

В.П. МИНОРСКИЙ

Олий
математикадан
МАСАЛАЛАР
ТЎПЛАМИ

*

Узб. 512
11-62
В. П. МИНОРСКИЙ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКАДАН МАСАЛАЛАР ТЎПЛАМИ

*СССР Олий ва махсус
ўрта таълим министрлиги
олий техника ўқув юртлари
учун ўқув қўлланмаси сифатида
рухсат этган*

*Русча ўн биринчи нашрига
мувофиқ учинчи нашири*



«ЎҚИТУВЧИ» НАШРИЁТИ
ТОШКЕНТ — 1977

51

М 52 Минорский В. П.

Олий математикадан масалалар тўплами.
(Олий техника ўқув юртлари
учун ўқув қўлланма.) Русча
II нашрига мувофиқ 3 нашри. Т.,
«Ўқитувчи», 1977.
368 б.

Минорский В. П. Сборник задач
по высшей математике.

51(075)

© «Ўқитувчи» нашриёти, русчадан таржима, 1977 й.

20203 — 287
М 353. 06. 77 146—77

УЧИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИДАН

Бу «Тўпламда» техника олий ўқув юртлари олий математика курси программасини тўла ўз ичига олувчи аналитик геометрия ва математик анализдан масалалар ва мисоллар берилган ва улар методик жиҳатдан тақсимланган.

Ҳар бир параграфнинг бошида шу параграфдаги масалаларни ечиш учун зарур бўлган формула, таъриф ва бошқа қисқача назарий маълумотлар келтирилган.

«Тўпламнинг» ҳар бир параграфи охирида (чи-
зиқдан сўнг) умумий материалнинг қарийб учдан
бир қисми ҳажмида, қайтариш учун масалалар
келтирилган. Ўқитувчи синфда ишлаш ва уйга
бериш учун ёки ёзма ишлар олдида ўткази-
лган қайтариш учун зарур масалаларни ҳар бир
параграфнинг охирида берилган масалалар ичи-
дан танлаб олиши мумкин. Ундан ташқари, ма-
салаларни бу тарзда жойлаштириш сиртдан ўқувчи
ёки кечки факультетларда ўқувчи студентларнинг
курсни ўзлаштириши учун ечиши зарур бўлган
масалалар минимумини аниқлашга имкон беради.

Бу «Тўпламдан» техника олий ўқув юртларида
ўқитувчи раҳбарлигида ишлаш учун ҳам, муста-

қил ўрганиш учун ҳам фойдаланиш мумкин, чунки «Тўпламдаги» масалаларнинг деярли ҳаммасининг жавоби бор, баъзилари эса ечиб кўрсатилган. Ундан ташқари, кўпгина масалаларни ечиш учун текстда ёки жавобларда кўрсатмалар берилган. Қисқача назарий тушунтиришлар ҳам бунга имкон беради.

Китобнинг ушбу нашри унча муҳим бўлмаган тузатишларсиз нашр қилинди.

НАШРИЁТ ДАН

Олий математика курсига доир масала ва мисоллар тўпламининг ўзбек тилида камлигини эътиборга олиб, автор томонидан берилган изоҳ ва кўрсатмалардан ташқари, таржимон М. Холиқов баъзи масалаларга кўрсатмалар берди. Бу кўрсатмалар студентларга ва айниқса сиртдан ўқувчи студентларга анча кўмак берар деб ишонамиз.

ТЕКИСЛИҚДАГИ АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ

1-§. Тўғри чизикдаги ва текисликдаги нуқтанинг координаталари. Икки нуқта орасидаги масофа

1°. Ўқдаги $A(x_1)$ ва $B(x_2)$ нуқталар орасидаги масофа:

$$d = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}. \quad (1)$$

2°. Ўқдаги йўналтирилган AB кесмачинг (алгебраик) катталиги:

$$AB = x_2 - x_1. \quad (2)$$

3°. Текисликдаги $A(x_1; y_1)$ ва $B(x_2; y_2)$ нуқталар орасидаги масофа:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (3)$$

4°. Текисликдаги йўналтирилган кесмачининг ёки боши $A(x_1; y_1)$ ва охири $B(x_2; y_2)$ бўлган $\overrightarrow{BA}$ векторнинг координата ўқларидаги проекциялари:

$$\text{пр}_x \overrightarrow{AB} = X = x_2 - x_1, \quad \text{пр}_y \overrightarrow{AB} = Y = y_2 - y_1. \quad (4)$$

1. Сон ўқида $A(-5)$, $B(+4)$ ва $C(-2)$ нуқталар ясалсин ва кесмаларнинг шу ўқдаги AB , BC ва AC катталиклари топилсин. $AB + BC = AC$ эканлиги текширилсин.

