = 4$$

$$\text{5-мисол. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{4x^2 - 5x + 2} \quad \text{лимитни ҳисобланг.}$$

Ечиш. $x = 1$ да сурат ҳам, махраж ҳам нолга айланиб ($0/0$) кўринишдаги аниқмаслик ҳосил бўлади.

Сурат ва махражни $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ формула ёрдамида чиқиқли кўпайтувчиларга ажратамиз. Бунда x_1 ва x_2 лар $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тенгламанинг илдизлари. Демак,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{4x^2 - 5x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x+2/3)}{4(x-1)(x-1/4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x+2/3)}{4(x-1/4)} = \frac{3(1+2/3)}{4(1-1/4)} = 5/3\end{aligned}$$

бўлади.

6-мисол. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 + 5x + 4}{3x^2 + 7x - 2}$ лимитни ҳисобланг.

Ечиш. $x \rightarrow \infty$ да (∞/∞) кўринишдаги аниқмас ифодага эга бўламиз. Бундай аниқмасликни очиш учун касрнинг сурат ва махражини x нинг энг юқори даражалисига, яъни x^2 га бўламиз, ҳамда лимитларнинг хоссаларидан фойдалансак

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 5x + 4}{3x^2 + 7x - 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + 5/x + 4/x^2}{3 + 7/x - 2/x^2} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (6 + 5/x + 4/x^2)}{\lim_{x \rightarrow \infty} (3 + 7/x - 2/x^2)} = \frac{6 + 0 + 0}{3 + 0 + 0} = 2\end{aligned}$$

бўлади. Бунда $5/x$, $4/x^2$, $7/x$, $2/x^2$ лар $x \rightarrow \infty$ да чексиз кичик функциялардир.

7-мисол. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2}$ лимитни ҳисобланг.

Ечиш. $x = 3$ да сурат ва махраж 0 га тенг бўлади. Махражда $\sqrt{x+1}$ иррационал ифода мавжуд, уни суратга ўтказамиз, бунинг учун касрнинг сурат ва махражини $\sqrt{x+1} + 2$ га кўпайтирамиз.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)(\sqrt{x+1} + 2)}{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1} + 2)}{\sqrt{(x+1)^2 - 2^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1} + 2)}{x+1-4} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x-3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) \cdot (\sqrt{x+1} + 2) = (3+3)(\sqrt{3+1} + 2) = 6 \cdot 4 = 24.\end{aligned}$$

8-мисол. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$ лимитни ҳисобланг.

Ечиш. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ бўлганлиги учун

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x} &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-(\cos x - \sin x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \\&= - \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = - \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1}{\cos x + \sin x} = \\&= - \frac{1}{\cos \pi/4 + \sin \pi/4} = - \frac{1}{\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2} = - \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

натижани оламиз.

9-мисол. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$ лимитни биринчи ажойиб лимитдан фойдаланиб ҳисобланг.

Ечиш. $5x = \alpha$, деб алмаштирсак, бундан $x = \alpha/5$, $x \rightarrow 0$ $\alpha \rightarrow 0$ бўлади.

Шунинг учун,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha/5} = 5 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 5 \cdot 1 = 5,$$

чунки

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

10-мисол. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 3/x)^x$ лимитни иккинчи ажойиб лимитдан фойдаланиб ҳисобланг.

Ечиш. $x \rightarrow \infty$ да лимитга ўтсак, 1^∞ кўринишдаги аниқмаслик келиб чиқади. $3/x = \alpha$ билан алмаштирсак, бу ердан $x = 3/\alpha$ ҳамда $x \rightarrow \infty$ да $\alpha \rightarrow 0$ бўлади..Демак,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 3/x)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{3/\alpha} = \left[\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} \right]^3 = e^3$$

келиб чиқади.

Шундайқилиб, $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 3/x)^x = e^3$.

11-мисол. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$ лимитни ҳисобланг.

Ечиш: $x \rightarrow 1$ да $1/(x-1) \rightarrow \infty$ ва $2/(x^2-1) \rightarrow \infty$ бўлиб, $(\infty - \infty)$ кўринишдаги аниқмаслик келиб чиқади.

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{x+1-2}{x^2-1} = \frac{x-1}{x^2-1}.$$

Охирги ифода $x \rightarrow 1$ да $(0/0)$ аниқмас ифода бўлади. Шундай қилиб,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

12-мисол. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$ лимитни ҳисобланг.

Ечиш. $x \rightarrow +\infty$ да $\infty - \infty$ кўринишдаги аниқмаслик келиб чиқади. Қуйидаги шакл алмаштиришни бажарамиз:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 3x} - x &= \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x)(\sqrt{x^2 + 3x} + x)}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{(\sqrt{x^2 + 3x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \\ &= \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x}. \end{aligned}$$

Охирги ифода $x \rightarrow \infty$ да (∞/∞) кўринишдаги аниқмаслик бўлиб, 11-мисолдагидек X нинг юқори даражалисига сурат ва махражини бўлиб,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x/x}{\sqrt{x^2/x^2 + 3x/x^2} + x/x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{1 + 3/x} + 1} = \frac{3}{1 + 1} = \frac{3}{2} = 1,5 \end{aligned}$$

бунда $x \rightarrow +\infty$ да $3/x \rightarrow 0$ бўлади.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

- 1.. Қандай миқдорлар ўзгарувчи деб аталади?
2. Қандай ҳолда функция аниқланган дейилади?
3. Функционал боғланиш қандай белгиланади?
4. Функциянинг аниқланиш соҳаси деб нимага айтилади?
5. Функциянинг қийматлар тўплами нима?
6. Қандай мослик функцияни ифодалаши мумкин?
7. Функция қандай ўзгарувчи?
8. Аргумент қандай ўзгарувчи?
9. Функция қандай усулларда берилиши мумкин?
10. Ошкор ва ошкормас функциялар қандай?
11. Функциянинг функцияси ёки мураккаб функция деб нимага айтилади?
12. Тескари функция қандай функция?
13. Функциянинг лимити деб нимага айтилади ва у қандай ёзилади?
14. Чап ва ўнг лимитлар нималар ва у қандай ёзилади?
15. Чексиз катта ва чексиз кичик миқдорлар қандай миқдорлар?
16. Икки функция алгебраик йиғиндисининг лимити нимага тенг?
17. Чекли сондаги функциялар кўпайтмасининг лимити нимага тенг?
18. Ўзгармас кўпайтувчини лимит ишорасидан чиқариш мумкинми?
19. Иккита функция нисбатининг лимити нимага тенг?
20. Биринчи ажойиб лимит деб нимага айтилади?
21. Иккинчи ажойиб лимит нимага тенг?
22. Аниқмасликларни очиш нимадан иборат?

Мустақил иш учун топшириқлар

1. $f(x) = x^2 + 1$ функция берилган: 1) $f(4)$; 2) $f(\sqrt{2})$; 3) $f(a+1)$; 4) $f(2a)$ ларни ҳисобланг.

2. Қуйидаги функцияларнинг $D(f)$ аниқланиш соҳасини ва $E(f)$ кийматлар тўпламини топинг:

1) $f(x) = \ln(x+3)$; 2) $f(x) = \sqrt{5-2x}$; 3) $f(x) = \sqrt{1-|x|}$.

3. Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt[4]{7-x}$; 2) $f(x) = (a+x)/(a-x)$;

3) $f(x) = \lg(5x - x^2 - 6)$; 4) $f(x) = 2^{\arccos(1-x)}$.

4. Ҳажми $v = 1$ бирликка тенг бўлган цилиндр асосининг радиуси r ва баландлиги h орасидаги функционал боғланишни топинг.

5. 1) $f(u) = 1-u$, $u = x^2$; 2) $f(u) = 1/(1-u)$, $u(x) = x-1/x$;

3) $f(u) = u^2$, $u(x) = 4x$

функциялардан x нинг мураккаб функцияларини тузинг.

6. Қуйидаги функцияларга тескари функцияларни топинг ва топилган функцияларнинг аниқланиш ва ўзгариш соҳаларини аниқланг:

1) $f(x) = x^2 - 1$, $x \in [0, +\infty)$; 2) $f(x) = 2x + 3$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

3) $f(x) = (x-1)^3$, $x \in (-\infty, +\infty)$; 4) $f(x) = x^2 - 1$, $x \in (-\infty, 0]$.

7. Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топинг ва уларнинг графикларини ясанг.

1) $y = \frac{1}{x}$; 2) $y = -\frac{3}{x}$; 3) $y = 2 - \frac{1}{x}$; 4) $y = \frac{2}{x-1}$.

8. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+3}{5x} = \frac{4}{5}$, 2) $\lim_{x \rightarrow 3} (4x-7) = 5$,

3) $\lim_{x \rightarrow -1} (5x+8) = 3$, 4) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2) - 4x + 6 = 10$

эканлигини функция лимити таърифидан фойдаланиб исботланг ҳамда x ва берилган функциялар кийматлари жадвали билан тушунтиринг.

9. Қуйидаги лимитларни, лимитларнинг хоссаларидан фойдаланиб ҳисобланг:.

1) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 7x + 6)$; 2) $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 4x + 7)$;

3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 6x + 4}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 7x + 6}$;

5) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 6x + 5}$; 6) $\lim_{t \rightarrow 3} [2t + \sqrt{t^2 - 8} + \lg(3t + \sqrt{t^2 - 8})]$.

10. Ушбу $(0/0)$ ва (∞/∞) кўринишдаги аниқмасликларни очинг:

1) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 7x + 6}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 7x + 2}{4x^2 - 5x - 6}$;

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^3 - 6x^2 + 7x + 5}{8 - 4x + 3x^2 - 2x^3};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 8x - 9}{3x^5 + 6x^3 + 4x^2 - 2x + 11}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + 8x^6 + 5x^4 - 3x^2 - 12}{10x^6 + 7x^5 - 6x^3 - 4x - 17}.$$

11. Қуйидаги лимитларни ҳисобланг:

$$1) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{2 - \sqrt{x - 1}}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 + x} - 1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{\sqrt{3x} - 3}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}.$$

12. Қуйидаги лимитларни биринчи ва иккинчи ажойиб лимитлардан фойдаланиб ҳисобланг:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x/3}{x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x/2}{x^2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x} + 2 - \sqrt{2}}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin 1/x;$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2/n)^n; \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{1/x}; \quad 9) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 5/n)^n;$$

$$10) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 1/3n)^n; \quad 11) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2x)^{1/x}; \quad 12) \lim_{n \rightarrow \infty} [n/(n+1)]^n.$$

13. Қуйидаги аниқмасликларни очинг:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - x + 1}); \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - a^2});$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3 - 8} \right); \quad 4) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2 - 9} \right).$$

Мавзу. Функциянинг узлуксизлиги ва узилиши

Режа

1. Функция орттирмаси.
2. Функция узлуксизлиги таърифлари.
3. Функциянинг узилиш ва унинг турлари.
4. Иқтисодиётда қўлланиладиган айрим асосий функциялар.

Таянч ибора ва тушунчалар

Аргумент орттирмаси, функция орттирмаси, функция узлуксизлиги, функциянинг узулиши, ораликда узлуксиз, иккита узлуксиз функция йиғиндиси, кўпайтмаси ва нисбати узлуксизлиги, кесмада узлуксиз функциялар хоссалари, функциянинг узилиши, 1-тур узилиш, 2-тур узилиш, бартараф этиладиган(йўқотиладиган) узилиш, элементар функцияларнинг узлуксизлиги ва узилиши.

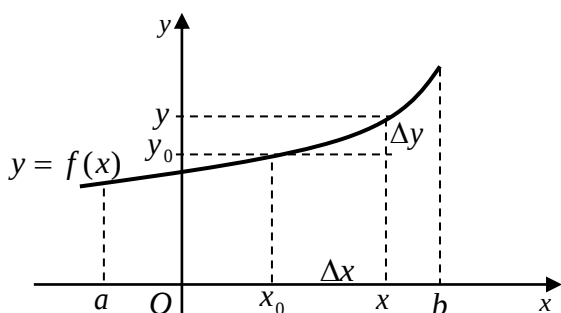
1. Функция орттирмаси

Узлуксизлик математик таҳлилнинг асосий тушунчаларидан биридир. Математика узлуксиз функция тушунчасига биринчи навбатда турли ҳаракат қонунларини ўрганиш натижасида келди. Ҳазо ва вақт узлуксиз, масалан: ҳаракатдаги нуқтанинг босиб ўтган йўли s нинг t вақтга боғланишини ифодаловчи $s = f(t)$ қонун узлуксиз функцияга мисол бўлади.

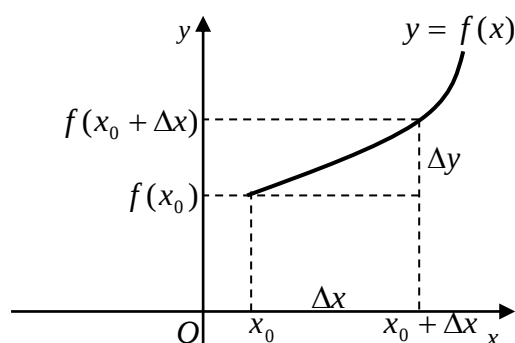
Қаттиқ жисмлар, суюқлик ва газлардаги ҳолатлар ҳамда жараёнлар узлуксиз функциялар ёрдамида тавсифланади. Бундай узлуксиз жараёнлар иқтисодиёт моделларида ҳам мавжуд. Бундай жараёнлар механика физика ва бир қанча махсус фанларда муайян ҳолда ўрганилади.

Математикада узлуксиз жараённи умумий ҳолда ўрганамиз.

Функция орттирмаси. $y = f(x)$ функция бирор $[a, b]$ кесмада аниқланган ва x_0 шу кесмадаги бирор нуқта бўлсин. x аргументнинг кейинги қиймати бўлса, $x - x_0 = \Delta x$ га **аргумент орттирмаси** дейилади (1-чизма).



1-чизма



2-чизма

$f(x) - f(x_0)$ функциянинг қийматлари орасидаги фарққа **функция орттирмаси** дейилади ва одатда Δy билан белгиланади. $\Delta y = f(x) - f(x_0)$

ёки

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

1-чизмадан кўринадики $\Delta x \rightarrow 0$ да $\Delta y \rightarrow 0$ бўлади.

1-мисол. $y = f(x) = x^3$ функциянинг $x_0 = 2$ нуктада аргумент $\Delta x = 0,5$ орттирма олгандаги функция Δy орттирмасини топинг.

Ечиш. $f(x_0) = 2^3 = 8$ функциянинг бошланғич нуктадаги қиймати.
 $f(x_0 + \Delta x) = f(2 + 0,5) = (2 + 0,5)^3$ функциянинг кейинги қиймати, демак, функция орттирмаси

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (2 + 0,5)^3 - 2^3 = \\ &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 2 \cdot 0,5^2 + 0,5^3 - 8 = 7,625\end{aligned}$$

бўлади.

Шундай қилиб, $\Delta y = 7,625$.

2. **Функция узлуксизлиги таърифлари.** 1-таъриф. $y = f(x)$ функция x_0 нуктада ва унинг бирор атрофида аниқланган бўлиб, аргументнинг x_0 нуктадаги чексиз кичик орттирмасига функциянинг ҳам чексиз кичик орттирмаси мос келса, яъни

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

бўлса, $y = f(x)$ функция x_0 нуктада ўзлуксиз дейилади (2-чизма). Бу таърифга қўйидаги таъриф ҳам тенг кучлидир.

2-таъриф. x_0 нуктада ва унинг бирор атрофида аниқланган $y = f(x)$ функция шу нуктада чекли лимитга эга бўлиб, бу лимит функциянинг x_0 нуктадаги қийматига тенг, яъни

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

бўлса, $y = f(x)$ функция x_0 нуктада ўзлуксиз дейилади.

Функция узлуксизлиги таърифлари қуйидаги шартларни ўз ичига олади:

- 1) функция x_0 нуктада ва унинг бирор атрофида аниқланган;
- 2) функциянинг x_0 нуктадаги чап ва ўнг лимитлари

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$$

мавжуд;

- 3) x_0 нуктада чап ва ўнг лимитлар ўзаро тенг, яъни

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x);$$

- 4) чап ва ўнг лимитлар функциянинг x_0 нуктадаги қийматига тенг, яъни

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

2-мисол. $y = x^3$ функциянинг $x_0 = 2$ нуктада узлуксизлигини текширинг.

Ечиш. Маълумки, $y = x^3$ функция $x_0 = 2$ нуктада ва унинг исталган атрофида аниқланган. Узлуксизликни 1-таърифга асосан текшираемиз. Бунинг учун $x_0 = 2$ нуктадаги функция орттирмасини топамиз:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = (2 + \Delta x)^3 - 2^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \Delta x + 3 \cdot 2 \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3 - 2^3 = 12\Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3$$

аргумент орттирмаси $\Delta x \rightarrow 0$ га интилганда лимитга ўтаемиз.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (12 \cdot \Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3) = 12 \cdot 0 + 6 \cdot 0^2 + 0^3 = 0.$$

Шундай қилиб, $\Delta x \rightarrow 0$ да $x_0 = 2$ нуктада $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, бу эса 1-таърифга асосан функция узлуксиз эканлигини билдиради. Бу мисолда x_0 нукта ўрнига ихтиёрий нуктани олиш мумкин (масалан, $x_0 = 3$ учун узлуксизликни текширинг).

Функция оралиқнинг ҳамма нукталарида узлуксиз бўлса, у шу **оралиқда** узлуксиз дейилади.

2-мисолда $y = x^3$ функция $(-\infty, +\infty)$ оралиқнинг ҳамма нукталарида узлуксизлиги равшан. Демак, $y = x^3$ функция $(-\infty, +\infty)$ оралиқда узлуксиз функциядир.

Элементар функцияларнинг ҳаммаси ўзларининг аниқланиш соҳаларида узлуксиздир.

$f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар x_0 нуктада узлуксиз бўлса:

1) $f(x) \pm \varphi(x)$; 2) $f(x) \cdot \varphi(x)$; 3) $f(x)/\varphi(x)$ ($\varphi(x_0) \neq 0$ бўлганда) лар ҳам x_0 нуктада узлуксиз бўлади.

Кесмада узлуксиз функциянинг хоссалари. $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у: 1) шу кесмада чегараланган; 2) шу кесмада энг кичик ва энг катта қийматларга эришади; 3) кесманинг учларида турли ишорали қийматлар қабул қилса, шу кесманинг бирор нуктасида 0 га тенг бўлади; 4) $f(a)$ ва $f(b)$ орасидаги барча қийматларни қабул қилади.

$y = f(z)$ ва $z = \varphi(x)$ функциялар ўз аргументларининг узлуксиз функциялари бўлса, $y = f[\varphi(x)]$ мураккаб функция ҳам узлуксиз бўлади. $y = f(x)$ узлуксиз бўлиб, $x = \varphi(y)$ тескари функция мавжуд бўлса, у ҳам узлуксиздир.

3. Функциянинг ўзилиш ва унинг турлари

Таъриф. $y = f(x)$ функция x_0 нуктанинг бирор атрофида аниқланган, лекин бу нуктанинг ўзида узлуксизлик шартларидан бирортаси бажарилмаса, функция x_0 нуктада **узилишга эга дейилади**.

$f(x)$ функция учун

$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ чекли лимитлар мавжуд бўлса, чап ва ўнг

лимитлар ҳамда $f(x_0)$ сонлар ўзаро тенг бўлмаса, x_0 нукта **1-тур узилиш нуктаси** дейилади.

Хусусан, $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$ бўлса x_0 **бартараф**

қилинадиган (йўқотиладиган) узилиш нуктаси дейилади.

1-тур узилиш нуктаси бўлмаган узилиш нукталарига **2-тур узилиш нукталари** дейилади. Бундай нукталарда, ақалли битта томонли лимит қиймати чексиз ёки мавжуд бўлмайди.

1-мисол. $f(x) = \frac{x-2}{|x-2|}$ функция $x_0 = 2$ нуктада 1-тур узилишга эга

эканлигини исботланг.

Ечиш. функция $x_0 = 2$ нуктада аниқланмаган. Абсолют қиймат таърифидан $x-2 < 0$ ёки $x < 2$ ва $x-2 > 0$ ёки $x > 2$ бўлганда мос равишда

$$f(x) = \frac{x-2}{-(x-2)} = -1, \quad f(x) = \frac{x-2}{x-2} = 1$$

бўлади.

Демак, $\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = 1.$

Шундай қилиб, $x_0 = 2$ нукта 1-тур узилиш нуктаси бўлади. Бу узилиш нуктаси **бартараф** қилиб (йўқотиб) бўлмайдиган узилиш нуктасига киради.

2-мисол. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, функция $x_0 = 0$ нуктада аниқланмаган,

лекин $x \neq 0$ ҳамма нукталарда аниқланган.

Бир томонли лимитлар ўзаро тенг, яъни

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Шундай қилиб, берилган функция учун $x_0 = 0$ нукта **бартараф қилинадиган (йўқотиладиган) узилиш** нуктаси бўлади.

3-мисол. $f(x) = 6/(x-3)^2$ функциянинг $x = 3$ нуктада узилишга эга эканлигини кўрсатинг:

Ечиш. Берилган функция $x = 3$ нуктадан бошқа ҳамма нукталарда аниқланган. $x < 3$ бўлганда $f(x) > 0$ ва $x > 3$ бўлганда ҳам $f(x) > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = +\infty \quad \text{ва} \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = +\infty.$$

Бу 2-тур узилишдир .

4. Иқтисодиётда қўлланиладиган айрим асосий функциялар

1. Чизикли функция. Маълумки, $y = ax + b$ (1) формула билан аниқланган функцияга чизикли функция дейилади. Бу бурчак коэффициенти $k = a$, бошланғич ординатаси b бўлган тўғри чизик тенгламасидир.

1-мисол. Бирор корхонада ишлаб чиқарилаётган бир хил маҳсулот харажати икки гуруҳ:

1) маҳсулот ҳажмига, пропорционал ўзгарувчи харажат, масалан, материаллар сарфи;

2) ишлаб чиқарилган маҳсулот ҳажмига боғлиқ бўлмаган ўзгармас харажатлар, масалан, маъмурият биноси ижарасига, уни иситишга кетадиган ва бошқа харажатлар деб қараш мумкин.

Ўзгармас харажатларни b билан, ўзгарувчи харажатларни, маҳсулотнинг ҳар бир бирлиги учун a билан белгиласак, бирор даврда x бирлик ҳажмдаги маҳсулот ишлаб чиқариш учун кетган умумий харажат

$$y = b + ax$$

бўлиб, бу чизикли функциядир.

2-мисол. Маҳсулотнинг умумий баҳоси унинг сонига пропорционал бўлсин. a битта маҳсулот нархи бўлса, x бирлик маҳсулотнинг умумий баҳоси

$$y = ax$$

чизикли функция билан ифодаланади, маълумки бу координатлар бошидан ўтувчи тўғри чизиклар дастасининг тенгламасидир.

Чизикли функция ва унинг графиги, иқтисодий миқдорлар орасида пропорционаллик мавжуд бўлган боғланишларда ишлатилади.

2. Даражали функция. Бундай функция

$$y = x^{\alpha} \quad (2)$$

формула билан ифодаланади, бунда α 0 дан фарқли ихтиёрий ҳақиқий сон. Бу функциянинг аниқланиш соҳаси α кўрсаткичга боғлиқ. α натурал сон бўлса, ҳамма ҳақиқий сонлар учун аниқланган, α бутун манфий сон бўлса,

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

бўлиб, $x \neq 0$ бўлган ҳамма x лар учун аниқланган (бунда n натурал сон). $\alpha = 1/n$ кўринишдаги сон бўлса,

$$y = f(x) = x^{\alpha} = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

бўлиб, n тоқ сон бўлса, $(-\infty, +\infty)$ интервалда, n жуфт сон бўлса, $[0, \infty)$ интервалда аниқланган.

Умуман олганда даражали функция ўзининг аниқланиш соҳасида узлуксиздир.

3-мисол. Италия иқтисодчиси Парето жамиятда фойдани тақсимлашнинг қуйидаги қондасини таклиф этди: y билан x дан кичик бўлмаган фойдага эга бўлган шахслар сонини белгиласак,

$$y = \frac{a}{x^m}$$

бўлади, бунда a ва m ўзгармаслар.

Парето қонуни катта фойдага эга бўлганда, тақсимотни етарли даражада аниқлик билан ифодалайди, паст даражадаги фойдага эга бўлганда аниқ эмас.

Бирор жамиятда фойдани тақсимлаш

$$y = \frac{2000000000}{x^{1.5}}$$

формула билан аниқлансин:

1) 100000 дан кўп фойдага эга бўлган шахслар сони;

2) 100 нафар энг бой шахслар орасида, энг кам фойдани топинг.

Ечиш. 1) масала шарти бўйича, $x = 100000$, уни тақсимот формуласига қўйсак:

$$y = \frac{2000000000}{100000^{1.5}}$$

бўлади. Охири тенгликни логарифмласак:

$$\begin{aligned} \lg y &= \lg \frac{2000000000}{100000^{1.5}} = \lg 2000000000 - 1.5 \lg 100000 = \lg 2 \cdot 10^9 - 1.5 \lg 10^5 = \\ &= 9 + 0,301 - 1,5 \cdot 5 = 9,301 - 7,5 = 1,801, \end{aligned}$$

яъни $\lg y = 1.801$ бўлади. Логарифмлар жадвалидан $y = 63,2$ ни топамиз. Шундай қилиб, Парето тақсимои бўйича 63 киши 100000 дан кўп фойдага эга бўлади;

2) масала шарти бўйича $y = 100$, тақсимот формуласидан

$$100 = \frac{2000000000}{x^{1.5}}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликдан $x = 73700$ эканлигини аниқлаш мумкин (уни бажаришни ўқувчига ҳавола этамиз).

Шундай қилиб, 100 нафар энг бой кишилар ичида энг кичик фойда 73700 ни ташкил этади.

Функцияларнинг иқтисодда қўлланилишига мисолларни кўплаб келтириш мумкин. Бу мавзу бўйича талабаларнинг шуғулланишини таклиф этамиз.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Қандай жараён узлуксиз бўлади?
2. Функция орттирмаси нима?
3. Қандай функция узлуксиз дейилади?
4. Қандай функцияга оралиқда узлуксиз дейилади?

5. Иккита узлуксиз функция йиғиндиси, кўпайтмаси ва нисбати узлуксизлиги ҳақида нима дейиш мумкин?

6. Кесмада узлуксиз бўлган функциялар қандай хоссаларга эга?

7. Қандай функцияга узилишга эга дейилади?

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. $y = x^2$ функциянинг узлуксизлигини, $x_0 = 3$, $x = 5$ нуқталарда, орттирмалар орқали кўрсатинг.

2. 1) $y = 3x^3 + 5x^2 - 7$, 2) $y = 4x^3 + 3x^2 + 5$ функциялар узлуксизлигини $x_0 = 2$; $x_1 = -3$ нуқталарда, орттирмалар орқали кўрсатинг.

3. $y = \sin x$ ва $y = \cos x$ функцияларнинг x нинг ҳамма қийматлари учун узлуксиз эканлигини кўрсатинг.

4. Қуйидаги функцияларнинг узилиш нуқталарини топинг ва уларнинг турини аниқланг:

1) $f(x) = \frac{8}{x+4}$; 2) $f(x) = \frac{x}{x-4}$.

Дифференциал ҳисоб

Мавзу. Функция ҳосиласи

Режа

1. Ҳосилага келтириладиган масалалар ҳақида.
2. Функция ҳосиласининг таърифи.
3. Ҳосиланинг геометрик маъноси.
4. Мураккаб функция ҳосиласи ва ҳосилалар жадвали.
5. Юқори тартибли ҳосилалар.
6. Ошкормас ва параметрик берилган функцияларнинг ҳосилалари.

Таянч ибора ва тушунчалар

Оний тезлик, ҳосила, эгри чизикқа уринма, юқори тартибли ҳосила, дифференциаллаш, мураккаб функция, ошкормас ва параметрик функциялар ҳосилалари.

1. Ҳосилага келтириладиган масалалар ҳақида

Оний тезлик ҳақидаги масала. Амалиётда ҳар хил жараёнларни текширишда биринчи навбатда, шу жараённинг кечиши тезлигини аниқлаш керак бўлади. Тезликни аниқлаш ҳақидаги масала фан ва техниканинг энг асосий масалаларидан биридир.

Маълумки, текис кечадиган жараёнларда унинг кечиши тезлиги ўзгармасдир. Масалан, текис ҳаракатда ўтилган йўлнинг шу йўлни ўтишга кетган вақтга нисбати унинг тезлигини билдириб у ўзгармасдир.

Лекин табиатдаги ёки жамиятдаги кўпчилик ҳодисалар нотекис кечадиган жараёнлардир. Масалан, оғир моддий нуқтанинг бўшлиқда оғирлик кучи таъсирида эркин тушуши масаласини қарайлик. Физикадан маълумки, бўшлиқда моддий нуқтанинг эркин тушиши қонуни

$$S = \frac{g}{2} t^2 \quad (1)$$

муносабат билан ифодаланиб, бу ерда t эркин тушиш бошланишидан ҳисобланган вақт, S t вақтда ўтган йўл, g эркин тушиш тезланиши, $g \approx 9,81 \text{ м/сек}^2$. Бу ҳаракат нотекис бўлиб, унинг тезлигини топиш масаласини қараймиз.

Вақтнинг бирор аниқ t моменти (они)ни қарайлик. Бу моментда моддий нуқта A ҳолатда бўлсин. OA йўлнинг миқдори (1) формула билан топилади. Вақт Δt миқдорга ортсин, яъни t , Δt орттирма қабул қилади. $t + \Delta t$ моментда нуқта B ҳолатда бўлади. AB , вақт Δt орттирма олгандаги йўл орттирмаси, уни $AB = \Delta S$ билан белгилаймиз. (1) формулага $t + \Delta t$ қўйиб,

$$S + \Delta S = \frac{g}{2} (t + \Delta t)^2, \quad \text{бундан} \quad \Delta S = \frac{g}{2} (t + \Delta t)^2 - \frac{gt^2}{2}$$

$$\text{ёки} \quad \Delta S = \frac{g}{2} (2t\Delta t + \Delta t^2).$$

Охирги тенгликни Δt га бўлиб,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{g}{2}(2t + \Delta t) \quad (2)$$

натижани оламиз. Охирги тенгликдан маълумки, $\Delta S / \Delta t$ нисбат t ва Δt га боғлиқ. Масалан: $\Delta t = 0,1$ сек, $t = 1$ сек бўлганда,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} - \frac{g}{2}(2 \cdot 1 + 0,1) = 1,05g \text{ бўлиб, } t = 3 \text{ сек бўлганда}$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} - \frac{g}{2}(2 \cdot 3 + 0,1) = 3,05g \text{ бўлади.}$$

Шунинг учун, нотекис ҳаракатнинг тезлиги фақат вақтнинг аниқ моментида тегишли бўлади. Шундай қилиб, вақтнинг ҳар бир моментидаги **оний тезлик** ҳақида гапириш керак бўлади.

Оний тезлик тушунчасини қандай аниқлаш керак?

(2) тенгликдан маълумки, t ўзгармас бўлганда, $\Delta S / \Delta t$ A дан B ҳолатгача ораликдаги ўртача тезлик бўлиб, уни v_{yp} билан белгилаймиз. Маълумки, Δt қанча кичик бўлса, t моментдаги тезликни шунча яхшироқ ифодалайди. Бундан шундай хулосага келамизки, эркин тушаётган нуқтанинг t моментидаги оний тезлиги v ни v_{yp} ўртача тезлиkning $\Delta t \rightarrow 0$ даги лимити каби аниқлаймиз, яъни

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{yp}$$

Шундай қилиб, оний тезликни ҳисоблаш учун қўйидаги кўринишдаги лимитни ҳисоблаш керак бўлади.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad (3)$$

(3) кўринишдаги лимитни ҳисоблашга кўп сондаги амалий масалаларни ечишда тўғри келади.

Умуман, ўзгарувчи миқдор ўзгариш тезлигини топиш масаласи, математика фанининг энг аҳамиятли тушунчаларидан бири - ҳосила тушунчасига олиб келади.

Шунинг учун (3) кўринишдаги лимитларни ҳисоблашни умумий ҳолда қараш зарур бўлади.

2. Функция ҳосиласининг таърифи. 1-таъриф. $y = f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, x_0 нуқтадаги функция Δu орттирмасининг Δx аргумент орттирмасига нисбатининг, аргумент орттирмаси нолга интилгандаги лимитига, $y = f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи дейилади. Бу лимит

$$y', f'(x_0), \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$$

символлардан бири билан белгиланади.

Шундай қилиб, таърифга асосан

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

бўлади, бу лимит мавжуд бўлса, ҳосила x_0 нуктада мавжуд дейилади.

Ҳосилани топиш жараёни дифференциаллаш деб аталади.

Биз ўрганаётган $y = f(x)$ функция орқали қандай жараён тавсифланмасин, унинг ҳосиласи $y = f(x)$ физик нуктаи назардан шу жараён кечишининг тезлигини ифодалайди.

Чунончи, τ вақт, Q бирор реакция натижасида олинган модданинг τ моментдаги миқдори бўлса, демак Q τ нинг функцияси бўлади. Q дан олинган ҳосила, реакция кечишининг тезлигини ифодалайди. τ вақт, Q бирор ўтказгич кесим юзидан вақт бирлигида ўтаётган электр миқдори бўлса, Q ҳосила ток кучининг ўзгариш тезлигини ифодалайди. Q иситилаётган жисмнинг ўзгарувчи температурасини тавсифласа, Q' ҳосила исиш тезлигини ифодалайди.

Функция ҳосиласини ҳосила таърифига асосан топишга бир неча мисоллар қараймиз:

1-мисол. $y = x^3$ функциянинг ҳосиласини ҳосила таърифига асосан топинг.

Ечиш. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ лимитни ҳисоблаймиз.

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2) + 3x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2.$$

Шундай қилиб, $y' = 3x^2$.

2-мисол. $y = \sin x$ функция ҳосиласини ҳосила таърифига асосан, топинг.

Ечиш. аргумент x , Δx орттирма олганда, функция Δy орттирма олади.

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos(x + \Delta x / 2) \sin \Delta x / 2;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin(\Delta x / 2)}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin(\Delta x / 2)}{(\Delta x / 2)};$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \text{да} \quad \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \rightarrow \cos x. \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x / 2)}{(\Delta x / 2)} = 1.$$

$$\text{Шундай қилиб,} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x, \quad y' = (\sin x)' = \cos x$$

бўлади.

Умуман, x ва y ўзгарувчиларнинг физик, иқтисодий, кимёвий маъноларидан воз кечсак, y дан x бўйича олинган ҳосила, y нинг x га боғлиқ бўлиб ўзгаришининг тезлигини ифодалайди.

3. Ҳосиланинг геометрик маъноси. Ҳосила муҳим геометрик маънога эга. Бу функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи унинг графигига $M(x_0, f(x_0))$ нуқтада ўтказилган уринманинг OX ўқининг мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчагининг тангенсига тенг. $y = f(x)$ эгри чизиққа $M_0(x_0, y_0)$ нуқтадан ўтказилган уринма тенгламаси

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

бўлади, бунда $y_0 = f(x_0)$. Функция графигига уриниш нуқтаси $M_0(x_0, y_0)$ да ўтказилган нормалнинг тенгламаси

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), (f'(x_0) \neq 0)$$

бўлади.

3-мисол. $y = \frac{x^3}{3} + 4$ эгри чизиққа абсциссаси $x_0 = 2$ нуқтада ўтказилган уринма ва нормалнинг тенгламасини ёзинг.

$$\text{Ечиш. } y_0 = \frac{20}{3}, \quad y'(2) = 2^2 = 4, \quad y - \frac{20}{3} = 4(x - 2)$$

ёки

$3y - 20 = 12(x - 2), \quad 12x - 3y - 4 = 0$, бу $M_0(2, 20/3)$ нуқтадан ўтказилган уринманинг тенгламаси. Нормалнинг бурчак коэффициенти

$$-\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{4}, \quad \text{демак, } y - \frac{20}{3} = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

ёки

$$12y - 80 = -3(x - 2), \quad 3x + 12y - 86 = 0$$

бўлиб, бу M_0 нуқтадан ўтказилган нормалнинг тенгламаси бўлади.

4. Мураккаб функция ҳосиласи ва ҳосилалар жадвали

1). Агар $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, яъни $y = f[\varphi(x)]$ мураккаб функция бўлса, $y = f(u)$ функциянинг x ўзгарувчи бўйича ҳосиласи

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

бўлади.

Агар $y = f(x)$ ва $x = \varphi(y)$ лар ўзаро тескари функциялар бўлса,

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

бўлади.

2). Дифференциаллаш қоидаларини эслатиб ўтамиз:

x эркин ўзгарувчи, $u = u(x)$ ва $v = v(x)$ унинг дифференциалланувчи функциялари бўлсин.

1., $C' = 0$ C – ўзгармас миқдор.

2. $x' = 1$.

3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

4. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.

5. $(cu)' = c \cdot u'$.

6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$.

3). **Мураккаб функция учун ҳосилалар жадвали** қуйидагича бўлади:

1) $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u' \quad n \in R, \quad u > 0;$

2) $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u';$

3) $(e^u)' = e^u \cdot u';$

4) $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u';$

5) $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u';$

6) $(\sin u)' = \cos u \cdot u';$

7) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$

8) $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$

9) $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$

10) $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$

11) $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$

12) $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u';$

13) $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u';$

14) $(u^v)' = vu^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'.$

5. Юқори тартибли ҳосилалар. $y = f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи деб, унинг ҳосиласидан олинган ҳосиллага, яъни $(y')'$ га айтилади. Иккинчи тартибли ҳосила қуйидагиларнинг бири билан белгиланади: $y'', f''(x), d^2y/dx^2$.

$y = f(x)$ функциянинг n -тартибли ҳосиласи деб унинг $(n-1)$ тартибли ҳосиласидан олинган ҳосиллага айтилади ва қуйидагиларнинг бири билан белгиланади $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $d^n y / dx^n$. Таърифга кўра $y^{(n)} = [y^{(n-1)}]$.

1-мисол. $y = (2x^2 - 7)^3$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

Ечиш.

$$y' = [(2x^2 - 7)^3] = 3(2x^2 - 7)^2 (2x^2 - 7)' = 3(2x^2 - 7)^2 \cdot 4x = 12x(2x^2 - 7)^2;$$

$$\begin{aligned} y'' = (y')' &= [12x(2x^2 - 7)^2] = 12\{x'(2x^2 - 7)^2 + x[(2x^2 - 7)^2]\} = \\ &= 12[(2x^2 - 7)^2 + 2x(2x^2 - 7) \cdot 4x] = 12(2x^2 - 7)(2x^2 - 7 + 8x^2) = \\ &= 12(2x^2 - 7)(10x^2 - 7). \end{aligned}$$

Демак, $y'' = 12(2x^2 - 7)(10x^2 - 7)$.

2-мисол. $y = x^n$ функциянинг n -тартибли ҳосиласини топинг.

$$\begin{aligned} \text{Ечиш. } y' &= nx^{n-1}, \quad y'' = n(n-1)x^{n-2}, \quad y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}, \\ y^{(4)} &= n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}, \dots, \quad y^{(n-1)} = \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3) \dots [n - (n-2)]x^{n-(n-1)} = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 2x \\ y^{(n)} &= n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! \end{aligned}$$

$(n!)$ 1 дан n гача бўлган сонлар кўпайтмасининг қисқа ёзилиши).

6.Ошкормас ва параметрик берилган функцияларнинг ҳосилалари 1). x ўзгарувчининг y функцияси ошкормас кўринишда $F(x, y) = 0$ берилган бўлса, y' ҳосилани топиш учун $F(x, y) = 0$ тенгликни x бўйича дифференциаллаб, сўнгра ҳосил бўлган тенгламадан y' ни топамиз. Иккинчи ва ундан юқори тартибли ҳосилалар ҳам шу каби топилади.

1-мисол. $x^2 + y^2 = 100$ ошкормас кўринишда берилган, y функциянинг иккинчи тартибли ҳосилани топинг.

Ечиш. $2x + 2y \cdot y' = 0$; $2yy' = -2x$, $y' = -x/y$; кейинги ифодадан яна ҳосила олиб,

$$(y')' = -\frac{x'y - x(y)'}{y^2} = -\frac{y - xy'}{y^2}.$$

Энди, $y' = -\frac{x}{y}$ ни ҳисобга олсак,

$$y'' = -\frac{y - x(-x/y)}{y^2}$$

ёки

$$y'' = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}; y'' = -\frac{100}{y^3}$$

бўлади, чунки, $x^2 + y^2 = 100$ эди.

2). Функционал боғланиш параметрик

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

кўринишда берилган бўлса, $dy/dx, d^2y/dx^2$ ҳосилалар

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} \quad (1)$$

формула билан топилади.

2- мисол.

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}$$

параметрик кўринишда берилган, y функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -a \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = a \cos t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -a \sin t$$

(1) формулага асосан,

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{-a \sin t \cdot (-a \sin t) - (-a \cos t) \cdot a \cos t}{(-a \sin t)^3} = \frac{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t}{-a^3 \sin^3 t} = \\ &= -\frac{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}{a^3 \sin^3 t} = -\frac{1}{a \sin^3 t}. \end{aligned}$$

Демак,
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a \sin^3 t}$$

бўлади.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Жараённинг кечиши тезлиги нима?
2. Оний тезлик нима билан характерланади?
3. Функциянинг ҳосиласи деб нимага айтилади?
4. Ҳосиланинг геометрик маъноси нима?
5. Иккинчи тартибли ҳосила нима?
6. Дифференциаллаш қоидалари ва формулаларини ёддан биласизми?
7. Қандай ҳосиллага n -тартибли ҳосила дейилади?
8. Ошкормас ва параметрик кўринишда берилган функциялар ҳосилалари қандай топилади?

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1. Қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

1) $y = x \ln x$; 2) $y = \frac{1 + \ln x}{x}$; 3) $y = \lg(5x)$.

4) $y = \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2}$; 5) $y = \frac{\ln x}{x^2}$; 6) $y = \ln(x^2 + 2x)$.

7) $y = \ln(1 + \cos x)$; 8) $y = \ln \sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x$.

9) $y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$; 10) $y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$; 11) $y = \lg(5x + 3)$.

12) $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$; 13) $y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{1 - ax}}$; 14) $y = \ln(\operatorname{tg} x)$.

2. Қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

1) $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$; 2) $y = \arcsin \sqrt{1 - 4x}$.

3) $y = x - \operatorname{arctg} x$; 4) $y = \arcsin \frac{x}{a}$.

5) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$; 6) $y = \arccos(1 - 2x)$.

7) $y = x\sqrt{1 - x^2} + \arccos x$; 8) $y = \arcsin(e^{3x})$.

9) $y = x \operatorname{arctg} x + \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; 10) $y = \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}$.

11) $y = \arcsin \sqrt{x}$; 12) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{6x - 1}$.

13) $y = x \arccos(1 - x^2)$; 14) $y = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x}$.

15) $y = \arccos \sqrt{1 - 3x} + \sqrt{2x - 4x^2}$;

3. 1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = \operatorname{tg} x$; 3) $y = \sqrt{1 + x^2}$ функцияларнинг 2- тартибли ҳосилалари топилсин.

4. 1) $y = \cos^2 x$; 2) $y = \frac{1}{x^2}$; 3) $y = x \sin x$ функцияларнинг 3- тартибли ҳосилалари топилсин.

5. 1) $y = x \ln x$; 2) $y = te^{-t}$; 3) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$ функцияларнинг 3- тартибли ҳосилалари топилсин.

6. 1) $y = \ln x$; 2) $y = e^{-\frac{x}{a}}$; 3) $y = \sqrt{x}$ функцияларнинг n - тартибли ҳосилалари топилсин.

7. 1) $y = x^n$; 2) $y = \sin x$; 3) $y = \cos^2 x$ функцияларнинг n - тартибли ҳосилалари топилсин.

Мавзу. Функциянинг дифференциали ва унинг тақрибий ҳисоблашдаги тадбиқлари

Режа

1. Функциянинг дифференциали.
2. Функциянинг дифференциалининг тақрибий ҳисоблашга татбиқи.
3. Дифференциал ҳисобнинг асосий теоремалари

Таянч ибора ва тушунчалар

Функция дифференциали, иккинчи тартибли дифференциал, дифференциал ёрдамида тақрибий ҳисоблаш, чексиз кичик функция, функция орттирмасы учун формула, Ферма теоремаси, Ролл теоремаси, Лагранж теоремаси, Чебли орттирмалар формуласи, Тейлор ва Маклорен формулалари, қолдиқ ҳад формуласи.

1. Функциянинг дифференциали. $y = f(x)$ функция x_0 нуктада дифференциалланувчи, яъни ҳосиллага эга бўлса, яъни

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y', \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha, \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad \text{да} \quad \alpha \rightarrow 0$$

бўлиб, бунда α чексиз кичик функция бўлади. Демак,

$$\Delta y = y' \Delta x + \alpha \Delta x \quad (1)$$

бўлади. (1) формулага **функция орттирмасы учун формула** дейилади.

1-таъриф. Функция орттирмасининг $y' \Delta x$ бош қисмига **функция дифференциали** дейилади ва dy билан белгиланади.

Таърифга асосан,

$$dy = y' \Delta x \quad (2)$$

(2) формулада $y = x$ бўлса, $dx = x' \Delta x$ ёки $dx = \Delta x$ бўлиб, функция дифференциали

$$dy = y' dx$$

кўринишда бўлади.

