

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ЧИРЧИКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**

«Утверждаю»
Проректор по учебной части
И.К.Хайдаров _____
«___» _____ 2019 г

**РАБОЧАЯ УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА
ПО МАТЕМАТИКА**

Область знаний:	100000 - гуманитарная сфера
Область образования:	110000 - педагогика
Направление образования:	5111400 - иностранный язык и литература (Английский язык)

Данная учебная программа разработана в соответствии с учебным и рабочим планом, учебной программой по дисциплине

Составитель: Ханимкулов Б.Р.- старший преподаватель кафедры «Методика преподавания математики» ЧГПИ.

Рецензенты:

З.А.Собиров - доцент кафедры «Дифференциальное уравнения» НУУз., к.ф.-м.н.

Р.Тургунбаев - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Общая математика» ТГПУ им. Низами

Данная рабочая программа разработана на основе типовой программы дисциплины утвержденной Министерством высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан протоколом №__ от ____ года

Рабочая учебная программа одобрена и рекомендована к совету факультета на заседании кафедры «Методика преподавания математики» протоколом № ____ от « ____ » 2019 года

Заведующий кафедрой: _____ Турсунов И.Г.

Рабочая учебная программа обсуждена и рекомендована к использованию советом «Физико-математического» факультета от «__» 2019 года, протокол № ____.

1. Введение

Изменения, происходящие в политической, экономической, научно-технической и культурной жизни нашей Республики, нашли своё отражение и в сфере народного образования.

Создание в Узбекистане системы непрерывного образования, на этом основании повышение качества образования до мирового уровня является самой актуальной проблемой системы образования. Это подтверждает необходимость повышения качества подготовки всех специалистов.

Данная программа рассчитана на обучение студентов гуманитарных факультетов направления образования «5111400-иностранный язык и литература (Английский язык)».

Дисциплина «Математика» обеспечивает приобретение знаний и умений в соответствии с государственным образовательным стандартом, содействует фундаментализации образования, формированию мировоззрения и развитию системного мышления. А также способствует развитию умения научного анализа изучения теоретико-практических основ деятельности будущих специалистов.

1.1. Цели и задачи курса

Цели обучения предмету - сформировать знания, умения и навыки студентов по теоретическим основам курса высшей математики.

Задачи предмета: -сформировать у студентов математическое мировоззрение;

-научить студентов теоретическим основам курса высшей математики, сформировать у них необходимые умения и навыки для изучения курса высшей математики;

- ознакомление студентов с кратким курсом высшей математики;

- обучение студентов самостоятельной работе с учебными пособиями и научной литературой.

1.2. Основные требования к знаниям и умениям студентов (ожидаемые результаты учения)

По окончании изучения дисциплины “Математика” студент будет **знать:**

- множества и их свойства, высказывания, предикаты, понятие отношений и их виды; элементы комбинаторики, элементы аналитической геометрии плоскости и пространства; определение графа, маршрутов, элементы векторной алгебры; функции и их свойства, определение предела функции, определение производной, первообразная функция, определения неопределенного и определенного интеграла, первоначальные сведения об теории вероятностей и математической статистики; моделирование, теорию алгоритмов

уметь:

- производить операции над множествами, производить логические операции над высказываниями, предикатами, рисовать графы, знать и применять при

решении задач элементы комбинаторики, производить операции над векторами; строить графики элементарных функций, вычислять простейшие пределы, исследовать на непрерывность функции, находить производные функций, находить неопределенные интегралы, вычислять определенные интегралы, применять приложения определенного интеграла в геометрических задачах, находить вероятность события, находить числовую характеристику случайных событий, знать постановку задач моделирования, применять методы статистических испытаний, знать теорию алгоритмов

1.3. Взаимосвязь курса с другими учебными дисциплинами

Предмет “Математика” находится в блоке математика и естественные науки, изучается в 1 и 2 семестрах. Для внедрения программы необходимо дать знания и навыки для обеспечения взаимосвязи межпредметных и специальных дисциплин.

II. Основная часть

2.1. Темы теоретических занятий, цели и количество отведенных часов (всего 36 часов)

1 семестр

№	Темы	Цели занятия	Отв дено часо в
1.	Понятие предмета математика. Цели и задачи курса.	Значение математики в современном мире, мировой культуре и истории, в гуманитарных науках. Структура современной математики. Цели и задачи изучаемой дисциплины.	2
2.	Элементы математической логики, логические операции над высказываниями	Элементы математической логики, логические операции над высказываниями.	2
3.	Алгебра предикатов	Понятие предиката, классификация предикатов, множество истинности предикатов, логические операции над предикатами	2
4.	Понятие множества	Множество и его элементы, пустое множество, подмножество, равные множества	2
5.	Операции над множествами	Операции над множествами и их	

		свойства, диаграммы Эйлера-Венна	2
6.	Бинарные отношения и их свойства	Бинарные отношения, отношение эквивалентности, отношение симметричности, отношение толерантности, отношение порядка и их свойства	2
7.	Определение графа, маршруты в графах, деревья.	Определение графа, виды графов, подграф, маршруты в графах, деревья и их виды	2
8.	Функция, предел и непрерывность функции.	Функция, свойства функции, предел функции, теоремы о пределах функции, непрерывность функции в точке и на отрезке, операции над непрерывными функциями.	2
9.	Основные примеры и методы дифференциального исчисления	Производная и дифференциал функции. Приложение производной.	2
10.	Первообразная функция. Неопределенный интеграл и его свойства.	Первообразная функция. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица интегралов.	2
11	Определенный интеграл, его приложения.	Определенный интеграл, и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Приложение определенного интеграла.	2
12	Векторы. Векторное пространство. Линейные операции над векторами.	Векторы и линейные операции над векторами; линейная зависимость векторов, скалярное произведение векторов.	2
13	Уравнение кривых второго порядка на плоскости.	Кривые второго порядка. Канонические уравнения окружности, эллипса, гиперболы, параболы	2

14	Уравнения плоскости. Уравнение поверхностей второго порядка и их уравнения.	Уравнения плоскости. Поверхности второго порядка в пространстве и их уравнения. Сфера, эллипсоид, гиперболоид, параболоид. Коническая поверхность. Цилиндрическая поверхность.	2
15	Элементы комбинаторики, основные теоремы и правила комбинаторики	Элементы комбинаторики, основные теоремы и правила комбинаторики, перестановки, размещения, сочетания	2
16	Элементы теории вероятностей.	Появление теории вероятностей, основные определения, классическое и статистическое определение вероятностей, теоремы сложения и умножения вероятностей.	2
17	Элементы математической статистики.	Предмет и задачи математической статистики. Случайные величины и законы распределения. Числовые характеристики случайных величин. Распределение дискретных случайных величин.	2
18	Теория алгоритмов	Теория алгоритмов, математические методы в профессиональной сфере.	2
	Всего		36ч.

2.2. Темы практических занятий, цели и количество отведенных часов (всего 40 часов)

1 семестр

№	Темы	Цели занятия	Отв е д е н о ч а с о в
1.	Исторические и занимательные примеры	Ознакомление с историческими и занимательными примерами и решение	2
2.	Элементы математической логики, логические операции над высказываниями	Элементы математической логики, логические операции над высказываниями.	2
3.	Алгебра предикатов	Понятие предиката, классификация предикатов, множество истинности предикатов, логические операции над предикатами	2
4.	Понятие множества.	Подмножество, изображение числовых множеств на числовой оси и способы записи изображенных множеств с помощью характеристического свойства	2
5.	Операции над множествами и их свойства.	Операции над множествами и их свойства, диаграммы Эйлера-Венна	2
6.	Бинарные отношения и их свойства	Бинарные отношения, отношение эквивалентности, отношение симметричности, отношение толерантности, отношение порядка и их свойства	2
7.	Теория графов	Решение примеров на виды графов, подграфы, маршруты в графах, деревья и их виды	2

8.	Функция, элементарные функции и их графики. Предел и непрерывность функции.	Функция, свойства функции, графики основных элементарных функций. Предел функции, непрерывность функции в точке и на отрезке, операции над непрерывными функциями.	2
9.	Вычисление производной и дифференциала функции.	Решение примеров на вычисление производной и дифференциала функции. Приложение производной	2
10.	Первообразная функция. Неопределенный интеграл и его свойства.	Первообразная функция. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица интегралов.	2
11	Определенный интеграл, его приложения.	Определенный интеграл, и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Приложение определенного интеграла.	4
12	Векторы. Векторное пространство. Линейные операции над векторами.	Векторы и линейные операции над векторами; линейная зависимость векторов, скалярное произведение векторов.	2
13	Основные задачи аналитической геометрии плоскости	Система координат. Кривые второго порядка. Канонические уравнения окружности, эллипса, гиперболы, параболы	2
14	Основные задачи аналитической геометрии пространства	Уравнения плоскости. Поверхности второго порядка в пространстве и их уравнения. Сфера, эллипсоид, гиперболоид, параболоид. Коническая поверхность. Цилиндрическая поверхность.	2
15	Элементы комбинаторики, основные теоремы и	Элементы комбинаторики, основные теоремы и правила комбинаторики, перестановки,	2

	правила комбинаторики	размещения, сочетания	
16	Способы нахождения вероятностей.	Решение примеров на классическое и статистическое определение вероятностей, способы нахождения вероятностей	2
17	Элементы математической статистики.	Случайные величины и законы распределения. Числовые характеристики случайных величин. Распределение дискретных случайных величин.	2
18	Математические модели	Решение задач на математические модели	2
19	Теория алгоритмов	Теория алгоритмов, математические методы в профессиональной сфере.	2
	Всего		40 ч.

2.3.Рекомендации к организации курсовых работ

В учебном плане в предмете “Математика” курсовые работы не запланированы.

2.4. Рекомендации по темам самообразования

Учитывая специфику предмета, для подготовки к самообразованию студентам рекомендуются следующие способы подготовки:

- изучение тем и разделов предмета с использованием учебных и методических пособий;
- усвоение лекционной части с помощью раздаточного материала;
- работа с обучающими и оценивающими программами;
- обучение разделов предмета с помощью специальной литературы;
- использование в учебных занятиях активные и проблемные учебные методики.

2.5. Рекомендации к процессу обучения и проведения предмета

В процессе обучения вышеупомянутого предмета для активизации внимания применяются современные методы (например, интерактивные), педагогические и информационно-коммуникационные (медиа образование, практические программные пакеты, презентации, электронно-дидактические).

- изучение лекционного материала с помощью современных компьютерных технологий и электронно-дидактических технологий;

- для введения основных понятий лекционного занятия используются технологии проблемного образования;
- активизирующие активность на практическом занятии технологии;
- использование педагогических технологий, таких как работа в малых группах, мозговой штурм и другие.

2.6. Дидактические средства

Перечень дидактических средств:

- **оборудование:** электронная доска -Hitachi, LCD-монитор, электронная указка.
- **видео-аудио оборудование:** видео и аудиомангнитофон, микрофон, колонки.
- **компьютер и мультимедиа:** компьютер, проектор типа Dell, DVD-дисковод, Web-Камера, видео-глазок.

2.7. Вопросы промежуточного контроля.

1. Понятие множества. Элементы множества. Пустое множество. Примеры конечных и бесконечных множеств.
2. Способы задания множеств. Равные множества. Универсальное множество
3. Диаграммы Эйлера-Венна. Отношения между множествами.
4. Пересечение множеств, их изображение и свойства.
5. Объединение множеств, их изображение и свойства.
6. Разность двух множеств, множество, дополненное до универсального, изображение и свойства.
7. Декартово произведение множеств и его свойства. Изображение числовых множеств в виде декартового произведения.
8. Понятие отношения.
9. Отношение эквивалентности.
- 10.Отношение симметричности.
- 11.Отношение толерантности.
- 12.Отношение порядка
- 13.Понятие предиката
- 14.Операции над предикатами
- 15.Высказывание. Примеры высказываний. Отрицание высказывания.
- 16.Конъюнкция высказываний и ее свойства. Таблица истинности.
- 17.Дизъюнкция высказываний и ее свойства. Таблица истинности.
- 18.Импликация высказываний и ее свойства. Таблица истинности.
- 19.Эквиваленция высказываний и ее свойства. Таблица истинности.
- 20.Графы, маршруты в графах, деревья
- 21.Элементы комбинаторики, основные теоремы и правила комбинаторики
- 22.Функция, предел функции.
23. Теоремы о пределах функции.
24. Непрерывность функции в точке и на отрезке.

25. Операции над непрерывными функциями.
1. Уравнение плоскости.
2. Взаимное расположение плоскостей
3. Сфера
4. Эллипсоид
5. Гиперболоид
6. Параболоид
7. Векторы. Операции над векторами.
8. Функция, предел функции.
9. Теоремы о пределах функции.
10. Непрерывность функции в точке и на отрезке.
11. Операции над непрерывными функциями.
12. Первообразная функция. Неопределенный интеграл.
13. Определенный интеграл, его приложения.
14. Приложение определенного интеграла
15. Первоначальные понятия теории вероятностей.
16. Элементы математической статистики.
17. Постановка задач моделирования.
18. Классификация моделей.
19. Динамические модели
20. Теория алгоритмов

Дополнительная литература

1. Hamedova N.A., Sadikova A.V., Laktaeva I.SH. "Matematika" – Gumanitar yo'nalishlar talabalari uchun o'quv qo'llanma. T.: "Jahon-Print" 2007y.
2. Azlarov T.A., Mansurov X. "Matematik analiz" 1-qism. T.: "O'qituvchi", 1994y.
3. Baxvalov S.B. va boshq. "Analitik geometriyadan mashqlar to'plami". T.: Universitet, 2006 y.
4. College geometry, Csaba Vincze and Laszlo Kozma, 2014 Oxford University
5. Introduction to Calculus, Volume I,II, by J.H. Heinbockel Emeritus Professor of Mathematics Old Dominion University, Copyright 2012, All rights reserved Paper or electronic copies for noncommercial use may be made freely without explicit.
6. Susanna S. Epp. Discrete Mathematics with Applications, Fourth Edition. Printed in Canada, 2011
7. Jane S Paterson Heriot-Watt (University Dorothy) A Watson Balerno (High School) SQA Advanced Higher Mathematics. Unit 1. This edition published

in 2009 by Heriot-Watt University SCHOLAR. Copyright © 2009 Heriot-Watt University.

Примечание: Дополнительную литературу можно найти в других научных библиотеках

Электронно-образовательный ресурс

www.tdpu.uz

2. www.pedagog.uz

3. www.Ziyonet.uz

4. www.edu.uz

5. www.nadlib.uz (УзНБ им. А.Навои)

6. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm>

7. <http://math-portal.ru/>

Тема 1 «Понятие предмета математика».

1. Состояние науки в разные исторические периоды.

1.1. Зарождение математики

Точно датировать возникновение важнейших понятий — целого числа, величины, фигуры — невозможно. Когда возникла письменность, представление о них уже сложилось. К этому времени были выработаны и различные системы письменной нумерации целых чисел.

2000—1700 гг. до н. э. — первые дошедшие до нас математические тексты: два египетских папируса и многочисленные глиняные таблички из древнего Вавилона, содержащие формулировки и решения задач. Египтяне пользовались десятичной непозиционной нумерацией и дробями с числителем 1 («основные» дроби). У вавилонян была шестидесятеричная позиционная система счисления без нуля и систематические шестидесятеричные дроби. Позднее, в середине первого тысячелетия до н. э. вавилоняне ввели знак для обозначения пропущенного шестидесятеричного разряда. Геометрия в Вавилоне и в Египте была по преимуществу вычислительной. Так, были известны правила вычисления площадей треугольника по стороне и высоте, круга по его радиусу (вавилоняне брали при этом в качестве π число 3, а египтяне — число 3,16), а также объемов пирамиды и усеченной пирамиды с квадратным основанием. Вавилоняне знали, что в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, а также обратное предложение. По-видимому, оба эти предложения были открыты ими на примерах и доказывать их в общем виде они еще не умели.

Наиболее замечательное достижение этого периода — создание в древнем Вавилоне элементов алгебры и открытие правила решения квадратных уравнений. Вавилоняне умели также находить приближенные значения квадратных корней из неквадратных чисел. Им были известны правила суммирования арифметической прогрессии и ряда квадратов натуральных чисел.

Математические знания излагались в эту эпоху в виде рецептов, правильность которых не доказывалась; обычно приводились однотипные числовые примеры и их решения. Математики как науки еще не было.

1.2. Возникновение математики как науки. Построение первых математических теорий (математика Древней Греции)

VI в. до н. э. — систематическое введение логических доказательств, явившееся переломным моментом в развитии математики. В Пифагорейской научной школе было начато построение геометрии как отвлеченной науки, истины которой выводятся из немногих исходных аксиом с помощью доказательств. К пифагорейцам восходят первые математические теории: планиметрия прямолинейных фигур (включая строгое доказательство знаменитой теоремы Пифагора) и элементы теории чисел (введение понятий простого числа, взаимно простых чисел, исследование делимости, построение совершенных чисел). В этой же школе были открыты три из пяти правильных тел: куб, тетраэдр и додекаэдр.

V в. до н. э. — В Пифагорейской школе сделано величайшее открытие о несоизмеримости стороны квадрата и его диагонали. Оно показало, что рациональных чисел (т. е. целых чисел и дробей) недостаточно для измерения геометрических величин и обоснования учения о подобии. Благодаря этому открытию возникла необходимость создания теории отношений как соизмеримых, так и несоизмеримых величин.

V в. до н. э. (вторая половина) — создана так называемая геометрическая алгебра, которая давала возможность в общем виде решать задачи, сводящиеся к квадратному уравнению или последовательности таких уравнений, чисто геометрически, с помощью циркуля и линейки. Геометрическая алгебра играла в античной математике роль нашей буквенной алгебры, но аппарат ее был гораздо менее удобен.

В это же время были сформулированы три знаменитые задачи древности:
удвоение куба (построить куб, имеющий объем в два раза больший данного),
трисекция угла (разделить произвольный угол на три равные части) и
квадратура круга (построить квадрат, равновеликий данному кругу).

Все эти построения, как было доказано в XIX в., невозможны с помощью циркуля и линейки. Древние использовали для их решения новые кривые: конические сечения (эллипс, гиперболу и параболу) и квадратрису (первую трансцендентную кривую).

В поисках квадратуры круга Гиппократ Хиосский открыл квадратуемые луночки (получившие название гиппократовых), т. е. фигуры, ограниченные дугами окружностей, для которых можно построить равновеликие им квадраты.

В конце V в. Гиппократ составил первые «Начала» — систематическое изложение основ математики своего времени. Труд этот до нас не дошел.

IV в. до н. э. (первая половина) — афинский математик Теэтет предпринял исследование алгебраических иррациональностей и начал классификацию их. Определил простейшие классы квадратичных иррациональностей,

такие, как $\sqrt{a}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, $\sqrt{\sqrt{ab}}$, которые были впоследствии описаны в «Началах» Евклида. Он показал также, что $\sqrt[3]{a}$ иррационален, если он не является кубом. Ему же принадлежит открытие октаэдра и икосаэдра.

IV в. до н. э. (середина) — математик и астроном Евдокс из Книда создал общую теорию отношений для любых однородных величин (как соизмеримых, так и несоизмеримых). Эта теория совпадает, по существу, с теорией действительных чисел, предложенной в конце XIX в. Р. Дедекиндом. Для определения площадей и объемов Евдокс разработал так называемый «метод исчерпывания». В основе обеих теорий лежало общее учение о величинах, причем впервые была сформулирована важная аксиома, известная ныне под названием аксиомы Архимеда:

если $a > b$, то можно повторить b столько раз, что $nb > a$.

С помощью новых методов Евдокс впервые доказал, что конус равновелик $\frac{1}{3}$ цилиндра, имеющего одинаковые с ним основания и высоту, а пирамида равновелика $\frac{1}{3}$ соответствующей призмы. Он доказал также, что площади двух кругов относятся как квадраты их диаметров.

300 г. до н. э. — Евклид создал «Начала», в которых подвел итог всему предшествующему развитию античной математики. Дедуктивный метод изложения «Начал» стал образцом для построения математической теории. В «Началах» систематически изложены геометрия, элементы теории чисел, алгебры, теория отношений и метод исчерпывания. Здесь сформулирован алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя двух чисел, доказано, что произведение чисел ab делится на простое число p тогда и только тогда, когда один из сомножителей делится на p , а также, что простых чисел бесконечно много. В «Началах» впервые встречается строгий вывод формулы суммы конечного числа членов геометрической прогрессии и показывается, что существует только пять правильных многогранников: куб, тетраэдр, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

III в. до н. э. — Архимед разработал методы нахождения площадей и объемов, а также методы определения касательных и наибольших и наименьших значений величин, которые он применил для решения проблем статики, гидростатики и теории равновесия плавающих тел. Методы Архимеда легли в основу дифференциального и интегрального исчисления, созданных в XVII в. Архимед нашел все полуправильные многогранники. С помощью конических сечений он решал кубические уравнения вида $x^2(a \pm x) = b$

и проводил полное их исследование.

III—II вв. до н. э. — Аполлоний систематически и всесторонне исследовал конические сечения. Его книги о конических сечениях послужили основой для создания аналитической геометрии Р. Декартом и П. Ферма (XVII в.), проективной геометрии В. Паскалем и Ж. Дезаргом (XVII в.), а также явились математическим аппаратом при исследованиях по механике и астрономии И. Кеплера, Г. Галилея и И. Ньютона.

I—II вв. н. э. — широкое развитие вычислительно-алгебраических методов в античной математике.

I в. (конец) — Менелай создал систематический курс сферической геометрии, построенный по образцу «Начал» Евклида, и развил сферическую тригонометрию.

II в. — Птолемей в своих астрономических трудах изложил плоскую и сферическую тригонометрию; он вывел формулу, равносильную формуле

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$, и составил подробные таблицы хорд (вместо линии синуса древние рассматривали всю хорду). В таблицах Птолемей употреблял символ для обозначения пропущенного шестидесятеричного разряда. Возможно, что этот символ и явился прообразом нуля.

III в. н. э. — Диофант Александрийский написал «Арифметику», в которой расширил числовую область до поля рациональных чисел, сформулировал правило умножения относительных чисел, ввел алгебраическую символику: знаки для первых шести положительных и отрицательных степеней неизвестного, для вычитания и равенства. Там же приведены и правила переноса членов из одной части уравнения в другую и приведения подобных. В «Арифметике» рассмотрены проблемы решения неопределенных уравнений в рациональных числах и даны методы для нахождения рациональных решений неопределенных уравнений второй и третьей степени.

1.3. Математика стран Дальнего, Среднего и Ближнего Востока

II в. до н. э. — создание древнейшего дошедшего до нас китайского математического трактата «Математика в девяти книгах», содержавшего сведения по арифметике и геометрии. При решении задач в трактате применялась теорема Пифагора. Наиболее замечателен в нем единообразный метод решения системы линейных уравнений. При этом появляются отрицательные числа, для которых формулируются правила сложения и вычитания. В трактате излагается также алгоритм вычисления квадратных и кубических корней, аналогичный современному. Этот алгоритм в VII—XIII вв. был перенесен на случай вычисления корней общих уравнений третьей и четвертой степеней. Он совпадает в основном с так называемой схемой Горнера, полученной в Европе в XIX в.

III в. н. э. — в трактате Сунь Цзы встречаются именованные десятичные дроби.

V—VI вв. — создание в Индии десятичной позиционной системы счисления и введение в нее нуля как особой цифры.

499 г. — в астрономическом трактате Ариабхата решил в целых числах неопределенное уравнение $ax + by = c$.

Около 628 г. — Брахмагупта, оперируя отрицательными числами, дал единое правило для решения любого квадратного уравнения, сформулировал правила действий с нулем, который благодаря этому стал числом, равноправным с другими числами. Брахмагупта пользовался алгебраической символикой: специальными знаками для неизвестных и их степеней, знаками для корня квадратного, для операций сложения и вычитания.

IX в. — Мухаммед ал-Хорезми объяснил правила действий с числами, записанными в десятичной позиционной системе, и исследовал квадратные уравнения. Слова «алгебра» и «алгоритм» впервые появились в переводе его трактатов. Первое из них означало операцию переноса членов из одной части уравнения в другую, а второе — искаженное имя автора (ал-Хорезми — Algorithmi), оно применялось первоначально только для обозначения правил вычисления по десятичной позиционной системе.

XI в. — математик и поэт Омар Хайям в трактате по алгебре решал геометрически кубические уравнения (по методу Архимеда). Комментируя «Начала» Евклида, он сблизил

понятия отношения и числа. Ко времени Хайяма была известна формула возведения бинорма в любую целую положительную степень и способ извлечения корня любой степени.

XII в. — Бхаскара-акарья сформулировал все правила действий с отрицательными числами. Бхаскара знал, что благодаря двузначности квадратного корня квадратное уравнение может иметь два решения.

XIII в. — Насирэддин Туей написал трактат по сферической геометрии и тригонометрии, содержащий учение о решении треугольников. Трактат сыграл решающую роль для развития тригонометрии в Европе.

XV в. — Джемшид ал-Каши, работавший в обсерватории Улугбека близ Самарканда, ввел и применял десятичные дроби: десятичная позиционная система была распространена на запись любых действительных чисел. Он вычислил число π с точностью до 17 десятичных знаков.

Математика в 16-19 веке для самостоятельного обучения.

2. Современные вопросы математики.

В *XX в.* были созданы новые математические теории, как, например, топология, математическая логика, и коренным образом преобразованы старые, изменился сам язык математики, так что математику *XIX в.* для чтения современных книг пришлось бы переучиваться заново. Понятия, методы и конструкции современной математики носят весьма общий характер. Соответственно чрезвычайно расширилось поле применения математических методов. Математические методы проникли почти во все отделы физики, в химию, а в последние десятилетия — в биологию, медицину, лингвистику, экономику. Сама математика необыкновенно расширилась количественно и претерпела глубокие качественные изменения. В целом она поднялась на более высокую ступень абстракции.

3. Цели и задачи курса

Цели обучения предмету - сформировать знания, умения и навыки студентов по теоретическим основам курса высшей математики.

Задачи предмета: -сформировать у студентов математическое мировоззрение; -научить студентов теоретическим основам курса высшей математики, сформировать у них необходимые умения и навыки для изучения курса высшей математики; - ознакомление студентов с кратким курсом высшей математики; - обучение студентов самостоятельной работе с учебными пособиями и научной литературой.

Основные требования к знаниям и умениям студентов

По окончании изучения дисциплины “Математика” студент будет

знать: - множества и их свойства, высказывания, предикаты, понятие отношений и их виды; элементы комбинаторики, элементы аналитической геометрии плоскости и пространства; определение графа, маршрутов, элементы векторной алгебры; функции и их свойства, определение предела функции, определение производной, первообразная функция, определения неопределенного и определенного интеграла, первоначальные сведения об теории вероятностей и математической статистики; моделирование, теорию алгоритмов

уметь: - производить операции над множествами, производить логические операции над высказываниями, предикатами, рисовать графы, знать и применять при решении задач элементы комбинаторики, производить операции над векторами; строить графики элементарных функций, вычислять простейшие пределы, исследовать на непрерывность функции, находить производные функций, находить неопределенные интегралы, вычислять определенные интегралы, применять приложения определенного интеграла в геометрических задачах, находить вероятность события, находить числовую характеристику случайных событий, знать постановку задач моделирования, применять методы статистических испытаний, знать теорию алгоритмов

Тема 2

«Элементы математической логики. логические операции над высказываниями»

Понятие высказывания

Высказывания обозначаются латинскими буквами. Например, $a, b, c, \dots$. Алгебраические операции над высказываниями обозначаются специальными символами и читаются:

$p \wedge q$	р и q
$p \vee q$	р или q
$\neg p$	не р
$p \rightarrow q$	из р следует q
$p \leftrightarrow q$	р тогда и только тогда q
$\perp$	ложь
$\top$	истина

Если между высказываниями вставить какую либо логическую операцию, получим новое высказывание, которое является составным. В алгебре логики высказываний истинность и ложность являются основными понятиями. Истинность и ложность составных высказываний выявляется с помощью таблиц истинности, составленных с помощью определений.¹

Логические операции над высказываниями

Вводятся следующие логические операции (связки) над высказываниями

1) **Конъюнкция.** Конъюнкцией двух высказываний p и q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания.

Обозначается $p \& q$ или $p \wedge q$.

p	q	$p \wedge q$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

2) **Дизъюнкция.** Дизъюнкцией двух высказываний p и q называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны.

Обозначается $p \vee q$.¹

¹ Использовано содержание и смысл из источника Herbert Gintis , Mathematical Literacy for Humanists, 2000, p.4-7

p	q	$p \vee q$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

3) **Импликация.** Импликацией двух высказываний p и q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда высказывание p истинно, а q – ложно.

Обозначается $p \supset q$ (или $p \Rightarrow q$). Высказывание p называется посылкой импликации, а высказывание q – следствием.

p	q	$p \Rightarrow q$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

4) **Отрицание.** Отрицанием высказывания p называется высказывание, которое истинно только тогда, когда высказывание p ложно.

Обозначается $\neg p$ или $\bar{p}$.

Соответствие между высказываниями определяется таблицами истинности. В нашем случае эта таблица имеет вид:

p	$\neg p$
И	Л
Л	И

5) **Эквиваленция.** Эквиваленцией двух высказываний p и q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинности высказываний совпадают.

Обозначается $p \sim q$ или $p \Leftrightarrow q$ ²

p	q	$p \Leftrightarrow q$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

С помощью этих основных таблиц истинности можно составлять таблицы истинности сложных формул.

Пример 1. Заполнить таблицу истинности высказывания²

$$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$$

Составим таблицы истинности для этой формулы:

p	q	$(p \rightarrow q)$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$
И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И
Л	И	И	Л	И

² Использовано содержание и смысл из источника Herbert Gintis , Mathematical Literacy for Humanists, 2000, p.4-7

Л	Л	И	Л	И
---	---	---	---	---

Пример 2. С помощью таблиц истинности проверить, являются ли эквивалентными формулы φ и ψ .

$$\varphi = (p \Leftrightarrow q) \vee r$$

$$\psi = (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p) \vee r$$

Составим таблицы истинности для заданных формул.³

p	q	r	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Leftrightarrow q) \vee r$
И	И	И	И	И
И	И	Л	И	И
И	Л	И	Л	И
И	Л	Л	Л	Л
Л	И	И	Л	И
Л	И	Л	Л	Л
Л	Л	И	И	И
Л	Л	Л	И	И

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$	$(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p) \vee r$
И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	И	И	И
И	Л	И	Л	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	И	И
Л	И	И	И	Л	И	И
Л	И	Л	И	Л	И	И
Л	Л	И	И	И	И	И
Л	Л	Л	И	И	И	И

Из составленных таблиц видно, что данные формулы не равносильны.

Основные равносильности.

Для любых формул p , q и r справедливы следующие равносильности:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p; \quad p \wedge p \equiv p; \quad p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r;$$

$$p \vee q \equiv q \vee p; \quad p \vee p \equiv p; \quad p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r;$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r); \quad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r);$$

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p; \quad p \vee (p \wedge q) \equiv p; \quad \neg \neg p \equiv p; \quad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q;$$

$$p \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q); \quad p \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q);$$

³Использовано содержание и смысл из источника Herbert Gintis , Mathematical Literacy for Humanists, 2000, p.4-7

Тема 3 «Алгебра предикатов»

В высказывании все четко: это — конкретное утверждение о конкретных объектах — истинное или ложное. Предикат — предложение, похожее на высказывание, но все же им не являющееся: о нем нельзя судить, истинно оно или ложно. Дадим точное определение.

Определение 1. Определенным на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$ n -местным предикатом называется предложение, содержащее n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, превращающееся в высказывание при подстановке вместо этих переменных любых конкретных элементов из множеств $M_1, M_2, \dots, M_n$ соответственно.

Для n -местного предиката будем использовать обозначение $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ называют предметными, а элементы множеств $M_1, M_2, \dots, M_n$, которые эти переменные пробегает, — конкретными предметами. Всякий n -местный предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенный на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$, представляет собой функцию n аргументов, заданную на указанных множествах и принимающую значения в множестве всех высказываний. Поэтому предикат называют также *функцией-высказыванием*.

Рассмотрим пример. Предложение "Река x впадает в озеро Байкал" является одноместным предикатом, определенным над множеством всех названий рек. Подставив вместо предметной переменной x название "Баргузин", получим высказывание "Река Баргузин впадает в озеро Байкал". Это высказывание истинно. Подставив вместо предметной переменной x название "Днепр", получим ложное высказывание "Река Днепр впадает в озеро Байкал".

Другой пример. Предложение (выражение) " $x^2 + y^2 \leq 9$ " является двухместным предикатом, заданным над множествами $\mathbb{R}, \mathbb{R}$. Множества, на которых задан двухместный предикат, совпадают (говорят, что "двухместный предикат задан на множестве $\mathbb{R}^2$ "). Пара действительных чисел 2, 2 превращает данный предикат в истинное высказывание: " $2^2 + 2^2 \leq 9$ ", а пара чисел 2, 3 — в ложное: " $2^2 + 3^2 \leq 9$ ".

Отметим еще один подход к понятию предиката. Как отмечалось, предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенный на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$, превращается в конкретное высказывание $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если вместо предметных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ подставить в него конкретные предметы (элементы $a_1, a_2, \dots, a_n$) из множеств $M_1, M_2, \dots, M_n$ соответственно. Это высказывание может быть либо истинным, либо ложным, т. е. его логическое значение равно 1 или 0. Следовательно, данный предикат определяет функцию n аргументов, заданную на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$ принимающую значение в двухэлементном множестве $\{0; 1\}$. Иногда эту функцию и называют предикатом.

Классификация предикатов

Определение 2. Предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданный на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$, называется:

а) *тождественно истинным*, если при любой подстановке вместо переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ любых конкретных предметов $a_1, a_2, \dots, a_n$ из

множеств $M_1, M_2, \dots, M_n$ соответственно он превращается в истинное высказывание $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$;

б) **тождественно ложным**, если при любой подстановке вместо переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ любых конкретных предметов из множеств $M_1, M_2, \dots, M_n$ соответственно он превращается в ложное высказывание;

в) **выполнимым (опровержимым)**, если существует по меньшей мере один набор конкретных предметов $a_1, a_2, \dots, a_n$ из множеств $M_1, M_2, \dots, M_n$ соответственно, при подстановке которых вместо соответствующих предметных переменных в предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ последний превратится в истинное (ложное) высказывание $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Приведем **примеры предикатов**.

Одноместный предикат "Город x расположен на берегу реки Волги", определенный на множестве названий городов, является выполнимым, потому что существуют города, названия которых превращают данный предикат в истинное высказывание, или, иначе, удовлетворяют этому предикату (например, Ульяновск, Саратов и т. д.). Но данный предикат не будет тождественно истинным, потому что существуют города, названия которых превращают его в ложное высказывание, или, иначе, не удовлетворяют этому предикату (например, Прага, Якутск и т.д.). Этот же предикат являет собой пример опровержимого, но не тождественно ложного предиката (продумайте!).

В другом примере одноместный предикат " $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ", определенный на множестве действительных чисел, тождественно истинный. Наконец, двухместный предикат " $x^2 + y^2 < 0$ ", заданный также на множестве действительных чисел, является тождественно ложным предикатом, потому что любая пара действительных чисел превращает его в ложное высказывание (не удовлетворяет ему).

Отметим некоторые достаточно очевидные закономерности взаимосвязей между предикатами различных типов (рекомендуется осмыслить их):

- 1) каждый тождественно истинный предикат является выполнимым, но обратное неверно;
- 2) каждый тождественно ложный предикат является опровержимым, но обратное неверно;
- 3) каждый не тождественно истинный предикат будет опровержимым, но, вообще говоря, не будет тождественно ложным;
- 4) каждый не тождественно ложный предикат будет выполнимым, но, вообще говоря, не будет тождественно истинным.

Множество истинности предиката

Определение 3. Множеством истинности предиката $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданного на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$, называется совокупность всех упорядоченных n -систем $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, в которых $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, \dots, a_n \in M_n$, таких, что данный предикат обращается в истинное высказывание $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ при подстановке $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$. Это множество будем обозначать P^+ . Таким образом,

Множество P^+ истинности n -местного предиката $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ представляет собой n -арное отношение между элементами множеств $M_1, M_2, \dots, M_n$. Если предикат $P(x)$ — одноместный, заданный над множеством M , то его множество истинности P^+ является подмножеством множества M : $P^+ \subseteq M$.

Например, множеством истинности двухместного предиката "Точка x принадлежит

прямой Y ", заданного на множестве E всех точек плоскости и на множестве F всех прямых этой плоскости, является бинарное отношение принадлежности (инцидентности) между точками и прямыми плоскости. Другой пример. Множество истинности двухместного предиката $S(x, y): x^2 + y^2 = 9$, заданного на множестве $\mathbb{R}^2$, есть множество всех таких пар действительных чисел, которые являются координатами точек плоскости, образующими окружность с центром в начале координат и радиуса 3. Наконец, если $A(x): |a| > 2$ — одноместный предикат над $\mathbb{R}$, то $A^+ = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, или $A^+ = \mathbb{R} \setminus [-2; 2]$.

В терминах множества истинности легко выразить понятия, связанные с классификацией предикатов (определение 18.2). В самом деле, n -местный предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданный на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$, будет:

- а) тождественно истинным тогда и только тогда, когда $P^+ = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$;
- б) тождественно ложным тогда и только тогда, когда $P^+ = \emptyset$;
- в) выполнимым тогда и только тогда, когда $P^+ \neq \emptyset$;
- г) опровержимым тогда и только тогда, когда $P^+ \neq M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$.

На языке множеств истинности еще более отчетливо проявляются закономерности взаимосвязей между предикатами различных типов, отмеченные в конце предыдущего пункта. Проанализируйте их еще раз.

Равносильность и следование предикатов

Определение 4. Два n -местных предиката $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданных над одними и теми же множествами $M_1, M_2, \dots, M_n$, называются равносильными, если набор предметов (элементов) $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, \dots, a_n \in M_n$ превращает первый предикат в истинное высказывание $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ в том и только в том случае, когда этот набор предметов превращает второй предикат в истинное высказывание $Q(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Другими словами (на языке множеств истинности), предикаты $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равносильны тогда и только тогда, когда их множества истинности совпадают. $P^+ = Q^+$.

Утверждение о равносильности двух предикатов P и Q символически будем записывать так: $P \Leftrightarrow Q$. Отношение равносильности предикатов является отношением эквивалентности, так что совокупность всех n -местных предикатов, определенных на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$, распадается на непересекающиеся классы равносильных предикатов (все они определяют одну и ту же функцию, заданную на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$ и принимающую значения в двухэлементном множестве $\{0; 1\}$). Переход от предиката P_1 к равносильному ему предикату P_2 называется равносильным преобразованием первого. Это понятие очень важно для школьной математики, потому что изучаемые в ней уравнения и неравенства представляют собой частные виды предикатов. Решение уравнения и неравенства есть поиск их множеств истинности. При таком поиске мы проделываем над уравнением и неравенством различные преобразования, и здесь важно, чтобы эти преобразования были равносильными, т. е. чтобы найденное множество оказалось бы множеством истинности именно исходного уравнения или неравенства. Аналогична ситуация при решении систем уравнений или неравенств.

Рассмотрим простой пример. Пусть требуется решить уравнение (найти множество истинности предиката): $4x - 2 = -3x - 9$. Преобразуем его равносильным образом:

$$4x - 2 = -3x - 9 \Leftrightarrow 4x + 3x = -9 + 2 \Leftrightarrow x = -1$$

Ответ: $\{-1\}$ — множество всех решений данного уравнения (множество истинности данного предиката).

Отметим следующее немаловажное обстоятельство: может быть так, что два предиката равносильны, если их рассматривать над одним множеством, и неравносильны, если их рассматривать над другим (в частности, объемлющим первое) множеством. Такова, например, ситуация с предикатами: $\sqrt{x \cdot y} = 15$ и $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 15$.

Логические операции над предикатами

Над предикатами можно проделывать те же самые логические операции, что и над высказываниями: отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию, эквивалентность. Рассмотрим эти операции в их связи с операциями над множествами.

Отрицание предиката

Определение 5. Отрицанием n -местного предиката $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенного на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$, называется новый n -местный предикат, определенный на тех же множествах, обозначаемый $\neg P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (читается: "неверно, что $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ", который превращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях предметных переменных, при которых исходное высказывание превращается в ложное высказывание).

Другими словами, предикат $\neg P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ таков, что для любых предметов $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, \dots, a_n \in M_n$ высказывание $\neg P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ является отрицанием высказывания $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Например, нетрудно понять, что отрицанием одноместного предиката " $x \leq 3$ ", определенного на множестве $\mathbb{R}$, является одноместный предикат " $x > 3$ ", определенный на том же множестве $\mathbb{R}$. Отрицанием предиката "Река x впадает в озеро Байкал" является предикат "Река x не впадает в озеро Байкал" (оба одноместных предиката определены на множестве названий рек). Отрицанием предиката " $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ " является предикат " $\sin^2 x + \cos^2 x \neq 1$ " ($x, y \in \mathbb{R}$).

Конъюнкция двух предикатов

Определение 6. Конъюнкцией n -местного предиката $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенного на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$, и m -местного предиката $Q(y_1, y_2, \dots, y_m)$, определенного на множествах $N_1, N_2, \dots, N_m$, называется новый $(n+m)$ -местный предикат, определенный на множествах

$M_1, M_2, \dots, M_n, N_1, N_2, \dots, N_m$,
обозначаемый $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge Q(y_1, y_2, \dots, y_m)$

(читается " $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $Q(y_1, y_2, \dots, y_m)$ "), который превращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях предметных переменных, при которых оба исходных предиката превращаются в истинные высказывания.

Другими словами, предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge Q(y_1, y_2, \dots, y_m)$ таков, что для любых предметов $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, \dots, a_n \in M_n$ и $b_1 \in N_1, b_2 \in N_2, \dots, b_m \in N_m$ высказывание $P(a_1, a_2, \dots, a_n) \wedge Q(b_1, b_2, \dots, b_m)$ является конъюнкцией высказываний $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $Q(b_1, b_2, \dots, b_m)$.

Например, конъюнкцией двух одноместных предикатов " $x > -3$ " и " $x < 3$ ", определенных на $\mathbb{R}$, будет одноместный предикат " $(x > -3) \wedge (x < 3)$ ", записываемый короче в виде: " $-3 < x < 3$ ", который равносильен предикату " $|x| < 3$ " (см. замечание 19.4).

Другой пример. Конъюнкцией двух одноместных предикатов " $x = 0$ " и " $y = 0$ ", заданных на $\mathbb{R}$, является двухместный предикат " $(x = 0) \wedge (y = 0)$ ", заданный на $\mathbb{R}^2$, который равносильен предикату " $x^2 + y^2 = 0$ ", определенному также на $\mathbb{R}^2$.

Операцию конъюнкции можно применять к предикатам, имеющим общие переменные. В этом случае число переменных в новом предикате равно числу $n + m - k$, где n — число переменных первого предиката, m — число переменных второго предиката, k — число переменных общих для обоих предикатов. Именно таков первый из только что рассмотренных двух примеров. Более того, если оба предиката определены на одних и тех же множествах и зависят от одних и тех же переменных, то для них справедлива следующая теорема.

Дизъюнкция двух предикатов

Определение 7. Дизъюнкцией n -местного предиката $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенного на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$, и m -местного предиката $Q(y_1, y_2, \dots, y_m)$, определенного на множествах $N_1, N_2, \dots, N_m$, называется новый $(n+m)$ -местный предикат, определенный на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$ и $N_1, N_2, \dots, N_m$, обозначаемый

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee Q(y_1, y_2, \dots, y_m)$$

(читается " $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ или $Q(y_1, y_2, \dots, y_m)$ "), который превращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях предметных переменных, при которых в истинное высказывание превращается по меньшей мере один из исходных предикатов.

Другими словами, предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee Q(y_1, y_2, \dots, y_m)$ таков, что для любых предметов

$$a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, \dots, a_n \in M_n \text{ и } b_1 \in N_1, b_2 \in N_2, \dots, b_m \in N_m$$

высказывание $P(a_1, a_2, \dots, a_n) \vee Q(b_1, b_2, \dots, b_m)$ является дизъюнкцией высказываний $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $Q(b_1, b_2, \dots, b_m)$.

Операцию дизъюнкции, как и операцию конъюнкции (см. абзац перед теоремой 19.6), можно применять, в частности к предикатам, имеющим общие переменные. Например, дизъюнкцией двух одноместных предикатов " x — четное число" и " x — простое число", определенных на $\mathbb{N}$, является одноместный предикат, определенный на $\mathbb{N}$: " x — четное или простое число".

Дизъюнкцией одноместных предикатов " $x \neq 0$ " и " $y \neq 0$ ", определенных на $\mathbb{R}$, является двухместный предикат " $(x \neq 0) \vee (y \neq 0)$ ", определенный на $\mathbb{R}^2$, который равносильен предикату " $x^2 + y^2 \neq 0$ " над $\mathbb{R}^2$.

Импликация и эквивалентность двух предикатов

Импликация $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow Q(y_1, y_2, \dots, y_m)$ определяется как такой предикат, что для любых предметов

$$a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, \dots, a_n \in M_n \text{ и } b_1 \in M_1, b_2 \in M_2, \dots, b_m \in M_m$$

высказывание $P(a_1, a_2, \dots, a_n) \rightarrow Q(b_1, b_2, \dots, b_m)$ является импликацией высказываний $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $Q(b_1, b_2, \dots, b_m)$. Аналогично определяется эквивалентность двух предикатов. Нетрудно проверить, что импликация двух предикатов, зависящих от одних и тех же переменных, есть тождественно истинный предикат тогда и только тогда, когда ее заключение является следствием посылки, а эквивалентность тождественно истинна, если и только если исходные предикаты равносильны. Свойства этих операций над предикатами, подобно свойствам операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции над предикатами, получаются из соответствующих тавтологий теоремы 3.3. Так, если P, Q, R — предикаты, то, например,

$$\text{а) } (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \Rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R));$$

$$\text{д) } (\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)) \Rightarrow \neg P;$$

$$\text{п) } (P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \leftrightarrow P)$$

$$\text{а) } (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q);$$

$$\text{в) } (P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q);$$

$$\text{ж) } (P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$$

для любых предикатов P, Q, R .

Тема 4 «Понятие множества».

Множество и его элементы. Операции над множествами (объединение, пересечение, разность). Диаграммы Эйлера-Венна.

Множество-первоначальное понятие математики, вводится без определения. Объекты, входящие в состав множества называются его элементами. Обозначим множества буквами A, a, α, A или A . Множество может состоять из нескольких элементов, запись:

$$a \in A \quad (1)$$

обозначает, что элемент a принадлежит множеству A ,

$$a \notin A \quad (2)$$

означает, что элемент a не принадлежит множеству A либо можно использовать запись из логики высказываний $\neg(a \in A)$.

Множество можно записать следующим образом

$$A = \{1, a, t, x\},$$

здесь, в множество A входят число 1 и буквы a, t, x .

Множество (3) $A = \{a, x, 1, t\}$ и множество $\{x, t, a, 1, 1, 1, t, a, t, x\}$ идентичные⁴

Операции над множествами

Если множества A и B состоят из одинаковых элементов, то эти множества называются равными (по теореме о полноте). Например,

$$\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} = \{1, 1, 2, 3\}.$$

Пустое множество – множество, не содержащее ни одного элемента и обозначается $\emptyset$ ⁴

Если каждый элемент множества A принадлежит множеству B , то множество A называется подмножеством множества и записывается $A \subset B$ или $A \subseteq B$.

⁴ Использовано содержание и смысл из источника Herbert Gintis, Mathematical Literacy for Humanists, 2000, p.p11-12,14-15

В этой записи первое множество A часть множества B и они могут быть равными и неравными.

Например, $\{x, t\} \subset \{x, t, 1\}$.

Для любого множества A имеет место отношение $A \subseteq A$

Эту запись можно написать на математическом языке:

$$A \subseteq B \equiv (\forall x \in A)(x \in B)$$

$$A \subsetneq B \equiv (\forall x \in A)(x \in B) \wedge (A \neq B)$$

В это записи знак $\wedge$ означает “и”. Иногда вместо символа $\subset$ можно встретить запись $\subseteq$ или $\subsetneq$.

Для любого множества A верно $\emptyset \subseteq A$, если $A \neq \emptyset$, то $\emptyset \subsetneq A$.⁵

Разностью множеств A и B называется новое множество, элементы которого принадлежат A , но не принадлежат B и обозначается $A \setminus B$ или $A - B$. С помощью обозначений логики высказываний возможна запись :

$$A - B = A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Объединением двух множеств называется новое множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств и обозначается $A \cup B$.

