ISSN: 2181-1601
Scientific Journal Impact Factor (SJIF 2022=5.016)
Passport: http://sjifactor.com/passport.php?id=22257

ПРИМЕНАНИЕ ВЫЧЕТЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ИНТЕГРАЛОВ

С. Д. Эшметова, М. Р. Юсупов

АННОТАЦИЯ

В связи с востребованностью определенных методов и приемов преподавания темы интегралов в высшем образовании в данной статье описываются решения внутренних интегралов, основанные на теории скидок и некоторых ее приложениях.

Ключевые слова: особые точки, голоморфной функции, вычет, собственный интеграл.

Вычет в конечной точке. Пусть функция $f(z)$ регулярна в проколотой окрестности точки a $(a \neq \infty)$, т. е. К: $0 < |z-a| < \rho_0$. Тогда точка a является для функции либо изоли- рованной особой точкой однозначного характера, либо точкой регулярности, а функция $f(z)$ представляется в кольце К сходящимся рядом Лорана $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$

Определение 1. Вычетом функции $f(z)$ в точке a (обозначается $\underset{z=a}{res}\, f(z)$) называется коэффициент c_{-1} ряда Лорана для $f(z)$ в проколотой окрестности точки a, т. е.

$$\underset{z=a}{res}\, f(z) = c_{-1}. \tag{1}$$

Теорема 1 (основная теорема теории вычетов). Пусть функция $f(z)$ регулярна в односвязной области D, исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$ и пусть γ — простая замкнутая кривая, лежащая в области D и содержащая внутри себя точки $z_1, z_2, \dots, z_n$. Тогда

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res}\, f(z) \tag{2}$$

где кривая γ ориентирована положительно.

Следствие. Пусть функция $f(z)$ регулярна во всей расширенной комплексной плоскости, за исключением конечного числа особых точек. Тогда сумма всех вычетов функции $f(z)$, включая вычет в точке $z = \infty$, равна нулю, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res}\, f(z) + \underset{z=\infty}{res}\, f(z) = 0 \tag{3}$$

Scientific Journal Impact Factor (SJIF 2022=5.016)
Passport: http://sjifactor.com/passport.php?id=22257

Здесь z_k $(k = l, 2, \dots, n)$—все конечные особые точки функции $f(z)$, а точка $z = \infty$ является либо особой точкой, либо точкой регулярности функции $f(z)$.

Вычисление вычета в полюсе $\boldsymbol{z = a}$ $(a \neq \infty)$.

1. Случай простого полюса. Если точка a—простой полюс функции $f(z)$, то ряд Лорана для $f(z)$ в окрестности точки а имеет вид

$$f(z) = c_{-1}(z-a)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

откуда находим $c_{-1} = \lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)$, и поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

(4)

2. В частности, если $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ —регулярные в точке a функции, причем $\psi(a)=0$, $\psi'(a) \neq 0$, то точка a является простым полюсом функции $f(z)$, и по формуле

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \qquad (5).$$

3. Если точка a — полюс порядка n для функции $f(z)$

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}\left[(z-a)^n f(z)\right]}{dz^{n-1}} \qquad (6)$$

4. Если $f(z)$регулярные в точке $z = \infty$ функции,

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} z\left[f(\infty) - f(z)\right] \qquad (7)$$

Пример 1.

Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{z^3+1}{(z+2)^2(z-3)}$ имеющую полюс первого порядка в точке $z = 3$ и полюс второго порядка в точке $z = -2$. По формуле (4) имеем

$$\operatorname*{res}_{z=3} f(z) = \lim_{z\to 3}(z-3)f(z) = \lim_{z\to 3}\frac{z^3+1}{(z+2)^2} = \frac{28}{25} = 1\frac{3}{25},$$

по формуле (6) получаем

$$\operatorname*{res}_{z=-2} f(z) = \lim_{z\to -2}\frac{d}{dz}\left[(z+2)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to -2}\left[\frac{z^3+1}{z-3}\right]' = \lim_{z\to -2}\left[\frac{3z^2(z-3)-(z^3+1)}{(z-3)^2}\right] = 2\frac{3}{25}.$$