Элементар функцияларнинг дифференциали жадвалини келтирамиз.

$$1. d(x^n) = nx^{n-1} dx \quad (x > 0);$$

$$2. d(a^x) = a^x \ln a dx \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$3. d(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e dx \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1);$$

$$\begin{aligned}
4. \quad d(\ln x) &= \frac{1}{x} dx; \\
5. \quad d(\sin x) &= \cos x dx; \\
6. \quad d(\cos x) &= -\sin x dx; \\
7. \quad d(\operatorname{tg} x) &= \frac{1}{\cos^2 x} dx; \\
8. \quad d(\operatorname{ctg} x) &= -\frac{1}{\sin^2 x} dx; \\
9. \quad d(\arcsin x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx; \\
10. \quad d(\arccos x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx; \\
11. \quad d(\operatorname{arctg} x) &= \frac{1}{1+x^2} dx; \\
12. \quad d(\operatorname{arcctg} x) &= -\frac{1}{1+x^2} dx
\end{aligned}$$

2. Функциянинг дифференциалининг тақрибий ҳисоблашга татбиқи.

(1) формуладан $\Delta y \approx dy$ тақрибий тенглик келиб чиқади, яъни Δx етарлича кичик бўлганда, функция орттирмаси унинг дифференциалига тақрибан тенг дейиш мумкин. Бунда $\Delta y \approx dy$ бўлиб, яъни

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x \quad \text{ёки}$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \quad (3)$$

(3) формуладан функция қийматини тақрибий ҳисоблашларда фойдаланилади.

2-таъриф. $y = f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли дифференциали деб функция дифференциалидан олинган дифференциалга айтилади ва

$$d^2 y = d(dy) = d(y' dx) = y'' dx^2$$

билан белгиланади.

Худди шундай, $d^3 y = y''' dx^3$, ... , $d^n y = y^{(n)} dx^n$ дифференциаллар ҳам аниқланади.

1-мисол. $y = \sqrt{1+x^2}$ функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли дифференциалларини топинг.

Ечиш. Олдин биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни топамиз:

$$y' = (\sqrt{1+x^2})' = \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$y'' = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)' = \frac{x'\sqrt{1+x^2} - x(\sqrt{1+x^2})'}{(\sqrt{1+x^2})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot x/\sqrt{1+x^2}}{1+x^2} = \frac{1+x^2 - x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

Шундай қилиб,

$$dy = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad \text{ва} \quad d^2y = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx^2$$

бўлади.

2-мисол. $f(x) = 3x^2 - 7$ функциянинг, аргумент 2 дан 2,001 гача ўзгаргандаги орттирмасини тақрибан топинг.

Ечиш. (3) формуладан фойдаланамиз. $x_0 = 2$, $\Delta x = 0.001$.

$$f'(x) = 6x, \quad f'(x_0) = 6 \cdot 2 = 12, \quad \Delta f(x_0) \approx df(x_0) = f'(x_0) \Delta x = 12 \cdot 0.001 = 0.012.$$

Функция орттирмаси ўрнига унинг дифференциалини олиб қанча хатога йўл қўйилганини баҳолаймиз: бунинг учун ҳақиқий орттирмани топамиз,

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 3(x_0 + \Delta x)^2 - 7 - (3x_0^2 - 7) = \\ &= 3x_0^2 + 6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 7 - 3x_0^2 + 7 = \\ &= 6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2 = 6 \cdot 2 \cdot 0.001 + 3 \cdot 0.000001 = 0.012003. \end{aligned}$$

Демак, абсолют хато

$$|\Delta y - dy| = |0.012003 - 0.012| = 0.000003.$$

Нисбий хато

$$\frac{|\Delta y - dy|}{dy} = \frac{0.000003}{0.012} = 0.00025 \quad \text{ёки} \quad 0,025\%.$$

Тақрибий ҳисоблаш хатоси анча кичик, бу эса юқоридаги тақрибий тенгликдан тақрибий ҳисоблашларда фойдаланиш мумкинлигини кўрсатади.

3. Дифференциал ҳисобнинг асосий теоремалари

Бирор функциянинг ҳосиласини билиш функционал боғланиш ҳақида ҳулоса чиқаришга имконият яратади. Ҳосила тушунчасининг ҳар хил татбиқлари, хусусан иқтисодга қўлланилишида содда лекин муҳим бўлган теоремалар ва формулалар ётади. Бу теоремалардан айримларини исботсиз келтирамиз.

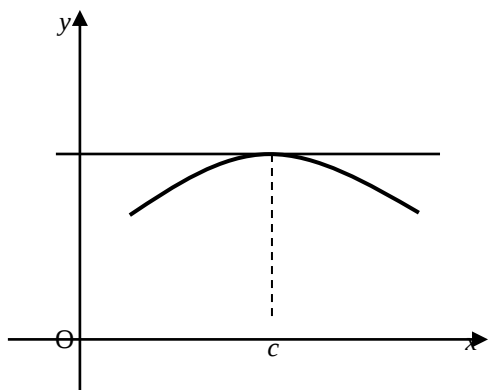
1. Ферма теоремаси. (1602-1665й. - атоқли француз математиги). $f(x)$ функция бирорта X ораликда аниқланган ва бу ораликнинг ички c

нуқтасида энг катта (энг кичик) қийматга эга бўлиб, ҳамда бу нуқтада чекли $f'(c)$ ҳосила мавжуд бўлса,

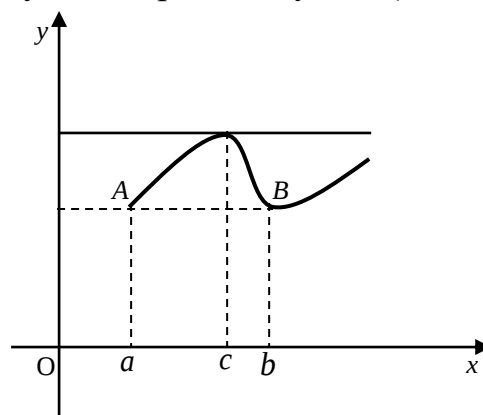
$$f'(c) = 0$$

тенглик ўринли бўлиши зарур.

Ферма теоремаси содда геометрик маънога эга. Теорема шартлари бажарилганда X ораликда шундай c нуқта мавжуд бўладики, бу нуқтадан функция графигига ўтказилган уринма OX ўқиға параллел бўлади (1-чизма).



1-чизма



2-чизма

2. Ролл теоремаси. (Мишел Ролл (1652-1719) француз математиги). 1) $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз; 2) ақалли (a, b) ораликда $f'(x)$ чекли ҳосила мавжуд; 3) ораликнинг четки нуқталарида функция тенг $f(a) = f(b)$ қийматларни қабул қилса, a ва b орасида шундай c нуқта топиладики,

$$\hat{f}'(c) = 0$$

тенглик бажарилади ($a < c < b$).

Геометрик нуқтаси назардан Ролл теоремаси қуйидагини билдиради: $y = f(x)$ функциянинг четки ординаталари тенг бўлса, эгри чизикда шундай нуқта топиладики, ундан эгри чизикқа ўтказилган ўринма, OX ўқиға параллел бўлади (2-чизма).

3. Лагранж теоремаси. (1736-1813й. машҳур француз математиги ва механиги). 1) $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз; 2) ақалли (a, b) очик ораликда чекли $f'(x)$ ҳосила мавжуд бўлса, a ва b орасида камида битта c ($a < c < b$) нуқта топиладики

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

тенглик ўринли бўлади.

Лагранж теоремасини геометрик томондан қуйидагича ифодалаш мумкин (3-чизма): теорема шартларида

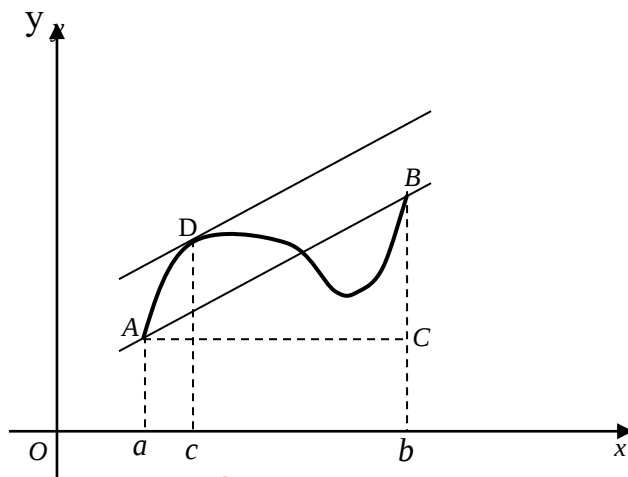
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{CB}{AC}$$

нисбат AB кесувчининг бурчак коэффиценти эканини, $f'(c)$ эса $y = f(x)$ эгри чизикқа $x = c$ абсциссали нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффиценти эканини пайқаймиз.

Шундай қилиб, Лагранж теоремасининг тасдиғи AB ёйда ҳеч бўлмаганда битта шундай D нуқта топиладики, бу нуқтадан ўтказилган уринма, AB кесувчига параллел бўлади.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad \text{ёки} \quad f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

формулага Лагранж формуласи ёки чекли орттирмалар формуласи дейилади.



3-чизма

Юқоридаги теоремаларнинг исботини математик таҳлилнинг кенгрок дастурлари учун ёзилган адабиётлардан топиш мумкин (масалан, Соатов Ё.У. Олий математика. ж.1. -Т.: Ўқитувчи 1992. 193-197 б.)

4. Тейлор теоремаси ((1685-1731й., инглиз математиғи). $y = f(x)$ функция $x = a$ нуқтани ўз ичига олган бирор ораликда $(n+1)$ тартибгача барча ҳосилларга эга бўлса,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

формула ўринли бўлади, бунда θ , $0 < \theta < 1$ бўлган сон. Бу формулага қолдик хади

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

бўлган, Лагранж формасидаги **Тейлор формуласи** дейилади. Тейлор формуласида $a = 0$ бўлса,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

формула ҳосил бўлади. Бунга **Маклорен формуласи** дейилади.

Тейлор ва Маклорен формулалари функцияларни x нинг даражалари бўйича ёйишда ва тақрибий ҳисоблашларда катта аҳамиятга эга.

1-мисол. Ушбу $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$ функция $(-1; 1)$ интервалнинг ички $x = 0$ нуқтасида ўзининг энг кичик қийматига эришса ҳам, бу функция учун Ферма теоремасининг хулосаси ўринли эмас. Шунини кўрсатинг.

Ечиш. Берилган функция $x = 0$ нуқтада ўзининг энг кичик қийматига эришади. Бироқ функция шу $x = 0$ нуқтада чекли ҳосилага эга эмас. Бу ушбу

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x^2}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$$

нисбатнинг $\Delta x \rightarrow 0$ да чекли лимитга эга эмаслигидан келиб чиқади.

Демак, Ферма теоремасининг шarti бажарилмайди. Бинобарин, теореманинг хулосаси ўринли эмас.

2- мисол. Ушбу $f(x) = x^2 + 3$ функция $[-1; 2]$ сегментда Лагранж теоремасининг шартларини қаноатлантирадими?

Ечиш. Равшанки, берилган функция $[-1; 2]$ сегментда узлуксиз ва $(-1; 2)$ интервалда $f'(x) = 2x$ ҳосилага эга.

Демак, $f(x) = x^2 + 3$ функция $[-1; 2]$ сегментда Лагранж теоремасига кўра шундай c нуқта ($-1 < c < 2$) топиладики,

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = f'(c) = 2c$$

бўлади. Кейинги тенгликдан $c = \frac{1}{2}$ эканини топамиз.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Функциянинг дифференциали деб нимага айтилади?
2. Функция орттирмаси ва дифференциали ўртасида қандай боғлиқлик бор?
3. Дифференциалдан фодаланиб тақрибий ҳисоблаш мумкинми?
4. Иккинчи тартибли дифференциал нима?
5. Ҳисоблаш хатоси нима?
6. Ферма теоремасининг шартлари нималардан иборат?
7. Ферма теоремаси тасдиғи қандай бўлади?
8. Ролл теоремасининг нечта шarti бор ва уларни сананг?
9. Ролл теоремаси шартларида, унинг тасдиғи нимадан иборат?
10. Геометрик томондан Ролл теоремасининг тасдиғи нимани ифодалайди?
11. Ферма теоремаси геометрик нуқтаи назардан нимани англатади?
12. Лагранж теоремаси шартларини санаб кўринг, улар нималардан иборат?
13. Лагранж теоремасининг тасдиғи нима?

14. Лагранж теоремаси тасдиғи геометрик томондан нимани билдиради?

15. Лагранж ёки чекли орттирмалар формуласини ёзинг?

16. Чекли орттирмалар дейилишини тушинасизми?

17. Тейлор формуласи нимадан иборат?

18. Маклорен формуласи қандай олинади?

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1-8 мисолларда функцияларнинг дифференциаллари топилсин.

1. 1) $y = x^n$; 2) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$.

2. 1) $y = \sqrt{1+x^2}$; 2) $s = \frac{gt^2}{2}$.

3. 1) $r = 2\varphi - \sin 2\varphi$; 2) $x = \frac{1}{t^2}$.

4. 1) $d(\sin^2 t)$; 2) $d(1 - \cos u)$.

5. 1) $d\left(\frac{a}{x} + \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right)$; 2) $d(\alpha + \ln \alpha)$;

6. 1) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$; 2) $r = \sin(a - b\varphi)$; 3) $s = \sqrt{1-t^2}$.

7. 1) $y = \ln \cos x$; 2) $z = \operatorname{arctg} \sqrt{4u-1}$; 2) $s = e^{-2t}$.

8. 1) $d(\sqrt{x} + 1)$; 2) $d(\operatorname{tg} \alpha - \alpha)$; 3) $d(bt - e^{-bt})$.

9. Ушбу $f(x) = \sin x$ функция учун $[0; 2\pi]$ сегментда Ролль теоремасининг шартлари бажариладими?

10. Ушбу $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ функциялар $[0; 2\pi]$ сегментда Коши теоремасининг шартларини каноатлантирадими?

11. Ушбу $f(x) = x(x^2 - 1)$ функция учун $[0; 2\pi]$ ва $[0, 1]$ сегментларда Ролль теоремасининг шартларини текширинг.

12. $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ булса} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ булса} \end{cases}$ функция учун $[-1; 1]$ ораликда

Лагранж теоремаси ўринлими?

13. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ функция илдизлари орасида унинг хосиласининг ҳам илдизи бор экани текширилсин.

14. Ролль теоремасини $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ функцияга $[-1; 1]$ сегментда татбиқ қилиш мумкинми?

15. $y = x^2$ параболанинг қайси нуқтасида ўтказилган уринма $A(-1; 1)$ ва $B(3; 9)$ нуқталарни бирлаштирувчи ватарга параллел бўлади?
16. $[a, b]$ сегментда $f(x) = x^2$ функция учун Лагранж формуласи ёзилсин ва c топилсин. График усул билан тушунтирилсин.
17. $[1; 4]$ сегментда $f(x) = \sqrt{x}$ функция учун Лагранж формуласи ёзилсин ва c топилсин.
18. $f(x) = x^3$ ва $g(x) = x^2$ функциялар учун Кошининг $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ формула ёзилсин ҳамда c топилсин.
19. $f(x) = x^3$ функция учун Лагранжнинг $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ формуласи ёзилсин ва c топилсин.
20. Қуйидаги функциялар учун Лагранж формуласи ёзилсин ва c топилсин:
- 1) $[0; 1]$ сегментда $f(x) = \arctg x$;
 - 2) $[0; 1]$ сегментда $f(x) = \arcsin x$;
 - 3) $[1; 2]$ сегментда $f(x) = \ln x$.

Мавзу. Дифференциал ҳисобнинг татбиқлари

Режа

1. Дифференциал ҳисоб ёрдамида функция динамикасини текшириш.
2. Ҳосила ёрдамида аниқмасликларни очиш. Лопитал қоидаси.
3. Дифференциал ҳисобнинг иқтисодда қўлланилиши ҳақида.

Таянч иборалар ва тушунчалар

Функция динамикаси, функция графигининг қавариқлик ва ботиқлик қисмлари, эгилиш нуқтаси, функцияни текшириш, асимптота, Лопитал қоидаси, ишлаб чиқариш харажатлари, маҳсулот ишлаб чиқариш орттирмаси, ишлаб чиқариш харажатлари орттирмаси, ишлаб чиқариш харажати ўртача орттирмаси, ишлаб чиқариш лимитик харажати, савдо лимитик пул маблағи, функция эгилувчанлиги, аргумент ва функциянинг нисбий орттирмалари, нисбий ҳосила, нисбий эгилувчанлик, иккита функция кўпайтмаси ва нисбати эгилувчанликлари, талабнинг нархга нисбатан эгилувчанлиги, талабнинг даромадга нисбатан эгилувчанлиги, таклифнинг нархга нисбатан эгилувчанлиги, тўла ва ўртача харажатлар эгилувчанликлари.

1. Дифференциал ҳисоб ёрдамида функция динамикасини текшириш

Маълумки, табиат ва иқтисоднинг кўп қонунлари функция ёрдамида моделлаштирилади. Бундай функцияларни билиш уларнинг қайси ораликда ўсувчи ёки камаювчи ҳамда улар қандай нуқталарда энг катта ва энг кичик қийматларга эришишини аниқлаш имконини яратади. Бунга ўхшаш текширишлар функция динамикасини англашга олиб келади.

1). Функциянинг монотонлиги мезонлари (критерияси).

1-таъриф. (a, b) оралиқнинг $x_2 > x_1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи

ихтиёрий иккита нуқталари учун, $f(x_2) > f(x_1)$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция (a, b) оралиқда ўсувчи дейилади.

2-таъриф. (a, b) оралиқнинг $x_2 > x_1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий иккита нуқталарси учун $f(x_2) < f(x_1)$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция (a, b) оралиқда камаювчи дейилади.

Оралиқда ўсувчи ёки камаювчи функциялар монотон функциялар дейилади.

Монотонликнинг зарурий ва етарли шартлари:

1) (a, b) оралиқда дифференциалланувчи $y = f(x)$ функция мусбат ҳосиллага эга, яъни $f'(x) > 0$, бўлса, функция шу оралиқда ўсувчи бўлади;

2) (a, b) оралиқда дифференциалланувчи $y = f(x)$ функция манфий ҳосиллага эга, яъни $f'(x) < 0$, бўлса, функция шу оралиқда **камаювчи** бўлади.

1-мисол. $y = f(x) = x^3 - 3/2 \cdot x^2 - 6x + 4$ функциянинг монотонлик оралиқларини топинг.

Ечиш. Биринчи тартибли ҳосилани топамиз:

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2), \quad x^2 - x - 2 = 0,$$

бундан $x_1 = -1, x_2 = 2$ критик нуқталар бўлиб, улар функциянинг аниқланиш соҳасини $(-\infty; -1), (-1; 2), (2; +\infty)$ оралиқларга ажратади.

Бу оралиқларнинг ҳар бирида ҳосиланинг ишорасини текширамыз. $(-\infty; -1)$ оралиқдан ихтиёрий нуқта олиб, масалан, $x = -2$ бўлса, $f'(-2) = (-2)^2 - (-2) - 2 = 4 + 2 - 2 = 4 > 0$ бўлади. Бундай тенгсизлик оралиқнинг исталган нуқтаси учун бажарилади (буни текшириб кўринг). Демак, $(-\infty; -1)$ оралиқда функция ўсувчи (ўсувчи функциянинг етарли шартига асосан).

$(-1; 2)$ оралиқнинг $x = 0$ нуқтасида $f'(0) = -2 < 0$, бўлиб, бу оралиқнинг исталган нуқтаси учун, $f'(x) < 0$ тенгсизлик бажарилади. Камаювчи функциянинг етарли шартига асосан, $(-1; 2)$ оралиқда функция камаювчи бўлади.

$(2; +\infty)$ оралиқнинг $x = 3$ нуқтаси учун, $f'(3) = 3^2 - 3 - 2 = 9 - 5 = 4 > 0$, бўлиб, бу тенгсизлик ҳам оралиқнинг исталган нуқтаси учун бажарилади, демак, функция $(2; +\infty)$ оралиқда ўсувчи.

2). Функциянинг экстремуми. Функциянинг биринчи тартибли ҳосиласи нўлга тенг ёки узилишга эга бўладиган нуқталари **критик** нуқталар дейилади.

3-таъриф. x_0 нуқтанинг шундай атрофи мавжуд бўлсаки, бу атрофнинг ҳар қандай $x \neq x_0$ нуқтаси учун $f(x) < f(x_0)$ тенгсизлик бажарилса, $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада **максимумга** эга дейилади.

4-таъриф. x_0 нуқтанинг шундай атрофи мавжуд бўлсаки, бу атрофнинг ҳар қандай $x \neq x_0$ нуқтаси учун $f(x) > f(x_0)$ тенгсизлик бажарилса, $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада **минимумга** эга дейилади.

Функциянинг максимум ёки минимум нуқталарига **экстремум** нуқталари дейилади.

Экстремумга эга бўлишининг зарурий шarti. $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эга бўлса, $y' = f'(x_0)$ нўлга тенг ёки у мавжуд бўлмайди.

Эслатма. Ҳар қандай критик нуқта ҳам экстремум нуқтаси бўлавермайди.

Экстремумнинг етарли шартлари. **Биринчи қоида.** x_0 нуқта $y = f(x)$ функциянинг критик нуқтаси бўлиб, функция ҳосиласи ишораси бу нуқтадан ўтишда ишорасини ўзгартирса, x_0 нуқта, функциянинг экстремум нуқтаси, ва:

1) x_0 нуқтадан чапдан ўнгга ўтишда $f'(x)$ ўз ишорасини мусбатдан манфийга ўзгартирса, x_0 нуқтада функция **максимумга**;

2) x_0 нуқтадан чапдан ўнгга ўтишда $f'(x)$ ўз ишорасини манфийдан мусбатга ўзгартирса, x_0 нуқтада функция **минимумга** эга бўлади.

Иккинчи қоида. x_0 нуқтада биринчи ҳосила нолга тенг, иккинчи ҳосила нўлдан фарқли бўлса, x_0 нуқта функциянинг экстремум нуқтаси ва :

1) $f''(x_0) < 0$ бўлса, **максимум** нуқтаси;

2) $f''(x_0) > 0$ бўлса, **минимум** нуқтаси бўлади.

Шундай қилиб, монотонлик оралиқларини, функция экстремумини топиш учун, олдин функциянинг аниқланиш соҳасини критик нуқталар ёрдамида монотонлик оралиқларига бўлиш ва уларда ҳосила ишорасини текшириш керак. Кейин монотонлик ва экстремумнинг етарлилиқ шартларидан фойдаланиб, ўсиш ва камайиш оралиқларини, максимум ва минимум нуқталарини аниқлаймиз.

2-мисол. $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 - 6x + 2\frac{2}{3}$ функциянинг экстремумини биринчи қоида билан текширинг.

Ечиш. Критик нуқталарни топамиз:

$$f'(x) = x^2 - x - 6, \quad x^2 - x - 6 = 0, \text{ бунда } x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2};$$

бўлиб, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ бўлади.

Энди аргументнинг критик нуқталаридан ўтишда функция ҳосиласининг ишораларини текширамиз:

$f'(x) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$, $x < -2$ бўлса, $x+2 < 0$, $x-3 < 0$ бўлиб, $(x+2)(x-3) > 0$, бўлади, яъни ишора мусбат (+). $x > -2$ бўлса, $x+2 > 0$; $x-3 < 0$, $(x+2)(x-3) < 0$, яъни ишора манфий (-). Демак, $x_1 = -2$ нуқтадан ўтишда функция ҳосиласининг ишораси мусбатдан манфийга ўзгаради. Биринчи қоидага асосан $x_1 = -2$ нуқтада берилган функция максимумга эга бўлади.

$$y_{\max} = \frac{1}{3}(-2)^3 - \frac{1}{2}(-2)^2 - 6(-2) + 8/3 = 10.$$

Энди $-2 < x < 3$ бўлса, $(x+2) > 0$; $(x-3) < 0$ бўлиб, $(x+2)(x-3) < 0$, ҳосиланинг ишораси манфий (-), $x > 3$ бўлса, $(x+2) > 0$; $(x-3) > 0$ бўлиб, $(x+2)(x-3) > 0$, мусбат (+) бўлади. Демак, $x_2 = 3$ нуқтадан ўтишда функция ҳосиласи ишорасини манфийдан мусбатга ўзгартиради, биринчи қоидага асосан функция $x_2 = 3$ нуқтада минимумга эга бўлади.

$$y_{\min} = 1/3 \cdot 3^3 - 1/2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 8/3 = -65/6.$$

3-мисол. $f(x) = 1/4 \cdot x^4 - 2x^3 + 11/2 \cdot x^2 - 6x + 9/4$ функция экстремумини иккинчи қоида билан текширинг.

Ечиш. Биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни топамиз:

$$f'(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, \quad f''(x) = 3x^2 - 12x + 11.$$

Энди критик нуқталарни топайлик:

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 &= x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 = \\ &= x^2(x-1) - 5x(x-1) + 6(x-1) = \\ &= (x-1)(x^2 - 5x + 6), \quad x^2 - 5x + 6 = 0, \quad x-1 = 0 \end{aligned}$$

бундан, $x = 1$ ва

$$x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}; \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3$$

бўлади. Демак, критик нуқталар: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ бўлади. Энди иккинчи тартибли ҳосиланинг критик нуқталардаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$f''(1) = 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 11 = 2 > 0,$$

$$f''(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 11 = -1 < 0,$$

$$f''(3) = 3 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 11 = 2 > 0.$$

Шундай қилиб, экстремумга эга бўлишнинг иккинчи қондасига асосан, $x_1 = 1$, $x_3 = 3$ нукталарда минимум, $x_2 = 2$ нуктада функция максимумга эга бўлади. $\min f(1) = 0$; $\max f(2) = 0.25$; $\min f(3) = 0$.

3). Функциянинг энг кичик ва энг катта қийматлари. $y = f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмадаги энг кичик ва энг катта қийматларини топиш учун:

- 1) критик нукталарни топамиз;
- 2) функциянинг бу критик нукталардаги ва кесманинг четларидаги қийматларини ҳисоблаймиз;
- 3) бу топилган қийматлардан энг кичиги функциянинг берилган кесмадаги энг кичик қиймати, энг каттаси бу кесмадаги энг катта қиймати бўлади.

4-мисол. $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ функциянинг $[-2; 3]$ кесмадаги энг кичик ва энг катта қийматларини топинг.

Ечиш. Берилган функциянинг критик нукталарини топамиз.

$$y' = 4x^3 - 4x, \quad 4x^3 - 4x = 0, \quad 4x(x^2 - 1) = 0,$$

бундан, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ критик нукталар бўлади. Функциянинг берилган кесманинг четки нукталаридаги ҳамда критик нукталардаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$f(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^2 + 5 = 16 - 8 + 5 = 13,$$

$$f(-1) = 4; \quad f(0) = 5; \quad f(1) = 4 \quad \text{ва} \quad f(3) = 3^4 - 2 \cdot 3^2 + 5 = 81 - 18 + 5 = 68.$$

Бу топилганларни солиштириб, функциянинг $[-2; 3]$ кесмадаги энг кичик ва энг катта қийматлари, мос равишда $y_{\text{энг кич}} = 4$, $y_{\text{энг кат}} = 68$ бўлади.

Шуни эслатамизки, функциянинг энг кичик ва энг катта қийматини топиш катта амалий аҳамиятга эга.

5-мисол. Периметри $2p$ ($p > 0$) бўлган тўғри тўртбурчаклар орасида энг катта юзага эга бўлган тўғри тўртбурчак топилсин.

Ечиш: Бундай тўғри тўртбурчакнинг асоси x бўлсин. Бу ҳолда тўғри тўртбурчакнинг баландлиги $p - x$ га, юзи эса,

$$S = S(x) = x(p - x), \quad (0 < x < p)$$

бўлади.

$S(x)$ функциянинг критик нукталарини топамиз:

$$S'(x) = p - 2x, \quad p - 2x = 0, \quad x = \frac{p}{2}$$

критик нукта бўлади. $S''(x) = -2$; $S''(p/2) = -2 < 0$.

Демак, $S(x)$ функция, $x = \frac{p}{2}$ нуктада максимумга эга бўлади.

$$S_{\max} = \frac{p}{2} \left(p - \frac{p}{2} \right) = \frac{p^2}{4}.$$

Шундай қилиб, энг катта юзага эга бўлган тўғри тўртбурчак томони $\frac{p}{2}$ тенг бўлган квадратдан иборат экан.

4). Функция графигининг қавариқлик, ботиқлик оралиқларини ва эгилиш нукталарини ҳосила ёрдамида текшириш. Функция графигининг асимптоталари.

1-таъриф. $y = f(x)$ функциянинг графиги (a, b) оралиқнинг исталган нуктасидан унга ўтказилган уринмадан пастда ётса, функция графиги шу оралиқда қавариқ дейилади.

2-таъриф. $y = f(x)$ функциянинг графиги (a, b) оралиқнинг исталган нуктасидан унга ўтказилган уринмадан юқорида ётса, функция графиги шу оралиқда ботиқ дейилади.

3-таъриф. Функция графигининг қавариқ қисмини, ботиқ қисмидан ажратувчи $M_0(x_0, f(x_0))$ нукта эгилиш нуктаси дейилади.

Функция графигининг қавариқ ёки ботиқ бўлишининг етарли шартлари:

1) (a, b) оралиқда дифференциалланувчи $y = f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи манфий, яъни $f''(x) < 0$ бўлса, бу оралиқда функция графиги қавариқ бўлади;

2) (a, b) оралиқда дифференциалланувчи $y = f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи мусбат, яъни $f''(x) > 0$ бўлса, бу оралиқда функция графиги ботиқ бўлади.

$f''(x) = 0$ ва $f''(x)$ мавжуд бўлмаган нукталарга 2-тур критик нукталар дейилади.

Эгилиш нукталари мавжуд бўлишининг етарли шарти. x_0 нукта $y = f(x)$ функция учун иккинчи тур критик нукта бўлса ва $f''(x)$ иккинчи тартибли ҳосила бу нуктадан ўтишда ишорасни ўзгартирса, x_0 абсциссали нукта эгилиш нуктаси бўлади.

Шундай қилиб, функция графигининг қавариқлик ва ботиқлик оралиқларини, эгилиш нукталарини топиш учун, олдин функция аниқланиш соҳасини иккинчи тур критик нукталар билан оралиқларга бўлиш ва бу оралиқларда иккинчи тартибли ҳосила ишорасини текшириш керак. Кейин етарли шартлардан фойдаланиб, қавариқлик, ботиқлик оралиқлари ва эгилиш нукталари аниқланади.

5). Функция графигининг асимптоталари. 4-таъриф. $y = f(x)$ функция графигидаги нукта шу график бўйлаб чексиз узоклашганда, ундан

бирор тўғри чизикча масофа нўлга интилса, бу тўғри чизик $y = f(x)$ функция графигининг асимптотаси дейилади.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ бўлса, $x = a$ тўғри чизик $y = f(x)$ функция графигининг

вертикал асимптотаси бўлади.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ ва } b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$$

ёки

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ ва } b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx]$$

лимитлар мавжуд бўлса, $y = kx + b$ тўғри чизик $y = f(x)$ функция графигининг оғма асимптотаси бўлади. $k = 0$ бўлса, $y = b$ горизантал асимптота бўлади.

6-мисол. Гаусс эгри чизиғи деб аталувчи $y = e^{-x^2}$ функция графигининг қавариқлик, ботиқлик оралиқларини ва эгилиш нуқталарини аниқланг.

Ечиш. Биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни топамиз:

$$y' = e^{-x^2} (-2x) = -2xe^{-x^2}, y'' = -2[x'e^{-x^2} + (-2xe^{-x^2})x] = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$

Иккинчи тартибли ҳосилани нолга тенглаштириб, иккинчи тур критик нуқталарни топамиз:

$$(4x^2 - 2)e^{-x^2} = 0, e^{-x^2} \neq 0, 4x^2 - 2 = 0, x^2 = \frac{1}{2}; x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}; x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Булар иккинчи тур критик нуқталар бўлиб, сонлар ўқини

$$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ ва } (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$$

оралиқларга ажратади.

$$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty) \text{ оралиқларда } y'' > 0 \text{ бўлиб, } (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

оралиқда $y'' < 0$ бўлади.

Демак,

$$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ ва } (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty) \text{ оралиқларда функция графиги ботик,}$$

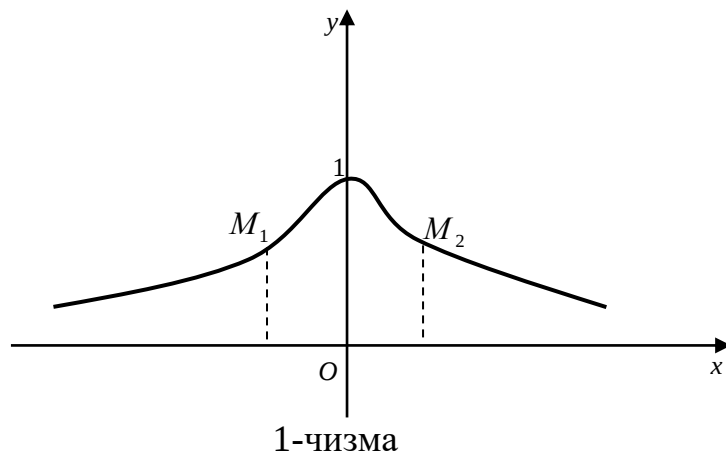
$$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ оралиқда функция графиги қавариқ бўлиб, } x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

нуқтадан ўтишда $f''(x)$ ўз ишорасини мусбатдан манфийга, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

нуқтадан ўтишда манфийдан мусбатга ўзгартиради. Бу иккала ҳолда ҳам эгилиш бўлади:

$$f_{\text{ээл}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}; \quad M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right). \quad f_{\text{ээл}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \quad M_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

Юқоридагиларга асосан функция графигини ясаймиз.



1-чизма

6). Функцияни текширишнинг умумий режаси. Функцияни ҳосила ёрдамида текширишни ҳисобга олиб, функцияни текширишнинг қуйидаги умумий режасини тавсия этамиз:

- 1) функциянинг аниқланиш соҳасини топиш ҳамда аргументнинг аниқланиш соҳаси четларига интилганда функция ўзгаришини текшириш;
- 2) функциянинг жуфт-тоқлигини текшириш;
- 3) функциянинг даврийлигини аниқлаш;
- 4) функциянинг узлуксизлиги, узилишини текшириш;
- 5) функциянинг критик нуқталарини аниқлаш;
- 6) функциянинг монотонлик оралиқларини ва экстремумини текшириш;
- 7) иккинчи тур критик нуқталарни топиш;
- 8) функция графигининг қавариклик, ботиклик оралиқларини ва эгилиш нуқталарини аниқлаш;
- 9) функция графигининг асимтоталарини текшириш;
- 10) имконияти бўлса функция графигининг координат ўқлари билан кесишиш нуқталарини аниқлаш;
- 11) юқоридаги аниқланган хусусиятларни ҳисобга олиб, функция графигини яшаш.

7-мисол. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ функцияни текширинг.

Ечиш. Функцияни текширишнинг умумий режасидан фойдаланамиз:

- 1) функция махражи нўлга айланадиган нуқталардан бошқа ҳамма нуқталарда аниқланган. Махраж $x_1 = -2, x_2 = 2$ нуқталарда нўлга тенг, демак, функциянинг аниқланиш соҳаси $(-\infty, -2), (-2; +2), (2, +\infty)$

оралиқлардан иборат. Аниқланиш оралиқларининг четларида функциянинг ўзгаришини текширамиз:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2-0} \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \infty$$

;

$$2) f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = -\frac{x^3}{x^2 - 4} = -f(x)$$

бўлганлиги учун тоқ функция;

3) функция $f(x+T) = f(x)$ тенгликни қаноатлантирмайди, демак, даврий эмас;

4) функция $x = \pm 2$ нукталарда узилишга эга;

5) критик нукталарни топамиз:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2}, \quad f'(x) = 0, \quad x = 0, \quad x = \pm 2\sqrt{3}..$$

Бундан ташқари $f'(x)$, $x = \pm 2$ нукталарда мавжуд эмас. Демак, критик нукталар: $x_1 = -2\sqrt{3}$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = 2\sqrt{3}$ бўлади;

6) $(-\infty, -2\sqrt{3})$, $(-2\sqrt{3}, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2\sqrt{3})$, $(2\sqrt{3}, +\infty)$

оралиқларнинг ҳар бирида $f'(x)$ нинг ишорасини текширамиз;

$(-\infty, -2\sqrt{3})$ ва $(-2\sqrt{3}, +\infty)$ оралиқларда $f'(x)$ функция ҳосиласи мусбат, яъни функция бу оралиқларда ўсувчи; $(-2\sqrt{3}, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2\sqrt{3})$ оралиқларда $f'(x) < 0$, яъни камаювчи $x_1 = -2\sqrt{3}$ нуктада функция максимумга, $x_5 = 2\sqrt{3}$ нуктада минимумга эга бўлади. $x = 0$ критик нуктадан ўтишда $f'(x)$ ишораси ўзгармайди, демак бу нуктада экстремум йўқ.

$$\max f(x) = f(-2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}; \quad \min f(x) = f(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3};$$

7) иккинчи тур критик нукталарни топамиз:

$$f''(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{(4x^3 - 24x)(x^2 - 4)^2 - x^2(x^2 - 12) \cdot 2 \cdot (x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3 - 24x)(x^2 - 4) - 4x^3(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^3} = \frac{8x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}.$$

$$f''(x) = 0, \quad 8x(x^2 + 12) = 0, \quad x = 0, \quad x = \pm 2$$

нукталарда иккинчи тартибли ҳосила мавжуд эмас. Демак иккинчи тур критик нукталар

$$x_1 = -2; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 2$$

бўлади;

8) $(-\infty, -2), (-2, 0), (0, 2), (2, +\infty)$ ораликларда $f''(x)$ нинг ишорасини текширамиз: $x = -3$ бўлсин.

$$f''(-3) = \frac{8(-3)[(-3)^2 + 12]}{[(-3)^2 - 4]} = \frac{-24 \cdot 21}{5^3} = -\frac{504}{125} < 0,$$

худди шундай

$f''(-1) > 0, \quad f''(1) < 0, \quad f''(3) > 0$ бўлиб, $(-\infty, -2)$ ва $(0, 2)$ ораликларда функция графиги каварик, $(-2, 0)$ ва $(2, +\infty)$ ораликларда функция графиги ботик бўлади. Иккинчи тартибли ҳосила ҳар бир иккинчи тур критик нуқтада ишорасини ўзгартиради, лекин $x = \pm 2$ да функция узилишга эга. Шунинг учун фақат $x = 0$ нуқтада функция графиги эгилишга эга бўлади $f(0)_{\text{эгл}} = 0$;

9) функция графигининг асимптоталарини топамиз:

$$\lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \pm \infty \quad \text{ва} \quad \lim_{x \rightarrow -2 \pm 0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \pm \infty.$$

Демак, $x = -2, x = 2$ функция графигининг вертикал асимптоталари бўлади.

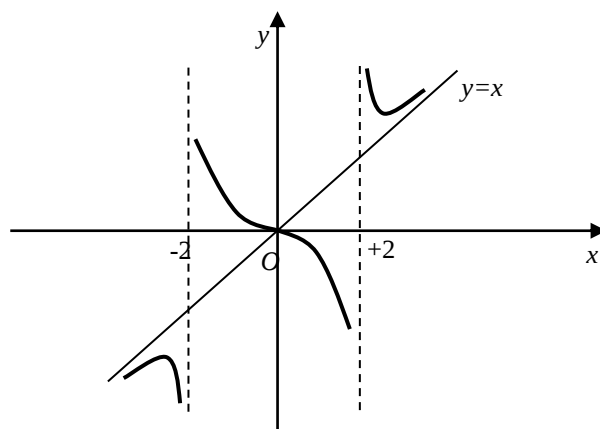
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 4)} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4/x}{1 - 4/x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Шундай қилиб, $y = x$ оғма асимптота бўлади;

10) $x = 0$ бўлганда $y = 0$ бўлиб, функция графиги координаталар бошидан ўтади;

11) юқоридаги текширишга асосан, функция графигини ясаймиз. (2-чизма)



2-чизма

2. Ҳосила ёрдамида аниқмасликларни очиш. Лопитал қоидаси.
 $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a, b) ораликда берилган бўлсин.

$$1. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

бўлса, $x \rightarrow a$ да $\frac{f(x)}{g(x)}$ нисбат $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмаслик бўлади.

$$2. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

бўлса, $x \rightarrow a$ да $\frac{f(x)}{g(x)}$ нисбат $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмаслик бўлади.

Берилган функциялар ҳосилаларга эга бўлса, улардан фойдаланиб, аниқмасликни очиш мумкин.

Лопитал қоидаси

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ёки $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ бўлиб,

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ мавжуд бўлса, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ тенглик ўринли бўлади.

$x \rightarrow \infty$ да ҳам Лопитал қоидаси ўринли.

$(0, -\infty)$ ёки $(\infty, -\infty)$ кўринишдаги аниқмасликлар алгебраик алмаштиришлар орқали $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликларга келтирилиб, кейин Лопитал қоидасидан фойдаланилади.

1-мисол. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2}$ ни ҳисобланг.

Ечиш. Бу лимит $x \rightarrow 0$ да $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмаслик бўлиб,

Лопитал қоидасини қўллаб,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x}$$

натижага эга бўламиз. Охирги лимит $x \rightarrow 0$ да яна $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмаслик, демак, Лопитал қоидасини яна қўллаш мумкин:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{x'} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - \sin x}{1} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

Шундай қилиб, кетма-кет Лопитал қоидасини қўллаш билан берилган лимитнинг 0 га тенглигини кўрсатдик.

5-мисол. $y = x^2 \cdot e^{2x}$ функция эгилувчанлигини ҳисобланг.

Ечиш. $u = x^2$, $v = e^{2x}$ ни олиш мумкин. Демак, (3) формулага асосан:

$$E_x(y) = \frac{x}{x^2} (x^2)' + \frac{x}{e^{2x}} (e^{2x})' = 2 + 2x, \quad E_x(y) = 2(1 + x)$$

бўлади.

2-теорема. Иккита функция нисбатининг эгилувчанлиги бўлинувчи ва бўлувчи эгилувчанликларининг айирмасига тенг, яъни

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v) \quad (4)$$

бўлади (бу тасдиқнинг исботини ўқувчига ҳавола этамиз).

6-мисол. $y = \frac{x^3 + 5}{e^{3x}}$ функция эгилувчанлигини ҳисобланг.

Ечиш. $u = x^3 + 5$, $v = e^{3x}$ эканлигини ҳисобга олиб (4) формулага асосан:

$$E_x(y) = E_x(x^3 + 5) - E_x(e^{3x}) = \frac{x}{x^3 + 5} \cdot 3x^2 - \frac{x}{e^{3x}} \cdot 3e^{3x} = \frac{3x^3}{x^3 + 5} - 3x, \text{ яъни}$$

$$E_x(y) = \frac{3x^3}{x^3 + 5} - 3x$$

бўлади.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Функциянинг монотонлиги нима?
2. Функциянинг экстремуми нима?
3. Функция экстремумга эга бўлишининг зарурий ва етарли шартлари нималардан иборат?
4. Ҳосила ёрдамида экстремумни текширишнинг иккинчи қоидаси қандай?
5. Функция графигининг қавариқлик, ботиқлик қисмлари ва унинг эгилиш нуқтаси ҳосила ёрдамида қандай аниқланади?
6. Функция графигининг асимптоталари қандай топилади?
7. Функцияни умумий текшириш нималардан иборат?
8. Аниқмасликларни очишда Лопитал қоидаси нимадан иборат?
9. Функция ҳосиласини билган ҳолда функционал боғланиш ҳақида нима дейиш мумкин?
10. Ишлаб чиқариш харажатлари, ишлаб чиқарилган маҳсулот миқдорида боғлиқми?
11. Ишлаб чиқариш харажатлари ўртача орттирмаси деб нимага айтилади?
12. Ишлаб чиқаришнинг лимитик харажати қандай аниқланади?
13. Жами савдонинг пул маблағи нима?
14. Савдонинг лимитик пул маблағи қандай аниқланади?
15. Бирор маҳсулотга талаб ва унинг нархи орасида боғланиш борми?
16. Нисбий орттирма нима?
17. Функциянинг эгилувчанлиги қандай аниқланади?
18. Функция эгилувчанлиги $E_x(y)$ нимага тенг?

Мусткил бажариш учун топшириқлар

1. Куйидаги функцияларнинг ўсиши ва камайиши оралиқлари текширилсин.

1) $y = x^2$;

2) $y = x^3$;

3) $y = \frac{1}{x}$;

4) $y = \ln x$;

5) $y = \operatorname{tg} x$;

6) $y = e^x$;

7) $y = 4x - x^2$.

2. Куйидаги функцияларнинг экстремумлари топилсин ва уларнинг графиклари ясалсин.

1) $y = x^2 + 4x + 5$;

8) $y = \frac{1}{1 + x^2}$

2) $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$;

9) $y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$;

3) $y = \frac{x^4}{4} - x^3$;

10) $y = x^2(1 - x)$;

4) $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$;

11) $y = 1 - \sqrt[3]{(x - 4)^2}$;

5) $y = 1 + 2x^2 - \frac{x^4}{4}$;

12) $y = 4x - \operatorname{tg} x \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ ораликда

6) $y = 4x - \frac{x^3}{3}$;

13) $y = xe^{\frac{x}{2}}$;

7) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$;

14) $y = x \ln x$.