2. Олдинги машқ $A(+1)$, $B(-4)$ ва $C(+5)$ нуқталар учун бажарилсин.

3. Учлари $A(-4; 2)$, $B(0; -1)$ ва $C(3; 3)$ нуқталарда бўлган учбурчак ясалсин ва унинг периметри ва бурчаклари аниқлансин.

4. Учлари $A(-3; -2)$, $B(0; -1)$ ва $C(-2; 5)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг тўғри бурчакли эканлиги исбот қилинсин.

5. $A(-4; 0)$, $B(-1; 4)$ нуқталар ҳамда Oy ўққа нисбатан уларга мос равишда симметрик бўлган A_1 , B_1 нуқталар ясалсин. $AB B_1 A_1$ трапециянинг периметри ҳисоблансин.

6. B нуқта биринчи координаталар бурчагининг биссектрисасига нисбатан $A(4; -1)$ нуқтага симметрик. AB нинг узунлиги топилсин.

7. $A(2; 1)$ нуқтадан ҳам, Oy ўқдан ҳам 5 бирликка узоқлашган нуқта топилсин.

8. Ординаталар ўқида $A(4; -1)$ нуқтадан 5 бирликка узоқлашган нуқта топилсин. Бу масаланинг икки ечимга эга эканлигининг сабаби ясаш йўли билан тушунтирилсин.

9. Абсциссалар ўқида $A(a; b)$ нуқтадан c бирликка узоқлашган нуқта топилсин. Ечим $c > |b|$, $c = |b|$ ва $c < |b|$ ҳоллар учун текширилсин.

10. Ox ўқда $A(8; 4)$ нуқтадан ва координаталар бошидан баравар узоқликда турган нуқта топилсин.

11. Учлари $A(4; 3)$, $B(-3; 2)$ ва $C(1; -6)$ нуқталарда бўлган учбурчакка ташқи чизилган доиранинг маркази ва радиуси топилсин.

12. $A(2; 6)$ ва $B(0; 2)$ нуқталар берилган. $\overline{AB}$ вектор ва унинг ўқлардаги компонентлари ясалсин ҳамда $\text{пр}_x \overline{AB}$, $\text{пр}_y \overline{AB}$ ва AB узунлиги ҳисоблансин.

13. $A(2; 5)$ нуқтага ўқлардаги проекциялари $X = 3$ ва $Y = 3$ бўлган куч таъсир этади. Шу кучни ифодаловчи $\overline{AB}$ векторнинг охириги нуқтаси ва кучнинг катталиги аниқлансин.

14. $A(-3; -2)$ нуқтага Oy ўқдаги проекцияси -1 га тенг ($Y = -1$), Ox ўқдаги проекцияси X эса мусбат бўлган куч таъсир этади. Агар кучнинг катталиги $5\sqrt{2}$ га тенг бўлса, кучни ифодаловчи $\overline{AB}$ векторнинг охириги нуқтаси аниқлансин.

15*. Сон ўқида $A(1)$, $B(-3)$ ва $C(-2)$ нуқталар ясалсин ва ўқдаги AB , BC ва AC кесмаларнинг катталиклари топилсин. $AB + BC + CA = 0$ эканлиги текшириб кўрилсин.

16. Текисликда $A(-7; 0)$ ва $B(0; 1)$ нуқталар ҳамда биринчи координаталар бурчагининг биссектрисасига нисбатан уларга симметрик бўлган A_1 ва B_1 нуқталар ясалсин. $AB B_1 A_1$ трапециянинг периметри ҳисоблансин.

17. Ординаталар ўқида координаталар бошидан ва $A(-2; 5)$ нуқтадан баравар узоқликда турган нуқта топилсин.

* Ҳар параграф охирида чизикдан сўнг уйда ечиш ва қайтариш учун масалалар берилган.

18. Абсциссалар ўқида $A(-2; 3)$ нуқтадан $3\sqrt{5}$ birlikка узоқлашган нуқта топилсин.

19. Учлари $A(-3; -1)$, $B(5; 3)$ ва $C(6; -4)$ нуқталарда бўлган учбурчакка ташқи чизилган доиранинг маркази ва радиуси аниқлансин.