Теорема 2. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D расширенной комплексной плоскости, за исключением конечного числа особых точек, и

ISSN: 2181-1601
Scientific Journal Impact Factor (SJIF 2022=5.016)
Passport: http://sjifactor.com/passport.php?id=22257

непрерывна вплоть до границы Γ этой области. Пусть Γ состоит из конечного числа ограниченных кусочно гладких кривых. Тогда

а) если область D не содержит точку $z = \infty$, то

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res} f(z); \tag{8}$$

б) если точка $z = \infty$ принадлежит области D, то

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res} f(z) + \underset{z=\infty}{res} f(z) \right) \tag{9}$$

Здесь $z_1, z_2, \dots, z_n$— все конечные особые точки функции $f(z)$ лежащие в области D.

Пример 2.

Вычислим интеграл $\oint\limits_{|z|=4} \dfrac{z^2 dz}{(z^2+1)(z-3)}$.

Функция $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)(z-3)} = \dfrac{z^2}{(z+i)(z-i)(z-3)}$ имеет в круге $|z| < 4$ три особые точки: $z_1 = i$, $z_2 = -i$ и $z_3 = 3$. Следовательно,

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z-3)} = 2\pi i \sum_{n=1}^{3} \underset{z=a_n}{res} \frac{z^2}{(z^2+1)(z-3)}$$

$$\underset{z=z_1}{res} f(z) = \underset{z=i}{res} \frac{z^2}{(z^2+1)(z-3)} = \lim_{z\to i}(z-i)\cdot f(z) = \lim_{z\to i} \frac{z^2}{(z+i)(z-3)} = \frac{1}{2+6i}$$

$$\underset{z=z_2}{res} f(z) = \underset{z=-i}{res} \frac{z^2}{(z^2+1)(z-3)} = \lim_{z\to -i}(z+i)\cdot f(z) = \lim_{z\to -i} \frac{z^2}{(z-i)(z-3)} = \frac{1}{2-6i}$$

$$\underset{z=z_3}{res} f(z) = \underset{z=3}{res} \frac{z^2}{(z^2+1)(z-3)} = \lim_{z\to 3}(z-3)\cdot f(z) = \lim_{z\to 3} \frac{z^2}{z^2+1} = \frac{9}{10}$$

Следовательно,

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{z^2}{(z^2+1)(z-3)} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{2+6i} + \frac{1}{2-6i} + \frac{9}{10}\right) = 2\pi i .$$

Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов

Теоремы о вычетах позволяют сводить вычисление интегралов от комплексных функций по замкнутому контуру к нахождению вычетов подынтегральной функции внутри контура. Тем же способом могут быть вычислены и многие определенные интегралы от функций действительного переменного.

Scientific Journal Impact Factor (SJIF 2022=5.016)
Passport: http://sjifactor.com/passport.php?id=22257

1. Интегралы вида $I=\int_0^{2\pi} R(\cos x,\sin x)dx$. К интегралам по замкнутому контуру сводятся интегралы вида

$$I=\int_0^{2\pi} R(\cos x,\sin x)dx \tag{10}$$

где $R(u,v)$ — рациональная функция от u,v. Пусть $z=e^{ix}$.

Тогда

$$\cos x=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}),\ \sin x=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}),\ dx=\frac{1}{iz}dz.$$

При изменении x от 0 до 2π переменная z пробегает окружность $z=1$ в положительном направлении. Интеграл (10) сводится к интегралу по замкнутому контуру $I=\int_0^{2\pi} R(\cos x,\sin x)dx=\oint_{|z|=1} R(z)dz$,

где $R(z)=\frac{1}{iz}R(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{2}),\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}))$ — рациональная функция от z. По теореме о вычетах

$$I=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{res}R(z),$$

где $z_1,z_2,\dots,z_n$— все полюсы рациональной функции $R(z)$, лежащие в круге $|z|<1$.

Пример 3.

Вычислить интеграл.