3. Куйидаги функцияларнинг экстремумлари топилсин ва жадваллари тузилсин.

1. $y = 4x - x^2$;

6. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$;

2. $y = x^2 + 2x + 3$;

7. $y = x^3 + \frac{x^4}{4}$;

3. $y = \frac{x^3}{3} + x^2$;

8. $y = x - 2 \ln x$;

4. $y = \frac{x^2}{x - 2}$

9. $y = \sin 2x - x, \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ ораликда.

5. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2$;

4. Куйидаги функцияларнинг кавариклик ва ботиклик оралиқларини топинг.

1) $f(x) = x^\alpha, \alpha > 1, x > 0$;

2) $f(x) = e^x$;

3) $f(x) = \ln x$;

4) $f(x) = x^5 - 10x^2 + 3x$;

$$5) f(x) = \frac{1}{1-x^2};$$

$$6) y = x^5 + 5x - 6;$$

$$7) y = (x-4)^5 + 4x + 4;$$

$$8) y = e^{-\frac{x^2}{2}};$$

$$9) y = 2 + \frac{12}{x^2 - 4};$$

5. Қуйидаги функциялар графикларининг эгилиш нукталарини топинг.

$$1) y = x^5 + 5x - 6$$

$$2) y = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$3) y = xe^{1-x}$$

$$4) y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$$

$$5) y = \cos x$$

$$6) y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$$

6. Қуйидаги функцияларнинг асимптоталарини топинг.

$$1) y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$2) y = \frac{x^2}{x-2}$$

$$3) y = x - \ln x$$

$$4) y = \frac{e^x}{x}$$

$$5) y = \frac{\ln(x+1)}{x^2} + 2x$$

7. Қуйидаги функцияларнинг графикларини ясанг.

$$1) y = 3x - x^3;$$

$$2) y = -x^3 + 4x - 3;$$

$$3) y = -4x + x^3;$$

$$4) y = x^5 - \frac{5}{3}x^3;$$

$$5) y = x(x-1)^3;$$

8. Қуйидаги лимитлар Лопитал қондасига асосан топилсин.

1.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$	10.	$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$
2.	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{x^n - a^n}$	11.	$\lim_{x \rightarrow 0} x^x$
3.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}$	12.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$
4.	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}$	13.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$
5.	$\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}$	14.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 7x^2 + 4x + 2}{x^3 - 5x + 4}$
6.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$	15.	$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \cdot \ln x$
7.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{ctg} x - 1}{x^2}$	16.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$
8.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$	17.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}$
9.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$	18.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$

Аниқмас интеграл

Мавзу. Аниқмас интеграл ва унинг хоссалари

Режа

1. Бошланғич функция ва унинг хоссаси.
2. Аниқмас интеграл ва унинг хоссалари.
3. Асосий интеграллар жадвали.

Таянч ибора ва тушунчалар

Бошланғич функция, аниқмас интеграл, интеграллаш, аниқмас интеграл хоссалари, асосий интеграллар жадвали.

1. Бошланғич функция ва унинг хоссаси. Маълумки математикада амаллар жуфт-жуфт бўлиб учраб келади. Жумладан, қўшиш ва айириш, кўпайтириш ва бўлиш, даражага кўтариш ва илдиз чиқариш ва бошқалар. Функция ҳосиласини топишга ёки дифференциалаш амалига тескари амал бормикан деган табиий савол туғилади.

Дифференциал ҳисобда функция берилган бўлса, унинг ҳосиласини топишни қарадик. Ҳақиқатда ҳам фан ва техниканинг бир қанча масалаларини ҳал этишда тескари масалани ечишга тўғри келадики, берилган $f(x)$ функция учун шундай, $F(x)$ функцияни топиш керакки, унинг ҳосиласи берилган $f(x)$ функцияга тенг бўлсин. Маълумки, бундай $F(x)$ функцияга берилган $f(x)$ функциянинг **бошланғич (дастлабки) функцияси** дейилади.

Масалан, $y = f(x) = x^4$ функциянинг бошланғич функцияси, $F(x) = \frac{x^5}{5}$ бўлади, чунки $F'(x) = (\frac{x^5}{5})' = x^4 = f(x)$ бўлади.

2. Аниқмас интеграл ва унинг хоссалари. Таъриф. $F(x)$ функция бирор ораликда $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлса, $F(x) + C$ (бунда C ихтиёрий ўзгармас) функциялар тўплами шу ораликда $f(x)$ **функциянинг аниқмас интеграли** дейилади ва

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

билан белгиланади. Бу ерда $f(x)$ интеграл остидаги функция, $f(x)dx$ интеграл остидаги ифода, x интеграллаш ўзгарувчиси, $\int$ интеграл белгиси дейилади.

Демак, $\int f(x)dx$ символ, $f(x)$ функциянинг ҳамма бошланғич функциялари тўпламини белгилайди.

Берилган функциянинг аниқмас интегралини топиш амалига интеграллаш дейилади.

Аниқмас интегралнинг хоссалари:

1) аниқмас интегралнинг ҳосиласи интеграл остидаги функцияга, дифференциали эса интеграл остидаги ифодага тенг, яъни

$$(\int f(x)dx)' = f(x) \quad \text{ва} \quad d\int F(x)dx = F(x)dx;$$

2) бирор функциянинг ҳосиласидан ҳамда дифференциалидан аниқмас интеграл шу функция билан ихтиёрий ўзгармаснинг йиғиндисига тенг, яъни

$$f'(x)dx = f(x) + C \quad \text{ва} \quad \int dF(x) = F(x) + C.$$

Бу хоссалар аниқмас интегралнинг таърифидан бевосита келиб чиқади. Ҳақиқатан, 1-хоссадан $(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$ бўлади. (Қолганларини келтириб чиқариш ўқувчига ҳавола этилади).

Бу хоссалардан дифференциаллаш ва интеграллаш амаллари ўзаро тескари амаллар эканлигини пайқаш мумкин.

3) ўзгармас кўпайтувчини интеграл белгиси ташқарисига чиқариш мумкин, яъни $K = \text{const} \neq 0$ бўлса,

$$\int Kf(x)dx = K \int f(x)dx;$$

4) чекли сондаги функциялар алгебраик йиғиндисининг аниқмас интегралли, шу функциялар аниқмас интегралларининг алгебраик йиғиндисига тенг, яъни

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx - \int f_3(x) dx.$$

3. Асосий интеграллар жадвали. Берилган функцияга асосан унинг бошланғичини топиш, берилган функцияни дифференциаллашга нисбатан анча мураккаброқ масаладир. Дифференциал ҳисобда асосий элементар функцияларнинг, йиғиндининг, кўпайтманинг, бўлинманинг ҳамда мураккаб функцияларнинг ҳосиласини топишни ўргандик. Бу қоидалар исталган элементар функцияларнинг ҳосиласини топишга имкон берди. Элементар функцияларни интеграллашда эса дифференциаллашдагидек умумий қоидалар йўқ. масалан, иккита элементар функциялар бошланғичларининг маълум бўлишига қарамасдан, улар кўпайтмасининг, бўлинмасининг бошланғичини топишда аниқ бир қоида йўқ.

Интеграллашда интеграл остидаги ифоданинг муайян берилишига қараб, унга мос индивидуал усуллардан фойдаланишга тўғри келади. Бошқача айтганда, интеграллашда анча кенгрок фикр юритиш керак бўлади. Функцияни интеграллаш яъни бошланғич функцияни топиш методлари бир қанча шундай усулларни кўрсатадики, улар ёрдамида кўп ҳолларда мақсадга эришилади.

Интеграллашда мақсадга эришиш учун қуйидаги **асосий интеграллар жадвалини** ёддан билиш зарур.

$$1) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1; \quad 2) \int dx = x + C; \quad 3) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$$

$$4) \int \sin x dx = -\cos x + C; \quad 5) \int \cos x dx = \sin x + C; \quad 6) \int e^x dx = e^x + C;$$

$$7) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (0 < a \neq 1); \quad 8) \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$9) \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C; \quad 10) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C;$$

$$11) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C; \quad 12) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C, \quad a \neq 0;$$

$$13) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - k}} = \ln x + \sqrt{x^2 - k} + C.$$

Бу формулаларнинг тўғрилигини, текшириш тенгликларнинг ўнг томонидаги ифодалар дифференциали интеграл остидаги ифодага тенг эканлигини кўрсатишдан иборатдир. Масалан,

$$d\left(\frac{x^n + 1}{n+1} + C\right) = \left(\frac{x^n + 1}{n+1} + C\right)' dx = \frac{(n+1)x^n}{n+1} dx = x^n dx.$$

Интеграллашга бир неча мисоллар қараймиз.

1-мисол. $\int (x^3 + 5\sin x - 9)dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Интегралнинг 4 ва 3 хоссаларига асосан,

$$\int (x^3 + 5\sin x - 9)dx = \int x^3 dx + 5\int \sin x dx - 9\int dx$$

бўлади. Асосий интеграллар жадвалидаги 1), 2), 4) формулаларга асосан,

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C_1, \quad 5\int \sin x dx = 5(-\cos x + C_2), \quad -9\int dx = -9(x + C_3).$$

Демак,

$$\int (x^3 + 5\sin x - 9)dx = \frac{x^4}{4} - 5\cos x - 9x + (C_1 + 5C_2 - 9C_3).$$

Юқоридаги интегрални ҳисоблашда ҳар бир учта интегралда ўзининг ихтиёрий ўзгармасини қўшдик, лекин охириги натижада битта ихтиёрий ўзгармасни қўшамиз, чунки C_1, C_2, C_3 ихтиёрий ўзгармаслар бўлса,

$C = C_1 + 5C_2 - 9C_3$ ҳам ихтиёрий ўзгармас бўлади, шунинг учун, охириги натижани қуйидагича ёзамиз:

$$\int (x^3 + 5\sin x - 9)dx = \frac{x^4}{4} - 5\cos x - 9x + C.$$

Интегралнинг тўғри ҳисобланганлигини текшириш учун охириги тенгликнинг ўнг томонини дифференциаллаш билан кўрсатиш мумкин. (буни бажаришни ўқувчига ҳавола этамиз).

2-мисол. $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3^3\sqrt{x^2}} \right) dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Манфий даража хоссасидан, ҳамда 4) хоссадан фойдаланиб, жадвалдаги 1) формулага асосан,

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3^3\sqrt{x^2}} \right) dx &= \int \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} - \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3} \right) dx = \frac{1}{2} \int x^{-\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{3} \int x^{\frac{2}{3}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{\frac{1}{3}} + C = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + C \end{aligned}$$

бўлади.

3-мисол. $\int \frac{3dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ айниятдан ҳамда интегралнинг 3) ва 4) хоссаларидан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$\int \frac{3dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = 3 \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = 3 \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx + 3$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = 3 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + 3 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = 3(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x) + C.$$

4-мисол. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Жадвалдаги 9) формулага асосан,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Бошланғич функция қандай функция?
2. Бошланғич функция ва аниқмас интеграл орасида қандай боғланиш бор?
3. Интеграллаш амали нима?
4. Аниқмас интеграл қандай хоссаларга эга?
5. Асосий интеграллар жадвали нималардан иборат?
6. Интеграллаш тўғри бажарилганлигини қандай текшириш мумкин?

Мустақил бажариш учун топшириқлар

$$1. \int \frac{5x^8 + 6}{x^4} dx; \quad 2. \int \left(\frac{4}{x^2} - \frac{5}{x^3} \right) dx; \quad 3. \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right) dx; \quad 4. \int \frac{x^2 + \sqrt{x} + 3dx}{\sqrt[3]{x^2}} dx;$$

$$5. \int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^3} \right) dx; \quad 6. \int \left(5^x + \frac{5^{-x}}{\sqrt{x}} \right) dx; \quad 7. \int \frac{5 + 3\operatorname{tg}^2 x}{\sin^2 x} dx; \quad 8. \int \left(\frac{4}{9 + x^2} - \frac{5}{\sqrt{4 - x^2}} \right) dx$$

$$9. \int \frac{dx}{x^2 - 49}; \quad 10. \int \frac{dx}{x^2 + 16}; \quad 11. \int \left(\frac{5}{\sqrt{9 - x^2}} - \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3}} \right) dx; \quad 12. \int \left(\frac{7}{x^2 + 7} - \frac{6}{x^2 - 3} \right) dx.$$

Мавзу. Аниқмас интегралда интеграллаш усуллари

Режа

1. Ўзгарувчини алмаштириш.

2. Бўлаклаб интеграллаш.

Таянч ибора ва тушунчалар

Ўзгарувчини алмаштириш, бевосита интеграллаш, бўлаклаб интеграллаш, бўлаклаб интеграллашнинг мақсадга мувофиқлиги.

Шундай бир неча усулларни қараймизки, улар ёрдамида кўп ҳолларда интегралларни ҳисоблаш, жадвал интегралларига келтирилади.

1. Ўзгарувчини алмаштириш. Кўп ҳолларда янги ўзгарувчи киритиш билан интегрални ҳисоблаш, жадвал интегралига келтирилади. Бунда $\varphi(x) = t$ алмаштириш олиниб, бунда t янги ўзгарувчи бўлиб, ўзгарувчини алмаштириш формуласи

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(t)dt$$

кўринишда бўлади.

Ўзгарувчини алмаштириш усулига бир неча мисоллар қараймиз

1-мисол. $\int (3x+1)^7 dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $3x+1=t$ деб $3dx=dt$ ёки $dx=\frac{dt}{3}$ эканлигини ҳисобласак,

$$\int (3x+1)^7 dx = \int t^7 \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^8}{8} + C = \frac{t^8}{24} + C = \frac{(3x+1)^8}{24} + C$$

бўлади.

2-мисол. $\int \sqrt[3]{1+x^2} \cdot x dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $1+x^2=t$ ўзгарувчи билан алмаштирамиз. Бу ҳолда $2x dx = dt$ ёки $x dx = \frac{dt}{2}$ бўлиб,

$$\int \sqrt[3]{1+x^2} \cdot x dx = \int \sqrt[3]{t} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8} t^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8} (1+x^2)^{\frac{4}{3}} + C$$

бўлади.

3-мисол. $\int \cos mx dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Бунда $dx = \frac{1}{m} d(mx)$ ўзгартириш олиб,

$$\int \cos mx dx = \frac{1}{m} \int \cos mx d(mx) = \frac{1}{m} \sin mx + C$$

натижага эга бўламиз. Бундай интеграллашга **бевосита интеграллаш** деб аталади. Чунки $mx=t$ билан ўзгарувчини алмаштириб ҳам шу натижага

келиш мумкин эди. Юқоридаги интегралда ўзгарувчини алмаштириб ўтирмасдан уни фикрда бажардик.

4-мисол. $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x}$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $\ln x = t$ билан янги ўзгарувчини алмаштириб, $\frac{dx}{x} = dt$

эканлигини ҳисобга олсак,

$$\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3 \cdot dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{(\ln x)^4}{4} + C$$

бўлади.

5-мисол. $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $x = t^2$ билан янги ўзгарувчи киритамиз охири тенгликдан дифференциал топиб, $dx = 2tdt$ бўлганлиги учун,

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\sin t}{t} 2tdt = 2 \int \sin t dt = -2 \cos t + C = -2 \cos \sqrt{x} + C$$

бўлади. —

6-мисол. $\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $\cos x dx = d(\sin x)$ ни ҳисобга олиб,

$$\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C$$

натижага келамиз.

Шундай қилиб, оддий ҳолларда

$$x dx = \frac{1}{2} d(x^2), \quad \cos x dx = d(\sin x), \quad \frac{dx}{x} = d(\ln x), \quad dx = \frac{1}{a}(ax + b), \dots$$

тенгликлардан фойдаланиб, ўзгарувчини алмаштиришни фикрда бажариб, бевосита интеграллаш ҳам мумкин.

2. Бўлаклаб интеграллаш. Бўлаклаб интеграллаш усули дифференциал ҳисобнинг иккита функция кўпайтмаси дифференциали формуласига асосланган.

Маълумки, $d(uv) = u dv + v du$, бундан $u dv = d(uv) - v du$. Охири тенгликни интеграллаб,

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du = uv - \int v du$$

натижага эга бўламиз. Шундай қилиб,

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (1)$$

формулани ҳосил қилдик. (1) формулага бўлаклаб интеграллаш формуласи дейилади.

Бу формула ёрдамида берилган $\int u dv$ интегралдан иккинчи $\int v du$ интегралга ўтилади. Демак, бўлаклаб интеграллашни қўллаш натижасида ҳосил бўлган иккинчи интеграл, берилган интегралга нисбатан соддароқ ёки

жадвал интегралли бўлгандагина бу усулни қўллаш мақсадга мувофиқдир. Бу мақсадга интеграл остидаги ифодани u ва dv кўпайтувчиларга қулай бўлаклаб олиш натижасида эришиш мумкин. Берилган интеграл остидаги ифоданинг бир қисмини u ва қолган қисмини dv деб олгандан кейин (1) формуладан фойдаланиш учун v ва du ларни аниқлаш керак бўлади. du ни топиш учун u нинг дифференциали топилиб, v ни топиш учун эса dv ифодани интегралаймиз, бунда интеграл ихтиёрий ўзгармас C га боғлиқ бўлиб, унинг исталган бир қийматини хусусий ҳолда $C = 0$ ни олиш мумкин.

Шундай қилиб, интеграл остидаги ифоданинг бир қисмини u деб олишда у дифференциаллаш билан соддалашадиган, қолган қисми dv бўлиб, қийинчиликсиз интегралланадиган бўлиши керак.

Бўлаклаб интеграллаш формуласи кўпроқ:

$$1) \int p(x)e^{ax} dx, \int p(x)\sin mx dx, \int p(x)\cos ax dx \quad \text{ва}$$

$$2) \int p(x)\ln x dx, \int p(x)\arcsin x dx, \int p(x)\arccos x dx, \int p(x)\arctg x dx, \int p(x)\operatorname{arcctg} x dx$$

(буларда $p(x)$ бирор даражали кўпхад) кўринишдаги интегралларни ҳисоблашда ишлатилади. Бу интегралларни ҳисоблашда 1) гуруҳ интегралларда u учун $p(x)$ кўпхад, қолган қисми dv учун олиниб, 2) гуруҳ интегралларда u учун мос равишда

$\ln x, \arcsin x, \arccos x, \arctg x, \operatorname{arcctg} x$ лар,

қолган қисми dv учун олинади.

Бўлаклаб интеграллашга бир неча мисоллар қараймиз.

1-мисол. $\int x \cos x dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Интеграл остидаги ифодани $u = x, dv = \cos x dx$ деб

Бўлакласак, $du = dx, v = \int \cos x dx = \sin x$ бўлиб, (1) формулага асосан,

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$u \quad dv \quad u \quad v \quad v \quad du$$

натижага эга бўламиз.

Бу интегралда (1) формуладан фойдаланиш натижасида иккинчи интеграл $\int \sin x dx$ ҳосил бўлди, бу жадвал интегралли бўлганлиги учун осонгина топилди.

2-мисол. $\int x^2 e^{3x} dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Юқорида эслатилганидек $u = x^2, dv = e^{3x} dx$ кўринишда бўлаклаб олсак,

$$du = 2x dx, v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int e^{3x} d(3x) = \frac{1}{3} e^{3x}$$

ҳосил бўлади. (1) формулага асосан

$$\int x^2 e^{3x} dx = x^2 \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} 2x dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx$$

бўлади. Охирги ҳосил бўлган интеграл берилган интегралга нисбатан соддалашди (берилган интегралда x нинг 2- даражаси, иккинчисиди бунинг даражаси биттага камайди). Кейинги интегралда яна (1) формулани қўлаймиз.

$$\int x e^{3x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = e^{3x}, \quad v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right| =$$

$$= x \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} e^{3x} + C_1 = \frac{1}{3} e^{3x} \left(x - \frac{1}{3} \right) + C_1.$$

Шундай қилиб, натижада

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \left[\frac{1}{3} e^{3x} \left(x - \frac{1}{3} \right) + C_1 \right] = \frac{e^{3x}}{3} \left(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{2}{9} \right) + C$$

ҳосил бўлади.

3-мисол. $\int x^3 \cos 2x dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Юқорида эслатилганидек эмас, тескарисини яъни $u = \cos 2x$, $dv = x^3 dx$ бўлаклаб олайлик; бу ҳолда

$$du = -2 \sin 2x dx, \quad v = \frac{x^4}{4} \text{ бўлиб (1) формуладан фойдалангандан}$$

кейин

$$\int x^3 \cos 2x dx = \cos 2x \cdot \frac{x^4}{4} + \int \frac{x^4}{4} \cdot 2 \sin 2x dx = -\frac{x^4}{4} \cos 2x +$$

$$+ \frac{1}{2} \int x^4 \sin 2x dx$$

ифода ҳосил бўлади. Кейинги $\int x^4 \sin 2x dx$ интеграл берилган $\int x^3 \cos 2x dx$ интегралга нисбатан мураккаброқдир (x нинг даражаси биттага ортди). Демак, бундай бўлаклаб олиш мақсадга мувофиқ эмас, яъни $u = x^3$, $dv = \cos 2x dx$ деб олиш керак эди. (Бу интегрални ҳисоблашни ўқувчига ҳавола қиламиз).

4-мисол. $\int \arccos x dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш.

$$\int \arccos x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arccos x, \quad du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = x \arccos x + \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 1-x^2 = t \\ -2x dx = dt \\ x dx = -\frac{dt}{2} \end{array} \right| = x \arccos x + \int \frac{-\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}} = x \arccos x - \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = x \arccos x - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} +$$

$$+ C = x \arccos x - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

Бу интегралда бир марта бўлаклаб интеграллагандан кейинги ҳосил бўлган интегралда ўзгарувчини алмаштириш усулидан фойдаланиб интегралладик. Интеграллаш усуллари қўллашда ўзгарувчини алмаштирганда ёки бўлаклаб интеграллаганда ёзувда тартиб бўлиши учун юқоридаги интегрални ҳисоблангандагидек ёзишга одат қилишни тавсия этилади.

5-мисол. $J = \int e^x \cos x dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Бўлаклаб интегралласак

$$J = \int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = \cos x, \quad du = -\sin x dx \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right| = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx,$$

ҳосил бўлади.

Кейинги интеграл, берилган интеграл билан ўхшашдек туюлади, лекин охириги интегралда бўлаклаб интеграллаш формуласини иккинчи марта қўллаш билан қуйидагига эга бўламиз:

$$\int e^x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = \sin x, \quad du = \cos x dx \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right| = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

Шундай қилиб,

$$J = e^x \cos x + e^x \sin x - J$$

J ҳисобланиши керак бўлган интегралга нисбатан оддий чизиқли тенгламага келдик. Охириги тенгламадан

$$2J = e^x \cos x + e^x \sin x \quad \text{ёки} \quad J = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C$$

натижага эга бўламиз.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Чекли сондаги функциялар алгебраик йиғиндисининг аниқмас интегралли нимага тенг?
2. Ўзгарувчини алмаштириб интеграллашнинг моҳияти нима?
3. Бевосита интеграллаш нима?
4. Бўлаклаб интеграллаш усули нимага асосланади?
5. Бўлаклаб интеграллаш формуласини ёзинг?
6. Бўлаклаб интеграллаш қандай ҳолда мақсадга мувофиқ бўлади?
7. Қандай ҳолларда бўлаклаб интеграллашдан фойдаланилади?

Мустақил бажариш учун топшириқлар

Ушбу интегралларни ҳисобланг.

1. $\int \sin 3x dx$.
2. $\int \frac{2x-7}{x^2-7x+5} dx$.
3. $\int e^{-x^3} x^2 dx$.
4. $\int \frac{x^2}{1+x^3} dx$.
5. $\int (e^x + e^{-\frac{x}{2}}) dx$.
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$.
7. $\int (5-2x)^9 dx$.
8. $\int \sqrt[3]{7-3x} dx$.
9. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{6-x}} dx$.
10. $\int \cos(1-3x) dx$.
11. $\int \sin(5x+7) dx$.
12. $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$.
13. $\int 3^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.
14. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$.
15. $\int \frac{1-3\sin x}{\cos^2 x} dx$.
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-5x}}$.
17. $\int x^2 \sin x dx$.
18. $\int x \ln x dx$.
19. $\int \arctg x dx$.
20. $\int \arcsin x dx$.
21. $\int x^2 e^{2x} dx$.
22. $\int e^x \sin x dx$.
23. $\int (x+3) \sin x dx$.
24. $\int x \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$.
25. $\int x \arctg x dx$.
26. $\int \frac{dx}{(3x+1)^3}$.
27. $\int \frac{2x+5}{x^2+5x+6} dx$.

Мавзу. Рационал ва иррационал функцияларни интеграллаш

Режа

1. Рационал каср функцияларни интеграллаш;
2. Тўғри ва нотўғри каср рационал функциялар ҳақида;
3. Тўғри каср рационал функцияларни содда касрлар кўринишида ифодалаш ва уларни интеграллаш;
4. Тўғри каср рационал функцияларни содда касрлар кўринишида ифодалаш.
5. Айрим иррационал функцияларни интеграллаш.

Таянч ибора ва тушунчалар

Каср рационал функциялар, тўғри ва нотўғри каср рационал функциялар, кўп ҳадни кўп ҳадга бўлиш, содда касрлар, рационал функция ёйилмаси, номаълум коэффицентлар усули, иррационал функциялар.

1. Рационал каср функцияларни интеграллаш. 1). Тўғри ва нотўғри каср рационал функциялар ҳақида. Юқорида кўрсатилган интеграллаш усуллари ёрдамида ҳамма интегралларни ҳисоблаш мумкин деб бўлмайди.

Шундай функциялар синфлари борки, улар учун муайян усуллардан фойдаланиб уларни жадвал интегралларига ёки интеграллаш усулларида фойдаланиш учун қулай ҳолга келтириш мумкин, шундай функция синфларидан айримларини қараймиз.

Маълумки, ҳар қандай рационал функцияни ушбу кўринишида ифодалаш мумкин, яъни

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}.$$

Суратдаги кўпҳаднинг даражаси махраждаги кўпҳад даражасидан кичик, яъни $m < n$ бўлса, берилган касрга тўғри каср рационал функция дейилади. Суратдаги кўпҳаднинг даражаси $m \geq n$ бўлса, нотўғри каср рационал функция дейилади. Каср нотўғри каср рационал функция бўлса, суратни махражга, кўпҳадни кўпҳадга бўлиш қондасига асосан бўлиб, унинг бутун қисмини ажратиб, уни бутун ва тўғри каср рационал функцияга

келтириш мумкин. Масалан, $\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - x}$ нотўғри каср рационал

функцияни, $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ кўп ҳадни $x^2 - x$ кўп ҳадга бўлиб,

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - x} = x + 4 + \frac{7x + 1}{x^2 - x}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Умумий ҳолда, $\frac{Q(x)}{P(x)}$ нотўғри каср рационал функция бўлса, уни

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{P(x)}$$

шаклда ифодалаш мумкин, бу ерда $T(x)$ бутун рационал функция, $\frac{R(x)}{P(x)}$ тўғри рационал каср функциядан иборат. $T(x)$ функцияни осонгина интеграллаш мумкин.

Шундай қилиб, нотўғри каср рационал функцияни интеграллашни, $\frac{R(x)}{P(x)}$ тўғри каср рационал функцияни интеграллашга келтирилади.

2). Тўғри каср рационал функцияларни содда касрлар кўринишида ифодалаш ва уларни интеграллаш

$$1) \frac{A}{x-a}; 2) \frac{A}{(x-a)^k} (k > 1 \text{ бутун сон}); 3) \frac{Ax+B}{x^2+px+q}; (\frac{p^2}{4} - q < 0$$

яъни, квадрат уч ҳад ҳақиқий илдизга эга эмас);

$$4) \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} (n > 1 \text{ бутун сон}, \frac{p^2}{4} - q < 0) \text{ рационал тўғри}$$

касрларга **содда каср рационал функциялар** дейилади. (A, B, p, q, a - ҳақиқий сонлар).

Биринчи икки хилдаги функцияларни осонгина интеграллаш мумкин, яъни,

$$1) \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C,$$

$$2) \int \frac{A}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$$

бўлади. Энди ушбу

$$3) \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$$

интегрални ҳисоблаймиз.

Олдин хусусий ҳол $\int \frac{1}{x^2+px+q} dx$ интегрални қарайлик. x^2+px+q дан

тўла квадрат ажратиб, $x + \frac{p}{2} = t$ алмаштиришдан кейин қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{1}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx = \left| x + \frac{p}{2} = t \right|_{dx = dt} = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)},$$

бу ерда $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Охирги интегралда 8) жадвал интегралидан фойдаланиб,

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C \quad (2)$$

натижани ҳосил қиламиз.

Энди $\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx$ интегрални ҳисоблаймиз.

$$Ax + B = (2x + p) \frac{A}{2} - \frac{Ap}{2} + B$$

шакл ўзгартиришдан фойдаланиб, интегрални қуйидагича ёзамиз.

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{(2x + p) \frac{A}{2} - \frac{Ap}{2} + B}{x^2 + px + q} dx = \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \int \frac{1}{x^2 + px + q} dx. \end{aligned}$$

Охирги тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи интеграл

$$\int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{d(x^2 + px + q)}{x^2 + px + q} = \ln|x^2 + px + q| + C_1$$

бўлиб, иккинчи интеграл (2) формулага асосан,

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C_2.$$

Шундай қилиб,

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \ln|x^2 + px + q| + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C$$

натижага эга бўламиз.

Бир неча мисоллар қараймиз.

1-мисол. $\int \frac{x^4}{x^2 + 9} dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Интеграл остидаги функция нотўғри каср рационал функциядан иборат. Унинг бутун қисмини ажратамиз:

$$\begin{array}{r|l}
 -x^4 & x^2+9 \\
 \hline
 x^4+9x^2 & x^2-9 \\
 \hline
 -9x^2 & \\
 -9x^2-81 & \\
 \hline
 81 &
 \end{array}$$

Демак, $\frac{x^4}{x^2+9} = x^2 - 9 + \frac{81}{x^2+9}$

бўлади.

Шундай қилиб,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^4}{x^2+9} dx &= \\
 &= \int \left(x^2 - 9 + \frac{81}{x^2+9} \right) dx = \frac{x^3}{3} - 9x + 81 \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C = \frac{x^3}{3} - 9x + 27 \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C.
 \end{aligned}$$

2-мисол. $\int \frac{x+3}{x^2-8x+25} dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Махраждаги квадрат уч ҳаддан тўла квадрат ажратамиз:
 $x^2 - 8x + 25 = x^2 - 8x + 16 - 16 + 25 = (x-4)^2 + 9$, ҳамда $x-4=t$, $dx=dt$
 алмаштириш киритиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int \frac{x+3}{x^2-8x+25} dx = \int \frac{t+4+3}{t^2+9} dt = \int \frac{tdt}{t^2+9} + 7 \int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{1}{2} \int \frac{2tdt}{t^2+9} + 7 \int \frac{dt}{t^2+3^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|t^2+9| + \frac{7}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{1}{2} \ln(x^2-8x+25) + \frac{7}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-4}{3} + C.$$

3. Тўғри каср рационал фунцияларни содда касрлар кўринишида ифодалаш.

$\frac{R(x)}{P(x)}$ тўғри каср рационал функциянинг махражини

$$P(x) = (x-a)^r \cdot (x-b)^s \dots (x^2+2px+q)^t \cdot (x^2+2kx+\ell)^m \dots,$$

кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, бу функцияни ягона

$$\begin{aligned}
 \frac{R(x)}{P(x)} &= \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x-a)^r} + \frac{B_1}{(x-b)} + \dots + \frac{B_s}{(x-b)^s} + \dots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+2px+q} + \dots + \\
 &+ \frac{M_tx+N_t}{(x^2+2px+q)^t} + \frac{F_1x+E_1}{(x^2+2kx+\ell)} + \dots + \frac{F_mx+E_m}{(x^2+2kx+\ell)^m} + \dots
 \end{aligned} \quad (1)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда $r, s, \dots, t, m$, мусбат бутун сонлар, a, b, p, q, k, ℓ , ҳақиқий сонлар.

$A_1, A_2, \dots, A_r, B_1, \dots, B_s, M_1, N_1, \dots, M_t, N_t, \dots$ лар айрим ҳақиқий сонлар.
(1) тенгликка тўғри рационал функциянинг содда касрлар орқали ёйилмаси дейилади.

(1) ёйилмадаги $A_1, A_2, \dots, A_r, M_1, N_1, \dots, M_t, N_t, \dots$ коэффициентларни топиш учун уни $P(x)$ га кўпайтирамиз. $R(x)$ кўпхад билан (1) ёйилманинг ўнг томонида ҳосил бўлган кўпхад ўзаро тенг бўлиши учун бир хил даражали x лар коэффициентлари ўзаро тенг бўлиши керак. Бир хил даражали x лар коэффициентларини тенглаштириб $A_1, A_2, \dots, A_r, \dots, M_1, N_1, \dots$, номаълум коэффициентларга нисбатан чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу тенгламалар системасини ечиб аниқмас коэффициентларни топамиз.

Рационал функция ёйилмасидаги номаълум коэффициентларни бундай усул билан топишга номаълум коэффициентлар усули дейилади.

Бу усулни бир неча мисолларда қараймиз.

1-мисол. $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$ рационал функцияни содда касрлар ёйилмаси кўринишида ёзинг.

Ечиш. Махражни $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$ чизиқли кўпайтувчиларга ажратиб, (1) формулага асосан, қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x-2}.$$

Охирги тенгликни x^2-5x+6 га кўпайтириб $2x-1 = A_1(x-2) + A_2(x-3)$ ёки $2x-1 = (A_1+A_2)x - 2A_1 - 3A_2$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бир хил даражали x лар коэффициентларини тенглаштириб

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2, \\ -2A_1 - 3A_2 = -1 \end{cases}$$

A_1 ва A_2 номаълумларга нисбатан, чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қилдик. Бундан $A_1 = 5, A_2 = -3$ бўлади. Шундай қилиб,

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{5}{x-3} - \frac{3}{x-2}$$

ҳосил бўлди.

2-мисол. $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$ рационал касрни, содда касрлар йиғиндиси кўринишида ёзинг.

Ечиш. (1) формулага асосан, қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Охирги тенгликни $x(x^2 + 1)^2$ га кўпайтириб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x^2 - 1 = A_1(x^2 + 1)^2 + (M_1x + N_1)x(x^2 + 1) + (M_2x + N_2)x \quad \text{ёки}$$

$$x^2 - 1 = (A_1 + M_1)x^4 + N_1x^3 + (2A_1 + M_1 + M_2)x^2 + (N_1 + N_2)x + A_1$$

x^0, x^1, x^2, x^3, x^4 ларнинг коэффициентларини тенглаштириб

$$x^4 \div 2A_1 + M_1 = 0,$$

$$x^3 \div N_1 = 0,$$

$$x^2 \div 2A_1 + M_1 + M_2 = 1,$$

$$x^1 \div N_1 + N_2 = 0,$$

$$x^0 \div A_1 = -1$$

чиқиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу системадан $N_1 = 0, N_2 = 0, A_1 = -1, M_1 = 1, M_2 = 2$ бўлади. Шунинг учун ёйилма қуйидагича

$$\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

бўлади.

Энди бир неча интегралларни ҳисоблаймиз.

3-мисол. $\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)}$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $\frac{1}{(x-2)(x-3)}$ функцияни $\left(\frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3} \right)$ иккита содда касрнинг

айирмаси кўринишда ёзиш мумкин. Шунинг учун,

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-3)} dx = -\int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} \right) dx = -\ln|x-2| + \ln|x-3| + C = \ln \left(\frac{x-3}{x-2} \right) + C$$

бўлади.

4-мисол. $\int \frac{x-2}{x^3 + 2x^2} dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $\frac{x-2}{x^2(x+2)}$ интеграл остидаги тўғри рационал функцияни содда

касрлар йиғиндиси шаклида ёзамиз:

$$\frac{x-2}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2}$$

охирги тенгликни $x^2(x+2)$ га кўпайтириб,

$$x-2 = Ax(x+2) + B(x+2) + Cx^2 \quad \text{ёки} \quad x-2 = (A+C)x^2 + (2A+B)x + 2B$$

тенгликка эга бўламиз.

Энди x нинг бир хил даражалилари коэффициентларини тенглаштираш, куйидаги тенгламалар системаси ҳосил бўлади.

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A + C = 0 \\ x^1 & 2A + B = 1 \\ x^0 & 2B = -2 \end{array} \quad \text{бундан} \quad \begin{array}{l} A + C = 0 \\ 2A + B = 1 \\ B = -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} A = 1 \\ C = -1 \end{array}$$

бўлади. Шундай қилиб,

$$\frac{x-2}{x^2(x+2)} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{-1}{x+2}$$

Натижада

$$\int \frac{x-2}{x^3+2x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln|x| + \frac{1}{x} - \ln|x+2| + C = \frac{1}{x} + \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| + C$$

бўлади.

2. Айрим иррационал функцияларни интеграллаш. Иррационал функцияларни интеграллаш кўп ҳолларда ўзгарувчини алмаштириш билан рационал функцияларни интеграллашга келтирилади. Бундай иррационал функцияларнинг айримларини лараймиз.

1. $\int x^m(a+bx^n)^p$ кўринишдаги интегрални ҳисоблаш талаб этилсин, бунда m, n, p рационал сонлар, a ва b лар нўлдан фаркли ўзгармаслар.

1) p бутун сон бўлса, Ньютон биноми бўйича ёйиш билан интегралланади;

2) $\frac{m+1}{n}$ бутун бўлса, $a+bx^n = t^s$ алмаштириш орқали

рационаллаштирилади, бунда s p касрнинг махражи;

3) $\frac{m+1}{n} + p$ бутун бўлса, $ax^{-n} + b = t^s$ алмаштириш олиниб,

рационал функцияга келтирилади.

1-мисол. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Интегрални $\int x^{-2/3}(1+x^{1/3})dx$ кўринишида ёзиб,

$$m = -\frac{2}{3}, n = \frac{1}{3}, p = \frac{1}{2}, \frac{m+1}{n} = \frac{-2/3+1}{1/3} = \frac{1/3}{1/3} = 1$$

бўлганлиги учун $(1+x^{1/3}) = t^2$ алмаштириш олсак,

$$x^{1/3} = t^2 - 1, \frac{1}{3}x^{-2/3}dx = 2tdt, x^{-2/3}dx = 6tdt$$

бўлади. Буларни берилган интегралга қўйсак,

$$\int x^{-2/3} (1+x^{1/3})^{1/2} dx = \int t \cdot 6t dt = 6 \int t^2 dt = 6 \cdot \frac{t^3}{3} + C = 2(1+\sqrt[3]{x})^{3/2} + C$$

бўлади.

2-мисол. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0 (1+x^4)^{-1/4} dx$, $m=0$, $n=4$, $p=-\frac{1}{4}$

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \text{ (бутун) } \text{ бўлганлиги учун } x^{-4} + 1 = t^4 \text{ алмаштириш}$$

олсак, $x = (t^4 - 1)^{-1/4}$, $dx = -t^3 (t^4 - 1)^{-5/4} dt$, $\sqrt[4]{1+x^4} = t(t^4 - 1)^{-1/4}$

бўлади. Демак,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = - \int \frac{t^2 dt}{t^4 - 1} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{t-1} \right) dt - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C,$$

$t = \sqrt[4]{1+x^4}$ бўлганлиги учун,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + 1}{\sqrt[4]{1+x^4} - 1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt[4]{1+x^4} + C$$

бўлади.

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ кўринишдаги интегрални қараймиз.

Бундай кўринишдаги ифодаларни интеграллаш квадрат уч ҳаддан тўла квадрат ажратиш билан $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$ ёки $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}}$ жадвал интегралларидан бирига келтирилади.

3-мисол. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $x^2 + 2x + 5 = x^2 + 2x + 1 + 4 = (x+1)^2 + 4$ тўла квадрат ажратиб,
 $x+1 = u$ десак,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 4}} = \ln |u + \sqrt{u^2 + 4}| + C = \ln |(x+1) + \sqrt{x^2 + 2x + 5}| + C$$

бўлади.

3) $\int \frac{dx}{(x+\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ кўринишдаги интеграл, $\frac{1}{x+\alpha} = t$ алмаштириш

орқали 2. кўринишдаги интегралга келтирилади.

4-мисол. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $\frac{1}{x+1} = t$ билан алмаштирсак,

$$t(x+1) = 1, tx + t = 1, tx = 1, x = \frac{1-t}{t}, dx = -\frac{1}{t^2} dt$$

бўлиб,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}} &= \int \frac{t\left(\frac{-1}{t^2}\right)dt}{\sqrt{\left(\frac{1-t}{t}\right)^2 + 2\frac{1-t}{t} + 2}} = -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1-2t+t^2}{t^2} + \frac{2-2t}{t} + 2}} = \\ &= -\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t+t^2+2t}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \end{aligned}$$

бу жадвал интегралдир. (Охирги интегрални мустақил бажаришни ўқувчига ҳавола қиламиз).

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Бутун рационал функция нимадан иборат?
2. Каср рационал функциялар қандай?
3. Тўғри ва нотўғри каср рационал функциялар деб нимага айтилади?
4. Нотўғри каср рационал функцияни интеграллаш, тўғри рационал функцияни интеграллашга қандай қилиб келтирилади?
5. Содда каср рационал функциялар деб нимага айтилади?
6. Содда каср рационал функциялар қандай интегралланади?
7. Аникмас коэффициентлар усули нима?
8. Қандай функциялар синфига иррационал функциялар дейилади?
9. Иррационал функциялар қандай интегралланади?

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1. Ушбу рационал функцияларни интегралланг.

$$1) \int \frac{x^3}{x-3} dx; \quad 2) \int \frac{x^4}{x^2+25} dx; \quad 3) \int \frac{x-5}{(x-2)(x+4)} dx; \quad 4) \int \frac{2x+9}{x^2+x+2} dx;$$

$$5) \int \frac{x+2}{x^3-2x^2} dx; \quad 6) \int \frac{5x-1}{2x^2+x-3} dx; \quad 7) \int \frac{2x+5}{(x-4)(x+5)} dx; \quad 8) \int \frac{6x-7}{x^3-4x^2+4x} dx.$$

2. Ушбу иррационал функцияларни интегралланг.

$$1) \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-4x+1}} dx; \quad 2) \int \frac{2x-3}{\sqrt{8-2x-x^2}} dx; \quad 3) \int \frac{7x-5}{\sqrt{\sqrt{5+2x-x^2}}} dx;$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}}; \quad 5) \int \frac{\sqrt{x}+3}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} dx.$$

Мавзу. Тригонометрик функцияларни интеграллаш

Режа

1. Ҳархил аргументли синус ва косинуслар кўпайтмалари шаклидаги функцияларни интеграллаш.
2. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ кўринишдаги интегралларни ҳисоблаш.
3. Аниқмас интеграл ҳақида якуний мулоҳазалар.

Таянч ибора ва тушунчалар

Тригонометрик функцияларни интеграллаш, тригонометрик функциялар кўпайтмасини йиғиндига келтириш формулалари, синус ва косинус функциялар кўпайтмаси даражаларидан бирортаси тоқ, иккаласи ҳам жуфт ёки тоқ, аниқмас интеграл ҳақида якуний мулоҳазалар.

1. Ҳархил аргументли синус ва косинуслар кўпайтмалари шаклидаги функцияларни интеграллаш.

$$\int \sin mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \sin nx dx, \quad \int \cos mx \cos nx dx \quad (1)$$

кўринишдаги интегралларни ҳисоблаймиз. Мактаб курсидан маълум бўлган тригонометрик функциялар кўпайтмасини, йиғиндига келтириш

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)], \quad \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

формулалардан фойдаланиб, (1) кўринишдаги интегралларни

$$\int \sin ax dx, \quad \int \cos bx dx$$

интеграллардан бирига келтириб интегралланади.

1-мисол. $\int \sin 2x \cos 7x dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Юқоридаги формулаларнинг биринчисидан

$$\sin 2x \cos 7x = \frac{1}{2} [\sin(2x + 7x) + \sin(2x - 7x)] = \frac{1}{2} (\sin 9x - \sin 5x),$$

$$\int \sin 2x \cos 7x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 9x - \sin 5x) dx = \frac{1}{2} \int \sin 9x dx - \frac{1}{2} \int \sin 5x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} (-\cos 9x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} (-\cos 5x) + C = \frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{18} \cos 9x + C.$$

натижага эга бўламиз.

$$2\text{-мисол. } \int \cos 7x \cos 3x dx, \quad \int \sin 4x \sin 2x dx, \quad \int \sin 5x \cos 3x$$

интегралларни мустақил ҳисобланг.

2. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ кўринишдаги интегралларни ҳисоблаш. Бунда m, n лар бутун сонлар. Хусусий ҳолларда m ёки n сонлардан биронтаси 0 га тенг бўлиши ҳам мумкин.