С помощью обозначений логики высказываний возможна запись :

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}. \quad ^5$$

Например: $\{1, x, a\} \cup \{2, 7, x\} = \{1, x, a, 2, 7\}$

Пересечением двух множеств называется новое множество, состоящее из элементов, принадлежащих одновременно обоим множествам и обозначается $A \cap B$

С помощью обозначений логики высказываний возможна запись :

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

⁵ Использовано содержание и смысл из источника Herbert Gintis , Mathematical Literacy for Humanists, 2000, p.p11-12,14-15

Свойства

$$1^0. A \cap A = A ;$$

$$2^0. \begin{aligned} (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \end{aligned}$$

$$3^0. \begin{aligned} A \cap B &= B \cap A; \\ A \cup B &= B \cup A; \end{aligned}$$

$$4^0. A \cup A = A ;$$

$$5^0. A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$6^0. A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

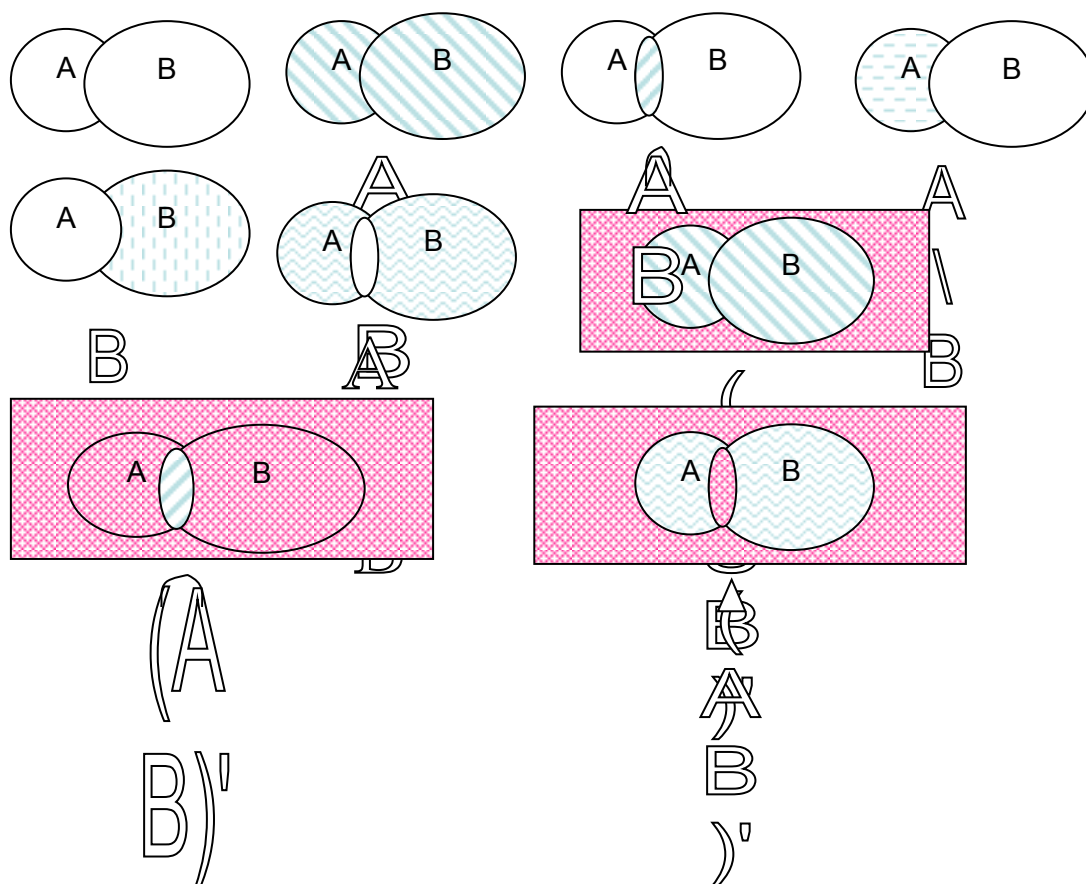
$$7^0. (A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C);$$

Возьмем $A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n \cup \dots$ объединение $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n \cap \dots$ пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, разделим на свойства. Множества $A_i, i = 1 \dots$ являются подмножествами множества X , тогда

$$8^0. X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i);$$

$$9^0. X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i).$$

Достаточно часто для наглядного изображения множеств и операций над ними используют так называемые *круги Эйлера* (диаграммы Венна):



Тема 5 «Операции над множествами»

Прямое произведение множеств, понятие соответствия, мощность множества

Декартово (прямое) произведение множеств

Пусть A и B – множества. Выражение вида (a, b) , где $a \in A$ и $b \in B$, называется *упорядоченной парой*. Равенство вида $(a, b) = (c, d)$ означает, что $a = c$ и $b = d$.

Определение 1. Декартовым (прямым) произведением множеств A и B называется множество упорядоченных пар

$$A \times B = \{(a, b) / a \in A \text{ и } b \in B\}$$

Например, $\{1, 3\} \times \{a, c\} = \{(1, a), (1, c), (3, a), (3, c)\}$.

Определение 2. Степенью декартового произведения $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ называется число множеств n , входящих в это декартово произведение. Если все множества $A_1, A_2, \dots, A_n$ одинаковы, то используют обозначение $A^n = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$.

элементы множества A^n называются словами длины n в алфавите A .

Например, множество $A^2 = A \times A$ содержит все возможные двухэлементные сочетания символов (слова из 2-х символов). Множество всех слов в алфавите A – это множество

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$$

$$A^i \quad A^1 \quad A^2 \quad \dots$$

$i \in N$

Теорема. Мощность декартового произведения $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ равна произведению

мощностей множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|. \quad ^6$$

Следствие: $|A^n| = |A|^n$.

Понятие о мощности множества

Определение. A, B – множества (возможно $A = B$). **Отображение** $f: A \rightarrow B$ – это правило (закон), по которому каждому $a \in A$ ставится в соответствие единственный элемент $b = fx \in B$.

Числовая функция f – это отображение $f: R \rightarrow R$.

Пример. На занятии A – множество студентов, B – множество стульев, $a = f(s)$ – стул, на котором сидит студент.

Определение. Отображение $f: A \rightarrow B$ называется **биекцией** (взаимно однозначным

(1-1) отображением) $\Leftrightarrow \forall b \in B \exists! a \in A: fa = b$.

Когда отображение f из примера является биекцией?

Определение. Множества A и B называются **эквивалентными** ($A \sim B$) $\Leftrightarrow$ существует биекция $f: A \rightarrow B$.

Теорема 1. Конечные множества A и B эквивалентны $\Leftrightarrow$ они состоят из одинакового числа элементов.

Определение. Множества, эквивалентные N , называются **счётными**.

Определение. Мощность ($Card A$) множества A – это то общее свойство, которое имеет любое множество, эквивалентное A

Для конечного множества A $Card A$ = число элементов в A .

Теорема 3. Множество R действительных чисел не эквивалентно множеству N натуральных чисел.

Следствие. $Card R \neq Card N$. $Card R$ называется **мощностью континуума**.

¹ Herbert Gintis, Mathematical Literacy for Humanists, p.p19-22, 27

Теорема 4. При $a < b$ ($a, b \in R$) $Card(a, b) = Card R$.

Доказательство. 1) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \sim R$, т.к. $\exists$ 1-1 $f: R \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $fx = arctgx$.

⁶ Использовано содержание и смысл из источника Herbert Gintis, Mathematical Literacy for Humanists, 2000, p.p11-12,14-15

2) Для любого

$$a > 0 \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \sim (-a, a), \text{ т.к. } \exists 1-1 \quad f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-a, a), \quad f(x) = a \cdot \left(\frac{x}{\pi/2}\right).$$

Тема 6 «Бинарные отношения и их свойства».

Понятие отношение, отношение эквивалентности, отношение симметричности, отношение толерантности, отношение порядка

Отношения

Пусть дано декартово произведение множеств $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

Определение Подмножество R декартового произведения множеств $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

называется *отношением степени n (n -арным отношением)* на множествах $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Говорят, что элементы $a_1, a_2, \dots, a_n$ находятся в отношении R , если $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R$.

Определение *Степень* отношения – это количество элементов в каждом кортеже отношения.

Определение *Мощность* отношения – это количество кортежей отношения.

Понятие отношения является очень важным не только с математической точки зрения. Понятие отношения фактически лежит в основе всей реляционной теории баз данных. Как будет показано ниже, отношения являются математическим аналогом *таблиц*. Сам термин "реляционное представление данных", впервые введенный Эдгаром Коддом в начале 1970-х, происходит от термина *relation*, понимаемом именно в смысле этого определения.

Т.к. любое множество можно рассматривать как декартово произведение степени 1, то любое подмножество можно считать отношением степени 1. Это не очень интересный пример, свидетельствующий лишь о том, что термины "отношение степени 1" и "подмножество" являются синонимами. Нетривиальность понятия отношения проявляется, когда степень отношения больше 1. Ключевыми здесь являются два момента:

Во-первых, все элементы отношения есть *однотипные* кортежи. Однотипность кортежей позволяет считать их аналогами строк в *простой таблице*, т.е. в такой таблице, в которой все строки состоят из одинакового числа ячеек и в соответствующих ячейках содержатся одинаковые типы данных. Например, отношение, состоящее из трех следующих кортежей $\{(1, \text{"Иванов"}, 3), (2, \text{"Петров"}, 4), (3, \text{"Сидоров"}, 5)\}$ можно считать таблицей, содержащей данные о студентах и их оценках за экзамен. Такая таблица будет иметь три строки и три колонки, причем в каждой колонке содержатся данные одного типа. Степень отношения является аналогом количества столбцов в таблице, мощность отношения – аналогом количества строк в таблице.

Во-вторых. За исключением крайнего случая, когда отношение есть само декартово произведение, отношение включает в себя *не все возможные кортежи* из декартового произведения. Это значит, что для каждого отношения имеется *критерий*, позволяющий определить, какие кортежи входят в отношение, а какие – нет. Этот критерий, по существу, определяет для нас *смысл (семантику)* отношения.

Действительно, каждому отношению можно поставить в соответствие некоторое логическое выражение $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, зависящее от n параметров (n -местный предикат) и определяющее, будет ли кортеж $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принадлежать отношению R . Это логическое

выражение называют *предикатом отношения* R . Более точно, кортеж $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принадлежит отношению R тогда и только тогда, когда предикат этого отношения $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принимает значение "истина".

В математике чаще всего используют бинарные отношения (отношения степени 2). В теории баз данных основными являются отношения степени n . В математике, как правило, отношения заданы на бесконечных множествах и имеют бесконечную мощность. В базах данных напротив, мощности отношений конечны (число хранимых строк в таблицах всегда конечно).

Классы бинарных отношений

Отношение тождества

Бинарное отношение $U(M)$, заданное на множестве M , называется *отношением тождества* тогда и только тогда, когда оно состоит только из пар вида (a, a) , $a \in M$. Т.е. $\forall a \in M (a, a) \in U(M)$. Обозначается отношение тождества как U .

Отношение эквивалентности

Бинарное отношение $T(M)$, заданное на множестве M , называется *отношением эквивалентности* тогда и только тогда, когда оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Обозначается отношение эквивалентности как $\leq \Rightarrow$.

Классом эквивалентности $K(x)$ элемента $x, x \in M$ называется множество всех элементов $y, y \in M$, с которыми x находится в отношении эквивалентности $K(x) = \{y/x \leq \Rightarrow y\}$.

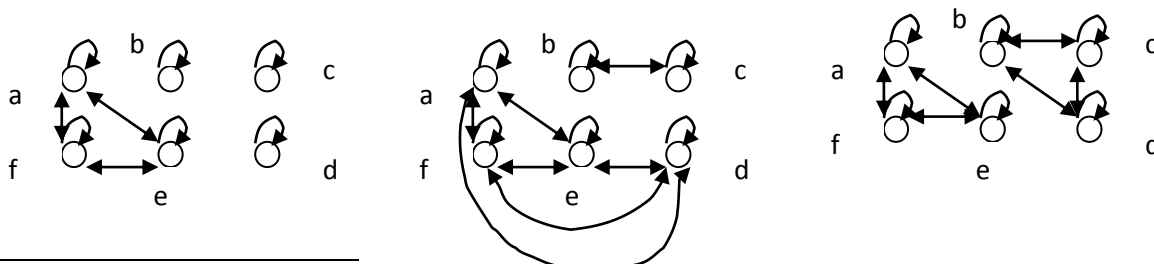
Отношение эквивалентности разбивает множество M на непересекающиеся классы эквивалентных между собой элементов, объединение которых совпадает с M .

Задача 1

На множестве $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ построить бинарное отношение эквивалентности R , при условии, что пара $(a, b) \notin R$.⁷

Решение

По определению бинарного отношения, оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. По условию задачи, элементы a и b принадлежат разным классам эквивалентности. На рис. 1 представлены различные бинарные отношения, удовлетворяющие этим условиям.



⁷ Использовано содержание и смысл из источника Susanna S. Epp. Discrete Mathematics with Applications, Fourth Edition. Printed in Canada 2011, p.p.450

Рис. 1. Бинарные отношения эквивалентности

Но можно ли утверждать, что во всех трех представленных случаях a и d эквивалентны?

Задача 2 Найти разбиение множество $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ на классы эквивалентности, при условии, что пара $(a, b) \notin R$.

Решение

По определению класса эквивалентности, это все элементы, между которыми выполняется рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение. На рис.2 представлено разбиение M на классы эквивалентности.

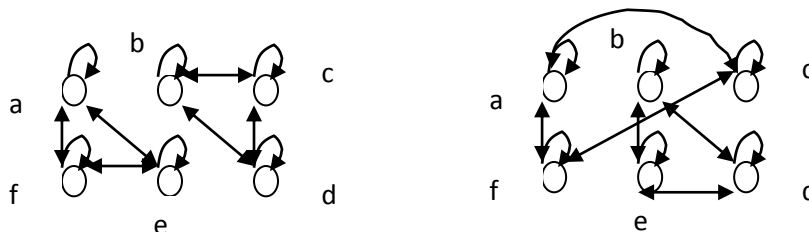


Рис. 2. Классы эквивалентности

Отношение упорядочивания

Бинарное отношение $T(M)$, заданное на множестве M , называется **отношением упорядоченности** тогда и только тогда, когда оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Обозначается отношение упорядоченности (порядка) как $\leq, \leq (M)$.

Если бинарное отношение $T(M)$ иррефлексивно, антисимметрично и транзитивно, то оно называется **отношением строгой упорядоченности** $<, < (M)$.⁸

Если любые два элемента $x, y \in T(M)$ находятся друг с другом в отношении упорядоченности $x \leq y$ или $y \leq x$, то это **линейный порядок**, в противном случае – **частичный порядок**.

Рассматривая наиболее часто используемые отношения упорядоченности, можно отметить, что множество чисел упорядочено линейно, а булеан – частично.

⁸Использовано содержание и смысл из источника Susanna S. Epp. Discrete Mathematics with Applications, Fourth Edition. Printed in Canada, 2011p.p.450

Упорядоченные множества принято обозначать с помощью диаграмм Хассе $H = \langle M, \leq \rangle$. Диаграмма Хассе представляет собой графическое представление упорядоченного множества, в котором отсутствуют (но подразумеваются) рефлексивные петли и транзитивные дуги.

Задача 3 Упорядочить множество $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ линейно (т.е. построить $\leq(M)$), при условии, что пара $(a, b) \notin \leq$.

Решение

По определению линейного порядка, между всеми элементами должны быть в отношении $\leq$, но пара $(a, b) \notin \leq$. Для решения этой задачи, в бинарное отношение нужно включить пару $(b, a) \in \leq$. На рис. 3 решение задачи представлено диаграммой Хассе.

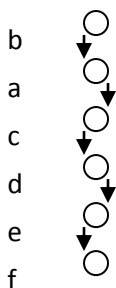
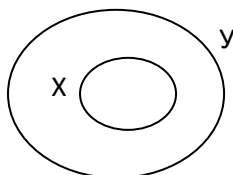


Рис. 3. Диаграмма Хассе линейно упорядоченного множества

Теорема Цермело *Всякое множество может быть строго упорядочено*

Экстремальные характеристики отношения упорядочивания:

Говоря об экстремальных характеристиках частично упорядоченных множеств, следует отметить, что среди исследователей этого вопроса нет полного согласия.[1-5]. Рассмотрим подмножество X частично упорядоченного множества Y



Элемент $x_{\max} \in X$ называется **максимальным элементом X** , тогда и только тогда, когда среди элементов X не существует элементов, больших $x_{\max}$, т.е.

$\neg(\exists y \in X), x_{\max} \leq y \text{ и } x \neq y$. Другими словами, из сравнимости элементов $x_{\max} \in X$ и $x \in X$ вытекает, что $x \leq x_{\max}$.

Элемент $x_{\min} \in X$ называется **минимальным элементом** X , тогда и только тогда, когда среди элементов X не существует меньших $x_{\min}$, т.е. $\neg(\exists y \in X), y \leq x_{\min} \text{ и } y \neq x_{\min}$. Другими словами, из сравнимости элементов $x_{\min} \in X$ и $x \in X$ вытекает, что $x_{\min} \leq x$.

Лемма Цорна (принцип максимума) Каждое непустое подмножество X упорядоченного множества Y содержит, по меньшей мере, один максимальный (минимальный) элемент.

Элемент $x_{largest} \in X$ называется **наибольшим элементом**, тогда и только тогда, когда для любого $\forall x, x \in X$ $x \leq x_{largest}$. Из определения следует, что наибольший элемент находится в отношении сравнения со всеми элементами их X .

Элемент $x_{smallest} \in X$ называется **наименьшим элементом**, тогда и только тогда, когда для любого $\forall x, x \in X$ $x_{smallest} \leq x$.

Теорема Если в частично упорядоченном множестве существует наибольший элемент, то он единственный.

Обратите внимание, наибольший элемент всегда максимален, обратное верно не всегда!

Рассмотрим частично упорядоченное множество $Y=\{a, b, c, d, e, f, g, h, m, n\}$ и его подмножество $X=\{c, d, e, g, h\}$ (рис.4).

Максимальными элементами множества X являются $\{h, e\}$, но наибольшего не существует, т.к. h и e не сравнимы между собой.

Элемент $x_{maj} \in Y$ называется **мажорантой (верхней границей или верхним конусом)** X тогда и только тогда, когда для любого $\forall x, x \in X$ $x \leq x_{maj}$

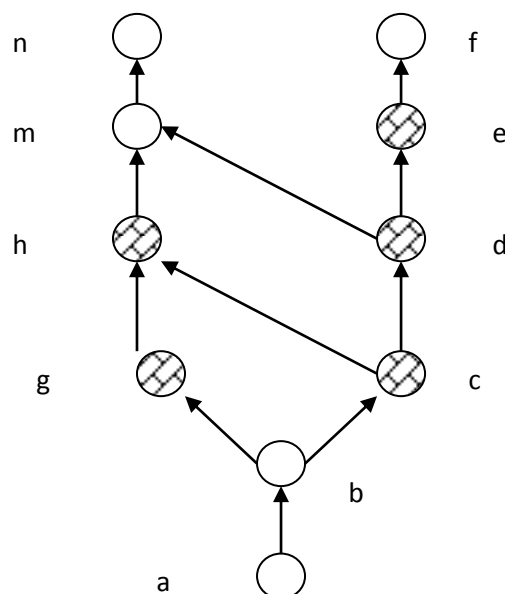


Рис. 4. Частично упорядоченное множество

Обратите внимание, мажоранта находится в отношении сравнения со всеми элементами X и не обязательно принадлежит этому подмножеству. Более того, мажоранта может и не существовать. В нашем примере на рис.4 для подмножества X мажоранта не существует, так как нет элемента, для которого выполняется определение.

Элемент $x_{\min} \in Y$ называется *минорантой (нижней границей или нижним конусом) X* тогда и только тогда, когда для любого $\forall x, x \in X \quad x_{\min} \leq x$. Для примера на рис. 4 миноранты $\{a, b\}$.

Элемент $x_{\sup} \in Y$ называется *верхней гранью (точной верхней гранью) X* тогда и только тогда, когда он является наименьшим среди мажорант. В нашем примере на рис.4 для подмножества X верхняя грань не существует.

Элемент $x_{\inf} \in Y$ называется *нижней гранью (точной нижней гранью) X* тогда и только тогда, когда он является наибольшим среди минорант. В нашем примере на рис.4 для подмножества X нижняя грань $\{b\}$.

Принцип двойственности *Отношение, обратное отношению упорядоченности, так же является отношением упорядоченности.*

Ранее мы использовали отношение $\leq$. Обратное к нему отношение $\geq$ так же упорядочено. Для него так же определяются экстремальные характеристики.

Отношение толерантности

Бинарное отношение $T(M)$, заданное на множестве M , называется *отношением толерантности (схожести)* тогда и только тогда, когда оно рефлексивно и симметрично.

Например, задавая сходство между словами как различие в одну букву, можно строить различные переходы.

Рука – рута – рота – рога – нога

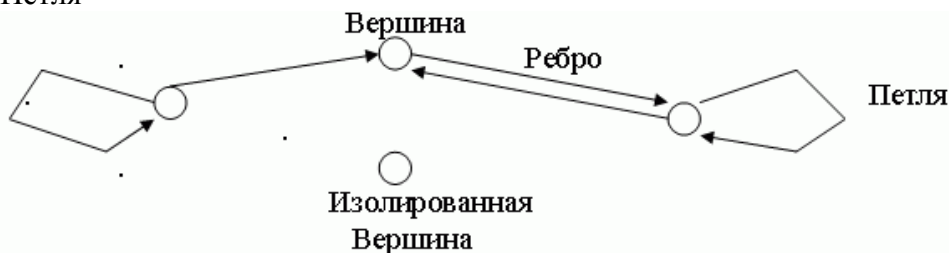
Тема 7 « Определение графа. Маршруты в графах. Деревья »

Основные определения теории графов

Графом G называется пара множеств $G=(X, E)$ где X непустое множество вершин ($x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$), а элементами множества E являются некоторые двухэлементные подмножества X , т.е. $E = \{(x, x)\}$. Эти двухэлементные множества называются рёбрами.

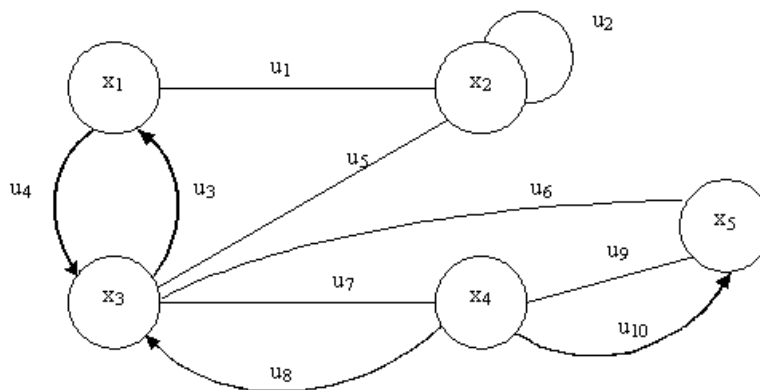
Например, $G = (\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_3, x_4)\})$

Петля



Несложные графы удобно изображать в виде графических схем, где вершины — точки, а ребра — соединяющие их линии. В этих схемах длина линий, их толщина и форма, а также взаиморасположение вершин не имеют никакого значения. Так на рис. 2.5 изображен один и тот же граф G предыдущего примера. Таким образом, граф — свободная конструкция, для которой имеет значение факт наличия связей между двумя вершинами и, в некоторых случаях, характер этих связей.

Если вершины x и x принадлежат некоторому ребру (x, x) , то говорят, что это ребро инцидентно вершинам x и x , которые в свою очередь называются смежными. Если ребро инцидентно одной и той же вершине, то оно называется петлей. Вершина не инцидентная никакому ребру называется изолированной. Если в графе есть вершины, соединенные с двумя или большим числом вершин, то такой граф называют мульти-графом⁹

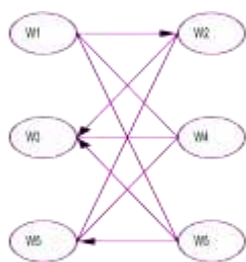


Число ребер инцидентных данной вершине называется степенью (кратностью) данной вершины. В графе, изображенном на рис. 2.6, вершина x_2 имеет степень 6, т. к. ей инцидентны ребра $a_1, a_2, a_4, a_5, a_6, a_7$, а вершина x_1 имеет степень 3. Вершина x_4 имеет степень 1, степень 0 имеет изолированная вершина. Граф без петель и кратных ребер называется простым или обыкновенным. Граф может быть задан и в виде квадратной таблицы — матрицы смежности графа⁸.

Наглядное представление о графе можно получить, если представить себе некоторое множество точек плоскости X , называемых вершинами, и множество направленных или

⁹ Использовано содержание и смысл из источника Грейс П.В. «Математика для гуманитариев», Москва, 2000, стр.45-47

ненаправленных отрезков M , соединяющих все или некоторые из вершин и называемых дугами. Математически граф определяется как пара множеств (X, Γ) .



Определение: Если две вершины соединены направленным отрезком, то пара называется **упорядоченной**, а отрезок называется **ребром** графа. Если вершины соединены ненаправленным отрезком, то вершины называются **неупорядоченными**, отрезок, их соединяющий, называется **дугой**.

Определение: Граф, содержащий только ребра, называется **ориентированным**.

Определение: Граф, содержащий только дуги, называется **неориентированным**.

Определение: Пара вершин может соединяться двумя или более ребрами одного направления, такие ребра называются **кратными**.

Определение: Дуга или ребро может начинаться или заканчиваться в одной вершине, такие дуги называются **петлями**. Считается, что длина петли равна 1.

Определение: Вершины, соединенные ребром или дугой называются **смежными**,

Определение: Дуги, имеющие общие вершины называются **смежными**.

Определение: Ребро и любая из двух ее вершин называется **инцидентными**.

Существуют различные способы задания графов. Пусть $u_1 \dots u_n$ – вершины графа, а $e_1 \dots e_m$ – его ребра.

Определение: **Подграфом** G_A графа $G=(X,\Gamma)$ называется граф, в который входит лишь часть вершин графа G , образующих множество A вместе с дугами, соединяющими эти вершины.

Математически подграф G_A определяется следующим образом:

$G_A (A, \Gamma_A \subseteq \Gamma)$ где $A \subseteq X$

Определение: **Частичным графом** G_A графа $G=(X,\Gamma)$ называется граф, содержащий все вершины графа и только часть дуг графа.

Определение: **Путем** в графе G называется такая последовательность дуг, в которой конец каждой предыдущей дуги является началом следующей дуги. Путь M , последовательными вершинами которого являются вершины $a, b, c \dots$ обозначается $M(a, b, c, \dots)$

Определение: **Длиной** пути M называется число K , равное числу дуг, составляющих путь M .

Определение: Путь, в котором ни одна дуга не встречается дважды, называется **простым**.¹⁰

Определение: Путь, в котором ни одна вершина не встречается дважды, называется **элементарным**.

Определение: **Контур** – это конечный путь M , у которого начальная и конечная вершина совпадают. При этом контур называется элементарным, если все его вершины различны (за исключением начальной и конечной вершины).

Для неориентированного графа аналогичными понятиями являются понятия цепи и цикла. С понятием неориентированного графа связано понятие связности графа.

Определение: **Граф связан**, если любые две его вершины можно соединить цепью.

Определение: Если граф не связан, то его можно разбить на такие подграфы, что все вершины в каждом подграфе связны, а вершины из различных подграфов не связны. Такие подграфы называются **компонентами связности графа**.

Для того, чтобы определить связность ориентированного графа, не нужно обращать внимание на ориентацию дуг. Для ориентированного графа существует понятие сильной связности.

Определение: Граф **сильно связан**, если для любых вершин x и y существует путь, идущий из x в y .

Определение: **Степенью** вершины u графа G называется число ребер, инцидентных этой вершине.

Если граф G без петель имеет n вершин и m ребер, то сумма степеней всех вершин

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2m$$

Определение: Вершина u называется **изолированной**, если $d_u = 0$, и **концевой**, если $d_u = 1$.

Определение: Граф, у которого все вершины имеют одинаковые степени (равные K), называется **регулярным** (степени K),

В полном графе нет петель, и каждая пара вершин соединена в точности одним ребром.

Определение: Для графа $G=(X, \Gamma)$, не имеющего петель и кратных ребер, **дополнительным графом** к G называют граф $F=(X_1, \Gamma_1)$, у которого $X_1 = X$, и вершины смежны только в том случае, если они несмежны в G .

Граф дополнительный к полному состоит из изолированных вершин. Такой граф называется пустым, или вырожденным.

Деревья

¹⁰ Использовано содержание и смысл из источника Грейс П.В. «Математика для гуманитариев», Москва, 2000, стр.45-47

Определение: **Деревом** называется связный, ориентированный граф без петель и кратных ребер, не содержащий в себе циклов, удовлетворяющий следующим условиям:

имеется в точности один узел, называемый **корнем**, в который не входит ни одно ребро,

В каждый узел, кроме корня, входит ровно одно ребро,

Из корня к каждому узлу идет путь (который, как легко показать единственный).

Деревья являются простейшим видом связных графов. Любое дерево с **n** вершинами содержит **n-1** ребер. Число различных деревьев, которые можно построить на n вершинах равно n^{n-2}

Определение Дерево с одной выделенной вершиной называется **корневым деревом**.

Определение Ориентированный граф, состоящий из нескольких деревьев, называется **лесом**.

Определение: Пусть $G=(X, \Gamma)$ – граф, являющийся лесом. Если дуга (v,w) принадлежит Γ , то **v** называется **отцом** узла **w**, а **w** – **сыном** узла **v**.

Определение: Если есть путь из **v** в **w**, то **v** называется **предком** узла **w**, а **w** – **потомком** узла **v**.

Определение: Узел без потомков называется **листом**.

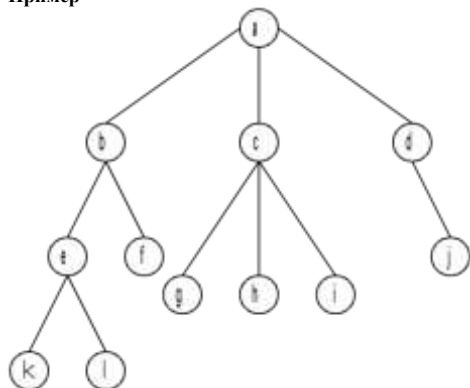
Определение: Узел **v** и его потомки вместе образуют **поддерево** леса **G**, и узел **v** называется **корнем** этого поддерева.

Определение: **Глубина** узла **v** в дереве – это длина пути из корня в **v**.

Определение: **Высота** узла в дереве – это длина самого длинного пути из этого узла в какой-нибудь лист.

Определение: **Высотой дерева** называется высота его корня.¹¹

Пример



¹¹ Использовано содержание и смысл из источника Грейс П.В. «Математика для гуманитариев», Москва, 2000, стр.45-47

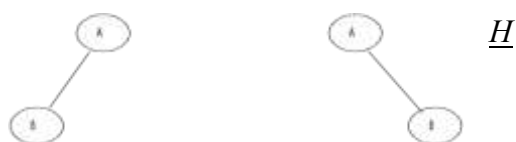
Глубина узла b , в данном примере, $= 1$, а его высота $= 2$. Высота дерева $= 3$.
Определение: **Упорядоченным деревом** называется дерево, в котором множество сыновей каждого узла упорядоченно. При изображении упорядоченного дерева, как правило, считается, что множество сыновей каждого узла упорядоченно слева направо.

Определение: **Бинарным деревом** называется такое упорядоченное дерево, что

Каждый сын произвольного узла идентифицируется либо как **левый сын**, либо как **правый сын**.

Каждый узел имеет **не более одного** левого и не более одного правого сына.

Обратите внимание, что бинарное дерево не является частным случаем дерева, это совершенно иное, хотя и тесно связанное понятие.



апример:

Указанные бинарные деревья различны между собой (в первом случае корень имеет пустое правое поддерево, а во втором левое поддерево пусто), хотя как деревья они изоморфны, и мы можем рассматривать их как одно дерево.

Определение: Бинарное дерево называется **полным**, если для некоторого целого числа K каждый узел, глубины меньшей k имеет как левого, так и правого сына, и каждый узел глубины k является листом.

Полное дерево глубины k имеет

$$2^{k+1} - 1 \text{ узлов.}^{12}$$

Очень часто используются алгоритмы, которые проходят дерево (посещают каждый его узел) в некотором порядке. Известно несколько способов сделать это. Мы рассмотрим три широко известных способа: прохождение дерева в прямом порядке, обратном порядке и внутреннем.

Будем считать, что T – дерево с корнем $г$ и сыновьями $\{v_1 \dots v_k\}$ при $k \geq 0$. При $k = 0$ это дерево состоит из единственного узла $г$.

¹² Использовано содержание и смысл из источника Грейс П.В. «Математика для гуманитариев», Москва, 2000, стр.45-47

Тема 8 «Функция. Предел и непрерывность функции.»

Функция. Классификация функций.

Определение. Рассмотрим два множества X и Y , элементами которых могут быть любые объекты. Предложим, что каждому элементу x множества X по некоторому закону или способу поставлен в соответствие определенный элемент y множества Y , то говорят что на множестве X задана функция $y = f(x)$, (или отображение множества X во множество Y).

Множество X называется областью определения функции f , а элементы $y = f(x)$ образуют множество значений функции – Y .

x – независимая переменная (аргумент).

y – зависимая переменная,

f – закон соответствия, знак функции.

Пусть X и Y множества вещественных чисел.

Пример. Найти область определения и область значений функции $y = x^2 + 1$

Областью определения функции является множество $X = (-\infty, \infty)$, область значений является множество $Y = [1, \infty)$.

Способы задания функции. Существует несколько способов задания функции.

а) аналитический способ, если функция задана формулой вида $y = f(x)$. Все функции, рассмотренные в примерах 1-5 заданы аналитически.

б) табличный способ состоит в том, что функция задается таблицей, содержащей значения x и соответствующие значения $f(x)$, например, таблица логарифмов.

в) графический способ, состоит в изображении графика функции – множество точек (x, y) плоскости, абсциссы которых есть значения аргумента x , а ординаты – соответствующие им значения функции $y = f(x)$.

Например, $y = x^2$ (Рис.1);

$y = \sqrt{x}$ (Рис.2)

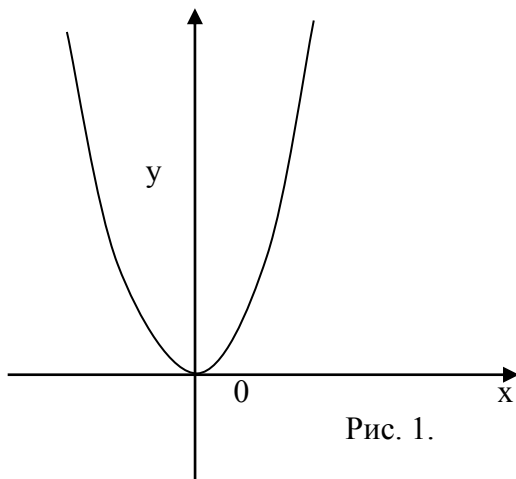


Рис. 1.

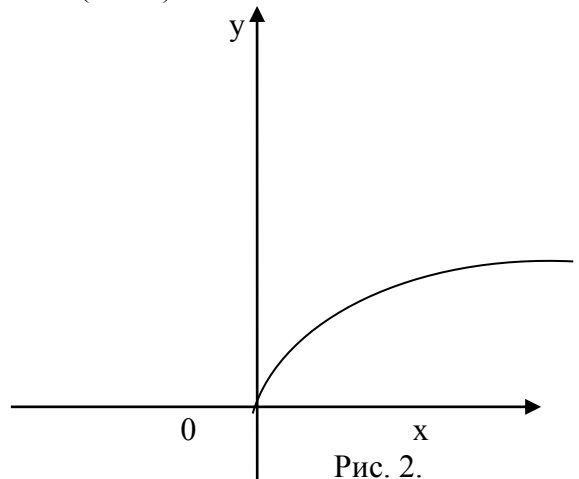


Рис. 2.

г) Описательный способ, если функция записывается правилом ее составления, например, функция Дирихле:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рациональное число.} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррациональное число.} \end{cases}$$

Основные элементарные функции.

Все функции, с которыми встречаемся в школьном курсе, элементарные.

Перечислим их:

1. $y = x^n$, $y = x^{-n}$, $y = x^{m/n}$, где $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$. Эти функции называются степенными.
2. Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
3. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$
4. Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.
5. Обратные тригонометрические функции:
 $y = \operatorname{arcsin} x$, $y = \operatorname{arccos} x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Сложная функция. (суперпозиция функций).

Пусть функция $y = f(u)$ есть функция от переменной u , определенная на множестве U с областью значений $-Y$, а переменная $u = \varphi(x)$ функция от переменной x , определенной на множестве X с областью значения U . Тогда заданная на множестве X функция $y = f(\varphi(x))$ называется сложной функцией (функцией от функций). Например, $y = \lg \sin 3x$. Эту сложную функцию от x можно расписать, как цепочку простых функций: $y = \lg u$, $u = \sin t$, $t = 3x$.

Понятия элементарной функции. Функции построенные из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий называются элементарными.

Например, $y = \sqrt{(x^2 + x + 1)/(\sin^2 x + 3)}$ или $y = 2 - \operatorname{tg} x$.

Примером неэлементарной функции является функция $y = |x|$. Ее график представлен на рис. 3.

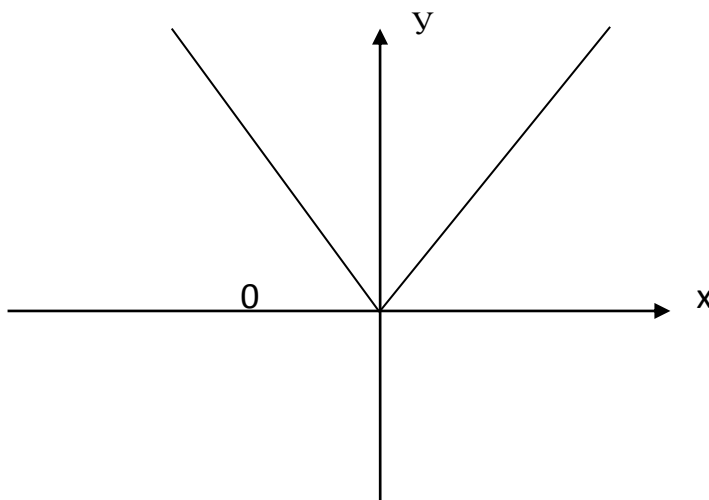


Рис.3

Классификация функции. Элементарные функции делятся на два класса.

1 класс алгебраических функций:

а) $y = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n$, это многочлен (полином) n – степени или целая алгебраическая функция, где $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ – вещественные числа, коэффициенты многочлена.

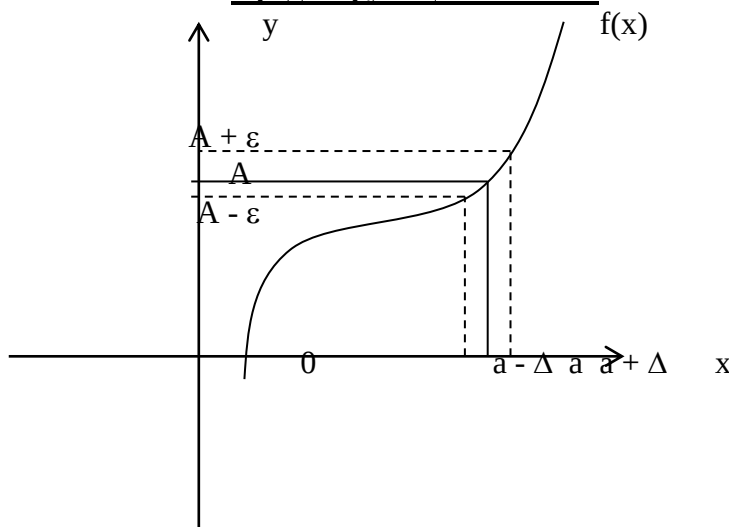
б) $y = (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n) / (B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \dots + B_m)$, это дробно – рациональная функция, она представляет собой отношения двух многочленов.

в) Иррациональная функция, например, $y = \sqrt{x-1} + x^2$.

2 класс трансцендентных функций.

- а) $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, показательная функция,
- б) $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, логарифмическая функция,
- в) все тригонометрические функции,
- г) все обратные тригонометрические функции,
- д) функции вида $y = x^L$, где L – иррациональное число. Например, $y = x^\pi$.

Предел функции в точке.



Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$ (т.е. в самой точке $x = a$ функция может быть и не определена)

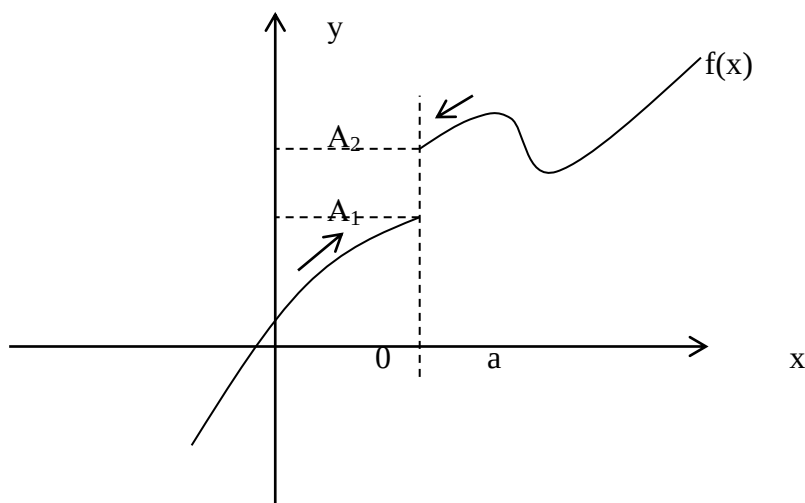
Определение. Число A называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что для всех x таких, что $0 < |x - a| < \Delta$ верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

То же определение может быть записано в другом виде:

Если $a - \Delta < x < a + \Delta$, $x \neq a$, то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Запись предела функции в точке: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

Определение. Если $f(x) \rightarrow A_1$ при $x \rightarrow a$ только при $x < a$, то $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A_1$ называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x = a$ **слева**, а если $f(x) \rightarrow A_2$ при $x \rightarrow a$ только при $x > a$, то $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A_2$ называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x = a$ **справа**.



Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция $f(x)$ не определена в самой точке $x = a$, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также **односторонними пределами** функции $f(x)$ в точке $x = a$. Также говорят, что A – **конечный предел** функции $f(x)$.

Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.

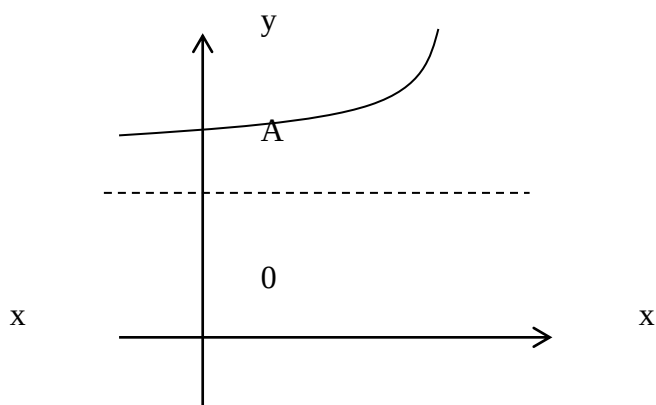
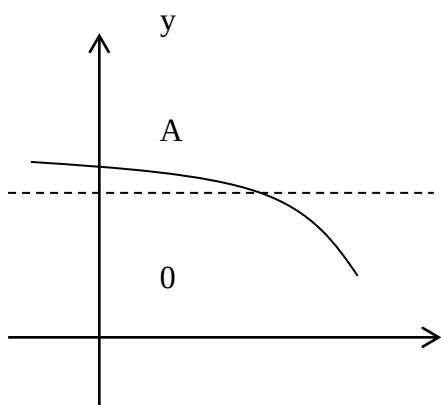
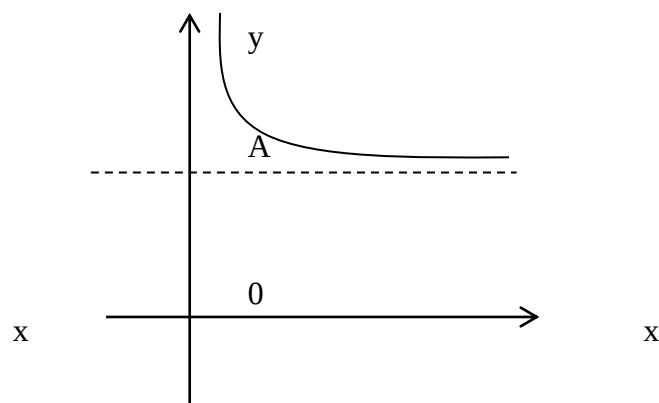
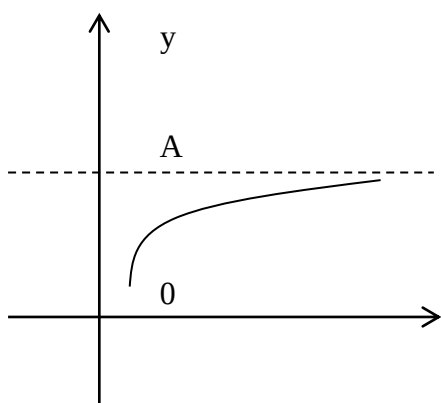
Определение. Число A называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что для всех x , $|x| > M$ выполняется неравенство

$$|A - f(x)| < \varepsilon$$

При этом предполагается, что функция $f(x)$ определена в окрестности бесконечности.

Записывают: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

Графически можно представить:



Аналогично можно определить пределы $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ для любого $x > M$ и

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ для любого $x < M$.

Основные теоремы о пределах.

Теорема 1. $\lim_{x \rightarrow a} C = C$, где $C = \text{const}$.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x \rightarrow a$.

Теорема 2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Доказательство этой теоремы будет приведено ниже.

Теорема 3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Следствие. $\lim_{x \rightarrow a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Теорема 4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ при $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

Теорема 5. Если $f(x) > 0$ вблизи точки $x = a$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, то $A > 0$.

Аналогично определяется знак предела при $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$.

Теорема 6. Если $g(x) \leq f(x) \leq u(x)$ вблизи точки $x = a$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} u(x) = A$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Определение. Функция $f(x)$ называется **ограниченной** вблизи точки $x = a$, если существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| < M$ вблизи точки $x = a$.

Теорема 7. Если функция $f(x)$ имеет конечный предел при $x \rightarrow a$, то она ограничена вблизи точки $x = a$.¹³

Некоторые замечательные пределы.

Первый замечательный предел. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$,
 $Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$ - многочлены.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n (a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n})}{x^m (b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m})} = x^{n-m} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m}} = \frac{a_0}{b_0}$$

$$\text{Итого: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & \text{при } n < m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{при } n = m \\ \infty, & \text{при } n > m \end{cases}$$

Второй замечательный предел. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

¹³ Использовано содержание и смысл из источника Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical analysis I”, 2001, pp 168-169

Третий замечательный предел. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Часто если непосредственное нахождение предела какой – либо функции представляется сложным, то можно путем преобразования функции свести задачу к нахождению замечательных пределов.

Кроме трех, изложенных выше, пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m.$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{(x - x_0) \cos x \cos x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\cos x \cos x_0} = 1 \cdot \frac{1}{\cos^2 x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-\frac{2}{\sqrt{2}} \sin(\pi/4 - x)}{\pi - 4x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-\sin(\pi/4 - x)}{2\sqrt{2}(\pi/4 - x)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\pi - 2x} = \left\{ \begin{array}{l} y = \pi/2 - x \\ x = \pi/2 - y \\ \pi - 2x = \pi - \pi + 2y \end{array} \right\} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi/2 - y)}{2y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2}$$

Непрерывность функции в точке.

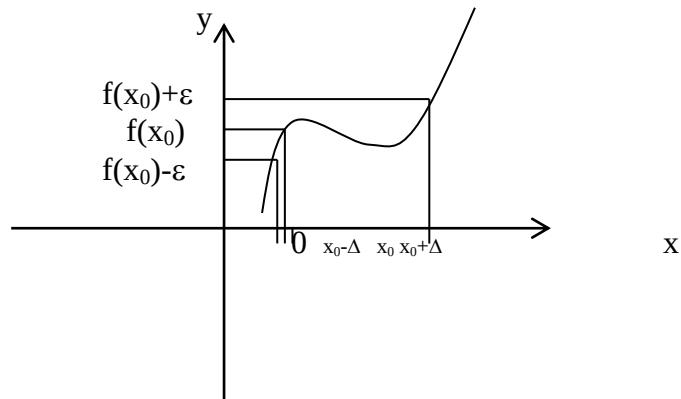
Определение. Функция $f(x)$, определенная в окрестности некоторой точки x_0 , называется **непрерывной в точке** x_0 , если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

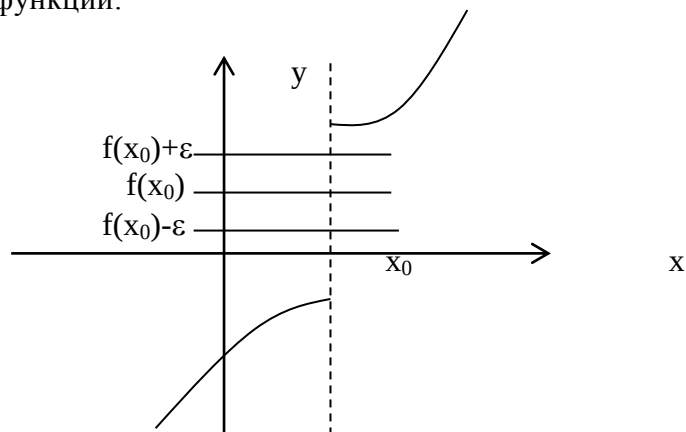
Тот же факт можно записать иначе: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$

Определение. Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , но не является непрерывной в самой точке x_0 , то она называется **разрывной** функцией, а точка x_0 – точкой разрыва.