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(3+2\cos^2 x)^2}$$

Замену переменной $z=e^{2ix},\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}{2},dx=\frac{1}{2iz}dz$, получаем

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(3+2\cos^2 x)^2}=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{1}{2iz}dz}{\left[3+2\cdot\frac{1+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}{2}\right]^2}=\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{(z^2+8z+1)^2}$$

Scientific Journal Impact Factor (SJIF 2022=5.016)
Passport: http://sjifactor.com/passport.php?id=22257

Уравнение $z^2 + 8z + 1 = 0$ имеет корни $z_1 = -4 - \sqrt{15}$, $z_2 = -4 + \sqrt{15}$. Так то в круге $|z| < 1$ лежит лишь точка $z_2 = -4 + \sqrt{15}$ полюс вторового порядка подынтегральной функции $f(z)$.

$$\Rightarrow \oint\limits_{|z|=1} f(z)dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{z}{(z^2+8z+1)^2} dz = 2\pi i \mathop{res}_{z=z_2} f(z)$$

$$\mathop{res}_{z=z_2} f(z) = \lim_{z\to z_2} \frac{d}{dz}\left[(z-z_2)^2 \cdot f(z)\right] = \lim_{z\to z_2}\left[\frac{z}{(z-z_1)^2}\right]' =$$

$$= \lim_{z\to z_2} \frac{z_1^{\,2} - z^2}{(z-z_1)^4} = \frac{\sqrt{15}}{225}, \text{ и следовательно,}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(3+2\cos^2 x)^2} = \frac{2}{i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{z}{(z^2+8z+1)^2} dz = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{\sqrt{15}}{225} = \frac{4\sqrt{15}\pi}{225}.$$

2. Интегралы от рациональных функций. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx \qquad (11)$$

где $R(x)$— рациональная функция. Предполагается, что интеграл (11) сходится.

Лемма 1. Пусть функция $f(z)$ регулярна в области $Imz > 0$, за исключением конечного числа особых точек, и непрерывна вплоть до границы этой области. Если интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

(12)

сходится и

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)dz = 0 \qquad (\gamma_r = \{|z| = r, 0 \le \arg z \le \pi\})$$

(13)

$Imz > 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \mathop{resf}_{z=z_k}(z) \qquad (14)$$

В формуле (14) вычеты берутся по всем особым точкам функции $f(z)$, лежащим в верхней полуплоскости.

Пример 4. Вычислим интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$$

Scientific Journal Impact Factor (SJIF 2022=5.016)
Passport: http://sjifactor.com/passport.php?id=22257

Так так функция $R(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}=\dfrac{z^2}{(z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i)}$ имеет в верхней полуплоскости полюс первого порядка в точке $z_1=i$, $z_3=3i$, то по формуле (4) находим

$$\underset{z=i}{res}\,R(z)=\underset{z=i}{res}\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}=\lim_{z\to i}\frac{z^2}{(z+i)(z^2+9)}=-\frac{1}{16i}$$

$$\underset{z=3i}{res}\,R(z)=\underset{z=3i}{res}\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}=\lim_{z\to 3i}\frac{1}{(z^2+1)(z+3i)}=\frac{3}{16i},$$

и в силу (14) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+9)}=2\pi i\cdot\left(\frac{3}{16i}-\frac{1}{16i}\right)=2\pi i\cdot\frac{1}{8i}=\frac{\pi}{4}$.

3. Интегралы вида. $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda x}R(x)dx$. Здесь $R(x)$— рациональная функция. Интеграл

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda x}R(x)dx \qquad (15)$$

есть преобразование Фурье функции $R(x)$. При вычислении интегралов (15) используется.

Лемма 2 (Жордана). Пусть $\lambda>0$ и выполнены следующие условия:
1) функция $g(z)$ непрерывна в области $Imz\geq 0$, $|z|\geq R_0>0$;
2) $M(R)=\max\limits_{z\in C_R}|g(z)|\to 0$ при $R\to\infty$, (16)

где C_R — полуокружность $|z|=R$, $Imz\geq 0$.
Тогда

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_r}g(z)e^{i\lambda z}dz=0 \qquad (17)$$