1) m ёки n сонлардан биттаси тоқ бўлсин. Бу ҳолда интеграл рационал функцияларни интеграллашга келтирилади. Бунда интеграллаш моҳияти қуйидаги мисоллардан тушунарли бўлади.

$$3\text{-мисол. } \int \sin^3 x \cos^4 x dx \text{ интегрални ҳисобланг.}$$

Ечиш. $\sin x dx = -d(\cos x)$ ва $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ эканлигини ҳамда $\cos x = z$ алмаштириш киритиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^4 x dx &= \int \sin^2 x \cos^4 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x (-d \cos x) = \\ &= -\int (1 - z^2) z^4 dz = -\int (z^4 - z^6) dz = -\frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C. \end{aligned}$$

$$4\text{-мисол. } \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx \text{ интегрални ҳисобланг.}$$

Ечиш. $\sin x dx = -d \cos x$ бўлгани учун, $t = \cos x$ алмаштириш олсак,

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \sin x dx = \int \frac{1 - t^2}{t^2} (-dt) =$$

$$= -\int \frac{1}{t^2} dt + \int dt = \frac{1}{t} + t + C = \frac{1}{\cos x} + \cos x + C$$

бўлади.

Бу усулдан m ва n сонлардан биттаси тоқ ва мусбат бошқаси ихтиёрий ҳақиқий сон бўлганда ҳам фойдаланиш мумкин.

2). Энди m ва n сонлар иккаласи ҳам тоқ ёки жуфт ва мусбат бўлсин. Бундай ҳолларда

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

формулардан фойдаланиб, даражаларни пасайтириб, интегралланади.

6-мисол. $\int \sin^2 x \, dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Бу интегрални изоҳларсиз ҳисоблаймиз:

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx - \int \frac{\cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

7-мисол. $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Тригонометрик функцияларнинг даражаларини пасайтириш формуларидан фойдаланиб, лўйидаги натижага келамиз:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)^2 \, dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos^2 2x)(1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \, dx + \frac{1}{8} \int (\sin^2 2x \cos 2x) \, dx = \\ &= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) \, dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \, d \sin 2x = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{16} \frac{\sin^3 2x}{3} + C = \\ &= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C. \end{aligned}$$

3. Аниқмас интеграл ҳақида яқуний мулоҳазалар. Биз юқорида элементар функцияларни ўз ичига олган муҳим интеграллаш усулларини кўрдик. Лекин практикада фақат шу усуллардан айнан фойдаланамиз деган фикр бўлмаслиги керак. Бошқача қилиб айтганда, интеграл остидаги функциянинг берилишига қараб унга мос мулоҳазалардан фойдаланиш керак. Масалан,

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 6x - 4}{x^3 + 3x^2 - 4x + 5} \, dx &= \int \frac{d(x^3 + 3x^2 - 4x + 5)}{x^3 + 3x^2 - 4x + 5} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \\ &= \ln|x^3 + 3x^2 - 4x + 5| + C \end{aligned}$$

ёки

$$\int \frac{x \, dx}{x^2 + 3} = \frac{1}{2} \int \frac{2x \, dx}{x^2 + 3} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 3)}{x^2 + 3} = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 3| + C$$

интеграллашни бажариш мумкин.

Жуда кўп интегралларни ҳисоблашда айрим хусусий усуллардан фойдаланиб олдинги ҳисобланган интегралларга келтирилади. Шунинг учун практикада интеграллашда тайёр қўлланмалардан фойдаланиш ҳам мумкин. Масалан [Ю.А. Брычков, О.И.Маричев, А.П.Прудников. Таблицы неопределённых интегралов. М.: Наука 1986-192с].

Интеграллашнинг баён этилишидан маълумки интеграллаш техникаси дифференциаллашдан мураккаброкдир. Шунинг учун ҳам интеграллашда шундай кўникмалар керакки, бунга кўп сондаги мисолларни ечиш натижасида эришиш мумкин.

Маълумки дифференциал ҳисобда исталган элементар функциянинг ҳосиласини топиш мумкин эди ва у яна элементар функциялар билан ифодаланар эди. Интеграл ҳисобда эса масала бошқачароқ бўлиб, кўплаб

мисоллар келтириш мумкинки, интеграл $\left(e^{-x^2}, \frac{1}{\ln x}, \frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x} \right)$ остидаги функциянинг бошланғич функциялари мавжуд бўлишига қарамасдан, улар элементар функциялар орқали ифодаланмайди. Бундай интеграллар яхши ўрганилган ва улардан амалиётда фойдаланиш учун тайёр жадваллар, графиклар тузилган.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Тригонометрик функцияларнинг кўпайтмасини йиғиндига келтириладиган формулаларни ёзинг?

2. Қандай ҳолларда тригонометрик функциялар рационаллашади?

3. Қандай ҳолларда тригонометрик функцияларнинг тартибини пасайтириш билан интегралланади.

Мустақил бажариш учун топшириқлар

Ушбу интегралларни ҳисобланг.

1. $\int \sin 3x \sin 7x dx$. 2. $\int \sin 5x \cos 3x dx$. 3. $\int \sin x \sin 3x dx$.

4. $\int \sin 3x \cos 2x dx$. 5. $\int \cos 4x \cos 2x dx$. 6. $\int \sin 3x \cos x dx$.

7. $\int \sin x \cos^4 x dx$. 8. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$. 9. $\int \sin^2 5x dx$.

10. $\int \cos 7x \cos 3x dx$. 11. $\int \sin 4x \sin 2x dx$.

12. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$. 13. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx$. 14. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x}$.

15. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$. 16. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx$. 17. $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\cos^2 x} dx$.

18. $\int \sin^4 x dx$. 19. $\int \cos^4 x dx$. 20. $\int \sin^5 x dx$.

21. $\int \cos^5 x dx$. 22. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$. 23. $\int \sqrt[3]{\cos^2 x \sin^3 x} dx$.

АНИҚ ИНТЕГРАЛ

Мавзу. Аниқ интеграл ва унинг асосий хоссалари

Режа

1. Аниқ интегралга келтириладиган масалалар ҳақида.
2. Аниқ интегралнинг таърифи ва унинг геометрик маъноси.
3. Аниқ интегралнинг асосий хоссалари.
4. Аниқ интегрални ҳисоблаш. Ньютон-Лейбниц формуласи.

Таянч ибора ва тушунчалар

Ўзгарувчан кучнинг бажарган иши, аниқ интеграл, интеграл йиғинди, функциянинг интегралланувчанлиги, аниқ интегралнинг асосий хоссалари, аниқ интегралнинг катталиги, Ньютон-Лейбниц формуласи, аниқ интегралда ўзгарувчини алмаштириш, бўлаклаб интеграллаш.

1. Аниқ интегралга келтириладиган масалалар ҳақида. Аниқ интеграл математик таҳлилнинг энг асосий амалларидан биридир.

Юзаларни, ёй узунликларини, ҳажмларни, ўзгарувчан кучнинг бажарган ишини ҳамда иқтисоднинг бир қанча масалалари аниқ интегралга келтирилади.

Ўзгарувчан кучнинг бажарган иши масаласи

Масала. Материал нуқта F ўзгарувчан куч таъсирида OX ўқи бўйича ҳаракатланаётган бўлсин. F куч таъсирида материал нуқта a нуқтадан b нуқтага ўтганда бажарилган ишни ҳисобланг. F куч x нинг функцияси бўлади. $F(x)$ $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлсин.

Ечиш: $[a, b]$ кесмани $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ нуқталар орқали $[x_{i-1}, x_i]$ ўсимий кесмаларга ажратамиз.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{F}} \\ 0 \qquad a = x_0, \quad x_1, \dots, \quad x_n = b \qquad X \\ \text{1-чизма.} \end{array}$$

Механикадан маълумки куч ўзгармас бўлса, бажарилган иш $A = F \cdot l$, бунда F куч миқдори, l - силжиш узунлиги. Ҳар бир қисмий кесмада биттадан нуқта танлаймиз. Бу нуқталардаги кучнинг қийматини $F(c_i)$ ларни ҳисоблаймиз ($i = 1, n$). Бунда ҳар бир қисмий кесмада бажарилган иш

$$A_i = F(c_i) \Delta x_i$$

бўлади. $[a, b]$ кесмада бажарилган иш тақрибан

$$A \approx \sum_{i=1}^n F(c_i) \Delta x_i$$

бўлади.

$\max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i = \lambda$ деб белгиласак, бажарилган ишнинг аниқ қиймати

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(c_i) \Delta x_i \quad (1)$$

бўлади.

Шундай қилиб, F ўзгарувчан кўчнинг бажарган ишини ҳисоблаш учун (1) кўринишдаги чексиз кўп сондаги чексиз кичиклар йиғиндисининг лимитини ҳисоблаш керак экан. Бундай лимитни ҳисоблашга жуда кўп сондаги геометрик, техник, технологик ва иқтисодий жараёнлардаги масалалар келтирилади.

2. Аниқ интегралнинг таърифи ва унинг геометрик маъноси. Юқоридаги масалани умумий ҳолда қараймиз. кесмада узлуксиз функция берилган бўлсин. $[a, b]$ кесмани $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, n$ қисмий кесмаларга ажратамиз, ҳар бир қисмий кесмада биттадан $c_1, c_2, \dots, c_n$ нукталар танлаймиз. Бу нукталарда $f(c_i)$ функция қийматларини ҳисоблаб $f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n$ йиғиндини тузамиз? бу йиғиндига $y = f(x)$ функция учун $[a, b]$ кесмадаги интеграл йиғинди дейилади. $\max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i = \lambda$ белгилаш киритамиз.

Таъриф. $\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$ интеграл йиғиндининг $[a, b]$ кесманинг $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) қисмий кесмаларга бўлиниш усулига ва уларда $c_1, c_2, \dots, c_n$ нукталарнинг танланишига боғлиқ бўлмаган $\lambda \rightarrow 0$ даги чекли лимити мавжуд бўлса, бу лимитга $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмадаги аниқ интеграли дейилади ва

$$\int_a^b f(x) dx$$

символ билан белгиланади.

Таърифга асосан

$$\int_a^b f(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

бўлиб, $y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у интегралланувчи яъни бундай функциянинг аниқ интеграли мавжуддир.

3. Аниқ интегралнинг асосий хоссалари

Аниқ интеграл кўйидаги асосий хоссаларга эга:

1) чекли сондаги интегралланувчи функциялар алгебраик йиғиндисининг аниқ интегралли қўшилувчилар аниқ интегралларининг алгебраик йиғиндисига тенг, яъни

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_3(x) dx;$$

2) ўзгармас кўпайтувчини аниқ интеграл белгисидан чиқариш мумкин, яъни

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx;$$

3) $[a, b]$ кесмада $f(x) \geq 0$ бўлса,

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

бўлади;

4) $[a, b]$ кесмада $f(x) \leq g(x)$ тенгсизлик бажарилса,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

бўлади;

5) $c \in [a, b]$ кесмадаги бирор нуқта бўлса,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

тенглик ўринли бўлади;

6) m ва M сонлар $y = f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмадаги мос равишда энг кичик ва энг катта қийматлари бўлса,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

тенглик ўринли бўлади;

$$7) \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx;$$

$$8) \int_a^a f(x)dx = 0;$$

$$9) \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(n)dn$$

бўлади;

10) $y = f(x)$ $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, бу кесмада шундай бир c нуқта топиладики

$$\int_a^b f(x)dx = f'(c)(b-a)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бунга ўрта қиймат ҳақидаги теорема деб ҳам айтилади.

4. Аниқ интегрални ҳисоблаш. Ньютон-Лейбниц формуласи.

Аниқ интегралнинг таърифига асосан, яъни чексиз кўп сондаги чексиз кичиклар йиғиндисининг лимитини ҳисоблаш анча қийинчиликка олиб келади. Шунинг учун аниқ интегрални ҳисоблаш учун, бошқа аниқмас интеграл билан аниқ интеграл орасидаги боғланишга асосланган усулдан фойдаланилади.

$F(x), [a, b]$ кесмада узлуксиз $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияларидан бири бўлса

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (2)$$

формула ўринли бўлиб, бунга **Ньютон-Лейбниц формуласи** дейилади. Бундан фойдаланиб **аниқ интегралнинг катталиги** ҳисобланади.

Шундай қўйилиб, аниқ интегрални ҳисоблаш учун ҳам, аниқмас интегралдагидек, бошланғич функцияни топиш керак экан. Бундай масала билан аниқмас интегрални ҳисоблашда тўлароқ шуғулландик. Демак, аниқмас интегрални ҳисоблашдаги ҳамма формула ва усуллар ўз кучида қолиб, ундан аниқ интегрални ҳисоблашда ҳам фойдаланамиз.

1-мисол. $\int_1^4 x^2 dx$ интегрални ҳисобланг.

$$\text{Ечиш. } \int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21.$$

Эслатма: $y = x^2$ функциянинг $\frac{x^3}{3}$ бошланғич функциясини олдик,

бунинг ўрнига ихтиёрий $\frac{x^3}{3} + C$ бошланғич функциясини олганда ҳам натижа бир хил бўлади. Ҳақиқатан, ҳам

$$\left(\frac{x^3}{3} + C \right) \Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} + C - \left(\frac{1^3}{3} + C \right) = \frac{64}{3} + C - \frac{1}{3} - C = \frac{63}{3} = 21$$

бўлади. Шунинг учун бундан кейин $C = 0$ бўлган бошланғич функцияни оламиз.

2-мисол. $\int_0^5 x\sqrt{x+4} dx$ интегрални ҳисобланг:

Ечиш; $\sqrt{x+4} = t$ алмаштириш оламиз, $x = t^2 - 4$, $dx = 2tdt$ бўлиб, $x = 0$ бўлганда, $\sqrt{0+4} = t$, $t = 2$, $\sqrt{5+4} = t$, $t = 3$ бўлади.

Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} \int_0^5 x\sqrt{x+4} dx &= \int_2^3 (t^2 - 4)t \cdot 2tdt = \int_2^3 (2t^4 - 8t^2) dt = 2 \int_2^3 t^4 dt - 8 \int_2^3 t^2 dt = 2 \frac{t^5}{5} \Big|_2^3 - 8 \frac{t^3}{3} \Big|_2^3 = \\ &= \frac{2}{5} (3^5 - 2^5) - \frac{8}{3} (3^3 - 2^3) = \frac{2}{5} \cdot 211 - \frac{8}{3} \cdot 19 = \frac{506}{15} = 33 \frac{11}{15}. \end{aligned}$$

Демак, аниқ интегралда ўзгарувчини алмаштирилганда ўзгарувчилар бўйича унинг интеграллаш чегараларини ҳам алмаштириб олинса, аниқмас интегралдагидек олдинги ўзгарувчига қайтиш керак эмас.

3-мисол. $\int_0^{\pi} x \sin x dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш: Бўлаклаб интеграллаш

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b u dv$$

формуласидан фойдаланамиз:

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = \left. \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = -\pi(\cos \pi + \sin x \pi) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\pi(-1) + \sin \pi - \sin 0 = \pi.$$

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Қандай масалалар аниқ интегралга келтирилади?
2. Интеграл йиғинди қандай тузилади?
3. Аниқ интеграл деб нимага айтилади?
4. Аниқ интеграл қандай белгиланади?
5. Функция интегралланувчи бўлиши учун қандай хоссага эга бўлиши керак?
6. Аниқ интегралнинг асосий хоссалари нималардан иборат?
7. Ньютон-Лейбниц формуласини ёзинг?
8. Аниқ интегрални бўлаклаб интеграллаш нимадан иборат?

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1. $\int_2^4 (x^3 + x) dx$.
2. $\int_1^e \frac{1}{x} dx$.
3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^2 t}$.
4. $\int_4^9 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$.
5. $\int_{-5}^2 \frac{dx}{x^2 + 4x - 21}$.
6. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}$.
7. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}$.
8. $\int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx$.
9. $\int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$.
10. $\int_{\pi}^0 x \cos x dx$.

Мавзу. Аниқ интегралнинг татбиқлари

Режа

1. Аниқ интеграл ёрдамида ясси фигуралар юзларини ҳисоблаш.
2. Эгри чизик ёйи узунлигини ҳисоблаш.
3. Айланма жисм ҳажмини ҳисоблаш.
4. Аниқ интегралнинг иқтисодиётга татбиқлари.

Таянч ибора ва тушунчалар

Юзаларни ҳисоблаш, эгри чизикли трапеция, эгри чизик ёйининг узунлиги, айланма жисм ҳажми, ўзгарувчан кучнинг бажарган иши, ишлаб чиқаришнинг меҳнат унумдорлиги, маҳсулотлар (товарлар) захираси, маҳсулот ишлаб чиқариш ҳажми, даромад функцияси,

1. Аниқ интеграл ёрдамида ясси фигуралар юзларини ҳисоблаш

$y = f(x)$ функция графиги, $x = a$, $x = b$ иккита тўғри чизиклар ва OX ўқи билан чегараланган фигурага эгри чизикли трапеция дейилади.

Бундай эгри чизикли трапециянинг юзи

$$S = \int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

формула билан ҳисобланади (1-чизма)

Умумий ҳол, яъни $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, $f_2(x) \geq f_1(x)$ чизиклар билан чегараланган юза

$$S_1 = \int_{x_1}^{x_2} [f_2(x) - f_1(x)] dx \quad (2)$$

аниқ интегралга тенг бўлади .

$x = \varphi(y)$, $y = c$, $y = d$, $x = 0$ чизиклар билан чегараланган юза

$$S_2 = \int_c^d x dy = \int_c^d \varphi(y) dy \quad (3)$$

аниқ интеграл билан ҳисобланади.

Эгри чизик параметрик

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

тенглама билан берилган бўлса, юза

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t) dt \quad (4)$$

формула бўйича ҳисобланади.

4-мисол. $xy = 8$, $x = 1$, $x = e$, $y = 0$ чизиклар билан чегараланган юзани ҳисобланг

Ечиш. $y = \frac{8}{x}$ бўлиб, (3) формулага асосан,

$$S_1 = \int y dx = \int \frac{8}{x} dx = 8 \ln x \Big| = 8(\ln e - \ln 1) = 8.$$

5-мисол. $y = x^2, y^2 = x$ чизиклар билан чегараланган юзани топинг.

$$\text{Ечиш: } \begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = x \end{cases}$$

тенгламалар системасидан $x^4 = x, x^4 - x = 0, x_1 = 0; x_2 = 1$ кесишиш нуқталарининг абсциссалари бўлиб, бу юза

$$S = \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2] dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \left(\frac{2}{3} - 0 \right) - \left(\frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{1}{3}$$

бўлади.

6-мисол. Эллипснинг

$$\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 2 \sin t \end{cases}$$

параметрик тенгламасидан фойдаланиб унинг юзини топинг.

Ечиш. Эллипс координат ўқларига нисбатан симметриклигидан фойдаланиб, ҳамда $x = 3 \cos t$ тенгламада $x = 0, x = 3$ бўлганда $t_1 = \frac{\pi}{2}, t_2 = 0$

бўлганлигини ҳисобга олиб,

$$S = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 y dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin t (-3 \sin t) dt = 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt =$$

$$= 12 t_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{12}{2} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 12 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - 6(\sin \pi - \sin 0) = 6\pi.$$

2. Эгри чизик ёйи узунлигини ҳисоблаш. Тўғри бурчакли координатлар системасида $y = f(x)$ $[a, b]$ кесмада силлиқ (яъни $y = f(x)$ ҳосила узлуксиз) бўлса, бу эгри чизик ёйининг узунлиги

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (5)$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

Эгри чизик параметрик тенглама

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

билан берилган бўлса, ёй узунлиги

$$l = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

аниқ интеграл билан ҳисобланади.

Силлиқ эгри чизик кутб координаталарида $r = r(\varphi)$, $(\alpha \leq \varphi \leq \beta)$ тенглама билан берилган бўлса, ёй узунлиги

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi \quad (6)$$

формула билан ҳисобланади.

7-мисол. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

астроида ёйининг узунлигини топинг.

Ечиш: Астроида координат ўқларига нисбатан симметрик бўлганлиги учун $1/4$ ёй узунлигини топамиз.

Ошкормас функция ҳосиласига асосан

$$\frac{2}{3x^{-1/3}} + \frac{2}{3y^{-1/3}} y' = 0 \quad \text{бундан,} \quad y' = -\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}}. \quad \text{Ёй узунлиги формуласига}$$

асосан,

$$\begin{aligned} l &= 4 \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2} dx = 4 \int_0^a \sqrt{1 + (\sqrt[3]{y} / \sqrt[3]{x})^2} dx = \\ &= 4 \int_0^a \sqrt{\frac{a^{2/3}}{x^{2/3}} + 1} dx = 4 \int_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}} dx = 4 \sqrt[3]{a} \int_0^a x^{-1/3} dx = 4 \sqrt[3]{a} \left. \frac{x^{2/3}}{2/3} \right|_0^a = 4 \frac{3}{2} \sqrt[3]{a} \cdot \left(a^{2/3} - 0 \right) = 6a. \end{aligned}$$

3. Айланма жисм ҳажмини ҳисоблаш

$y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ чизиклар билан чегараланган фигуранинг OX ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (7)$$

аниқ интеграл билан ҳисобланади.

$x = \varphi(y)$, $y = c$, $y = d$, $x = 0$ чизиклар билан чегараланган фигуранинг OY ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy \quad (8)$$

формула билан ҳисобланади.

8-мисол. $y^2 = 2x$ парабола, $x = 3$ тўғри чизик ва OX ўқи билан чегараланган фигуранинг OX ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини ҳисобланг.

Ечиш. Масала шартига кўра x о дан 3 гача ўзгаради. Демак,

$$V_x = \pi \int_0^3 y^2 dx = \pi \int_0^3 2x dx = \pi x^2 \Big|_0^3 = \pi(3^2 - 0^2) = 9\pi.$$

9-мисол. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсининг ОУ ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

Ечиш. Бундай жисмга айланма эллипсоид дейилади. Эллипс тенгламасидан

$$x^2 = a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad \text{бўлиб, интегралнинг чегаралари } c = -b, d = b$$

бўлади. (8) формулага асосан,

$$V_y = \pi \int_{-b}^b a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) dy = \pi a^2 \int_{-b}^b dy - \frac{\pi a^2}{b^2} \int_{-b}^b y^2 dy = \pi a^2 y \Big|_{-b}^b - \pi \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-b}^b =$$

$$= \pi a^2 [b - (-b)] - \pi \frac{a^2}{3b^2} [b^3 - (-b)^3] = 2\pi a^2 b - \frac{2}{3} \pi a^2 b = \frac{4}{3} \pi a^2 b.$$

$$\text{Демак, } V_y = \frac{4}{3} \pi a^2 b$$

$a = b = R$ бўлса, шар ҳосил бўлиб $V_{ш} = \frac{4}{3} \pi R^3$ бўлади.

4. Аниқ интегралнинг иқтисодиётга татбиқлари

Энди аниқ интегралнинг иқтисодиётга татбиқларини қараймиз. 1). Маълумки, меҳнат унумдорлиги иш куни мобайнида ўзгарувчи миқдордир. Меҳнат унумдорлиги $y = f(x)$ функция билан ифодалансин, бунда x иш кунининг бошланишидан ҳисобланган вақт оралиғи, $f(x)$ эса вақтнинг шу ондаги (моментидаги) меҳнат унумдорлигини билдиради. Меҳнат унумдорлигининг иш кунининг 4-соатидаги ҳажмини ҳисоблаш масаласи кўйилган бўлсин.

Вақтнинг (3,4) оралиғини энг каттасининг узунлиги Δx бўлган оралиқларга бўламиз ва $f(x)$ функция бу кичик оралиқларда ўзгармас десак ишлаб чиқариш меҳнат унумдорлигини $f(x) \Delta x$ кўпайтмага тенг бўлади. Шундай қилиб, иш кунининг 4-соатидаги ишлаб чиқариш меҳнат унумдорлиги

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_3^4 f(x) \Delta x = \int_3^4 f(x) dx$$

тенглик билан ифодаланади.

2). Маҳсулотлар омборига вақт бирлигида келтириладиган маҳсулот миқдорини $f(x)$ ва маҳсулот омборга келиб тушушидан

бошланган вақт бирлиги x бўлса, x дан $x + \Delta x$ вақт оралиғидаги омборга $f(x) \Delta x$ бирлик маҳсулот келади. Демак, омборга маҳсулот узлуксиз келиб турса, ундаги товарнинг захираси

$$\int_0^x f(x) dx$$

билан ифодаланади.

3). Машинасозлик саноати бирор хилдаги станокларни ишлаб чиқаради ва йиллик ишлаб чиқариши ўзгармас a га тенг бўлиб, x шу станоклар ишлаб чиқарилган йиллар бўлсин.

Вақтнинг t ондаги (моментидаги) станоклар сони (улар ишдан чиқмаган деб олинади).

$$\int_0^t a dx = [ax]_0^t = at$$

бўлади. Агар маҳсулот ишлаб чиқариш ҳажми арифметик прогрессия бўйича ўсувчи яъни

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$

бўлса, станоклар сони

$$\int_0^t (a_0 + a_1 x) dx = \left[a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} \right]_0^t = a_0 t + \frac{a_1 t^2}{2}$$

ташқил этади.

4). Йиллик даромад t вақтнинг функцияси $D = f(x)$ бўлсин.

Процент (фоиз) меъёри улуши i бўлиб, фоизлар устига қўшиб узлуксиз ҳисобланади. Даромаднинг t йилга ҳисобланган дисконтли ҳажмини топинг. Дисконт деб охири жами маблағ билан бошланғич маблағ орасидаги фарққа айтилади.

Бу миқдорни ҳисоблаш учун, вақт оралиғи t ни n та тенг бўлақларга ажратамиз. Вақтнинг жуда ҳам кичик Δt оралиғида даромадни ўзгармас деб $f(t) \Delta t$ га тенг қилиб олиш мумкин. Узлуксиз устига қўшиб ҳисобланган фоизларда дисконтли даромад қуйидагича ҳисобланади:

$$\frac{f(t) \Delta t}{e^{it}} = f(t) \Delta t e^{-it}.$$

$(0, t)$ вақт оралиғидаги дисконтли даромад миқдори

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_0^t f(t) e^{-it} \Delta t = \int_0^t f(t) e^{-it} dt$$

бўлади.

Хусусий ҳолда, йиллик даромад ўзгармас бўлса, яъни $f(x) = a$ бўлса, дисконтли даромад

$$d = \int_0^t a e^{-it} dt = a \int_0^t f e^{-it} dt = a \left[-\frac{1}{i} e^{-it} \right]_0^t = \frac{a}{i} (1 - e^{-it})$$

бўлади.

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1. Қўйидаги чизиклар билан чегараланган фигураларнинг юзларини ҳисобланг.

1) $y = x^2 - 6x + 8$, $y = 0$; 2) $x = 4 - y^2$, $x = 0$; 3) $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$;

4) $y = \frac{x^2}{2}$ парабола, $x = 1$, $x = 3$ тўғри чизиклар ва OX ўқи билан чегараланган;

5) $x = 2 - y^2 - y^2$, $x = 0$; 6) $y = 2 - x^2$, $y = x^2$;

7) $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$; 8) $x = 3t^2$, $y = t^3 - t^3$.

2. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ чизиклар билан чегараланган фигуранинг OX ўқи атрофида айланишдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

3. 1) $y^2 = (x + 4)^3$ ва $x = 0$ чизиклар билан чегараланган фигуранинг OY ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

2) $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$ чизиклар билан чегараланган фигуранинг OY ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Аниқ интеграл ёрдамида қандай юзаларни ҳисоблаш мумкин?
2. Эгри чизик ёйининг узунлиги қандай формула ёрдамида ҳисобланади?
3. Айланма жисм ҳажмини ҳисоблаш формуласи нимадан иборат?
4. Ўзгарувчан кучнинг бажарган иши аниқ интеграл ёрдамида қандай ҳисобланади?
5. Меҳнат унумдорлиги функцияси нима?
6. Ишлаб чиқариш меҳнат унумдорлигини аниқ интеграл ёрдамида ҳисоблаш мумкинми ва қандай?
7. Омборга келтирилган маҳсулотлар миқдорини аниқ интеграл ёрдамида қандай ҳисобланади?
8. Маҳсулот ишлаб чиқариш арифметик прогрессия бўйича ўсувчи бўлса, унинг ҳажми аниқ интеграл ёрдамида қандай ҳисобланади?
9. Йиллик даромад функцияси нима?
10. Дисконтли даромад нима ва у аниқ интеграл ёрдамида қандай ҳисобланади.

Мавзу. Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш. Хосмас интеграллар

Режа

1. Трапециялар формуласи.
2. Симпсон формуласи.
3. Хосмас интеграллар.

Таянч ибора ва тушунчалар: Тақрибий ҳисоблаш, трапециялар формуласи, Симпсон формуласи, ҳисоблаш хатоси, параболик трапеция, хосмас интеграл, чексиз оралиқ бўйича интеграл, хосмас интеграл яқинлашувчи, хосмас интеграл узоклашувчи, чегараланмаган функциянинг чекли оралиқ бўйича хосмас интегралли.

Ҳисоблаш амалиётида кўпинча бошланғич функциялари элементар бўлмаган, яъни чекли кўринишда ифодаб бўлмайдиган функциялардан олинган интеграллар билан, шунингдек, жадвал ёки график усулда берилган функциялардан олинган интеграллар билан иш кўришга тўғри келади. Бундай ҳолларда Ньютон - Лейбниц формуласини қўллаб бўлмайди ва интеграл тақрибий усуллар ёрдамида ҳисобланади.

Ҳисоблаш машиналарининг жадал тараққий этиб бориши натижасида аниқ интегралларни ҳисоблашнинг тақрибий усуллари кенг татбиқ қилинмоқда.

Интеграл остидаги функция элементар бошланғич функцияга эга бўлсада, бироқ, уни Ньютон - Лейбниц формуласи бўйича ҳисоблаш мураккаб ва катта ҳажмдаги ҳисоблаш ишларини талаб этадиган ҳолларда ҳам тақрибий ҳисоблаш усуллари афзал бўлади.

Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблашнинг бир неча усуллари мавжуд бўлиб улардан кўпроқ ишлатиладиганлари трапециялар ва Симпсон усуллари.

1. Трапециялар формуласи

Трапециялар формуласи

$$\int_a^b f(x)dx$$

аниқ интегрални ҳисоблаш талаб этилсин $y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз $[a, b]$ кесмани $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ нуқталар орқали n та тенг қисмий кесмаларга ажратамиз. Функциянинг x_i нуқталаридаги $y_i = f(x_i)$ қийматларини ҳисоблаймиз ($i = 1, n$). $[x_{i-1}, x_i]$ қисмий кесмаларнинг узунлиги $\frac{(b-a)}{n}$ катталик интеграллаш қадами дейилади. Бўлиниш нуқталаридан $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ ординатларни ўтказамиз.

Ординатлар охирларини тўғри чизиклар билан туташтириб трапециялар ҳосил қиламиз.

Аниқ интегралнинг тақрибий қиймати учун, ҳосил бўлган трапециялар юзларининг йиғиндисини оламиз. Бу ҳолда

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot \frac{b-a}{n} + \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot \frac{b-a}{n} + \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot \frac{b-a}{n} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot \frac{b-a}{n}$$

Шундай қилиб, натижада

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} \right] \quad (1)$$

формулани оламиз. (1) формулага **трапециялар формуласи** деб аталади. Бу формулада эгри чизикли трапецияларнинг юзларини тўғри чизикли трапециялар юзлари билан тақрибан алмаштирдик. n ўсиб бориши билан тўғри чизикли трапецияларнинг юзи эгри чизикли трапециялар юзларига чексиз яқинлашиб боради.

Бу тақрибий ҳисоблашда йўл қўйилган **абсолют хато**.

$$M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

ифодадан катта эмаслигини кўрсатиш мумкин, бунда M_2 , $|f''(x)|$ нинг $[a, b]$ кесмадаги энг катта қиймати.

2. Симпсон формуласи. $[a, b]$ кесмани $n = 2m$ та жуфт миқдордаги тенг қисмларга бўламиз. Учта (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) нуқталар олиб улардан парабола ўтказамиз. Бу парабола билан $y = f(x)$ функциянинг $[x_0, x_2]$ кесмадаги графигини алмаштирамыз. Худди шунга ўхшаш $y = f(x)$ функциянинг графигини $[x_2, x_4]$, $[x_4, x_6]$ ва бошқа кесмаларда ҳам алмаштирамыз.

Шундай қилиб, бу усулда берилган $y = f(x)$ эгри чизик билан чегараланган трапециянинг юзини $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, $[x_4, x_6]$, кесмаларда параболалар билан чегараланган эгри чизикли трапециялар юзларининг йиғиндисини билан алмаштиради. Бундай эгри чизикли трапеция **параболик трапеция** дейилади.

Параболик трапециялар юзларини қўшиб,

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m} [y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2})] \quad (2)$$

Бу формула **Симпсон (параболалар) формуласи** дейилади. Симпсон

формуласининг **абсолют хатоси** $M_4 \frac{(b-a)^5}{2880n^4}$ дан катта бўлмайди, бунда

M_4 , $|f^{(4)}(x)|$ функциянинг $[a, b]$ кесмадаги энг катта қиймати. Хатоларни

баҳолаш ифодаларидан маълумки n^4 катталиқ n^2 катталиқка нисбатан тезроқ ўсгани учун Симпсон формуласининг хатолиги трапециялар формуласи хатосига нисбатан анча тез камаяди.

1-мисол. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ аниқ интеграл трапециялар ва Симпсон

формулаларидан фойдаланиб тақрибий ҳисоблансин.

Ечиш. $[0,1]$ кесмани

$x_0 = 0, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, x_4 = 0.8, x_5 = 1$ нукталар ёрдамида 5 та тенг бўлакка бўламиз. Кейин $f(x) = e^{-x^2}$ функциянинг шу нукталардаги қийматларини ҳисоблаймиз.

$$f(x_0) = f(0) = e^0 = 1, \quad f(x_1) = f(0.2) \approx 0.96079,$$

$$f(x_2) = f(0.4) \approx 0.85214, \quad f(x_3) = f(0.6) \approx 0.69768,$$

$$f(x_4) = f(0.8) \approx 0.52729, \quad f(x_5) = f(1) \approx 0.36788.$$

Трапециялар формуласи бўйича

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{5} \left[\frac{1 + 0.36788}{2} + 0.96079 + 0.85214 + 0.69769 + 0.52729 \right] = 0.74805.$$

Симпсон формуласи бўйича, ҳисоблаш учун $[0,1]$ кесмани

$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1$ нукталар орқали 4 та тенг бўлақларга ажратамиз ва бу нукталарда функциянинг қийматлари

$$y_0 = 1, \quad y_1 = (0.25) \approx 0.9394, \quad y_2 = (0.5) \approx 0.7788,$$

$$y_3 = (0.75) \approx 0.5698, \quad y_4 = (1) \approx 0.3679$$

бўлади.

Симпсон формуласига асосан:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{12} [1 + 0.3679 + 4(0.9394 + 0.5698) + 2 \cdot 0.7788] \approx 0.7469$$

бўлади.

3. Хосмас интеграллар

Аниқ интегралнинг таърифида интеграллаш чегаралари чекли ва интеграл остидаги функция $[a, b]$ оралиқда чегараланган деб олинган эди. Бу шартлардан ҳеч бўлмаганда бирортаси бажарилмаса, интегралнинг юқоридаги таърифи маъносини йўқотади.

Бироқ назарий ва амалий мулоҳазаларга мувофиқ аниқ интегралнинг таърифи бу чекланишлар бажарилмайдиган ҳоллар учун ҳам умумлаштирилиши мумкин.

Бундай интеграллар бизга таниш бўлган аниқ интегралларга хос бўлмаган қисқача **хосмас интеграллар** деб айтилади.

Хосмас интегралларнинг икки асосий турини қараймиз:

1). Узлуксиз функцияларнинг чексиз оралик бўйича интеграллари. $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ ораликда берилган ва унинг исталган қисми $[a, +A]$ да интегралланувчи, яъни исталган $A > a$ да аниқ интеграл мавжуд бўлсин. Бу ҳолда

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx = J$$

лимитга $f(x)$ функциянинг $[a, \infty)$ ораликдаги **хосмас интеграл** дейилади ва қуйидагича белгиланади:

$$J = \int_a^{\infty} f(x) dx. \quad (1)$$

J лимит чекли бўлса, **хосмас интеграл яқинлашувчи** дейилади. Лимит мавжуд бўлмаса, **хосмас интеграл узоқлашувчи** дейилади.

$f(x)$ функциядан $(-\infty, a]$ оралик бўйича олинган хосмас интеграл ҳам худди юқоридагига ўхшаш аниқланади:

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x) dx. \quad (2)$$

$f(x)$ функциядан $(-\infty, +\infty)$ оралик бўйича олинган хосмас интеграл қуйидагича аниқланади.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx \quad (3)$$

бу ерда a исталган сон. (3) интегралларда ўнг томондаги иккала интеграл ҳам яқинлашса чап томондаги интеграл ҳам яқинлашувчи дейилади. Ўнг томондаги интеграллардан ақалли биттаси узоқлашса, чап томондаги интеграл ҳам узоқлашувчи бўлади.

Хосмас интегралларни ҳисоблаш учун Ньютон-Лейбниц формуласидан фойдаланилади. $F(x)$ функция $[a, +\infty)$ ораликда $f(x)$ учун бошланғич функция бўлса,

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} [F(A) - F(a)] = F(+\infty) - F(a) = F(x)$$

бўлиб, бу ерда: $F(+\infty) = \lim_{A \rightarrow \infty} F(A)$ интегралнинг яқинлашишини ёки

узоқлашишини аниқлайди.

1-мисол. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)}$ интегралнинг яқинлашишини текширинг.

$$\text{Ечиш: } \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x - \arctg 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Демак, интеграл яқинлашувчи ва $\frac{\pi}{4}$ га тенг.

$$\text{2-мисол. } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^A = \lim_{A \rightarrow \infty} (\ln A - \ln 1) = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln A = \infty$$

бўлиб, бу интеграл узоқлашувчи.

2). Чегараланмаган функцияларнинг чекли оралик бўйича хосмас интеграллари. $(a, b]$ интервалда узлуксиз ва $x = a$ да аниқланмаган ёки узилишга эга бўлган $f(x)$ функциянинг хосмас интеграл куйидагича белгиланиб аниқланади:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx \quad (4)$$

Охири лимит мавжуд бўлса, хосмас интеграл яқинлашувчи акс ҳолда узоқлашувчи дейилади. Бундай интегралларга 2-тур хосмас интеграл дейилади.

Интеграл остидаги $f(x)$ функция учун $F(x)$ бошланғич функция маълум бўлса, Ньютон - Лейбниц формуласини қўллаш мумкин:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x) \Big|_{a+\varepsilon}^b = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [F(b) - F(a + \varepsilon)] = F(b) - F(a).$$

Шундай қилиб, $x \rightarrow a$ да $F(x)$ бошланғич функциянинг лимити мавжуд бўлса, хосмас интеграл яқинлашувчи, мавжуд бўлмаса, хосмас интеграл узоқлашувчи бўлади.

$[a, b)$ интервалда $x = b$ нуқтада узилишга эга бўлган $f(x)$ функция хосмас интеграл куйидагича аниқланади, яъни

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x) \Big|_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [F(b - \varepsilon) - F(a)] = F(b) - F(a).$$

бунда $F(b)$, $F(x)$ бошланғич функциянинг $x \rightarrow b$ даги лимити.

$f(x)$ функция $[a, b]$ кесманинг бирор $x = c$ нуқтасида узилишга эга бўлса хосмас интеграл куйидагича аниқланади:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (5)$$

Ўнг томондаги интеграллардан ақалли биттаси узоқлашувчи бўлса, хосмас интеграл узоқлашувчидир. Ўнг томондаги иккала интеграл ҳам яқинлашувчи бўлса, чап томондаги хосмас интеграл яқинлашувчи бўлади.

3-мисол. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ интегралнинг яқинлашувчилигини текширинг.

Ечиш: $x \rightarrow 0$ да $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow \infty$ демак,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^4 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [2\sqrt{4} - 2\sqrt{\varepsilon}] = 2 \cdot 2 = 4.$$

Демак, $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ интеграл яқинлашувчи.

4-мисол. $\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ интегралнинг яқинлашувчилигини текширинг.

Ечиш: $x \rightarrow 0$ да $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \rightarrow +\infty$, $x = 0$ нукта $[-1, 8]$

кесманинг ички нуктаси. (5) формуладан фойдалансак,

$$\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^8 x^{-\frac{2}{3}} dx = 3\sqrt[3]{x} \Big|_{-1}^8 = 3\sqrt[3]{8} - 3\sqrt[3]{-1} = 0 + 3 + 6 = 9$$

бўлади. Демак, берилган хосмас интеграл яқинлашувчи.

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1. $\int_0^1 x^2 dx$ интегрални $n = 5$ бўлакка бўлиб, трапециялар

формуласи билан ҳисобланг. Унинг аниқ қиймати ва тақрибий қиймати фарқини баҳоланг.

2. $\int_1^2 \frac{dx}{1+x}$ интегрални $n = 10$ тенг бўлақларга бўлиб, трапециялар ва

Симпсон формулалари ёрдамида ҳисобланг иккала ҳолда ҳам хатоларни баҳоланг.

3. Қуйидаги интегралларнинг яқинлашувчилигини текширинг.

$$1) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3}; \quad 2) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x}; \quad 3) \int_0^{\infty} e^{-x} dx; \quad 4) \int_0^{\infty} x e^{-x^2}; \quad 5) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x}; \quad 6) \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx.$$

4. Қуйидаги интегралларнинг яқинлашувчилигини текширинг.

$$1) \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{(4-x)^2}}; \quad 2) \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}; \quad 3) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}; \quad 4) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}; \quad 5) \int_0^1 \frac{1}{x} dx; \quad 6) \int_1^e \frac{dx}{x \ln x}.$$

Мустахкамлаш учун саволлар

1. Қандай ҳолларда тақрибий ҳисоблаш усулларида фойдаланиш мумкин?
2. Трапециялар формуласи қандай ёзилади ?
3. Симпсон формуласини ёзинг.
4. Чегаралари чексиз бўлган интеграл қандай аниқланади ?
5. Хосмас интегралларнинг яқинлашувлиги ва узоқлашувчилиги нималардан иборат ?
6. Кесмада узулишга эга бўлган функциянинг интеграли қандай аниқланади?

КЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯЛАР

Мавзу. Кўп ўзгарувчили функциялар ҳақида умумий тушунчалар

Режа

1. Кўп ўзгарувчили функциялар ҳақида умумий тушунчалар.
2. Икки ва кўп аргументли функция лимити.
3. Икки ва кўп аргументли функциянинг узлуксизлиги ва узилиши.

Таянч ибора ва тушунчалар

Кўп ўзгарувчили функция, икки ўзгарувчили функция, икки ўзгарувчили функция аниъланиш ва ўзгариш соҳалари, аниъланиш соҳаси, ўзгариш соҳаси, берилиш усуллари, геометрик тасвири, лимити, узлуксизлиги ва узилиши.

1. Кўп ўзгарувчили функциялар ҳақида умумий тушунчалар

Табиат ва жамиятда жуда кўп масалалар борки ўзгарувчи миқдорлар боғланишларида биттасининг сонли қиймати бошқа бир нечасининг қиймати билан аниқланади. Масалан, томонларининг узунликлари x ва y дан иборат бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзи, унинг томонларининг узунликлари ўзгариши билан ўзгариб боради; параллелепипеднинг ҳажми унинг учала ўлчовининг ўзгариши билан ўзгаради; бирор ер майдонидан олинаётган ҳосилдорлик ернинг тузилишига, унга ўғит беришга, суғоришга, деҳқоннинг малакасига ва бошқа жуда кўп факторларга; сигирдан соғиб олинаётган сут миқдори, сигир зотига, унинг қандай ем-хашак билан боқилишига ва ҳақозоларга боғлиқ. Бундай мисолларни исталганча келтириш мумкин.

Бундай боғланишларни текишириш учун кўп ўзгарувчили (аргументли) функциялар тушунчасини киритамиз ва уларни текшириш аппарати амалларини ўрганамиз.

1-таъриф. R^2 фазода бирор D тўпламнинг бир-бирига боғлиқ бўлмаган x ва y ўзгарувчилари ҳар бир (x, y) ҳақиқий сонлари жуфтлигига бирор қоидага кўра E тўпламдаги битта z ҳақиқий сон мос қўйилган бўлса, D тўпламда икки x ва y ўзгарувчиларнинг функцияси z аниқланган дейилади. Икки ўзгарувчининг функцияси символик тарзда қуйидагича

белгиланади: $z = f(x, y)$, $z = F(x, y)$ (функция U *yoki* y билан ўзгарувчилар мос равишда x, t *yoki* x_1, x_2 лар билан белгиланган бўлса $U = f(x, t)$ *yoki* $y = f(x_1, x_2)$ тарзда ифодаланиши ҳам мумкин ва х.к.). Бунда x, y ўзгарувчиларга эркин ўзгарувчилар ёки аргументлар, Z га эркин ўзгарувчи ёки функция деб аталади.

D тўпламга функциянинг аниқланиш соҳаси, **E** тўпламга ўзгариш ёки қийматлар соҳаси дейилади. Ҳар бир жуфт ҳақиқий сонга бирор тайин координат системасида битта **M** нукта ва битта нуктага бир жуфт ҳақиқий сон мос келганлиги учун икки аргументли функцияни **M** нуктанинг функцияси ҳам деб қаралади, ҳамда $y = f(x_1, x_2)$ ўрнига $y = f(M)$ ҳам деб ёзиш мумкин.

Икки ўзгарувчилик функция берилиш усуллари ҳам, бир ўзгарувчилик функцияга ўхшаш ҳар хил бўлиши мумкин. Кўпроқ функциянинг аналитик усулда берилишини қараймиз. Масалан. 1) $z = x_1^2 + x_2^2$ бу функция аналитик усулда бўлиб, $O X_1 X_2$ текисликнинг ҳамма нукталари учун аниқланган.