Пример непрерывной функции:



Пример разрывной функции:



Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что для любых x , удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \Delta$$

верно неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Определение. Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке $x = x_0$, если приращение функции в точке x_0 является бесконечно малой величиной.

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x)^{14}$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$.

Свойства непрерывных функций.

1) Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0 .

¹⁴ Использовано содержание и смысл из источника Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical analysis I”, 2001, pp 168-169

2) Частное двух непрерывных функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция при условии, что $g(x)$ не равна нулю в точке x_0 .

3) Суперпозиция непрерывных функций – есть непрерывная функция.

Это свойство может быть записано следующим образом:

Если $u = f(x)$, $v = g(x)$ – непрерывные функции в точке $x = x_0$, то функция $v = g(f(x))$ – тоже непрерывная функция в этой точке.

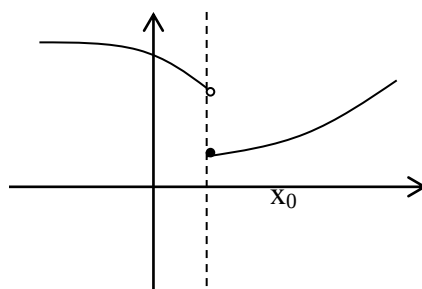
Справедливость приведенных выше свойств можно легко доказать, используя теоремы о пределах.

Точки разрыва и их классификация.

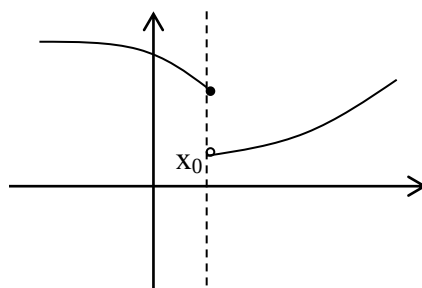
Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$, непрерывную в окрестности точки x_0 , за исключением может быть самой этой точки. Из определения точки разрыва функции следует, что $x = x_0$ является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке, или не является в ней непрерывной.

Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел (см. выше) $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа.



Если односторонний предел (см. выше) $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.



Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва** функции $f(x)$, если $f(x)$ не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва 1-го рода**, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = x_0$, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Из определения можно сделать вывод, что в точке разрыва 1 – го рода функция может иметь только конечный скачок. В некоторых частных случаях точку разрыва 1 – го рода еще иногда называют **устранимой** точкой разрыва, но подробнее об этом поговорим ниже.

Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва 2 – го рода**, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

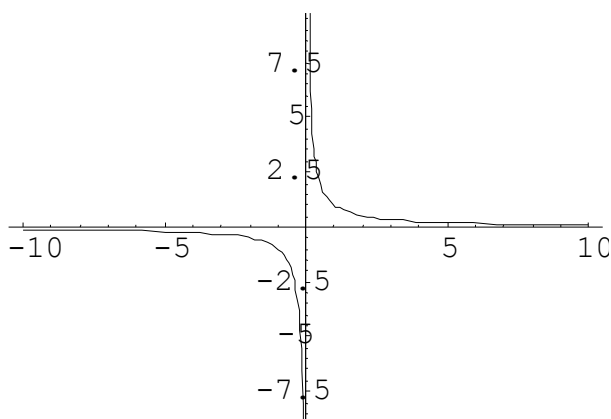
Пример. Функция Дирихле (Дирихле Петер Густав(1805-1859) – немецкий математик, член- корреспондент Петербургской АН 1837г)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рациональное число} \\ 0, & x - \text{иррациональное число} \end{cases}$$

не является непрерывной в любой точке x_0 .

Пример. Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ точку разрыва 2 – го рода, т.к.

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = -\infty.$$

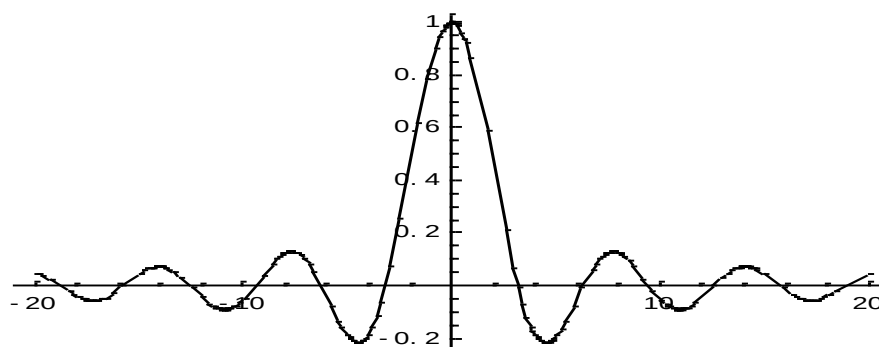


Пример. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

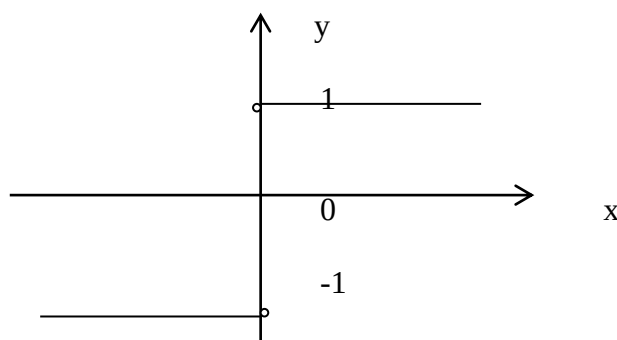
Функция не определена в точке $x = 0$, но имеет в ней конечный предел $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, т.е. в точке $x = 0$ функция имеет точку разрыва 1 – го рода. Это – устранимая точка разрыва, т.к. если доопределить функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{при } x \neq 0 \\ 1, & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

График этой функции:



Пример. $f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \text{при } x > 0 \\ -1, & \text{при } x < 0 \end{cases}$



Эта функция также обозначается $\text{sign}(x)$ – знак x . В точке $x = 0$ функция не определена. Т.к. левый и правый пределы функции различны, то точка разрыва – 1 – го рода. Если доопределить функцию в точке $x = 0$, положив $f(0) = 1$, то функция будет непрерывна справа, если положить $f(0) = -1$, то функция будет непрерывной слева, если положить $f(x)$ равное какому-либо числу, отличному от 1 или -1, то функция не будет непрерывна ни слева, ни справа, но во всех случаях тем не менее будет иметь в точке $x = 0$ разрыв 1 – го рода. В этом примере точка разрыва 1 – го рода не является устранимой.

Таким образом, для того, чтобы точка разрыва 1 – го рода была устранимой, необходимо, чтобы односторонние пределы справа и слева были конечны и равны, а функция была бы в этой точке не определена.

Непрерывность функции на интервале и на отрезке.

Определение. Функция $f(x)$ называется **непрерывной на интервале (отрезке)**, если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Свойство 1: (Первая теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс Карл (1815-1897)-немецкий математик)). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке $[a, b]$ выполняется условие $-M \leq f(x) \leq M$.

Свойство 2: Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Т.е. существуют такие значения x_1 и x_2 , что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, причем

$$m \leq f(x) \leq M$$

Отметим эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например – $f(x) = \sin x$).

Разность между наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке называется **колебанием** функции на отрезке.

Свойство 3: (Вторая теорема Больцано – Коши). Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

Свойство 4: Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то существует некоторая окрестность точки x_0 , в которой функция сохраняет знак.

Свойство 5: (Первая теорема Больцано (1781-1848) – Коши). Если функция $f(x)$ -непрерывная на отрезке $[a, b]$ и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где $f(x) = 0$.

Т.е. если $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$, то $\exists x_0: f(x_0) = 0$.

Определение. Функция $f(x)$ называется **равномерно непрерывной** на отрезке $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\Delta > 0$ такое, что для любых точек $x_1 \in [a, b]$ и $x_2 \in [a, b]$ таких, что

$$\begin{aligned} |x_2 - x_1| &< \Delta \\ |f(x_2) - f(x_1)| &< \varepsilon \end{aligned}$$

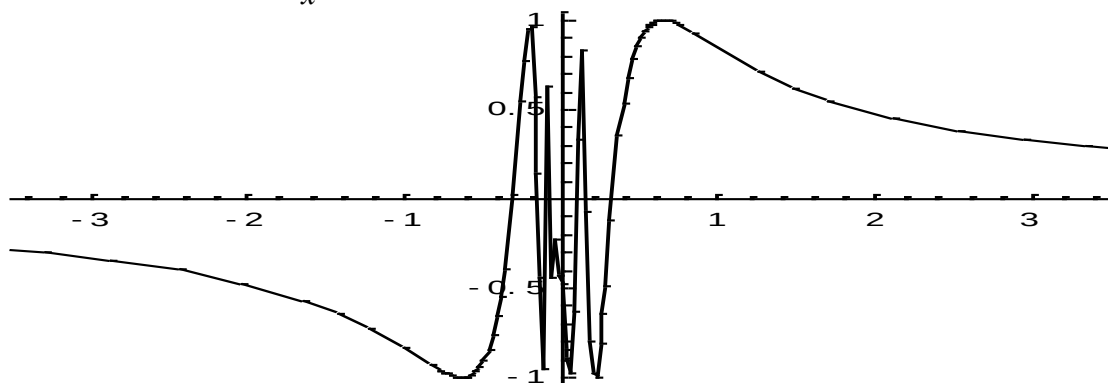
верно неравенство

Отличие равномерной непрерывности от “обычной” в том, что для любого ε существует свое Δ , не зависящее от x , а при “обычной” непрерывности Δ зависит от ε и x .

Свойство 6: Теорема Кантора (Кантор Георг (1845-1918)- немецкий математик). Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.

(Это свойство справедливо только для отрезков, а не для интервалов и полуинтервалов.)

Пример. $y = \sin \frac{1}{x}$



Функция $y = \sin \frac{1}{x}$ непрерывна на интервале $(0, a)$, но не является на нем

равномерно непрерывной, т.к. существует такое число $\Delta > 0$ такое, что существуют значения x_1 и x_2 такие, что $|f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon$, ε - любое число при условии, что x_1 и x_2 близки к нулю.

Свойство 7: Если функция $f(x)$ определена, монотонна и непрерывна на некотором промежутке, то и обратная ей функция $x = g(y)$ тоже однозначна, монотонна и непрерывна.

Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x) = \begin{cases} x + 4, & x < -1 \\ x^2 + 2, & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = 3$$

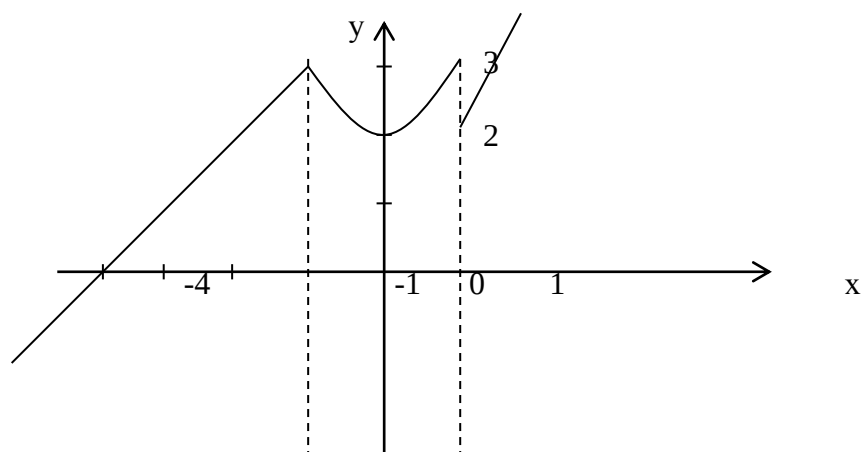
$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 2$$

в точке $x = -1$ функция непрерывна

в точке $x = 1$ точка разрыва 1 – го рода



Тема 9 «Производная и дифференциал функции.»

Определение производной

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть функция $y=f(x)$ определена в точке x и некоторой её окрестности. Придадим значению аргумента x приращение Δx (положительное или отрицательное, но не выводящее за пределы этой окрестности) и найдем соответствующее приращение функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Предел отношения приращение функции Δy к приращению аргумента Δx при $\Delta x \rightarrow 0$ называется производной функции $y=f(x)$ в точке x .

Производную обозначают разными способами. Наиболее распространённые обозначения -

$$y', y'_x, f'(x), f'_x(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$$

Чаще мы будем применять первое из этих обозначений. Таким образом,

$$y'(x) = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{y(x_1) - y(x)}{x_1 - x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Операция нахождения производной называется **дифференцированием**.

Далее
слайд,
6

котором определяется уравнение касательной и нормали.

4. Геометрический смысл производной. Уравнения касательной и нормали к графику гладкой функции

Геометрический смысл производной $y'(x_0)$, как следует из выше изложенного, - угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x_0, y_0=f(x_0))$. Не любая функция имеет касательную в каждой точке, так, невозможно построить касательную к графику функции $|x|$ в точке $(0,0)$. Чтобы в точке $(x_0, y_0=f(x_0))$ существовала касательная, необходимо существование предела, т.е. существование производной. Функции, имеющие производную в каждой точке своей области определения (т.е. функции, графики которых имеют касательную в каждой точке), будем называть гладкими. Применяя известные формулы аналитической геометрии для прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом, получаем:

уравнение касательной в точке $(x_0, y_0=f(x_0))$:

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0) ;$$

уравнение нормали к графику функции в точке $(x_0, y_0=f(x_0))$:

$$y = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) + y(x_0) \quad (\text{при условии, что } y'(x_0) \neq 0).$$

Производные некоторых элементарных функций

1. $y = C = \text{const.}$ Так как $y = C = \text{const.}$, то для $\forall \Delta x$ $\Delta y = 0$, поэтому

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

2. $y = x$. В этом случае $\Delta y = (x + \Delta x) - x = \Delta x$, поэтому

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

3. $y = x^a$. = при $\Delta x \rightarrow 0$.

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{ax^{a-1}\Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = a \cdot x^{a-1}$$

$$4. \quad y = a^x \quad \Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1) = \\ = a^x (\Delta x \ln a + o(\Delta x))$$

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x \Delta x \ln a + o(\Delta x)}{\Delta x} = a^x \ln a \text{ при}$$

$$\Delta x \rightarrow 0 (a > 0, a \neq 1). \text{ Следствие: } (e^x)' = e^x.$$

$$5. \quad y = \log_a x \quad \Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \sim \\ \frac{\Delta x}{x} \log_a e + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \rightarrow 0$$

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x \log_a e) / x + o(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(a > 0, a \neq 1, x > 0). \text{ Следствие: } (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Производная суммы

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x . Тогда в этой точке имеют производные функции $y = (u(x) \pm v(x))$, и $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$.

Доказательство: $\Delta y = \Delta(u(x) \pm v(x)) = (u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)) - (u(x) \pm v(x)) = [u(x+\Delta x) - u(x)] \pm [v(x+\Delta x) - v(x)] = \Delta u \pm \Delta v(x) \Rightarrow \exists$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(u(x) \pm v(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} = u'(x) \pm v'(x).$$

Производная произведения

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x . Тогда в этой точке имеет производную функция $y = (u(x)v(x))$, и $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

Доказательство. Найдём Δy . Так как $u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u$, $v(x+\Delta x) = v(x) + \Delta v$, то

$$\Delta y = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) = [u(x) + \Delta u][v(x) + \Delta v] - u(x)v(x) = u(x)\Delta v + v(x)\Delta u + \Delta u\Delta v. \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Перейдём к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$. Так как при этом $\Delta u \rightarrow 0$, то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)$$

Производная частного

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x , причём $v(x) \neq 0$. Тогда в этой точке имеет производную функция $y(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

$$\text{и } \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Доказательство. Найдём Δy :

$$\Delta y = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x) + \Delta u}{v(x) + \Delta v} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{[u(x) + \Delta u]v(x) - [v(x) + \Delta v]u(x)}{(v(x) + \Delta v)v(x)} = \frac{\Delta u v(x) - u(x) \Delta v}{(v(x) + \Delta v)v(x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v(x) - u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v(x) + \Delta v)v(x)}$$

Перейдём к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$. Так как при этом

$\Delta v \rightarrow 0$, то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} v(x) - u(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v(x) + \Delta v)v(x)} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

Тема 10 Первообразная функция. Неопределенный интеграл и его свойства.

Первообразная функция. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл и его приложения

§ 1. ВАЖНЕЙШИЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Первообразная функция

⇒ Пусть функция $f(x)$ определена на некотором (конечном или бесконечном) интервале (a, b) . Тогда функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на интервале (a, b) , если $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (a, b)$ ³.

Если $F(x)$ — первообразная функция для функции $f(x)$, то функция $F(x) + C$, где C — некоторая постоянная, также первообразная для функции $f(x)$. Кроме того, если $F(x)$ и $G(x)$ — две первообразные для функции $f(x)$, то они отличаются на некоторую постоянную, т. е. существует такое число $C \in \mathbb{R}$, что $F(x) - G(x) = C$.

Таким образом, зная только одну первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$, мы без труда находим и множество всех первообразных для этой функции, которое совпадает с множеством функций вида $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

Если функция $f(x)$ непрерывна на данном интервале, то у нее существует первообразная на этом интервале.

Неопределенный интеграл

⇒ Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$.

Обозначения: $\int f(x) dx$ (читается так: «интеграл эф от икс дэ икс»).

Таким образом, если $F(x)$ — какая-нибудь первообразная для функции $f(x)$, то

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

(в правой части последнего равенства более правильно было бы написать $\{F(x) + C\}$, поскольку речь идет о множестве всех первообразных, но фигурные скобки, обозначающие множество, обычно не пишут).

Знак $\int$ называется *интегралом*, функция $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, а $f(x) dx$ — *подынтегральным выражением*.

⇒ Операция нахождения неопределенного интеграла от данной функции называется *интегрированием* этой функции.

³В дальнейшем указание интервала (a, b) будем опускать.

Интегрирование — операция, обратная операции дифференцирования (т. е. операции, заключающейся в нахождении производной от данной функции). У всякой непрерывной на данном интервале функции существует неопределенный интеграл.

Основные свойства неопределенного интеграла

Везде далее предполагается, что все рассматриваемые неопределенные интегралы существуют.

$$1. \int dF(x) = F(x) + C.$$

$$2. d \int f(x) dx = f(x) dx.$$

$$3. \int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx, \text{ где } \alpha \neq 0,$$

т. е. *постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла.*

$$4. \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$$

т. е. *неопределенный интеграл от суммы функций равен сумме неопределенных интегралов от этих функций.*

$$5. \text{ Если } \int f(x) dx = F(x) + C, \text{ то}$$

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C, \text{ где } a \neq 0.$$

Таблица простейших интегралов

Следующие интегралы обычно называются *табличными интегралами*:

$$1. \int 0 \cdot dx = C.$$

$$2. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1).$$

$$\text{В частности, } \int 1 \cdot dx = x + C, \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$\text{В частности, } \int e^x dx = e^x + C.$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, (a \neq 0).$$

В частности, $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C.$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, (a > 0).$$

В частности, $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$

$$11. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C, (a > 0).$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + \alpha}| + C.$$

Иногда к этому списку добавляют еще несколько интегралов:

$$13. \int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$14. \int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$15. \int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| + C.$$

$$16. \operatorname{ctg} x \, dx = \ln |\sin x| + C.$$

$$17. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$18. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

Интегралы, получающиеся из табличных линейным сдвигом аргумента (т. е. интегралы вида $\int \cos 3x \, dx$, $\int \frac{dx}{4x - 5}$, $\int e^{7x+1} dx$, ...) будем называть *почти табличными интегралами*.

Используя таблицу, найти следующие интегралы:

$$1) \int \frac{dx}{x^3};$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{x^3}};$$

$$3) \int 2^x \, dx;$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}};$$

$$5) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 7}}.$$

○ 1) Воспользуемся табличным интегралом 2 ($\alpha = -3$):

$$\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} \, dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

2) Аналогично находим:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^3}} &= \int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \int x^{-\frac{3}{2}} \, dx = \\ &= \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C. \end{aligned}$$

Тема 11. Определенный интеграл и его приложения.

Понятие определенного интеграла.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ и на этом отрезке произвольно выбраны точки $x_0, x_1, \dots, x_n$, так что $a = x_0 < x_1 < \dots, \dots < x_n = b$ — выбрано разбиение этого отрезка на n частей. В каждом интервале $(x_{i-1}; x_i]$ произвольным образом выбрана точка $c_i, i = 1, 2, \dots, n$.

$\Rightarrow$ Сумма вида

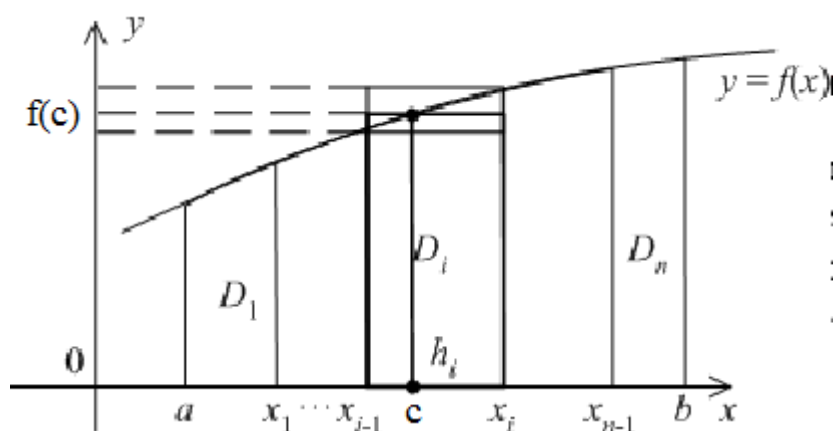
$$S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i, \quad (1)$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, называется *интегральной суммой* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

$\Rightarrow$ *Определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется предел интегральных сумм S_n при условии, что длина наибольшего частичного отрезка Δx_i стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_i \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i. \quad (2)$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то предел (2) существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[a; b]$ и от выбора точек c_i (*теорема существования* определенного интеграла). Функция $f(x)$ в этом случае называется *интегрируемой* на отрезке $[a; b]$. Более того, если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a; b]$ и непрерывна в нем, кроме конечного числа точек разрыва первого рода, то она интегрируема на этом отрезке.



17

¹⁷ Использовано содержание и смысл из источника Larson Edvards., Calculus, 2010. P.272.

Свойства определенного интеграла:

$$1. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$2. \int_a^a f(x) dx = 0.$$

3. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$, т. е. переменную интегрирования можно обозначить любой буквой.

$$4. \int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx.$$

$$5. \int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

$$6. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad a < c < b.$$

7. Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a; b]$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$; если $f(x) \leq 0$ для всех точек $x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x) dx \leq 0$.

8. Если $f(x) \leq g(x)$ на отрезке $[a; b]$, то $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

9. Если M — наибольшее, m — наименьшее значение $f(x)$ на $[a; b]$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

10. $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$, $c \in [a; b]$ (теорема о среднем).

$$11. \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

$$12. \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

Формула Ньютона-Лейбница.

Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную и непрерывную на отрезке $[a; b]$, и предположим, что она интегрируема на отрезке $[a; b]$.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ -- произвольная первообразная для функции $f(x)$. Эта формула называется **формулой Ньютона - Лейбница**. Она играет ключевую роль в интегральном исчислении и во всём математическом анализе.

Смысл формулы Ньютона - Лейбница состоит в том, что для нахождения определённого интеграла $\int_a^b f(x) dx$ нам достаточно теперь найти произвольную первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$ (напомним, что для этого надо найти **неопределённый интеграл**) и взять разность значений этой первообразной в концах отрезка, $F(b) - F(a)$.

Итак, формула Ньютона - Лейбница устанавливает связь между определённым интегралом от данной функции и первообразной для этой функции, то есть между определённым и неопределённым интегралами. Заметим, что смысл этих двух понятий первоначально совершенно различен: неопределённый интеграл -- это набор функций (первообразных), а определённый интеграл -- это число (равное пределу интегральных сумм).

При вычислениях разность $F(b) - F(a)$ часто называют *подстановкой* в функцию $F(x)$ пределов a и b и обозначают $F(x) \Big|_a^b$. Таким образом, по определению,

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

а формулу Ньютона - Лейбница можно записать в виде

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b.$$

Пример 1 Для нахождения значения определённого интеграла

$$I = \int_1^3 x^2 dx$$

найдем первообразную для подынтегральной функции $f(x) = x^2$, вычислив неопределённый интеграл:

¹⁸ Использовано содержание и смысл из источника Larson Edvards. Calculus, 2010. P.283.

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Поскольку нас интересует **любая** первообразная, то мы можем взять $C = 0$ (с тем же успехом могли взять и $C = 1$, и $C = -255\frac{1}{3}$, и т. п., но вид первообразной при $C = 0$ проще, а постоянные слагаемые всё равно взаимно уничтожатся при вычислении

подстановки). Итак, берём $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ и вычисляем подстановку, беря в ней пределы равными пределам интегрирования:

$$F(x) \Big|_1^3 = \frac{1}{3}x^3 \Big|_1^3 = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}.$$

Получаем, что

$$I = \int_1^3 x^2 dx = 8\frac{2}{3}.$$

Площадь области, лежащей между двумя графиками

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ -- две непрерывные функции, заданные на отрезке $[a; b]$, причём $f(x) \leq g(x)$ при всех $x \in [a; b]$. Между графиками $y = f(x)$ и $y = g(x)$ лежит область D , с боков ограниченная отрезками прямых $x = a$ и $x = b$.

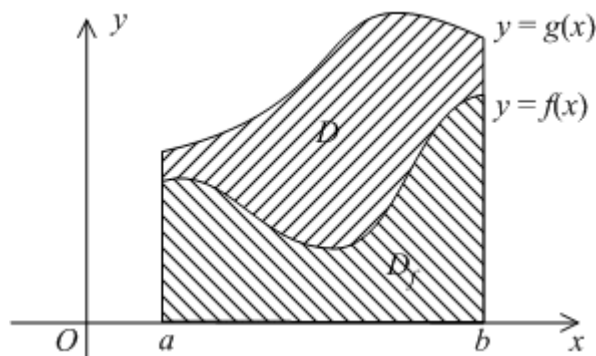


Рис. 1.

Если обе функции неотрицательны, то есть $f(x) \geq 0$, то для вычисления площади S_D области D достаточно заметить, что она равна разности площадей областей D_g и D_f , лежащих между отрезком $[a; b]$ (снизу) и, соответственно, графиком $y = g(x)$ и $y = f(x)$ (сверху). Найдем площади S_g области D_g и S_f области D_f :

$$S_D = S_g - S_f = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx. \quad (1)$$

Если же неравенство $f(x) \geq 0$ не выполнено, то заметим следующее: функция $f(x)$ ограничена, в том числе снизу, на $[a; b]$:

$$f(x) \geq M$$

при некотором M (по предположению, $M < 0$). Сдвинем оба графика, $y = f(x)$ и $y = g(x)$, на $|M| = -M$ единиц вверх, то есть рассмотрим функции $f_1(x) = f(x) - M$ и $g_1(x) = g(x) - M$. Тогда, с одной стороны, область между графиками тоже целиком сдвигается на $|M|$ вверх, и её площадь не изменяется; с другой стороны, оба сдвинутых вверх графика окажутся целиком не ниже оси Ox , и площадь между ними можно будет сосчитать по формуле (1). Заметим теперь, что

$$g_1(x) - f_1(x) = g(x) - f(x).$$

В итоге получаем:

$$S_D = S_{g_1} - S_{f_1} = \int_a^b (g_1(x) - f_1(x)) dx = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$

Итак, формула (1) остаётся верной вне зависимости от того, как графики функций $f(x)$ и $g(x)$ расположены относительно оси Ox .

Пример 1 Найдём площадь ограниченной области, лежащей между графиками $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$. Эти графики имеют две общих точки $(0; 0)$ и $(1; 1)$ (см. рис.), причём на отрезке $[0; 1]$ график $y = \sqrt{x}$ идёт выше, чем график $y = x^2$.

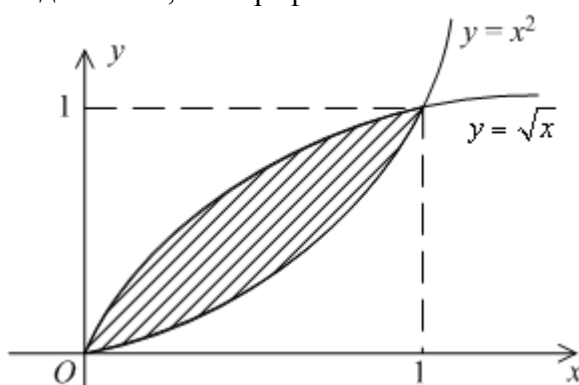


Рис. 2.

Значит, площадь области D между графиками равна

$$S_D = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left. \frac{2}{3} x \sqrt{x} - \frac{1}{3} x^3 \right|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Вычисление длины плоской линии

Пусть линия L представляет собой график функции $y = f(x)$, рассматриваемый при $x \in [a; b]$. Будем предполагать, что функция $f(x)$ имеет на $[a; b]$ непрерывную производную. Наша цель -- найти длину линии L (по сути дела, нам придётся дать определение того, что мы считаем длиной произвольной линии).

Рассмотрим разбиение X отрезка $[a; b]$ точками $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ и отметим соответствующие точки $M_i(x_i; f(x_i))$ на графике. На каждом отрезке разбиения $[x_{i-1}; x_i]$ приближённо заменим дугу графика $y = f(x)$ на хорду $M_{i-1}M_i$.

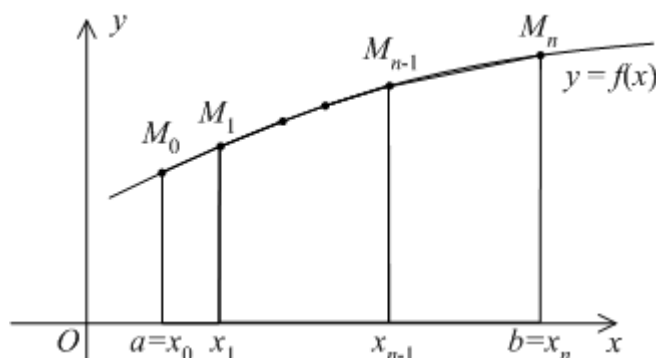


Рис. 3.

Длина этой хорды по теореме Пифагора равняется

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

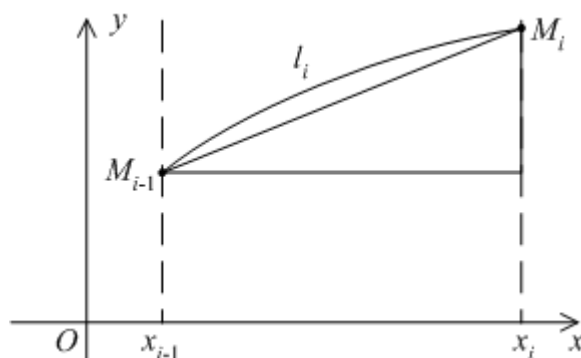


Рис. 4.

Преобразуем это выражение к виду

$$l_i = (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right)^2}.$$

По теореме Лагранжа, на интервале $(x_{i-1}; x_i)$ найдётся такая точка $\bar{x}_i$, что

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\bar{x}_i).$$

Поэтому получаем

$$l_i = (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + (f'(\bar{x}_i))^2}.$$

Рассмотрим теперь точки $\bar{x}_i$, $i = 1, \dots, n$, как отмеченные точки и получим размеченное разбиение Ξ . Соответствующая этому разбиению суммарная длина ломаной $M_0 M_1 \dots M_{n-1} M_n$ равна

$$\tilde{l}_X = \sum_{i=1}^n l_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\bar{x}_i))^2} (x_i - x_{i-1}).$$

Будем считать эту длину приближённым значением длины линии L , а предел этой величины при неограниченном измельчении разбиения -- **по определению** равным длине l линии L :

$$l = \lim_{\text{diam}(X) \rightarrow 0} \tilde{l}_X = \lim_{\text{diam}(X) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\bar{x}_i))^2} (x_i - x_{i-1}).$$

$$\tilde{l}_X = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\bar{x}_i))^2} (x_i - x_{i-1})$$

Заметим теперь, что величина $\tilde{l}_X$ представляет собой интегральную сумму, составленную по размеченному разбиению Ξ для функции $g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$. Эта интегральная сумма при измельчении разбиения будет стремиться к значению определённого интеграла, так что получаем в итоге:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

(2)

$$y = \frac{x^2}{2}$$

Пример 2 Найдём длину l отрезка параболы $y = \frac{x^2}{2}$, лежащего между точками $O(0; 0)$ и $A(1; \frac{1}{2})$.

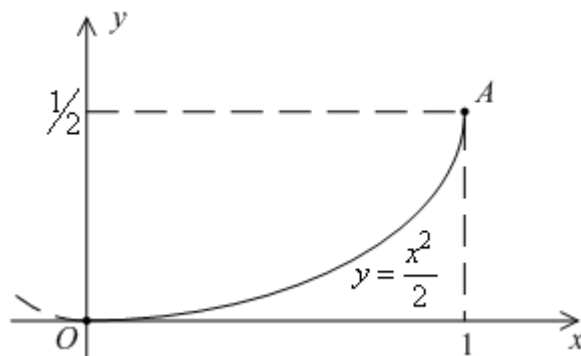


Рис. 5.

Пусть $f(x) = \frac{x^2}{2}$; тогда $f'(x) = x$ и

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx.$$

Для вычисления значения интеграла l проинтегрируем по частям и преобразуем интеграл в правой части так, что получится уравнение относительно l :

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx = \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{1 + x^2} \\ dv = dx \\ du = \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2}} \\ v = x \end{array} \right| = x\sqrt{1 + x^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \quad (2^*)$$

$$= \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{(1+x^2) - 1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{2} - l + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx, \quad (3)$$

Здесь мы учли при преобразовании, что

$$\int_0^1 \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = l.$$

Последний интеграл в правой части (2. *) -- табличный:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln |x + \sqrt{1+x^2}| \Big|_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Получаем в итоге уравнение для искомой величины l :

$$l = \sqrt{2} - l + \ln(1 + \sqrt{2}),$$

откуда находим

$$l = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})).$$

Площадь поверхности вращения

Рассмотрим линию L в плоскости xOy , представленную как график функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ оси Ox . Предположим, что функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a; b]$ непрерывную производную $f'(x)$.

Пусть поверхность S получена как результат вращения в пространстве $Oxyz$ линии L вокруг оси Ox (см. рис.). Наша цель -- найти площадь Q поверхности вращения S (сделанное построение и полученная при этом формула будут одновременно служить и определением того, что такое площадь поверхности S).

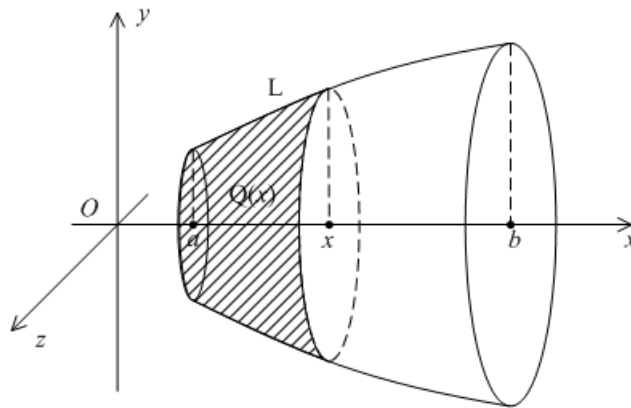


Рис. 6.

Пусть $Q(x)$ -- площадь той части поверхности S , что проектируется на отрезок $[a; x] \subset [a; b]$, лежащий на оси Ox . Очевидно тогда, что $Q(a) = 0$ и что $Q(b) = Q$ -- это искомая площадь.

Найдём производную функции $Q(x)$, применив для этого определение производной. Придадим значению x_0 переменной x некоторое приращение $\Delta x = h$ и рассмотрим приращение функции ΔQ . Это приращение равно площади части поверхности

S между сечениями этой поверхности плоскостями $x = x_0$ и $x = x_0 + h$ (если $h < 0$, то $h > 0$ нужно вдобавок поменять знак). Далее для простоты выкладки будем предполагать $h > 0$.

Приближённо заменим площадь ΔQ на площадь $\Delta \tilde{Q}$ боковой поверхности усечённого конуса, образующей которого служит хорда графика $y = f(x)$, соединяющая точки $M_0(x_0; f(x_0))$ и $M_1(x_0 + h; f(x_0 + h))$ в плоскости xOy .

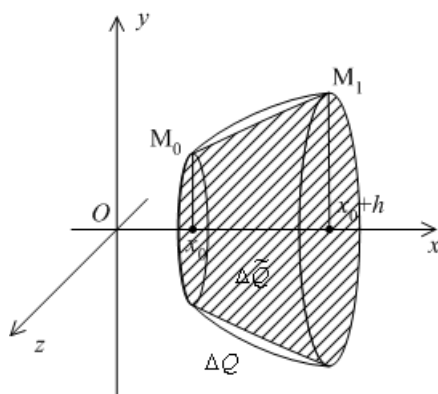


Рис. 7.

Тогда

$$\Delta \tilde{Q} = \pi(f(x_0) + f(x_0 + h)) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)^2} \cdot h = 2\pi \left(f(x_0) + \frac{\Delta f}{2} \right) \sqrt{1 + (f'(x^*))^2} \cdot h,$$

где $\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$ и $x^* \in (x_0; x_0 + h)$ (мы применили к разности Δf , стоящей под знаком корня, теорему Лагранжа).

Запишем теперь $\Delta \tilde{Q}$ в виде

$$\Delta \tilde{Q} = 2\pi f(x_0) \sqrt{1 + (f'(x_0))^2} \cdot h + 2\pi \left(f(x_0) + \frac{\Delta f}{2} \right) \left(\sqrt{1 + (f'(x^*))^2} - \sqrt{1 + (f'(x_0))^2} \right) \cdot h - \pi \Delta f \sqrt{1 + (f'(x^*))^2} \cdot h.$$

Во второй и третьей строках этой формулы бесконечно малыми более высокого порядка малости (при $h \rightarrow 0$), чем h . Действительно, $\Delta f \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, а величина $\pi \sqrt{1 + (f'(x^*))^2}$ ограничена в силу непрерывности функции $f(x)$ и её производной $f'(x)$.

Далее, из непрерывности $f'(x)$ следует, что $\sqrt{1 + (f'(x^*))^2} - \sqrt{1 + (f'(x_0))^2} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, а из непрерывности $f(x)$ -- что величина $2\pi \left(f(x_0) + \frac{\Delta f}{2} \right)$ ограничена.

Следовательно, слагаемое в первой строке формулы -- это главная, линейная по h , часть приращения $\Delta \tilde{Q}$, и вместе с ним -- главная часть приращения функции $Q(x)$. Напомним

теперь, что главная, линейная по h часть приращения функции -- это её дифференциал. Значит,

$$dQ(x_0; h) = 2\pi f(x_0) \sqrt{1 + (f'(x_0))^2} \cdot h.$$

Сменив обозначение x_0 на x (ведь x_0 -- произвольная точка $[a; b]$) и h на dx , получаем:

$$dQ = 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Отсюда

$$Q'(x) = 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

С учётом того, что, как мы отмечали выше, $Q(a) = 0$, получаем:

$$Q(x) = \int_a^x Q'(t) dt = 2\pi \int_a^x f(t) \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

Наконец, положив x равным b , находим искомую площадь $Q = Q(b)$ поверхности вращения:

$$Q = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (4)$$

(мы снова использовали x как обозначение переменной интегрирования). **Пример 3.** Вычислим площадь Q поверхности, образованной вращением в пространстве вокруг оси Ox части линии $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, расположенной над отрезком $[0; 1]$ оси Ox .

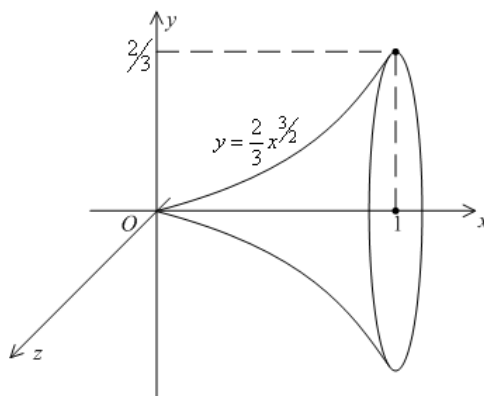


Рис. 8.

$$y' = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

Так как $y' = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, то формула (4) даёт нам интеграл

$$Q = 2\pi \int_0^1 \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \sqrt{1+x} dx = \frac{4\pi}{3} \int_0^1 x \sqrt{x^2+x} dx = \frac{4\pi}{3} \int_0^1 x \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} dx.$$

Сделаем в последнем интеграле замену $t = x + \frac{1}{2}$ и получим:

$$Q = \frac{4\pi}{3} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(t - \frac{1}{2}\right) \sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} dt = \frac{2\pi}{3} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} \cdot 2t dt - \frac{2\pi}{3} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} dt.$$

В первом из интегралов правой части сделаем замену $z = t^2 - \frac{1}{4}$:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} \cdot 2t dt = \int_0^2 \sqrt{z} dz = \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Для вычисления второго из интегралов в правой части обозначим его I и проинтегрируем по частям, получив уравнение для I ,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} dt = t \sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{t^2}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}}} dt = \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{t^2 - \frac{1}{4}}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}}} dt - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}}} dt = \frac{3\sqrt{2}}{2} - I - \frac{1}{4} \ln \left| t + \sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} \right|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} - I - \frac{1}{4} \ln \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2} \right) + \frac{1}{4} \ln \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} \ln(3 + 2\sqrt{2}) - I. \end{aligned}$$

Перенося I в левую часть и деля на 2, получаем

$$I = \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{8} \ln(3 + 2\sqrt{2}),$$

откуда, наконец,

$$Q = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2\pi}{3} \left(\frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{8} \ln(3 + 2\sqrt{2}) \right) = \frac{\pi}{36} (14\sqrt{2} + 3 \ln(3 + 2\sqrt{2})).$$

Тема 12 Векторы. Векторное пространство. Линейные операции над векторами.

Векторы. Векторное пространство. Линейные операции над векторами

Определение вектора

Определение 1 Вектором называется направленный отрезок.

Таким образом, вектор -- это отрезок, у которого выделен один конец, называемый *концом вектора*. Этот конец на рисунке обозначается стрелкой. Другой конец отрезка называется *началом вектора*.

В математической литературе векторы обозначаются обычно одним из следующих способов: $\vec{a}$, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overline{AB}$. В двух последних случаях A -- обозначение точки, являющейся началом вектора, B -- концом вектора. В тексте этого учебника будут использоваться первое и последнее из перечисленных обозначений.

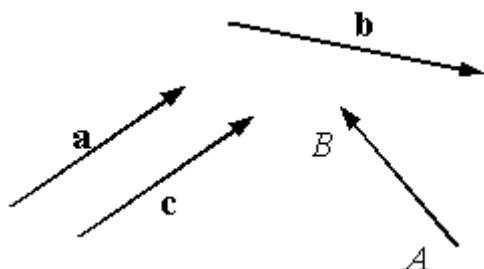


Рис. 1. Изображение векторов

Определение 2 Два вектора называются *равными*, то есть не различаются как векторы, если соответствующие отрезки параллельны, имеют одинаковую длину и направление.

Если считать, что на рисунке 1 векторы лежат в одной плоскости, то $\mathbf{a} = \mathbf{c}$, то есть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ -- разные обозначения одного и того же вектора. Векторы $\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{AB}$ при равных длинах не равны друг другу, так как имеют разные направления. В соответствии с введенным равенством векторов слова "вектор параллелен прямой (плоскости)" и "вектор лежит на прямой (плоскости)" означают одно и то же, так как направленный отрезок можно передвинуть параллельно самому себе, вектор при этом не изменится.

Определение 3 Векторы называются *коллинеарными*, если они параллельны одной прямой.

Определение 4 Векторы называются *компланарными*, если они параллельны одной плоскости.

Определение 5 *Длиной* или *модулем* вектора называется длина соответствующего направленного отрезка.

Модуль вектора $\mathbf{a}$ обозначается $|\mathbf{a}|$. Вектор $\mathbf{a}$ называется *единичным*, если $|\mathbf{a}| = 1$

К множеству векторов необходимо добавить еще один объект, который мы будем называть *нулевым вектором*. Его можно рассматривать как отрезок, у которого начало и конец совпадают. Длина такого вектора равна нулю, направления он не имеет. Все нулевые векторы равны друг другу. Так как нулевой вектор лежит на любой прямой, то, по

определению, он считается коллинеарным любому вектору и перпендикулярным любому вектору.

В соответствии с принятыми выше обозначениями следовало бы нулевой вектор обозначать $\mathbf{0}$, но принято обозначать 0 . По контексту всегда ясно, чем является 0 , числом или вектором.

Операции над векторами

Определение 6 Суммой векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется такой третий вектор $\mathbf{c}$, что при совмещенных началах этих трех векторов, векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ служат сторонами параллелограмма, а вектор $\mathbf{c}$ -- его диагональю (рис..2).

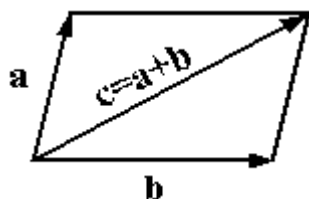


Рис. 2.Сложение векторов

Сложение векторов в соответствии с рисунком 2 называется *сложением по правилу параллелограмма*. Однако бывает более удобным использовать для сложения *правило треугольника*, которое становится ясным из рисунка.3. Из того же рисунка видно, что результаты сложения по правилу параллелограмма и по правилу треугольника одинаковы.



Рис..3.Правило треугольника



Figure 6.1. The Triangle Inequality

19

Определение 7 Вектор $\mathbf{b}$ называется *противоположным* вектору $\mathbf{a}$, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, имеют противоположные направления и $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.

Вектор, противоположный вектору $\mathbf{a}$, обозначается $-\mathbf{a}$, то есть $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Определение 8 Разностью векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется сумма $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$. Разность обозначается $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, то есть $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

Определение 9 Произведением вектора $\mathbf{a}$ на вещественное число r называется вектор $\mathbf{b}$, определяемый условием

¹⁹ Использовано содержание и смысл из источника Mathematical Literacy for Humanists, Herbert Gintis, 2000, 73-80

$$1) |b| = |r||a|$$

и, если $|b| \neq 0$, то еще двумя условиями:

2) вектор b коллинеарен вектору a ;

3) векторы b и a направлены одинаково, если $r > 0$, и противоположно, если $r < 0$.

Произведение вектора a на число r обозначается ra

Замечание 1 Когда речь идет о связи векторов с числами, то иногда числа называют *скалярами*. Таким образом, [определение 9](#) задает умножение вектора на скаляр. Рассмотрим некоторые свойства операций сложения и умножения вектора на число. Часть из них, которые будут особенно важны при обобщении понятия вектора, выделим в отдельную теорему.

Теорема 1 Для любых векторов a, b, c и любых вещественных чисел r, s выполняются следующие свойства:

- 1) $a + b = b + a$ (свойство коммутативности операции сложения);
- 2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (свойство ассоциативности операции сложения);
- 3) $a + 0 = 0 + a = a$
- 4) $a + (-a) = 0$
- 5) $r(sa) = (rs)a$ (свойство ассоциативности по отношению к числам);
- 6) $r(a+b) = ra + rb$ (свойство дистрибутивности по отношению к умножению на число);
- 7) $(r+s)a = ra + sa$ (свойство дистрибутивности по отношению к умножению на вектор);
- 8) $1a = a$
- 9) равенство $ra = 0$ верно тогда и только тогда, когда или $r = 0$, или $a = 0$;
- 10) вектор, противоположный вектору a , равен $(-1)a$, то есть $-a = (-1)a$;
- 11) для любых векторов a и b существует такой вектор x , что $a + x = b$.²⁰

Разложение вектора по базису

Определение 10 Линейной комбинацией векторов $a_1, \dots, a_s$ с коэффициентами $r_1, \dots, r_s$ называется вектор $r_1a_1, \dots, r_sa_s$.

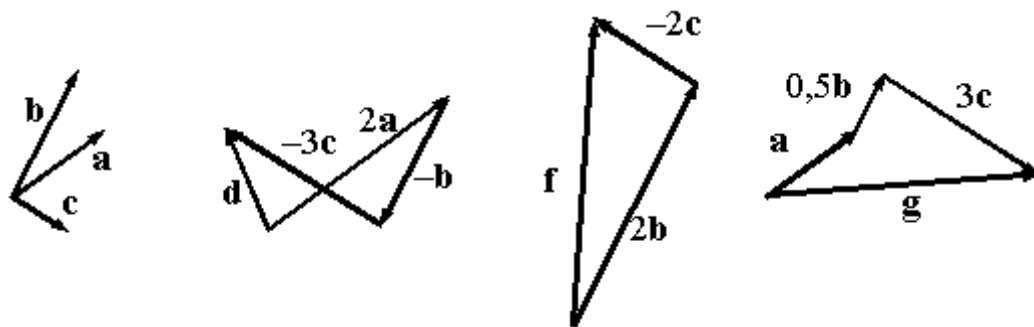


Рис..5.Примеры линейных комбинаций

²⁰ Использовано содержание и смысл из источника Mathematical Literacy for Humanists, Herbert Gintis, 2000, 73-80

Будем говорить, что вектор $\mathbf{b}$ раскладывается по векторам $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$, если $\mathbf{b}$ является линейной комбинацией этих векторов.