20. $A(x_1; y_1)$ ва $B(x_2; y_2)$ нуқталар берилган. Координаталар бошига $\overline{OA}$ ва $\overline{OB}$ векторлар билан ифодаланувчи кучлар таъсир этади. Уларнинг тенг таъсир этувчиси $\overline{OC}$ ясалсин ва унинг бирорта координаталар ўқидаги проекцияси, қўшилувчиларнинг шу ўқидаги проекцияларининг йиғиндисига тенг экани исбот қилинсин.

21. $A(1; 2)$, $B(3; 5)$, $C(5; 2)$ ва $D(2; -2)$ нуқталар берилган. A нуқтага $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ва $\overline{AD}$ кучлар таъсир этади. Тенг таъсир этувчи кучнинг ўқлардаги проекциялари ва унинг катталиги топилсин.

2-§. Кесмани берилган нисбатда бўлиш. Учбурчак ва кўпбурчакнинг юзи

1°. Кесмани берилган нисбатда бўлиш. $A(x_1; y_1)$ ва $B(x_2; y_2)$ нуқталар берилган AB кесмани $AN:NB = \lambda$ нисбатда бўлувчи $N(x; y)$ нуқтанинг координаталари ушбу:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad (1)$$

формулалар билан аниқланади. Хусусий ҳолда кесмани тенг иккига, яъни $\lambda = 1:1 = 1$ нисбатда бўлганда

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (2)$$

2°. Учлари $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, ..., $F(x_n; y_n)$ нуқталарда бўлган кўпбурчак юзи:

$$S = \pm \frac{1}{2} \left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right] \quad (3)$$

га тенг.

$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ кўринишдаги ифода $x_1 y_2 - x_2 y_1$ га тенг бўлиб, 2-тартибли детерминант дейилади*.

22. $A(-2; 1)$ ва $B(3; 6)$ нуқталар ясалсин. AB кесмани $AN:NB = 3:2$ нисбатан бўлувчи $N(x; y)$ нуқта топилсин.

* Детерминантлар IV бобда тўла баён этилади.

23. $A(-2; 1)$ ва $B(3; 6)$ нуқталар берилган. AB кесма $AN:NB = -3:2$ нисбатда «бўлинсин».

24. Ох ўқнинг $A(x_1)$ ва $B(x_2)$ нуқталарига m_1 ва m_2 массалар жойлаштирилган. Бу система массаларининг маркази топилсин.

25. Ох ўқнинг $A(x_1)$, $B(x_2)$ ва $C(x_3)$ нуқталарига мос равишда m_1 , m_2 ва m_3 массалар жойлаштирилган. Бу система массаларининг маркази

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

нуқтада экани кўрсатилсин.

26. Узунлиги 40 см ва оғирлиги 500 г бўлган бир жинсли стерженнинг учларига оғирликлари 100 ва 400 г шарлар осилган. Шу системанинг оғирлик маркази аниқлансин.

27. $A(-2; 4)$, $B(3; -1)$ ва $C(2; 3)$ нуқталарга мос равишда 60, 40 ва 100 г массалар қўйилган. Шу система массаларининг маркази аниқлансин.

28. Учлари $A(2; -1)$, $B(4; 3)$ ва $C(-2; 1)$ нуқталарда бўлган учбурчак томонларининг ўрталари аниқлансин.

29. Учлари $O(0; 0)$, $A(8; 0)$ ва $B(0; 6)$ нуқталарда бўлган учбурчакда OC медиана ва OD биссектриса узунликлари аниқлансин.

30. Учлари $A(1; -1)$, $B(6; 4)$ ва $C(2; 6)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг оғирлик маркази топилсин.

Қўрсатма. Учбурчакнинг оғирлик маркази медианаларининг кесилган нуқтасида ётади.

31. Учлари $A(2; 0)$, $B(5; 3)$ ва $C(2; 6)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

32. $A(1; 1)$, $B(-1; 7)$ ва $C(0; 4)$ нуқталарнинг бир тўғри чизикда ётиши кўрсатилсин.

33. Учлари $A(3; 1)$, $B(4; 6)$, $C(6; 3)$ ва $D(5; -2)$ нуқталарда бўлган тўртбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

34. $A(-3; -1)$ ва $B(4; 6)$ нуқталарга мос равишда 30 ва 40 кг параллел кучлар таъсир этади. AB кесмада ўша кучларнинг тенг таъсир этувчисининг қўйилган нуқтаси топилсин.

35. $O(0; 0)$, $A(2; -5)$ ва $B(4; 2)$ нуқталарга мос равишда 500, 200 ва 100 г массалар жойлаштирилган. Бу система массаларининг маркази аниқлансин.