Ўзгариш соҳаси $[0, +\infty)$ дан иборат бўлади. 2) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ функция аниқланган бўлиши учун $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ *yoki* $x^2 + y^2 \leq 4$ бўлиши керак, бундай нукталар тўплами маркази координатлар бошида радиуси 2 га тенг бўлган доирадан иборат. Қийматлар тўплами $[0, 2]$ бўлади.

3) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$ функция $x^2 + y^2 - 9 > 0$, яъни маркази координатлар бошида радиуси 3 га тенг бўлган доирадан ташқарида аниқланган. Қийматлар тўплами $(0, +\infty)$.

Икки аргументли функциянинг геометрик тасвири фазода тенгламаси $z = f(x, y)$ бўлган сиртни ифодалайди. Масалан: 1) $z = 2x + 3y - 12$ икки аргументли функция фазода $2x + 3y - z - 12 = 0$ текисликни тасвирлайди. 2) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сфера тенгламаси бўлиб, $z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ икки аргументли функциялар графиклари сферани ифодалайди.

2-таъриф. **D** тўпланининг ҳар бир (x_1, x_2, x_3) ҳақиқий сонлар учлигига бирор қоида бўйича **E** тўпландаги битта y ҳақиқий сон мос қўйилган бўлса, **D** тўпланда уч ўзгарувчининг функцияси аниқланган дейилади.

Бунда x_1, x_2, x_3 эркин ўзгарувчилар ёки аргументлар, y эса эркин ўзгарувчи ёки функция деб аталади. Уч ўзгарувчининг функцияси $y = f(x_1, x_2, x_3)$, $u = f(x, y, z)$, $u = A(x, y, z)$ ва х.к. белгиланади.

Геометрик нуктаи назардан тўғри бурчакли координатлар системасида ҳақиқий сонларнинг ҳар бир (x, y, z) учлигига фазонинг ягона $P(x, y, z)$ нуктаси мос келади ва аксинча. Шунинг учун уч ўзгарувчининг

функциясини $P(x, y, z)$ нуктанинг функцияси сифатида қараш мумкин. Шундай қилиб, $u = f(x, y, z)$ ўрнига, $u = f(P)$ деб ёзиш ҳам мумкин. Уч ўзгарувчили функция аниқланиш соҳаси R^3 фазонинг бирор нукталар тўплами ёки бутун фазо бўлиши мумкин. Масалан: $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$ функция аниқланиш соҳаси: $25 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$ ёки $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ шартда аниқланганлиги учун $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ сфера ва унинг ичида аниқланган.

Тўрт ўзгарувчили ва умуман n ўзгарувчили функцияга ҳам юқоридагидек таъриф бериш мумкин. Бундай функциялар мос равишда $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ *yoki* $u = f(x, y, z, t)$, $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ билан белгиланади.

Тўрт ва ундан ортиқ ўзгарувчига боғлиқ функцияларнинг аниқланиш соҳасини чизмаларда кўргазмали намойиш этиш мумкин эмас. Аммо, уни тасвирлаш мумкин бўлмаса y йўқ дейиш мумкин эмас. Масалан, тўртинчи ўзгарувчи фазодаги температура, бешинчиси зичлик ва ҳ.к бўлиши мумкин. Лекин, геометрик атамаларни давом эттириб n ўзгарувчининг функциясини бирор n ўлчовли фазо $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нуктасининг функцияси сифатида қараш мумкин.

2. Икки ва кўп аргументли функция limiti. $y = f(x)$ функция учун нуктанинг атрофи шу нуктани ўз ичига олган оралиқ бўлар эди. Икки аргументли $z = f(x, y)$ функция қаралганда нуктанинг δ атрофи дейилганда маркази $P_0(x_0, y_0)$ нуктада δ радиусли доиранинг ичида ётувчи барча $P(x, y)$ нукталар тушунилади.

Фазодаги нуктанинг δ атрофи ҳам шунга ўхшаш аниқланиб маркази $P_0(x_0, y_0, z_0)$ нуктада радиуси δ бўлган шарнинг ички нукталари бўлади.

n ўлчовли ($n > 3$) фазода $P_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нуктанинг δ атрофи шунга ўхшаш аниқланади.

1-таъриф. Икки ўзгарувчили $z = f(x, y) = f(P)$ функция P_0 нуктанинг бирор атрофида аниқланган бўлса (P_0 нуктада аниқланмаган бўлиши мумкин) ва ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ топилсаки $\rho(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $P(x, y)$ нукталар учун

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon \quad \text{yoki} \quad |f(P) - A| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, A ўзгармас сон $z = f(x, y)$ функциянинг $P \rightarrow P_0$ даги limiti дейилади, ва

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A \quad \text{yoki} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$$

билан белгиланади.

Лимитнинг таърифидан келиб чиқадики, A сон $z = f(x, y)$ функциянинг лимити бўлса, $|f(x, y) - A|$ айирма $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ да чексиз кичик миқдор бўлади. Уч ва ундан ортиқ ўзгарувчи функциясининг лимити ҳам юқоридагига ўхшаш аниқланади.

Бир неча ўзгарувчили функциянинг лимити 0 га тенг бўлса, бундай функцияга чексиз кичик функция ёки чексиз кичик миқдор дейилади.

$y = f(x)$ функция учун лимитлар ҳақидаги барча асосий теоремалар бир неча ўзгарувчининг функцияси учун ҳам ўринли эканлигини таъкидлаб ўтамиз.

1-мисол. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{y}$ лимитни ҳисобланг.

Ечиш. $P_0(2;0)$ нуктада $\frac{\sin xy}{y}$ функция аниқланмаган. Лимитнинг хоссаларидан

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} x \frac{\sin xy}{xy} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} x \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{xy} = 2 \cdot 1 = 2$$

чунки $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$.

3. Икки ва кўп аргументли функциянинг ўзлуксизлиги ва ўзилиши. 1-таъриф. $z = f(x, y) = f(P)$ функция $P_0(x_0, y_0)$ нуктада ҳамда унинг бирор атрофида аниқланган ва

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0) \text{ yoki } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

бўлса, яъни функциянинг $P_0(x_0, y_0)$ нуктадаги лимити функциянинг шу нуктадаги қийматига тенг бўлса, функция $P_0(x_0, y_0)$ нуктада ўзлуксиз дейилади.

Бу таърифга тенг кучли 2-таърифни ҳам келтирамиз.

$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ функциянинг $P_0(x_0, y_0)$ нуктадаги тўлиқ орттирмаси бўлсин.

2-таъриф. $z = f(x, y) = f(P)$ функция $P_0(x_0, y_0)$ нуктада ва унинг атрофида аниқланган бўлса, аргументларнинг Δx ва Δy чексиз кичик орттирмаларига функциянинг ҳам Δz чексиз кичик орттирмаси мос келса, яъни

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$$

бўлса, функция $P_0(x_0, y_0)$ нуктада ўзлуксиз дейилади.

3-таъриф. Ўзлуксизлик шартлари бажарилмаган нукталар **ўзилиш нукталари** дейилади. Икки ўзгарувчили функция ўзилиш нукталари бутун чизиқни ҳосил қилиши мумкин.

1-мисол. $z = x^2 + y^2$ функциянинг $P_0(2;3)$ нуктада узлуксизлигини кўрсатинг.

Ечиш: Бу нуктада функциянинг тўлиқ орттирмасини топамиз:

$$\Delta z = (2 + \Delta x)^2 + (3 + \Delta y)^2 - (2^2 + 3^2) = 2^2 + 2\Delta x + \Delta x^2 + 3^2 + 6\Delta y + \Delta y^2 - 2^2 - 3^2 = 2\Delta x + \Delta x^2 + 6\Delta y + \Delta y^2$$

$$2\text{-таърифга асосан } \lim \Delta z = \lim [2\Delta x + (\Delta x)^2 + 6\Delta y + \Delta y^2] = 2 \cdot 0 + 0 + 6 \cdot 0 + 0 = 0.$$

Шундай қилиб, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ да $\Delta z \rightarrow 0$. Демак, $P_0(2;3)$ нуктада берилган функция узлуксиздир. Бу ҳолатни исталган $P_0(x_0; y_0)$ учун кўрсатиш мумкин. (Бу ўқувчига ҳавола этилади). $z = f(x, y)$ функция бирор тўпламнинг ҳар бир нуктасида узлуксиз бўлса, унга бу тўпламда узлуксиз дейилади.

$$2\text{-мисол. } z = \frac{1}{x^2 - y^2} \text{ функциянинг узилиш нукталарини топинг.}$$

Ечиш. Функция координаталари $z^2 - y^2 = 0$ тенгламани қаноатлантирувчи нукталарда узилишга эга. Бу $y = x$ ва $y = -x$ тўғри чизиқлар бўлиб, бу тўғри чизиқларга тегишли ҳар бир нуктада функция узилишга эга бўлади.

Икки ўзгарувчининг узлуксиз функцияси ҳам бир ўзгарувчининг узлуксиз функцияси эга бўлган асосий хоссаларга эга бўлади. (Бу хоссаларни такрорлаш ўқувчига тавсия этилади).

Мустақил иш учун топшириқлар

1. Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳасини аниқланг ва унинг қандайлигини изоҳланг:

$$1) \quad u = \sqrt{1 - x^2 - 9y^2}; \quad 2) \quad u = \frac{1}{2x^2 + 3y^2}; \quad 3) \quad u = \ln(x + y);$$

$$4) \quad u = \sqrt{4 - x^2 + y^2 - z^2}; \quad 5) \quad z = \sqrt{xy}; \quad 6) \quad z = \frac{xy}{y - x}.$$

2. Қуйидаги лимитларни ҳисобланг.

$$1) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy}; \quad 2) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin(xy)}{x}.$$

3. Қуйидаги функцияларнинг исталган нуктада узлуксизлигини кўрсатинг.

$$1) \quad z = x - y; \quad 2) \quad z = x^2 + 3y^2; \quad 3) \quad u = x + y + 2z; \quad 4) \quad 2x^2 + 3y^2 + 2z^2.$$

4. Қуйидаги функцияларнинг узилиш нукталарини топинг.

$$1) \quad z = \frac{6}{x^2 - y^2 - 2}; \quad 2) \quad z = \frac{xy}{x^2 + y^2}; \quad 3) \quad z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}.$$

Мустахкамлаш учун саволлар

1. Кўп аргументли функциялар назариясига нималар олиб келади?
2. Қандай функцияларга икки аргументли функциялар дейилади?
3. Уч аргументли функция деб нимага айтилади?
4. 2 ва 3 аргументли функцияларнинг аниқланиш соҳалари нима?
5. Икки ва ундан кўп ўзгарувчили функциялар лимити деб нимага айтилади?
6. Нуқтанинг атрофи тушунчаси нима?
7. Икки ва ундан кўп ўзгарувчили функциялар лимити қандай хоссаларга эга?
8. Икки ва кўп аргументли функцияларнинг нуқтада узлуксизлигини таърифланг?
9. Икки аргументли функция қандай нуқталарда узилишга эга дейилади?
10. Қандай функциялар кесмада узлуксиз дейилади?

Мавзу. Икки ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосиласи ва тўла дифференциали

Режа

1. Икки ўзгарувчили функция хусусий ва тўла орттирмалари.
2. Икки ўзгарувчили функция хусусий ҳосилалари.
3. Тўла дифференциал.
4. Юқори тартибли хусусий ҳосилалар ва дифференциаллар.

Таянч ибора ва тушунчалар

Хусусий орттирма, хусусий ҳосила, тўла дифференциал, иккинчи тартибли хусусий ҳосила, иккинчи тартибли тўла дифференциал, таърибий ҳисоблаш.

1. 2-ўзгарувчили функция хусусий ва тўла орттирмалари.

1. 1-таъриф. $z = f(x, y)$ функцияда x ўзгарувчига бирор Δx орттирма бериб, y ни ўзгаришсиз қолдирсак, функция $\Delta_x z$ орттирма олиб, бу орттирмага z функциянинг x ўзгарувчи бўйича хусусий орттирмаси дейилади ва қуйидагича ёзилади:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Худди шундай, y ўзгарувчига Δy орттирма бериб x ўзгаришсиз қолса, унга z функциянинг y ўзгарувчи бўйича хусусий орттирмаси дейилади ва қуйидагича ёзилади:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

2-таъриф. x ва y ўзгарувчилар мос равишда Δx ва Δy орттирмалар олса, $z = f(x, y)$ функция $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ тўлиқ орттирма олади.

2. 2-ўзгарувчи функция хусусий ҳосилалари.1-таъриф. а) $\lim_{\Delta x} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$

чекли лимит мавжуд бўлса, унга $z = f(x, y)$ функциянинг **х ўзгарувчи**

бўйича хусусий ҳосиласи дейилади ва $\frac{\partial z}{\partial x}$ ёки $z'_x = f'_x(x, y)$ билан

белгиланади.

б) $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ чекли лимит мавжуд бўлса, унга $z = f(x, y)$ функциянинг

у ўзгарувчи бўйича хусусий ҳосиласи дейилади ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ ёки $z'_y = f'_y(x, y)$

билан белгиланади.

Хусусий ҳосилалар таърифларидан кўринадики бир аргументли функцияни дифференциаллашнинг ҳамма қоида ва формулалари ўз кучида қолади.

Исталган чекли сондаги ўзгарувчилар функциясининг хусусий ҳосилалари ҳам юқоридагидек аниқланади.

1-мисол. $z = x^2 + 2xy + 3y^2$ хусусий ҳосилаларни топинг.

Ечиш: Олдин у ни ўзгармас деб z'_x ни топамиз:

$$z'_x = (x^2 + 2xy + 3y^2)'_x = (x^2)'_x + (2xy)'_x + (3y^2)'_x = 2x + 2y,$$

энди х ни ўзгармас деб $\frac{\partial z}{\partial y}$ ни топамиз:

$$z'_y = (x^2 + 2xy + 3y^2)'_y = (x^2)'_y + (2xy)'_y + (3y^2)'_y = 2x + 6y.$$

2-мисол. $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ функциянинг хусусий ҳосилаларини

топинг.

Ечиш: Ҳосила олиш қоидалари ва формулаларидан фойдаланиб қуйидагиларни топамиз:

$$\begin{aligned} u'_x &= \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \right)'_x = \frac{x'_x(x^2 + y^2 + z^2) - x(x^2 + y^2 + z^2)'_x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}. \end{aligned}$$

(u'_y, u'_z ларни мустақил топинг).

3. Тўла дифференциал. Маълумки, х ва у ўзгарувчилар мос равишда Δx ва Δy орттирмалар олса, $z = f(x, y)$ функция $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ тўла орттирма олади. Бу тўла орттирманинг Δx ва Δy ларга нисбатан қизиқли бўлган бош қисми функциянинг **тўла**

дифференциали дейилади ва dz билан белгиланади. $z = f(x, y)$ функциянинг тўла дифференциали

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (1)$$

формула билан ҳисобланади, бу ерда $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тўла дифференциалдан функциянинг тақрибий қийматларини ҳисоблашда фойдаланиш мумкин, яъни $\Delta z \approx dz$ ёки $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx dz$, бундан

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + z'_x dx + z'_y dy. \quad (2)$$

Уч аргументли $u = F(x, y, z)$ функциянинг тўла дифференциали

$$du = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz \quad (3)$$

формула билан ҳисобланади.

1-мисол. $z = \ln(x^2 + y^2)$ функциянинг тўла дифференциалини топинг.

Ечиш: Хусусий ҳосилаларни топамиз;

$$z'_x = \frac{(x^2 + y^2)'_x}{x^2 + y^2} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad z'_y = \frac{(x^2 + y^2)'_y}{x^2 + y^2} = \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

(1) формулага асосан, $dz = \frac{2x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy$ бўлади.

2-мисол. $u = x^2 y z^2$ функциянинг тўла дифференциалини топинг.

Ечиш: Хусусий ҳосилаларни топамиз;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^2 y z^2)'_x = y z^2 (x^2)'_x = 2x y z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 y z^2)'_y = x^2 z^2 (y)'_y = x^2 z^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (x^2 y z^2)'_z = x^2 y (z^2)'_z = 2x^2 y z.$$

(3) формулага асосан, $du = 2x y z^2 dx + x^2 z^2 dy + 2x^2 y z dz$ бўлади.

3-мисол. Ўлчовлари $a = 8m$, $b = 6m$, $c = 3m$ бўлган параллелепипеднинг узунлиги ва эни мос равишда 10 см ва 5 см га кўпайтирилса, баландлиги эса 15 см камайса унинг ҳажми қандай ўзгаради.

Ечиш. Параллелепипеднинг ҳажми $v = xyz$; x, y, z унинг ўлчамлари. Ҳажм орттирмасини тақрибан $\Delta V \approx dV$ формуладан ҳисоблаш мумкин.

$$dV = yx dx + xz dy + xy dz$$

бўлиб, шартга кўра $x = 8$, $y = 6$, $z = 3$, $dx = 0.1$, $dy = 0.05$, $dz = -0.15$ бўлганлиги учун

$$\Delta V \approx dV = 6 \cdot 3 \cdot 0.1 + 8 \cdot 3 \cdot 0.05 + 8 \cdot 6 \cdot (-0.15) = -4.2.$$

Шундай қилиб, ҳажм тахминан $4.2m^3$ га камаяди.

4-мисол. Тўла дифференциал формуласидан фойдаланиб:

$$1) \operatorname{arcctg}\left(\frac{1,97}{1,02}-1\right), \quad 2) \sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02}$$

ларни тақрибий ҳисобланг.

Ечиш: Тўла дифференциал формуласидан тақрибий ҳисоблашда фойдаланиш учун, олдин қиймати тақрибий ҳисобланадиган функциянинг аналитик ифодасини танлаш зарур, кейин бошланғич нуқтани шундай танлаш керакки функциянинг ва хусусий ҳосилаларнинг бу нуқтадаги қийматларини жадвалсиз ҳисоблаш мумкин бўлсин. Шундан кейин (2) формуладан фойдаланиш керак.

$$1) \operatorname{arcctg}\left(\frac{1,97}{1,02}-1\right) \quad \text{ифода} \quad f(x, y) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{x}{y}-1\right) \quad \text{функциянинг}$$

$P_1(1,97; 1,02)$ нуқтадаги қиймати дейиш мумкин. Бошланғич нуқта учун $P_0 = (2; 1)$ ни олсак, $\Delta x = 1,97 - 2 = -0,03$, $\Delta y = 1,02 - 1 = 0,02$ бўлади. Энди хусусий ҳосилаларни топиб, уларнинг P_0 нуқтадаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$f'_x(x, y) = \left[\operatorname{arcctg}\left(\frac{x}{y}-1\right)'_x \right] = -\frac{\left(\frac{x}{y}-1\right)'_x}{1 + \left(\frac{x}{y}-1\right)^2} = -\frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{(x^2 - y^2)}{y^2}} = -\frac{y}{y^2 + (x - y)^2};$$

$$f'_y(x, y) = \left[\operatorname{arcctg}\left(\frac{x}{y}-1\right)'_y \right] = -\frac{\left(\frac{x}{y}-1\right)'_y}{1 + \left(\frac{x}{y}-1\right)^2} = -\frac{-\frac{x}{y^2}}{\frac{(y^2 + (x^2 - y^2))}{y^2}} = \frac{x}{y^2 + (x - y)^2};$$

$$f'_x(2; 1) = -\frac{1}{1 + (2 - 1)^2} = -0,5; \quad f'_y(2; 1) = \frac{2}{1 + (2 - 1)^2} = 1.$$

(2) дан фойдалансак,

$$\operatorname{arcctg}\left(\frac{1,97}{1,02}-1\right) \approx \operatorname{arcctg}\left(\frac{2}{1}-1\right) + (-0,5)(-0,03) + 1 \cdot 0,02 = \frac{\pi}{4} + 0,015 + 0,02 = 0,82$$

бўлади.

2) $\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02}$ ни $f(x, y, z) = \sqrt{x^y + \ln z}$ функциянинг $P_1(1,04; 1,99; 1,02)$ нуқтадаги қиймати деб қараймиз: бошланғич нуқта учун $P_0(1; 2; 1)$ ни танлаймиз. Бу ҳолда

$$\Delta x = 1,04 - 1 = 0,04, \quad \Delta y = 1,99 - 2 = -0,01, \quad \Delta z = 1,02 - 1 = 0,02.$$

Хусусий ҳосилаларни топамиз ва уларнинг $P_0(1; 2; 1)$ нуқтадаги қийматини ҳисоблаймиз:

$$f'_x(x, y, z) = \frac{(x^y + \ln z)'_x}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{yx^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}}, \quad f'_x(1; 2; 1) = \frac{2 \cdot 1^{2-1}}{2\sqrt{1^2 + \ln 1}} = 1;$$

$$f'_y(x, y, z) = \frac{(x^y + \ln z)'_y}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{x^y \cdot \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}}, \quad f'_y(1; 2; 1) = \frac{1^2 \cdot 0}{2\sqrt{1^2 + \ln 1}} = 0;$$

$$f'_z(x, y, z) = \frac{(x^y + \ln z)'_z}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y + \ln z}}, \quad f'_z(1; 2; 1) = \frac{1}{2}.$$

(2) формуланинг уч аргументли функция учун умумлашганидан фойдаланиб,
 $\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02} \approx \sqrt{1^2 + \ln 1} + 1 \cdot 0,04 + 0 \cdot (-0,01) + \frac{1}{2} \cdot 0,02 = 1,05$

натижани оламиз.

4. Юқори тартибли хусусий ҳосилалар ва дифференциаллар.

1. $z = f(x, y)$ функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари деб биринчи тартибли хусусий ҳосилалардан олинган хусусий ҳосилаларга айтилади. Иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар қўйидагича белгиланади:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx}'' = f_{xx}''(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{xy}'' = f_{xy}''(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z_{yx}'' = f_{yx}''(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy}'' = f_{yy}''(x, y);$$

$f_{xy}''(x, y)$ ва $f_{yx}''(x, y)$ хусусий ҳосилалар аралаш хусусий ҳосилалар дейилади. Аралаш хусусий ҳосилалар узлуксиз бўлган нуқталарда улар ўзаро тенг бўлади.

Учинчи ва ундан юқори тартибли хусусий ҳосилалар ҳам юқоридагидек аниқланади.

Ушбу $\frac{\partial^n z}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$ ёзув z функцияни m марта x ўзгарувчи бўйича

ва $(n - m)$ марта y ўзгарувчи бўйича дифференциаллашни билдиради.

1-мисол. $z = x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1$ иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларни топинг.

Ечиш. Биринчи тартибли хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1)'_x = 4x^3 + 8xy^3 + 7y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1)'_y = 4x^2 \cdot 3y^2 + 7x = 12x^2y^2 + 7x.$$

Топилган ҳосилалардан яна хусусий ҳосилалар оламиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (4x^3 + 8xy^3 + 7y)'_x = 12x^2 + 8y^3,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (4x^3 + 8xy^3 + 7y)'_y = 24xy^2 + 7,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (12x^2y^2 + 7x)'_x = 24xy^2 + 7,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (12x^2y^2 + 7x)'_y = 24x^2y.$$

2. **Иккинчи тартибли тўла дифференциал** $d(dz) = d^2z$ каби аниқланиб, хусусий ҳосилалар орқали қуйидагича топилади.

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 \quad (1)$$

2-мисол. $z = x^2y^3$ функциянинг иккинчи тартибли тўла дифференциалини топинг.

Ечиш. Хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$z'_x = (x^2y^3)'_x = 2xy^3; \quad z'_y = 3x^2y^2; \quad z''_{xx} = 2y^3, \quad z''_{xy} = 6xy^2, \quad z''_{yx} = 6xy^2, \quad z''_{yy} = 6xy^2,$$

(1) формулага асосан иккинчи тартибли тўла дифференциал

$$d^2z = 2y^3 dx^2 + 12xy^2 dx dy + 6x^2y dy^2.$$

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Функциянинг хусусий орттирмаси деб нимага айтилади?
2. Икки аргументли функциянинг хусусий ҳосиласи деб нимага айтилади?
3. Уч аргументли функциянинг хусусий ҳосилалари нечта бўлади?
4. Икки аргументли функциянинг тўла дифференциали деб нимага айтилади?
5. Функциянинг тўлиқ орттирмаси ва тўла дифференциали орасида боғланиш борми?
6. Тўла дифференциалдан тақрибий ҳисоблашларда фойдаланиш мумкинми?
7. Иккинчи тартибли хусусий ҳосила қандай топилади?
8. Икки аргументли функциянинг иккинчи тартибли тўла дифференциали нимага тенг?

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1. Қуйидаги функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топинг:

1) $z = x^3 + 3x^2y - y^3$; 2) $z = \frac{xy}{x-y}$; 3) $u = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z}$;

4) $z = \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin \frac{x+y}{y}$.

2. Қуйидаги функцияларнинг тўла дифференциалларини топинг:

1) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$; 2) $u = x^{y^2z}$; 3) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

4) $u = \sqrt{x^2 - 2y^2 + 3z^2}$; 5) $s = x \ln t$.

3. $z = xy$ функция учун $P_0(5;4)$ нуктада $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = -0,2$ бўлганда dz ва Δz ларни ҳисобланг.

4. 1) $(1,04)^{2,02}$; 2) $\sin 32^\circ \cdot \cos 59^\circ$ тақрибий ҳисобланг.

5. $z = x^3y + y^3$ функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топинг.

6. $s = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{t}\right)$ функция учун $\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}$ эканлигини текширинг.

7. $u = \operatorname{arctg}(2x - t)$ бўлса, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} = 0$ бажарилишини текширинг.

8. $z = (x^2 + y^2)^2$ иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларни топинг.

9. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ функция $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

тенгламани қаноатлантиришини исботланг.

10. $u = x^4y^2$ иккинчи тартибли тўла дифференциалини топинг.

11. $z = \sin x \cos y$ иккинчи тартибли тўла дифференциалини топинг.

12. 1) $u = \frac{y^2}{x^2}$; 2) $u = x \ln \frac{y}{x}$ иккинчи тартибли тўла дифференциалларини

топинг.

Мавзу: Икки аргументли функция экстремуми

Режа

1. Икки аргументли функция экстремуми.
2. Икки ўзгарувчили функциянинг ёпиқ соҳадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топиш.

Таянч ибора ва тушунчалар

Экстремумга эга бўлишининг зарурий ва етарли шартлари, энг кичик ва катта қийматлар, харажат функцияси, фойда функцияси, товарнинг лимитик баҳоси, лимитик харажат, фойда функцияси максимуми.

1. **Икки аргументли функция экстремуми.** 1-таъриф. $z = f(x, y)$ функциянинг $P_0(x_0; y_0)$ нуқтадаги қиймати унинг бу нуқтанинг бирор атрофи исталган $P(x, y)$ нуқтасидаги қийматларидан катта, яъни $f(x_0; y_0) > f(x, y)$ бўлса, $z = f(x, y)$ функция $P_0(x_0; y_0)$ нуқтада максимумга эга дейилади.

2-таъриф. $z = f(x, y)$ функциянинг $P_1(x_1; y_1)$ нуқтадаги қиймати унинг бу нуқтанинг бирор атрофи исталган $P(x, y)$ нуқтасидаги қийматларидан кичик бўлса, яъни $f(x_1; y_1) < f(x, y)$ бўлса, $z = f(x, y)$ функция $P_1(x_1; y_1)$ нуқтада минимумга эга дейилади.

Функциянинг максимум ёки минимуми унинг экстремуми дейилади. Функция экстремумга эга бўлган нуқта унинг экстремум нуқтаси дейилади. Функция экстремумини хусусий ҳосилалар ёрдамида текширилади.

Экстремумнинг зарурий шартлари: $P_0(x_0; y_0)$ нуқтада узлуксиз $z = f(x, y)$ функциянинг экстремум нуқтаси бўлса,

$$\left. \begin{aligned} f'_x(x_0, y_0) &= 0 \\ f'_y(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

бўлади, ёки бу нуқтада ҳосилаларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси мавжуд бўлмайди.

Бундай нуқталарга экстремум учун критик (стационар) нуқталар дейилади. Шунинг таъкидлаш мумкин ҳамма критик нуқталар ҳам экстремум нуқталар бўлавермайди. Критик нуқтада экстремум бўлмаслиги ҳам мумкин.

Экстремумнинг етарли шартлари:

Иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларнинг критик нуқтадаги қийматларини

$$A = f''_{xy}(x_0, y_0); B = f''_{xy}(x_0, y_0); C = f''_{yy}(x_0, y_0);$$

билан белгилаймиз ва $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$ ни тузамиз.

1. $\Delta = AC - B^2 > 0$ бўлса, $z = f(x, y)$ функция $P_0(x_0, y_0)$ нуктада экстремумга эга бўлиб: 1) $A < 0$ бўлганда $P_0(x_0, y_0)$ нуктада максимумга, 2) $A > 0$ бўлганда минимумга эга бўлади.

2. $\Delta = AC - B^2 < 0$ бўлса, $P_0(x_0, y_0)$ нуктада экстремум йўқ:

$\Delta = AC - B^2 = 0$ бўлса, экстремум бўлиши ҳам, бўлмаслиги ҳам мумкин.

1-мисол. $z = f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ функция экстремумини текширинг.

Ечиш. Бу функция бутун XOY текисликда аниқлаган. Биринчи тартибли хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$f'_x = 4x^3 - 4x + 4y; f'_y = 4y^3 + 4x - 4y$$

экстремумга эга бўлишнинг зарурий шартидан:

$$\left. \begin{aligned} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} y = x - x^3 = x(1 - x^2) \\ y^3 + x - y = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} [x(1 - x^2)]^3 + x - x^{+x^3} = 0, \\ (1 - x^2)^3 = -1, 1 - x^2 = -1, x^2 = 2 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} x_1 = 0; x_2 = -\sqrt{2}, x_3 = \sqrt{2} \\ y_1 = 0; y_2 = \sqrt{2}, y_3 = -\sqrt{2} \end{aligned} \right\}.$$

Демак, учта $O(0,0)$, $P_1(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ ва $P_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ критик нукталарга эга бўламиз, бошқа критик нукталар йўқ, чунки $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ хусусий ҳосилалар XOY текисликнинг ҳамма нукталарида мавжуд.

Иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$f''_{xx}(x, y) = 12x^2 - 4; f''_{xy}(x, y) = 4; f''_{yy}(x, y) = 12y^2 - 4;$$

$O(0,0)$ нуктада экстремумнинг етарли шартини текшираемиз: $A = -4, B = 4, C = -4; \Delta = AC - B^2 = -4 \cdot (-4) - 4^2 = 0$ бўлиб, юқоридаги етарли шарт жавоб бермайди. Бу нукта атрофида берилган функция мусбат ҳам, манфий ҳам бўлишини кўрамиз, масалан OX ўқи бўйича ($y = 0$)

$$f(x, y)_{y=0} = f(x, 0) = x^4 - 2x^2 = -x^2(2 - x^2) < 0.$$

$y = x$, биссектриса бўйича

$$f(x, y)|_{y=x} = f(x, x) = 2x^4 > 0$$

бўлади. Шундай қилиб, $O(0,0)$ бирор атрофида $\Delta f(x, y)$ орттирма ишорасини бир хил сақламайди, демак экстремум йўқ.

$P_1(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ нуктада етарли шартни текшираемиз:

$AC - B^2 = 400 - 16 > 0$ ва $A = 20 > 0$ демак $P_1(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ нуктада функция минимумга эга. $f_{\min} = -8$;

$P_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ нуктада етарли шартни текширамыз: бу нукта учун $A=20$, $B=4, C=20$ бўлиб $\Delta = AC - B^2 = 400 - 16 > 0$ ва $A=20 > 0$ бўлганлиги учун $P_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ нуктада ҳам берилган функция минимумга эга бўлади, $f_{\min} = -8$

2-мисол. $z = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ функциянинг экстремумини текширинг.

Ечиш.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-1}{2\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y-1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}.$$

$P_0(1;1)$ нуктада хусусий ҳосилалар мавжуд эмас. Демак, $P_0(1;1)$ нукта критик нукта бўлади. Бу нуктада экстремумни текшириш учун Δz орттирманинг P_0 нукта атрофида ишорасини текширамыз:

$$\Delta z = \sqrt{(1 + \Delta x - 1)^2 + (1 + \Delta y - 1)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} > 0,$$

бу ишора $P_0(1;1)$ нуктанинг исталган атрофида сақланади яъни $P_0(1;1)$ нуктада функция минимумга эга $z_{\min} = f(1;1) = 0$;

2. Икки ўзгарувчилик функциянинг ёпиқ соҳадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топиш. Чегараланган ёпиқ соҳада дифференциалланувчи функция ўзининг энг катта ва энг кичик қийматига ё соҳада ётувчи критик нуктада, ё бу соҳа чегарасида эришади.

1-мисол. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ функциянинг $x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3$ соҳадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

Ечиш. Соҳа AOB учбурчакдан иборат. Соҳа ичидаги критик нуқталарни топамиз:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

бундан $x = -1, y = -1$ бўлиб, $P_0(-1, -1)$ критик нуқтага эга бўламиз. Функцияни соҳа чегарасида текширамыз: AO чегарада $y = 0$ бўлиб,

$z = x^2 + x$ функция ҳосил бўлади. Бу функциянинг экстремуми: $z'_x = 2x + 1 = 0, x = -\frac{1}{2} = -0,5$

бўлади.

Демак, $P_1(-0,5, 0)$ AO чегарадаги критик нуқта. Тенгламаси $x = 0$, BO чегарада $z = y^2 + y$ функция ҳосил бўлиб, $z'_y = 2y + 1 = 0, y = -1/2$.

Демак, $P_2\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ BO чегарадаги критик нуқта бўлади. Тенгламаси

$y = -3 - x$ бўлган AB чегарада $z = 3x^2 + 9x + 6$ функция ҳосил бўлиб

$$z'_x = 6x + 9 = 0 \quad x = -\frac{3}{2}. \quad AB \text{ нинг тенгламасидан } y = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2},$$

демак, AB чегарадаги критик нукта $P_3\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ бўлади.

Берилган функциянинг P_0, P_1, P_2, P_3 критик нукталардаги, ҳамда A, B , O нукталардаги қийматларни ҳисоблаймиз:

$$z_0 = f(P_0) = f(-1, -1) = -1;$$

$$z_1 = f(P_1) = f\left(-\frac{1}{2}, -0\right) = -\frac{1}{4};$$

$$z_2 = f(P_2) = f\left(0, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4};$$

$$z_3 = f(P_3) = f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4};$$

$$z_4 = f(0) = f(0, 0) = 0;$$

$$z_5 = f(A) = f(-3, 0) = 6;$$

$$z_6 = f(B) = f(0, -3) = 6.$$

Функциянинг топилган барча қийматларини таққослаб
 $z_{eng\ kat.} = f(A) = f(B) = 6$ ва $z_{eng\ kich.} = f(P_0) = -1$ деган хулосага
 келамиз

Мустақил бажариш учун топшириқлар

Қуйидаги функцияларнинг экстремумини текширинг.

1. $z = 2(x + y) - x^2 - y^2$.
2. $z = xy(12 - x - y)$.
3. $z = (x - 5)^2 + y^2 + 1$.
4. $z = x^2 - xy + y^2 + x - y + 1$.
5. $z = x^2 + 3(y + 2)^2$.
6. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 6y + 20$.
7. $z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10$.
8. $z = 3x^3 + 3y^2 - 9xy + 10$.
9. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.
10. $z = xy - 3x^2 - 2y^2$.

Берилган $z = f(x, y)$ функциянинг берилган чизиклар билан чегараланган D ёпиқ соҳадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг:

1. $z = x^2 - y^2 - x + y$; $x = 0, x = 2, y = 0, y = 1$.
2. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$; $x = 0, y = 0, 5x - 3y + 45 = 0$.

3. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 5; x + y = 5, x = -1, y = -1.$
4. $z = 3y - 2x - xy; x = 0, y = 0, 3x - 4y = 12.$
5. $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x, x = 0, x = 2, y = 0, y = 2.$
6. $z = x^2 + 6xy - x + 3y; x = 0, x = 3, y = 0, y = 3.$
7. $z = x^2 + 2xy - 10; y = 0, y = x^2 - 4.$
8. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1; x = -3, y = 0, x + y + 1 = 0.$

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Икки аргументли функциянинг экстремумга эга бўлишининг зарурий шarti нима?
2. Икки аргументли функциянинг экстремумга эга бўлишининг етарли шarti нима?
3. Критик нуқталар қандай нуқталар?
4. Икки аргументли функциянинг бирор ёпиқ соҳадаги энг катта ва энг кичик қийматлари қандай топилади?

Дифференциал тенгламалар

Мавзу. Умумий тушунчалар.Биринчи тартибли ўзгарувчилари ажраладиган ва бир жинсли дифференциал тенгламалар

Режа

1. Дифференциал тенгламалар ҳақида умумий тушунчалар.
2. Биринчи тартибли тенгламалар.
3. Ўзгарувчилари ажралган ва ажраладиган биринчи тартибли тенгламалар.
4. Биринчи тартибли бир жинсли дифференциал тенгламалар.

Мавзунинг таянч тушунчалари

Дифференциал тенглама, оддий дифференциал тенглама, хусусий ҳосилали дифференциал тенглама, дифференциал тенгламанинг тартиби, дифференциал тенглама ечими, интеграл чизиқ, биринчи тартибли дифференциал тенглама, Коши масаласи, бошланғич шартлар, ўзгарувчилари ажралган, ўзгарувчилари ажраладиган, биринчи тартибли бир жинсли, биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар, Бернулли тенгламаси, Риккати тенгламаси, тўла дифференциалли тенглама, интегралловчи кўпайтувчи.

1. Дифференциал тенгламалар ҳақида умумий тушунчалар.1-таъриф. Эркин ўзгарувчи, номаълум функция ҳамда унинг ҳосилалари ёки дифференциаллари орасидаги муносабатга **дифференциал тенглама** дейилади.

Номаълум функция фақат битта ўзгарувчига боғлиқ бўлса, бундай дифференциал тенгламага оддий дифференциал тенглама дейилади.

Номаълум функция икки ёки ундан кўп ўзгарувчиларга боғлиқ бўлса, бундай дифференциал тенгламаларга, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар дейилади.

2-таъриф. Дифференциал тенгламага кирган ҳосилаларнинг энг юқори тартибига дифференциал тенгламанинг тартиби дейилади.

$y'' = 3x^2$, $y''' = \cos x$ тенгламалар мос равишда иккинчи ва учинчи тартибли тенгламаларга мисол бўлади.

Умумий ҳолда n -тартибли дифференциал тенглама

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

кўринишда белгиланади.

3-таъриф. Дифференциал тенгламанинг ечими ёки интеграл деб тенгламага қўйганда уни айниятга айлантирадиган ҳар қандай дифференциалланувчи $y = \varphi(x)$ функцияга айтилади.

Дифференциал тенглама ечимининг графигига интеграл чизик дейилади. Масалан, $\frac{dy}{dx} = 2x$, $y = x^2$ бу берилган дифференциал тенгламанинг ечими бўлиб, бу ҳолда интеграл чизик параболадан иборат бўлади.

Дифференциал тенгламалар назариясининг асосий масаласи берилган тенгламанинг барча ечимларини топиш ва бу ечимларнинг ҳоссаларини ўрганишдан иборат.

Алгебраик тенгламалардагидек ҳамма дифференциал тенгламаларни ечиш мумкин бўладиган умумий усуллар йўқ. Дифференциал тенгламаларнинг ҳар бир турига хос ечиш усулидан фойдаланилади.

2. Биринчи тартибли тенгламалар. Биринчи тартибли тенглама умумий ҳолда

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

кўринишда ёзилади. (1) тенгламани y га нисбатан ечсак

$$y' = f(x, y) \text{ yoki } \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2)$$

бўлади. (2) тенгламанинг ўнг томони фақат x нинг функцияси бўлса, тенглама

$$y' = f(x) \quad (3)$$

кўринишида бўлиб, охириги тенгликдан бевосита кўриш мумкинки, бундай тенгламанинг ечимини топиш $f(x)$ функциянинг бошланғич функциясини топишдан иборат бўлади, яъни $y = F(x) + C$, $[F(x)]' = f(x)$. Шундай қилиб, (3) кўринишдаги биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг ечими чексиз кўп ечимлар тўпламидан иборат бўлади.

1-таъриф. $y = \varphi(x, C)$ x нинг функцияси ҳар бир C ихтиёрий ўзгармас бўлганда (2) тенгламани қаноатлантирса, унинг умумий ечими дейилади.

2-таъриф. C ихтиёрий ўзгармаснинг муайян қийматида умумий ечимдан олинadиган ечимга хусусий ечим дейилади.

Умумий ечимдан ягона ечимни олиш учун кўпинча қўшимча

$$y(x_0) = y_0 \quad (4)$$

шартдан фойдаланилади, бу ерда x_0 , y_0 лар берилган сонлар бўлиб, бу шартга бошланғич шарт деб аталади.

3-таъриф. $y' = f(x, y)$ дифференциал тенгламанинг (4) бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топиш масаласига Коши масаласи дейилади.

1-мисол. $y' = \frac{5}{\cos^2 x}$, дифференциал тенглама учун $y(0) = 3$ бўладиган бошланғич шартни қаноатлантирувчи Коши масаласини ечинг.

Ечиш. Олдин берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$y = \int \frac{5}{\cos^2 x} dx = 5 \operatorname{tg} x + C$$

Энди бошланғич шартдан фойдаланиб, $5 \operatorname{tg} 0 + C = 3$, бундан $C = 3$ келиб чиқади. Демак, Коши масаласининг ечими $y = 5 \operatorname{tg} x + 3$ бўлади.

3. Ўзгарувчилари ажралган ва ажраладиган биринчи тартибли тенгламалар

4-таъриф. $M(x)dx + N(y)dy = 0$ кўринишдаги тенгламага ўзгарувчилари ажралган дифференциал тенглама дейилади.

Бундай дифференциал тенгламани бевосита, тенгликни интеграллаб унинг умумий ечими топилади, яъни

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

бўлади.

2-мисол. $x dx + y dy = 0$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани бевосита интеграллаб

$$\int x dx + \int y dy = C, \quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \text{ yoki } x^2 + y^2 = C_1,$$

умумий ечим бўлади .

5-таъриф. $y' = f_1(x) f_2(y)$ yoki $\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y)$

кўринишдаги тенгламага ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама дейилади.

Бундай дифференциал тенгламани $f_2(y)$ га бўлиб, dx га кўпайтириб

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

ўзгарувчилари ажралган дифференциал тенгламага келтириш билан ечими топилади.

3-мисол. $\frac{dy}{dx} = x(1 + y^2)$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Ўзгарувчиларини ажратиб $\frac{dy}{1 + y^2} = xdx$ тенгламани ҳосил қиламиз.

Охирги тенгламани бевосита интеграллаб,

$$\arctg y = \frac{x^2}{2} + C$$

лиққа эга бўламиз. Охирги тенгликдан

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

умумий ечимни ҳосил қиламиз.

4. Биринчи тартибли бир жинсли дифференциал тенгламалар.

$f(x, y)$ функция учун $f(kx, ky) = k^\alpha f(x, y)$ тенглик бажарилса, $f(x, y)$ функцияга α тартибли бир жинсли функция дейилади, бунда α бирор сон.

Масалан, $f(x, y) = xy - y^2$ функция учун

$f(kx, ky) = kx \cdot ky - (ky)^2 = k^2(xy - y^2)$ бўлиб, $f(x, y) = xy - y^2$ функция $\alpha = 2$

тартибли бир жинсли функция бўлади. $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}, \alpha = 0$ тартибли бир

жинсли функциядир(буни текшириб кўринг).

6-таъриф. $y' = f(x, y)$ дифференциал тенгламада $f(x, y)$ функция нўлинчи тартибли бир жинсли функция бўлса, бундай дифференциал тенгламага биринчи тартибли бир жинсли дифференциал тенглама дейилади.

Бир жинсли, тенглама $y = xv(x)$ алмаштириш билан ўзгарувчилари ажраладиган

$$xv' = f(1, v) - v$$

дифференциал тенгламага келтирилади.

4-мисол. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2}{x^2}$ дифференциал тенгламанинг умумий

ечимини топинг.

Ечиш. $y = x \cdot v$ алмаштириш олиб, $y' = x'v + xv'$ эканлигини ҳисобга олсак, берилган тенгламадан

$$v + xv' = \frac{x \cdot xv + x^2 v^2}{x^2}$$

бўлиб, $v + xv' = v + v^2$ ёки $xv' = v^2$, $\frac{xdv}{dx} = v^2$

бўлади. Охирги тенгламада ўзгарувчиларини ажратсак,

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{dx}{x};$$

бўлади. Охирги тенгликни интегралласак,

$$-\frac{1}{v} = \ln|x| + \ln c,$$

бўлиб,

$$\ln|cx| = -\frac{1}{v}, \quad v = \frac{y}{x}$$

бўлганлиги учун

$$\ln|cx| = -\frac{x}{y}, \quad \text{yoki} \quad y = -\frac{x}{\ln|cx|}$$

умумий ечимни ҳосил қиламиз.

Мустақил бажариш учун мисоллар

1. Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимларини топинг.

1) $(1+y)dy - (1-x)dx = 0$; 2) $(xy^2 + x)dx = (y - x^2y)dy$;

3) $x^2dy + (y-1)dx = 0$; 4) $2(xy + y)dx = xdy$.

2. Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимларини топинг:

1) $x^2dx + ydy = 0$, $x = 0$ да $y = 1$;

2) $(1+x^2)dy - 2x(y+3)dx = 0$, $x = 0$ бо'лганда $y = -1$;

3) $(1+x)ydx = (y-1)xdy$, $x = 1$ да $y = 1$.

3. Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимларини топинг.

1) $\frac{dy}{dx} = \frac{(x-y)y}{x^2}$; 2) $x^2y' = y^2 - xy + x^2$; 3) $(x^2 - 2xy)dy = (xy - y^2)dx$.

4. Бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимларни топинг:

1) $xy^2 - y' = x^3 + y^3$, $x = 1$ бо'лганда $y = 3$;

2) $(x-y)dx + xdy = 0$, $x = 1$ бо'лганда $y = 0$;

3) $y^2dx + (x^2 - xy)dy = 0$, $x = 1$ да $y = 1$.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Дифференциал тенглама деб нимага айтилади?
2. Оддий дифференциал тенглама қандай тенглама?
3. Хусусий ҳосилали дифференциал тенглама деб нимага айтилади?
4. Дифференциал тенгламанинг тартиби нима?
5. Дифференциал тенгламанинг ечими ёки интеграли деб нимага айтилади?
6. Умумий ва хусусий ечимлар қандай ечимлар?
7. Дифференциал тенгламалар назариясининг асосий масаласи нимадан иборат?
8. Бошланғич шарт деб нимага айтилади?
9. Қандай масалага Коши масаласи дейилади?
10. Қандай тенгламага ўзгарувчилари ажралган дифференциал тенглама дейилади?
11. Биринчи тартибли бир жинсли тенглама деб нимага айтилади?

Мавзу: Биринчи тартибли чизикли, Бернулли ва Риккати ҳамда тўла дифференциалли таенгламалар

Режа

1. Биринчи тартибли чизикли дифференциал тенгламалар.
2. Бернулли тенгламаси.
3. Риккати тенгламаси.
4. Тўла дифференциалли тенгламалар ва интегралловчи кўпайтувчи.

Таянч ибора ва тушунчалар

Биринчи тартибли чизикли дифференциал тенгламалар, Бернулли тенгламаси, Риккати тенгламаси, тўла дифференциалли тенглама, интегралловчи кўпайтувчи.

1. Биринчи тартибли чизикли дифференциал тенгламалар. Бундай тенглама

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$$

кўринишда бўлиб, $p(x)$ ва $g(x)$ лар берилган функциялар. Бундай тенгламани ечиш учун $z = u(x)y$ алмаштириш олиб

$$\frac{dz}{dx} + \left[p(x) - \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \right] z = g(x)u(x) \quad (1)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. $u(x)$ функцияни шундай танлаймизки,

$$p(x) - \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = 0$$

бўлсин. Бундан $u(x) = e^{\int p(x)dx}$ бўлиб, бу ҳолда (1) тенглама

$$\frac{dz}{dx} = g(x)e^{\int p(x)dx} + C$$

кўринишда бўлади. Бевосита интегралласак

$$z = \int g(x)e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

ҳосил бўлади.

Энди изланаётган y функцияга қайтиб

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[C + \int g(x)e^{\int p(x)dx} dx \right] \quad (2)$$

умумий ечимни ҳосил қиламиз.

1-мисол. $y' + xy = x$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенглама биринчи тартибли чизикли тенглама бўлиб $p(x) = x$, $g(x) = x$ лигини ҳисобга олиб (2) формулага асосан,

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int x dx} \left[C + \int x \cdot e^{\int x dx} dx \right] = e^{-\frac{x^2}{2}} \left[C + \int x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx \right] = e^{-\frac{x^2}{2}} \left[C + \int \cdot e^{\frac{x^2}{2}} d\left(\frac{x^2}{2}\right) \right] = \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}} \left(e^{\frac{x^2}{2}} + C \right). \quad y = e^{-\frac{x^2}{2}} (e^{\frac{x^2}{2}} + C). \end{aligned}$$

умумий ечим бўлади.

2. Бернулли тенгламаси. Бундай дифференциал тенглама

$$y' + p(x)y = y^n g(x)$$

кўринишда бўлади. Бу тенгламада $n=0$ ёки $n=1$ бўлса, чизикли тенглама ҳосил бўлади. Демак $n \neq 0,1$ бўлган, ўзгармас. Бернулли тенгламасини y^n га бўлиб,

$$\frac{y'}{y^n} + p(x) \frac{1}{y^{n-1}} = g(x), \quad \frac{1}{y^{n-1}} = z$$

алмаштириш бажарсак,

$$z' = (y^{1-n})' = (1-n)y^{-n} y'$$

эканлигини ҳисобга олсак,

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)z = g(x) \text{ yoki } z' + (1-n)p(x)z = (1-n)g(x)$$

биринчи тартибли чизикли дифференциал тенглама ҳосил бўлади.

2-мисол. $y' + xy = xy^3$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани y^3 бўлиб,

$$\frac{y'}{y^3} + x \frac{1}{y^2} = x$$

тенгламани ҳосил қиламиз. $\frac{1}{y^2} = z$ алмаштириш олсак $z' = \frac{2y'}{y^3}$ бўлади.

Буларни тенгламага қўйиб,

$$\frac{z'}{2} + xz = x, \quad z' - 2xz = -2x$$

чизиқли тенгламага келамиз. Бу тенгламанинг умумий ечимини (6) формулага асосан топиш мумкин:

$$z = e^{2\int x dx} \left[C + \int (-2x) e^{-2\int x dx} dx \right] = e^{x^2} \left[C - \int 2x e^{-x^2} dx \right] =$$

$$e^{x^2} \left[C + \int e^{-x^2} d(-x^2) \right] = e^{x^2} \left[C + e^{-x^2} \right] = C e^{x^2} + 1.$$

Шундай қилиб

$$z = C \cdot e^{x^2} + 1$$

бўлади, z нинг ўрнига $\frac{1}{y^2}$ ни қўйиб,

$$\frac{1}{y^2} = C \cdot e^{x^2} + 1, \quad y^2 = \frac{1}{C e^{x^2} + 1},$$

ечимни оламиз. Бу берилган Бернулли тенгламасининг умумий ечими бўлади.

3. Риккати тенгламаси. Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \quad (4)$$

кўринишдаги дифференциал тенгламага Риккати тенгламаси дейилади. Бунда $a(x), b(x), c(x)$ функциялар бирор интервалда аниқланган узлуксиз функциялар. (4) тенгламада $a(x) = 0$ бўлса, чизиқли тенглама, $c(x) = 0$ бўлса, Бернулли тенгламаси келиб чиқади.

Умуман олганда Риккати тенгламаси ечимини элементар функция ва уларнинг интеграллари ёрдамида ечиб(квадратурада интеграллаб) бўлмайди.

Ушбу хусусий ҳолни қараймиз: Риккати тенгламасининг битта хусусий ечими маълум бўлса, бу тенглама ечими квадратураларда интегралланади.

$y = \varphi(x)$ Риккати тенгламасининг бирор хусусий ечими бўлсин. $y = \varphi(x) + z$ алмаштириш бажарамиз: бу ҳолда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{dz}{dx}$$

бўлиб, (4) тенглама

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{dz}{dx} = a(x)[\varphi(x) + z]^2 + b(x)[\varphi(x) + z] + c(x)$$

кўринишда бўлади. Охирги тенгликдан, $y = \varphi(x)$ (4) тенглама ечими, яъни

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = a(x)[\varphi(x)]^2 + b(x)\varphi(x) + c(x)$$

эканлигини ҳисобга олсак,

$$\frac{dz}{dx} = [2a(x)\varphi(x) + b(x)]z + a(x)z^2$$

тенглама ҳосил бўлиб, бу Бернулли тенгламасидир. Бундай дифференциал тенгламанинг умумий ечимини қандай топишни юқорида ўргандик.

3- мисол. Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 + 2xy + (5 - x^2)$$

Риккати тенгламасининг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Бу тенгламанинг хусусий ечимини $y = \varphi(x) = ax + b$ кўринишда излаш мақсадга мувофиқ, бу ҳолда

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = a, a = -(ax + b)^2 + 2x(ax + b) + 5 - x^2$$

бўлиб, бир хил даражали x лар коэффициентларини тенглаштирсак $a = 1, b = \pm 2$ келиб чиқади.

Демак, $\varphi(x) = x + 2, \varphi(x) = x - 2$ хусусий ечимлар бўлади. $\varphi(x) = x + 2$ хусусий ечим учун Бернулли тенгламаси

$$\frac{dz}{dx} = -4z - z^2$$

бўлиб, унинг умумий ечими

$$y = x + 2 + \frac{4}{Ce^{4x} - 1}$$

бўлади.

4. Тўла дифференциалли тенгламалар ва интегралловчи кўпайтувчи.

1) Тўла дифференциалли тенглама.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

кўринишдаги тенгламанинг чап қисми бирор $u(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали, яъни

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

бўлса, бундай тенглама тўла дифференциалли тенглама дейилади. (1)

тенглама тўла дифференциалли тенглама бўлиши учун

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

шарт бажарилиши керак. Тўла дифференциалли тенглама таърифидан $du = 0$ бўлиб, бундан $u(x, y) = C$ келиб чиқади (C ихтиёрий ўзгармас). $u(x, y)$ функцияни топиш учун y ни ўзгармас деб ҳисоблаймиз, y ҳолда $dy = 0$ эканлигидан $du = M(x, y)dx$ бўлади. Охириги тенгликни x бўйича интегралласак,

$$u = \int M(x, y)dx + \varphi(y)$$

тенглик ҳосил бўлади. Охириги тенгликни y бўйича дифференциаллаймиз ва натижани $N(x, y)$ га тенглаймиз, чунки $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$ эди.

$$\int \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y)$$

ёки

$$\varphi'(y) = N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx$$

бўлади. Охириги тенгликни y бўйича интеграллаб, $\varphi(y)$ ни топамиз:

$$\varphi(y) = \int \left(N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy + C$$

Шундай қилиб,

$$u(x, y) = \int M(x, y) dx + \int \left(N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy + C$$

натижага эга бўламиз.

1-мисол. Ушбу

$$\frac{x^2 - 3y^2}{x^4} dx + \frac{2y}{x^3} dy = 0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламанинг тўла дифференциалли бўлиш ёки бўлмаслигини текширамыз: берилган тенгламада

$$M = \frac{x^2 - 3y^2}{x^4}, N = \frac{2y}{x^3}$$

бўлганлиги учун

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{-6y}{x^4}, \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{-6y}{x^4}$$

бўлиб,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

бўлади, яъни берилган дифференциал тенглама тўла дифференциалли тенгламадир. Демак, берилган тенгламанинг чап томони бирор $u(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали бўлади. Энди $u(x, y)$ функцияни топамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M = \frac{x^2 - 3y^2}{x^4}$$

бўлганлиги учун

$$u = \int \frac{x^2 - 3y^2}{x^4} dx + \varphi(y) = \int (x^{-2} - 3y^2 x^{-4}) dx + \varphi(y) = -\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + \varphi(y) \quad (2)$$

бўлиб, бунда $\varphi(y)$ ҳозирча номаълум функциядир. Охирги тенгликни y бўйича дифференциаллаб,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = \frac{2y}{x^3}$$

эканлигини ҳисобга олиб,

$$\frac{2y}{x^3} + \varphi'(y) = \frac{2y}{x^3}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан $\varphi'(y) = 0$ бўлиб,

$$\varphi(y) = C_1.$$

бўлади. (2) тенгликдан

$$u = -\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + C_1$$

Шундай қилиб, берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$du = d\left(-\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + C_1\right) = 0$$

бўлганлиги учун

$$-\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + C_1 = C_2$$

бўлиб, ёки

$$-\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} = C$$

бўлади, бунда $C = C_2 - C_1$.

2) Интегралловчи кўпайтувчи.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

дифференциал тенгламанинг ўнг томони бирор функциянинг тўла дифференциали бўлган ҳолни қарадик. Бу тенгламанинг ўнг томони бирор функциянинг тўла дифференциали бўлмасин. Айрим ҳолларда шундай $\mu(x, y)$

функцияни танлаб олиш мумкин бўладики, берилган тенгламани шу функцияга кўпайтирилганда, унинг чап томони бирор функциянинг тўла дифференциали бўлиши мумкин. Ҳосил қилинган дифференциал тенгламанинг умумий ечими Билан дастлабки берилган тенгламанинг умумий ечими бир хил бўлади. Бундай $\mu(x, y)$ функцияга берилган тенгламанинг интегралловчи кўпайтувчиси дейилади. Интегралловчи кўпайтувчини топиш учун, берилган тенгламани ҳозирча номаълум бўлган μ га кўпайтириб,

$$\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0$$

тенгламани оламиз. Охирги тенглама тўла дифференциалли бўлиши учун

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

тенглик ўринли бўлиши керак. Бундан

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

бўлиб,

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

бўлади. Охирги тенгламани μ га бўлсак,

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\mu \partial y}$$

бўлганлиги учун

$$M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

бўлади.

Умумий ҳолда μ x, y ларга боғлиқ, яъни $\mu(x, y)$. Берилган тенглама фақат x га боғлиқ интегралловчи кўпайтувчига эга бўлса, $\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = 0$ бўлиб,

$$N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{ёки} \quad \frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \quad (4)$$

бўлади. Дифференциал тенглама фақат y ўзгарувчига боғлиқ интегралловчи кўпайтувчига эга бўлса, $\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = 0$ бўлиб,

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \quad (5)$$

бўлади. Бу ҳолларда (4) ва (5) тенгликларни бевосита интеграллаб

$$\mu = e^{\int \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) / N dx}, \quad \mu = e^{\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) / M dy}$$

интегралловчи кўпайтувчини топамиз. Бунда (4) ва (5) нисбатлар, биринчи ҳолда y ўзгарувчига боғлиқ бўлмаган, иккинчи ҳолда x ўзгарувчига боғлиқ бўлмаган интегралловчи кўпайтувчиларнинг мавжудлигини билдиради.

2-мисол.

$$(x^2 - 3y^2) dx + 2xy dy = 0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламанинг тўла дифференциалли ёки тўла дифференциалли эмаслигини текшираамиз. $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ шартни текширайлик:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = (x^2 - 3y^2)'_y = -6y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = (2xy)'_x = 2y.$$

Демак, $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ тенглик бажарилмайди. (4) нисбатни қараймиз:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-6y - 2y}{2xy} = -\frac{4}{x}$$

бўлиб,

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = -\frac{4}{x}$$

бўлади. Охирги тенгликни интегралласак,

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{4}{x} dx} = e^{-4 \ln x} = e^{\ln x^{-4}} = \frac{1}{x^4}$$

ҳосил бўлади. Берилган тенгламани $\mu(x) = \frac{1}{x^4}$ функцияга кўпайтурсак,

$$\frac{x^2 - 3y^2}{x^4} dx + \frac{2xy}{x^4} dy = 0$$

бўлиб, кейинги тенглама учун $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ тенглик бажарилади, яъни охирги

дифференциал тенглама тўла дифференциалли тенгламадир. Бундай дифференциал тенгламаларнинг ечимини топишни юқорида ўргандик.

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1. Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимларини топинг:

- 1) $y' - \frac{y}{x} = -1$; 2) $y' + y = e^{-x}$; 3) $x^2 y' - 2xy = 3$; 4) $y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 1+x^2$;
5) $(a^2 + x^2)y' + xy = 1$; 6) $(2x+1)y' + y = x$; 7) $y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$;
8) $y' + y \cos x = \sin 2x$.

2. Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг хусусий ечимларини топинг:

- 1) $xy' + y = 3$, $x = 1$ да $y = 1$; 2) $(1+x^2)y' - xy = 2x$, $x = 0$ бо'лганда $y = 0$;
3) $xy' + y = x+1$, $x = 2$ бо'лганда $y = 3$.

3. 1) $y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$ дифференциал тенгламанинг $x = -1$ бўлганда $y = 1$

бўладиган хусусий ечимини топинг.

2) $y' + \frac{y}{3} = \frac{x+1}{3y^3}$ тенглама учун $x = 1$ бўлганда $y = -1$ бошланғич шарт

бажариладиган Коши масаласини ечинг.

4. Ушбу тўла дифференциалли тенгламаларнинг умумий ечимларини топинг:

- 1) $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$; 2) $(y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0$;
3) $2(3xy^2 + 2x^2)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0$; 4) $(3x^2 + 2y)dx + (2x - 3)dy = 0$;
5) $(3x^2y - 4xy^2)dx + (x^3 - 4x^2y + 12y^3)dy = 0$; 6) $3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0$.

5. Қуйидаги дифференциал тенгламалар учун интегралловчи кўпайтувчиларни топинг ва тенгламаларнинг умумий ечимларини аниқланг:

- 1) $(x^2 - y)dx + x dy = 0$; 2) $(y + xy^2)dx - x dy = 0$;
3) $y^2 dx + (xy - 1)dy = 0$; 4) $(\sin x + e^y)dx + \cos x dy = 0$;
5) $(x \cos y - y \sin y)dx + (x \sin y + y \cos y)dy = 0$; 6) $2x \operatorname{tg} x dx + (x^2 - 2 \sin y)dy = 0$.

Мавзу. Юқори тартибли дифференциал тенгламалар

Режа

1. $y^{(n)} = f(x)$ кўринишдаги дифференциал тенгламалар.
2. $F(x, y', y'') = 0$ кўринишдаги дифференциал тенгламалар.
3. $F(y, y', y'') = 0$ (эркли ўқзгарувчи ошкор қатнашмаган) кўринишдаги дифференциал тенгламалар.
4. Иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар ҳақида умумий тушунчалар.
5. Иккинчи тартибли ўзгармас коэффицентли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар.

Таянч ибора ва тушунчалар

Юқори тартибли дифференциал тенгламалар, бевосита кетма-кет интегралланиб ечиладиган юқори тартибли тенгламалар, тартибни пасайтириш билан ечиладиган юқори тартибли дифференциал тенгламалар, иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар, иккинчи тартибли бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган тенгламалар, чизиқли боғланган ва чизиқли боғланмаган функциялар, Вронский детерминанти, иккинчи тартибли ўзгармас коэффицентли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар, характеристик тенглама, Эйлер формуласи.

1. $y^{(n)} = f(x)$ кўринишдаги дифференциал тенгламалар

$y^{(n)} = f(x)$ кўринишдаги дифференциал тенглама кетма-кет n марта интеграллаш билан унинг ечими топилади. Ҳар бир интеграллашда биттадан ихтиёрий ўзгармас ҳосил бўлиб, натижада n та ихтиёрий ўзгармасга боғлиқ умумий ечим ҳосил бўлади.

1-мисол. $y'' = \cos 2x$ дифференциал тенгламанинг $x = 0$ бўлганда $y = 0$, $y' = 0$ бўладиган хусусий ечимини топинг.

Ечиш. $y' = p(x)$ десак, $y'' = p'$ бўлиб, берилган тенглама

$$p' = \cos 2x \text{ yoki } \frac{dp}{dx} = \cos 2x, \quad dp = \cos 2x dx$$

кўринишда бўлади. Охирги тенгламани интегралаб,

$$p = \frac{1}{2} \sin 2x + C_1$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

$p = y'$ бўлганлиги учун

$$y' = \frac{1}{2} \sin 2x + C_1$$

яъни,

$$dy = \frac{1}{2} \sin 2x dx + C_1 dx.$$

Охирги тенгликни интеграллаб,

$$\int dy = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx + \int C_1 dx, \quad y = -\frac{1}{4} \cos 2x + C_1 x$$

умумий ечимни оламиз.

Энди берилган бошланғич шартларда Коши масаласини ечамиз: $x = 0$ бўлганда $y = 0$, $y' = 0$ бўлганлиги учун,

$$-\frac{1}{4} \cos 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0$$

$$\frac{1}{2} \sin 0 + C_1 = 0, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{4}.$$

Шундай қилиб, Коши масаласининг ечими

$$y = -\frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4}$$

бўлади.

2. $F(x, y', y'') = 0$ кўринишдаги дифференциал тенгламалар

$F(x, y', y'') = 0$ кўринишдаги дифференциал тенглама $y' = p$,

$y'' = \frac{dp}{dx}$ алмаштириш орқали $F(x, p, \frac{dp}{dx}) = 0$ биринчи тартибли

дифференциал тенгламани ечишга келтирилади.

2-мисол. $y'' = \frac{y'}{x} + x$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш: $y' = p$ билан алмаштириб олсак

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x} + x$$

биринчи тартибли чизикли тенгламага келамиз. Бу тенгламани ечиб:

$$P = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left[C_1 + \int x e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx \right] = e^{\ln x} \left[C_1 + \int x e^{-\ln x} dx \right] = x(C_1 + \int x e^{-\ln x} dx) =$$

$$= x(C_1 + \int x \cdot \frac{1}{x} dx) = x(C_1 + x), \quad p = y' = C_1 x + x^2, \quad y = C_1 \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C_2$$

умумий ечимни оламиз.

3. $F(y, y', y'') = 0$ (эркли ўқзарувчи ошкор қатнашмаган) бундай дифференциал тенгламанинг умумий ечимини $y' = z(y)$ алмаштириш олиб, биринчи тартибли тенгламага келтириб ечим топилади.

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dy'}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z(y).$$

бўлади.

3-мисол. $yy'' - 2y'^2 = 0$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. $y' = z(y)$ алмаштириш олиб, $y'' = z \frac{dz}{dy}$ эканлигини ҳисобга олсак,

$yz \frac{dz}{dy} - 2z^2 = 0$ тенглама ҳосил бўлади. Бу биринчи тартибли

ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама:

$$\frac{ydz}{dy} = 2z \quad \text{yoki} \quad \frac{dz}{z} = 2 \frac{dy}{y},$$

охирги тенгламани интеграллаб,

$$\ln z = 2 \ln y + \ln C_1$$

бундан

$$z = C_1 y^2$$

бўлади. $z = \frac{dy}{dx}$ ни ҳисобга олсак ,

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y^2 \quad \text{yoki} \quad \frac{dy}{y^2} = C_1 dx$$

бўлади. Охирги тенгликдан

$$-\frac{1}{y} = C_1 x + C_2 \quad \text{yoki} \quad y = -\frac{1}{C_1 x + C_2}$$

бўлади. Бу берилган тенгламанинг умумий ечими бўлади.

4. Иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар ҳақида умумий тушунчалар. Физика, механика, техника ва иқтисоднинг жуда кўп масалаларини ечиш иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламаларга келтирилади.

Дифференциал тенгламада номаълум функция ва унинг ҳосилалари биринчи даражада қатнашса бундай тенгламага чизиқли дейилади. Иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама куйидаги кўринишда бўлади:

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x) \quad (1)$$

бу ерда y номаълум функция, $p(x)$, $g(x)$, $f(x)$ лар бирор (a, b) ораликда берилган узлуксиз функциялар, $f(x) = 0$ бўлса, (1) тенгламага **бир жинсли чизиқли дифференциал тенглама** дейилади. $f(x) \neq 0$ бўлса **бир жинсли бўлмаган чизиқли дифференциал тенглама** дейилади.

Бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган тенгламалар ечимини топишда чизиқли боғланган ва чизиқли боғланмаган функциялар тушунчасидан фойдаланилади.

$y_1(x)$ ва $y_2(x)$ функциялар бирор $[a, b]$ кесмада берилган бўлсин.

1-таъриф. Шундай α_1, α_2 ўзгармас сонлар топилсаки, улардан ҳеч бўлмаганда биттаси нўлдан фарқли бўлганда

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0 \quad (2)$$

айният ўринли бўлса, $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ функцияларга **чизиқли боғланган функциялар** дейилади.

$y_1(x)$ ва $y_2(x)$ функциялар чизиқли боғланган бўлса, улар пропорционал бўлади, яъни, $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$ бўлиб, $\alpha_1 \neq 0$ бўлса,

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \text{ yoki } \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{-\alpha_2}{-\alpha_1}, \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \text{const}$$

бўлади.

Масалан, $y_1(x) = 4x^2$ ва $y_2(x) = x^2$ функциялар чизиқли боғланган, чунки $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{4x^2}{x^2} = 4$.

2-таъриф. (2) тенглик фақат $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ бўлгандагина бажарилса, $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ функцияларга **чизиқли боғланмаган функциялар** дейилади.

Функцияларнинг чизиқли боғланган ёки чизиқли боғланмаганлигини

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

Вронский детерминанти ёрдамида текшириш мумкин. $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ функциялар (a, b) ораликда чизиқли боғланган бўлса, улардан тузилган Вронский детерминанти нўлга тенг бўлади. Бу функциялар учун (a, b) ораликда тузилган Вронский детерминанти нўлдан фарқли бўлса улар чизиқли боғланмаган бўлади.

5. Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар. Фан ва техника ҳамда иқтисоднинг кўп масалалари (1) тенгламада $p(x)$ ва $g(x)$ функциялар ўзгармас сонлар бўлган ҳолдаги тенгламаларга келтирилади. Шунинг учун бу функциялар ўзгармас коэффициентлар бўлган ҳолни алоҳида қараймиз. Бу ҳолда бир жинсли тенглама

$$y'' + py' + gy = 0 \quad (3)$$

кўринишда бўлиб p, g лар ўзгармас коэффициентлар. Бундай кўринишдаги тенгламага **иккинчи тартибли, ўзгармас коэффициентли, чизиқли, бир жинсли дифференциал тенглама** дейилади. (3) кўринишдаги тенгламанинг ечимини топиш билан қизиқамиз.

$y_1(x)$ ва $y_2(x)$ функциялар (3) тенгламанинг (a, b) ораликда чизиқли боғланмаган ечимлари бўлса,

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (4)$$

функция унинг умумий ечими бўлади, бу ерда c_1 ва c_2 ихтиёрий ўзгармаслар. Бу функцияни (3) тенгламага бевосита қўйиб кўрсатиш мумкин (буни бажариб кўринг).

1-мисол. $y'' - y = 0$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Бевосита қўйиш билан текшириб кўриш мумкинки, $y_1(x) = e^x$ ва $y_2(x) = e^{-x}$ берилган тенгламанинг ечимлари бўлади. Бу ечимлар чизиқли боғланмаган ечимлар бўлади, чунки Вронский детерминанти

$$\begin{vmatrix} e^x e^{-x} \\ e^x - e^{-x} \end{vmatrix} = e^x(-e^{-x}) - e^x e^{-x} = -1 - 1 = -2 \neq 0.$$

Демак, (4) формулага асосан, $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ функция берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими бўлади.

Шундай қилиб, (3) бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топиш учун, унинг иккита чизиқли боғланмаган хусусий ечимини топиш кифоя.

(3) тенгламанинг ечимини $y = e^{rx}$, кўринишда излаймиз, бу ерда r – номаълум сон. $y' = r e^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$, бўлиб, (3) тенгламадан

$$r^2 e^{rx} + p r e^{rx} + g e^{rx} = 0 \text{ yoki } r^2 + p r + g = 0, (e^{rx} \neq 0) \quad (5)$$

бўлади. (5) тенглик бажарилса $y = e^{rx}$ функция (3) тенгламанинг ечими бўлади.

(5) тенгламага (3) дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси дейилади. Характеристик тенгламанинг ечимлари

$$r_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - g} \text{ va } r_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - g}$$

бўлиб, бунда қуйидаги учта ҳол бўлиши мумкин:

1) r_1 ва r_2 лар ҳақиқий ва ҳар хил, яъни $r_1 \neq r_2$;

2) r_1 ва r_2 ҳақиқий ва тенг (каррали), яъни $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$;

3) r_1 ва r_2 комплекс сонлар, яъни $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, бунда;

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Ҳар бир ҳолни алоҳида қараймиз:

1) бу ҳолда $y_1(x) = e^{r_1 x}$, $y_2(x) = e^{r_2 x}$ функциялар чизиқли боғланмаган хусусий ечимлар бўлиб, умумий ечим

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \quad (6)$$

бўлади.

2-мисол. $y'' - 5y' + 6y = 0$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламага мос характеристик тенгламани тузамиз:

$$r^2 - 5r + 6 = 0.$$

Характеристик тенгламанинг илдизлари

$$r_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}; \quad r_1 = 2; \quad r_2 = 3$$

бўлиб, умумий ечим (6) формулага асосан

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

бўлади.

2) Иккинчи ҳолда, характеристик тенгламанинг илдизлари тенг

$r_1 = r_2$ ва $y_1(x) = e^{r_1 x}$ битта хусусий ечим бўлади. Иккинчи хусусий ечимни $y_2(x) = x e^{r_1 x}$ кўринишда танлаймиз. Бу функция ҳам (3) тенгламанинг ечими бўлади, ҳақиқатан ҳам

$$y_2(x) = x e^{r_1 x}, \quad y_2' = e^{r_1 x} (1 + r_1 x), \quad y_2''(x) = e^{r_1 x} (r_1^2 + 2r_1)$$

ифодаларни (3) тенгламага қўйиб

$$x(r_1^2 + pr_1 + g) + (2r_1 + p) = 0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. r_1 характеристик тенгламанинг илдизи бўлганлиги учун охирги тенгликдаги биринчи қавс айнан нўлга тенг,

$$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2} \text{ бўлганлиги учун иккинчи қавс ҳам айнан нўлга тенг.}$$

Демак, $y_2(x) = x e^{r_1 x}$ функция ҳам (3) тенгламанинг ечими бўлади, ҳамда $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимлар чизиқли боғланмаган (текшириб кўринг). Шундай қилиб,

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} \quad (7)$$

умумий ечим бўлади.

3-мисол. $y'' + 6y' + 9y = 0$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$r^2 + 6r + 9 = 0$$

бўлиб, илдизлари $r_1 = r_2 = -3$ бўлади (тенгламани ечиб кўрсатинг).

Характеристик тенгламанинг илдизлари ўзаро тенг, (7) формулага асосан

$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$ функция берилган тенгламанинг умумий ечими бўлади.

3) Характеристик тенгламанинг илдизлари комплекс, қўшма:

$r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ бўлганда хусусий ечимларни

$$y_1(x) = e^{r_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}$$

$$y_2(x) = e^{r_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x}$$

кўринишда олиш мумкин. Бу ифодаларга

$$e^{\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x$$

Эйлер формуласини татбиқ этсак,

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

тенгликлар ҳосил бўлади. Маълумки, бу функцияларнинг чизиқли комбинацияси ҳам бир жинсли тенгламанинг ечимлари бўлади. Шунинг учун

$$y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{va} \quad y_2 = \frac{y_1 - y_2}{2} = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

функциялар ҳам (3) тенгламанинг ечимлари бўлади. Бу ечимлар чизиқли боғланмаган, чунки улардан тузилган Вронский детерминанти нўлдан фарқли (текшириб кўринг).

Демак,

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \quad (8)$$

(3) тенгламанинг умумий ечими бўлади.

4-мисол. $y'' + 6y' + 13y = 0$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламага мос характеристик тенгламанинг илдизлари:

$$r_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2};$$

$r_1 = -3 + 2i$, $r_2 = -3 - 2i$ бўлади. Бу илдизлар комплекс қўшма бўлиб учинчи ҳолга мос келади. $\alpha = -3$, $\beta = 2$ эканлигини ҳисобга олиб (8) формулага асосан умумий ечим,

$$y = e^{-3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

бўлади.

Энди иккинчи тартибли ўзгармас коэффицентли бир жинсли тенглама учун берилган бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимни топишни, яъни Коши масаласини қараймиз.

5-мисол. $y'' - y' - 2y = 0$ дифференциал тенгламанинг $x = 0$ бўлганда $y = 8$, $y' = 7$ бўладиган хусусий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенглама иккинчи тартибли ўзгармас коэффицентли, бир жинсли, чизиқли тенгламадир. Унга мос характеристик тенглама

$$r^2 - r - 2 = 0$$

бўлиб, $r_1 = -1$, $r_2 = 2$ унинг илдизлари бўлади. Демак, тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

бўлади. Охирги тенгликдан ҳосила олсак,

$$y' = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x}$$

бўлиб, $x = 0$ бўлганда $y = 8$, $y' = 7$ бошланғич шартларга асосан,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 8 \\ -C_1 + 2C_2 = 7 \end{cases}$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Охирги тенгламалар системасидан $C_1 = 3$, $C_2 = 5$ ларни аниқлаймиз. Шундай қилиб, изланаётган хусусий ечим

$$y(x) = 3e^{-x} + 5e^{2x}$$

бўлади.

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1. $y''' = \frac{6}{x^3}$ тенгламанинг $x = 1$ бўлганда $y = 2$, $y' = 1$, $y'' = 1$

бўладиган хусусий ечимини топинг.

2. Қуйидаги тенгламаларнинг умумий ечимларини топинг.

1) $x^3 y'' + x^2 y' = 1$; 2) $yy'' + y'^2 = 0$; 3) $y'' + 2y(y')^3 = 0$; 4) $y'' y^3 = 1$;

5) $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$; 6) $y'' + y'tgx = \sin 2x$; 7) $y'' + 2y'^2 = 0$;

8) $xy'' - y'tgx = e^x x^2$; 9) $2yy'' = (y')^2$; 10) $t \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} + t = 0$.

3. Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

1) $y'' + 3y' - 4y = 0$; 2) $y'' - 2y' - 5y = 0$; 3) $y'' - y = 0$;

4) $4y'' - 12y' + 9y = 0$; 5) $y'' + 2\sqrt{2}y + 2y = 0$; 6) $y'' - 2y' + 50y = 0$;

7) $y'' - 4y' + 7y = 0$; 8) $y'' + 6y' = 0$.

4. $y'' + 10y' + 25y = 0$ тенгламанинг $x = 1$ бўлганда,

$y = e^{-5}$, $y' = 3e^{-5}$ бўладиган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимни топинг.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Юқори тартибли дифференциал тенгламаларнинг қандай хиллари бор?

2. Қандай дифференциал тенгламаларнинг тартибини пасайтириш билан ечиш мумкин?

3. Қандай дифференциал тенгламаларга чизикли дейилади?

4. Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизикли бир жинсли дифференциал тенгламалар қандай кўринишда бўлади?

5. Характеристик тенглама нимадан иборат?

6. Характеристик тенглама илдизларига қараб умумий ечимни ёзиш мумкинми?

7. Характеристик тенглама илдизлари комплекс қўшма бўлганда ечим қандай ёзилади?

8. Характеристик тенглама илдизлари каррали, ҳақиқий ва ҳар хил бўлганда умумий ечим қандай ёзилади?

9. Эйлер формуласи қандай бўлади?

**Мвзу: Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир
жинсли бўлмаган дифференциал тенгламалар**

Режа

**1.Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир
жинсли бўлмаган дифференциал тенгламалар .**

2. Дифференциал тенгламаларнинг иқтисоддаги татбиқлари.

Таянч ибора ва тушунчалар

Чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг умумий ечими, бирорта хусусий ечим, бирорта хусусий ечимни тенгламанинг ўнг томони кўпхад бўлганда топиш, синус ва косинус функциялар йиғиндиси бўлганда топиш, аниқмас коэффициентлар усули, ишлаб чиқаришнинг раъобатсиз шароитда ўсиш модели, ишлаб чиқаришнинг рақобатли шароитда ўсиши модели, логистик чизиқ, талаб ва таклифни дифференциал тенглама ёрдамида таҳлили.

**1.Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли
бўлмаган дифференциал тенгламалар .** Бундай тенглама

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (1)$$

кўринишда бўлиб, бу ерда p, q ўзгармас коэффициентлар, $f(x)$ берилган узлуксиз функция.

Чизиқли **бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг умумий ечими**, бундай тенгламанинг бирорта хусусий ечими ва унга мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими йиғиндисидан иборат бўлади, яъни $\bar{y}$ бир жинсли тенгламанинг умумий ечими y_1 бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечими бўлса, умумий ечим

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_1(x) \quad (2)$$

кўринишда бўлади. Бу фикрга (2) ечимни (1) тенгламага қўйиб кўриш билан ишониш мумкин (буни бажариб кўринг).

(1) тенгламага мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими $\bar{y}(x)$ ни топишни юқорида ўргандик. Эндиги вазифа бир жинсли бўлмаган тенгламанинг бирорта хусусий ечимини топишдан иборат бўлади. (1) тенгламада $f(x)$ функция:

1) $f(x) = e^{\alpha x} P(x)$, бу ерда $P_n(x)$ n – даражали кўп хад;

2) $f(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x$

кўринишда бўлганда хусусий ечимни топиш масаласини қараймиз.

Биринчи ҳолда хусусий ечимни

$$y_1(x) = x^k e^{\alpha x} Q_n(x)$$

кўринишда излаймиз, бу ерда k характеристик тенглама илдизларининг α га тенг бўлганлари сони (0,1,2 бўлиши мумкин), $Q_n(x)$, $P_n(x)$ билан бир хил

даражали, лекин аниқмас коэффициентли кўпхад. Бу ҳолга бир неча мисоллар қараймиз.

1-мисол. $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}(25x^2 - 47)$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Олдин берилган тенгламага мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топамиз: бир жинсли тенглама $y'' + 2y' - 3y = 0$ бўлиб, унинг характеристик тенгласи $r^2 + 2r - 3 = 0$ бўлади. Унинг илдизлари

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}, \quad r_1 = -3, \quad r_2 = 1$$

бўлиб, биржинсли тенгламанинг умумий ечими $\bar{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$ бўлади.

Энди берилган биржинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини топамиз: Уни e^{2x} функция ва берилган кўпхад даражаси билан бир хил кўпхад, лекин аниқмас коэффициентли кўпхад кўпайтмаси кўринишида излаймиз. Шундай қилиб, хусусий ечим

$$y_1(x) = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C)$$

кўринишда бўлади. Энди аниқмас A, B ва C коэффициентларни топиш лозим. Шартга кўра $y_1(x)$ берилган тенгламани қаноатлантириши керак.

Бунинг учун

$$y_1(x) = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C), \quad y_1'(x) = 2e^{2x}(Ax^2 + Bx + C) + e^{2x}(2Ax + B),$$

$$y_1''(x) = 4e^{2x}(Ax^2 + Bx + C) + 2e^{2x}(2Ax + B) + e^{2x} \cdot 2A$$

ларни берилган тенгламага қўйиб,

$$e^{2x}[2A + 6(2Ax + B) + 5(Ax^2 + Bx + C)] = e^{2x}(25x^2 - 47)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Охирги тенгликни e^{2x} га бўлсак,

$$5Ax^2 + (12A + 5B)x + 2A + 6B + 5C = 25x^2 - 47$$

бўлади.

$y_1(x) = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C)$ берилган тенгламанинг ечими бўлиши учун охирги тенгламадаги бир хил даражали x лар коэффициентлари ўзаро тенг бўлиши керак, яъни

$$\begin{cases} 5A = 25, \\ 12A + 5B = 0, \\ 2A + 6B + 5C = 47. \end{cases}$$

Учта номаълум коэффициентларга нисбатан учта чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қилдик. Бу системани ечсак $A = 5$, $B = -12$, $C = 3$ бўлади (буни бажариб кўринг).

Демак, $y_1(x) = e^{2x}(5x^2 - 12x + 3)$ берилган тенгламанинг хусусий ечими бўлади.

Берилган тенгламанинг умумий ечими (2) формулага асосан

$$y = \bar{y} + y_1 = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + e^{2x}(5x^2 - 12x + 3)$$

бўлади.

Юқоридагидек хусусий ечимни топишга аниқмас коэффициентлар усули дейилади.

2-мисол. $y'' - 4y' = 3x^2$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

$r^2 - 4r = 0$ бўлиб, $r_1 = 0$; $r_2 = 4$ унинг илдизлари бўлади ва бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$\bar{y}(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{4x} = C_1 + C_2 e^{4x}$$

бўлади. Берилган тенгламанинг ўнг томони $3e^{0x}x^2$ бўлиб, $\alpha = 0$ ва нўл характеристик тенгламанинг илдизи бўлганлиги учун хусусий ечим

$$y_1(x) = e^{0x}x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

кўринишда бўлади.

$$y_1'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad y_1'' = 6Ax + 2B$$

буларни берилган тенгламага қўйсак,

$$-12Ax^2 + (6A - 8B)x + 2B - 4C = 3x^2$$

тенглама ҳосил бўлади. Бир хил даражали x лар коэффициентларини тенглаштириб,

$$\begin{cases} -12A = 3, \\ 6A - 8B = 0, \\ 2B - 4C = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасини оламиз. Бундан

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = -\frac{3}{16}, \quad C = -\frac{3}{32}$$

бўлади. Шундай қилиб, хусусий ечим

$$y_1(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{32}x$$

бўлиб, умумий ечим

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{1}{4}(x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{8}x)$$

бўлади.

2) $f(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x$ бўлганда хусусий ечим

$y_1(x) = (A \cos \beta x + B \sin \beta x)x^k$ кўринишда бўлиб, k характеристик тенглама илдизларининг $i\beta$ га тенг бўлганларининг сони.

3-мисол. $y'' + y = \sin x$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Характеристик тенглама $r^2 + 1 = 0$ бўлиб, илдизлари $r_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

бўлади.

$$\beta = 1; \quad i\beta = i$$

бўлганлиги учун $k = 1$, яъни хусусий ечимни

$$y_1(x) = (A \cos x + B \sin x)x^1$$

кўринишда излаймиз. A ва B аниқмас коэффициентлар. Бу функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топиб,

$$y_1'(x) = (A \cos x + B \sin x)x + A \cos x + B \sin x = (A + Bx) \cos x + (B - Ax) \sin x$$

$$y_1''(x) = B \cos x - A \sin x - Bx \sin x - A \sin x + B \cos x - Ax \cos x = (2B - Ax) \cos x + (-2A - Bx) \sin x$$

берилган тенгламага қўйсак,

$$(2B - Ax) \cos x + (2A - Bx) \sin x + Ax \cos x + Bx \sin x = \sin x \quad yoki$$

$$2B \cos x + (-2A) \sin x = \sin x$$

ҳосил бўлади. Охирги тенгликдан

$$\begin{cases} 2B = 0, \\ -2A = 1 \end{cases}$$

ва $B = 0$, $A = -\frac{1}{2}$ бўлиб, хусусий ечим

$$y_1(x) = -\frac{x}{2} \cos x$$

бўлади.

Бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$\bar{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

бўлганлиги учун, берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_1(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2} \cos x$$

бўлади.

4-мисол. $y'' + 4y' + 5y = 2 \cos x - \sin x$ дифференциал тенгламанинг $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

Ечиш. Олдин берилган тенгламанинг умумий ечимини топамиз.

$y'' + 4y' + 5y = 0$ тенгламанинг характеристик тенгламаси $r^2 + 4r + 5 = 0$ бўлиб, унинг илдизлари $r_1 = -2 - i$; $r_2 = -2 + i$ бўлади. Бир жинсли тенглама умумий ечими

$$\bar{y}(x) = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

бўлади.

Энди берилган тенгламанинг бирор хусусий ечимини топамиз: уни

$$y_1(x) = A \cos x + B \sin x$$

кўринишда излаймиз. $y'(x)$, $y''(x)$ ҳосилаларни топиб берилган тенгламага қўйсак,

$$(4A + 4B) \cos x + (4B - 4A) \sin x = 2 \cos x - \sin x$$

бўлиб, $\cos x$ ва $\sin x$ лар коэффициентларини тенглаштириб.

$$\begin{cases} 4A + 4B = 2. \\ 4B - 4A = -1 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз, бундан $A = \frac{3}{8}$, $B = \frac{1}{8}$ эканлигини аниқлаб, хусусий ечимни топамиз.

$$y_1(x) = \frac{3}{8} \cos x + \frac{1}{8} \sin x$$

Берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_1(x) = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{3}{8} \cos x + \frac{1}{8} \sin x$$

бўлади.

Энди берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимни аниқлаймиз, яъни бошланғич шартлар берилганда Коши масаласининг ечимини топамиз:

Умумий ечимдан ҳосила

$$y'(x) = -2e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{2x} (-C_1 \sin x + C_2 \cos x) - \frac{3}{8} \sin x + \frac{1}{8} \cos x$$

бўлади, бошланғич шартлардан фойдаланиб,

$$1 = \frac{3}{8} + C_1, \quad 2 = \frac{1}{8} - 2C_1 + C_2$$

C_1 ва C_2 номаълумларга нисбатан тенгламалар системасини ҳосил қиламиз, бундан $C_1 = \frac{5}{8}$, $C_2 = \frac{25}{8}$.

Шундай қилиб, берилган тенгламага қўйилган Коши масаласининг ечими

$$y(x) = e^{-2x} \left(\frac{5}{8} \cos x + \frac{25}{8} \sin x \right) + \frac{3}{8} \cos x + \frac{1}{8} \sin x$$

бўлади.

2. Дифференциал тенгламаларнинг иқтисоддаги татбиқлари

Дифференциал тенгламаларнинг иқтисоддаги татбиқларига бир неча мисоллар келтирамиз.

1). Ишлаб чиқаришнинг рақобатсиз шароитда (табиий) ўсиш модели. Бирор турдаги маҳсулот ишлаб чиқарилиб у тайин (белгиланган) P нархда сотилаётган бўлсин. $Q(t)$ вақтнинг t оқида (моментида) реализация қилинган маҳсулот миқдори бўлсин. Бу ҳолда маҳсулотни реализация қилишдан олинган даромад

$$PQ(t)$$

модел билан ифодаланади. Бу даромаднинг бир қисми албатта ишлаб чиқариш $J(t)$ инвестициясига сарфлансин, яъни

$$J(t) = mPQ(t) \quad (1)$$

бўлсин, бунда m инвестиция меъёри бўлиб ўзгармас сон, ҳамда $0 < m < 1$.