Предложение 1 Если $\mathbf{a} \neq 0$ то любой вектор $\mathbf{b}$, коллинеарный $\mathbf{a}$, представим и причем единственным образом в виде $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$, где λ -- число.

Предложение 2 Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ два неколлинеарных вектора. Тогда любой вектор $\mathbf{c}$, компланарный с векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, раскладывается по ним, причем единственным образом.

$\mathbf{c} = r\mathbf{a} + s\mathbf{b}$, то есть вектор раскладывается по векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Определение 11 Базисом векторного пространства L будем называть упорядоченную систему векторов пространства, состоящую: из одного ненулевого вектора, если пространство одномерное; из двух неколлинеарных векторов, если пространство двумерное; из трех некомпланарных векторов, если пространство трехмерное.

Очевидно, что в любом векторном пространстве можно выбрать бесконечно много базисов, число векторов в каждом из них равно размерности пространства.

Слова "упорядоченная система векторов" означают, что указан порядок перечисления векторов.

Определение 12 Координатами (или компонентами) вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ называются коэффициенты разложения вектора $\mathbf{a}$ по векторам базиса.

Для указания, что вектор $\mathbf{a}$ имеет координаты $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, мы будем использовать запись $\mathbf{a} = \alpha_1, \dots, \alpha_s$. Очевидно, что в фиксированном базисе каждый вектор имеет свой, единственный, набор координат. Если же взять другой базис, то координаты вектора в общем случае изменятся.

Сложение векторов и умножение их на число связаны с аналогичными действиями с их координатами. Доказательство соответствующих предложений для простоты записи проведем для случая двумерного пространства. Читатель без труда повторит их для пространства любой размерности.

Предложение 3 При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

$$\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2) \quad \lambda \mathbf{a} = (\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2)$$

Предложение 5 При сложении векторов складываются их соответствующие координаты.

$\alpha_1, \dots, \alpha_s$, тогда $\mathbf{b} = \beta_1, \dots, \beta_s$.

тогда $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_s + \beta_s)$.

Тема 13 Уравнение кривых второго порядка

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат.

Определение 1 Кривой второго порядка называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению второго порядка

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + g = 0, \quad (1)$$

где a, b, c, d, e, g - вещественные числа, и хотя бы одно из чисел a, b, c отлично от нуля.

Исследование уравнения (1) в общем виде проводится так же, как и для аналогичного уравнения в пространстве (поверхности второго порядка) и эти исследования удобно производить с помощью математического аппарата, который будет рассмотрен позже. Здесь же мы ограничимся констатацией того, что уравнение (1) в зависимости от коэффициентов может задавать только четыре типа кривых, а именно, окружность, эллипс, гиперболу и параболу. Изучению этих кривых в "удобной" системе координат и посвящена данная глава.

Окружность

Начнем с определения окружности, известного из школьного курса математики.

Определение 2 Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки, называемой *центром* окружности.

Получим уравнение окружности, если известны ее центр и радиус.

Теорема 1 Окружность радиуса R с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет уравнение

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть $M(x, y)$ - текущая точка окружности. По определению окружности расстояние MM_0 равно R (рис. 1)

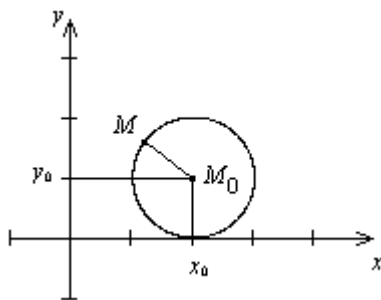


Рис1.Окружность

По формуле для плоскости получаем, что точки окружности и только они удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R.$$

Обе части уравнения неотрицательны. Поэтому после возведения их в квадрат получим эквивалентное уравнение (2).

Если в уравнении (2) раскрыть скобки и привести подобные члены, то вид его изменится. Однако любое уравнение окружности с помощью тождественных преобразований можно привести к виду (2). Для этого достаточно выделить полные квадраты по переменным x и y .

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$$

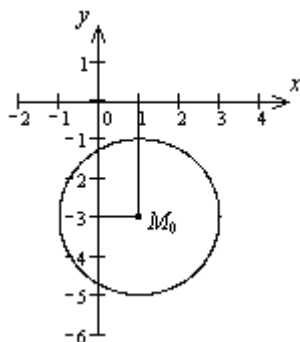
Пример 1 Нарисуйте кривую .

Решение. Выделив полные квадраты, получим

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 2^2.$$

Если выделение полных квадратов вызывает затруднение, то более подробные объяснения можно получить [здесь](#).

Итак, центр окружности - $M_0(1; -3)$, радиус равен 2 (рис. 2).



$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$$

Рис.2. Окружность, заданная уравнением

Решение задачи закончено.

Эллипс

Определение 3 *Эллипсом* называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек той же плоскости, называемых *фокусами эллипса*, есть величина постоянная.

Для эллипса можно дать еще несколько эквивалентных определений. Желающие могут познакомиться с ними в более серьезных учебниках по аналитической геометрии. Здесь же отметим только то, что эллипс - это кривая, получающаяся как проекция на плоскость окружности, лежащей в плоскости, которая образует острый угол с плоскостью .

В отличие от окружности, записать в "удобном" виде уравнение эллипса в произвольной системе координат не удастся. Поэтому для фиксированного эллипса приходится подбирать систему координат так, чтобы его уравнение было достаточно простым.

Пусть F_1 и F_2 - фокусы эллипса. Начало O системы координат расположим на середине отрезка F_1F_2 . Ось Ox направим вдоль этого отрезка, ось Oy - перпендикулярно к этому отрезку (рис. 3).

Теорема 2 Пусть сумма расстояний от точки эллипса до фокусов равна $2a$, а расстояние между фокусами - $2c$. Тогда в выбранной системе координат эллипс имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3)$$

где

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}. \quad (4)$$

Доказательство. Пусть $M(x; y)$ - текущая точка эллипса. По определению эллипса $F_1M + F_2M = 2a$. Из треугольника F_1MF_2 (рис. 3) видно, что $F_1M + F_2M > F_1F_2$, то есть $2a > 2c$, $a > c$, и поэтому число $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ существует.

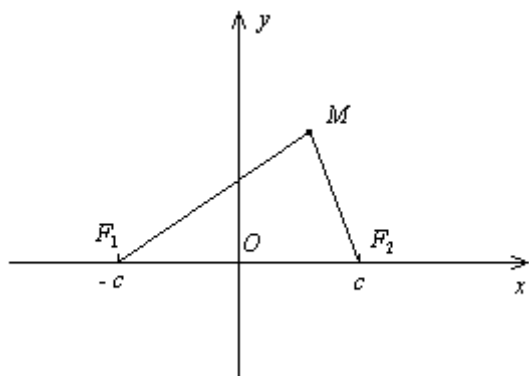


Рис.3.

Фокусами в выбранной системе координат являются точки $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$.

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad FM_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Тогда по определению эллипса

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Перенесем один из корней вправо и обе части возведем в квадрат:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

После того, как раскроем скобки и приведем подобные члены, приходим к выражению

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc.$$

Разделим обе части этого уравнения на 4 и возведем в квадрат

$$a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2.$$

Раскроем скобку и приведем подобные члены

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

Учитывая, что $b^2 = a^2 - c^2$, имеем равенство

$$x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2.$$

Наконец, разделив обе части на a^2b^2 , получим уравнение (3).

Уравнение (3) называется каноническим уравнением эллипса.

Прежде, чем нарисовать эллипс, выясним некоторые его свойства.

Предложение 1 *Эллипс обладает двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии, на одной из которых находятся его фокусы, и центром симметрии. Если эллипс задан каноническим уравнением (3), то его осями симметрии служат оси Ox и Oy , начало координат - центр симметрии.*

Доказательство. Можно было бы провести доказательство на основе определения эллипса (предлагаем читателю попробовать сделать это), но для усиления аналитического аспекта мы проведем доказательство на основе уравнения (3).

Пусть эллипс задан уравнением (3) и $M_1(x_1; y_1)$ - какая-то точка эллипса. Тогда

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \quad (5)$$

Точка $M_2(-x_1; y_1)$ является точкой, симметричной точке M_1 относительно оси Oy (рис.4).

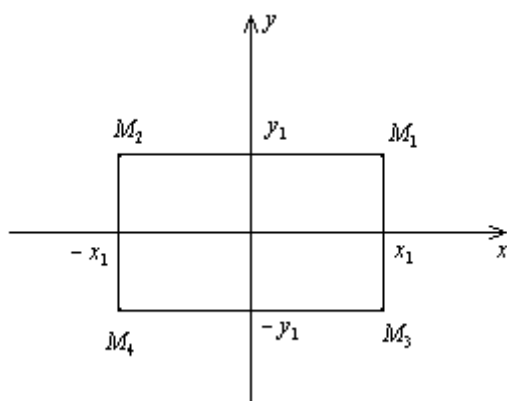


Рис.4.Симметрия точек

Вычисляем значение левой части уравнения (3) в точке M_2

$$\frac{(-x_1)^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}.$$

В силу равенства (5) получаем

$$\frac{(-x_1)^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

следовательно, точка M_2 лежит на эллипсе. Точка $M_3(x_1; -y_1)$ является точкой симметричной точке M_1 относительно оси Ox (рис. 4). Для нее аналогичным путем убеждаемся, что

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{(-y_1)^2}{b^2} = 1,$$

то есть M_3 является точкой эллипса. Наконец точка $M_4(-x_1; -y_1)$ является симметричной точке M_1 относительно начала координат (рис. 4). Повторяя предыдущие рассуждения, получим, что и эта точка тоже лежит на эллипсе. Итак, утверждение предложения доказано, если эллипс имеет уравнение (4). А так как по любой эллипс в некоторой системе координат имеет такое уравнение, то предложение полностью доказано.

Проведем построение эллипса, заданного уравнением (4). Заметим, что из-за симметрии достаточно нарисовать часть эллипса, лежащую в верхней полуплоскости. Уравнение этой линии мы получим, выразив y из уравнения (4) и взяв перед корнем знак "+",

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Построим график этой функции. Область определения -- отрезок $[-a; a]$, $y(0) = b$, при увеличении переменного x от 0 до a функция монотонно убывает. В силу симметрии графика относительно оси Oy функция y монотонно растет при изменении x от $-a$ до 0.

$$y' = -\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a; b)$$

Производная определена во всех точках интервала $(a; b)$ и, следовательно, график является гладким (не содержит изломов, касательная есть в любой

точке). Вторая производная $y'' = \frac{-ab}{(\sqrt{a^2 - x^2})^3}$ отрицательна во всех точках интервала $(a; b)$, следовательно, график -- выпуклый вверх.

Осталось не исследованным поведение кривой вблизи концов отрезка $[-a; a]$. Выразим из

уравнения (4) переменное x через y : $x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$. Очевидно, что в точке $y = 0$ эта

функция имеет производную, то есть касательная к этому графику в точке $(a, 0)$

существует. Легко проверить, что она параллельна оси Oy . Из симметрии эллипса делаем вывод, что это гладкая кривая и строим ее с учетом полученных данных (рис5).

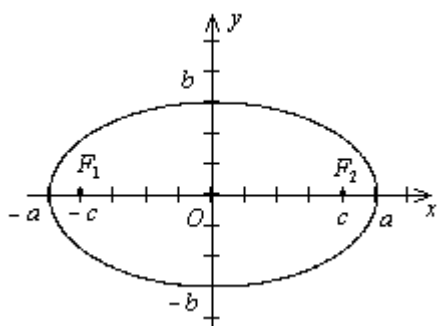


Рис. 5.Эллипс

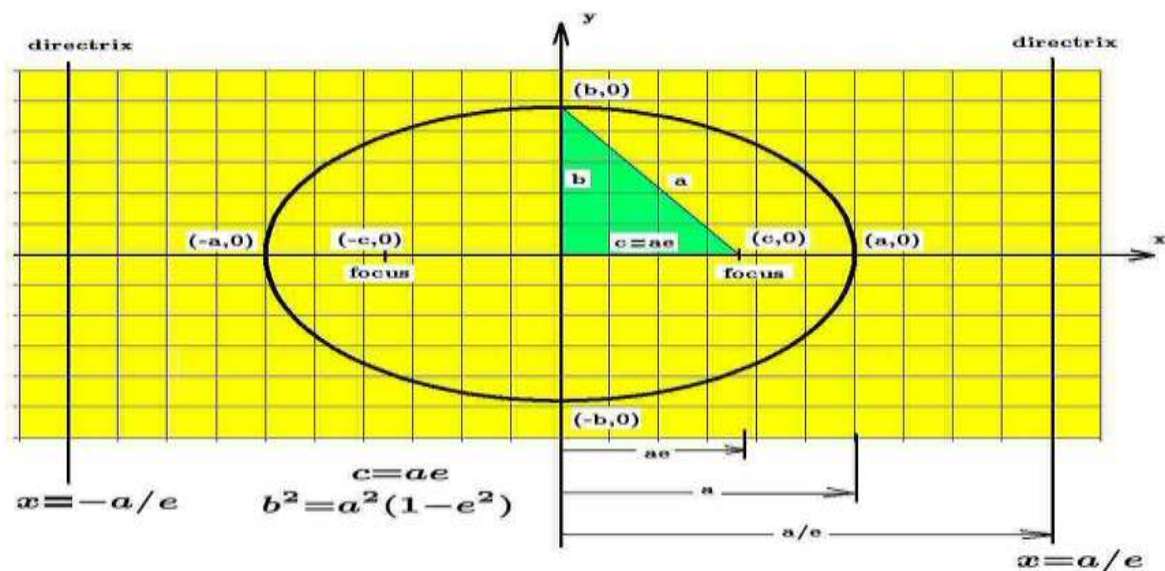


Figure 1-41. The ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

21

Определение 4 Точки пересечения эллипса с его осями симметрии называются *вершинами* эллипса, центр симметрии -- *центром* эллипса, отрезок между двумя вершинами, содержащий фокусы, называется *большой осью* эллипса, половина его длины -- *большой полуосью* эллипса. Отрезок между вершинами на оси симметрии, не содержащей фокусов, называется *малой осью* эллипса, половина его длины -- *малой полуосью*. Величина $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* эллипса.

Если эллипс задан каноническими уравнениями, то его вершины имеют координаты $(-a; 0)$, $(a; 0)$, $(0; -b)$, $(0; b)$, большая полуось равна a , малая полуось равна b . Величина c , являющаяся половиной расстояния между фокусами, определяется из формулы (5) для величины b , а именно,

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Замечание 1 Уравнение (4) было получено в предположении, что F_1 и F_2 -- различные точки, то есть $c > 0$ и $b < a$. Тогда $(c = 0)$. Но кривую, определяемую уравнением (4), мы можем рассмотреть и в случае $a = b$, $(c = 0)$. Уравнение (4) в этом случае после умножения на a^2 примет вид $x^2 + y^2 = a^2$. Это -- уравнение окружности радиуса a с центром в начале координат. Таким образом, можно рассматривать окружность как предельный вариант эллипса, когда $b \rightarrow a$, $(c \rightarrow 0)$, или, как иногда говорят математики, окружность является "вырожденным" эллипсом, у которого фокусы совпали.

²¹ Использовано содержание и смысл из источника Introduction to Calculus, Volume I, by J.H. Heinbockel Emeritus Professor of Mathematics Old Dominion University, 2001, p.p 60-68

Эксцентриситет ε эллипса характеризует степень вытянутости эллипса. Чем ближе эксцентриситет к нулю, тем больше эллипс похож на окружность. Чем ближе эксцентриситет к 1, тем сильнее вытянут эллипс. Отметим, что по определению для эллипса

$$0 < \varepsilon < 1$$

Если задано каноническое уравнение эллипса и требуется его построить, то для отображения качественных характеристик достаточно правильно отметить вершины эллипса и провести через них линию, похожую на кривую рис. 12.4, выдерживая симметрию и избегая образования углов на рисунке. Если же из рисунка предполагается получать числовую информацию о координатах его точек, то тогда построение следует проводить более точно. Нужно построить по точкам верхнюю половину эллипса как график

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

функции, взяв для построения достаточно много точек, а нижнюю половину эллипса получить, используя его симметрию. С другим способом построения эллипса можно познакомиться в курсе черчения.

Эллипс обладает многими замечательными свойствами. Приведем без доказательства одно из них (рис. 6).

Предложение 2 Пусть F_1 и F_2 -- фокусы эллипса, M -- произвольная точка на эллипсе. Тогда нормаль (перпендикуляр к касательной) к эллипсу в точке M делит угол F_1MF_2 пополам.

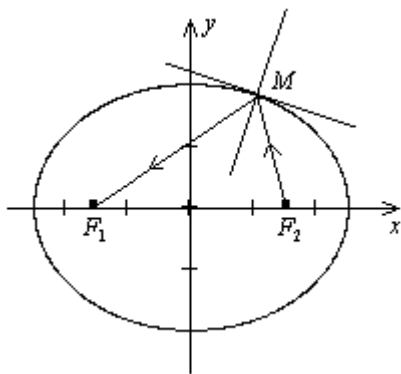


Рис.6. Отражение лучей света от эллипса

Данное свойство имеет достаточно простой физический смысл. Если из одного фокуса выходит в плоскости эллипса луч света, то отразившись от самого эллипса, он обязательно пройдет через другой фокус. Возьмем поверхность, образованную вращением эллипса вокруг большой оси, и будем считать, что внутри она зеркальная. В один из фокусов поместим источник света. Тогда все лучи, выходящие из источника, отражаясь от поверхности, пройдут через другой фокус, то есть освещенность в обоих фокусах будет одинаковой.

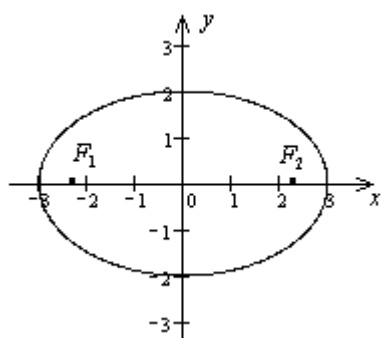
$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

Пример 2 Постройте кривую . Найдите фокусы и эксцентриситет.

Решение. Разделим обе части уравнения на 36. Получаем уравнение

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

Это -- каноническое уравнение эллипса, $a = 3$, $b = 2$. Делаем чертеж (рис7)



$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

Рис. 7. Эллипс, заданный уравнением

Из соотношения (5) находим $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$, $c = \sqrt{5}$. Фокусы -- $F_1(-\sqrt{5}; 0)$, $F_2(\sqrt{5}; 0)$,
 $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$.
 , эксцентриситет --

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

Пример 3 Нарисуйте эллипс . Найдите его фокусы и эксцентриситет.

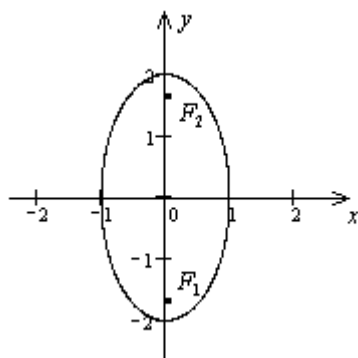
Решение. Уравнение запишем в виде

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1. \quad (7)$$

Это уравнение не является каноническим уравнением эллипса, так как в соответствии с уравнением (4) в нем $a = 1$, $b = 2$, $b > a$, а должно быть $b < a$. Однако, если переобозначить оси, то есть положить $\tilde{x} = y$, $\tilde{y} = x$, то уравнение (12.7) в координатах $(\tilde{x}, \tilde{y})$ примет вид

$$\frac{\tilde{x}^2}{2^2} + \frac{\tilde{y}^2}{1^2} = 1.$$

Это -- каноническое уравнение эллипса при $a = 2$, $b = 1$. Делаем чертеж (рис. 8).



$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

Рис. 8. Эллипс, заданный уравнением

Из соотношения (5) находим $c = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Значит, фокусы в системе координат $(\bar{x}; \bar{y})$ имеют координаты $(-\sqrt{3}; 0)$, $(\sqrt{3}; 0)$, а в системе координат $(x; y)$ -- координаты $(0; -\sqrt{3})$, $(0; \sqrt{3})$. Эксцентриситет равен $\epsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Замечание 2 Из [примера 3](#) ясно, что построение кривой (эллипса) с уравнением (4) при $a < b$ можно вести так же, как и для эллипса, заданного каноническим уравнением: отложить полуось a на оси Ox , полуось b -- на оси Oy и через получившиеся вершины провести эллипс. Различие заключается в том, что фокусы теперь располагаются на оси ординат (большой оси), величину c нужно вычислять по формуле $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, и $\epsilon = \frac{c}{b}$.

Гипербола

Из школьного курса математики известно, что кривая, задаваемая уравнением $y = \frac{k}{x}$, где k -- число, называется гиперболой. Однако это -- частный случай гиперболы (равносторонняя гипербола).

Определение 5 Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек той же плоскости, называемых *фокусами* гиперболы, есть величина постоянная.

Так же, как и в случае эллипса, для получения уравнения гиперболы выберем подходящую систему координат. Начало координат расположим на середине отрезка между фокусами, ось Ox направим вдоль этого отрезка, а ось ординат -- перпендикулярно к нему.

Теорема 3 Пусть расстояние между фокусами F_1 и F_2 гиперболы равно $2c$, а абсолютная величина разности расстояний от точки гиперболы до фокусов равна $2a$. Тогда гипербола в выбранной выше системе координат имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (8)$$

где

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}. \quad (9)$$

Доказательство. Пусть $M(x; y)$ -- текущая точка гиперболы (рис. 9).

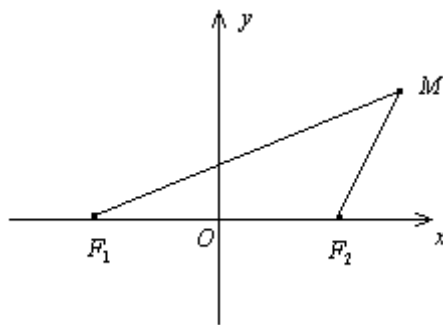
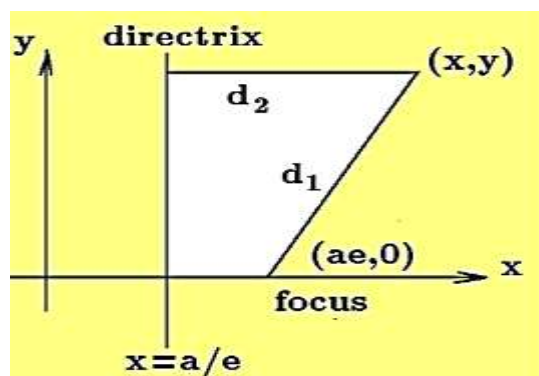


Рис. 9. ²²



$$H_1 = \{ (x, y) \mid \sqrt{(x - ae)^2 + y^2} = e|x - a/e|, e > 1 \}$$

Так как разность двух сторон треугольника меньше третьей стороны, то $|F_1M - F_2M| < F_1F_2$, то есть $2a < 2c$, $a < c$. В силу последнего неравенства вещественное число b , определяемое формулой (9), существует.

²² Introduction to Calculus, Volume I, by J.H. Heinbockel Emeritus Professor of Mathematics Old Dominion University 2000, p.p 60-68

По условию, фокусы -- $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$. По формуле (4) для случая плоскости получаем

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

По определению гиперболы

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

Это уравнение запишем в виде

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a.$$

Обе части возведем в квадрат:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2.$$

После приведения подобных членов и деления на 4, приходим к равенству

$$xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Опять обе части возведем в квадрат:

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2).$$

Раскрывая скобку и приводя подобные члены, получим

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

С учетом формулы (9) уравнение принимает вид

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Разделим обе части уравнения на a^2b^2 и получим уравнение (8)

Уравнение (8) называется каноническим уравнением гиперболы.

Предложение 3 Гипербола обладает двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии, на одной из которых лежат фокусы гиперболы, и центром симметрии. Если гипербола задана каноническим уравнением, то ее осями симметрии служат координатные оси Ox и Oy , а начало координат -- центр симметрии гиперболы.

Доказательство. Проводится аналогично доказательству [предложения 1](#).

Проведем построение гиперболы, заданной уравнением (8). Заметим, что из-за симметрии достаточно построить кривую только в первом координатном угле. Выразим из канонического уравнения y как функцию x , при условии, что $y > 0$,

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

и построим график этой функции.

Область определения -- интервал $[a; +\infty)$, $y(a) = 0$, функция монотонно растёт. Производная

$$y' = \frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

существует во всей области определения, кроме точки a . Следовательно, график -- гладкая кривая (без углов). Вторая производная

$$y'' = -\frac{ab}{(\sqrt{x^2 - a^2})^3}$$

во всех точках интервала $(a; +\infty)$ отрицательна, следовательно, график -- выпуклый вверх.

Проверим график на наличие асимптоты при $x \rightarrow +\infty$. Пусть асимптота имеет уравнение $y = \alpha x + \beta$. Тогда по правилам математического анализа

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \frac{b}{a},$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \alpha x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a} x \right) = \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - a^2} - x).$$

Выражение под знаком предела домножим и разделим на $\sqrt{x^2 - a^2} + x$. Получим

$$\beta = \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = -ab \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0.$$

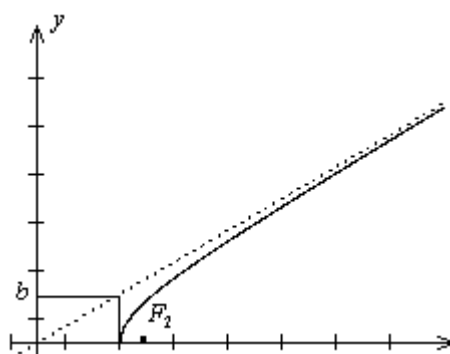
Итак, график функции имеет асимптоту $y = \frac{b}{a}x$. Из симметрии гиперболы следует, что $y = -\frac{b}{a}x$ -- тоже асимптота. Остается неясным характер кривой в окрестности точки $(a; 0)$

, а именно, образует ли график $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ и симметричная ему относительно оси Ox часть гиперболы в этой точке угол или гипербола в этой точке -- гладкая кривая (есть касательная). Для решения этого вопроса выразим из уравнения (12.8) x через y :

$$x = \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2}.$$

Очевидно, что данная функция имеет производную в точке $y = 0$, $x'(0) = 0$, и в точке $(a; 0)$ у гиперболы есть вертикальная касательная. По полученным данным рисуем график

функции $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (рис. 10).



$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

Рис. 10. График функции

Окончательно, используя симметрию гиперболы, получаем кривую рисунка 11.

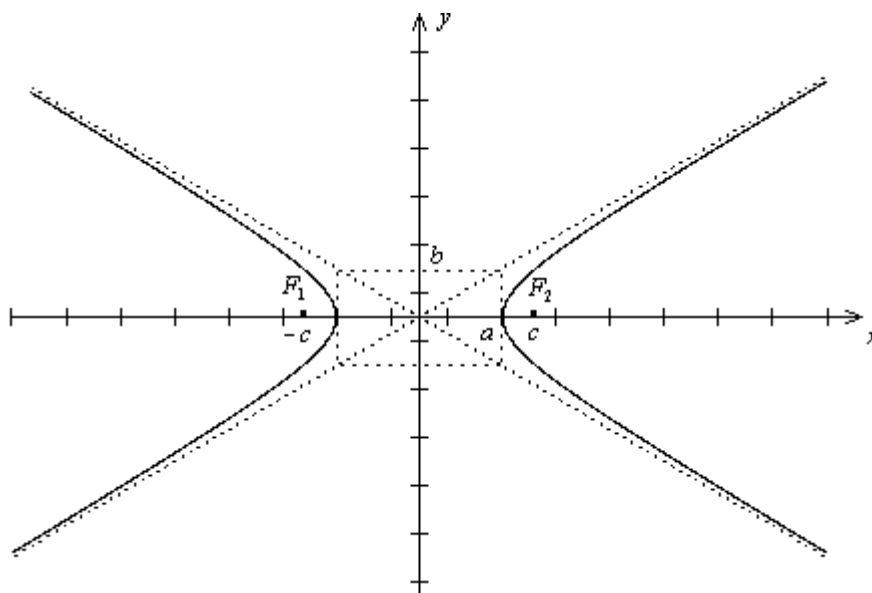


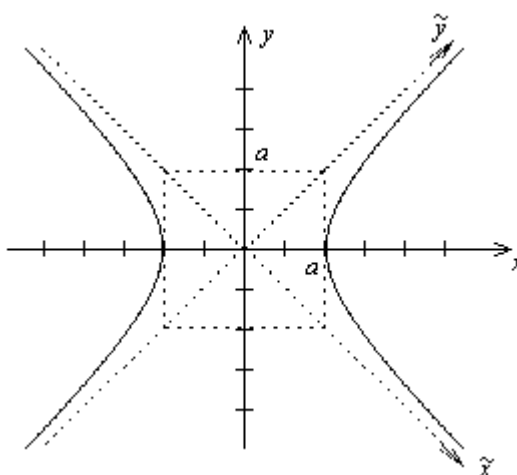
Рис.11.Гипербола

Определение 6 Точки пересечения гиперболы, заданной каноническим уравнением (8), с осью Ox называются *вершинами* гиперболы, отрезок между ними называется *действительной осью* гиперболы. Отрезок оси ординат между точками $(0; b)$ и $(0; -b)$ называется *мнимой осью*. Числа a и b называются соответственно *действительной* и *мнимой полуосями* гиперболы. Начало координат называется ее *центром*. Величина называется *эксцентриситетом* гиперболы.

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

Замечание 3 Из равенства (9) следует, что $c > a$, то есть у гиперболы $\varepsilon > 1$. Эксцентриситет ε характеризует угол между асимптотами, чем ближе ε к 1, тем меньше этот угол.

Замечание 4 В отличие от эллипса в каноническом уравнении гиперболы соотношение между величинами a и b может быть произвольным. В частности, при $a = b$ мы получим равностороннюю гиперболу, известную из школьного курса математики. Ее уравнение имеет знакомый вид $\tilde{y} = \frac{k}{\tilde{x}}$, если взять $k = 0.5a^2$, а оси $O\tilde{x}$ и $O\tilde{y}$ направить по биссектрисам четвертого и первого координатных углов (рис.12).



$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} - \frac{\tilde{y}^2}{a^2} = 1$$

Рис. 12. Равносторонняя гипербола

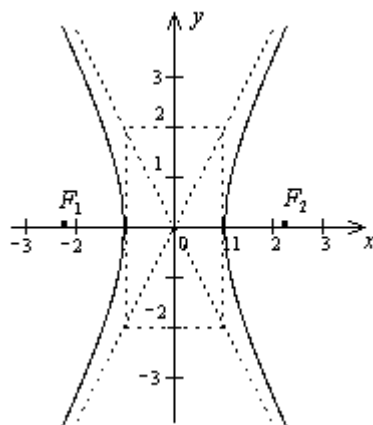
Для отражения на рисунке качественных характеристик гиперболы достаточно определить ее вершины, нарисовать асимптоты и нарисовать гладкую кривую, проходящую через вершины, приближающуюся к асимптотам и похожую на кривую рисунка [10](#).

Пример 4 Постройте гиперболу $4x^2 - y^2 = 4$, найдите ее фокусы и эксцентриситет.

Решение. Разделим обе части уравнения на 4. Получим каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1,$$

$a = 1, b = 2$. Проводим асимптоты $y = \pm 2x$ и строим гиперболу (рис. 13).



$$4x^2 - y^2 = 4$$

Рис.13. Гипербола

Из формулы (9) получим $c = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Тогда фокусы -- $F_1(-\sqrt{5}; 0)$, $F_2(\sqrt{5}; 0)$,
 $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{5}$.

Пример 5 Постройте гиперболу $25x^2 + 100 = 4y^2$. Найдите ее фокусы и эксцентриситет.

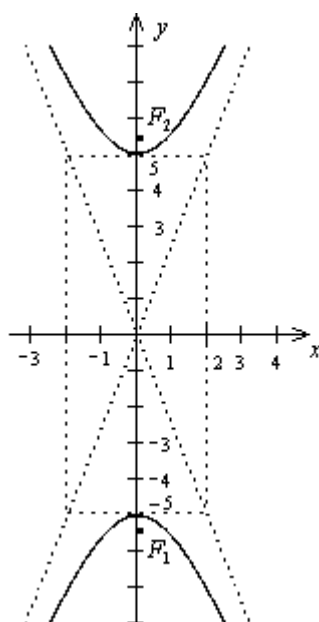
Решение. Преобразуем уравнение к виду

$$-\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1.$$

Данное уравнение не является каноническим уравнением гиперболы, так как знаки перед x^2 и y^2 противоположны знакам в каноническом уравнении. Однако, если переобозначить переменные $\tilde{x} = y$, $\tilde{y} = x$, то в новых переменных получим каноническое уравнение

$$\frac{\tilde{x}^2}{5^2} - \frac{\tilde{y}^2}{2^2} = 1.$$

Действительная ось этой гиперболы лежит на оси $O\tilde{x}$, то есть на оси Oy исходной системы координат, асимптоты имеют уравнение $\tilde{y} = \pm \frac{2}{5}\tilde{x}$, то есть уравнение $y = \pm \frac{5}{2}x$ в исходных координатах. Действительная полуось равна 5, мнимая -- 2. В соответствии с этими данными проводим построение (рис. 14).



$$25x^2 + 100 = 4y^2$$

Рис. 14. Гипербола с уравнением

$$c = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{29}}{5}$$

Из формулы (9) получим , , фокусы лежат на действительной

оси -- , где координаты указаны в исходной системе координат.

Парабола

В школьном курсе математики достаточно подробно изучалась парабола, которая, по определению, являлась графиком квадратного трехчлена. Здесь мы дадим другое (геометрическое) определение параболы.

Определение 7 *Параболой* называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых расстояние до фиксированной точки этой плоскости, называемой *фокусом*, равно расстоянию до фиксированной прямой, лежащей в той же плоскости и называемой *директрисой* параболы.

Чтобы получить уравнение кривой, соответствующей этому определению, введем подходящую систему координат. Для этого из фокуса F опустим перпендикуляр FD на директрису l . Начало координат O расположим на середине отрезка FD , ось Ox направим вдоль отрезка FD так, чтобы ее направление совпадало с направлением вектора $\overrightarrow{DF}$. Ось Oy проведем перпендикулярно оси Ox (рис. 15).

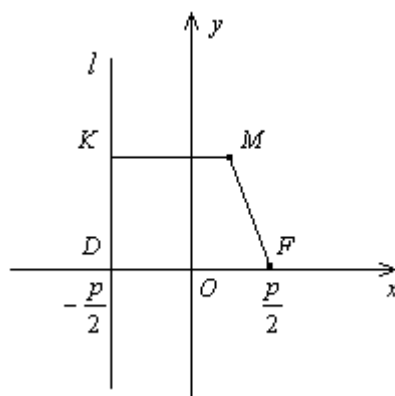


Рис. 15.

Теорема 4 Пусть расстояние между фокусом F и директрисой l параболы равно p . Тогда в выбранной системе координат парабола имеет уравнение

$$y^2 = 2px. \quad (10)$$

Доказательство. В выбранной системе координат фокусом параболы служит точка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, а директриса имеет уравнение $x = -\frac{p}{2}$ (рис. 15).

Пусть $M(x; y)$ -- текущая точка параболы. Тогда по формуле (4) для плоского случая находим

$$FM = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Расстоянием от точки M до директрисы l служит длина перпендикуляра MK , опущенного на директрису из точки M . Из рисунка 15 очевидно, что $MK = x + \frac{p}{2}$. Тогда по определению параболы $MK = FM$, то есть

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Возведем обе части последнего уравнения в квадрат:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2,$$

откуда

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2.$$

После приведения подобных членов получим уравнение (10).

Уравнение (10) называется каноническим уравнением параболы.

Предложение 12.4 Парабола обладает осью симметрии. Если парабола задана каноническим уравнением, то ось симметрии совпадает с осью Ox .

Доказательство. Проводится так же, как и доказательство (предложения 1).

Точка пересечения оси симметрии с параболой называется *вершиной* параболы.

Если переобозначить переменные $\tilde{x} = y$, $\tilde{y} = x$, то уравнение (10) можно записать в виде

$$\tilde{y} = \frac{1}{2p} \tilde{x}^2,$$

который совпадает с обычным уравнением параболы в школьном курсе математики. Поэтому параболу нарисуем без дополнительных исследований (рис. 16).

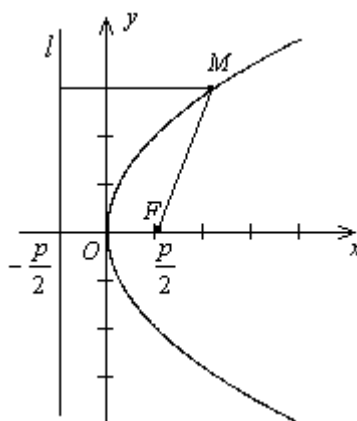
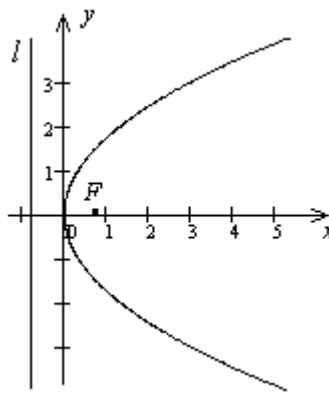


Рис. 16.Парабола

Пример 6 Постройте параболу $y^2 = 3x$. Найдите ее фокус и директрису.

Решение. Уравнение является каноническим уравнением параболы, $2p = 3$, $p = 1.5$. Осью параболы служит ось Ox , вершина находится в начале координат, ветви параболы направлены вдоль оси Ox . Для построения найдем несколько точек параболы. Для этого придаем значения переменному y и находим значения x . Возьмем точки $(\frac{1}{3}; 1)$, $(\frac{4}{3}; 2)$, $(3; 3)$. Учитывая симметрию относительно оси Ox , рисуем кривую (рис. 17)



$$y^2 = 3x$$

Рис. 17.Парабола, заданная уравнением

Фокус F лежит на оси Ox на расстоянии $\frac{p}{2}$ от вершины, то есть имеет координаты $(0.75; 0)$. Директриса l имеет уравнение $x = -\frac{p}{2}$, то есть $x = -0.75$.

Парабола так же, как и эллипс, обладает свойством, связанным с отражением света (рис. 18). Свойство сформулируем опять без доказательства.

Предложение 5 Пусть F -- фокус параболы, M -- произвольная точка параболы, l -- луч с началом в точке M параллельный оси параболы. Тогда нормаль к параболе в точке M делит угол, образованный отрезком FM и лучом l , пополам.

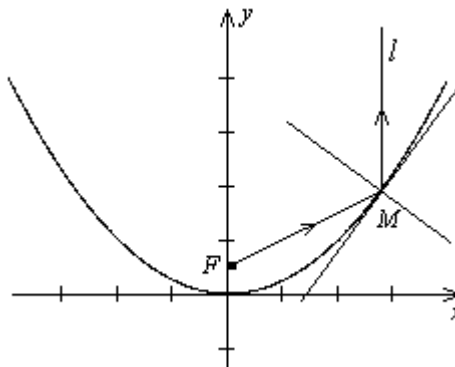


Рис. 18.Отражение светового луча от параболы

Это свойство означает, что луч света, вышедший из фокуса F , отразившись от параболы, дальше пойдет параллельно оси этой параболы. И наоборот, все лучи, приходящие из бесконечности и параллельные оси параболы, сойдутся в ее фокусе. Это свойство широко используется в технике. В прожекторах обычно ставят зеркало, поверхность которого получается при вращении параболы вокруг ее оси симметрии (параболическое зеркало). Источник света в прожекторах помещают в фокусе параболы. В результате прожектор дает пучок почти параллельных лучей света. Это же свойство используется и в приемных антеннах космической связи и в зеркалах телескопов, которые собирают поток параллельных лучей радиоволн или поток параллельных лучей света и концентрируют его в фокусе зеркала.

Тема 14 Уравнение плоскости. Уравнение поверхностей второго порядка и их уравнения.

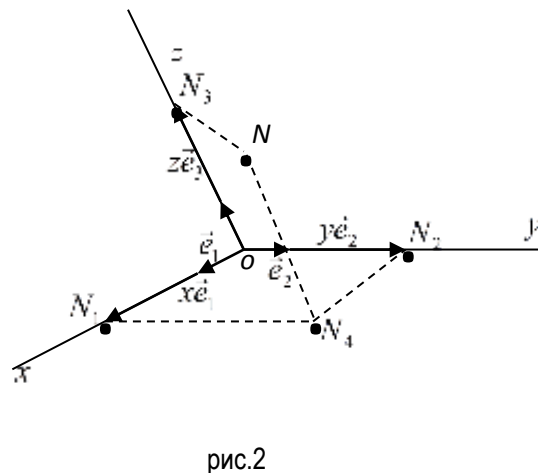
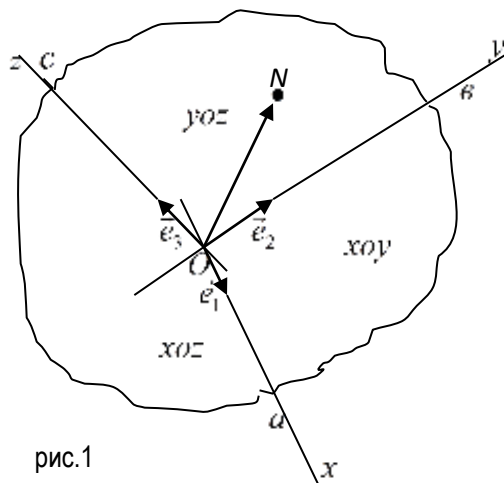
Метод координат в пространстве, уравнение плоскостей и взаимное расположение плоскостей в пространстве.

Аффинная система координат в пространстве

Будем рассматривать геометрию пространства, поэтому образуем из векторов трехмерное векторное пространство. Три некомпланарных произвольных вектора определяют базис этого векторного пространства.

Система координат пространства вводится также, как и система координат плоскости.

Пусть из произвольной точки пространства O исходят три базисных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ (рис.1).



проведем через эти векторы прямые a, b и c ($a \cap b \cap c = O$).

Определение. Система координат, состоящая из прямых a, b и c , определенных положительно направленными векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ называется аффинной системой координат. Эта система обозначается $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ (рис. 1).

Точка O называется началом координат, векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ называют координатными векторами. Прямую a обозначают ox и называют осью абсцисс, прямую b oy и называют осью ординат, прямую c oz и называют осью аппликата. Три плоскости, образованные двумя осями (xOy, xOz и yOz), называют координатными плоскостями.

Пусть в аффинной системе координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ задана произвольная точка N . Вектор $\vec{ON}$ можно разложить по базисам векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ таким образом:

$$\vec{ON} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \quad 23$$

Коэффициенты x, y, z - действительные числа и называются координатами вектора $\overrightarrow{ON}$ и записываются $\overrightarrow{ON}(x; y; z)$. Координаты вектора x, y, z $\overrightarrow{ON}$ являются координатами точки N . Число x называют абсциссой точки N , число y ординатой, число z аппликатой, и записываются с.о. $N(x; y; z)$.

октанта	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
координаты								
x	+	-	-	+	+	-	-	+
y	+	+	-	-	+	+	-	-
z	+	+	+	+	-	-	-	-

Декартова прямоугольная система координат в пространстве

Декартовой системой координат в пространстве называется совокупность точки и базиса.

Точка O носит название *начала координат*; прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются *осями координат*. Первая -- осью *абсцисс*, вторая -- осью *ординат*, третья -- осью *аппликат*. Плоскости, проходящие через оси координат, называют *координатными плоскостями*.

Определение Координаты радиус-вектора точки M по отношению к началу координат называются *координатами* точки M в рассматриваемой системе координат. Первая координата называется *абсциссой*, вторая -- *ординатой*, третья -- *аппликатой*.

Формулы расстояний между двумя точками и деления отрезка в данном отношении в пространстве вводятся аналогично формулам на плоскости с дополнением третьей координаты- аппликаты:

$$A(x_1, y_1, z_1) \quad B(x_2, y_2, z_2)$$

Формула расстояний между двумя точками пространства:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Формула деления отрезка в данном отношении. Пусть даны точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и λ данное деление отрезка АВ точкой С:

$$\frac{AC}{CB} = \lambda$$

Пусть (x, y, z) - координаты точки С. Тогда:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

Уравнение плоскости

Пусть в трехмерном пространстве задана декартова прямоугольная система координат. Попробуем установить, какой вид может иметь уравнение плоскости. Для этого заметим, что все плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны друг другу.

Определение 1 Любая прямая, перпендикулярная плоскости, называется *нормалью* к плоскости, а любой **ненулевой** вектор на такой прямой мы будем называть *нормальным вектором* плоскости.

Замечание 1 Из определения видно, что нормальный вектор у фиксированной плоскости определяется не однозначно. Все нормальные векторы одной плоскости коллинеарны друг другу и поэтому получаются один из другого умножением на число, отличное от нуля.

Для того чтобы из параллельных плоскостей выбрать одну, достаточно задать точку, через которую проходит эта плоскость. Итак, если у плоскости известны нормальный вектор и точка, через которую она проходит, то плоскость определена однозначно.

Теорема 1 Пусть вектор $\mathbf{n} = (A, B, C)$, $\mathbf{n} \neq 0$, является нормальным вектором плоскости Π , проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Тогда уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (1)$$

является уравнением плоскости Π .

Пусть $\mathbf{r}$ -- радиус-вектор текущей точки M плоскости Π , $\mathbf{r}_0$ -- радиус-вектор точки M_0 . Тогда уравнение (2) можно переписать в виде

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0.$$

Такое уравнение обычно называют *векторным уравнением* плоскости Π .

Раскроем скобки в уравнении (1). Так как точка M_0 -- фиксированная, то выражение $-Ax_0 - By_0 - Cz_0$ является числом, которое обозначим буквой D . Тогда уравнение (1) принимает вид

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (3)$$

Такое уравнение называется *общим уравнением* плоскости. Еще раз отметим, что в этом уравнении хотя бы один из коэффициентов A, B, C отличен от нуля, так как $\mathbf{n} \neq 0$.
 $|A| + |B| + |C| \neq 0$

Теорема 2 Всякое уравнение (3), в котором $\mathbf{n} = (A, B, C)$, является уравнением плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{n}$.

По [теореме 1](#) такое уравнение является уравнением плоскости с нормальным вектором $\mathbf{n}$, проходящей через точку $M_0(0; -\frac{D}{B}; 0)$.

[Теорема 1](#) позволяет написать уравнение плоскости, если известна точка этой плоскости и вектор, ортогональный плоскости. Однако, довольно часто встречаются задачи, где требуется получить уравнение плоскости, если известна точка, лежащая на ней, и два неколлинеарных вектора, лежащих или, что то же самое, параллельных плоскости. Покажем на примере, как решается такая задача.

Пример 1 Требуется написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1, 2, -2)$ и параллельной векторам $\mathbf{p} = (1; 2; -1)$ и $\mathbf{q} = (-2; 0; 3)$.

Решение. Векторное произведение $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ ортогонально векторам $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$. Следовательно, оно ортогонально искомой плоскости и вектор $\mathbf{n} = \mathbf{p} \times \mathbf{q}$ можно взять в качестве ее нормального вектора. Найдем координаты вектора $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{n} = \mathbf{p} \times \mathbf{q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k},$$

то есть $\mathbf{n} = (6; -1; 4)$. Используя формулу (1), получим $6(x - 1) + (-1)(y - 2) + 4(z - (-2)) = 0$.

Раскрыв в этом уравнении скобки, приходим к окончательному ответу.

Ответ: $6x - y + 4z + 4 = 0$.

Изображение плоскости для самостоятельного разбора.

Расстояние от точки до плоскости

Предложение 1 Пусть плоскость Π задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ и дана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Тогда расстояние ρ от точки M_0 до плоскости Π определяется по формуле

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (7)$$

Поверхности второго порядка и их уравнения

Понятие уравнения поверхности

Пусть дано уравнение $F(x, y, z) = 0$. (1)

Множество всех точек пространства, координаты которых в некоторой общей декартовой системе координат удовлетворяют уравнению (1), называется *поверхностью*. Соотношение (1) называется *уравнением* данной *поверхности* S , если соблюдены следующие два условия:

- а) координаты любой точки поверхности S удовлетворяют уравнению (1);
- б) координаты любой точки, не принадлежащей поверхности S , не удовлетворяют этому уравнению.

Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется множество всех точек пространства, координаты которых в некоторой общей декартовой системе координат удовлетворяют уравнению :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0 \quad (7)$$

где $A, B, \dots, L$ — действительные числа, причем по крайней мере один из коэффициентов A, B, C, D, E, F отличен от нуля. Другими словами, поверхность второго порядка есть множество точек пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению (1), где $F(x, y, z)$ — некоторый многочлен второй степени.

Эллипсоидом называется поверхность, которая в некоторой системе декартовых прямоугольных координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1).$$

Уравнение (1) называется каноническим уравнением эллипсоида. Величины a, b, c суть полуоси эллипсоида (рис. 1). Если все они различны, эллипсоид называется трехосным; в случае, когда какие-нибудь две из них одинаковы, эллипсоид называется вытянутым, при $a=b>c$ — сжатым. В случае, когда $a=b=c$, эллипсоид представляет собой сферу.

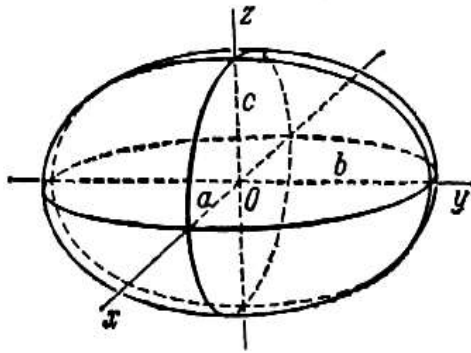
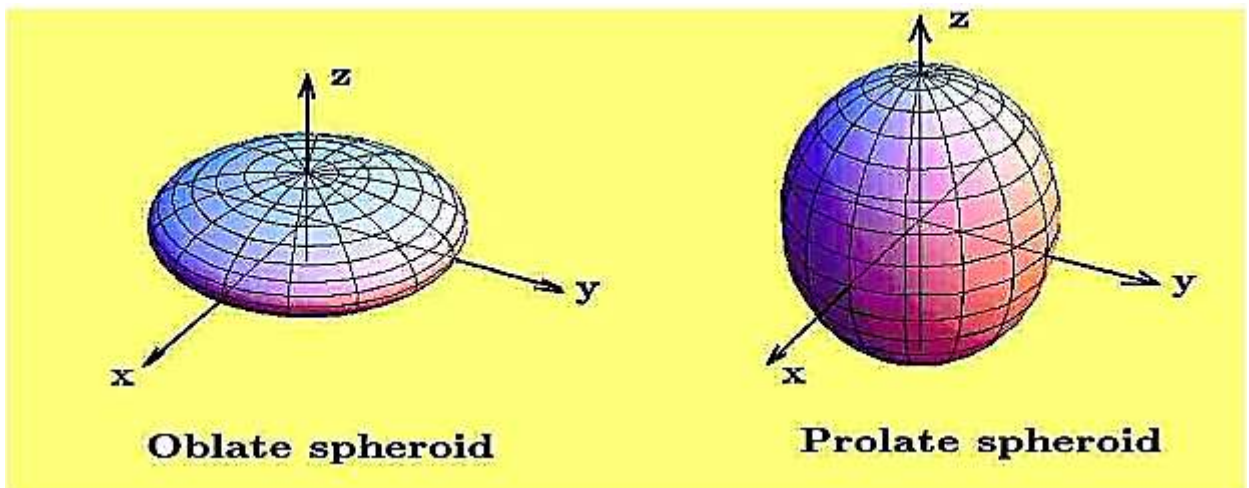


рис.1



Гиперболоидами называются поверхности, которые в некоторой системе декартовых прямоугольных координат определяются уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (3)$$

Гиперболоид, определяемый уравнением (2), называется **однополостным** (рис. 2); гиперболоид, определяемый уравнением (3), - **двуполостным** (рис. 3); уравнения (2) и (3) называются каноническими уравнениями соответствующих гиперболоидов. Величины a , b , c называются полуосями гиперболоида. В случае однополостного гиперболоида, заданного уравнением (2), только первые из них (a и b) показаны на рис. 2. В случае двуполостного гиперболоида, заданного уравнением (3), одна из них (именно, c) показана на рис. 3. Гиперболо²⁴

²⁴ Использовано содержание и смысл из источника Introduction to Calculus, Volume II, by J.H. Heinbockel Emeritus Professor of Mathematics Old Dominion University, 2001, p.p 99-102)

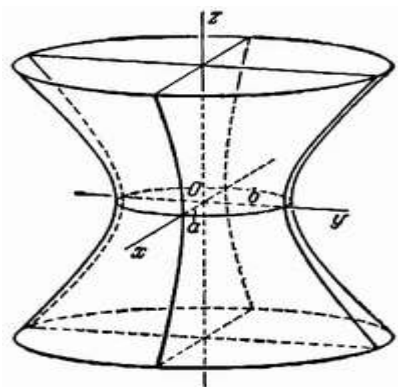


рис.2

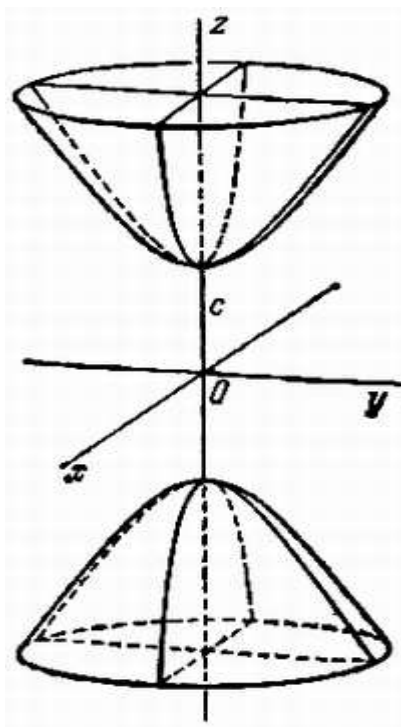


рис.3

Параболоидами называются поверхности, которые в некоторой системе декартовых прямоугольных координат определяются уравнениями

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (4)$$

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (5)$$

где p и q - положительные числа, называемые параметрами параболоида. Параболоид, определяемый уравнением (4), называется эллиптическим (рис. 4); параболоид, определяемый уравнением (5), - гиперболическим (рис. 5). Уравнения (4) и (5) называют каноническими уравнениями соответствующих параболоидов. В случае, когда $p=q$, параболоид, определяемый уравнением (4), является поверхностью вращения (вокруг Oz).

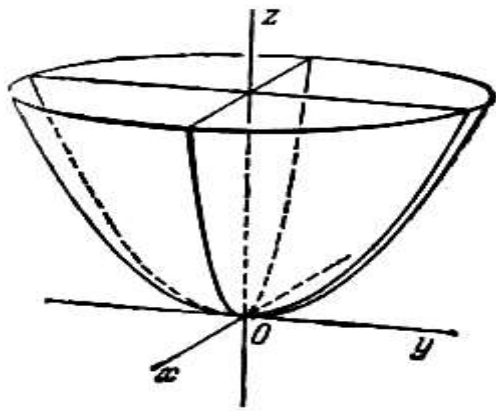


рис.4

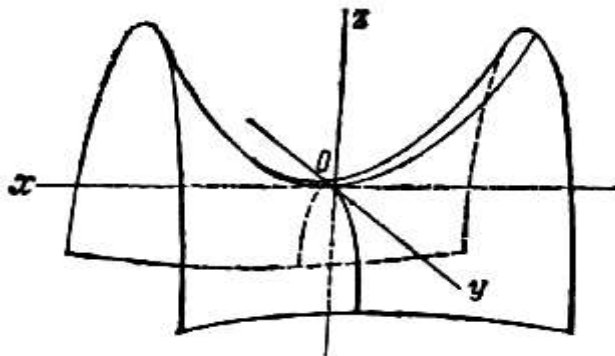


рис.5

Конической поверхностью, или конусом, называется поверхность, которая описывается движущейся прямой (образующей) при условии, что эта прямая проходит через постоянную точку S и пересекает некоторую определенную линию L . Точка S называется вершиной конуса; линия L – направляющей

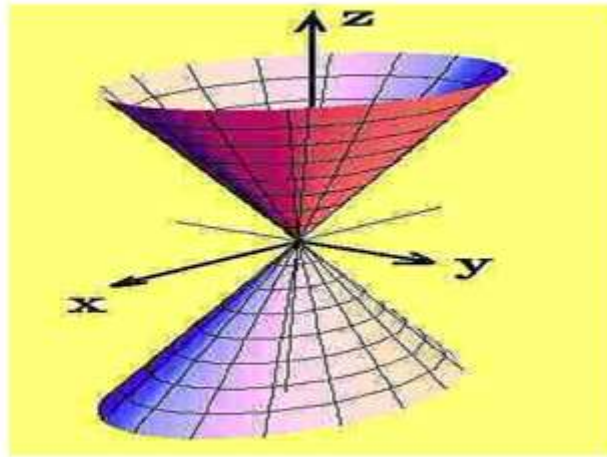
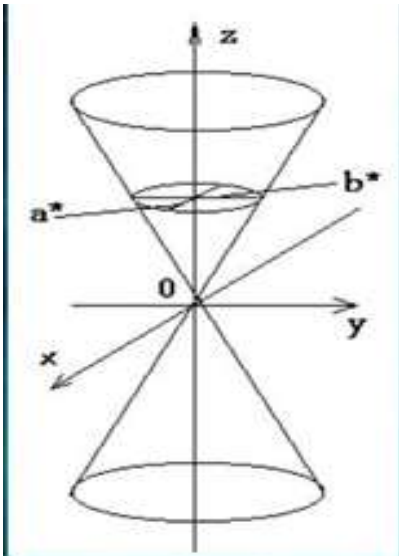


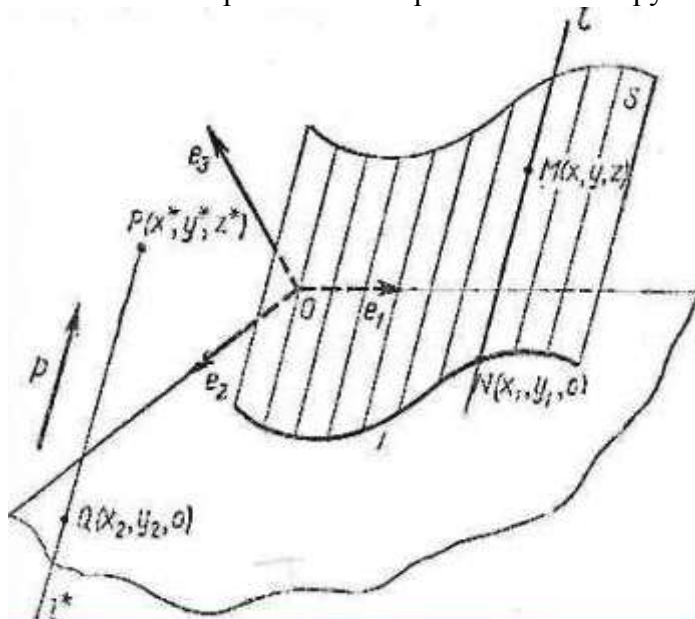
Figure 7-7. Elliptic cone

25

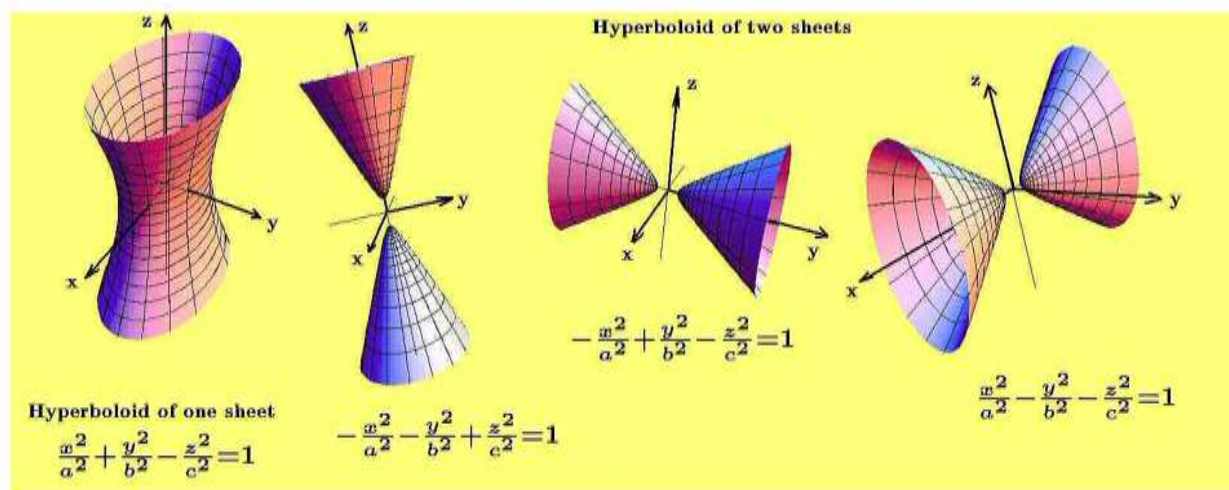
. Цилиндрической поверхностью, или цилиндром, называется поверхность, которая описывается движущейся прямой (образующей) при условии, что эта прямая имеет

²⁵ Использовано содержание и смысл из источника Introduction to Calculus, Volume II, by J.H. Heinbockel Emeritus Professor of Mathematics Old Dominion University , 2000, p.p 99-102)

постоянное направление и пересекает некоторую определенную линию L (направляющую).



26



22

²⁶ Использовано содержание и смысл из источника Introduction to Calculus, Volume II, by J.H. Heinbockel Emeritus Professor of Mathematics Old Dominion University ,2000, p.p 99-102)

Тема 15. Элементы комбинаторики. Основные правила и теоремы комбинаторики.

Комбинаторика — это раздел математики, в котором изучают, сколько комбинаций, подчинённых тем или иным условиям, можно составить из данных объектов.

Перестановки. Факториал

Для каждого целого положительного числа n определяем $n!$ (читаем «эн факториал»)

$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Даже для небольшого значения n факториал может быть очень большим; например $70! > 10^{100}$. $0!$ определяется как 1. ²⁷

Функция $n!$ возрастает очень быстро. Так, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, ..., $10! = 3\,628\,800$. Факториалы возникают в комбинаторике очень часто. Поэтому принято считать, что если ответ выражен через факториалы, то всё сделано. (Этому в немалой степени способствует открытая в 1730 году английским математиком Дж. Стирлингом формула для приближённого вычисления:

$$n! \sim (2\pi n)^{1/2} n^n / e^n.$$

Относительная ошибка при пользовании этой формулой очень невелика и стремится к нулю при увеличении числа n . Главное свойство факториала очевидно из определения:

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!.$$

Размещения

Следующее важное понятие комбинаторики — размещение. Давайте рассмотрим такую ситуацию: в классе, в котором 25 учеников, нужно выбрать старосту, его заместителя и помощника заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Очевидно, сначала 25 способами можно выбрать любого ученика в старосты. Затем из 24 оставшихся — заместителя старосты, а после этого любой из 23 оставшихся может оказаться помощником заместителя. По правилу произведения, всего имеем $A_{25}^3 = 25 \cdot 24 \cdot 23$ вариантов.

Вообще, через A_n^k (читаем: «а из эн по ка») обозначают число способов выбрать из данных n элементов сначала первый элемент, потом второй, третий, ..., k -й. Вычисляют его по формуле

$$A_n^k = n(n-1) \cdots (n-k+1).$$

Заметьте: в правой части ровно k множителей, и последний из них равен $n-k+1$, а вовсе не $n-k$, как могло показаться на первый взгляд. Формулу можно записать и через факториалы:

$$A_n^k = n! / (n-k)!.$$

Числа сочетаний

Для положительного целого числа n и целого неотрицательного числа k , таких что $0 \leq k \leq n$ находят биномиальный коэффициент таким образом

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r!}$$

$$\text{Например, } C_3^0 = \frac{3!}{0!3!} = 1, \quad C_1^3 = \frac{3!}{1!2!} = 3, \quad C_2^3 = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

Читаем: «число сочетаний из эн по ка» или «це из эн по ка» ²³

²⁷ Использовано содержание и смысл из источника Mathematical Literacy for Humanists, Herbert Gintis, 2000, 60-62

Тема 16 Элементы теории вероятностей

Случайные события и операции над ними. Классическое определение вероятности. Теорема сложения вероятностей. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей

Введение (терминология).

Случайные величины: параметры погоды (температура, давление, влажность), число студентов на лекции, срок службы элементов прибора, результат измерения (например, взвешивание) – их случайность усугубляется тем, что действительное число – высокая абстракция, малоинформативная, для практики в действительности важно нахождение результата измерения в некоторых допустимых пределах. (Что такое: «Результат измерения равен π »? Что с ним делать?)

Неслучайные величины: результаты вычисления $f'(x_0)$, $\int_a^b f(x)dx$.

Но во многих случайных событиях существуют закономерности (погода – времена года, средняя посещаемость лекции, бросание монеты), проявляющиеся при анализе большого числа однотипных событий. Только такие случайные события изучает теория вероятностей.

Как формулировать эти закономерности? Простейшая математическая модель для этого – классическое определение вероятности.

Интуитивно: бросание монеты (герб выпадает примерно в $\frac{1}{2}$ бросаний), кости (6 очков выпадает примерно в $\frac{1}{6}$ бросаний).

Пространство элементарных событий (ПЭС).

Опыт – процесс, исход которого – появление (наступление) или ненаступление исследуемого события.

Элементарное событие (ЭС) ω – неразложимый исход опыта. (ЭС по другой терминологии – случай).

Одно и только одно из ЭС обязательно произойдет при опыте.

$\Omega = \{\omega\}$ – множество всех ЭС данного опыта $\stackrel{def}{=}$ ПЭС опыта.

A – **событие** в опыте $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} A \subseteq \Omega$, т.е. A – некоторое подмножество в Ω . Событие A происходит $\stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ в результате опыта произошло какое-либо ЭС $\omega \in A$. ЭС $\omega \in A$ называется благоприятным для A ²⁸

Пример. Опыт – одно бросание кости. Исход опыта – выпадение числа очков от 1 до 6.

ЭС: 1, 2, 3, 4, 5, 6

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

выпадение четного числа (событие A) не ЭС.

$A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$

$B = \{1, 3, 5\} \subset \Omega$ выпадение нечетного числа

$C = \{3, 6\} \subset \Omega$ выпадение числа очков, делящегося на 3

²⁸ Использовано содержание и смысл из источника Mathematical Literacy for Humanists, Herbert Gintis, 2000, p.p.57-64.

В примере A, B, C – различные события.

Ω – **достоверное событие** (всегда наступает), $\emptyset$ – **невозможное событие** (никогда не наступает).

Операции над событиями

Пусть $A, B \subseteq \Omega$ ($\Rightarrow$ операции над событиями аналогичны операциям над множествами).

- 1) $A = B \Leftrightarrow A=B$ как подмножества Ω .
- 2) $A + B$ происходит $\Leftrightarrow$ происходит A или B (Теория множеств: $A \cup B$)
- 3) $A \cdot B$ происходит $\Leftrightarrow$ происходит и A , и B ($A \cap B$)

A, B - **несовместные события** $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \cdot B = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$. ($\Leftrightarrow A$ и B не могут наступить одновременно)

4) $A - B$ наступает $\Leftrightarrow$ наступает A , но не наступает B ($A \setminus B$).

5) $\bar{A}$ - противоположное к A событие.

$\bar{A}$ - наступает $\Leftrightarrow$ не наступает A .

$$(\bar{A} = \Omega \setminus A)$$

6) $A \subseteq B$ - A - частный случай B

если наступает A , то наступает B ($A \Rightarrow B$)

Классическое определение вероятности

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ - ПЭС опыта, состоящего из конечного множества равновозможных (из симметрии опыта) ЭС, $A \subseteq \Omega$, A состоит из m ЭС ($0 \leq m \leq n$)

$P(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m}{n} = \frac{\text{число благоприятных для } A \text{ ЭС}}{\text{общее число ЭС}}$ - вероятность наступления события A в опыте.

Из определения очевидны следующие свойства вероятности:

$$0 \leq P(A) \leq 1; \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1.$$

$$\forall i \quad P(\omega_i) = 1/n,$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Примеры. Кость. $P(A > 4) = 2/6 = 1/3$.

Урна: 3 белых, 7 черных шаров. P (вынут белый шар) = 3/10.

Теорема сложения. Для любых $A, B \subseteq \Omega$ $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.

Если A и B несовместны, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Следствие. Для попарно несовместных событий $A_1, \dots, A_k$ $P\left(\sum_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k P(A_i)$.²⁹

²⁹ Использовано содержание и смысл из источника Mathematical Literacy for Humanists, Herbert Gintis, 2000, p.p.57-64.

Определение. $\exists A, B \subseteq \Omega$. Условной вероятностью $P(A|B)$ события A при наличии события B называется вероятность события A , при условии, что событие B произошло.

Пример. Бросаем кость. $A = \{2\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. $P(A = 2) = 1/6$, $P(A|B) = 1/3$, $P(B|A) = 1$.

Определение. A, B – независимые, если $P(A|B) = P(A)$, равносильно $P(B|A) = P(B)$.

Пример. Опыт – два бросания монеты. $A = \Gamma_1$ и $B = \Gamma_2$ независимы.

Теорема умножения. $\exists A, B \subseteq \Omega$. $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$.

Пример 1 с двумя независимыми стрелками.

Пример 2. Бомба в самолете.

Следствия. 1) A, B независимы $\Leftrightarrow P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

2) Для независимых в совокупности $A_1, \dots, A_k$ $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_k) = P(A_1) \cdot \dots \cdot P(A_k)$.

Определение независимых в совокупности событий $A_1, \dots, A_k$: эти события попарно независимы и каждое A_i независимо от произведения любого числа остальных событий $A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_k$.

Независимость и несовместность. Независимые события A, B с положительными вероятностями всегда совместны: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) > 0$. Попарная независимость событий

$A_1, \dots, A_k$ не влечет их независимость в совокупности

Тема 16 Элементы математической статистики

Предмет и задачи математической статистики

Математическая статистика – это наука, занимающаяся методами обработки экспериментальных данных. Любая наука решает в порядке возрастания сложности и важности следующие задачи:

- 1) описание явления;
- 2) анализ и прогноз;
- 3) поиск оптимального решения.

Такого рода задачи решает и математическая статистика:

- 1) систематизировать полученный статистический материал;
- 2) на основании полученных экспериментальных данных оценить интересующие нас числовые характеристики наблюдаемой случайной величины;
- 3) определить число опытов, достаточное для получения достоверных результатов при минимальных ошибках измерения.

Одной из задач третьего типа является *задача проверки правдоподобия гипотез*. Она может быть сформулирована следующим образом: имеется совокупность опытных данных, относящихся к одной или нескольким случайным величинам. Необходимо определить, противоречат ли эти данные той или иной гипотезе, например, гипотезе о том, что исследуемая случайная величина распределена по определенному закону, или две случайные величины некоррелированы (т.е. не связаны между собой) и т.д. В результате проверки правдоподобия гипотезы она либо отбрасывается, как противоречащая опытным данным, либо принимается, как приемлемая.

Таким образом, математическая статистика помогает экспериментатору лучше разобраться в полученных опытных данных, оценить, значимы или нет определенные наблюдаемые факты, принять или отбросить те или иные гипотезы о природе рассматриваемого явления.

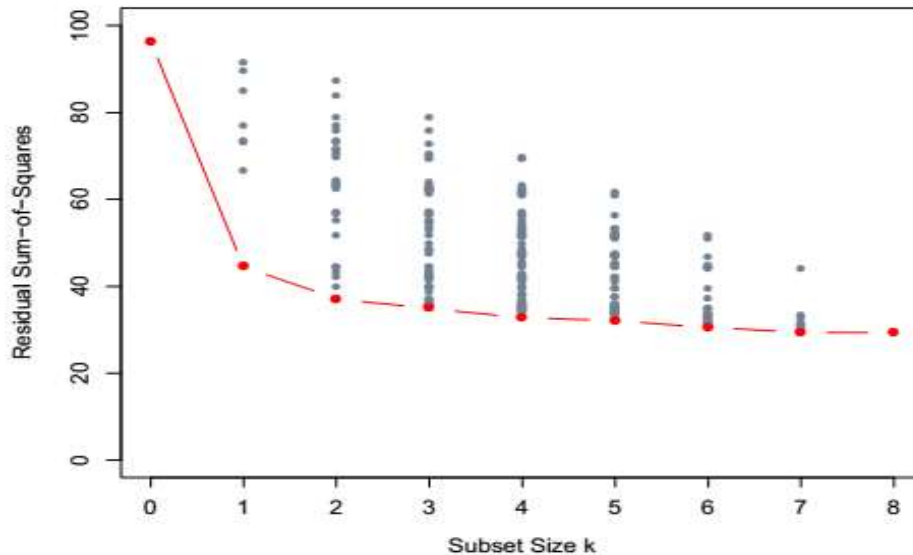


FIGURE 3.5. All possible subset models for the prostate cancer example. At each subset size is shown the residual sum-of-squares for each model of that size.

cross-validation to estimate prediction error and select k ; the AIC criterion is a popular alternative³⁰.

Случайные величины и законы распределения

Переменная величина называется *случайной*, если в результате опыта она может принимать действительные значения с определёнными вероятностями. Наиболее полной, исчерпывающей характеристикой случайной величины является закон распределения. *Закон распределения* – функция (таблица, график, формула), позволяющая определять вероятность того, что случайная величина X принимает определенное значение x_i или попадает в некоторый интервал. Если случайная величина имеет данный закон распределения, то говорят, что она распределена по этому закону или подчиняется этому закону распределения.

Случайная величина X называется *дискретной*, если существует такая неотрицательная функция

$$P\{X = x_i\} = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1, \quad (1)$$

которая ставит в соответствие значению x_i переменной X вероятность p_i , с которой она принимает это значение.

Случайная величина X называется *непрерывной*, если для любых $a < b$ существует такая неотрицательная функция $f(x)$, что

$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x) dx. \quad (2)$$

³⁰ Использовано содержание и смысл из источника **Trevor Hastie, Robert Tibshirani, Jerome Friedman** The Elements of Statistical Learning. Springer Series in Statistics. Stanford, California 2008. 765 page (on p 57-58)

Функция $f(x)$ называется *плотностью распределения* непрерывной случайной величины.

Вероятность того, что случайная величина X (дискретная или непрерывная) принимает значение, меньшее x , называется *функцией распределения* случайной величины X и обозначается $F(x)$:

$$F(x) = P\{X < x\}. \quad (3)$$

Функция распределения является универсальным видом закона распределения, пригодным для любой случайной величины.

Общие свойства функции распределения:

1) $F(x)$ – неубывающая функция, т.е. при $x_2 > x_1$ $F(x_2) \geq F(x_1)$,

2) $F(x)$ – ограниченная функция: $0 \leq F(x) \leq 1$,

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$,

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$,

5) $F(x, y)$ – непрерывная слева функция. (4)

Кроме этого универсального, существуют также частные виды законов распределения: *ряд распределения* $P_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1, \dots, n$ (только для дискретных случайных величин) и *плотность распределения* $f(x) = F'(x)$ (только для непрерывных случайных величин).

Основные свойства плотности распределения:

1) $f(x) \geq 0$,

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

(5)

Каждый закон распределения – это некоторая функция, полностью описывающая случайную величину с вероятностной точки зрения. На практике о распределении вероятностей случайной величины X часто приходится судить только по результатам испытаний. Повторяя испытания, будем каждый раз регистрировать, произошло ли интересующее нас случайное событие A , или нет. *Относительной частотой* (или просто *частотой*) случайного события A называется отношение числа n_A появлений этого события к общему числу n проведенных испытаний. При этом мы принимаем, что относительные частоты случайных событий близки к их вероятностям. Это тем более верно, чем больше число проведенных опытов. При этом частоты, как и вероятности, следует относить не к отдельным значениям случайной величины, а к интервалам. Это значит, что весь диапазон возможных значений случайной величины X надо разбить на интервалы. Проводя серии испытаний, дающих эмпирические значения величины X , надо фиксировать числа n_x попаданий результатов в каждый интервал. При большом числе испытаний n отношение n_x / n (частоты попадания в интервалы) должны быть близки к вероятностям попадания в эти

интервалы. Зависимость частот n_x / n от интервалов определяет *эмпирическое распределение* вероятностей случайной величины X , графическое представление которой называется *гистограммой* (рис. 1).

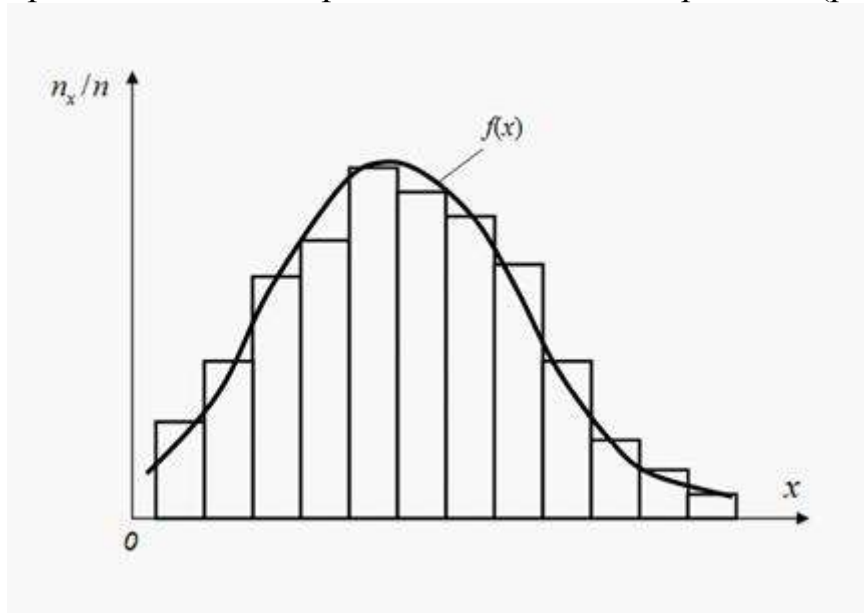


Рис. 1. Гистограмма и выравнивающая плотность распределения

Для построения гистограммы по оси абсцисс откладывают интервалы равной длины, на которые разбивается весь диапазон возможных значений случайной величины X , а по оси ординат откладывают частоты n_x / n . Тогда высота каждого столбика гистограммы равна соответствующей частоте. Таким образом, получается приближенное представление закона распределения вероятностей для случайной величины X в виде ступенчатой функции, аппроксимация (выравнивание) которой некоторой кривой $f(x)$ даст плотность распределения.

Однако, часто бывает достаточно указать только отдельные числовые параметры, характеризующие основные свойства распределения. Эти числа называются числовыми характеристиками случайной величины.

Числовые характеристики случайных величин

Математическое ожидание. Математическим ожиданием дискретной случайной величины X , принимающей конечное число значений x_i с вероятностями p_i , называется сумма:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \dots + x_n \cdot p_n. \quad (6a)$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется интеграл от произведения ее значений x на плотность распределения вероятностей $f(x)$:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (6б)$$

Несобственный интеграл (6б) предполагается абсолютно сходящимся (в противном случае говорят, что математическое ожидание $M(X)$ не

существует). Математическое ожидание характеризует *среднее значение* случайной величины X . Его размерность совпадает с размерностью случайной величины.

Свойства математического ожидания:

- 1) $M(c \cdot X) = c \cdot M(X)$, $c \in R$,
- 2) $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$, $X, Y \in E$,
- 3) $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$ для независимых случайных величин X и Y .

(7)

Дисперсия. Дисперсией случайной величины X называется число:

$$D(X) = M\{[X - M(X)]^2\} = M(X^2) - [M(X)]^2. \quad (8)$$

Дисперсия является *характеристикой рассеяния* значений случайной величины X относительно ее среднего значения $M(X)$. Размерность дисперсии равна размерности случайной величины в квадрате. Исходя из определений дисперсии (8) и математического ожидания (5) для дискретной случайной величины и (6) для непрерывной случайной величины получим аналогичные выражения для дисперсии:

$$D(X) = M(X - m)^2 = \begin{cases} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i & \text{для дискретных случайных величин,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f(x) dx & \text{для непрерывных случайных величин.} \end{cases}$$

(9)

Здесь $m = M(X)$.

Свойства дисперсии:

- 1) $D(c \cdot X) = c^2 \cdot D(X)$, $c \in R$,
- 2) $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$ для независимых случайных величин X и Y .

(10)

Среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}. \quad (11)$$

Так как размерность среднего квадратичного отклонения та же, что и у случайной величины, оно чаще, чем дисперсия, используется как мера рассеяния.

Моменты распределения. Понятия математического ожидания и дисперсии являются частными случаями более общего понятия для числовых характеристик случайных величин – *моментов распределения*. Моменты распределения случайной величины вводятся как математические ожидания некоторых простейших функций от случайной величины. Так, моментом порядка k относительно точки x_0 называется математическое ожидание $M(X - x_0)^k$.

x_0^k . Моменты относительно начала координат $x = 0$ называются *начальными моментами* и обозначаются:

$$\alpha_k = M(X^k). \quad (12)$$

Начальный момент первого порядка есть центр распределения рассматриваемой случайной величины:

$$\alpha_1 = M(X) = m. \quad (13)$$

Моменты относительно центра распределения $x = m$ называются *центрными моментами* и обозначаются:

$$\mu_k = M(X - m)^k. \quad (14)$$

Из (7) следует, что центральный момент первого порядка всегда равен нулю:

$$\mu_1 = M(X - m) = M(X) - M(m) = m - m = 0. \quad (15)$$

Центральные моменты не зависят от начала отсчета значений случайной величины, так как при сдвиге на постоянное значение C ее центр распределения сдвигается на то же значение C , а отклонение от центра не меняется: $X - m = (X - C) - (m - C)$.

Теперь очевидно, что *дисперсия* – это *центральный момент второго порядка*:

$$D(X) = M(X - m)^2 = \mu_2. \quad (16)$$

Асимметрия. Центральный момент третьего порядка:

$$\mu_3 = M(X - m)^3 \quad (17)$$

служит для оценки *асимметрии распределения*. Если распределение симметрично относительно точки $x = m$, то центральный момент третьего порядка будет равен нулю (как и все центральные моменты нечетных порядков). Поэтому, если центральный момент третьего порядка отличен от нуля, то распределение не может быть симметричным. Величину асимметрии оценивают с помощью безразмерного *коэффициента асимметрии*:

$$C_s = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}} = \frac{M(X - m)^3}{\sqrt{[D(X)]^3}} = \frac{M(X - m)^3}{[\sigma(X)]^3}. \quad (18)$$

Знак коэффициента асимметрии (18) указывает на правостороннюю или левостороннюю асимметрию (рис. 2).

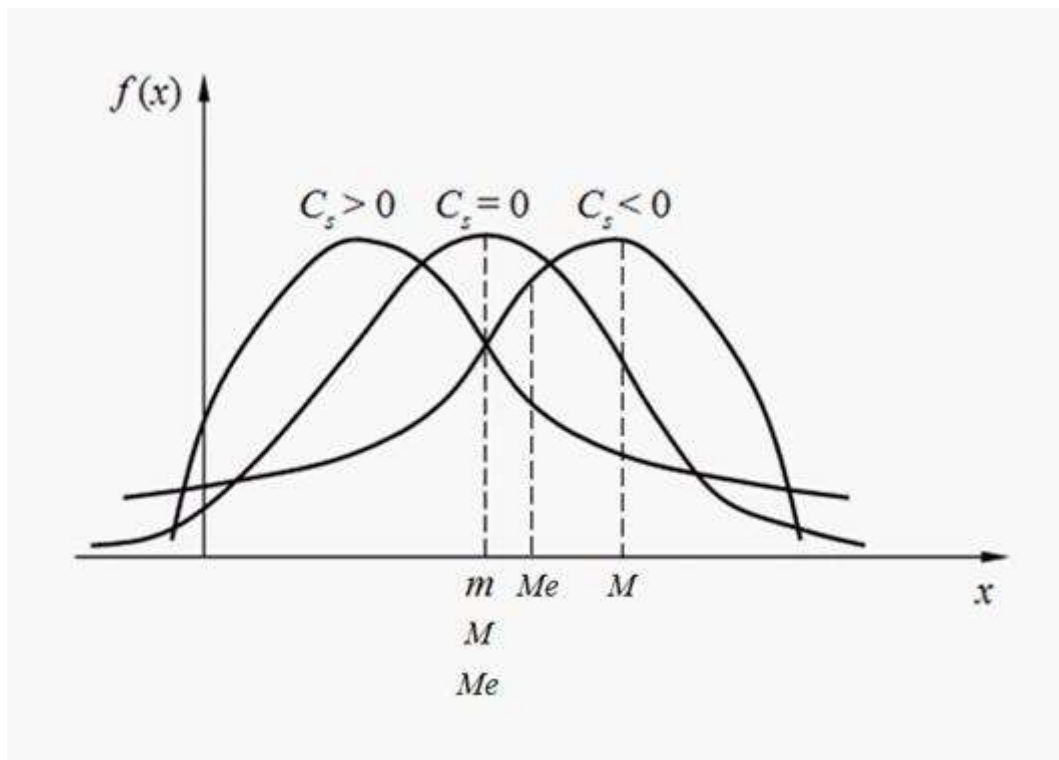


Рис. 2. Виды асимметрии распределений.

Эксцесс. Центральный момент четвертого порядка:

$$\mu_4 = M(X - m)^4 \quad (19)$$

служит для оценки так называемого *эксцесса*, определяющего степень крутости (островершинности) кривой распределения вблизи центра распределения по отношению к кривой нормального распределения. Так как

для нормального распределения $\mu_4 = 3\sigma^4$, то в качестве эксцесса принимается величина:

$$E = \frac{\mu_4}{[\sigma(X)]^4} - 3. \quad (20)$$

На рис. 3 приведены примеры кривых распределения с различными значениями эксцесса. Для нормального распределения $E = 0$. Кривые, более островершинные, чем нормальная, имеют положительный эксцесс, более плосковершинные – отрицательный.

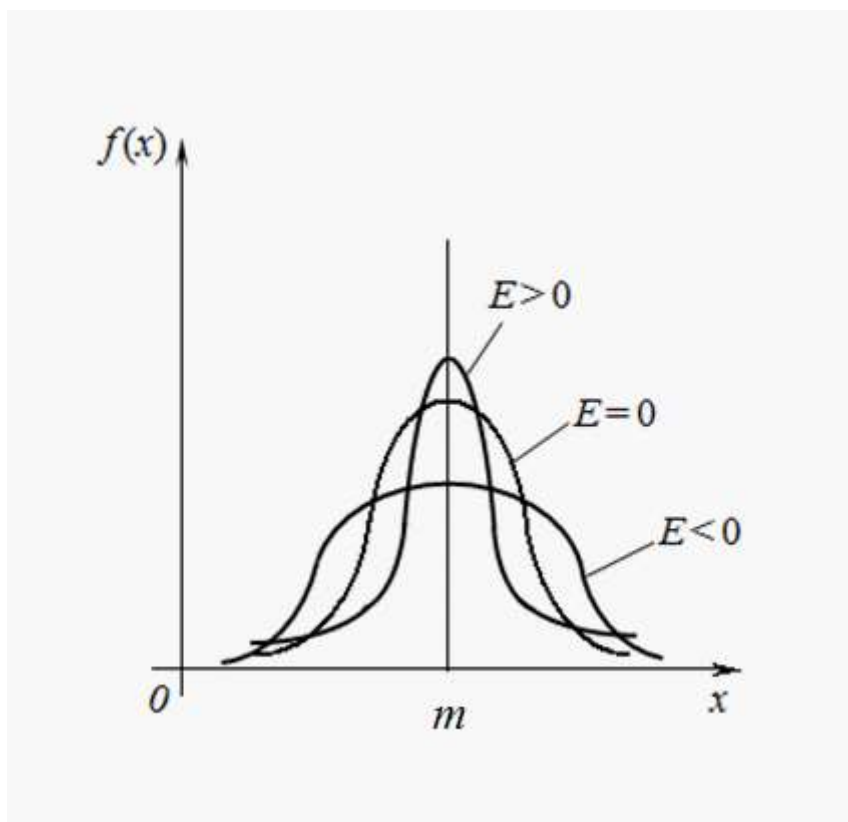


Рис. 3. Кривые распределения с различной степенью крутости (эксцессом).

Моменты более высоких порядков в инженерных приложениях математической статистики обычно не применяются.

Мода дискретной случайной величины – это ее наиболее вероятное значение. *Модой непрерывной* случайной величины называется ее значение, при котором плотность вероятности максимальна (рис. 2). Если кривая распределения имеет один максимум, то распределение называется *унимодальным*. Если кривая распределения имеет более одного максимума, то распределение называется *полимодальным*. Иногда встречаются распределения, кривые которых имеют не максимум, а минимум. Такие распределения называются *антимодальными*. В общем случае мода и математическое ожидание случайной величины не совпадают. В частном случае, для *модального*, т.е. имеющего моду, симметричного распределения и при условии, что существует математическое ожидание, последнее совпадает с модой и центром симметрии распределения.

Медиана случайной величины X – это ее значение Me , для которого имеет место равенство: $P\{X < Me\} = P\{X > Me\}$, т.е. равновероятно, что случайная величина X окажется меньше или больше Me . Геометрически *медиана* – это абсцисса точки, в которой площадь под кривой распределения делится пополам (рис. 2). В случае симметричного модального распределения медиана, мода и математическое ожидание совпадают.

Распределения дискретных случайных величин

Биномиальное распределение. Дискретная случайная величина X имеет *биномиальное распределение*, если ее возможные значения $0, 1, 2, \dots, m, \dots, n$, а соответствующие им вероятности равны:

$$P_m = P\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad (21)$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$; $m = 0, 1, 2, \dots, n$.

Как видно из (21), вероятности P_m вычисляются, как члены разложения бинома Ньютона $(p + q)^n$, откуда и название «биномиальное распределение». Примером является выборочный контроль качества производственных изделий, при котором отбор изделий для пробы производится по схеме случайной *повторной выборки*, т.е. когда проверенные изделия возвращаются в исходную партию. Тогда количество нестандартных изделий среди отобранных есть случайная величина с биномиальным законом распределения вероятностей.

Биномиальное распределение определяется двумя параметрами: n и p . Случайная величина, распределенная по биномиальному закону, имеет следующие основные числовые характеристики:

$$m = np, \quad D = npq, \quad \sigma = \sqrt{npq}. \quad (22)$$

Распределение Пуассона. Дискретная случайная величина X имеет *распределение Пуассона*, если она имеет бесконечное счетное множество возможных значений $0, 1, 2, \dots, m, \dots$, а соответствующие им вероятности определяются формулой:

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad m = 0, 1, 2, \dots. \quad (23)$$

Примерами случайных явлений, подчиненных закону распределения Пуассона, являются: последовательность радиоактивного распада частиц, последовательность отказов при работе сложной компьютерной системы, поток заявок на телефонной станции и многие другие. Закон распределения Пуассона (23) зависит от одного параметра a , который одновременно является и математическим ожиданием, и дисперсией случайной величины X , распределенной по закону Пуассона. Таким образом, для распределения Пуассона имеют место следующие основные числовые характеристики:

$$m = D = a, \quad \sigma = \sqrt{a}. \quad (24)$$

Геометрическое распределение. Дискретная случайная величина X имеет *геометрическое распределение*, если ее возможные значения $0, 1, 2, \dots, m, \dots$, а вероятности этих значений:

$$P_m = q^m p, \quad (25)$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$; $m = 0, 1, 2, \dots$.

Вероятности P_m для последовательных значений m образуют геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q , откуда и название «геометрическое распределение».

В качестве примера рассмотрим стрельбу по некоторой цели *до первого попадания*, причем вероятность попадания при каждом выстреле не зависит от результатов предыдущих выстрелов и сохраняет постоянное значение p ($0 < p < 1$). Тогда количество произведенных выстрелов будет случайной величиной с геометрическим распределением вероятностей.

Геометрическое распределение определяется одним параметром p . Случайная величина, подчиненная геометрическому закону распределения, имеет следующие основные числовые характеристики:

$$m = q / p, D = q / p^2, \sigma = \sqrt{q} / p. \quad (26)$$

Гипергеометрическое распределение. Дискретная случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение с параметрами a, b, n , если ее возможные значения $0, 1, 2, \dots, m, \dots, a$ имеют вероятности:

$$P_m = P\{X = m\} = (C_a^m C_b^{n-m}) / C_{a+b}^n, \quad m = 0, \dots, a. \quad (27)$$

Гипергеометрическое распределение возникает, например, когда из урны, содержащей a черных и b белых шаров, вынимают n шаров. Случайной величиной, подчиненной гипергеометрическому закону распределения, является число белых шаров среди вынутых. Основные числовые характеристики этой случайной величины:

$$m = na / (a + b), D = nab / (a + b)^2 + n(n - 1) \left[\frac{a}{a + b} \cdot \frac{a - 1}{a + b - 1} - \frac{a^2}{(a + b)^2} \right]. \quad (28)$$

Распределения непрерывных случайных величин

Равномерное распределение. Непрерывная величина X распределена равномерно на интервале (a, b) , если все ее возможные значения находятся на этом интервале и плотность распределения вероятностей постоянна:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b - a} & \text{при } x \in (a, b), \\ 0 & \text{при } x \notin (a, b). \end{cases} \quad (29)$$

Для случайной величины X , равномерно распределенной в интервале (a, b) (рис. 4), вероятность попадания в любой интервал (x_1, x_2) , лежащий внутри интервала (a, b) , равна:

$$P\{x_1 < X < x_2\} = \frac{x_2 - x_1}{b - a}. \quad (30)$$

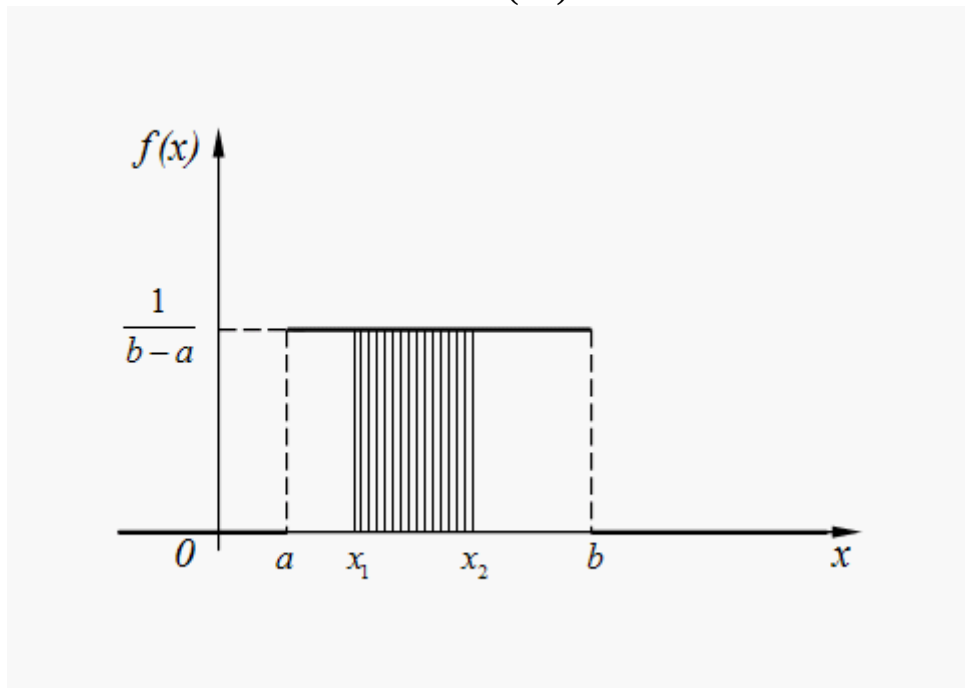


Рис. 4. График плотности равномерного распределения

Примерами равномерно распределенных величин являются ошибки округления. Так, если все табличные значения некоторой функции округлены до одного и того же разряда 10^{-m} , то выбирая наугад табличное значение, мы считаем, что ошибка округления выбранного числа есть случайная величина, равномерно распределенная в интервале $(-\varepsilon, +\varepsilon)$, где $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-m}$.

Показательное распределение. Непрерывная случайная величина X имеет *показательное распределение*, если плотность распределения ее вероятностей выражается формулой:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda t} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t \leq 0. \end{cases} \quad (31)$$

График плотности распределения вероятностей (31) представлен на рис. 5.