Замечание. Если функция $R(x)$ действительна придействительных x и $\lambda>0$, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\cos\lambda x dx=-2\pi\cdot\mathrm{Im}\left\{\sum_{\mathrm{Im}\,z_k>0}\underset{z=z_k}{res}\left[e^{i\lambda z}\cdot R(z)\right]\right\}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\sin\lambda x dx=2\pi\cdot\mathrm{Re}\left\{\sum_{\mathrm{Im}\,z_k>0}\underset{z=z_k}{res}\left[e^{i\lambda z}\cdot R(z)\right]\right\}. \qquad (18)$$

Пример 5. Вычислим интеграл

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}dx.$$

Scientific Journal Impact Factor (SJIF 2022=5.016)
Passport: http://sjifactor.com/passport.php?id=22257

Так так функция $R(z)=\dfrac{(z+1)e^{2iz}}{z^2+2z+2}$ имеет в верхней полуплоскости полюс первого порядка в точке $z_1=-1+i$, то по формуле (4) находим

$$\underset{z=-1+i}{res}\,R(z)=\underset{z=-1+i}{res}\frac{(z+1)e^{2iz}}{z^2+2z+2}=\lim_{z\to-1+i}\frac{(z+1)e^{2iz}}{z-(-1-i)}=\frac{i}{2i}e^{-2i-2}=\frac{1}{2}e^{-2}(\cos 2-i\sin 2).$$

Отсюда $I=2\pi\,\mathrm{Re}\left(\sum_{\mathrm{Im}\,z_k>0}\underset{z=z_k}{res}\left(e^{i\lambda z}R(z)\right)\right)=2\pi\cdot\frac{1}{2}e^{-2}\cos 2=\pi e^{-2}\cos 2$.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Садуллаев А., Худойбергангов Г., Мансуров Х., Ворисов А.,
2. Тўйчиев Т. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами.
3. 3-қисм (комплекс анализ).- Т. Ўзбекистон, 2000.
4. Худойберганов Г., Ворисов А., Мансуров Х. Комплекс анализ.
5. (маърузалар). – Т. Университет,1998.
6. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного пременного. 3-nashri. – М. “Наука”, 1975.
7. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. 2-nashri, 1-ч.-М, “Наука”, 1976.
8. Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. Лекции по теории функций комплексного переменного. Москва «Наука» главная редакция Физико-Математической Литературы 1889.
9. Abdullayev, S. A. O. G. L., & Ahmadjonova, M. A. Q. (2021). MATLAB TIZIMIDA ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHISH. Academic research in educational sciences, 2(11), 1576-1584.
10. Solayeva, M. N., Yusupov, M. R., Abdullayev, Sh. A. (2022). Ba'zi bir ajoyib limitlarga oid misollarni noananaviy uslublardan foydalanib yechish usullari. TABIIY-ILMIY FANLARNI O‘QITISHDA FUNDAMENTAL VA AMALIY YONDASHUVLAR Respublika ilmiy anjuman materiallari to‘plami, 1(1), 164-168.
11. Olimov I.S., Karimov A.A., Yo'ldoshev Sh.Z. (2021). Buyumlar internetida autentifikatsiya va ruxsatlarni boshqarish. Zamonaviy axborot, kommunikatsiya texnologiyalari va AT-ta’lim tatbiqi muammolari. 3, 236-239.
12. Ibadullayev, D. K. (2022). Research and analysis of the solution of Hamilton-Jacobi equation. Science and Education, 3(9), 8-15.
13. Radjabov, B. S., Matmurodov, A. K., Abdullayev, S. A. (2021). Aniq emas integralni xisoblash usullari mavzusni o‘qitishda klaster metodidan foydalanish. Mug'allim, 1(1), 118-122.
14. Abdullayev, S. A.(2021).Modern technologies of studying mathematics in the higher educational institution as a means of motivation of students’ educational

Scientific Journal Impact Factor (SJIF 2022=5.016)
Passport: http://sjifactor.com/passport.php?id=22257
activity.International scientific-practical conference THE 2nd INTERNATIONAL CONFERENCE ON XXI CENTURY SKILLS IN LANGUAGE TEACHING AND LEARNING April 9, 2021, 1(1), 36-39.
15. M. Gaipov, Q. Eshqorayev, Sh. Abdullayev. (2022). O'quvchilarni irratsional tenglamalarni yechishga o'rgatishning zamonaviy metodlari. Mug'allim, 3(1), 84-86.