Ишлаб чиқарилаётган маҳсулот тўлиқ реализация қилинаётган бўлса, ишлаб чиқаришни кенгайтириш натижасида даромаднинг ўсиши таъминланиб, бу даромаднинг бир қисми яна маҳсулот ишлаб чиқаришни кенгайтиришга сарфланади. Бу ҳол ишлаб чиқариш тезлигининг ўсиши (акселерация)га олиб келади, ҳамда ишлаб чиқариш тезлиги инвестицияга пропорционал бўлади, яъни

$$Q(t) = eJ(t), \quad (2)$$

бунда $\frac{1}{e}$ акселерация меъёри. (1) ва (2) тенгликлардан

$$Q(t) = emPQ \quad yoki \quad Q(t) = kQ(t) \quad (3)$$

келиб чиқади, бунда $k = emP$.

(3) дифференциал тенглама биринчи тартибли, ўзгарувчилари ажраладиган тенглама бўлиб, унинг умумий ечими

$$\frac{dQ}{dt} = KQ, \quad \frac{d\theta}{Q} = kdt, \quad \ln Q = kt + \ln c \quad yoki \quad Q = ce^{kt}$$

бўлади, бунда c ихтиёрий ўзгармас.

Вақтнинг $t = t_0$ моментида ишлаб чиқарилган маҳсулот миқдори Q_0 бўлсин.

Бу шартда

$$Q_0 = ce^{kt_0} \quad yoki \quad c = Q_0 e^{-kt_0}$$

бўлади. (3) тенглама учун Коши масаласининг ечими

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)} \quad (4)$$

бўлади.

Шундай қилиб, ишлаб чиқаришнинг табиий ўсиши модели экспоненциал бўлар экан (табиий ўсиш деганимизда рақобат йўқлиги тушунилади).

Математик моделлар **умумийлик хоссасига эга**. Бунинг мисоли сифатида куйидаги ҳолни келтириш мумкин. Биологик кузатишлардан маълумки бактерияларнинг кўпайиш жараёни ҳам (3) дифференциал тенглама билан ифодаланади. Бундан ташқари радиоактив парчаланиш: радиоактив модда массасининг камайиши жараёни қонуни ҳам (4) формулага мос келади.

2). Ишлаб чиқаришнинг рақобатли шароитда ўсиши модели

Олдинги мисолда ишлаб чиқарилаётган маҳсулот тўлиқ реализация бўладиган шароитни қарадик. Энди рақобатли, яъни бозорга бу маҳсулотни бошқалар ҳам реализация қиладиган шароитни қараймиз. Бундай шароитда маҳсулот ишлаб чиқариш миқдорини кўпайтириш билан бозорда унинг нархи камайди. $P = P(Q)$ функция (P маҳсулот нархи, Q маҳсулот миқдори) камаювчи бўлиб

$\frac{dP}{dQ} < 0$ бўлади. Энди (1)-(3) формулалардагидек

$$Q = \alpha P(Q)Q \quad (5)$$

тенгламани ҳосил қиламиз, бунда $\alpha = et$. (5) тенгламанинг ўнг томонидаги кўпайтувчилар ҳаммаси мусбат ишорали, демак $Q' > 0$ бўлади, яъни $Q(t)$ ўсувчи функция эканлиги келиб чиқади.

Оддийлик учун $P(Q)$ функционал боғланиш чизиқли, яъни

$$P(Q) = a - bQ, \quad a >, \quad b > 0$$

бўлган ҳолни қараймиз. Бу ҳолда (5) тенглама

$$Q' = \alpha(a - bQ)Q \quad (6)$$

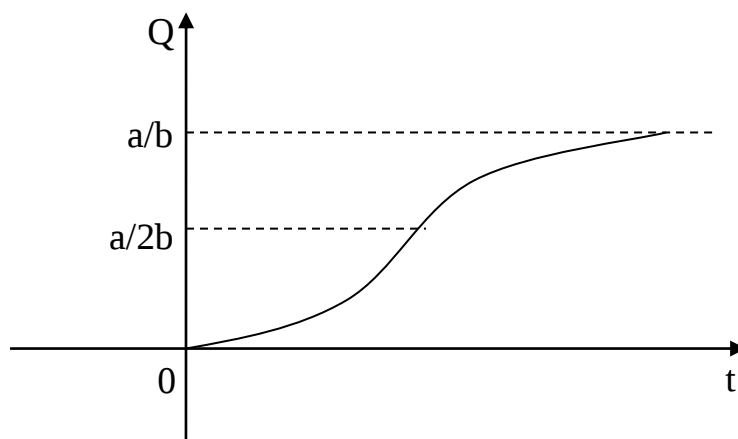
кўринишда бўлади. (6) тенгликни дифференциалласак $Q'' = (\alpha a Q - \alpha b Q^2)' = \alpha a Q' - 2\alpha b Q Q'$ yoki $Q'' = \alpha Q'(a - 2bQ)$ (7)

тенглама ҳосил бўлади. (6)-(7) тенгламалардан $Q = 0$ va $Q = \frac{a}{b}$ бўлганда,

$Q' = 0$, $Q < \frac{a}{2b}$ бўлганда, $Q'' > 0$ ҳамда $Q > \frac{a}{2b}$ бўлса $Q'' < 0$ келиб

чиқади. Булардан $\frac{a}{2b}$ нуқтадан ўтишда Q ишорасини ўзгартирганлиги учун,

бу нуқта $Q = Q(t)$ функция графигининг эгилиш нуқтаси бўлади. Бу функция графиги, яъни (6) дифференциал тенглама интеграл чизиқларидан бири, 1-чизмада тасвирланган бўлиб, бу эгри чизиққа иқтисодда логистик чизиқ деб аталади.



1-чизма.

3). Талаб ва таклифни таҳлил қилиш. Маълумки, бозор моделида маҳсулотга талаб ва таклиф мавжуд ҳолатларда нархнинг ўзгариш суръати билан боғлиқ бўлади. Бундай суръат t вақтнинг $P(t)$ нарх функцияси биринчи ва иккинчи тартибли ҳосиласи билан характерланади.

Қуйидаги мисолни қараймиз. Талаб D ва таклиф S P нархнинг функцияси бўлиб ушбу билан ифодалансин:

$$D(t) = p'' - 2p' - 6p + 36, \quad S(t) = 2p'' + 4p' + 4p + 6 \quad (1)$$

Бундай боғлиқлик ҳақиқатда мавжуд ҳолатларга мос келади. Ҳақиқатан ҳам, нарх суръати ошса бозорнинг маҳсулотга қизиқиши ортади, яъни $p'' > 0$ бўлади. Нархнинг тез ўсиши харидорни чўчитиб талабнинг пасайишига олиб келади. Шунинг учун, p' биринчи тенгликда манфий ишора билан ифодаланади. Иккинчидан, нарх суръатининг ортиши билан таклиф яна кучаяди, шунинг учун p'' нинг коэффиценти талаб функциясидагига нисбатан катта, нархнинг ўсиши тезлиги таклифнинг ҳам ўсишига олиб келади, яъни p' таклиф функциясида мусбат ишорали бўлади.

Нарх функцияси ва вақт ўзгариши орасидаги боғланишни таҳлил қилайлик. Маълумки, бозор ҳолати $D = S$ мувозанат билан ифодаланади. Бу ҳолда (1) тенгликдан

$$p'' + 6p' + 10 = 30 \quad (2)$$

иккинчи тартибли, ўзгармас коэффицентли, чизиқли, бир жинсли бўлмаган дифференциал тенглама келиб чиқади.

Бизга маълумки бундай тенгламанинг умумий ечими бу тенгламага мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими ва (2) бир жинсли бўлмаган тенгламанинг бирорта хусусий ечими йиғиндисидан иборат. Бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$\bar{p}(t) = e^{-3t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t)$$

бўлади, бунда C_1 ва C_2 лар ихтиёрий ўзгармаслар.

Бир жинсли бўлмаган (2) тенглама хусусий ечими $p_1(t) = A$ ўзгармас, яъни қарор топган нархни оламиз, ҳамда буни (3) тенгламага қўйиб $A = 3$ эканлигини аниқлаш мумкин. Демак, $p_1(t) = 3$ бўлади.

Шундай қилиб (9) бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими

$$p(t) = \bar{p}(t) + p_1(t) = e^{-3t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t) + 3 \quad (3)$$

бўлади.

Бу ечимдан $t \rightarrow \infty$ да $p(t) \rightarrow 3$ бўлади, яъни ҳамма нархлар қарор топган нархга яқинлашади.

Ушбу Коши масаласини қараймиз: $t = 0$ бўлганда, нарх $p(0) = 4$ ва ўсиш майли (тенденцияси) $p'(0) = 1$ бўлсин. $t = 0$ бўлганда $p(0) = 4$ бўлганлиги учун (10) дан $C_1 = 1$ келиб чиқади. (3) тенгликдан ҳосила олиб ва $t=0$ бўлганда $p(0) = 1$ шартдан фойдалансак $C_2 = 4$ келиб чиқади, демак Коши масаласининг ечими

$$p(t) = 3 + e^{-3t} (\cos t + 4 \sin t)$$

бўлади.

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1. Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

1) $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$; 2) $y'' + y' + 7y = 8\sin 2x$; 3) $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$;

4) $y'' - 5y' + 6y = 3e^{2x}$; 5) $y'' + 9y = (43 + 10x - 26x^2)e^{2x}$;

6) $y'' + 6y' + 10y = 9\cos x + 27\sin x$; 7) $y'' - 6y' + 9y = 2\sin 2x$

2. $y'' + 16y = \sin 4x$ тенглама учун $x = 0$ бўлганда $y = 1$, $y' = \frac{7}{8}$

бўладиган бошланғич шартларда, Коши масаласини ечинг.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламаларнинг умумий ечими қандай топилади?

2. Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламаларнинг бирорта хусусий ечими қандай топилади?

3. Аникмас коэффициентлар усули нимадан иборат?

4. Ишлаб чиқаришнинг раёбатсиз шароитда ўсиш модели қандай бўлади?

5. Ишлаб чиқаришнинг раёбатли шароитда ўсиши модели нима?

6. Логистик чизиқ деб нимага айтилади?

7. Талаб ва таклифни дифференциал тенглама ёрдамида қандай таҳлил қилинади?

ҚАТОРЛАР

Мавзу: Сонли қаторлар ва уларнинг яқинлашиш белгилари

Режа:

1. Сонли қаторлар ҳақида тушунчалар

2. Қатор йиғиндиси ва унинг яқинлашуви

3. Қатор яқинлашишининг зарурий белгиси(шарти)

4. Мусбат ҳадли қаторлар яқинлашишининг етарли белгилари

1. Сонли қаторлар ҳақида тушунчалар

1-таъриф. $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ сонлар кетма-кетлигидан тузилган.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1)$$

чексиз йиғиндига сонли қатор дейилади.

$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ ларга қаторнинг ҳадлари, u_n га эса n -ҳади ёки умумий ҳади дейилади.

Қаторларга бир неча мисоллар келтирамиз:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

қаторга гармоник қатор дейилади;

$$2) \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

қатор биринчи ҳади $a_1 = \frac{1}{2}$, махражи $q = \frac{1}{2}$ бўлган геометрик прогрессияни ифодалайди;

$$3) \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

2. Қатор йиғиндиси ва унинг яқинлашуви. Сонли қатор таърифидан маълумки, унинг ҳадлари чексиз кўп бўлиб, йиғиндисини оддий йўл билан қўшиб, топиб бўлмайди. Шунинг учун қаторнинг йиғиндиси тушунчасини киритамиз. (1) қатор ҳадларидан

$$u_1 = S_1, \quad u_1 + u_2 = S_2, \quad u_1 + u_2 + u_3 = S_3, \dots,$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = S_n$$

қисмий йиғиндилар тузамиз.

2-таъриф. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ чекли лимит мавжуд бўлса, S га **қатор йиғиндиси** дейилади ва **қатор яқинлашувчи** деб аталади.

Чекли лимит мавжуд бўлмаса, қаторнинг йиғиндиси бўлмайди ва у **ўзоқлашувчи** дейилади.

1-мисол.
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш. Берилган қаторнинг n қисмий йиғиндиси

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

бўлиб,
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

Шундай қилиб, берилган сонли қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $S=1$ бўлади.

3. Қатор яқинлашишининг зарурий белгиси(шарти).

Теорема. $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ (2)

қатор яқинлашувчи бўлса,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

шарт бажарилади.

Исбот. (2) қатор яқинлашувчи бўлганлиги учун

$$u_n = S_n - S_{n-1}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Шундай қилиб, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ келиб чиқди.

Натижа. Қатор умумий ҳадининг $n \rightarrow \infty$ даги лимити 0 га тенг бўлмаса, у узоқлашувчи бўлади. Лекин $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ шартдан қаторнинг яқинлашувчилиги келиб чиқмайди. Бу шарт фақат зарурий шарт бўлиб, етарли эмас.

4. Мусбат ҳадли қаторлар яқинлашишининг етарли белгилари

1) Қатор яқинлашишининг таққослаш белгиси.

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (3)$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (4)$$

қаторлар учун $u_1 \leq v_1, u_2 \leq v_2, \dots, u_n \leq v_n, \dots$ тенгсизликлар ҳамма n лар учун бажарилиб: (4) қатор яқинлашувчи бўлса, (3) қатор ҳам яқинлашувчи бўлиди ва унинг йиғиндиси (4) қатор йиғиндисидан катта бўлмайди; (3) қатор узоқлашувчи бўлса, (4) қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.

$$\text{2-мисол. } 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \dots$$

қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш. Берилган қаторни

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

қатор билан таққослайимз. Маълумки, кейинги қатор махражи $q = \frac{1}{2}$ га тенг бўлган геометрик прогрессия бўлиб, яқинлашувчидир. Ҳамма n лар учун

$$\frac{1}{n \cdot 2^n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

тенгсизликлар бажарилади, демак таққослаш белгисига асосан, берилган қаторнинг ҳам яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади.

2). Даламбер белгиси. Мусбат ҳадли

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$$

қатор берилган бўлсин. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$ лимит мавжуд бўлиб: $d < 1$ бўлса,

қатор яқинлашувчи; $d > 1$ бўлса, қатор узоқлашувчи; $d = 1$ бўлса, қатор яқинлашувчи ҳам узоқлашувчи ҳам бўлиши мумкин, бундай ҳолларда қаторни бошқа белгилардан фойдаланиб текшириш керак бўлади.

$$\text{3-мисол. } 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

қатор яқинлашишини текширинг.

$$\text{Ечиш. } d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Демак, берилган қатор Даламбер белгисига асосан яқинлашувчи.

$$\text{4-мисол. } 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{n}{2n-1} + \dots$$

қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш.

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n+1} / \frac{n}{2n-1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n-1)}{(2n+1)n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 1}{2n^2 + n} = \frac{2}{2} = 1.$$

Бу ҳолда Даламбер белгиси саволга жавоб бермайди. Берилган қатор учун қатор яқинлашишининг зарурий белгисини текширайлик.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Қатор яқинлашишининг зарурий шarti бажарилмайди, демак берилган қатор узоқлашувчи.

3) **Коши белгиси.**

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

мусбат ҳадли қатор берилган бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

лимит мавжуд ва $k < 1$ бўлса, қатор яқинлашувчи; $k > 1$ бўлса, қатор узоқлашувчи; $k = 1$ бўлса, қатор яқинлашувчи ҳам, узоқлашувчи ҳам бўлиши мумкин, бу ҳолда Коши белгиси саволга жавоб бермайди.

$$\text{5-мисол. } \sum_1^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5} \right)^2 + \left(\frac{3}{7} \right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n + \dots$$

қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш. Коши белгисидан

$$k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Шундай қилиб, берилган қатор Коши белгисига асосан яқинлашувчи бўлади.

4) Қатор **яқинлашишининг интеграл белгиси**

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

мусбат ҳадли қатор берилган бўлсин.

$f(n) = a_n$ натурал аргументли функция тузамиз. $f(n)$ узлуксиз, мусбат ва камаювчи функция бўлсин.

$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(n)dn$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, берилган қатор

ҳам яқинлашувчи, хосмас интеграл узоқлашувчи бўлса, қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.

6-мисол. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$

қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш. $f(n) = \frac{1}{n^2}$ yoki $f(x) = \frac{1}{x^2}$ функцияни тузиб, ушбу хосмас

интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-2}dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \right)_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{1} \right) = 1.$$

Демак, хосмас интеграл яқинлашувчи, интеграл белгига асосан, текширилаётган қатор ҳам яқинлашувчидир.

7-мисол. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

гармоник қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш. $f(n) = \frac{1}{n}$ yoki $f(x) = \frac{1}{x}$ бўлганлиги учун

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln 1) = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty.$$

Демак, хосмас интеграл узоқлашувчи, интеграл белгига асосан, гармоник қатор ҳам узоқлашувчи эканлиги келиб чиқади.

5. Ишоралари алмашинувчи қаторлар(Лейбниц љатори). Ишоралари ҳар хил бўлган қаторларга ўзгарувчан ишорали қаторлар дейилади.

Ўзгарувчан ишорали қаторларнинг хусусий ҳоли ишоралари навбат билан алмашинувчи қаторлардир.

Масалан, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$

қатор биринчи ҳади мусбат бўлган ишоралари навбат билан алмашинувчи қатордир.

Ишоралари навбат билан алмашинувчи қаторлар яқинлашишини **Лейбниц белгиси** билан текширилади.

Ишоралари навбат билан алмашинувчи

$$a_1 - a_2 + a_3 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots \quad (5)$$

қатор берилган бўлсин. Бу ерда $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ мусбат сонлар.

Лейбниц белгиси. Ишоралари навбат билан алмашинувчи қатор ҳадлари абсолют қиймати бўйича камаювчи, яъни 1) $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$

ва 2) умумий ҳадининг $n \rightarrow \infty$ даги лимити нўлга тенг, яъни $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$

бўлса, ишоралари навбат билан алмашинувчи (5) қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси биринчи ҳаддан катта бўлмайди. Бу шартлардан биронтаси бажарилмаса қатор узоқлашувчи бўлади.

$$8\text{-мисол. } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш. Лейбниц белгиси шартларини текширамиз:

$$1) 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0. \text{ Демак, Лейбниц белгисининг иккала шarti}$$

ҳам бажарилади. Шундай қилиб, берилган қатор Лейбниц белгисига асосан, лъатор яқинлашувчи.

$$9\text{-мисол. } 1,1 - 1,01 + 1,001 - \dots$$

қатор яқинлашишини текширинг.

$$\text{Ечиш: } 1,1 > 1,01 > 1,001 > \dots$$

биринчи шарт бажарилади. Лекин $a_n = 1 + 0,1^n$ бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{10^n}) = 1 \neq 0,$$

Лейбниц белгисининг иккинчи шarti бажарилмайди. Демак, берилган қатор узоқлашувчи.

Қаторлар назариясидан тақрибий ҳисоблашларда кенг қўлланилади. Тақрибий ҳисоблашларда йўл қўйилган хатоликни баҳолаш катта амалий аҳамиятга эга. Ишоралари навбатлашувчи қаторларда хатолик, ҳисобга олинмаётган биринчи ҳад абсолют қийматидан катта бўлмайди, яъни

$$|r_n| < a_{n+1}.$$

$$10\text{-мисол. } S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$$

ни 0,1 аниқликда таърибий ҳисобланг.

Ечиш: Шартга асосан $|r_n| < 0,1$ бўлиши керак.

$$|r_n| < a_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{n+1} = \frac{1}{10}, \quad n+1=10, \quad n=9. \text{ Демак,}$$

$$S_9 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \approx 0,74.$$

Бунда $S \approx 0,7 ; 0,1$ гача аниқликда ҳисобланди.

Энди ўзгарувчан ишорали қаторларнинг айрим хоссаларини қараймиз.

Абсолют ва шартли яқинлашиш.

1-таъриф. Ўзгарувчан ишорали қатор ҳадларининг абсолют қийматидан тузилган қатор яқинлашувчи бўлса, ўзгарувчан ишорали қатор **абсолют яқинлашувчи** дейилади.

2-таъриф. Ўзгарувчан ишорали қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг ҳадларининг абсолют қийматидан тузилган қатор узоқлашувчи бўлса, ўзгарувчан ишорали қатор **шартли яқинлашувчи** дейилади.

11-мисол. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$ қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш. Берилган қатор ҳадларининг абсолют қийматидан қатор тузамиз:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$$

бу қатор махражи $q = \frac{1}{3}$ бўлган геометрик прогрессия бўлиб яқинлашувчидир. Демак, берилган қатор абсолют яқинлашувчи бўлади.

12-мисол. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$

қатор шартли яқинлашувчидир. Чунки, унинг ҳадларининг абсолют қийматидан тузилган

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

гармоник қатор узоқлашувчи эди.

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots$

қатор яқинлашишининг зарурий шартини текширинг.

2. $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots$

қатор яқинлашишининг зарурий шартини текширинг.

3. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$

қатор яқинлашишини текширинг.

4. $1 + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \frac{1}{4 \cdot 5^3} + \dots$

қатор яқинлашишини текширинг.

$$5. 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

қатор яқинлашишини текширинг.

$$6. \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots$$

қатор яқинлашишини Даламбер белгисидан фойдаланиб текширинг.

$$7. 1 + \frac{2}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{8}{4!} + \dots$$

қатор яқинлашишини текширинг.

$$8. 1 + \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{3^2}{2^2 \cdot 5} + \frac{3^3}{2^3 \cdot 7} + \dots$$

қатор яқинлашишини текширинг.

$$9. 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

қатор яқинлашишини интеграл белги билан текширинг.

$$10. 1 + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \dots$$

қатор яқинлашишини текширинг.

$$11. \frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+3^2} + \dots$$

қатор яқинлашишини текширинг.

$$12. \frac{1}{1+1^2} + \frac{2}{1+2^2} + \frac{3}{1+3^2} + \dots$$

қатор яқинлашишини текширинг.

13. Қуйидаги қаторларнинг яқинлашишини Коши белгисидан фойдаланиб текширинг:

$$1) \sum_1^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1} \right)^n; \quad 2) \sum_1^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}.$$

14-22. Қуйидаги қаторлар яқинлашишини текширинг ҳамда яқинлашувчи бўлса, абсолютми ёки шартли эканлигини аниқланг.

$$14. \frac{1}{10} - \frac{1}{20} + \frac{1}{30} - \frac{1}{40} + \dots$$

$$15. \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 + 1}.$$

$$16. \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n-2}{3n+5}.$$

$$17. \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n2^n}.$$

$$18. \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{6n+5}.$$

$$19. \frac{\sin \alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \dots$$

$$20. 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

$$21. 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots$$

$$22. \frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{3\ln 3} + \frac{1}{4\ln 4} - \dots$$

$$23. 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots$$

қатор яқинлашишини текширинг ва унинг йиғиндисини 0,01 аниқликкача ҳисобланг.

$$24. e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} + \dots \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

бўлса, e^{-1} ni 0.001 аниқликкача таърибан ҳисобланг.

Мавзу. Функционал ва даражали қаторлар

1. Функционал қаторлар ҳақида тушунчалар.

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots, u_n(x), \dots$$

функциялар кетма-кетлиги бўлсин.

$$1\text{-таъриф. } u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

ифодага **функционал қатор** дейилади. (1) да $x = x_0$ бирор сон бўлса, қўйидаги сонли қаторни ҳосил қиламиз

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + u_3(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots \quad (2)$$

(2) сонли қатор яқинлашувчи бўлса, (1) функционал қатор $x = x_0$ нуктада яқинлашувчи дейилади ва $x = x_0$ нуктага яқинлашиш нуктаси деб аталади.

$$1\text{-мисол. } 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (3)$$

функционал қатор $x = \frac{1}{2}$ нуктада яқинлашувчидир, чунки

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

сонли қатор яқинлашувчи.

Берилган (3) функционал қатор $x = 2$ нуктада узоқлашувчи, чунки

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n + \dots$$

сонли қатор узоқлашувчи.

Функционал қатор яқинлашувчи бўлган нукталар тўпламига, унинг яқинлашиш соҳаси дейилади.

2. Даражали қаторлар ва уларнинг хоссалари.

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots \quad (4)$$

функционал қаторга даражали қатор дейилади. $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ўзгармас сонлар, даражали қаторнинг коэффициентлари деб аталади.

Даражали қатор шундай хоссага эгаки, у $x = b_0$ нуктада яқинлашувчи бўлса, $|x - x_0| < |b_0 - x_0|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳамма x лар учун ҳам яқинлашувчи бўлади. Даражали қатор учун шундай R сон мавжудки, $|x - x_0| < R$ учун, қатор абсолют яқинлашувчи $|x - x_0| > R$ учун қатор узоқлашувчи, яъни $-x_0 - R < x < -x_0 + R$ оралиқда даражали қатор абсолют яқинлашувчи, $x = -x_0 \pm R$ нукталарда ҳосил бўлган қатор яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлиши мумкин. Ҳар икки нуктада қатор яқинлашишини алоҳида текшириш керак бўлади. $(x_0 - R, x_0 + R)$ интервалга яқинлашиш интервали, R га даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси дейилади. Яқинлашиш радиуси $R = 0$ *yoki* $R = \infty$ бўлиши мумкин $R = 0$ бўлса, даражали қатор фақат $x = x_0$ нуктада, $R = +\infty$ бўлса, бутун сонлар ўқида яқинлашувчи бўлади.

Яқинлашиш интервалини, берилган қаторнинг абсолют қийматидан тузилган қатор учун Даламбер ва Коши белгиларидан фойдаланиб топиш мумкин. Даражали қаторнинг ҳамма коэффициентлари 0 дан фарқли бўлса, яқинлашиш радиусини топишда

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

формуладан фойдаланилади. Бошқа ҳолларда бевосита Даламбер белгисидан фойдаланиб яқинлашиш интервалини топиш мумкин.

$$\text{2-мисол. } x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$$

даражали қатор яқинлашишини текширинг.

$$\text{Ечиш: } a_n = \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)}. \quad \text{Қаторнинг яқинлашиш радиусини}$$

топамиз.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1/(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Демак, $-1 < x < 1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳамма x лар учун қатор яқинлашувчи.

Қатор яқинлашишини интервалнинг четки нуқталарида текшираамиз: $x = 1$ бўлсин. Бу ҳолда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

гармоник қатор ҳосил бўлиб, у узоқлашувчидир. $x = -1$ бўлсин, бу ҳолда

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

сонли қатор ҳосил бўлиб, у Лейбниц белгиси шартларини қаноатлантиргани учун яқинлашувчи бўлади.

Шундай қилиб, берилган қаторнинг яқинлашиш интервали $-1 \leq x < 1$ дан иборатдир.

$$\text{3-мисол. } (x-2) + \frac{1}{2^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3^2}(x-2)^3 + \dots + \frac{1}{n^2}(x-2)^n + \dots$$

даражали қатор яқинлашишини текширинг.

$$\text{Ечиш. } a_n = \frac{1}{n^2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} \quad \text{бўлганлиги учун}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 1.$$

Демак, $-1 < x-2 < 1$ *yoki* $1 < x < 3$ интервалда қатор яқинлашувчи. Интервалнинг четки нуқталарида қатор яқинлашишини текшираамиз. $x=3$ бўлсин, бунда

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

сонли қатор ҳосил бўлиб, интеграл белгидан фойдалансак унинг яқинлашувчилиги келиб чиқади(бажариб кўринг). $x=1$ бўлса,

$$-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots$$

сонли қатор ҳосил бўлиб, у абсолют яқинлашувчидир.

Шундай қилиб, берилган қаторнинг яқинлашиш интервали $1 \leq x \leq 3$ бўлади.

3. Тейлор ва Маклорен қаторлари. $y = f(x)$ функция $x = a$ нуқтада $(n+1)$ тартибгача ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда қўйидаги Тейлор формуласи ўринлидир:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

бу ерда $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a + Q(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ ($0 < Q < 1$) бўлиб, Лагранж

шаклидаги қолдиқ ҳади дейилади.

$a = 0$ да Тейлор формуласининг хусусий ҳоли - Маклорен формуласи ҳосил бўлади:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \quad \text{бу ерда}$$

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}[Qx]}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (0 < Q < 1).$$

$y = f(x)$ функция a нуқта атрофида исталган марта дифференциалланувчи бўлса ва бу нуқтанинг бирор атрофида

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

бўлса, Тейлор ва Маклорен формулаларидан

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad \text{ва}$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

қаторлар ҳосил бўлади. Буларнинг биринчиси **Тейлор қатори**, иккинчисига **Маклорен қатори** дейилади.

Бу қаторлар x_∞ нинг $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ бўладиган қийматларида $f(x)$ га яқинлашади.

А нуқтани ўз ичига олувчи бирор интервалда исталган n учун $|f^{(n)}(x)| < M$, (M бирор мусбат сон) тенгсизлик бажарилса, $\lim_{n \rightarrow \infty} R(x) = 0$ бўлади ва $f(x)$ функция Тейлор қаторига ёйилади.

4. Функцияларни даражали қаторларга ёйиш

Айрим функцияларни даражали қаторга ёйямиз.

1) $f(x) = e^x$, исталган x учун

$$f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \dots, f^{(n)}(x) = e^x, \dots \quad x = 0 \quad deb$$

$$f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 1, \dots, f^{(n)}(0) = 1, \dots$$

Буларни Маклорен қаторига қўйиб,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

ҳосил қиламиз. Охирги тенгликдан $x = 1$ десак,

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

бўлиб, e сони қатор йиғиндиси кўринишида ифодаланади. Бундан фойдаланиб e сонининг тақрибий қийматини исталган даражадаги аниқликкача ҳисоблаш мумкин.

2) $f(x) = \sin x$. Исталган x учун

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \sin x, \dots$$

Бундан

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1, f^{(4)}(0) = 0, \dots$$

бўлиб, буларни Маклорен қаторига қўйсак,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

ҳосил бўлади.

Бу қатор исталган x учун яқинлашувчи $-\infty < x < +\infty$. Охирги қаторни ҳадлаб дифференциалласак,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1-1}}{(2n-2)!} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

қатор ҳосил бўлади, бу $f(x) = \cos x$ функция учун Маклорен қатори бўлади.

3) Худди юқоридагидек усул билан $f(x) = (1+x)^m$ функция учун

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \dots$$

қаторни ҳосил қиламиз. Бу қаторга биномиал қатор дейилади. У $(-1,1)$ интервалда абсолют яқинлашувчи бўлади.

4) $f(x) = \ln(1+x)$ функция учун юқоридаги усул билан

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1 < x \leq 1)$$

ёйилмани ҳосил қилиш мумкин.

5-мисол. $f(x) = \cos \sqrt{x}$ функцияни x нинг даражалари бўйича қаторга ёйинг.

Ечиш. Юқоридаги $\cos x$ учун келтирилган қаторда x ни $\sqrt{x}$ билан алмаштирсак,

$$\cos \sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} + \dots$$

бўлади. Бу қатор исталган x учун яқинлашувчидир, бироқ $\cos \sqrt{x}$ функция $x < 0$ да аниқланмаганлигини ҳисобга олиб, ҳосил қилинган қатор $\cos \sqrt{x}$ функцияга $0 \leq x < +\infty$ да яқинлашади.

5. Қаторларнинг тақрибий ҳисоблашга татбиқлари. Бир неча мисоллар қараймиз.

6-мисол. $\cos x$ нинг ёйилмасидан фойдаланиб $\cos 18^\circ$ ни 0,001 аниқликкача тақрибий ҳисобланг.

Ечиш. $\cos x$ функциянинг қаторга ёйилмасидан фойдаланиб,

$$\cos 18^\circ = \cos \frac{\pi}{10} = 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^4 - \dots$$

қаторни ҳосил қиламиз.

$$\frac{\pi}{10} = 0,31416; \left(\frac{\pi}{10} \right)^2 = 0,09870; \left(\frac{\pi}{10} \right)^4 = 0,00974.$$

ва $\frac{1}{6!} \cdot \left(\frac{\pi}{10} \right)^6 < 0,0001$ бўлганлиги учун, тақрибий ҳисоблашда қаторнинг биринчи учта ҳади билан чегараланамиз, демак

$$\cos 18^\circ \approx 1 - \frac{0,09870}{2} + \frac{0,00974}{24}; \text{ yoki } \cos 18^\circ \approx 0,9511.$$

7-мисол. $\sqrt[5]{1,1}$ ни 0,0001 аниқликкача тақрибий ҳисобланг.

Ечиш: $\sqrt[5]{1,1} = (1 + 0,1)^{\frac{1}{5}}$ деб, биномиал қатордан фойдалансак:

$$\sqrt[5]{1,1} = (1 + 0,1)^{\frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{5} \cdot 0,1 + \frac{\frac{1}{5} \cdot (\frac{1}{5} - 1)}{2!} 0,01 + \frac{\frac{1}{5} \cdot (\frac{1}{5} - 1) \cdot (\frac{1}{5} - 2)}{3!} 0,001 + \dots = 1 + 0,02 - 0,0008 + 0,000048 - \dots$$

бўлади. Тўрттинчи ҳад $0,000048 < 0,0001$ бўлганлиги учун, ҳисоблашда биринчи учта ҳадини олиб, ҳисоблаймиз:

$$\sqrt[5]{1,1} \approx 1 + 0,02 - 0,0008 = 1,0192.$$

8-мисол. $\sqrt[3]{130}$ ni $0,001$ аниқликкача тақрибий ҳисобланг.

Ечиш. 5^3 130 га энг яқин бутун соннинг кубини бўлганлиги учун $130 = 5^3 + 5$ деб олиш қўлай бўлиб,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{130} &= \sqrt[3]{5^3 + 5} = \sqrt[3]{5^3 \left(1 + \frac{1}{25}\right)} = 5 \left(1 + \frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}} = 5 \left(1 + \frac{1}{3} 0,04 + \frac{\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{3} - 1)}{2!} 0,0016 + \right. \\ &+ \left. \frac{(\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{3} - 1) \cdot (\frac{1}{3} - 2))}{3!} 0,000064 + \dots\right) = 5 + \frac{1}{3} \cdot 0,2 \cdot \frac{1}{9} \cdot 0,0016 + 5 \frac{25}{81} \cdot 0,000032 - \dots \end{aligned}$$

охирги қаторда тўрттинчи ҳад $0,001$ дан кичик бўлганлиги учун, биринчи учта ҳад билан чегараланамиз:

$$\sqrt[3]{130} \approx 5 + 0,0667 - 0,0009 \approx 5,066.$$

9-мисол. $\ln 1,04$ ni $0,0001$ гача аниқликда тақрибий ҳисобланг.

Ечиш: $\ln(1+x)$ функциянинг даражали қаторга ёйилмасидан фойдаланиб,

$$\ln(1 + 0,04) = 0,04 - \frac{0,04^2}{2} + \frac{0,04^3}{3} - \frac{0,04^4}{4} + \dots, \quad \text{ёки}$$

$$\ln 1,04 = 0,04 - 0,0008 + 0,000021 - 0,00000064 + \dots$$

қаторни ҳосил қиламиз, ҳамда учинчи ҳад $0,0001$ дан кичик бўлганлиги учун биринчи икки ҳадни ҳисобга олиб ҳисоблаймиз:

$$\ln 1,04 \approx 0,0392.$$

Мустақил ечиш учун мисоллар

$$1. \quad \frac{4-x}{7x+2} + \frac{1}{3} \left(\frac{4-x}{7x+2} \right)^3 + \dots$$

функционал қаторнинг $x=0$ ва $x=1$ нуқталарда яқинлашувчилигини текширинг.

$$2. \quad 1!(x-5) + 2!(x-5)^2 + 3!(x-5)^3 + \dots$$

қатор яқинлашишини текширинг.

$$3. \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

қатор яқинлашишини текширинг.

4-8 мисолларда қаторнинг яқинлашиш интервалини аниқланг.

$$4. (x-4) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-4)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)^3 + \dots$$

$$5. x + (2x)^2 + (3x)^3 + (4x)^4 + \dots$$

$$6. 5x + \frac{5^2 x^2}{2!} + \frac{5^3 x^3}{3!} + \frac{5^4 x^4}{4!} + \dots$$

$$7. x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{4} + \dots$$

$$8. \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right)^3 + \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right)^4 + \dots$$

9. Ушбу функцияларни даражали қаторга ёйинг.

$$1) f(x) = 3^x; \quad 2) f(x) = e^{-2x}; \quad 3) f(x) = \cos^2 x.$$

10. Функцияларнинг даражали қаторларга ёйилмасидан фойдаланиб куйидагиларни:

1) e сонини 0,00001 гача аниқликда;

2) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ни 0,00001 гача аниқликда;

3) $\sin 9^0$ ни 0,0001 гача аниқликда;

4) $\sqrt[3]{1,06}$ ни 0,0001 гача аниқликда;

5) $\ln 0,98$ ни 0,0001 гача аниқликда;

6) $\ln 1,1$ ни 0,0001 гача аниқликда

тақрибий ҳисобланг.

Мавзу. Комплекс сонлар. Алгебранинг асосий теоремаси

Режа:

1. Комплекс сон ва унинг алгебраик, тригонометрик, кўрсаткичли шакллари ҳамда улар устида амаллар.
2. Алгебранинг асосий теоремаси.
3. Кубик тенглама ва Кардано формуласи.
4. Юқори даражали тенгламалар.

Таянч ибора ва тушунчалар

Комплекс сон, комплекс соннинг алгебраик, тригонометрик, кўрсаткичли шакллари, комплекс сонлар устида амаллар, Муавр формуласи, Эйлер формуласи, алгебранинг асосий теоремаси, кубик тенглама ва Кардано формуласи, юқори даражали тенгламаларни ечиш усуллари.

1.Комплекс сон ва унинг алгебраик, тригонометрик, кўрсаткичли шакллари ҳамда улар устида амаллар. Фан ва амалиётнинг ривожланиши ҳақиқий сонлар тўпламининг етарли эмаслигини кўрсатди. Масалан, ташқи кўриниши жуда содда $x^2 + 1 = 0$, $x^2 + x + 1 = 0$ тенгламалар ҳақиқий сонлар тўпламида ечимга эга эмас. Демак, исталган алгебраик тенгламани ечиш учун ҳақиқий сонлар тўплами етарли бўлмай қолади.

Бундан ташқари электроникада ва физиканинг турли бўлимларида мураккаб табиатли катталиклар қараладики, уларни ҳақиқий сонлар тушунчаси қамрай олмайди. Шу сабабли сонлар тушунчасини кенгайтириш эҳтиёжи юзага келди.

1.Таъриф. x ва y ҳақиқий сонлар, i эса ($i = \sqrt{-1}$) қандайдир бир символ бўлса,

$$z = x + yi$$

(1)

ифодага комплекс сон (алгебраик шакли) дейилади, бунда қуйидаги шартлар қабул қилинган деб ҳисобланади:

- 1) $x + 0i = x$; $0 + yi = yi$ ва $1 \cdot i = i$; $-1 \cdot i = -i$;
- 2) фақат $x = x_1$, $y = y_1$ бўлгандагина, $x + yi = x_1 + y_1i$ бўлади;
- 3) $(x + yi) + (x_1 + y_1i) = (x + x_1) + (y + y_1)i$;
- 4) $(x + yi) \cdot (x_1 + y_1i) = (xx_1 - yy_1) + (xy_1 + x_1y)i$.

$z = x + yi$ комплекс сонда $x = 0$, $y \neq 0$ бўлса, y мавҳум сон дейилади. i сон мавҳум бирлик дейилади. x ва y сонлар z комплекс соннинг мос равишда ҳақиқий ва комплекс қисми дейилади ва $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ кўринишда белгиланади. $y = 0$ булса, $z = x$ - ҳақиқий сон, агар $x = 0$ бўлса, $z = iy$ соф мавҳум сон бўлади. Мавҳум қисмларининг ишораси билангина фарқ қилувчи $z = x + iy$ ва $\bar{z} = x - iy$ комплекс сонлар қўшма комплекс сонлар дейилади.

Агар $z_1 = x_1 + iy_1$ ва $z_2 = x_2 + iy_2$ иккита комплекс сон берилган бўлса, улар устида алгебраик амаллар қуйидагича бажарилади:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ z_1 - z_2 &= (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \quad (2) \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z_2}}{z_2 \cdot \bar{z_2}} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Комплекс сонларни даражага кўтариш иккиҳадни даражага кўтариш каби бажарилади, i соннинг даражалари қуйидаги формулалар бўйича аниқланади. $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$ ва ҳ.к.

$$\text{Умуман, } i^{4k} = 1; i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i. \quad (3)$$

1-мисол. $z_1 = 2 + i$ ва $z_2 = 3 - 2i$ сонларнинг йиғиндиси ва айирмасини топинг

Ечиш. (2) формуланинг биринчи ва иккинчисидан қуйидагиларни топамиз:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (2 + i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + (1 - 2)i = 5 - i, \\ z_1 - z_2 &= (2 + i) - (3 - 2i) = (2 - 3) + i(1 + 2) = -1 + 3i. \end{aligned}$$

2-мисол. $z_1 = 2 - 3i$ ва $z_2 = 1 + 2i$ комплекс сонлар кўпайтмасини топинг.

Ечиш. (2) формулага кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (1 + 2i) = (2 \cdot 1 - (-3) \cdot 2) + i(2 \cdot 2 + (-3) \cdot 1) = (2 + 6) + i(4 - 3) = 8 + i;$$

Ҳар бир $z = x + iy$ комплекс сон геометрик жиҳатдан Oxy координатлар текислигининг (x, y) нуқтаси ёки $\vec{ON}$ вектори билан тасвирланади.

Комплекс сон тасвирланадиган Oxy текислик комплекс текислик дейилади.

z комплекс сонига мос келувчи N нуқтанинг ҳолатини r ва φ қутб координатлари билан ҳам аниқлаш мумкин.

Бунда координатлар бошидан N нуқтагача бўлган масофага, $z = |\vec{ON}|$ сони комплекс соннинг модули дейилади ва $|z|$ билан белгиланади; $\vec{ON}$ векторнинг Ox ўқининг мусбат йуналиши билан ҳосил қилган φ бурчак комплекс соннинг аргументи дейилади ва $y = \arg z$ каби белгиланади.

$z = x + iy$ комплекс сон учун қуйидаги формула ўринлидир:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \quad (4)$$

бунда $\varphi = \arg z$ нинг қиймати $0 \leq \arg z < 2\pi$ шартни қаноатлантиради.

3-мисол. $z = -\sqrt{3} + i$ комплекс соннинг модули ва аргументини топинг.

Ечиш. $x = -\sqrt{3}$, $y = 1$ бўлганлиги учун $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 2$; $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

тенгламадан φ аргументни топамиз:

$$\varphi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}.$$

Шундай қилиб, $r = 2$, $\varphi = \frac{5\pi}{6}$;

Комплекс соннинг $z = x + iy$ кўринишдаги ифодаси комплекс соннинг алгебраик шакли дейилади.

Комплекс соннинг $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ кўринишдаги ифодаси унинг тригонометрик шакли дейилади.

Тригонометрик кўринишда берилган комплекс сонлар устида амаллар қуйидагича бажарилади :

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= (r_1 r_2)[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \quad (6)$$

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad (7)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad (8)$$

бунда $k=0,1,2,\dots,(n-1)$.

(7) ва(8) формулаларга Муавр формулалари дейилади.

Комплекс соннинг кўрсаткичли шакли

$$z = re^{i\varphi}$$

кўринишда бўлиб,

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (9)$$

(9) формулага Эйлер формуласи дейилади.

4-мисол. $z = 1 - i$ сонни саккизинчи даражага кўтаринг.

Ечиш. Берилган сонни тригонометрик формада тасвирлаймиз:

$$z = 1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \quad \text{Муавр формуласига кўра қуйидагини}$$

ҳосил қиламиз:

$$z^8 = (1-i)^8 = \left[\sqrt{2}^8 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \right]^8 = (\sqrt{2})^8 \left[\left(\cos(8 \cdot \frac{7\pi}{4}) + i \sin(8 \cdot \frac{7\pi}{4}) \right) \right] = 16(\cos 14\pi + i \sin 14\pi) = 16.$$

2. Алгебранинг асосий теоремаси. Кўпхадларнинг илдизлари билан иш кўрилганда, ҳар қандай кўпхад ҳам илдизга эга бўлаверадими? деган савол туғулади. Коэффициентлари ҳақиқий бўлиб, ҳақиқий илдизга эга бўлмаган кўпхадлар мавжудлиги маълум, $x^2 + 1$ ана шундай кўпхадлардан биридир. Коэффициентлари ихтиёрий комплекс (ҳақиқий коэффициентли кўпхадлар буларнинг хусусий ҳолидир) сонлардан иборат бўлган кўпхадлар ичида ҳам илдизга эга бўлмаганлари мавжудми деган савол туғилади? Шундай кўпхадлар мавжуд бўлганда эди, комплекс сонлар системасини кенгайтиришга тўғри келар эди. Ушбу комплекс сонлар алгебрасининг асосий теоремаси ўринлидир.

Теорема. Даражаси бирдан кичик бўлмаган, исталган сон коэффициентли, ҳар қандай кўпхад ҳеч бўлмаганда, умумий ҳолда битта комплекс илдизга эга бўлади.

Бу теорема математиканинг энг катта ютуқларидан бири ҳисобланади ва фанларнинг хилма-хил соҳаларида татбиқ қилинади. Юқоридаги теоремадан куйидаги натижалар келиб чиқади.

Натижа. n - даражали ($n \geq 1$) исталган комплекс коэффициентли кўпхад, худди n та комплекс илдизга эга бўлади. Бунда илдизлар неча каррали бўлса, худди шунча марта саналади.