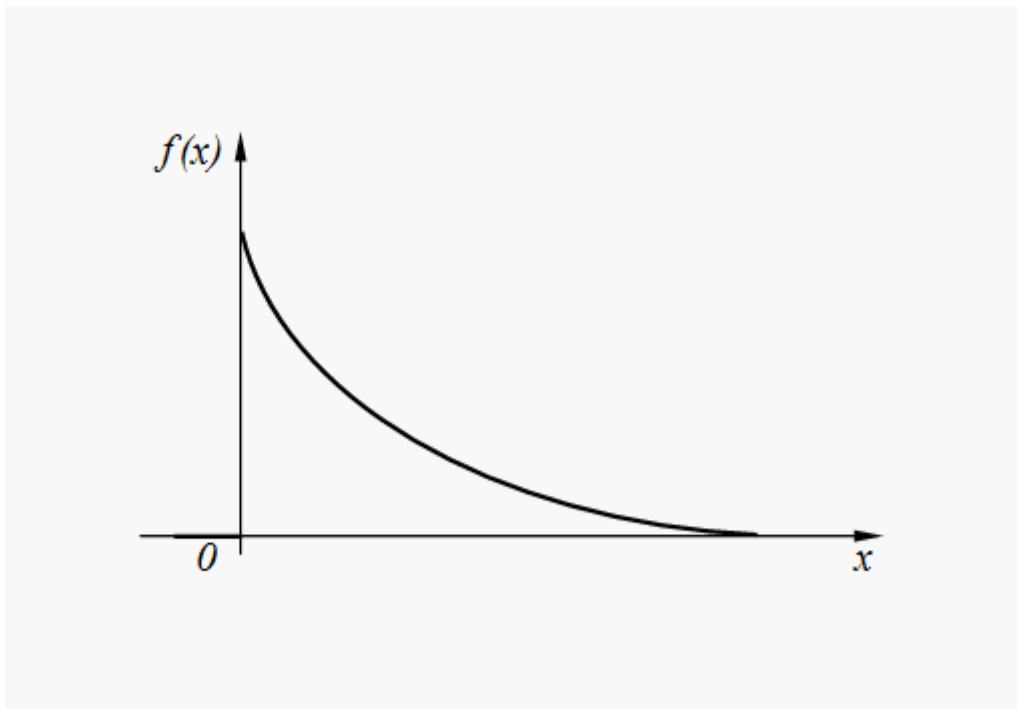


Рис. 5. График плотности показательного распределения

Время T безотказной работы компьютерной системы есть случайная величина, имеющая показательное распределение с параметром λ , физический смысл которого – среднее число отказов в единицу времени, не считая простоев системы для ремонта.

Нормальное (гауссово) распределение. Случайная величина X имеет нормальное (гауссово) распределение, если плотность распределения ее вероятностей определяется зависимостью:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad (32)$$

где $m = M(X)$, $\sigma = \sqrt{D(X)}$.

При $m = 0$, $\sigma = 1$ нормальное распределение называется *стандартным*. График плотности нормального распределения (32) представлен на рис. 6.

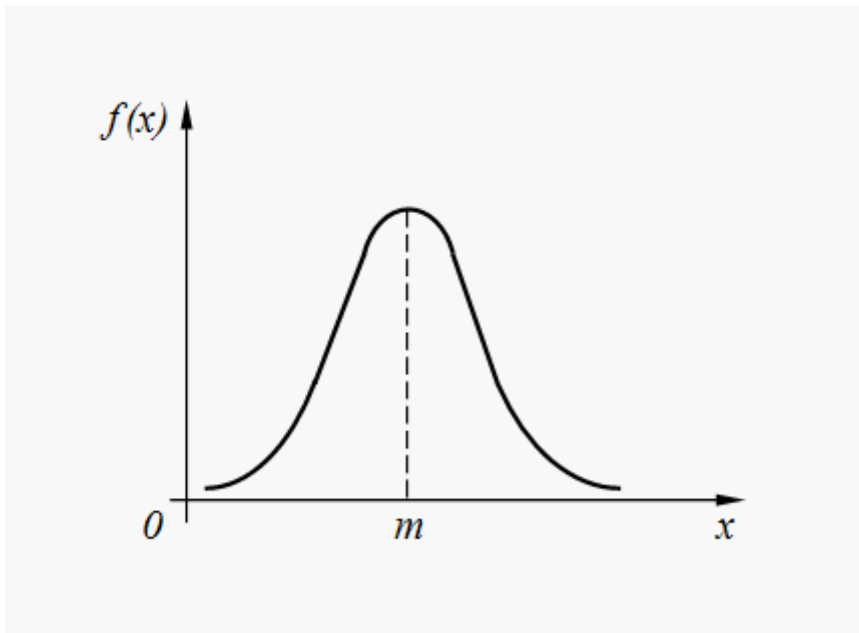


Рис. 6. График плотности нормального распределения

Нормальное распределение является наиболее часто встречающимся в различных случайных явлениях природы. Так, ошибки выполнения команд автоматизированным устройством, ошибки вывода космического корабля в заданную точку пространства, ошибки параметров компьютерных систем и т.д. в большинстве случаев имеют нормальное или близкое к нормальному распределение. Более того, случайные величины, образованные суммированием большого количества случайных слагаемых, распределены практически по нормальному закону.

Гамма-распределение. Случайная величина X имеет *гамма-распределение*, если плотность распределения ее вероятностей выражается формулой:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases} \quad (33)$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

где — гамма-функция Эйлера.

Основные свойства гамма-функции:

$$1) \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha);$$

$$2) \Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1,$$

откуда для любого целого $n > 0$

$$\Gamma(n + 1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n!;$$

$$3) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{\pi},$$

откуда для любого целого $n > 0$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)}{2^n} \cdot \sqrt{\pi}.$$

Параметры α, λ – любые положительные числа. Гамма-распределение является также распределением Пирсона типа III [3]. При $\alpha = 1$ гамма-распределение превращается в показательное распределение с параметром λ , так как $\Gamma(1) = 1$. Гамма-распределение широко используется в математической статистике. На рис. 7 представлены графики плотности гамма-распределения (33) при $\alpha > 1$ и $0 < \alpha < 1$.

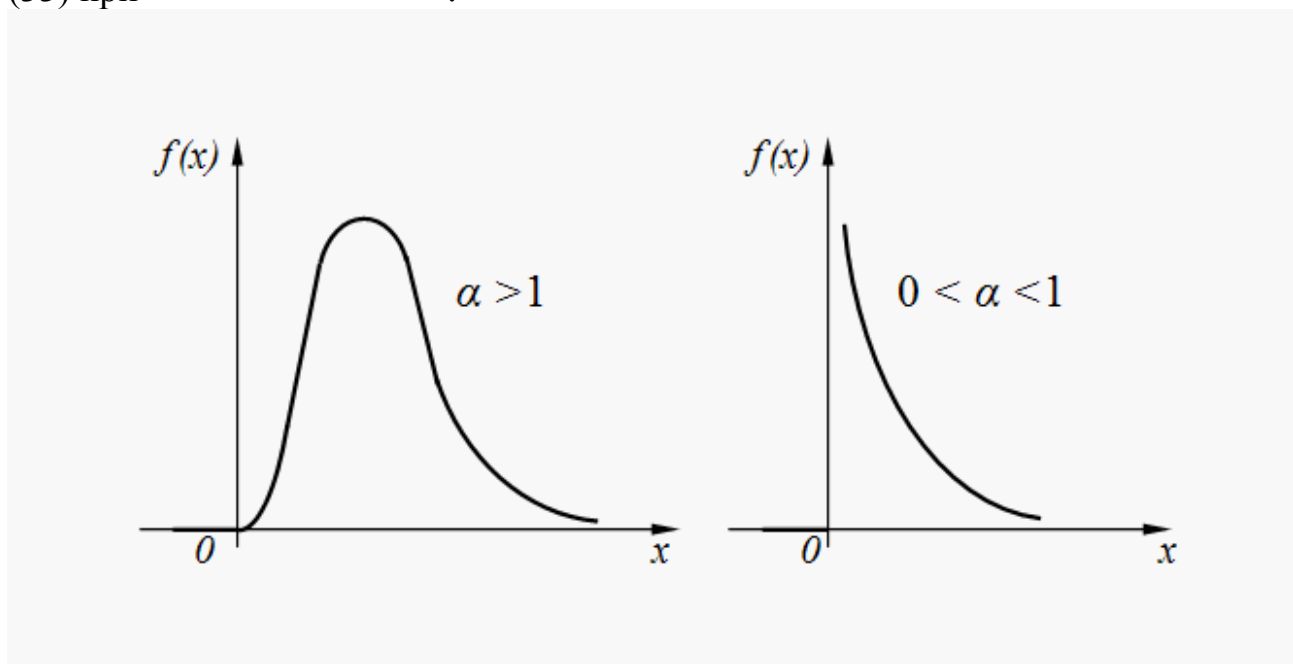


Рис. 7. Графики плотности гамма-распределения

Системы случайных величин

Существенный интерес в математической статистике представляет рассмотрение системы двух и более случайных величин и их статистическая взаимосвязь друг с другом.

По аналогии с рядом распределения одной дискретной величины X для двух дискретных случайных величин X и Y строится *матрица распределения* –

прямоугольная таблица, в которой записаны все вероятности $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$.

События (или опыты) называются *независимыми*, если вероятность появления (исхода) каждого из них не зависит от того, какие события (исходы) имели место в других случаях (опытах).

Две случайные величины X и Y называются *независимыми*, если независимы все связанные с ними события: например, $\{X < a\}$ и $\{Y < b\}$ или $\{X = x_i\}$ и $\{Y = y_j\}$ и т.д.

В терминах законов распределения справедливо также следующее определение: две случайные величины X и Y называются *независимыми*, если закон распределения каждой из них не зависит от принятого значения другой.

Совместной функцией распределения системы двух случайных величин (X, Y) называется вероятность совместного выполнения неравенств $X < x$ и $Y < y$:

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\}. \quad (34)$$

Событие $\{X < x, Y < y\}$ означает произведение (совместное выполнение) событий $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$.

Геометрической интерпретацией совместной функции распределения $F(x, y)$ является вероятность попадания случайной точки (X, Y) на плоскости внутрь бесконечного квадранта с вершиной в точке (x, y) (заштрихованная область на рис. 8).

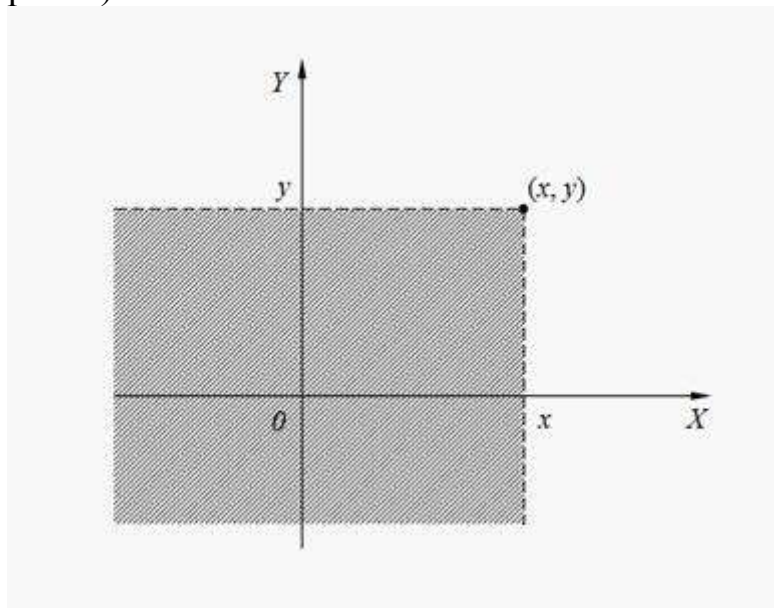


Рис. 8. Геометрическая интерпретация совместной функции распределения $F(x, y)$

Основные свойства совместной функции распределения:

- 1) $F(x, y)$ – неубывающая функция, т.е. при $x_2 > x_1$ $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$,
при $y_2 > y_1$ $F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$,
- 2) $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0$,
- 3) $F(+\infty, +\infty) = 1$,
- 4) $F(x, +\infty) = F_1(x)$, $F(+\infty, y) = F_2(y)$,
- 5) $F(x, y)$ – непрерывная слева функция.

(35)

Здесь $F_1(x) = P\{X < x\}$, $F_2(y) = P\{Y < y\}$.

Система двух случайных величин (X, Y) называется *непрерывной*, если ее совместная функция распределения $F(x, y)$ – непрерывная функция, дифференцируемая по каждому аргументу, у которой существует вторая

смешанная частная производная $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \cdot \partial y}$. Обе случайные величины X и Y – непрерывны. Тогда функция

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \cdot \partial y} \quad (36)$$

называется *совместной плотностью распределения* системы двух случайных величин (X, Y) .

Основные свойства совместной плотности распределения:

- 1) $f(x, y) \geq 0$,
- 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$.

(37)

В качестве числовых характеристик системы двух случайных величин X и Y обычно рассматриваются *начальные* и *центральные моменты* различных порядков. *Порядком момента* называется сумма его индексов $k + s$.

Начальным моментом порядка $k + s$ системы двух случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения X^k на Y^s :

$$\alpha_{k,s} = M(X^k Y^s). \quad (38)$$

Центральным моментом порядка $k + s$ системы двух случайных величин (X, Y) называется математическое ожидание произведения $(X - m_x)^k$ на $(Y - m_y)^s$:

$$\mu_{k,s} = M[(X - m_x)^k (Y - m_y)^s], \quad (39)$$

где $m_x = M(X)$, $m_y = M(Y)$.

Для системы дискретных случайных величин X и Y :

$$\alpha_{k,s} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i^k y_j^s p_{ij}, \quad (40)$$

$$\mu_{k,s} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - m_x)^k (y_j - m_y)^s p_{ij}, \quad (41)$$

где $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$.

Для системы непрерывных случайных величин X и Y :

$$\alpha_{k,s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^s f(x, y) dx dy, \quad (42)$$

$$\mu_{k,s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^k (y - m_y)^s f(x, y) dx dy, \quad (43)$$

где $f(x, y)$ – совместная плотность распределения случайных величин X и Y .

В инженерных приложениях математической статистики чаще всего используются моменты первого и второго порядков.

Начальные моменты первого порядка

$$\alpha_{1,0} = M(X^1 Y^0) = M(X) = m_x; \quad \alpha_{0,1} = M(X^0 Y^1) = M(Y) = m_y \quad (44)$$

являются математическими ожиданиями случайных величин X и Y .

Центральные моменты первого порядка всегда равны нулю:

$$\begin{aligned} \mu_{1,0} &= M[(X - m_x)^1 (Y - m_y)^0] = M(X - m_x) = M(X) - M(m_x) = m_x - m_x = 0, \\ \mu_{0,1} &= M[(X - m_x)^0 (Y - m_y)^1] = M(Y - m_y) = M(Y) - M(m_y) = m_y - m_y = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Начальные моменты второго порядка:

$$\begin{aligned} \alpha_{2,0} &= M(X^2 Y^0) = M(X^2) = \alpha_2(X), \\ \alpha_{0,2} &= M(X^0 Y^2) = M(Y^2) = \alpha_2(Y), \\ \alpha_{1,1} &= M(X^1 Y^1) = M(XY). \end{aligned} \quad (46)$$

Центральные моменты второго порядка:

$$\begin{aligned} \mu_{2,0} &= M[(X - m_x)^2 (Y - m_y)^0] = M[(X - m_x)^2] = D_x, \\ \mu_{0,2} &= M[(X - m_x)^0 (Y - m_y)^2] = M[(Y - m_y)^2] = D_y, \\ \mu_{1,1} &= M[(X - m_x)^1 (Y - m_y)^1] = M[(X - m_x)(Y - m_y)]. \end{aligned} \quad (47)$$

Здесь D_x, D_y – дисперсии случайных величин X и Y .

Центральный момент второго

порядка $\mu_{1,1} = M[(X - m_x)(Y - m_y)]$ называется *ковариацией* случайных величин X и Y . Обозначим его K_{xy} :

$$K_{xy} = M[(X - m_x)(Y - m_y)] \quad (48)$$

Из определения ковариации (48) следует:

$$K_{xy} = K_{yx} \quad (49)$$

Дисперсия случайной величины является по существу частным случаем ковариации:

$$D_x = M[(X - m_x)(X - m_x)] = K_{xx}, \quad D_y = M[(Y - m_y)(Y - m_y)] = K_{yy} \quad (50)$$

По определению ковариации (48) получим:

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy \quad (51)$$

Ковариация двух случайных величин X и Y характеризует степень их зависимости и меру рассеивания вокруг точки (m_x, m_y) . Часто бывает удобно

выразить ковариацию K_{xy} в виде:

$$K_{xy} = M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y) \quad (52)$$

Выражение (52) вытекает из определения ковариации (48).

Размерность ковариации K_{xy} равна произведению размерностей случайных величин X и Y .

Безразмерная величина, характеризующая только зависимость случайных величин X и Y , а не разброс:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (53)$$

называется *коэффициентом корреляции* случайных величин X и Y . Этот параметр характеризует степень *линейной* зависимости случайных величин X и Y . Для любых двух случайных величин X и Y коэффициент

корреляции $-1 \leq r_{xy} \leq 1$. Если $r_{xy} > 0$, то линейная зависимость между X и Y возрастающая, если $r_{xy} < 0$, то линейная зависимость между X и Y убывающая, при $r_{xy} = 0$ линейной зависимости между X и Y нет.

При $r_{xy} \neq 0$ случайные величины X и Y называются коррелированными, при $r_{xy} = 0$ – некоррелированными. Отсутствие линейной корреляции не означает отсутствие любой другой зависимости между X и Y . Если имеет место жесткая линейная зависимость $Y = aX + b$, то $r_{xy} = +1$ при $a > 0$ и $r_{xy} = -1$ при $a < 0$.

Тема 18 Математические модели

«Постановка задач моделирования. Классификация моделей. Динамические модели»

Знание конкретных разделов математики и освоение ряда базовых математических методов является обязательной, но лишь необходимой частью математического образования. Практическое же применение знаний по математике обычно заключается в том, чтобы объекты нашего рассмотрения — объекты реального мира — описать на языке математики. Такой перевод на язык математики называется построением математической модели.

Все развитие современной науки связано с созданием и изучением моделей систем, процессов и явлений. Модель — это условный образ объекта исследования, который создается по аналогии или сходству с объектом. Построенная модель позволяет получить более точное представление о наиболее существенных его свойствах и в определенной степени предсказать будущие события. Процесс построения математической модели и последующее ее применение для решения конкретных задач называется математическим моделированием.

Постановка задач моделирования

Любой человек (коллектив, учреждение), которого в дальнейшем будем называть «исследователь», в результате своей

целенаправленной деятельности рассматривает некоторый объект (систему, процесс и т. п. у, ставит и решает задачи по достижению поставленной цели.

Под задачей в канонической форме обычно понимают логическое высказывание вида:

«Дано V , требуется Z », или $\langle V, Z \rangle$.

Заданные условия V включают: множество возможных состояний рассматриваемой системы S и множество операторов (правил) R , переводящих объект рассмотрения из одного возможного состояния в другое. Решение задачи — достижение цели Z , которая в большинстве случаев понимается как желаемое состояние объекта. Так, например, следовательно, исходя из имеющихся фактов (описания состояния объекта S) должен найти преступника и на основе правовых норм и логических заключений (R) доказать его виновность или невиновность (цель Z).

На стадии постановки задачи исследователь определяет объект исследования и окружающую его среду, возможные факторы, влияющие на объект, способы описания собственно объекта и (или) правил перехода из одного состояния в другое, цели решения задачи и оценки качества решений. Формальная модель поставленной задачи может быть записана следующим образом:

«Дано X, Y, R, W ; требуется Z »,

где X — множество входных управляемых и неуправляемых факторов; Y — множество исходов, т. е. результатов взаимодействия входных факторов с

объектом рассмотрения; R — множество операторов, определяющих появление исходов в результате взаимодействия входных факторов с рассматриваемым объектом; Z — множество целей — желаемых состояний системы; W — множество критериев оценки элементов множества Z .

Процедура решения задачи заключается в построении множества исходов как альтернатив результатов решения задачи, в той или иной мере соответствующих поставленным целям, и в выборе одной из них в качестве собственно решения (ответа задачи).

Постановка типа А.

Цель решения задачи — нахождение лишь допустимого варианта решения. Каждое допустимое решение X должно отвечать ограничениям по ресурсам g_{k0} и быть внутренне сбалансированным (непротиворечивым). Цели здесь могут выражаться в виде специальных ограничений типа «быть не менее чем...» или твердых заданий «быть равным ...». Они лишь косвенно выражают приоритет вариантов и направление устремлений. Например, требуется сформировать учебный план неполной средней школы. В рамках этой проблемы может быть

задана следующая задача: за восемь первых лет обучения в школе на математику необходимо выделить не менее 1500 часов учебного времени и непременно изучить методы решения квадратных уравнений за 20 часов.

Математическая запись такого рода моделей может быть следующей: определить $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при ограничениях:

$W_i(X) \geq W_{i0}(x), \quad i = 1, l$ — целевые ограничения,

$g_k(X) \leq g_{k0}, \quad k = 1, m$ — ресурсные ограничения.

Примерами такого типа постановок являются: модели прямого вычисления (вычисления по формулам, а также решение систем уравнений и неравенств), модели баланса, модели прогнозирования и др. При помощи таких моделей, описывается и анализируется состояние и поведение объектов исследования.

Постановки типа В.

Эти постановки формулируются как требование максимизации (минимизации) некоторых характеристик объектов исследования. Эти характеристики одновременно выступают в качестве критериев оценки и отбора вариантов. Поэтому задачи, имеющие постановку такого типа, называются оптимизационными. Множество допустимых вариантов решения задается системой ограничений на регулируемые и нерегулируемые параметры как требование принадлежности некоторому допустимому множеству D .

Математическая запись может быть следующей:

$X^* = \operatorname{argmax} W(X) | X \in D$ или $X^* = \operatorname{argmin} W(X) | X \in D$,

где $W(X)$ — целевая функция; D — область допустимых решений.

Подобные математические модели предписывают норму поведения объекта и относятся к моделям нормативного типа. Решив подобную математическую задачу, получают вполне определенный и наилучший в смысле принятого критерия план действий.

Постановка типа С.

Это наиболее общий вид задач поиска решения, встречающийся в целенаправленной деятельности людей. В постановках такого типа дают развернутую формулировку целей и не привязываются к структуре выделяемых ресурсов. Цели могут последовательно конкретизироваться вплоть до введения целевых нормативов (как в постановках типа В), однако цели и критерии в этом типе постановок разделены.

Оценка качества решения осуществляется путем вычисления отклонения выбранных показателей от этих нормативов. Если же нормативы просто перечислены, то постановка становится похожей на постановку типа А. Целевые нормативы могут быть как-то ранжированы или даже взвешены. В последнем случае постановка С внешне будет походить на постановку типа В. Нахождение эффективных решений задач имеющих постановки типа С — дело будущего.

Сравнивая типы постановок, можно сказать, что нормативные постановки приводят к жестким моделям. Решение задачи в этом случае получается наилучшим в смысле принятых критериев.

Разделение целей и критериев оценки вариантов решений в постановках типа С позволяет получать более гибкие модели способные адаптироваться к существенным изменениям условий задачи.

Постановки же типа А обычно предназначены только для решения вопросов анализа.

Таким образом, в целенаправленной деятельности могут встречаться самые различные постановки задач, в решении которых важное место занимают математические методы. Какие именно постановки задач применять и какие использовать для решения методы моделирования зависит от исследователя, его целей, знаний и возможностей.

Классификация моделей

Процесс математического моделирования может развиваться по одному из двух сценариев. Наиболее распространен следующий: формулируется задача, затем ее пытаются формализовать в виде известной математической модели, которая, как правило, хорошо известна исследователю и решение которой потенциально доступно. Это путь подгонки задачи под модель. Здесь возникает проблема адекватности полученного решения исходной задаче.

Классификация моделей может быть проведена с различных точек зрения. Рассмотрим лишь некоторые из них;

Модели структуры описывают связи между средой и компонентами системы. Из них можно выделить: канонические модели, где описана связь с окружающей средой через вход и выход; модели внутренней структуры, описывающие состав компонентов системы и связь между ними; модели иерархической структуры, где целое расчленяется на элементы более низкого уровня (обычно в виде дерева структуры системы) и др.

Модели функционирования — модели жизненного цикла системы в целом; модели операции, представляющие описание процессов функционирования отдельных элементов; информационные модели, описывающие взаимосвязи источников и потребителей информации, характер ее преобразования,

временные и другие количественные характеристики; процедурные модели, отражающие порядок взаимодействия элементов при выполнении отдельных операций; временные модели, описывающие процедуры функционирования во времени.

Стоимостные модели предназначены для комплексной оценки по экономическим критериям.

Классификация по типу задач.

Описательные (дескриптивные) модели (к ним часто приводят постановки задач типа А) предназначены для описания изучаемого процесса, объяснения наблюдаемых фактов, а также прогноза поведения системы: модели планирования без оптимизации (балансовые модели); модели для некоторых задач сетевого планирования и управления (расчет по известным формулам); модели для задач учета; модели для задач контроля и анализа (обычно в виде статистических моделей); модели прогнозирования; модели для расчета параметров функционирования случайных систем с неформализованными связями.

Нормативные, или прескриптивные модели, к которым обычно приводят постановки задач типа В. В моделях такого типа отражается то, что должно было бы происходить, если принять некоторые исходные предположения. Построение нормативных моделей преследует цель определения наилучшего эффекта или состояния. С их помощью дается ответ на вопросы о том, как должно быть.

Модели конструирования решений, выступающие в виде формализованных схем построения комплексных решений. Они обычно включают в качестве элементов и дескриптивные, и нормативные модели. К таким моделям обычно приводят постановки задач типа С.

Классификация по форме реализации. Аналитические модели, записывающиеся в виде математических конструкций, не включающих логических условий, приводящих к разветвлению вычислительного процесса.

Алгоритмические модели — это математические модели, в которых присутствуют логические условия, приводящие к разветвлению вычислительного процесса. Основные принципы построения математических моделей. При построении математических моделей целесообразно придерживаться следующих принципов, выработанных практикой.

Достаточность используемой информации. При построении модели целесообразно использовать ту информацию, которая требуется в соответствии с разрабатываемым алгоритмом, что принципиально противоположно подходу: «сначала сбор информации, а затем построение алгоритма по обработке этой информации».

Инвариантность информации. Данный принцип означает, что входная информация должна быть независима от параметров моделируемой системы. Иначе говоря, модель должна работать без коррекции в некотором диапазоне значений входной информации.

Преемственность. Каждая последующая модель не должна нарушать свойств объекта, полученного на предыдущих этапах или при использовании других моделей.

Эффективная реализуемость предполагает соответствие точности исходных данных, точности решения задачи и точности результирующей информации. В этой связи следует заметить, что нахождение оптимальных решений для практики часто иллюзорно.

Тема 19. Теория алгоритмов

Алгоритм означает выполнение какого-либо действия. Примеры алгоритмов в повседневной жизни рецепты приготовления пищи, инструкция для сборки оборудования, инструкции по выкройке, а также инструкции по заполнению формы подоходного налога. Большая часть математики начальной школы посвящена алгоритму-обучению выполнения арифметических действий, таких как многоразрядное сложение и вычитание, умножения многозначных чисел и деления в столбик.

Идея компьютерного алгоритма пришла Аде Августе, графине Лавлейс. Она стажировалась как математик, она заинтересовалась дизайном "аналитической машины" Чарльза Бэббиджа, машиной аналогичной современному компьютеру. Леди Лавлейс продолжила изыскания Бэббиджа о том, что такая машина будет работать "многократно используя данные последовательности команд, количество задается заранее или зависит от результатов вычислений." В этом заключается суть современного компьютерного алгоритма³¹

Язык алгоритма

Алгоритмический язык, используемый в этой книге является своего рода псевдокодом, сочетающим в себе элементы Pascal, C, Java и VB.NET, и английский. Мы будем использовать некоторые из формальных конструкций компьютерных языков, таких как операторы присваивания, циклы, и так далее, но мы будем игнорировать более технические детали, такие как требование явных разделителей, диапазон целочисленные значения, доступные конкретной установке, и так далее. Алгоритмы, представленные в данном тексте достаточно точные, для легкого перевода на практически любой язык программирования высокого уровня. В языках программирования высокого уровня, термин переменная используется для обозначения конкретного места хранения в памяти компьютера. Если переменная x имеет значение 3 то на программном языке это означает, что ячейка памяти, соответствующая x содержит номер 3. Заданное место хранения может содержать только одно значение. Если переменной присваивается новое значение во время выполнения программы, то старое значение стирается. Тип данных переменной указывает набор, в котором переменная принимает значения, это могут быть как множество целых чисел, так и действительные числа, или строки символов, или множество $\{0,1\}$ (для логической переменной), и так далее.

Оператор присваивания дает значение переменной. Она имеет вид $x := e$, где x является переменной и e является выражением. Это читается " x присваивается значение e " или "пусть x e ." Когда оператор присваивания выполняется, выражение e вычисляется (с использованием текущих значений всех переменных в выражении), а затем его значение помещается в ячейку памяти, соответствующую x (заменив предыдущее содержание этого места). Как

³¹ Использовано содержание и смысл из источника Discrete mathematics with applications. Fourth edition, Susanna S. EPP Depaul University. Copyright 2010, p.p 214

правило, алгоритм утверждения выполняются один за другим в том порядке, в котором они написаны. Условные операторы позволяют выполнять порядок с использованием текущих значений программных переменных, чтобы определить, какой алгоритм оператор будет выполняться в следующем.

2. Условный оператор

Условный оператор можно использовать в двух видах: полный и неполный вид условного оператора:

IF <условие> THEN S1 ELSE S2;

Здесь IF (если), THEN (то) и ELSE (или) служебные слова, S1 и S2 произвольные операторы.

Операторам присваиваются логические значения.

Операторы работают следующим образом: Если данный оператору присваивается значение TRUE (истина), и выполняются новые условия, то служебное слово THEN – выполняет следующий оператор, иногда выполняется оператор идущий послеслужебного слова ELSE.³²

³² Использовано содержание и смысл из источника Discrete mathematics with applications. Fourth edition, Susanna S. EPP DePaul University. Copyright 2010, p.p 215

Тема 1 « Исторические и занимательные задачи.»

1) Пять землекопов за 5 часов выкапывают 5 м канавы. Сколько потребуется землекопов, для того чтобы выкопать 100 м канавы за 100 часов?

Понадобятся те же пять землекопов, не больше. В самом деле, пять землекопов за 5 часов выкапывают 5 м канавы; значит, пять землекопов за 1 час вырыли бы 1 м канавы, а в 100 часов — 100 м.

2) Люди, приезжавшие в одну деревушку, часто удивлялись местному дурачку. Когда ему предлагали выбор между блестящей 50-центовой монетой и мятой пятидолларовой купюрой, он всегда выбирал монету, хотя она стоит вдесятеро меньше купюры. Почему он никогда не выбирал купюру?

"Дурачок" был не так глуп: он понимал, что, пока он будет выбирать 50-центовую монету, люди будут предлагать ему деньги на выбор, а если он выберет пятидолларовую купюру, предложения денег прекратятся, и он не будет получать ничего.

3) Образно представьте себе нашу планету, плотно стянутую кольцом по всему ее экватору. После увеличения длины окружности кольца на 10 метров, между кольцом и поверхностью земли образовался зазор определенной величины. Как Вы считаете, сможет ли человек пройти, или хотя бы протиснуться в этот зазор? Известно, что экватор имеет длину приблизительно равную 40 075 километров.

Для решения данной задачи достаточно элементарных знаний геометрии. Изначально может показаться, что увеличение длины кольца на 10 метров, по сравнению с его длиной $L = 40\,075\,000\text{ м}$ будет способствовать образованию практически незаметного зазора. Зная формулу определения радиуса окружности и известную величину ее длины (L), определяем величину, на которую увеличится радиус (в нашем случае это будет величина зазора) при увеличении длины окружности (кольца) на 10 м.

$$\Delta R = (L + 10\text{ м}) / (2\pi) - L / (2\pi) = (40\,075\,000\text{ м} + 10\text{ м}) / (2 \times 3,14) - 40\,075\,000\text{ м} / (2 \times 3,14) = 1,592\text{ м}$$

В такой зазор человек сможет не только протиснуться, но и даже пройти, немного нагнувшись.

4) Пете и Коле купили по коробке конфет. В каждой коробке находится 12 конфет. Петя из своей коробки съел несколько конфет, а Коля из своей коробки съел столько конфет, сколько осталось в коробке у Пети. Сколько конфет осталось на двоих у Пети и Коли?

12 конфет

5) Человек живет на 17-м этаже. На свой этаж он поднимается на лифте только в дождливую погоду или тогда, когда кто-нибудь из соседей с ним едет в лифте. Если погода хорошая и он один в лифте, то он едет до 9-го этажа, а дальше до 17-го этажа идет пешком по лестнице... Почему?

Этот человек - лилипут, и до кнопки 17-го этажа дотягивается только зонтиком или просит кого-нибудь нажать на эту кнопку.

6) Инспектор, проверявший некую школу, заметил, что, когда бы он ни задал классу вопрос, в ответ тянули руки все ученики. Более того, хотя школьный

учитель каждый раз выбирал другого ученика, ответ всегда был правильным. Как это получалось?

Учитель предварительно договорился с учениками, чтобы они вызывались отвечать независимо от того, знают ответ или не знают. Но те, кто знает ответ, должны поднимать правую руку, а те, кто не знает, — левую. Учитель каждый раз выбирал другого ученика, но всегда того, кто поднимал правую руку.

7) У Вас есть два шнура (фитиля). Каждый шнур, подожженный с конца, полностью сгорает дотла ровно за один час, но при этом горит с неравномерной скоростью. Как при помощи этих шнуров и зажигалки отмерить время в 45 минут?

Необходимо поджечь первый шнур одновременно с обоих концов - получаем 30 минут. Одновременно с первым шнуром поджигаем второй шнур с одного конца, и когда первый шнур догорит (30 минут), - поджигаем второй шнур с другого конца (оставшиеся 15 минут).

8) Возвращаясь с рыбалки домой, рыболов встретил своего приятеля, который поинтересовался его уловом. Но, так как наш рыболов помимо рыбалки был также большим любителем всякого рода загадок, ответил приятелю следующим образом: “Если к количеству пойманной мною рыбы добавить половину улова и еще десяток рыбин, то мой улов составил бы ровно сотню рыб”. Сколько рыбы поймал рыболов?

Решим задачу с ее конца. Отнимем лишние 10 рыб - останется 90 рыб. В число 90 заключены три равные части, из которых две являются действительным уловом, а третья - дополнительной половиной от действительного улова. Следовательно, эта дополнительная половина улова составляет $90:3=30$ рыб, а сам улов $30 \times 2 = 60$ рыб.

9) Воздушный шар уносится непрерывным ветром в южном направлении. В какую сторону развиваются при этом флаги на его гондоле?

Шар, уносимый воздушным течением, находится по отношению к окружающему воздуху в покое; поэтому флаги не станут развиваться на ветру ни в какую сторону, а будут свисать, вниз, как в безветрие.

10) Считается, что есть веская причина, по которой у птичьих яиц один конец тупее другого. Что это за причина?

Сферические и овальные яйца катились бы по прямой. Асимметричные же яйца, у которых один конец тупее, а другой острее, при скатывании стремятся катиться по кругу. Если яйцо лежит на краю обрыва или в другом ненадежном месте, стремление катиться по кругу, а не по прямой — большое преимущество.

11) Имеется круглое глубокое озеро диаметром 200 метров и два дерева, одно из которых растет на берегу у самой воды, другое - по центру озера на небольшом островке. Человеку, который не умеет плавать, нужно перебраться

на островок при помощи веревки, длина которой чуть больше 200 метров. Как ему это сделать?
для самостоятельного изучения.

Тема 2 « Элементы математической логики. Логические операции над высказываниями»

Примеры по теме элементы математической логики

Пример 1. Среди следующих предложений найдите высказывания и проверить их на истинность:

а) 7- составное число; б) при делении 68 на 5 в остатке останется 4; д) вопросительные предложения будут высказыванием; е) $x \leq 17$; ф) $17 \cdot 2 - 21 = 13$; г) $x^2 + 4 = 13$; h) 24- простое число.

Пример 2. Из следующих высказываний образуйте отрицание и проверить их на истинность :

А: " число 225 делится на 9 га"; Е: " число 217 делится на 7 ";
В: " 7,6 – натуральное число"; F: " Прага – столица Болгарии";
D: " $7 < 3$ "; G: " значение выражения $27 : 3 + 2 \cdot 3 - 18$ равно 0".

Решение. Имеем: отрицанием высказывания А " число 225 делится на 9 га" :будет высказывание $\bar{A}$: "число 225 не делится на 9" Полученное высказывание будет ложным, т.к. 225 делится на 9.

$\bar{A}$: " число 225 не делится на 9" – Ложь (0)

Пример 3. : А: "Ташкент- столица Узбекистана";

В: "город Термез расположен в Ферганской области";

С: "возраст дочери меньше возраста матери" . Определить истинность высказываний: $A \vee B$, $A \wedge C$, $B \wedge C$.

Решение. Высказывание $A \vee B$ ложное (т.к. А-истинна, В-ложь), $A \wedge C$ -истинна (т.к. А-истинна, С-истинна), $B \wedge C$ -ложь (т.к. В-ложь, С-истинна).

Пример 4. А: " Возраст матери меньше возраста дочери";

В: " Самарканд один из городов Узбекистана";

С: " 8 декабря- день конституции Узбекистана".

$A \vee B$ -?	Ответы:	$A \vee B$ -ложь (А-ложь, В-истинна)
$A \wedge C$ -?		$A \wedge C$ -ложь (А-ложь, С-истинна)
$B \wedge C$ -?		$B \wedge C$ -истинна (В-истинна, С-истинна)
$C \wedge B$ -?		$C \wedge B$ -истинна (С-истинна, В-истинна)
$B \wedge A$ -?		$B \wedge A$ -ложь (В-истинна, А-ложь)

Пример 5. Выяснить истинность высказывания $12 \geq 8$.

Ответ: Эта истинная дизъюнкция, потому что $12 > 8$ -истинное высказывание, $12 = 8$ -ложное высказывание. Дизъюнкция истинного и ложного высказываний по определению истинна

Пример 6. Выяснить истинность высказывания $14 \leq 10$

Решение: Эта дизъюнкция ложная, потому что $14 < 10$ -ложь, $14 = 10$ -ложь. Дизъюнкция двух ложных высказываний ложна.

Пример 7. Если $-4 < 2$, тогда $8 < 7$. Эта импликация ложна, потому что $-4 < -2$ –истинна, $8 < 7$ – ложна.

Пример 9. А: « число 972 кратно 9 »; В: « сумма чисел в записи числа 972 кратна 9 ». Тогда эквивалентность этих двух высказываний можно записать

так: $A \rightarrow B$: "число 972 кратно числу 9, тогда и только тогда, когда сумма чисел в записи числа 972 кратна 9". Это истинная эквиваленция.

Упражнения для самостоятельного решения.

1. Определите, какие из ниже приведенных предложений являются высказываниями. Определить значения истинности высказываний.

а) 7- нечетное число; б) при делении 68 на 5 остаток равен 4; в) Тошкент- столица Узбекистана; г) $x \leq 17$; д) $17 \cdot 2 - 21 = 13$; е) $x^2 + 4 = 13$; ж) 24- составное число.

2. Среди следующих предложений укажите составные, выделите в них логическую структуру:

а) Противоположные стороны параллелограмма параллельны и равны;
б) Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр в его десятичной записи делится на 3;
в) Число 12 составное и кратно 2 или 3;
г) Если число делится на 6, то оно делится на 2.

3. Из ниже приведенных высказываний составить их отрицание:

а: " число 225 делится на 3"; г: " Самарканд- столица Узбекистана";
б: " 1,56 – натуральное число"; д: " $12:3=5$ ";
в: " $7 < 3$ "; е: " значение выражения $18 : 3 - 2 \cdot 3 - 18$ равно 0".

4. Даны высказывания: А: «Сегодня температура воздуха ниже 0°C », В: «Сегодня ясно», С: «Я пойду кататься на лыжах», D): «Я пойду кататься на коньках». Сформулируйте высказывания имеющие структуру:

а) $A \wedge B$
б) $C \vee D$
в) $A \Rightarrow (C \vee D)$
г) $A \wedge B \wedge (C \vee D)$

5. Составить таблицу истинности следующих высказываний:

а) $P \vee \bar{P}$.
б) $A \wedge (B \Rightarrow A)$
в) $A \wedge B \vee (C \vee A)$
г) $A \Leftrightarrow B \wedge C$
д) $(A \wedge B) \wedge C$

6. Докажите тождества:

а) $A \vee B \equiv B \vee A$
в) $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
г) $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
д) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
е) $A \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$

Задания на дом:

1. Составить таблицу истинности следующих высказываний:

а) $P \vee \bar{P}$.
б) $A \wedge (B \Rightarrow A)$

в) $A \wedge B \vee (C \vee A)$

г) $A \Leftrightarrow B \wedge C$

д) $(A \wedge B) \wedge C$

2. Докажите тождества:

а) $A \vee B \equiv B \vee A$

в) $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$

г) $A \wedge (A \vee B) \equiv A$

д) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

е) $A \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$

Тема 3 «Алгебра предикатов»

Упражнение 1

Среди следующих предложений выделить предикаты и указать область истинности для каждого из них

1. $x + 5 = 1$

Предикат, $I_p = \{-4\}$

2. При $x = 2$ выполняется равенство $x^2 - 1 = 0$

Не предикат, ложное высказывание

3. $x^2 - 2x + 1 = 0$

Предикат, $I_p = \{1\}$

4. Существует такое число x , что $x^2 - 2x + 1 = 0$

Не предикат, истинное высказывание

5. $x + 2 < 3x - 4$

Предикат, $I_p = \{3; \infty\}$

6. Однозначное число x кратно 3

Предикат, $I_p = \{0; 3; 6; 9\}$

7. $x + 2 - (3x - 4)$

Не предикат

8. $x^2 + y^2 > 0$

Предикат, областью истинности является вся координатная плоскость за исключением точки $(0; 0)$

Примеры:

Пример

1) Пусть $P(x)$ это предикат « x – вещественное число и $x^2 + 1 = 0$. Выразим словами высказывание $\exists x: P(x)$ и определим его истинность.

Это высказывание читается так: существует вещественное число x , удовлетворяющее уравнению $x^2 + 1 = 0$. Очевидно, что это утверждение ложно, так как $x^2 = -1$

В символьной форме это можно записать так: $\forall x \text{ не } P(x)$

Для общего предиката $P(x)$ есть следующие логические эквивалентности:

$$\text{Не } \exists x: P(x) \Leftrightarrow \forall x \text{ не } P(x)$$

$$\text{Не } \forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x: P(x)$$

Пример.

Предположим, что x и y – вещественные числа, а $P(x, y)$ обозначает предикат $x + y = 0$.
Выразить каждое из высказываний словами и определить их истинность.

а) $\forall x \quad \exists y: P(x, y)$

б) $\exists y \quad \forall x: P(x, y)$

а) Это высказывание говорит о том, что для любого вещественного числа x найдётся такое вещественное число y , что $x + y = 0$. Очевидно, это верно

б) Высказывание читается так: существует вещественное число y , что для любого вещественного числа x , что $x + y = 0$. Это, конечно, не так.

Т

Упражнение 2

На множестве $M = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ заданы предикаты:

$A(x) = "x \text{ не делится на } 5"$

$B(x) = "x \text{ - чётное число}"$

$C(x) = "x \text{ - простое число}"$

$D(x) = "x \text{ кратно } 3"$

Найти множества истинности следующих предикатов:

1. $C(x) \& B(x)$

$I_p = \{2\}$

2. $B(x) \& D(x)$

$I_p = \{6, 12, 18\}$

3. $A(x) \& \overline{D(x)}$

$I_p = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14, 16, 17, 19\}$

4. $A(x) \& B(x) \& D(x)$

$I_p = \{6, 12, 18\}$

5. $B(x) \vee C(x)$

$M - \{9, 15\}$

6. $B(x) \vee D(x)$

$I_B \cup \{3, 9, 15\}$ (U - значит объединение)

$B(x) \vee \overline{D(x)}$

7.

$I_B \cup \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

8. $C(x) \rightarrow A(x)$

$I_p = I_{C \vee A} = M - \{5\}$

$$9. A(x) \rightarrow B(x)$$

$$I_{\bar{A} \vee B} = I_{A \vee B} = M - \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$$

$$10. (A(x) \& D(x)) \rightarrow \overline{C(x)}$$

$$(A(x) \& D(x)) \rightarrow \overline{C(x)} \equiv \overline{A(x) \& D(x) \vee C(x)} \equiv \overline{A(x)} \vee \overline{D(x)} \vee \overline{C(x)} \equiv \overline{A(x) \& D(x) \& C(x)}$$

Упражнение 3

Записать схематически высказывания Козьмы Пруtkова

1. Иной певец подчас хрипнёт
2. Не всякому человеку даже гусарский мундир к лицу
3. В глубине всякой груди есть своя змея

Упражнение 4

Пусть $P(x)$ означает « x высокий», а $Q(x)$ – « x толстый», где x – какой-то человек.
Прочитайте высказывание:

$$\forall x (P(x) \text{ и } Q(x))$$

Любой человек высокий и толстый

Найти его отрицание среди следующих утверждений:

- а) найдётся некто короткий и толстой
- б) нет никого высокого и худого
- с) найдётся некто короткий или худой

Отрицание - в пункте с

Упражнение 5 (Самостоятельно)

Обозначим через x слово «кошка», а через $P(x)$ предикат «у x есть усы». Запишите каждое высказывание в символьной форме:

1. Усы есть у всех кошек

$$\forall x: P(x)$$

2. Найдётся кошка без усов

$$\exists x: \overline{P(x)}$$

3. Не бывает кошек с усами

$$\forall x: \overline{P(x)}$$

4. Записать отрицание второго высказывания в символьной форме

Отрицанием этого высказывания является первое

5. Записать отрицание последнего высказывания как символами так и словами

Найдётся кошка с усами

$$\exists x: P(x)$$

Тема 4 «Понятие множества»

Пример 1. Найти множество корней уравнения $(x-1)(2x-1)(2+x)=0$ **Решение.** Для того, чтобы произведение обращалось в ноль необходимо, чтобы хотябы один из его множителей обращался в ноль. Поэтому решением уравнения будут числа:

$$x_1=0, x_2=1, x_3=\frac{1}{2}, x_4=-2$$

Т.О. имеем множество решений $A = \{-2, 0, \frac{1}{2}, 1\}$

Пример 2. Найти множество делителей числа 25

Решение. Т.К. $25 = 5^2$ то число его делителей будет $2+1=3$; 1, 5, 25. Т.О. имеем множество делителей числа 25: $B = \{1, 5, 25\}$

Пример 3. Найти множество простых чисел до 20.

Решение. Натуральные числа, имеющие два натуральных делителя (1 и само число), называются простыми. Например, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 и т.д. Т.О., искомым множеством будет множество $C = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$

Пример 4. Найти множество действительных корней уравнения $x^2 + 1 = 0$.

Решение. Т.К. $x^2 \geq 0$, то уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных корней. Следовательно множеством действительных корней данного уравнения будет пустое множество: $A = \emptyset$

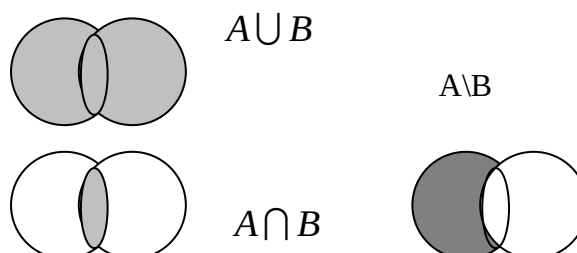
Пример 5. Найти объединение $A \cup B$, пересечение $A \cap B$, разность $A \setminus B$ множеств $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ и $B = \{4; 6; 7; 8; 9\}$.

Решение.

$$A \cup B = \{1; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\},$$

$$A \setminus B = \{1; 3; 5\},$$

$$A \cap B = \{7; 9\}.$$



Пример 6. Если $A = \{1; 4; 7; 9\}$ найдите $A \cup A$.

Решение. Из свойства объединения $A \cup A = \{1; 4; 7; 9\}$. Т.О., $A \cup A = A$.

Пример 7. Является ли множество $A = \{1; 3; 4\}$ подмножеством множества $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$?

Решение. Будет, т.к. каждый элемент множества A является элементом множества B : $1 \in B, 3 \in B, 4 \in B$. Т.о. по определению подмножеств $A \subset B$.

Пример 8. Найти все подмножества множества $B = \{1; 2; 3\}$

Решение. Запишем все одноэлементные подмножества множества B : $\{1\}, \{2\}, \{3\}$. Далее, запишем все двухэлементные подмножества: $\{1; 2\}, \{1; 3\}, \{2; 3\}$. И, наконец, трехэлементное: $\{1; 2; 3\}$. Множество $\emptyset$ является подмножеством всех множеств. Итак решением будет множество $B^* = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1; 2\}, \{1; 3\}, \{2; 3\}, \{1; 2; 3\}, \{\emptyset\}\}$.³³

Задачи для самостоятельного решения

³³ Использовано содержание и смысл из источника Herbert Gintis, Mathematical Literacy for Humanists, 2000, p.p11-12,14-15

1. Найти множество решений уравнения $x(x+1)(2x+1)(3-6x)=0$
2. Найти множество решений уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$
3. Найти множество делителей числа 16.
4. Найти множество делителей числа 35.
5. Найти множество простых чисел до 25.
6. Даны множества $A = \{a, б, в, г, д\}$ и $B = \{в, г, е, ж, з\}$. Найти объединение $A \cup B$, разность $A \setminus B$, пересечение $A \cap B$.
7. Даны множества $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ и $B = \{2; 4; 8; 10\}$. Найти объединение $A \cup B$, разность $A \setminus B$, пересечение $A \cap B$, симметрическую разность $A \Delta B$.
8. Если $A = \{1; 4; 7; 9\}$, найти $A \cup A$.
9. Найти все подмножества множества $\{1; 2; 3\}$
10. Найти множества $A \cap B$ и $A \setminus B$, если A : «нечетные числа», B : «простые числа», $X = (10, 11, \dots, 20)$, A и B подмножества множества X .
11. Найти множества $A \cup B$ и $B \setminus A$, если A : «четные числа», B : «составные числа», $X = (1, 2, \dots, 15)$, A и B подмножества множества X .
12. Найти множество $A \cup B$ и $A \setminus B$, если A : «числа, кратные 3», B : «простые числа», $X = (1, 2, \dots, 15)$, A и B подмножества множества X .
13. Даны множества: $A = [-5; 5)$, $B = (-1; 5]$, $C = [-1; 8)$. Найти множество $A \cup (B \setminus C)$.
14. Даны множества: $A = [0; 6)$, $B = (-2; 6]$, $C = [-2; 4)$. Найти множество $A \cap (B \cup C)$.
15. При помощи диаграмм Эйлера-Венна показать справедливость равенства: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Задания на дом:

1. Найти множество решений уравнения $(x-4)(3x+1)(2x-1)(1-x)=0$
2. Найти множество решений уравнения $x^2 + x - 12 = 0$
3. Найти множество натуральных делителей числа 42.
4. Найти множество натуральных делителей числа 135.
5. Найти множество простых чисел до 50.
6. Даны множества $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{b, c, e, r\}$. Найти объединение $A \cup B$, разность $A \setminus B$, пересечение $A \cap B$.
7. Даны множества $A = \{1; 5; 9; 13; 17\}$ и $B = \{1; 3; 5; 7\}$. Найти объединение $A \cup B$, разность $A \setminus B$, пересечение $A \cap B$, симметрическую разность $A \Delta B$.
8. Найти все подмножества множества $\{1; 2; 3; 4\}$
9. Найти множества $A \cap B$ и $A \setminus B$, если A : «составные числа», B : «числа, кратные 4», $X = (1, 2, \dots, 20)$, A и B подмножества множества X .
10. Даны множества: $A = [-7; 10)$, $B = (-1; 5]$, $C = [1; 9)$. Найти множество $A \cup (B \setminus C)$.

«Операции над множествами»

Примеры прямого произведения множеств

1. Даны множества 1) $A = \{a, b, s\}$, $B = \{3; 5; 9\}$;
2) $A = \{x; y\}$, $B = \{x, y, z\}$; 3) $A = \{3; 5\}$, $B = \{1; 5\}$

Найти $A \times B$, $B \times A$.

2. Показать геометрическое изображение прямого произведения на декартовой системе координат:

- 1) $[0; 1] \times [0; 1]$; 2) $[-1; 1] \times [2; 3]$;
3) $[1; 3] \times (-\infty; 3]$; 4) $[0; 3] \times [1; +\infty)$;
5) $[1; 4] \times (-\infty; +\infty)$; 6) $[-1; 5] \times \{2, 3, 4\}$;
7) $[0; +\infty) \times \{1; 3\}$; 8) $(-\infty; +\infty) \times \{1, 2, 3\}$.

3. а) Для любых множеств A, B и C доказать равенства:

- 1) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$; 2) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
3) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$; 4) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$
5) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$; 6) $A \cup B \subset C \Rightarrow A \times B = (A \times C) \cap (C \times B)$;
7) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

б) Для любых множеств A, B, C и D проверить выполнимость равенств?

- 1) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$; 2) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$;
3) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

4. Даны множества $A = \{0, \diamond\}$, $B = \{1, 2, 3\}$

$$A \times B = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (\diamond, 1), (\diamond, 2), (\diamond, 3)\}$$

$$B \times A = \{(1, 0), (1, \diamond), (2, 0), (2, \diamond), (3, 0), (3, \diamond)\}.$$

Тогда справедливо тождество $A \times B \neq B \times A$

Самостоятельная работа

Для бинарных соотношений $R = A \times B$, $S = B \times A$ найти $R \circ S$, $S \circ R$, R^2 , S^2 :

- 5.1. $A = \{0, 2, 4\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$;
5.2. $A = \{\square, \diamond\}$, $B = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$;
5.3. $A = \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, $B = \{\cap, \cup, \in, \subset\}$.
5.4. $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{11, 13, 15\}$;
5.5. $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{12, 14, 16\}$;
5.6. $A = \{7, 9, 11\}$, $B = \{17, 19\}$;
5.7. $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{10, 13, 18\}$;
5.8. $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 5\}$;
5.9. $A = \{1, 4, 5\}$, $B = \{1, 4, 5\}$;
5.10. $A = \{11, 13, 14\}$, $B = \{11, 12, 13\}$;
5.11. $A = \{5, 6, 7\}$, $B = \{1, 11, 15\}$;
5.12. $A = \{10, 13, 15\}$, $B = \{1, 11, 15\}$;
5.13. $A = \{4, 5\}$, $B = \{17, 18, 19\}$;

Тема 6 Бинарные операции и их свойства

Для бинарных отношений $R, S, T \subset A \times A$

Решение.

$\forall (x,y) \in (R \circ (S \setminus T)) \Rightarrow \exists z \in A, (x,z) \in (S \setminus T) \wedge (z,y) \in R \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x,z) \in S \wedge (x,z) \notin T \wedge (z,y) \in R \Rightarrow (x,z) \in S \wedge (z,y) \in R \wedge$
 $\wedge (x,z) \notin T \wedge (z,y) \in R \Rightarrow (x,y) \in (R \circ S) \wedge (x,y) \notin (R \circ T) \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x,y) \in ((R \circ S) \setminus (R \circ T)).$ Demak, $R \circ (S \setminus T) \subset (R \circ S) \setminus (R \circ T)$;
2) $\forall (x',y') \in ((R \circ S) \setminus (R \circ T)) \Rightarrow (x',y') \in (R \circ S) \wedge (x',y') \notin (R \circ T) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists z' \in A, ((x',z') \in S \wedge (z',y') \in R) \wedge ((x',z') \notin T \wedge (z',y') \in R) \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x',z') \in S \wedge (x',z') \notin T \wedge (z',y') \in R \Rightarrow (x',z') \in (S \setminus T) \wedge (z',y') \in R \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x',y') \in (R \circ (S \setminus T)).$ Demak, $(R \circ S) \setminus (R \circ T) \subset R \circ (S \setminus T).$

Доказано, что $R \circ (S \setminus T) = (R \circ S) \setminus (R \circ T)$

2. Для множеств $A = \{1,2\}$, $B = \{2,5\}$ найти $R = A \times B$, $S = B \times A$ и для них составить $R \circ S$, $S \circ R$, R^2 , S^2 .

Решение. Найдем по определению прямое произведение множеств и для них составим бинарные отношения:

$$R = A \times B = \{(1,2), (1,5), (2,2), (2,5)\};$$

$$S = B \times A = \{(2,1), (2,2), (5,1), (5,2)\}$$

$$R \circ S = \{(2,2), (2,5), (5,2), (5,5)\}$$

$$S \circ R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

$$R^2 = R \circ R = \{(1,2), (1,5), (2,2), (2,5)\};$$

$$S^2 = S \circ S = \{(2,1), (2,2), (5,1), (5,2)\}.$$

Самостоятельное решение примеров

3. Доказать для бинарных отношений R, S, T следующие утверждения:

$$(R \cap S)^\cup = R^\cup \cap S^\cup.$$

$$(R \cup S)^\cup = R^\cup \cup S^\cup.$$

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T.$$

$$(R \circ S)^\cup = S^\cup \circ R^\cup.$$

$$(R \cup S) \circ T = R \circ T \cup S \circ T.$$

$$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T).$$

$$(R \cap S) \circ T \subset R \circ T \cap S \circ T.$$

$$R \circ (S \cap T) \subset R \circ S \cap R \circ T.$$

$$\text{Dom}(R^\cup) = \text{Im } R.$$

$$\text{Im}(R^\cup) = \text{Dom } R.$$

$$\text{Dom}(R \circ S) \subset \text{Dom } S.$$

$$\text{Im}(R \circ S) \subset \text{Im } R.$$

$$(R \setminus S)^\cup = R^\cup \setminus S^\cup.$$

Если R, S транзитивны $\Rightarrow R \cup S$ – транзитивно.

S – рефлексивно $\Rightarrow S^\cup$ – рефлексивно.

R, S – симметричны $\Rightarrow R \cup S$ – симметрично.

R, S – эквивалентны $\Rightarrow R^\cup, S^\cup$ – эквивалентны.

R – линейно зависимо $\Rightarrow R^\cup$ – линейно зависимо.

R, S – антирефлексивны $\Rightarrow R \cup S$ – антирефлексивно.

S – антисимметрично $\Rightarrow S^\cup$ – антисимметрично.

$$A \subset B \Rightarrow A \times C \subset B \times C.$$

$$A \cup B \subset C \Rightarrow A \times B = (A \times B) \cap (C \times B).$$

$$(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C \Rightarrow A = B = C.$$

4. Проверить выполнимость свойств бинарных отношений заданных в множестве $M = \{1, 2, \dots, 20\}$ и начертить графы:

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x^2 + y^2 = 10 \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge (x - y) \vdots 3 \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge (x - y) \vdots 4 \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x \leq y + 2 \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x \leq y + 3 \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x + y = 15 \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x \leq y + 1 \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge |x| = |y| \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x \vdots y \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x < y \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x \leq y \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x \neq y \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x^2 + x = y^2 + y \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x^2 + y^2 = 1 \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x \vdots y \vee x < y \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge (x - y) \vdots 2 \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x + y = 12 \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x + y \leq 7 \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x + y = 20 \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x + y \geq 20 \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge (x + y) \vdots 5 \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge (x > y \wedge x \vdots 3) \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x + y \geq 10 \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x - y \geq 5 \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x + y = 10 \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x + y = 21 \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x - y = 2 \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x - y = -2 \}.$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x - y = 4 \}.$$

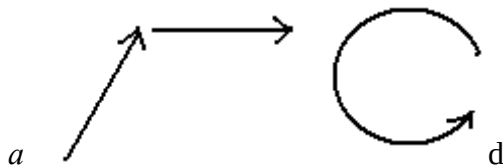
$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x - y = 6 \}.$$

Тема 7 «Графы. Маршруты в графах. Деревья.»

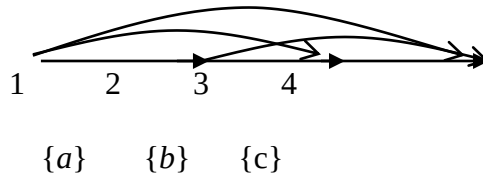
Примеры графов

1–пример. Изобразить отношения $R = \{(a, b), (b, c), (d, d)\}$

b
 c



2 –пример. R - бинарное отношение. $A = \{1,2,3,4\}$ Пусть в множестве A задано отношение « $\prec$ ». Тогда отношение « $\prec$ » можно изобразить с помощью графа следующим образом:



Для самостоятельного решения
3-

In 3 and 4, draw pictures of the specified graphs.

3. Graph G has vertex set $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ and edge set $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, with edge-endpoint function as follows:

Edge	Endpoints
e_1	$\{v_1, v_2\}$
e_2	$\{v_1, v_2\}$
e_3	$\{v_2, v_3\}$
e_4	$\{v_3\}$

4. Graph H has vertex set $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ and edge set $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ with edge-endpoint function as follows:

Edge	Endpoints
e_1	$\{v_1\}$
e_2	$\{v_2, v_3\}$
e_3	$\{v_2, v_3\}$
e_4	$\{v_1, v_5\}$

пример. Нарисовать графы для следующих примеров³⁴

³⁴ Использовано содержание и смысл из источника Susanna S. Epp. Discrete Mathematics with Applications, Fourth Edition. Printed in Canada 2011p.p.639

In 5–7, show that the two drawings represent the same graph by labeling the vertices and edges of the right-hand drawing to correspond to those of the left-hand drawing.

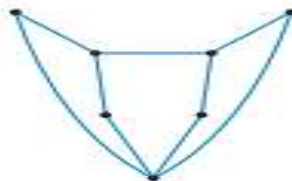
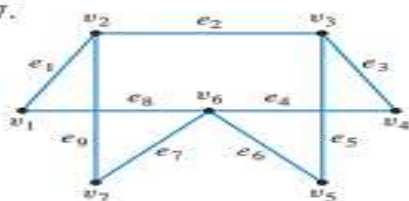
5.



6.



7.



Тема 8 «Функция. Предел функции. Предел. Непрерывность функции»

Пример 1. Найти область определения функции $y = 1/(x^2 - 5x + 6)$.

Решение: Найдем значения x , в которых знаменатель обращается в нуль.

$x^2 - 5x + 6 = 0$. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Функция не существует в этих точках. Областью определения является объединение таких множеств: $(-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$.

Пример 2. Найти область определения функции $y = \log_3(x - 1)$.

Решение: $x - 1 > 0$, $x > 1$. Запишем решение в виде интервала: $(1, \infty)$ – область определения функции.

Пример 3. Дана функция $f(x) = |x + 2|/x - 1$. Найти значения функции в точках $x = -2$, $x = -3$, $x = 1$, $x = 0$.

Решение: $f(-2) = |-2+2|/(2-1) = 0/1 = 0$; $f(-3) = |-3+2|/(3-2) = |-1|/1 = 1$;

$f(1) = |1+2|/(1-1) = 3/0$, точка $x = 1$ в область определения функции не входит, так как знаменатель в этой точке обращается в 0.

$f(0) = |0+2|/(0-1) = 2/-1 = -2$.

Пример 4. Дана функция $f(x) = 3x^2 + x - 1$.

Найти значение этой функции при 1) $x = a^2 - 1$, 2) $x = 1/t$.

Решение: 1) $f(a^2 - 1) = 3(a^2 - 1)^2 + a^2 - 1 - 1 = 3a^4 - 6a^2 + 3 + a^2 - 2 = 3a^4 - 5a^2 + 1$.

2) $f(1/t) = 3(1/t^2) + 1/t - 1 = (3 + t - t^2)/t^2$.

Нахождение пределов функций.

Пример 1. Найти предел.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1+4}{x-1} \right)^{x+3} = \left\{ \begin{array}{l} y = x-1 \\ x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty \end{array} \right\} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{y+4}{y} \right)^{y+4} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y} \right)^y \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y} \right)^4 = \\ &= \left\{ z = \frac{y}{4} \right\} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^{4z} = \left(\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^z \right)^4 = e^4 \end{aligned}$$

Пример 2. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}$.

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

$$x^2 - 6x + 8 = 0;$$

$$D = 36 - 32 = 4;$$

$$x_1 = (6 + 2)/2 = 4;$$

$$x_2 = (6 - 2)/2 = 2;$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0;$$

$$D = 64 - 48 = 16;$$

$$x_1 = (8 + 4)/2 = 6;$$

$$x_2 = (8 - 4)/2 = 2;$$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{x-6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Пример 3. Найти предел.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{x^2 - x}$ домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+x^2 - 1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2})} =$$

$$= \frac{2}{-1 \cdot (1+1)} = -1.$$

Пример4. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \{x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)\} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}$$

Пример5. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители.

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 &= (x-1)(x-2) \\ x^3 - 6x^2 + 11x - 6 &= (x-1)(x-2)(x-3), \text{ т.к.} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x - 1 \\ x^3 - x^2 & \\ \hline -5x^2 + 11x & \\ -5x^2 + 5x & \\ \hline 6x - 6 & \\ 6x - 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = -2$

Пример 6. Найти предел.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2h) - 2\sin(a+h) + \sin a}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\sin \frac{2a+2h}{2} \cos \frac{2h}{2} - 2\sin(a+h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\sin(a+h)(\cosh - 1)}{h^2} = \\ &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \sin(a+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2(h/2)}{4(h/2)^2} = 2\sin a \cdot (-1/2) = -\sin a \end{aligned}$$

Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = 1$$

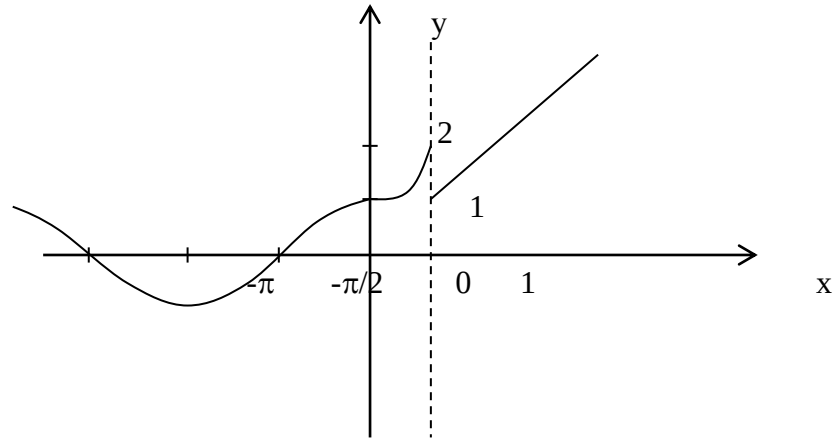
$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 1$$

в точке $x = 0$ функция непрерывна

в точке $x = 1$ точка разрыва 1 – го рода



Упражнения для самостоятельного решения:

1. Постройте графики следующих функций. Найдите области определения и области значений этих функций.

1) $f(x) = \cos x + 3$;

2) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;

3) $f(x) = x^2 + 4x + 5$;

4) $f(x) = \arcsin x + \frac{\pi}{2}$;

5) $f(x) = 3^{x-2}$

3. Исследовать на четность и монотонность функции:

1) $f(x) = x^3 + 1$

2) $f(x) = 3^{x-2}$

3) $f(x) = \sin 2x$

4. Найти пределы функций:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 2x^2 + 5x - 6}{x^3 + 2x^2 + 7x - 1}$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^3 + 4x + 5)(x^2 + x + 1)}{(x + 2)(x^4 + 2x^3 + 7x^2 + x - 1)}$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$

5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 12}$

6) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4 + x + x^2} - 2}{x + 1}$

Задания на дом:

1. Постройте графики следующих функций. Найдите области определения и области значений этих функций.

1) $f(x) = \sin x - 3$;

2) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$;

3) $f(x) = x^2 + 4x + 4$;

4) $f(x) = \arcsin x + 5$;

5) $f(x) = 0,5^{x-2}$

2. Исследовать на четность и монотонность функции:

1) $f(x) = \cos 2x - \cos 6x$

2) $f(x) = x^5 - 3$

3) $f(x) = 3^{x+4}$

4) $f(x) = \ln(x-3)$

3. Найти пределы функций:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 2x^2 + 5x - 6}{x^3 + 2x^2 + 7x - 1}$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^3 + 4x + 5)(x^2 + x + 1)}{(x + 2)(x^4 + 2x^3 + 7x^2 + x - 1)}$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$

5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 12}$

6) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4 + x + x^2} - 2}{x + 1}$

4. Исследовать на непрерывность функции и определить тип разрыва (если функция терпит разрыв):

1) $y = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{если } x \leq 0 \\ x - 3, & \text{если } x > 0 \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} x^3 - 2x + 1, & \text{если } x \leq 2 \\ 2x + 1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} x^3 - 2x + 1, & \text{если } x \leq 2 \\ 2x + 1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$

Тема 9 «Производная и дифференциал функции»

Найти производную функции $y = x^2 - 3x + 1$

Решение: Используя правила дифференцирования функций $(kf(x))' = kf'(x)$, $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ и формулы нахождения производных от константы $(c)' = 0$ и степенной функции $(x^n)' = nx^{n-1}$ имеем:

$$y' = (x^2 - 3x + 1)' = (x^2)' + (-3x)' + (1)' = 2x - 3$$

2. Найти производные функций:

$$a) y = \sin x(x + 3) \quad б) y = \frac{2x}{x-1}$$

Решение: Воспользуемся правилами дифференцирования:

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$a) y' = (\sin x(x + 3))' = (\sin x)'(x + 3) + \sin x(x + 3)' = \cos x(x + 1) + \sin x$$

$$б) y' = \left(\frac{2x}{x-1}\right)' = \frac{(2x)'(x-1) - 2x(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = -\frac{2}{x^2 - 2x + 1}$$

Упражнения решения:

1. Найти производные от следующих функций:

$$1) y = 3x^4 - 2x^2 + 4x - 7.$$

$$2) y = \frac{3}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 5.$$

$$3) y = \cos x(1 - 3x^2)$$

$$4) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

Самостоятельная работа по вариантам

ВАРИАНТ-1

$$1) \text{ Найти предел функции: } \lim_{x \rightarrow 2} (5x^3 + 6x^2 + x - 5)$$

$$2) \text{ Найти производную функции: } y = 3\cos^2 5x$$

ВАРИАНТ-2

$$1) \text{ Найти предел функции: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x - 3}{2x + 8}$$

$$2) \text{ Найти производную функции: } y = 5\operatorname{tg}^3 7x$$

Задания на дом:

1. Найти производные от следующих функций:

$$1) y = 2x^5 - 3x^3 + 4x - 6.$$

$$2) y = \frac{7}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 7.$$

$$3) y = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c - \text{постоянные}).$$

$$4) y = x^n + nx^3 + 3n \quad (n - \text{постоянное}).$$

Тема 10. Первообразная функция. Неопределенный интеграл и его свойства

1. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x^3}$

Решение: $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$

Решение: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$

3) $\int 2^x dx$

Решение: Используя интеграл $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ($a=2$), находим:

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$

Решение: Подставляя $a = \sqrt{5}$ в табличный интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, (a > 0), \text{ получим:}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C$$

2. Используя таблицу и основные свойства неопределенного интеграла,

найти интеграл: $\int (3 \cdot 5^x - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 7) dx$

Решение:

$$\int (3 \cdot 5^x - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 7) dx = \int 3 \cdot 5^x dx + \int \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx + \int 7 dx = 3 \int 5^x dx - 2 \int x^{-\frac{1}{3}} dx + 7 \int dx =$$
$$\frac{3 \cdot 5^x}{\ln 5} - 2 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + 7x + C = \frac{3 \cdot 5^x}{\ln 5} - 3 \cdot \sqrt[3]{x^2} + 7x + C$$

3. Интегрирование с помощью замены переменной, по частям

1. $\int e^{x^2} dx$

Решение. Полагая $t = x^2$, имеем $dt = 2x dx$, так что

$$\int e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

2. $\int \frac{x dx}{1+x^4}$

Решение. Полагая $t = x^2$, имеем $dt = 2x dx$, так что

$$\int \frac{x dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \arctgt + C = \frac{1}{2} \arctg x^2 + C$$

3. $\int \sin^5 x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = \sin x \\ du = \cos x dx \end{array} \right| = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{\sin^6 x}{6} + C$

5. $\int x^3 \ln x dx$

Решение

$$\int x^3 \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^3 dx, v = \frac{1}{4} x^4 \end{array} \right| = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C$$

6. $\int \arctg x dx$

Решение. Принимая $dx=dv$, получим

$$\int \arctg x dx = x \arctg x - \int x d \arctg x = x \arctg x - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

3. $\int \ln |x| dx$

Упражнения для самостоятельного решения:

1. Найти интегралы:

1) $\int x^{10} dx$

4) $\int \frac{dx}{x^2 + 9}$

2) $\int \sqrt[4]{x} dx$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3}}$

3) $\int \frac{dx}{x^7}$

6) $\int \frac{dx}{x^2 - \frac{1}{2}}$

2. Найти интегралы:

1) $\int \frac{x^4 + x^2 - 6x}{x^3} dx$

2) $\int \left(\frac{5}{x} - \frac{10}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{3}{x^2 + 7} \right) dx$

$$3) \int \sqrt{x}(x^2 + 1)dx$$

$$4) \int \frac{3 + \sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{4 - x^2}} dx$$

3.Найти интегралы:

$$1) \int \cos 2x dx$$

$$2) \int (9x + 2)^{17} dx$$

$$3) \int \frac{dx}{8x - 1}$$

$$4) \int 4^{3-5x} dx$$

4.Найти интегралы:

$$1. \int \sqrt[5]{(8-3x)^6} dx$$

$$2. \int \sqrt{(8-2x)} dx$$

$$3. \int \frac{m}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}} dx$$

$$4. \int x^3 \ln x dx$$

Задания на дом:

1.Найти интегралы:

$$1) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x}}$$

$$2) \int \frac{dx}{x^2 + 3}$$

$$3) \int \frac{1}{5^x} dx$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$$

2.Найти интегралы:

$$1) \int \left(x + \frac{2}{x} \right)^2 dx$$

$$2) \int \frac{dx}{4x^2 + 1}$$

$$3) \int \left(7^x - \frac{8}{x} + 4 \cos x \right) dx$$

$$4) \int \left(\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} - \sqrt[3]{x} - \frac{2}{x^4} \right) dx$$

3.Найти интегралы:

1) $\int \sin 7x dx$

2) $\int \sqrt[5]{2x-8} dx$

3) $\int \frac{dx}{9x+7}$

4) $\int 3^{2-11x} dx$

4.Найти интегралы:

1. $\int \sin^3 x \cos x dx$

2. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

3. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$

4. $\int \cos^3 x \sin 2x dx$

Тема 11. Определенный интеграл и его приложения.

1.Используя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить интеграл:

$$\int_1^4 x^2 dx$$

Решение: Подынтегральная функция на отрезке $[1;4]$ имеет первообразную

$$F(x) = \frac{x^3}{3}. \text{ Тогда по формуле имеем: } \int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 21$$

2.Вычислить интеграл: $\int_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$

Решение:

$$\int_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \int_{-4}^{-2} \frac{d(x+2)}{\sqrt{3^2-(x+2)^2}} = \arcsin \frac{x+2}{3} \Big|_{-4}^{-2} = \arcsin 0 - \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) = \arcsin \frac{2}{3}$$

3.Вычислить: $\int_1^2 \frac{x^4+1}{x^3(x^2+1)} dx$

Решение: Под знаком интеграла стоит рациональная дробь. Для нахождения первообразной используются правила.

Применим их. Для этого разложим подынтегральную функцию на сумму

простейших дробей: $\frac{x^4+1}{x^3(x^2+1)} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$. Тогда,

$$x^4+1 = A(x^2+1) + Bx(x^2+1) + Cx^2(x^2+1) + (Dx+E)x^3, \text{ т.е.}$$

$$x^4+1 = (C+D)x^4 + (B+E)x^3 + (A+C)x^2 + Bx + A \quad \text{Отсюда}$$

$$\begin{cases} C+D=1, \\ B+E=0, \\ A+C=0, \\ B=0, \\ A=1. \end{cases}$$

Находим, что $A=1$, $B=0$, $C=-1$, $D=2$, $E=0$. Итак, $\frac{x^4+1}{x^3(x^2+1)} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1}$

Первое и второе слагаемые имеют табличные интегралы, третье- “почти табличные”, легко вычисляются после внесения под знак дифференциала $2x$.

Поэтому

$$\int_1^2 \frac{x^4+1}{x^3(x^2+1)} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} \right) dx = \left(-\frac{1}{2x^2} - \ln x + \ln(x^2+1) \right) \Big|_1^2 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \ln 2 + \ln 1 + \ln 5 - \ln 2 = \ln \frac{5}{4} + \frac{3}{8}$$

Упражнения для самостоятельного решения:

1) Используя формулу Ньютона-Лейбница, найти:

1) $\int_0^{\pi} (2x + \sin 2x) dx$

2) $\int_0^{\lg 2} 2^x \cdot 5^x dx$

3) $\int_2^5 \frac{dx}{2x-3}$

4) $\int_1^2 \frac{x+2}{3-x} dx$

2) Найти интегралы тригонометрических функций:

1) $\int_0^{\pi} (\cos^3 x - \frac{3}{4} \cos x) dx$

2) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x - \sin^4 x}$

3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 x dx$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \cdot \cos 8x dx$

3) Найти интегралы от рациональных дробей:

1) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2+x}$

2) $\int_1^3 \frac{dx}{x^3+x}$

$$3) \int_1^5 \frac{x^2 + 5}{x - 2} dx$$

$$4) \int_1^3 \frac{dx}{x^2 + 6x + 10}$$

Задания на дом:

Вычислить следующие интегралы:

$$1) \int_1^{e^2} \frac{\ln^3 x}{3x} dx$$

$$2) \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^3 x dx$$

$$4) \int_0^1 \frac{4 \arctg x - x}{1 + x^2} dx$$

$$5) \int_1^e \frac{\sin \ln x}{x} dx$$

$$6) \int_0^{\frac{\pi}{3}} tg x \cdot \ln \cos x dx$$

$$7) \int_{-1}^0 \frac{3^x - 2^x}{6^x} dx$$

$$8) \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$$

$$9) \int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x+2}}$$

$$10) \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{4x-2} dx$$

Тема 12. Векторы. Векторное пространство. Линейные операции над векторами

Векторы и операции над векторами

1. Даны векторы $\bar{x} = (3; -4; 2; 5)$, $\bar{y} = (-1; 3; -7; 2)$. Найти вектор $3\bar{x} + 2\bar{y}$

Решение: $3\bar{x} + 2\bar{y} = (9; -12; 6; 15) + (-2; 6; -14; 4) = (7; -6; -8; 19)$;

2. Даны векторы $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. Вектор $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ - медиана треугольника OAB . Найдите координаты вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\mathbf{b}, \mathbf{c}$.

Решение. Сначала рассмотрим геометрическое решение (рис. 1).

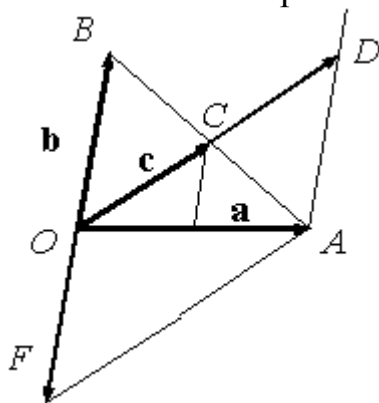


Рис. 1. Геометрическое разложение вектора

Проведем через конец вектора $\mathbf{a}$ прямую параллельно вектору $\mathbf{b}$ до пересечения с продолжением вектора $\mathbf{c}$. Получим точку пересечения D . Легко видеть, что $\overrightarrow{OD} = 2\mathbf{c}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$. Проведем через точку A прямую параллельно вектору $\mathbf{c}$ до пересечения с продолжением вектора $\mathbf{b}$. Получим точку F . Очевидно, что $|OF| = |AD|$, то есть $\overrightarrow{OF} = -\mathbf{b}$. Таким образом, $\mathbf{a} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} = 2\mathbf{c} + (-\mathbf{b}) = (-1)\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$. Получим $\mathbf{a} = (-1; 2)$.

Аналитическое решение. Получим какое-нибудь уравнение, связывающее векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Для этого построим треугольник OAB до параллелограмма (рис. 2).

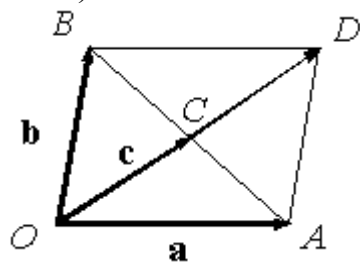


Рис. 2

Тогда, $\overrightarrow{OD} = 2\mathbf{c}$, $\overrightarrow{OD} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Получим равенство $2\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Откуда $\mathbf{a} = -\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, то есть $\mathbf{a} = (-1; 2)$.

Ответ: $\mathbf{a} = (-1; 2)$.

Задачи для самостоятельного решения

1) По данным векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ построить каждый из следующих векторов: 1) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$; 2) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$; 3) $\mathbf{b} - \mathbf{a}$; 4) $-\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

2) Даны: $|\mathbf{a}| = 13$, $|\mathbf{b}| = 19$ и $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 24$. Вычислить $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

3) Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ взаимно перпендикулярны, причём $|\mathbf{a}| = 5$ и $|\mathbf{b}| = 12$. Определить $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ и $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

4) Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют угол $\varphi = 60^\circ$, причём $|\mathbf{a}| = 5$ и $|\mathbf{b}| = 8$. Определить $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ и $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

5) По данным векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ построить каждый из следующих векторов: 1) $3\mathbf{a}$; 2) $-\frac{1}{2}\mathbf{b}$; 3) $2\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$; 4) $\frac{1}{2}\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.

6) В треугольнике ABC вектор $\overline{AB} = \mathbf{m}$ и вектор $\overline{AC} = \mathbf{n}$. Построить каждый из следующих векторов: 1) $\frac{\mathbf{m} + \mathbf{n}}{2}$, 2) $\frac{\mathbf{m} - \mathbf{n}}{2}$, 3) $\frac{\mathbf{n} - \mathbf{m}}{2}$, 4) $-\frac{\mathbf{m} + \mathbf{n}}{2}$.

7) Даны два вектора $\mathbf{a} = \{3; -2; 6\}$ и $\mathbf{b} = \{-2; 1; 0\}$. Определить проекции на координатные оси следующих векторов: 1) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$; 2) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$; 3) $2\mathbf{a}$; 4) $-\frac{1}{2}\mathbf{b}$; 5) $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$; 6) $\frac{1}{3}\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

8) Даны три вектора $\mathbf{p} = \{3; -2; 1\}$, $\mathbf{q} = \{-1; 1; -2\}$, $\mathbf{r} = \{2; 1; -3\}$. Найти разложение вектора $\mathbf{c} = \{11; -9; 5\}$ по базису $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$.

Задания на дом:

1. Даны: $|\mathbf{a}| = 11$, $|\mathbf{b}| = 23$ и $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 30$. Определить $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

2. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют угол $\varphi = 120^\circ$, причём $|\mathbf{a}| = 3$ и $|\mathbf{b}| = 5$. Определить $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ и $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

3. По данным векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ построить каждый из следующих векторов: 1) $-2\mathbf{a}$; 2) $\frac{1}{3}\mathbf{b}$; 3) $-2\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$; 4) $\frac{1}{2}\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

4. В треугольнике ABC вектор $\overline{AB} = \mathbf{m}$ и вектор $\overline{AC} = \mathbf{n}$. Принимая в качестве масштабной единицы $\frac{1}{2}[\mathbf{n}]$, построить также векторы: 1) $[\mathbf{n}]\mathbf{m} + [\mathbf{m}]\mathbf{n}$, 2) $[\mathbf{n}]\mathbf{m} - [\mathbf{m}]\mathbf{n}$.

Скалярное произведение векторов. Свойства скалярного произведения

1. Даны векторы $\bar{\mathbf{x}} = (3; -4; 2; 5)$, $\bar{\mathbf{y}} = (-1; 3; -7; 2)$. Найти:

а) Скалярное произведение $\bar{\mathbf{x}} * \bar{\mathbf{y}}$

в) Угол между векторами $\bar{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{y}}$

Решение:

а) $\bar{\mathbf{x}} * \bar{\mathbf{y}} = -3 - 12 - 14 + 10 = -19$

$$в) \cos \varphi = \frac{(\vec{x}; \vec{y})}{|\vec{x}| |\vec{y}|}; \quad |\vec{x}| = \sqrt{9+16+4+25} = \sqrt{54}; |\vec{y}| = \sqrt{1+9+49+4} = \sqrt{63};$$

$$\cos \varphi = \frac{-19}{\sqrt{54}\sqrt{63}}; \quad \varphi = -\arccos \frac{-19}{\sqrt{54}\sqrt{63}} = -\arccos \frac{-19}{9\sqrt{42}}.$$

2. Даны вершины треугольника: A(2;-1;3), B(1;1;1), C(0;0;5). Найдите длину стороны AB и $\angle ABC$.

Решение:

$$\vec{BA} = (1; -2; 2) \quad \vec{BC} = (-1; -1; 4) \quad AB = |\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$$

$$\cos \angle ABC = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} \quad \vec{BA} \cdot \vec{BC} = 1 \cdot (-1) + (-2)(-1) + 2 \cdot 4 = 9$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\cos \angle ABC = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\angle ABC = 45^\circ.$$

Ответ: $AB = 3$, $\angle ABC = 45^\circ$.

3. Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$, где $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ - единичные векторы, угол между которыми равен 60° .

Решение. В этой задаче не заданы координаты векторов в ортонормированном базисе i, j, k . Сделав схематический рисунок (рис. 3),

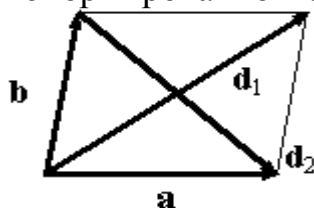


Рис 3

убеждаемся, что вектор $\mathbf{d}_1$, соответствующий одной диагонали параллелограмма, находится по формуле $\mathbf{d}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, а другой $-\mathbf{d}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. Отсюда $\mathbf{d}_1 = 3\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{d}_2 = \mathbf{m} + 3\mathbf{n}$. В силу свойства скалярного произведения получим:

$$|\mathbf{d}_1|^2 = \mathbf{d}_1^2 = (3\mathbf{m} - \mathbf{n})(3\mathbf{m} - \mathbf{n}) = 9\mathbf{m}^2 - 3\mathbf{m}\mathbf{n} - 3\mathbf{m}\mathbf{n} + \mathbf{n}^2 =$$

$$= 9|\mathbf{m}|^2 - 6\mathbf{m}\mathbf{n} + |\mathbf{n}|^2 = 9 - 6 \cdot 1 \cdot 1 \cos 60^\circ + 1 = 7.$$

Аналогично,

$$\mathbf{d}_2 = (\mathbf{m} + 3\mathbf{n})(\mathbf{m} + 3\mathbf{n}) = \mathbf{m}^2 + 6\mathbf{m}\mathbf{n} + 9\mathbf{n}^2 = 1 + 6 \cdot 1 \cdot 1 \cos 60^\circ + 9 = 13$$

Ответ: 7 и 13.

Задачи для самостоятельного решения:

- 1) Векторы a и b образуют угол $\varphi = \frac{2}{3}\pi$; зная, что $|a| = 3$, $|b| = 4$, вычислить: 1) ab ; 2) a^2 ; 3) b^2 ; 4) $(a + b)^2$; 5) $(3a - 2b)(a + 2b)$; 6) $(a - b)^2$; 7) $(3a + 2b)^2$.
- 2) Векторы a и b взаимно перпендикулярны; вектор c образует с ними углы, равные $\frac{\pi}{3}$, зная, что $|a| = 3$, $|b| = 5$, $|c| = 8$, вычислить: 1) $(3a - 2b)(b + 3c)$; 2) $(a + b + c)^2$; 3) $(a + 2b - 3c)^2$.
- 3) Доказать справедливость тождества
$$(a + 6)^2 + (a - 6)^2 = 2(a^2 + b^2)$$
и выяснить его геометрический смысл.
- 4) Даны единичные векторы a , b и c , удовлетворяющие условию $a + b + c = 0$. Вычислить $ab + bc + ca$.
- 5) Даны три вектора a , b и c , удовлетворяющие условию $a + b + c = 0$. Зная, что $|a| = 3$, $|b| = 1$ и $|c| = 4$, вычислить $ab + bc + ca$.
- 6) Векторы a , b , c попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 60° . Зная, что $|a| = 4$, $|b| = 2$ и $|c| = 6$, определить модуль вектора $p = a + b + c$.

Задание на дом:

- 1) Векторы a и b образуют угол $\theta = \frac{\pi}{4}$; зная, что $|a| = 3$, $|b| = 4$, вычислить: 1) ab ; 2) a^2 ; 3) b^2 ; 4) $(a + b)^2$; 5) $(3a - 2b)(a + 2b)$; 6) $(a - b)^2$; 7) $(3a + 2b)^2$.
- 2) Векторы a и b взаимно перпендикулярны; вектор c образует с ними углы, равные $\frac{\pi}{6}$, зная, что $|a| = 3$, $|b| = 5$, $|c| = 8$, вычислить: 1) $(3a - 2b)(3a + 2b)$; 2) $(a + b + c)^2$; 3) $(a + 2b - 3c)^2$.
- 3) Даны единичные векторы a , b и c , удовлетворяющие условию $a + b + c = 0$. Вычислить $ab + bc + ca$.
- 4) Даны три вектора a , b и c , удовлетворяющие условию $a + b + c = 0$. Зная, что $|a| = 3$, $|b| = 1$ и $|c| = 4$, вычислить $ab + bc + ca$. Векторы a , b , c попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 30° . Зная, что $|a| = 3$, $|b| = 4$ и $|c| = 5$, определить модуль вектора $p = a + b + c$.

Тема 13. Кривые второго порядка Кривые второго порядка. Окружность, эллипс, гипербола, парабола

1. Нарисуйте кривую $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$.

Решение. Выделив полные квадраты, получим

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 2^2.$$

Итак, центр окружности $M_0(1; -3)$, радиус равен 2 (рис 1).

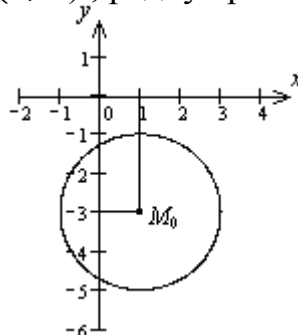


Рис.1. Окружность, заданная уравнением $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$

2. Постройте кривую $4x^2 + 9y^2 = 36$. Найдите фокусы и эксцентриситет.

Решение. Разделим обе части уравнения на 36. Получаем уравнение

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

Это - каноническое уравнение эллипса, $a=3$, $b=2$. Делаем чертеж (рис. 2)

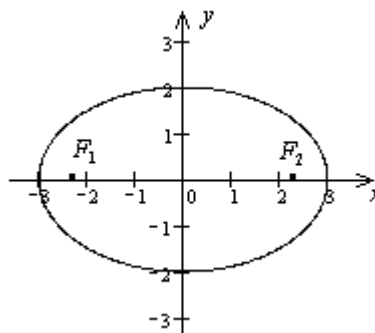


Рис.2 Эллипс, заданный уравнением $4x^2 + 9y^2 = 36$

Имеем:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5, c = \sqrt{5}$$

Тогда фокусы равны: $F_1(-\sqrt{5}; 0), F_2(\sqrt{5}; 0)$

Эксцентриситет равен: $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$

3. Нарисуйте эллипс $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. Найдите его фокусы и эксцентриситет.

Решение. Уравнение запишем в виде $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

то уравнение не является каноническим уравнением эллипса, в нем $a=1, b=2$, $b>a$, а должно быть $b<a$. Однако, если переобозначить оси, то есть положить $\bar{x} = y, \bar{y} = x$ то уравнение эллипса в координатах $(\bar{x}, \bar{y})$ примет вид $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$

Это - каноническое уравнение эллипса при $a = 2, b = 1$. Делаем чертеж (рис. 3).

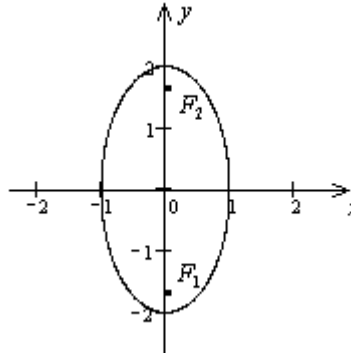


Рис.3.Эллипс, заданный уравнением $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

Имеем: $c = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

Значит, фокусы в системе координат $(\bar{x}, \bar{y})$ имеют координаты $(-\sqrt{3}; 0), (\sqrt{3}; 0)$, а в системе координат $(x; y)$ - координаты $(0; -\sqrt{3}), (0; \sqrt{3})$

Эксцентриситет равен $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Постройте гиперболу $4x^2 - y^2 = 4$, найдите ее фокусы и эксцентриситет.

Решение. Разделим обе части уравнения на 4. Получим каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$$

в нем $a=1, b=2, b>a$, Проводим асимптоты $y = 2x$ и $y = -2x$, строим гиперболу (рис. 4).

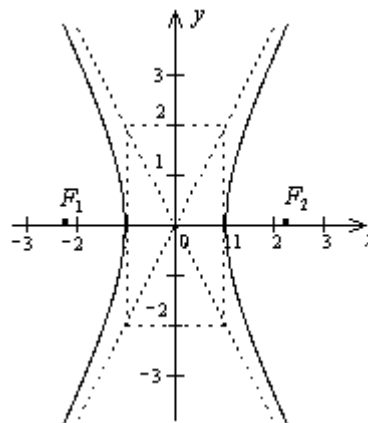


Рис.4.Гипербола $4x^2 - y^2 = 4$

Имеем: $c = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

Тогда фокусы равны: : $F_1(-\sqrt{5};0), F_2(\sqrt{5};0)$

Эксцентриситет равен: : $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{5}$

5. Постройте гиперболу $25x^2 + 100 = 4y^2$. Найдите ее фокусы и эксцентриситет.

Решение. Преобразуем уравнение к виду : $-\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$

Данное уравнение не является каноническим уравнением гиперболы, так как знаки перед: x^2 и y^2 противоположны знакам в каноническом уравнении. Однако, если переобозначить переменные $\bar{x} = y, \bar{y} = x$, то в новых переменных

получим каноническое уравнение : $\frac{\bar{x}^2}{5^2} - \frac{\bar{y}^2}{2^2} = 1$

Действительная ось этой гиперболы лежит на оси: $O\bar{x}$, то есть на оси Oy исходной системы координат, асимптоты имеют уравнения $\bar{y} = \frac{2}{3}\bar{x}$ и $\bar{y} = -\frac{2}{3}\bar{x}$ то есть уравнение $y=5/2x$ и $y=-5/2x$ в исходных координатах. Действительная полуось равна 5, мнимая - 2. В соответствии с этими данными проводим построение (рис. 5).

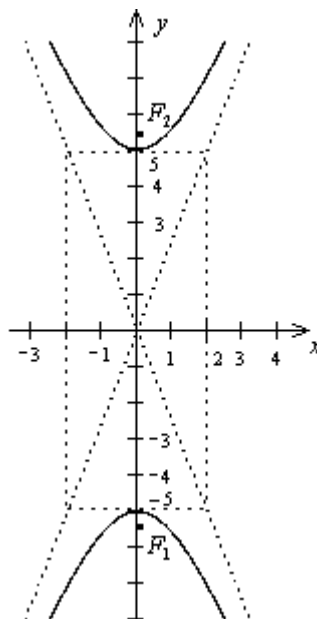


Рис.5. Гипербола с уравнением $25x^2 + 100 = 4y^2$

Получим: $c = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}, \varepsilon = 5\frac{\sqrt{29}}{29}$

фокусы лежат на действительной оси -: $F_1(0;-\sqrt{29}), F_2(0;\sqrt{29})$

где координаты указаны в исходной системе координат.

1. Постройте параболу $y^2 = 3x$. Найдите ее фокус и директрису.

Решение. Уравнение является каноническим уравнением параболы, $2p=3$, $p=1,5$. Осью параболы служит ось Ox , вершина находится в начале координат, ветви параболы направлены вдоль оси Ox . Для построения найдем несколько точек параболы. Для этого придаем значения переменному y и находим

значения x . Возьмем точки $(1/3;1)$, $(4/3;2)$, $(3;3)$. Учитывая симметрию относительно оси Ox , рисуем кривую (рис. 6)

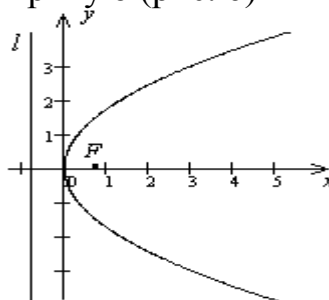


Рис.6.Парабола, заданная уравнением $y^2 = 3x$

Фокус F лежит на оси Ox на расстоянии $p/2$ от вершины, то есть имеет координаты $(0,75;0)$.

Задачи для самостоятельной работы:

- 1) Найти уравнение окружности, зная, что центр ее лежит в точке $(-4,5)$ и радиус равен 3см
- 2) Составить уравнение эллипса, зная, что расстояние между фокусами равно 10 и большая ось равна 12
- 4) Составить уравнение гиперболы, зная, что большая полуось равна 14 и расстояние между фокусами равно 6
- 5) Зависимость суточного удоя y (в литрах) от возраста коров x (лет) выражается уравнением $y = -9,53 + 6,86x - 0,49x^2$
Постройте график зависимости на интервале $[2;14]$. Определите по графику, при каком возрасте коров удои максимальны.

Задания на дом:

1. Написать уравнения окружностей радиуса $R = \sqrt{5}$, касающихся прямой $x - 2y - 1 = 0$ в точке $M_1 (3; 1)$.
2. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:
 - 1) его полуоси равны 5 и 2;
 - 2) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами $2c = 8$;
 - 3) его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами $2c = 10$;
 - 4) расстояние между его фокусами $2c = 6$ и эксцентриситет $e = \frac{3}{5}$;
 - 5) его большая ось равна 20, а эксцентриситет $e = \frac{3}{5}$;
3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:
 - 1) её оси $2a = 10$ и $2b = 8$;
 - 2) расстояние между фокусами $2c = 10$ и ось $2b = 8$;
 - 3) расстояние между фокусами $2c = 6$ и эксцентриситет $e = \frac{3}{2}$;

4) ось $2a = 16$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$;

5) уравнения асимптот

$$y = \pm \frac{4}{3}x$$

и расстояние между фокусами $2c = 20$;

4. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

1) парабола расположена в правой полуплоскости, симметрично относительно оси Ox , и её параметр $p = 3$;

2) парабола расположена в левой полуплоскости, симметрично относительно оси Ox , и её параметр $p = 0,5$;

3) парабола расположена в верхней полуплоскости, симметрично относительно оси Oy , и её параметр $p = \frac{1}{4}$;

5. Зависимость урожая зерна кукурузы y от запасов продуктивной влаги x выражается уравнением $y = -4,200 + 1,100x - 0,006x^2$. Постройте соответствующую кривую. Определите приближенно (по графику), при каких значениях x урожайность равна нулю.