Алгебранинг асосий теоремаси $n = 0$ бўлганда ҳам ўринли, чунки 0- даражали кўпхад илдизларга эга эмас. Алгебранинг асосий теоремаси даражаси аниқланмаган ноль кўпхадгагина (ноль сонига) қўлланиши мумкин эмас.

3. Кубик тенглама ва Кардано формуласи.

1). Ушбу тенглама

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (10)$$

кубик тенглама дейилади. x_1, x_2, x_3 лар (10) тенгламанинг илдизлари бўлса, тенгламани

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундан

$$a = -(x_1 + x_2 + x_3), \quad b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \quad c = -x_1x_2x_3$$

бўлади.

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

тенглама $x = z - \frac{a}{3}$ алмаштириш ёрдами билан

$$z^3 + pz + q = 0$$

кўринишга келтирилади. $z^3 + pz + q = 0$ тенглама ушбу

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = u + v \quad (11)$$

Кардано формуласи билан ечилади:

$$1) \quad \Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0 \text{ бўлса, у ҳолда } z_1 = u_1 + v_1; z_{2,3} = -\frac{u_1 + v_1}{2} \pm \frac{u_1 - v_1}{2} i\sqrt{3}$$

бўлади, бунда u_1 ва v_1 лар u ва v илдизларнинг ҳақиқий қийматлари;

$$2) \quad \Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0 \text{ бўлса, у ҳолда } z_1 = \frac{3q}{p}; z_2 = z_3 = -\frac{3q}{2p} = -\frac{z_1}{2} \text{ бўлади;}$$

$$3) \quad \Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0 \quad \text{бўлса,} \quad \text{у ҳолда}$$

$$z_1 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \frac{\varphi}{3}, \quad z_{2,3} = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos\left(\frac{\varphi}{3} \pm 120^\circ\right) \text{ бўлади, бундаги}$$

$$\cos \varphi = -\frac{q}{2} : \sqrt{\frac{-p^3}{27}}.$$

5-мисол. $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ тенгламанинг ечимлари

$$x_1 + x_2 + x_3; \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3; \quad x_1x_2x_3$$

ифодаларни тузиб, текширилсин.

Ечиш. $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ берилган тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0 \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 4x - 4x + x + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$x(x^2 - 4x + 4) - 4x + 8 + x - 2 = 0 \Rightarrow x(x - 2)^2 - 4(x - 2) + (x - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$(x - 2)[x(x - 2) - 4 + 1] = 0 \Rightarrow (x - 2)(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$x - 2 = 0 \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -1;$$

$x_1 + x_2 + x_3; \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3; \quad x_1x_2x_3$ ифодаларнинг қийматларини текшираемиз:

$$-4 = a = -(x_1 + x_2 + x_3) = -(2 + 3 - 1) = -4,$$

$$1 = b = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) = 6 - 2 - 3 = 1,$$

$$6 = c = -x_1 x_2 x_3 = -(2 \cdot 3 \cdot (-1)) = 6.$$

4. Юқори даражали тенгламалар. Юқори даражали тенгламаларни ечиш усулларида бири тенгламанинг чап қисмидаги кўпхадни кўпайтувчиларга ажратиш усулидир. Бу усул Безу теоремасининг ушбу қўлланилишига асосланади. α сони n -даражали $P(x)$ кўпхаднинг илдизи бўлса, бу кўпхадни $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ кўринишда ифодалаш мумкин, бунда $Q(x)$ - $P(x)$ ни $(x - \alpha)$ га бўлишда чиқадиган бўлинма булиб, $n - 1$ даражали кўпхад.

Шундай қилиб, n -даражали $P(x) = 0$ тенгламанинг ҳеч бўлмаганда битта илдизи маълум бўлса, масалани Безу теоремаси ёрдами билан $n - 1$ даражали тенгламани ечишга келтириш, бошқача айтганда, тенгламанинг даражасини пасайтириш мумкин.

Табиий савол туғилади: қандай қилиб тенгламанинг ҳеч бўлмаса битта илдизини топиш мумкин?

Бутун коэффициентли тенгламалар ҳолида рационал, хусусан бутун илдизларни, албатта улар мавжуд бўлса, топиш мумкин.

Бутун коэффициентли алгебраик тенгламанинг рационал илдизларини топиш усули ушбу теорема билан берилади:

Т е о р е м а. $\frac{p}{q}$ қисқармас каср бутун коэффициентли

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (11)$$

тенгламанинг илдизи бўлсин. У ҳолда p сони a_n озод хаднинг бўлувчиси, q эса a_0 бош коэффициентнинг бўлувчиси бўлади.

Исботи. $\frac{p}{q}$ қисқармас касрни (11) тенгламага қўйиб ва махраждан кутқазиб, ушбу тенгликни оламир:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + \dots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n = 0 \quad (12)$$

(12) тенгликни икки усул билан қайтадан ёзамиз:

$$a_n q^n = p(-a_0 p^{n-1} - a_1 p^{n-2} q - \dots - a_{n-1} q^{n-1}); \quad (13)$$

$$a_0 p^n = q(-a_1 p^{n-1} - \dots - a_{n-1} p q^{n-1} - a_n q^{n-1}). \quad (14)$$

(13) тенгликдан ойдинки $a_n q^n$ кўпайтма p га бўлинади ва q^n билан p ўзаро туб бўлгани учун a_n сони p га бўлинади. Шу каби (14) тенгликка кўра a_0 сони q га бўлинади. Теорема исботланди.

Исботланган теоремадан қуйидаги натижалар келиб чиқади.

1- натижа. Бутун коэффициентли тенгламанинг исталган бутун илдизи озод ҳадининг бўлувчисидан иборат.

2- Натижа. Бутун коэффициентли тенгламанинг бош коэффициентни 1 га тенг бўлса, у ҳолда тенгламанинг барча рационал илдизлари, улар мавжуд бўлса, бутун сон бўлади.

6-мисол. Ушбу тенгламани ечинг: $2x^3 - 7x^2 + 5x - 1 = 0$.

Е ч и ш. Тенгламанинг рационал илдизларини топамиз. $\frac{p}{q}$ қисқармас каср

тенгламанинг илдизи бўлсин $У$ ҳолда p ни озод ҳаднинг бўлувчилари ичидан, ± 1 сонлари ичидан, q ни эса бош коэффициентнинг мусбат бўлувчилари, яъни 1,2 ичидан излаш керак. Шундай қилиб, тенгламанинг рационал илдизларини $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$ сонлари ичидан излаш керак бўлади.

Текшириб кўриш мумкинки, $\frac{1}{2}$ сони берилган тенгламанинг илдизи бўлади.

$(2x-1)$ кўпайтувчини қавсдан чиқариш кераклигини назарда тутган ҳолда тенгламанинг чап қисмини кўпайтувчиларга ажратиб, $(2x-1)(x^2-3x+1)=0$ тенгламани оламиз. Иккинчи кўпайтувчини 0 га тенглаштириб, $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ илдизга эга бўламиз.

Жавоб: $x_1 = \frac{1}{2}, x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1. Агар $z_1 = 1 - i, z_2 = 3 + 4i$ бўлса, бу комплекс сонларнинг йиғидисини ва айирмасини топинг.

2. Агар $z_1 = -12 + i, z_2 = 3 - i$ комплекс сонларнинг кўпайтмасини топинг.

a) $(2 + 3i) \cdot (3 - 2i)$ c) $(3 - 2i)^2$

3. b) $(a + bi) \cdot (a - bi)$ d) $(1 + i)^3$

e) $\frac{1+i}{1-i}$ f) $\frac{2i}{1+i}$

амаллар бажарилсин.

4. a) $x^2 + 25 = 0$, b) $x^2 - 2x + 5 = 0$ тенгламалар ечилсин ва илдизлар тенгламага қўйилиб текширилсин.

5. Қуйидаги комплекс сонлар векторлар билан тасвирланган ва уларнинг модуллари ва аргументлари аниқлансин, ҳамда тринометрик кўринишда ёзилсин.

1) $z = 3$; 2) $z = -2$; 3) $z = 3i$; 4) $z = -2i$;

6. Қуйидаги комплекс сонлар векторлар блан тасвирланган ва уларнинг модуллари ва аргументлари аниқлансин, ҳамда тринометрик кўринишда ёзилсин.

1) $z = 2 - 2i$; 2) $z = 1 + i\sqrt{3}$; 3) $z = -\sqrt{3} - i$; 4) $z = 1 + 2i$;

7. Қуйидаги комплекс сонлар векторлар блан тасвирланган ва уларнинг модуллари ва аргументлари аниқлансин, ҳамда тринометрик кўринишда ёзилсин.

1) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$; 2) $\sin \alpha + i(1 - \cos \alpha)$

8. 1) $z = 3$; 2) $z = -2$; 3) $z = 3i$; 4) $z = -2i$; сонлар $re^{\varphi i}$ кўринишда ёзилсин ($-\pi < \varphi \leq \pi$ бўлганда).

9. 1) $z = 2 - 2i$; 2) $z = 1 + i\sqrt{3}$; 3) $z = -\sqrt{3} - i$; 4) $z = 1 + 2i$; сонлар $re^{\varphi i}$ кўринишда ёзилсин ($-\pi < \varphi \leq \pi$ бўлганда).

10. 1) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$; 2) $\sin \alpha + i(1 - \cos \alpha)$ сонлар $re^{\varphi i}$ кўринишда ёзилсин ($-\pi < \varphi \leq \pi$ бўлганда).

11. Қуйидагилар Муавр формуласи билан ҳисоблансин:

1) $(1 + i)^{10}$; 2) $(1 - i\sqrt{3})^6$; 3) $(-1 + i)^5$; 4) $(\sqrt{3} + i)^3$;

5) $\sqrt[3]{-1}$; 6) $\sqrt[3]{i}$; 7) $\sqrt[6]{-1}$; 8) $\sqrt[3]{-2 + 2i}$;

9) $\sqrt[3]{i}$; 10) $\sqrt[3]{1 + i}$; 11) $\sqrt[4]{-8 + 8i\sqrt{3}}$.

12. $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$ тенгламанинг ечимлари

$$x_1 + x_2 + x_3; \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3; \quad x_1x_2x_3$$

ифодаларни тузиб, текширилсин.

13. Ушбу юқори даражали тенгламаларни ечинг:

1) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$; 2) $x^4 + x^3 + 2x - 4 = 0$;

3) $9x^3 + 18x^2 - x - 2 = 0$; 4) $4x^3 - 4x^2 + x - 1 = 0$.

17. Қуйидаги тенгламалар Кардано формуласи бўйича ечилсин:

1) $z^3 - 6z - 9 = 0$; 2) $z^3 - 12z - 16 = 0$.

3) $z^3 - 12z - 8 = 0$; 4) $z^3 + 6z - 7 = 0$.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Комплекс сон деб нимага айтилади?
2. Комплекс соннинг алгебраик шакли қандай бўлади?
3. Комплекс сонларнинг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва бўлинмаси қандай топилади?
4. Комплекс сонларнинг тригонометрик кўриниши қандай?
5. Муавр формуласи нимадан иборат?
6. Эйлер формуласи қандай?
7. Алгебранинг асосий теоремаси нимадан иборат?
8. Кардано формуласи қандай?
9. Юқори даражали тенгламаларни ечишнинг қандай усуллари биласиз?

Мавзу: Эҳтимоллар назарияси курси. Ходисалар.
Эҳтимолликнинг ҳар хил таърифлари. Эҳтимолликларни қўшиш ва
кўпайтириш. Ўзаро боғлиқсиз ҳодисалар.

Режа:

1. Эҳтимолликнинг классик ва статистик таърифлари.

2. Геометрик эҳтимоллик

Эҳтимолликлар назариясида ҳодиса деб, синов натижасида рўй бериши мумкин бўлган ҳар қандай фактга айтилади.

Синов натижасида албатта рўй берадиган ҳодиса *муқаррар (U) ҳодиса* дейилади.

Синов натижасида ҳеч қачон рўй бермайдиган ҳодиса *мумкин бўлмаган (V) ҳодиса* дейилади.

Синов натижасида рўй бериши ҳам, рўй бермаслиги ҳам *мумкин бўлган ҳодиса тасодифий ҳодиса* дейилади.

Синовнинг ҳар қандай натижаси *элементар ҳодиса* дейилади.

Агар битта синовнинг ўзида А ва В тасодифий ҳодисалар бир вақтда рўй бермасалар, улар *биргаликдамас (биргаликда бўлмаган) ҳодисалар* дейилади.

Агар синов натижасида бир нечта ҳодисалардан фақат биттаси рўй берса, улар *ҳодисаларнинг тўла гуруҳини ташкил этади* дейилади.

Агар А ва В ҳодисаларнинг ҳеч бирини иккинчисига нисбатан рўй бериши мумкин дейишга асос бўлмаса, бу ҳодисалар *тенг имкониятли* дейилади.

А ҳодисанинг рўй бермаслигидан иборат бўлган А ҳодиса А ҳодисага *қарама-қарши ҳодиса* дейилади.

Агар А ва В ҳодисалардан бирининг рўй бериши иккинчисининг рўй бериш ёки рўй бермаслигига таъсир этмаса, бу ҳодисалар *ўзаро эрки (боғлиқ бўлмаган) ҳодисалар* дейилади. Акс ҳолда А ва В ҳодисалар *боғлиқ ҳодисалар* дейилади.

14.1.2. Синаш натижасида тенг имкониятли n та элементар ҳодисалар рўй бериши мумкин бўлсин. Бирор А ҳодисанинг рўй бериши учун элементар ҳодисалардан m таси қулайлик туғдирсин. У ҳолда А ҳодисанинг классик эҳтимоллиги

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

формула билан аникланади.

Эҳтимолликнинг хоссалари:

1. Муқаррар ҳодисанинг эҳтимоллиги 1га тенг, яъни

$$P(U) = 1$$

2. Мумкин бўлмаган ҳодисанинг эҳтимоллиги 0 га тенг, яъни

$$P(V) = 0$$

3. Тасодифий А ҳодисанинг эҳтимоллиги учун

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

ўринли.

14.1.3. Эҳтимолликларни бевосита ҳисоблашда кўпинча комбинаторика формулаларидан фойдаланилади.

Ўрин алмаштиришлар деб n та турли элементларнинг бир биридан факат жойлашиши билан фарқ қилувчи комбинацияларига айтилади. n та турли элементларнинг ўрин алмаштиришлари сони $P_n = n!$ га тенг ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$).

Ўринлаштиришлар n та турли элементдан m тадан тузилган комбинациялар бўлиб, улар бир-биридан m элементларнинг таркиби, m уларнинг тартиби билан фарқ қилади. Уларнинг сони

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \text{ ёки } A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$$

формулалар билан топилади.

Группалашлар — бир-биридан ҳеч бўлмаганда битта элементи билан фарқ қилувчи n та элементдан m тадан тузилган комбинациялардир. Уларнинг сонн

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \text{ га тенг.}$$

14.1.4. Ҳодисанинг нисбий частотаси деб ҳодиса рўй берган синовлар сонининг ўтказилган барча синовлар сонига нисбатига айтилади:

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

бу ерда m — ҳодисанинг рўй беришлари сони, n — синовларнинг умумий сони.

Синовлар сони етарлича катта бўлганда ҳодисанинг *статистик эҳтимоллиги* сифатида нисбий частотани олиш мумкин:

$$W(A) \approx P(A) = \frac{m}{n}$$

14.1.5. Геометрик эҳтимоллик. D_1 соҳа D соҳанинг қисми (бўлаги) бўлсин. Агар соҳанинг ўлчамини (узуниги, юзи, ҳажми) mes оркали белгиласак, таваккалига ташланган нуқтанинг D соҳага тушиш эҳтимоллиги

$$P(A) = \frac{mes D_1}{mes D} \text{ га тенг.}$$

1-мисол. Кутида 3 та оқ, 7 та қора шар бор. Ундан таваккалига олинган шарнинг оқ шар бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. А олинган шар оқ эканлиги ҳодисаси бўлсин. Мазкур синов 10 та тенг имкониятли элементар ҳодисалардан иборат бўлиб, уларнинг 3 таси А ҳодисага қулайлик туғдирувчидир. Демак,

$$P(A) = \frac{3}{10} = 0,3$$

2-мисол. Гуруҳда 12 талаба бўлиб, уларнинг 8 нафари аълочилар. Рўйхат бўйича таваккалига 9 талаба танлаб олинди. Танлаб олинганлар ичида 5 талаба аълочи талаба бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Синовнинг барча чумкин бўлган тенг имкониятли элементар ҳодисалари сони C_{12}^9 га тенг. Буларнинг ичидан $C_8^5 \cdot C_4^4$ таси танлаб олинган талабалар ичидан 5 таси аълочи талабалар ҳодисаси (A) учун қулайлик туғдиради. Шунинг учун

$$P(A) = \frac{C_8^5 \cdot C_4^4}{C_{12}^9} = \frac{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}}{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3}} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{14}{55}$$

3-мисол. Қирқма алифбонинг 10 та ҳарфидан «математика» сўзи тузилган. Бу ҳарфлар тасодифан сочилиб кетган ва қайтадаи ихтиёрий тартибда йиғилган. Яна «математика» сўзи ҳосил бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. A - «Математика» сўзи ҳосил бўлди ҳодисаси. Тенг имкониятли мумкин бўлган элементар ҳодисалар сони $n = 10!$ бўлиб, A ҳодисага қулайлик яратувчилари $m = 2! \cdot 3! \cdot 2!$ бўлади. Бу ерда математика сўзида «м» 2 марта, «а» 3 марта, «т» 2 марта такрорланиши ҳисобга олинади.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2! \cdot 3! \cdot 2!}{10!} = \frac{1}{151200}$$

4-мисол. Телефонда номер тераётган абонент охириги икки рақамни эсдан чиқариб қўйди ва факат бу рақамлар ҳар хил эканлигини эслаб қолган ҳолда уларни таваккалига терди. Керакли рақамлар терилганлиги эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. A — иккита керакли рақам терилганлик ҳодисаси бўлсин. Ҳаммаси бўлиб, ўнта рақамдан иккитадан иечта ўринлаштиришлар тузиш мумкин бўлса шунча, яъни $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$ та турли рақамларни териш мумкин. Шунинг учун классик эҳтимолликка кўра

$$P(A) = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{90}$$

5-мисол. Француз табиатшуноси Бюффон (XVIII аср) тангани 4040 марта ташлаган ва бунда 2048 марта гербли томон тушган. Бу синовлар мажмуасида гербли томон тушиши частотасини топинг.

Ечиш.

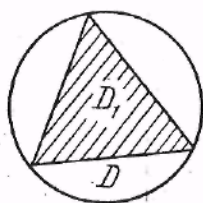
$$W(A) = \frac{2048}{4040} \approx 0,50693$$

6-мисол. R радиусли доирага нуқта таваккалига ташланган. Ташланган нуктанинг доирага ички чизилган мунтазам учбурчак ичига тушиши эҳтимоллигини топинг.

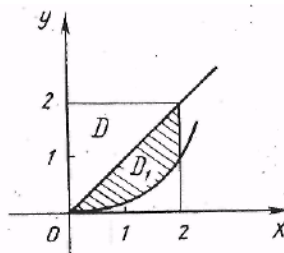
Ечиш. $S(D_1)$ — учбурчакнинг юзи, $S(D)$ — доиранинг юзи бўлсин (63-шакл). A — нуктанинг учбурчакка тушиши ҳодисаси. У ҳолда

$$P(A) = \frac{S(D_1)}{S(D)} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0,4137$$

$$P(A) \approx 0,4137$$



63- шакл



64- шакл

7-мисол. $[0, 2]$ кесмадан таваккалига иккита x ва y сонлари танланган. Бу сонлар $x^2 \leq 4y \leq 4x$ тенгсизликни қаноатлантириши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. (x, y) нуктанинг координаталари

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

тенгсизликлар системасини қаноатлантиради. Бу — (x, y) нукта томони 2 га тенг квадрат нукталари тўпламидан таваккалига танланишини билдиради.

Бизни кизиқтираётган A ҳодиса танланадиган (x, y) нукта штрихланган фигурага тегишли бўлган ҳолда ва фақат шу ҳолда рўй беради. (64-шакл). Бу фигура координаталари $x^2 \leq 4y \leq 4x$ тенгсизликни қаноатлантирадиган нукталарнинг тўплами сифатида ҳосил килинган. Демак, изланаётган эҳтимоллик штрихланган фигура юзининг квадрат юзига нисбатига тенг, яъни

$$P(A) = \frac{\int_0^2 \left(x - \frac{1}{4}x^2 \right) dx}{4} = \frac{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2}{4} = \frac{\frac{4}{2} - \frac{8}{12}}{4} = \frac{\frac{4}{3}}{4} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Демак, } P(A) = \frac{1}{3},$$

1- дарсхона топириги

1. Таваккалига 20 дан катта бўлмаган натурал сон танланганда, унинг 5 га қаррали бўлиш эҳтимоллигини топинг.

Ж: 0,2.

2. Қарточкаларга 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ракамлари ёзилган. Таваккалига тўртта карточка олиниб, уларни қатор қилиб терилганда жуфт сон ҳосил бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: 1

3. Қутида 12 та оқ ва 8 та қизил шар бор. Таваккалига

а) битта шар олинганда унинг оқ бўлиши эҳтимоллигини топинг;

б) битта шар олинганда унинг қизил бўлиши эҳтимоллигини

топинг;

в) 2 та шар олинганда уларнинг турли рангда бўлиши эҳтимоллигини толинг;

г) 8 та шар олинганда уларнинг 3 таси кизил рангли бўлиши эҳтимоллигини толинг;

д). 8 та шар олинганда қизил рангли шарлар 3 тадан кўп бўлмаслиги эҳтимоллигини толинг;

Ж: а) $\frac{3}{5}$ б) $\frac{2}{5}$; в) $\frac{48}{95}$; г) $\approx 0,35$; д) $\approx 0,6117$.

4. Иккита ўйин соққаси баравар ташланганда қуйидаги ходисаларнинг рўй бериш эҳтимолликларини толинг:

А — тушган очколар йиғиндиси 8 га тенг.

В — тушган очколар кўпайтмаси 8 га тенг.

С — тушган очколар йиғиндиси уларнинг кўпайтмасидан катта.

5. Танга 2 марта ташланганда ақалли бир марта гербли томон тушиши эҳтимоллигини толинг.

Ж: $P(A) = \frac{5}{36}$; $P(B) = \frac{1}{18}$; $P(C) = \frac{11}{36}$

6. Қутичада 6 та бир хил (номерланган) кубик бор. Таваккалига битта-битадан барча кубиклар олинганда кубикларнинг номерлари ўсиб бориш тартибида чиқиши эҳтимоллигини толинг.

Ж: $P(A) = \frac{3}{4}$.

7. Қутида 5 та бир хил буюм бўлиб, уларнинг 3 таси бўялган. Таваккалига 2 та буюм олинганда улар орасида:

а) битта бўялгани бўлиши;

б) иккита бўялгани бўлиши;

в) ҳеч бўлмаганда битта бўялгани бўлиши эҳтимоллигини толинг.

Ж: а) 0,6; б) 0,3; в) 0,9.

8. Учлари (0,0), (0,1), (1,1), (1,0) нуқталарда бўлган квадратга (х,у) нуқта ташланади. Бу нуқтанинг координаталари $y < 2x$ тенгсизликни қаноатлантириши эҳтимоллигини толинг.

Ж: $P(A) = 0,75$.

9. Таваккалига ҳар бири бирдан катта бўлмаган иккита мусбат сон олинганда, уларнинг йиғиндиси $x+y$ бирдан катта бўлмаслиги, кўпайтмаси xy эса 0,09 дан кичик бўлмаслиги эҳтимоллигини толинг.

Ж: $P(A) \approx 0,2$.

10. Айланага таваккалига ички учбурчак чизилади. Бу учбурчак ўткир бурчакли бўлиши эҳтимоллигини толинг.

Ж: $\frac{1}{4}$

11. Техник назорат бўлими таваккалига олинган 100 та китобдан 5 таси яроқсиз эканини аниқлади. Яроқсиз китобларнинг нисбий частотасини аниқланг.

$$\text{Ж: } W(A) = \frac{5}{100} = 0,05$$

1- мустақил иш

1. Домино тошларининг тўлик мажмуасидан (28 та тош) таваккалига биттаси олинади. Қуйидаги ҳодисаларнинг эҳтимоллигини топинг.

- а) олинган тошда 6 очко бўлиши;
- б) олинган тошда 5 очко ёки 4 очко бўлиши;
- в) чиққан очколар йиғиндиси 7 га тенг бўлиши.

$$\text{Ж: а) } \frac{1}{4}; \text{ б) } \frac{13}{28}; \text{ в) } \frac{3}{28};$$

2. Таваккалига 20 дан катта бўлмаган натурал сон танланганда унинг 20 нинг бўлувчиси бўлиши эҳтимоллигини топинг.

$$\text{Ж: } P = 0,3.$$

3. Рақамлари ҳар хил икки хонали сон ўйланган. Ўйланган сон:

- а) тасодифан айтилган икки хонали сон бўлиши;
- б) рақамлари ҳар хил бўлган тасодифан айтилган икки хонали сон бўлиши эҳтимоллигини топинг.

$$\text{Ж: а) } \frac{1}{90} \quad \text{б) } \frac{1}{81}$$

4. Алоҳида карточкаларга 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 рақамлар ёзилган. Карточкалар яхшилаб аралаштирилгач, таваккалига тўрттаси олинади ва кетма-кет қатор қилиб терилади. Ҳосил бўлган сон 1234 бўлиши эҳтимоллигини топинг.

$$\text{Ж: } 0,00033.$$

5. Қутида 100 та лампочка бўлиб, уларнинг 10 таси яроқсиз. Таваккалига 4 та лампочка олинади. Олинган лампочкалар ичида:

- а) яроқсизлари йўқ бўлиши;
- б) яроқчилари йўқ бўлиши эҳтимоллигини топинг.

$$\text{Ж: } P \approx 0,65; \text{ б) } P \approx 0,00005.$$

6. R радиусли доирага нуқта ташланади. Бу нуқта доирага ички чизилган квадрат ичига тушиши эҳтимоллигини топинг.

$$\text{Ж: } P = \frac{2}{\pi}$$

Дирихле масаласини доирада Фурье усули билан ечиш

Дирихле масаласини қараймиз: доира ичида Лаплас тенгламасини каноатлантирувчи ва доира чегарасида берилган функцияга тенг бўлган гармоник функцияни топинг.

Масалани ечиш учун қутб координаталаридан фойдаланамиз.

Маркази қутбда бўлиб, радиуси R га тенг доира берилган бўлсин.

$r \leq R$ доирада гармоник, $r=R$ айланада $u|_{r=R} = f(\varphi)$ шартни каноатлантирувчи ($f(\varphi)$ — берилган функция) ва бу айланада узлуксиз бўлган $u = u(r, \varphi)$ функцияни излаймиз. Изланаётган функция доирада қутб

координатларида ёзилган ушбу Лаплас тенгламасини қаноатлантириши керак.

$$r^2 \frac{\delta^2 u}{\delta r^2} + r \frac{\delta u}{\delta r} + \frac{\delta^2 u}{\delta \varphi^2} = 0$$

Фурье усулидан фойдаланиб доира учун Дирихле масаласи ечимини топамиз:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau$$

Бу интеграл *Пуассон интеграл*и деб аталади.

Мисол. Бир жинсли юпка доиравий пластинкада температуранинг стационар тақсимланишини топинг. Пластинка радиуси R га тенг, унинг юқори қисми 1° да, пастки қисми 0° да тутиб турилади.

Ечиш. Масала шартига кўра:

$$f(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{агар } -\pi < \tau < 0 \text{ бўлса} \\ 1, & \text{агар } 0 < \tau < \pi \text{ бўлса} \end{cases}$$

Зичлик функцияни билган холда ушбу формула бўйича интеграл функцияни топиш мумкин:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x, y) dx dy.$$

$f(x, y)$ зичлик функцияга эга тасодикий нуқта (X, Y) нинг D соҳага тушиш эҳтимоллиги ушбу тенглик орқали аниқланади:

$$P[(X, Y) \in D] = \iint_D f(x, y) dx dy$$

Зичлик функция хоссаларга эга:

$$1. f(x, y) \geq 0.$$

$$2. \iint_D f(x, y) dx dy = 1.$$

Агар X, Y нинг мумкин бўлган барча кийматлари чекли D соҳага тегишли бўлса, 2-хосса қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 1.$$

14.8.4. Икки дискрет тасодикий миқдорнинг сонли характеристикалари: 1. Системани ташкил этувчи X ва Y дискрет тасодикий миқдорларнинг математик кутилиши қуйидаги формулалар бўйича аниқланади:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i p_{ij},$$

$$M(Y) = \sum \sum y_i p_{ii}.$$

Агар X ва Y тасодифий миқдорлар боғлиқмас бўлса, у ҳолда бу тасодифий миқдорларнинг тақсимот конунларидан $M(X)$ ва $M(Y)$ ни қуйидаги формулалар орқали топиш мумкин:

$$M(X) = \sum x_k p_{k.},$$

$$M(Y) = \sum y_i p_{i.}.$$

2. X ва Y тасодифий миқдорларнинг дисперсиялари ушбу формулалардан топилади:

$$D(X) = \sum \sum p_{ii} (x_i - M(X))^2,$$

$$D(Y) = \sum \sum p_{ii} (y_i - M(Y))^2.$$

Дисперсияларни ҳисоблашда қуйидаги формулалардан ҳам фойдаланиш мумкин:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2,$$

$$D(Y) = M(Y^2) - [M(Y)]^2.$$

3. (X, Y) дискрет тасодифий миқдорларнинг ўртача квадратик четланиши

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}$$

формулалар ёрдамида аниқланади.

14.8.5. Икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдорнинг сонли характеристикалари: 1. Узлуксиз тасодифий миқдорларнинг математик кутилиши ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$M(X) = \int \int x f(x, y) dx dy,$$

$$M(Y) = \int \int y f(x, y) dx dy,$$

бу ерда $f(x, y)$ — зичлик функция.

2. Системага кирувчи X ва Y узлуксиз тасодифий миқдорларнинг дисперсиялари қуйидаги формулалар бўйича топилади:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x, y) dx dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x, y) dx dy - [M(X)]^2,$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [y - M(Y)]^2 f(x, y) dx dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x, y) dx dy - [M(Y)]^2,$$

бу ерда $f(x, y)$ — зичлик функция.

3. X ва Y тасодифий микдорларнинг уртача квадратик четланишлари куйидаги формулалардан аниқланади:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}$$

14.8.6. Тасодифий микдорлар системалари назариясида *корреляция моменти* (ковариация) K_{xy} муҳим роль уйнайди. Дискрет тасодифий микдорлар учун:

$$K_{xy} = \sum_i \sum_j (x_i - M(X))(y_j - M(Y))p_{ij}.$$

Узлуксиз тасодифий микдорлар учун:

$$K_{xy} = \int \int [x - M(X)][y - M(Y)]f(x, y) dx dy.$$

Корреляция моментини яна куйидагича ҳам топиш мумкин: $K_{xy} = M(X \cdot Y) - M(X)M(Y)$, бу ерда

$$M(X \cdot Y) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij},$$

узлуксиз тасодифий микдорлар учун эса

$$M(X \cdot Y) = \int \int xyf(x, y) dx dy.$$

Корреляция моментининг асосий хоссаси: агар X ва Y — боғлиқмас (эркли) булса, $K_{xy} = 0$.

14.8.7. X ва Y тасодифий микдорнинг *корреляция коэффиценти* деб

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

сонга айтилади.

Корреляция коэффицентининг хоссалари:

1. Агар X ва Y — боғлиқмас тасодифий миқдорлар бўлса, у ҳолда $r_{xy} = 0$.

2. r_{xy} — улчамсиз катталиқ (миқдор), шу билан бирга $|r_{xy}| \leq 1$.

3. Агар $Y = AX + B$, бу ерда A ва B — узгармас сонлар бўлса, $|r_{xy}| = 1$.

14.8.8. $f(x, y)$ зичлик функцияга эга бўлган (X, Y) система учун X ва Y боғлиқ бўлмаса

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

бўлади, бу ерда мос ҳолда $f_1(x)$ — X нинг, $f_2(y)$ — Y нинг зичлик функцияси.

14.8.9. Иккита боғлиқ, X ва Y тасодифий миқдорларнинг дисперсияси учун қуйидаги формула ўринли:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2K_{xy}.$$

Хусусий ҳолда, агар X ва Y тасодифий миқдорлар боғлиқ бўлмаса, у ҳолда

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

1-мисол. Дискрет икки ўлчовли (X, Y) тасодифий миқдорлар системасининг тақсимот қонуни берилган:

$y \backslash x$	3	10	12
4	0,17	0,13	0,26
5	0,10	0,30	0,05

Ташкил этувчи X ва Y миқдорларнинг тақсимот қонунларини топинг.

Ечиш. X нинг мумкин бўлган қийматлари эҳтимолликларини топамиз, бунинг учун эҳтимолликларни «устун бўйича» қўшиб чиқамиз:

$$P(X = 3) = 0,17 + 0,10 = 0,27,$$

$$P(X = 10) = 0,13 + 0,30 = 0,43,$$

$$P(X = 12) = 0,26 + 0,05 = 0,30.$$

Демак,

X	3	10	12
P	0,27	0,43	0,30

— ташкил этувчи X нинг тақсимот қонуни.

Текшириш. $0,27 + 0,43 + 0,30 = 1$

X нинг мумкин бўлган

кийматлари эҳтимолликларини топамиз, бунинг учун эҳтимолликларни «сатр бўйича» қушиб чиқамиз:

$$P(Y = 4) = 0,17 + 0,13 + 0,25 = 0,55,$$

$$P(Y = 5) = 0,10 + 0,30 + 0,05 = 0,45$$

Ташкил этувчи Y нинг тақсимот конуни қуйидагича бўлади:

Y	4	5
P	0,55	0,45

Текшириш. $0,55 + 0,45 = 1$.

2- мисол. Тасодифий миқдорлар системаси (X, Y) нинг тақсимот конуни берилган:

	Y	1	2	3
X				
1		1/18	1/12	1/36
2		1/9	1/6	1/18
3		1/6	1/4	1/12

$M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, r_{xy} ларни топинг.

Ечиш. $M(X) = 1 \cdot \frac{1}{18} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{1}{6} +$

$$+ 3 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{18} + 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{7}{3},$$

$$M(Y) = 1 \cdot \frac{1}{18} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{1}{36} + 1 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{18} +$$

$$1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{11}{6}$$

X ва Y тасодифий миқдорларнинг дисперсиясини ҳисоблаш учун миқдорлар системасидан $(\dot{X}, \dot{Y})$ миқдорлар системасига ўтамиз, бу ерда

$$\dot{X} = X - M(X), \quad \dot{Y} = Y - M(Y),$$

$$\dot{X} = X - \frac{7}{3}, \quad \dot{Y} = Y - \frac{11}{6}$$

Жадвал тузамиз:

$\dot{Y} \backslash \dot{X}$	$-5/6$	$1/6$	$7/6$
$-4/3$	$1/18$	$1/12$	$1/36$
$-1/3$	$1/9$	$1/6$	$1/18$
$2/3$	$1/6$	$1/4$	$1/12$

$$D(X) = \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{1}{18} + \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{1}{12} + \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{1}{36} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{9} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{6} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{18} + \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

$$D(Y) = \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{1}{18} + \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{1}{12} + \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{1}{36} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{9} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{6} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{18} + \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

(X, Y) система тақсимооти жадвалидан фойдаланиб, K_{xy} ни топамиз.

$$K_{xy} = \left(-\frac{4}{3}\right) \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{1}{18} + \left(-\frac{4}{3}\right) \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{1}{12} + \left(-\frac{4}{3}\right) \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{1}{36} + \left(-\frac{4}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{9} + \left(-\frac{4}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{6} + \left(-\frac{4}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{18} + \left(-\frac{4}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{6} + \left(-\frac{4}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{4} + \left(-\frac{4}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{12} + \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{1}{18} + \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{1}{12} + \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{1}{36} + \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{9} + \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{6} + \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{18} + \left(-\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{6} + \left(-\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{12} + \left(\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{1}{12} + \left(\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{9} + \left(\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{18} + \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \left(\frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \right) = \frac{1}{6} \cdot 0 = 0$$

$K_{xy} = 0$ бўлгани учун корреляция коэффицентни ҳам нолга тенг бўлади: $r_{xy} = 0$.

3-мисол. (X, Y) тасодифий миқдорлар системаси куйидаги зичлик функцияси билан берилган:

$$f(x, y) = \begin{cases} a \sin(x + y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Куйидагиларни топинг: а) a коэффицентни; б) $M(X)$, $M(Y)$ ни; в) $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$ ни; г) r_{xy} ни.

Ечиш. а) a коэффицентни

$$a \cdot \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin(x + y) dy dx = 1$$

ТЕНГЛАМАН ТОПАМИЗ.

$$a \cdot \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin(x+y) dy dx = -a \int_0^{\pi/2} \cos(x+y) \Big|_0^{\pi/2} dx =$$

$$= a \int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x) dx = a(\sin x - \cos x) \Big|_0^{\pi/2} = 2a, \quad a = \frac{\pi}{4}$$

D соҳада $f(x, y) = \frac{1}{2} \sin(x+y)$

$$\text{б) } M(X) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} x \sin(x+y) dy dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x dx \int_0^{\pi/2} \sin(x+y) dy =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(x+y) \Big|_0^{\pi/2} x dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left[\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos x \right] x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x(\sin x + \cos x) dx = \frac{1}{2} x(\sin x - \cos x) \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} (\cos x + \sin x) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

худди шунга ўхшаш:

$$\text{в) } \sigma^2(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} x^2 \sin(x+y) dy dx -$$

$$- \frac{\pi^2}{16} = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \cos(x+y) \Big|_0^{\pi/2} dx - \frac{\pi^2}{16} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x^2 (\sin x + \cos x) dx -$$

$$- \frac{\pi^2}{16} = \frac{1}{2} x^2 (\sin x - \cos x) \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x(\sin x - \cos x) dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + x(\sin x + \cos x) \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x) dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} + (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2$$

$$\sigma^2(Y) = \frac{\pi^2 + 8\pi - 32}{16}$$

$$\text{г) } K_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} xy \sin(x+y) dy dx -$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\pi^2}{16} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x dx \int_0^{\pi/2} y \sin(x+y) dy - \frac{\pi^2}{16} = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [y \cos(x+y) \Big|_0^{\pi/2} - \\
& - \int_0^{\pi/2} \cos(x+y) dy] x dx - \frac{\pi^2}{16} = \\
& = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \left[\frac{\pi}{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin x \right] \\
& dx - \frac{\pi^2}{16} = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \left(-\frac{\pi}{2} \sin x - \cos x + \sin x \right) dx - \frac{\pi^2}{16} = \\
& = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \left(\frac{\pi}{2} \sin x + \cos x - \sin x \right) dx - \frac{\pi^2}{16} = \frac{1}{2} x \left(\sin x - \frac{\pi}{2} \cos x + \right. \\
& \left. + \cos x \right) \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\sin x - \frac{\pi}{2} \cos x + \cos x \right) dx - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi}{4} - \\
& - \frac{1}{2} \left(\sin x - \frac{\pi}{2} \sin x - \cos x \right) \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16} = \\
& = \frac{8\pi - 16 - \pi^2}{16}.
\end{aligned}$$

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{8\pi - 16 - \pi^2}{\pi^2 + 8\pi - 32} \approx \frac{0,73688}{3,00232} \approx -0.2454.$$

АДАБИЁТЛАР

Асосий адабиётлар

1. Я.С.Бугров, С.М.Никольский. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии, М., «Наука», 1980.
2. Я. С. Бугров, С. М. Никольский. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., «Наука», 1980.
3. Я. С. Бугров, С. М. Никольский. Дифференциальные уравнения. Краткие интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного, т. I, II, М., «Наука», 1978.
4. Т.А.АзларовХ. Мансуров. Математик анализ, 1- кием, Т., «Ўқитувчи», 1994.
5. Т.А.АзларовХ. Мансуров. Математик анализ, 2-кием. Т., «Ўқитувчи», 1989.
6. Е.У.Соатов.«Олий математика», 1-жилд, Т., «Ўқитувчи», 1992.
7. Е.У.Соатов.«Олий математика», 2-жилд, Т., «Ўқитувчи», 1994.
8. М.С.Салоҳитдинов, Г.Н. Насритдинов .Оддий дифференциал тенгламалар. Т.,«Ўзбекистон», 1994.
9. Сборник задач по математике для втузов (Под ред. А. В. Ефимова) ч. I, М., 1986, Ч. II, М., 1986, ч. III, М., 1990.
10. Л.А. Кузнецов. Сборник задач по высшей математике (типовые расчеты) М., «Высшая школа», 1983.
- 11.О.С.Ивашев-Мусатов.Теория вероятностей и математическая статистика, М. «Наука». 1979.
12. В.Е.Гмурман.Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., «Высшая школа», 1975.
13. В. С. Пугачев. Теория вероятностей и математическая статистика. М., «Наука», 1979.
14. С. Х. Сирожиддинов, Н.М.Маматов. Эхтимоллар назарияси ва математик статистика. Т., «Ўқитувчи», 1980.

Қўшимча адабиётлар

1. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике в трех частях. (Под общей редакцией доктора физико-математических наук, профессора А. Н.Рябушко), Минск, «Высшая школа», 1990.
2. П. Е. Данко, А.Г.Попов, Т. Я. Кожевников . Высшая математика в упражнениях и задачах, М., «Высшая школа»1986.
3. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. (Под редакцией Б. П. Демидовича), М., Государственное издательство физико - математической литературы, 1963.
4. Г. Н. Берм . Сборник задач по курсу математического анализа, М., «Наука», 1985.
5. А. И. Карасев. Теория вероятностей и математическая статистика М. «Статистика».1979
6. В. Е. Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика, М., «Высшая школа». 1977.
7. Е. С. Вентцель . Теория вероятностей- М-, «Наука», 1969.
8. В.П. Чистиков . Курс теории вероятностей, М., «Наука», 1978.
- 9.Е.Н.Львовский. Статистический методы построения эмпирических формул, М. «Наука»1988.
- 10.Е.С.Вентцель. Л. А. Овчоров. Теория вероятностей, задачи и упражнения М «Наука» 1969.
- 11.Х.М. Андрухаев. Сборник задач по теории вероятностей, М., «Просвещение»
12. Б. В. Гнеденко Курс теории вероятностей. М., «Физматгиз». 1961.

МУНДАРИЖА

1	Кириш. Тўпламлар ва улар устида амаллар	3
2	Детерминантлар ва уларнинг хоссалари	6
3	Матрицалар ва улар устида амаллар.....	17
4	Чизиқли тенгламалар системаси	28
5	Умумий кўринишдаги тенгламалар системаси	38
6	Векторлар назарияси. Векторлар устида чизиқли амаллар. Векторнинг проекциялари, йўналтирувчи бурчаклари ва модули. Базис, векторларнинг ташкил этувчилари.....	51
7	Икки векторнинг кўпайтмаси, унинг механик маъноси ва хоссалари, векторлар орасидаги бурчакни топиш формуласи. Икки векторнинг перпендикулярлик (ортогоналлик) шарти. Икки векторнинг векторли кўпайтмаси.....	55
8	Текисликда аналитик геометрия. Координатлар усули	62
9	Текисликда тўғри чизиқ ва унинг тенгламалари	67
10	Иккинчи тартибли чизиқлар	74
11	Тўғри чизиқларга доир асосий масалалар	81
12	Фазода текислик тенгламалари	85
13	Фазода тўғри чизиқ ва унинг тенгламалари	92
14	Математик таҳлилга кириш. Тўпламларнинг эквивалентлиги. Тўпламнинг куввати	101
15	Сонли кетма-кетликлар	109
16	Функция ҳақида асосий тушунчалар	118
17	Функциянинг узлуксизлиги ва узилиши	131
18	Функция ҳосиласи	138
19	Функциянинг дифференциали ва унинг тақрибий ҳисоблашдаги тадбиқлари	146
20	Дифференциал ҳисобнинг татбиқлари	153
21	Аниқмас интеграл ва унинг хоссалари	167
22	Аниқмас интегралда интеграллаш усуллари	172
23	Рационал ва иррационал функцияларни интеграллаш	178
24	Тригонометрик функцияларни интеграллаш	187
25	Аниқ интеграл ва унинг асосий хоссалари	191
26	Аниқ интегралнинг татбиқлари	196
27	Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш. Хосмас интеграллар	202
28	Кўп ўзгарувчили функциялар ҳақида умумий тушунчалар	208
29	Икки ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосиласи ва тўла дифференциали	213
30	Икки аргументли функция экстремуми.....	220
31	Умумий тушунчалар.Биринчи тартибли ўзгарувчилари ажраладиган ва бир жинсли дифференциал тенгламалар	224
32	Биринчи тартибли чизиқли. Бернулли ва Риккати ҳамда тўла дифференциалли таенгламалар	229
33	Юқори тартибли дифференциал тенгламалар	238
34	Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламалар	246
35	Сонли қаторлар ва уларнинг яқинлашиш белгилари	257
36	Функционал ва даражали қаторлар	262
37	Комплекс сонлар. Алгебранинг асосий теоремаси	270
38	Эҳтимоллар назарияси курси. Ҳодисалар. Эҳтимолликнинг ҳар хил таърифлари. Эҳтимолликларни қўшиш ва кўпайтириш. Ўзаро боғлиқсиз ҳодисалар.....	278
39	Адабиётлар.....	292