Тема 14. Основные задачи аналитической геометрии пространства

Уравнение плоскости

1. Требуется написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1,2,-2)$ и параллельной векторам $\mathbf{p}=(1;2;-1)$ и $\mathbf{q}=(-2;0;3)$.

Решение. Векторное произведение $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ ортогонально векторам $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$. Следовательно, оно ортогонально искомой плоскости и вектор $\mathbf{n} = \mathbf{p} \times \mathbf{q}$ можно взять в качестве ее нормального вектора. Найдем координаты вектора $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{n} = \mathbf{p} \times \mathbf{q} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6i - j + 4k$$

то есть $\mathbf{n}=(6;-1;4)$. Используя формулу, получим $6(x-1)+(-1)(y-2)+4(z-(-2))=0$

Раскрыв в этом уравнении скобки, приходим к окончательному ответу.

Ответ: $6x - y + 4z + 4 = 0$

2. Постройте плоскость $2x - 2y + 3z - 4 = 0$.

Решение: Найдем точки пересечения с координатными осями.

С осью ox : при этом $y=z=0$ и уравнение принимает вид $2x-4=0$, откуда $x=2$

С осью oy : при этом $x=z=0$ и уравнение принимает вид $-2y-4=0$, откуда $y=-2$

С осью oz : при этом $x=y=0$ и уравнение принимает вид $3z-4=0$, откуда $z=4/3$

Построим плоскость:

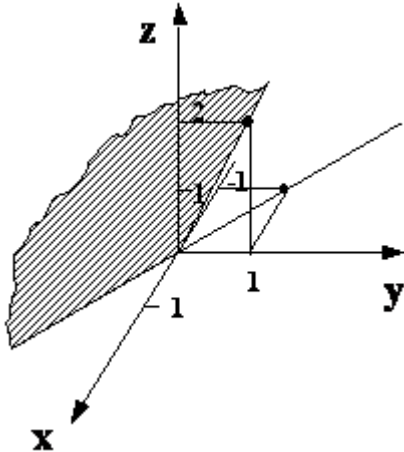


Рис.1.

1. Постройте плоскость $2x - z - 4 = 0$.

Решение:

Отсутствует переменная y . Так как плоскость параллельна оси, одноименной с отсутствующей переменной, то плоскость параллельна оси oy .

Найдем точки пересечения с координатными осями:

С осью ox : при этом $z=0$ и уравнение принимает вид: $2x-4=0$, откуда $x=2$.

С осью oz : при этом $x=0$ и уравнение принимает вид: $-z-4=0$, $z=-4$

Построим плоскость.

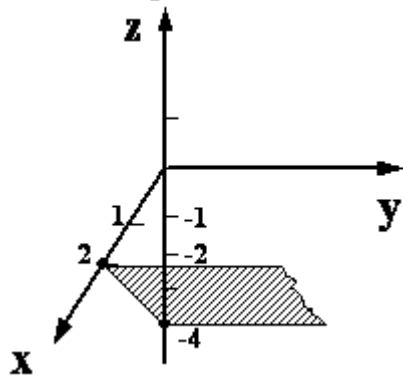


Рис. 2.

4. Постройте плоскость $3y-5=0$. (построение аналогично предыдущему примеру)

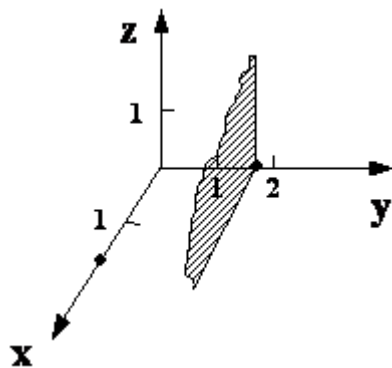


Рис. 3.

Упражнения для самостоятельного решения:

Примечание: Уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ (1) определяет плоскость, проходящую через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющую нормальный вектор $n = \{A; B; C\}$.

$Ax + By + Cz + D = 0$. Это уравнение называется общим уравнением плоскости.

- 1) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2; 1; -1)$ и имеет нормальный вектор $n = \{1, -2; 3\}$.
- 2) Точка $P(2; -1; -1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.
- 3) Даны две точки $M_1(3; -1; 2)$ и $M_2(4; -2; -1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно к вектору $\overline{M_1M_2}$.
- 4) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2; -1; 3)$ и $M_2(3; 1; 2)$ параллельно вектору $a = \{3; -1; -4\}$.

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(3; -1; 2)$, $M_2(4; -1; -1)$ и $M_3(2; 0; 2)$.

(Уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(x_1; y_1; z_1)$ $M_2(x_2; y_2; z_2)$ $M_3(x_3; y_3; z_3)$

может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

6) Определить координаты какого-нибудь нормального вектора каждой из следующих плоскостей. В каждом случае написать общее выражение координат произвольного нормального вектора:

1) $2x - y - 2z + 5 = 0$; 2) $x + 5y - z = 0$;

3) $3x - 2y - 7 = 0$; 4) $5y - 3z = 0$;

5) $x + 2 = 0$; 6) $y - 3 = 0$.

7) Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости (устно):

1) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$, $2x - 3y + 5z + 3 = 0$;

2) $4x + 2y - 4z + 5 = 0$, $2x + y + 2z - 1 = 0$;

3) $x - 3z + 2 = 0$, $2x - 6z - 7 = 0$.

8) Установить, какие из следующих пар уравнений определяют перпендикулярные плоскости (устно):

1) $3x - y - 2z - 5 = 0$, $x + 9y - 3z + 2 = 0$;

2) $2x + 3y - 2z - 3 = 0$, $x - y - z + 5 = 0$;

3) $2x - 5y + z = 0$, $x + 2z - 3 = 0$.

9) Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат параллельно плоскости $5x - 3y + 2z - 3 = 0$ и начертить плоскость.

Задания на дом:

1) Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и имеет нормальный вектор $n = \{5; 0; -3\}$.

2) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3; 4; -5)$ параллельно двум векторам $a_1 = \{3; 1; -1\}$ и $a_2 = \{1; -2; 1\}$.

3) Доказать, что уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно двум векторам

$$a_1 = \{l_1; m_1; n_1\} \text{ и } a_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$$

может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

1) Доказать, что уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \quad M_2(x_2; y_2; z_2) \quad M_3(x_3; y_3; z_3)$$

может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_1 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- 2) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-2; 1; 0)$ и $M_2(1; -2; 3)$ параллельно вектору $a = \{2; -3; -2\}$.

Исследование кривой второго порядка

1. Определение типа кривой с помощью инвариантов

Для данного уравнения кривой второго порядка:

$$(5 -)x^2 + 4xy + 3y^2 + 8x - 6y + 5 = 0 \quad (3.1)$$

определить зависимость типа кривой от параметра с помощью инвариантов.

Для данного уравнения кривой второго порядка:

$$a_{11} = 5 - , a_{12} = 2, a_{13} = 4, a_{22} = 2, a_{23} = -3, a_{33} = 5$$

Вычислим инварианты:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = (5 -) + 2 = 7 -$$

$$I_2 == (5 -)^2 - 4 = 6 - 2$$

$$I_2 === (5 -)10 - 24 - 24 - 32 - 9(5 -) - 20 = -95$$

Согласно классификации кривых второго порядка:

I. Если $I_2 = 0$, то данное уравнение (3.1) определяет кривую параболического типа:

$I_2 = 6 - 2 = 0$, следовательно, при $= 3$ уравнение определяет кривую *параболического типа*.

При $= 3$ $I_3 = - - 95 = -3 - 95 = 98 \neq 0$. Значит, при $= 3$ уравнение (3.1) задаёт *параболу*.

II. Если $I_2 \neq 0$, то задаваемая кривая является центральной. Следовательно, при $\neq 3$ данное уравнение задаёт *центральную* кривую.

1. Если $I_2 > 0$, то уравнение задаёт кривую эллиптического типа:

Значит, при < 3 уравнение (3.1) задаёт кривую *эллиптического* типа.

а. Если $I_1 I_3 < 0$, то уравнение определяет эллипс:

$$I_1 I_3 = - (7 -)(+95) = -2 + 88 - 665 < 0, \text{ при решении получаем } (-95, 7).$$

Следовательно, при $(-95, 3)$ уравнение (3.1) задаёт *эллипс*.

б. Если $I_1 I_3 > 0$, то уравнение определяет эллипс:

$$I_1 I_3 = -2 + 88 - 665 > 0, \text{ при решении получаем } (-, -95). \text{ Следовательно, при } (-, -95) \text{ уравнение (3.1) задаёт } \textit{мнимый эллипс}.$$

с. Если $I_3 = 0$, то уравнение определяет две мнимые пересекающиеся прямые:

$$I_3 = - - 95 = 0, \text{ при решении получаем } - 95. \text{ Следовательно, при } = - 95 \text{ уравнение (3.1) задаёт } \textit{две мнимые пересекающиеся прямые}.$$

2. Если $I_2 < 0$, то уравнение задаёт кривую гиперболического типа:

Значит, при > 3 уравнение (3.1) задаёт кривую *гиперболического* типа.

а. Если $I_3 \neq 0$, то уравнение определяет гиперболу:

$$I_3 = - - 95 \neq 0, \text{ получаем } -95. \text{ Следовательно, при } (3, +) \text{ уравнение (3.1) задаёт } \textit{гиперболу}.$$

Согласно полученным данным, построим таблицу:

$(-, -95)$	$= -95$	$(-95, 3)$	$= 3$	$(3, +)$	
Мнимый эллипс	Две мнимые пересекающиеся прямые	Эллипс	Парабола	Гипербола	

2. Приведение к каноническому виду

При $= 0$ уравнение (3.1) принимает вид:

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 + 8x - 6y + 5 = 0 \quad (3.2)$$

Приведем уравнение кривой (3.2) к каноническому виду, применяя преобразования параллельного переноса и поворота координатных осей. Мы установили, что данная кривая -- центральная, поэтому используем методику приведения к каноническому виду для уравнения центральной кривой.

а) Характеристическое уравнение для данной кривой будет иметь вид:

$$A(x, y) = 5x^2 + 4xy + 2y^2$$

Откуда следует, корни характеристического уравнения есть: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$.

Расположение *эллипса* относительно начальной системы координат будет известно, если мы будем знать *координаты центра* и *угловой коэффициент вещественной* оси эллипса.

Уравнения для определения координат центра имеют вид:

Откуда мы находим $x_0 = -$ и $y_0 =$. Следовательно, точка $O(-,)$ есть центр данной кривой.

Угловой коэффициент оси OX можем определить по формуле:

б) Совершим *параллельный перенос* начала координат в точку $O(x_0, y_0)$. При этом координаты x, y произвольной точки плоскости в системе координат xOy и координаты x', y' в новой системе координат $x'O'y'$ связаны соотношениями:

Подставив данные выражения в уравнение (3.1), получим:

$$5(x_0 + x)^2 + 4(x_0 + x)(y_0 + y) + 2(y_0 + y)^2 + 8(x_0 + x) - 6(y_0 + y) + 5 = 0$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим:

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 + (10x_0 + 4x_0 + 8)x + (4x_0 + 4y_0 - 6)y + (5x_0^2 + 4x_0y_0 + 2y_0^2 + 8x_0 - 6y_0 + 5) = 0 \quad (3.3)$$

В данном уравнении коэффициенты при x и y приравняем к нулю и получим систему уравнений:

Решив эту систему уравнений, мы получим, найденные уже ранее,

координаты центра O , $x_0 = -$ и $y_0 =$. Подставив данные значения в уравнение (3.3), коэффициенты при x и y станут равными нулю, мы получим уравнение в системе координат $x'O'y'$:

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 + () = 0$$

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - = 0 \quad (3.4)$$

в) Так как $a_{12} = 2$, то для дальнейшего упрощения необходимо

произвести *поворот осей координат на угол*. При повороте осей координат на угол координаты x', y' произвольной точки M плоскости в системе

координат $x'O'y'$ и координаты X, Y в новой системе координат $XO'Y$ связаны соотношениями:

Подставим данные выражения в уравнение (3.4), получим:

$$5(X\cos - Y\sin)^2 + 4(X\cos - Y\sin)(X\sin + Y\cos) + 2(X\sin + Y\cos)^2 - = 0$$
$$(5\cos^2 + 4\sin\cos + 2\sin^2)X^2 + (-6\sin\cos + 4\cos^2 - 4\sin^2)XY +$$
$$(5\sin^2 - 4\sin\cos + 2\cos^2)Y^2 - = 0 \quad (3.5)$$

В полученном выражении найдём такой угол, чтобы коэффициент при XY стал равен нулю, для этого необходимо:

$$-6\sin\cos + 4\cos^2 - 4\sin^2 = 0$$

$$2\operatorname{tg}^2 + 3\operatorname{tg} - 2 = 0$$

Откуда, при решении, находим два значения $\operatorname{tg} = -2$ и $\operatorname{tg} =$.

В первом задании мы нашли, что угловой коэффициент *вещественной оси* $O'X$ эллипса равен $k = -2$. Так как угловой коэффициент равен тангенсу, то из двух найдённых значений выберем $\operatorname{tg} = -2$. Следовательно:

$$\cos = , \sin =$$

Подставив данные значения для $\sin$ и $\cos$ в уравнение (3.5), коэффициент при XY станет равным нулю, получим:

$$()X^2 + ()Y^2 - = 0$$

$$X^2 + 6Y^2 - = 0$$

$$(3.6)$$

- это каноническое уравнение данной кривой (3.1) при $= 0$.

3. Построение графиков

Подтвердим результаты проведённого исследования данного уравнения кривой (3.1) второго порядка, построив соответствующие графики кривых при разных.

При $= 3$ уравнение (3.1) принимает вид:

$$2x^2 + 4xy + 3y^2 + 8x - 6y + 5 = 0$$

Графиком данного уравнения является парабола:

При $= 6$ уравнение (3.1) принимает вид:

$$x^2 + 4xy + 3y^2 + 8y^2 - 6y + 5 = 0$$

Графиком данного уравнения является гипербола:

При $= 0$ уравнение (3.1) принимает вид

$$5x^2 + 4xy + 3y^2 + 8y^2 - 6y + 5 = 0$$

Графиком данного уравнения является эллипс. Изобразим в данной системе также график канонического уравнения эллипса (3.6):

4. Вывод

Исследовав данное общее уравнение кривой второго порядка, мы установили, что при значении параметра $= 0$ уравнение задаёт *эллипс*. Привели уравнение к каноническому виду, применяя преобразования параллельного переноса и поворота. При параллельном переносе коэффициенты при первых степенях стали равны нулю, при повороте координатных осей коэффициенты при смешанном произведении стали равны нулю. Построили графики для всех фигур, которое может задавать данное уравнение, построили график *эллипса* в общей и канонической системе координат.

Исследование поверхности второго порядка

1. Определение типа поверхности

Для данного уравнения поверхности второго порядка:

$$4x^2 - z^2 + 12xz + 6y - 8z + 5 = 0 \quad (4.1)$$

Определить тип поверхности с помощью инвариантов.

$$4 + 0 - 1 = 3$$

$$= -4 - 36 = -40$$

Определим характер расположения центра: Данная поверхность *не имеет центра*, так как выполняется условие $I_3 = 0$, $I_4 \neq 0$. При этом инвариант $I_4 = 360 > 0$, следовательно, графиком уравнения (4.1) является *гиперболический параболоид*.

Тема 15 Элементы комбинаторики

Комбинаторика. Размещения, перестановки, сочетания

Пример. Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал пяти цветов?

Решение. Искомое число трехполосных флагов:

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Определение. Перестановкой множества из n элементов называется расположение элементов в определенном порядке.

Так, все различные перестановки множества из трех элементов $\{a, b, c\}$ — это

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

Очевидно, перестановки можно считать частным случаем размещений при $m = n$.

Число всех перестановок из n элементов обозначается P_n (от начальной буквы французского слова “permutation”, что значит “перестановка”, “перемещение”). Следовательно, число всех различных перестановок вычисляется по формуле

$$P_n = n(n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Пример. Сколькими способами можно расставить 8 ладей на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Решение. Искомое число расстановки 8 ладей

$$P_8 = 8! = 40320.$$

n	$n!$	n	$n!$
0	1	6	720
1	1	7	5040
2	2	8	40320
3	6	9	362880
4	24	10	3628800
5	120		

$0! = 1$ по определению!

Определение. Сочетаниями из n различных элементов по k элементов называются комбинации, которые составлены из данных n элементов по k элементов и отличаются хотя бы одним элементом (иначе говоря, k -элементные подмножества данного множества из n элементов).

Как видим, в сочетаниях в отличие от размещений не учитывается порядок элементов. Число всех сочетаний из n элементов по k элементов в каждом обозначается C_n^k (от начальной буквы французского слова “combinaison”, что значит “сочетание”).

Числа C_n^k

$$C_5^2 = 10$$

Все сочетания из множества $\{a, b, c, d, e\}$ по два — $ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de$.

$$C_n^0 = 1, C_n^n = 1, C_n^1 = n.$$

Свойства чисел C_n^k

$$1. C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Действительно, каждому k -элементному подмножеству данного n элементного множества соответствует одно и только одно $n - k$ -элементное подмножество того же множества.

$$2. C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Действительно, мы можем выбирать подмножества из k элементов следующим образом: фиксируем один элемент; число k -элементных подмножеств, содержащих этот элемент, равно C_{n-1}^{k-1} ; число k -элементных подмножеств, не содержащих этот элемент, равно C_{n-1}^k .

Треугольник Паскаля

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & \\
 & & & & & C_1^1 & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \\
 C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \\
 \dots & & & & & & & &
 \end{array}$$

[illegible]

Доказательство. Рассмотрим множество из n элементов и решим двумя способами следующую задачу: сколько можно составить последовательностей из k элементов данного множества, в каждой из которых никакой элемент не встречается дважды?

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$
$$\mathbb{C}_n^k \cdot k!,$$

$$\begin{aligned} C_n^k \cdot k! &= n(n-1)\dots(n-k+1), \\ C_n^k &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}. \end{aligned}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$C_{20}^8 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 323 \cdot 390 = 125970.$$

Пример. Сколькими способами можно в игре “Спортлото” выбрать 5 номеров из 36?

Искомое	число	способов
C_{36}^5	$= \frac{36!}{5!31!} = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 376992.$	

Задачи.

1. Номера машин состоят из 3 букв русского алфавита (33 буквы) и 4 цифр. Сколько существует различных номеров автомашин?
2. На рояле 88 клавиш. Сколькими способами можно извлечь последовательно 6 звуков?
3. Сколько есть шестизначных чисел, делящихся на 5?
4. Сколькими способами можно разложить 7 разных монет в три кармана?
5. Сколько можно составить пятизначных чисел, в десятичной записи которых хотя бы один раз встречается цифра 5?
6. Сколькими способами можно усадить 20 человек за круглым столом, считая способы одинаковыми, если их можно получить один из другого движением по кругу?
7. Сколько есть пятизначных чисел, делящихся на 5, в записи которых нет одинаковых цифр?
8. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см нарисована окружность радиуса 100 см, не проходящая через вершины клеток и не касающаяся сторон клеток. Сколько клеток может пересекать эта окружность?
9. Сколькими способами можно расставить в ряд числа $1, 2, \dots, n$ так, чтобы числа $1, 2, 3$ стояли рядом и притом шли в порядке возрастания?
10. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 5, 7, 8, если каждую цифру можно использовать только один раз?
11. Из слова РОТ перестановкой букв можно получить еще такие слова: ТОР, ОРТ, ОТР, ТРО, РТО. Их называют анаграммами. Сколько анаграмм можно составить из слова ЛОГАРИФМ?
12. Назовем *разбиением* натурального числа представление его в виде суммы натуральных чисел. Вот, например, все разбиения числа 4:

4; 3 + 1; 1 + 3; 2 + 2; 2 + 1 + 1; 1 + 2 + 1; 1 + 1 + 2; 1 + 1 + 1 + 1.

Разбиения считаются разными, если они отличаются либо числами, либо порядком слагаемых.

Сколько существует различных разбиений числа 11 на 4 слагаемых?

13. Сколько существует трехзначных чисел с невозрастающим порядком цифр?

14. Сколько существует четырехзначных чисел с невозрастающим порядком цифр?

15. Сколькими способами можно рассадить в ряд 17 человек, чтобы A и B оказались рядом?

16. n девочек и n мальчиков рассаживаются произвольным образом в ряду из $2n$ мест. Сколькими способами можно их рассадить так, чтобы никакие две девочки не сидели рядом?

17. n девочек и n мальчиков рассаживаются произвольным образом в ряду из $2n$ мест. Сколькими способами можно их рассадить так, чтобы все девочки сидели рядом?

Тема 16 Элементы теории вероятностей

Задача 1. Найти вероятность того, что при бросании игральной кости выпадает число очков, делящееся на 2 (событие А).

Решение. Число исходов здесь 6. Число благоприятствующих исходов равно 3 (выпадение 2,4,6). Поэтому по классическому определению вероятности имеем:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Задача 2. На клумбе растут 20 красных, 30 синих и 40 белых астр. Какова вероятность сорвать в темноте окрашенную астру, если рвется одна астра?

Решение. Искомая вероятность равна сумме вероятностей сорвать красную или синюю астру, т.е.

$$P = \frac{20}{90} + \frac{30}{90} = \frac{50}{90} = \frac{5}{9}.$$

Задача 3. Пусть в урне находятся 2 белых и 2 черных шара. Пусть событие А-вынут белый шар. Очевидно, $P(A) = \frac{2}{4}$.

После первого испытания вынутый шар кладется обратно в урну, шары перемешиваются и снова вынимается шар. Событие В- во втором испытании вынут белый шар- также имеет вероятность $P(B) = \frac{2}{4}$, т.е. события А и В – независимые.

Предположим теперь, что вынутый шар в первом испытании не кладется обратно в урну. Тогда если произошло событие А, т.е. в первом испытании вынут белый шар, то вероятность события В уменьшается $P(B) = \frac{1}{3}$, если в первом испытании был вынут черный шар, то вероятность события В увеличивается $P(B) = \frac{2}{3}$. Итак, вероятность события В существенно зависит от того, произошло или не произошло событие А; в таких случаях А и В-зависимые.

Задача 4. В условиях примера 3 берем тот случай, когда вынутый шар в первом испытании «не кладется обратно в урну». Поставим следующий вопрос: какова вероятность вынуть первый и второй раз белые шары?

Решение. По формуле умножения вероятностей имеем:

$$P(AB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Задача 5. Найти вероятность одновременного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (событие А) равна 0,8, а вторым (событие В)- 0,7.

Решение. События А и В независимы, поэтому по теореме о произведении двух независимых событий имеем:

$$P(AB) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56.$$

Задчи для самостоятельного решения:

1. В ящике имеется 100 деталей, из них 17 некачественных. Наудачу вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что вынутая деталь некачественная.
2. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет нечетное число очков.
3. Набирая номер телефона, абонент забыл последнюю цифру и набрал ее наудачу. Какова вероятность того, что номер набран правильно?
4. В урне 30 шаров: 15 белых, 10 красных и 5 синих. Какова вероятность вынуть цветной шар, если вынимается один шар?
5. В денежно-вещевой лотерее на серию в 1000 билетов приходится 120 денежных и 80 вещевых выигрышей. Какова вероятность какого-либо выигрыша на один лотерейный билет?

Задания на дом:

1. Найти вероятность одновременного появления герба при одном бросании двух монет.
2. Какова вероятность того, что из колоды в 36 карт будут вынуты подряд два туза?
3. Имеется два ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все две вынутые детали окажутся стандартными.
4. В семье двое детей. Принимая события, состоящие в рождении мальчика и девочки равновероятными, найти вероятность того, что в семье: а) все девочки; б) дети одного пола.

Тема 17

Элементы математической статистики

Задача 1.

Измерения напряжения электросети (в вольтах) дали следующие результаты: 210, 198, 215, 212 194 213 199 191, 205, 211, 189, 206, 204, 205, 201, 194, 190, 200, 202, 196, 200, 216, 214, 200, 196, 210, 206, 200, 215, 204.

Построить гистограмму относительных частот выборки и гистограмму частот выборки.

Решение.

Объем выборки $n=30$. Составим вариационный ряд, расположив данные выборки в возрастающем порядке: 189 190 191 194, 194, 196, 196, 198, 199, 200, 200, 200, 200, 201, 202, 204 204 105, 205, 206, 206, 210, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 215, 216.

Размах выборки равен $216-189=27$.

Гистограмма относительных частот

Определим количество интервалов, на которые необходимо разбить выборку: $k = \log_2 30 + 1 = 5,8$. Округлим это число до ближайшего целого $k = 6$. Так как размах выборки равен 27, то длина каждого интервала $\Delta = 27/6 = 4,5$.

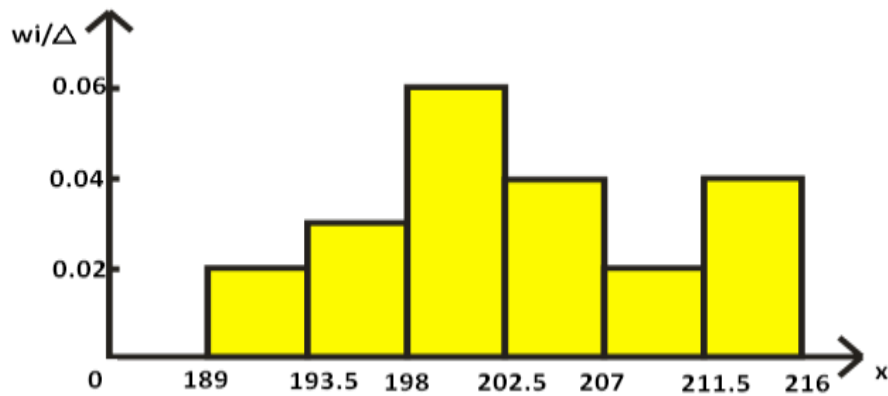
Подсчитаем, сколько измеренных значений попало в каждый из полученных интервалов:

Частичный интервал	Частота	Частичный интервал	Частота	Частичный интервал	Частота
$J_1=[189;193.5)$	3	$J_3=[198;202.5)$	8	$J_5=[207;211.5)$	3
$J_2=[193.5;198)$	4	$J_4=[202.5;207)$	6	$J_6=[211.5;217]$	6

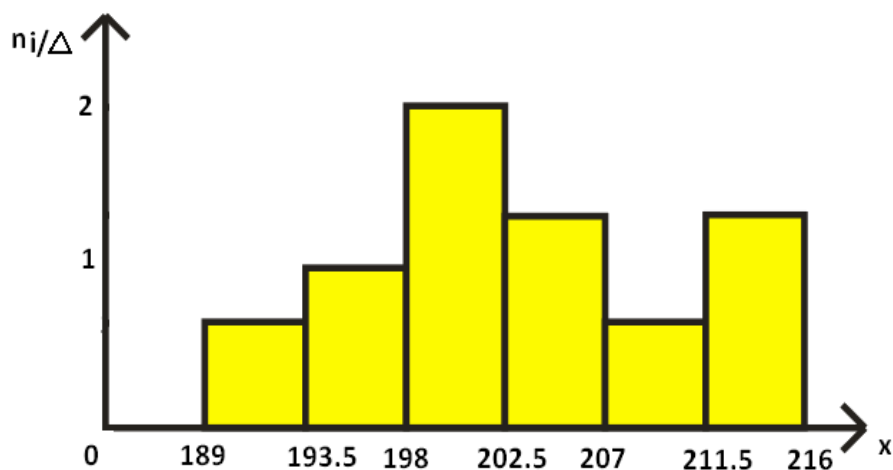
Сведем полученные данные в таблицу:

Частичный интервал длиной $\Delta=4.5$	Частота n_i	$w_i=n_i/n$	Эмпирическая плотность распределения частоты n_i/Δ	w_i/Δ
[189;193.5)	3	0.1	0.66	0.02
[193.5;198)	4	0.13	0.89	0.03
[198;202.5)	8	0.27	1.78	0.06
[202.5;207)	6	0.2	1.31	0.04
[207;211.5)	3	0.1	0.66	0.02
[211.5;217]	6	0.2	1.31	0.04

Гистограмма относительных частот



Гистограмма частот



Примеры [2]

Пр и м е р 1. Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на перрон в случайный момент времени, никак не связанный с расписанием. Случайная величина – время T , в течение которого ему придется ждать поезда. Найти плотность распределения, математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение и вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше полминуты.

Р е ш е н и е . Плотность распределения $f(x) = 1/2$ ($0 < x < 2$) показана на рис. 9.

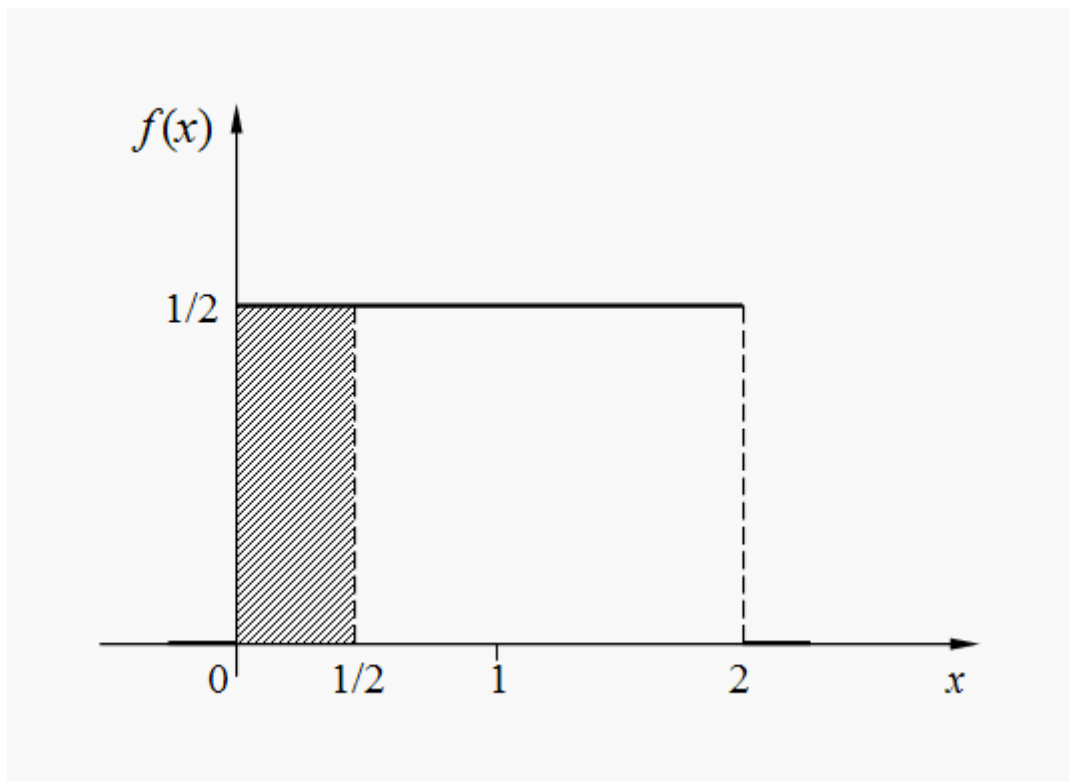


Рис. 9. Плотность распределения

$$P\left\{T < \frac{1}{2}\right\} = 1/4;$$

$$m_t = (2 + 0) / 2 = 1;$$

$$D_t = \int_0^2 (t-1)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{(t-1)^3}{3} \Big|_0^2 = 1/3;$$

$$\sigma_t = \sqrt{3} / 3 \approx 0.577.$$

П р и м е р 2. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 2$. Найти вероятность события $\{1 < X < 2\}$.

Р е ш е н и е . Имеем $F(x) = 1 - e^{-2x}$ ($x > 0$). Вероятность попадания в интервал (1, 2) равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P\{1 < X < 2\} = F(2) - F(1) = (1 - e^{-4}) - (1 - e^{-2}) = e^{-2} - e^{-4} = 0.135 - 0.018 = 0.117.$$

П р и м е р 3. Матрица распределения системы двух случайных величин X и Y задана таблицей:

y_j x_i	0	2	5
1	0.1	0	0.2
2	0	0.3	0
4	0.1	0.3	0

Найти числовые характеристики системы случайных величин (X, Y) :

математические ожидания m_x, m_y , дисперсии D_x, D_y , средние квадратичные отклонения σ_x, σ_y , ковариацию K_{xy} и коэффициент корреляции r_{xy} .

Решение. Сначала найдем ряды распределения отдельных величин, входящих в систему. Суммируя вероятности p_{ij} , стоящие в 1-ой, 2-ой и 3-ей строках, получим:

$$p_{x_1} = P\{X = 1\} = 0.1 + 0 + 0.2 = 0.3;$$

$$p_{x_2} = P\{X = 2\} = 0 + 0.3 + 0 = 0.3;$$

$$p_{x_3} = P\{X = 4\} = 0.1 + 0.3 + 0 = 0.4.$$

Ряд распределения случайной величины X имеет вид:

1	2	4
0.3	0.3	0.4

Математическое ожидание $m_x = 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.4 = 2.5$.

По формуле (8) дисперсия $D_x = M(X^2) - m_x^2 = 1^2 \cdot 0.3 + 2^2 \cdot 0.3 + 4^2 \cdot 0.4 - 2.5^2 = 1.65$.

Среднее квадратичное отклонение $\sigma_x = \sqrt{1.65} = 1.285$.

Аналогично суммируя вероятности p_{ij} , стоящие в 1-ом, 2-ом и 3-ем столбцах, получим:

$$p_{x_1} = P\{X = 1\} = 0.1 + 0 + 0.2 = 0.3;$$

$$p_{x_2} = P\{X = 2\} = 0 + 0.3 + 0 = 0.3;$$

$$p_{x_3} = P\{X = 4\} = 0.1 + 0.3 + 0 = 0.4.$$

Ряд распределения случайной величины Y имеет вид:

0	2	5
0.2	0.6	0.2

Математическое ожидание $m_y = 0 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.6 + 5 \cdot 0.2 = 2.2$.

По формуле (8) дисперсия $D_y = M(Y^2) - m_y^2 = 0^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.6 + 5^2 \cdot 0.2 - 2.2^2 = 2.56$.

Среднее квадратичное отклонение $\sigma_y = \sqrt{2.56} = 1.6$.

Математическое ожидание $M(XY) = 1 \cdot 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 5 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 0.3 + 2 \cdot 5 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \cdot 0.1 + 4 \cdot 2 \cdot 0.3 + 4 \cdot 5 \cdot 0 = 4.6$.

Ковариация K_{xy} по формуле (52) $K_{xy} = M(X \cdot Y) - m_x \cdot m_y = 4.6 - 2.5 \cdot 2.2 = -0.90$.

Коэффициент корреляции: $r_{xy} = \frac{-0.90}{1.285 \cdot 1.6} \approx -0.438$, таким образом между случайными величинами X и Y имеется отрицательная линейная корреляция, т.е. при увеличении одной из них другая имеет уменьшается.

Задчи для самостоятельного решения:

6. дисперсию случайной величины X , которая задана законом распределения:

X	2	3	5
P	0,1	0,6	0,3

7. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

X	5	2	4	Y	7	9
P	0,6	0,1	0,3	p	0,8	0,2

Найти математическое ожидание случайной величины XY .

Задания на дом:

5. Одномерная выборка задана интервальным вариационным рядом:

Группа	[2,3; 3,1]	[3,1; 3,9]	[3,9; 4,7]	[4,7; 5,5]	[5,5; 6,3]	[6,3; 7,1]
m_i	11	18	30	21	15	5

Требуется: а) построить гистограмму плотностей относительных частот; б) перейти к дискретному вариационному ряду и построить полигон относительных частот

Тема 18 Математические модели

Задача 1. В трех кусках 127 м. шпагата. Когда от первого куска отрезали 21 м., от второго 9 м., а от третьего 7 м., то во всех кусках стало поровну. Сколько метров шпагата было в первом куске?

Решение: 1 способ.

Графическая модель задачи выглядит следующим образом, где x м это остаток

_____ x _____ 21
м _____
_____ x _____ 9 м
_____ x _____ 7 м

в 1-м куске - $(x+21)$ м; во 2-м - $(x+9)$ м; в 3-м - $(x+7)$ м. Всего 127м, составим уравнение $x+21+x+9+x+7=127$, $x=30$ (м) осталось шпагата в каждом куске.

Тогда $30+21=51$ (м) – было шпагата в первом куске. Ответ: 51 м. было в первом куске.

2 способ.

- 1) $21+9+7=37$ (м) – отрезали от трех кусков вместе
- 2) $127-37=90$ (м) – осталось шпагата в трех кусках
- 3) $90:3=30$ (м) – осталось шпагата в каждом куске
- 4) $30+21=51$ (м) – было шпагата в первом куске.

Задача 2. В нашей пекарне за один день используют 600 кг муки. Из $\frac{1}{4}$ всей муки пекут булочки, из $\frac{2}{5}$ остатка батоны, а из остальной муки хлеб. Сколько килограмм муки используется для выпечки хлеба?

Решение:

1 способ. Изобразим графически всю массу используемой муки прямоугольником, поделим его на 4 части, $\frac{3}{4}$ части поделим на 5 частей, 2 части которых использовались для выпечки батонов, а 3 части для выпечки хлеба. (по рис. видно что всего 20 частей, на хлеб пошло 9 частей).

На выпечку хлеба пошло $\frac{3}{4} * \frac{4}{5} = \frac{9}{20}$ всего же 600 кг. $600:20 * 9 = 270$ кг.

2 способ.

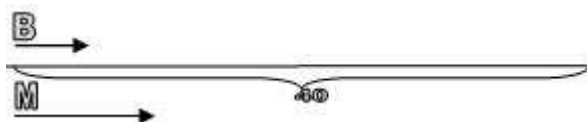
- 1) $600 * \frac{1}{4} = 150$ (кг) – использовали для выпечки булочек
- 2) $600 - 150 = 450$ (кг) – осталось
- 3) $450 * \frac{2}{5} = 180$ (кг) – использовали для выпечки батонов
- 4) $450 - 180 = 270$ (кг) – использовали для выпечки хлеба.

Ответ: 270 кг муки использовали для выпечки хлеба.

Задача 3. Паша поехал на дачу на велосипеде, а Саша на мотоцикле. Выехали они одновременно, но так как скорость мотоцикла на 10 км/ч больше скорости велосипеда, то Саша приехал на 2 ч. раньше Паши. Найдите скорость движения каждого мальчика, если расстояние от дома до дачи 40 км.

Решение.

Изобразим



графически.

Скорость удаления мотоциклиста относительно велосипедиста 10 км/ч, за 2 ч он удалится на 20 км, то есть велосипедист проедет 20 км, а мотоциклист 40 км. Из этого следует скорость мотоциклиста в 2 раза больше скорости велосипедиста и велосипедист 20 км проехал за 2 часа. Найдём скорость велосипедиста $20:2=10$ км/ч, а мотоциклиста 20 км/ч.

Задача 4. В сплаве весом 10 кг отношение меди к цинку равно 4:1, во втором сплаве весом 16 кг отношение меди к цинку равно 1:3. Сколько надо добавить чистой меди к этим сплавам, чтобы получить сплав, в котором отношение меди к цинку равно 3:2?

Таблица поможет решить задачу. Пусть x кг чистой меди.

	Медь	Цинк	Масса
1-й сплав	4 части	1 часть	10 кг
2-й сплав	1 часть	3 части	16 кг
3-й сплав	3 части	2 части	$(10+16+x)$ кг

Решение:

- 1) $10:5*4=8$ (кг) – чистой меди в 1-м сплаве
- 2) $16:4*1=4$ (кг) – чистой меди во 2-м сплаве

В новом сплаве меди $(4+8+x)$ или $(10+16+x):5*3$, $12+x=(26+x) * 3/5$, $x=9$ (кг)

Ответ: 9 кг меди.

Задача 5. Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля 5% (или 0,05) и 40% (0,4). Сколько нужно взять металла каждого из этих сортов, чтобы получить 140 т. стали с содержанием 30% (0,3) никеля?



По схеме

составляем уравнения:

$$x+y=140 \text{ и } 0,05x+0,4y=0,3*140$$

умножим на 20, получим $x+8y=840$.

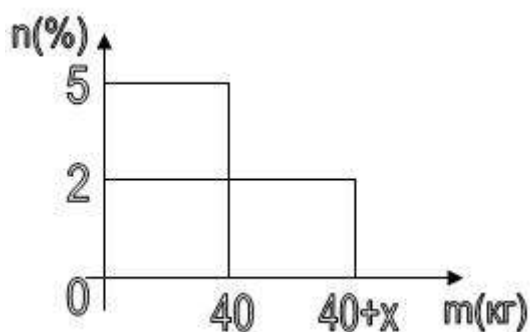
Заметим, что первое уравнение отличается от второго, в левой части, на $7y$, а правые на 700 получим. $7y=700$, $y=100$ т, подставим в первое уравнение $x=40$ т.

Ответ: 40 т. и 100 т.

Задача 6. Морская вода содержит 5% соли по массе. Сколько килограмм пресной воды нужно добавить к 40 кг морской воды, чтобы содержание соли в последней равнялось 2%?

Решение:Решим данную задачу графически, где указанную зависимость изобразим с помощью равновеликих прямоугольников.

Масса соли не изменится после прибавления к 40 кг морской воды x кг пресной воды.



n -концентрация соли в воде

m -масса воды

1 вариант решения.

$$(40+x)*2=5*40, \quad x=60 \text{ (кг)}$$

2 вариант решения.

$$2x=3*40, x=60 \text{ (кг)}$$

Ответ: 60 кг.(5)

Задача 7. Предприниматель положил в банк деньги на 3 года под 12% годовых. Сколько процентов чистой прибыли он получит через 3 года?

Решение.

Пусть он положил x рублей. Составим схему, с учетом, что в конце каждого года он получает 112% или 1,12 от первоначальной суммы.

$$x \xrightarrow{+12\%} 1,12x \xrightarrow{+12\%} 1,12 \cdot 1,12x = 1,2544x \text{ увеличилась на } 25,44\%.$$

Задача 8. Четверо ребят – Игорь, Сережа, Миша и Юра – играли во дворе в футбол и разбили окно.

- Кто разбил окно? – спросила тетя Даша
- Окно разбил или ваш Юра, или Миша, - сказал Сережа.
- Я окно не разбивал, - возразил Юра.
- Это сделал Миша, сказал Игорь.
- Нет, Игорь, ты ошибся, - заметил Миша.
- Ну что, задали они тебе задачу? – сказал дядя Вася, слушавший эту беседу. – Могу еще добавить, что трое из этих «футболистов» всегда говорят только правду. А вот четвертого я плохо знаю.

Кто разбил окно? С кем из ребят дядя Вася был мало знаком?

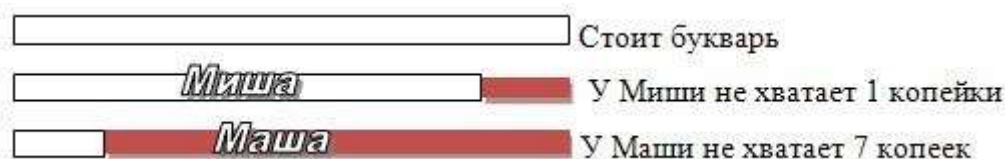
Решить эту задачу можно с помощью рассуждения, но нагляднее и удобнее оформить решение в виде таблицы:

Говорит	Игорь	Сережа	Миша	Юра
Сережа			Разбил (и)	Разбил (л)
Юра				Не разбивал (и)
Игорь			Разбил (и)	
Миша			Не разбивал (л)	

Из таблицы видно, что разбил окно Миша. В этой ситуации получается три ответа истинных и один ложный. Следовательно, дядя Вася мало знаком с Мишей.

Задача 9. У Маши не хватало для покупки букваря семи копеек, а у Миши одной копейки. Они сложились, чтобы купить один букварь на двоих, но денег все равно не хватило. Сколько стоил букварь?

Решение. Изобразим графически условие задачи.



Если у Маши 1 копейка или больше 1 копейки, то тогда им хватит на букварь, т.к. Миши не хватает 1 коп., значит у Маши 0 копеек, отсюда следует букварь стоит 7 копеек.

Задача 10. Бутылка с пробкой стоит 10 копеек, причем бутылка на 9 копеек дороже пробки. Сколько стоит бутылка без пробки?



Пусть пробка стоит x коп, тогда бутылка стоит

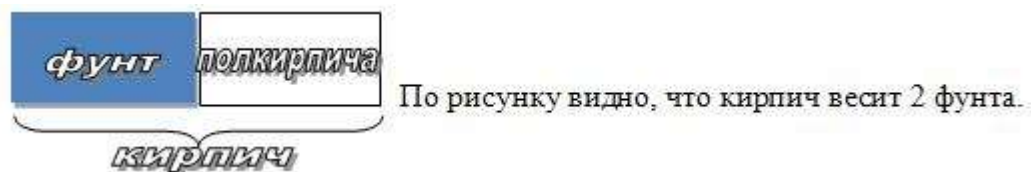
$(9+x)$ коп. Составим уравнение:

$$x+9+x=10, \quad x=0,5$$

бутылка стоит $10-0,5=9,5$ коп.

Ответ: 9,5 коп.

Задача 11. Кирпич весит фунт и полкирпича. Сколько фунтов весит кирпич?



Задача 12. У Жени сестер на 2 больше, чем братьев. На сколько, у Жениных родителей больше дочерей, чем сыновей?

Решение.

1 случай. Если Женя мальчик, то дочерей больше на 1, чем сыновей.

2 случай. Если Женя девочка, то дочерей на 3 больше, чем сыновей.

Задача 13. В Южной Америке есть круглое озеро, где 1 июня каждого года в центре озера появляется цветок Виктории Регии. Каждые сутки

площадь цветка увеличивается вдвое, и 1 июля он, наконец, покрывает все озеро, лепестки осыпаются на дно. Какого числа площадь цветка составляет половину площади озера?

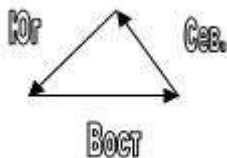
Решение. Данную задачу легче решать с конца. Так как 1 июня покроется все озеро, то накануне площадь будет в 2 раза меньше, то есть половина озера, а это будет 30 июня.

Задача 14. Улитка за день залезает вверх по столбу на 3 см, а за ночь, уснув, нечаянно спускается на 2 см. Высота столба 1 м, а наверху лежит вкусная для улитки конфета. Через сколько дней улитка ее достанет?

Решим задачу с конца. За последний день она проползет 3 см, а за сутки она проползает 1 см, то общее количество дней (3 см за 1 день и 97 см за 97 суток) будет 98 дней.

Задача 15. Охотник прошел от своей палатки 10 км на юг, повернул на восток, прошел прямо на восток еще 10 км, убил медведя, повернул на север и, пройдя еще 10 км, оказался у палатки. Какого цвета был медведь, и где это все было?

Решение.

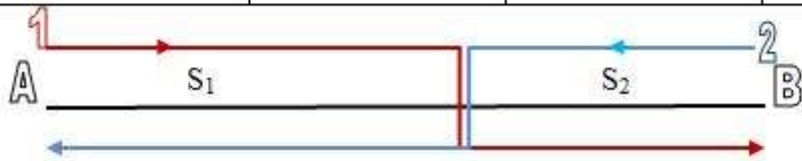


Изобразим схематически маршрут. Так как начала и конец пути совпадает, то охотник шел по траектории, изображенной на схеме, а это возможно, если палатка стоит на северном полюсе. Значит, медведь был белый.

Задача 16. Из A в B и из B в A на рассвете (одновременно) вышли навстречу друг другу (по одной дороге) две старушки. Они встретились в полдень, но не остановились, а каждая продолжала идти с той же скоростью, и первая пришла (в B) в 4 часа дня, а вторая (в A) в 9 часов вечера. В котором часу был в этот день рассвет?

Решение. Пусть x это время от рассвета до встречи, S_1 это путь пройденный первой старушкой до встречи, S_2 это путь пройденный второй старушкой до встречи, тогда заполним таблицу, зная что $V=S/t$.

		S	V	t
1 старушка	До встречи	S_1	$\frac{S_1}{x}$	x
	После встречи	S_2	$\frac{S_2}{4}$	4 ч
2 старушка	До встречи	S_2	$\frac{S_2}{x}$	x
	После встречи	S_1	$\frac{S_1}{9}$	9 ч



Из таблицы (или из схемы) получим равенство $S_1/x = S_2/4$ и $S_2/x = S_1/9$. Найдём отношение S_1/S_2 пройденных путей для обеих старушек, так как скорость остается неизменной, $S_1/S_2 = x/4$ (1) и $S_1/S_2 = 9/x$ (2). Так как в выражениях (1) и (2) правые части равны, то будут равны и левые части, $x/4 = 9/x$, $x^2 = 36$, $x = 6$ (ч) прошло до встречи в полдень. Значит, рассвет в этот день был в 6 часов утра.