екториясининг тенгламаси ёзилсин. Ҳаракат траекторияси ясалсин.

56. 1) $2x + 5y + 10 = 0$; 2) $y = 3 - 2x - x^2$; 3) $y^2 = 4 - x$ чизикларнинг координата ўқлари билан кесишган нуқталари аниқлансин. Чизиклар ясалсин.

57. Ox ўқдан ва $F(0; 2)$ нуқтадан тенг узоклашган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин ва тенгламаси бўйича чизик ясалсин.

58. $F_1(-2; -2)$ ва $F(2; 2)$ нуқталаргача бўлган масофаларининг айрмаси 4 га тенг нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин. Тенгламаси бўйича чизик ясалсин.

4-§. Тўғри чизикнинг: 1) бурчак коэффициентли тенгламаси; 2) умумий тенгламаси; 3) кесмалар бўйича тенгламаси

1°. Тўғри чизикнинг бурчак коэффициентли тенгламаси

$$y = kx + b, \quad (1)$$

k параметр тўғри чизикнинг Ox ўққа оғиш бурчаги α нинг тангенсига тенг бўлиб ($k = \operatorname{tg} \alpha$), тўғри чизикнинг бурчак коэффициенти, баъзан қиялиги дейилади. b параметр бошланғич ордината ёки Oy ўқ ажратган кесма катталиги.

2°. Тўғри чизикнинг умумий тенгламаси:

$$Ax + By + C = 0. \quad (2)$$

Хусусий ҳоллар:

а) $C = 0$ бўлса, $y = -\frac{A}{B}x$ — тўғри чизик координаталар бошидан ўтади;

б) $B = 0$ бўлса, $x = -\frac{C}{A} = a$ — тўғри чизик Ox ўққа параллел бўлади;

в) $A = 0$ бўлса, $y = -\frac{C}{B} = b$ — тўғри чизик Oy ўққа параллел бўлади;

г) $B = C = 0$ бўлса, $Ax = 0$ ёки $x = 0$ — тўғри чизик Oy ўқдан иборат;

д) $A = C = 0$ бўлса, $By = 0$ ёки $y = 0$ — тўғри чизик Ox ўқдан иборат.

3°. Тўғри чизикнинг ўқлардан ажратган кесмалар бўйича тенгламаси

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (3)$$

Бу ерда a ва b — тўғри чизикнинг ўқлардан кесган кесмаларининг катталиклари.

$$m_{AB} = \frac{1}{2 \cdot 1} \sqrt{2(10A^2 + 16B^2) - 16B^2} = 5 \quad 11$$

59. Оу ўқдан $b = 3$ кесма ажратиб, Ох ўқ билан 1) 45° ; 2) 135° бурчак ташкил қилувчи тўғри чизиклар ясалсин. Ўша тўғри чизикларнинг тенгламалари ёзилсин.

60. Оу ўқдан $b = -3$ кесма ажратиб, Ох ўқ билан 1) 60° ; 2) 120° бурчак ташкил қилувчи тўғри чизиклар ясалсин. Бу тўғри чизикларнинг тенгламалари ёзилсин.

61. Координаталар бошидан ўтиб, Ох ўқ билан: 1) 45° ; 2) 60° ; 3) 90° ; 4) 120° ; 5) 135° бурчак ташкил қилувчи тўғри чизикларнинг тенгламалари ёзилсин.

62. Координаталар бошидан ва $(-2; 3)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизик ясалсин ва унинг тенгламаси ёзилсин.

63. 1) $2x - 3y = 6$; 2) $2x + 3y = 0$; 3) $y = -3$; 4) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ тўғри чизикларнинг ҳар қайсиси учун k ва b параметрлар аниқлансин.

64. 1) $3x + 4y = 12$; 2) $3x - 4y = 0$; 3) $2x - 5 = 0$; 4) $2y + 5 = 0$ тўғри чизиклар ясалсин.

65. $A(2; 3)$ нуқтадан ўтиб, Ох ўқ билан 45° бурчак ташкил қилувчи тўғри чизикнинг k ва b параметрлари аниқлансин. Бу тўғри чизикнинг тенгламаси ёзилсин.

66. 1) $2x - 3y = 6$; 2) $3x - 2y + 4 = 0$ тўғри чизикларнинг тенгламалари ўқлардан ажратган кесмаларига нисбатан ёзилсин.

67. $O(0; 0)$ ва $A(-3; 0)$ нуқталар берилган. Бир томони OA кесмадан иборат бўлган ва диагоналлари $B(0; 2)$ нуқтада кесишувчи параллелограмм ясалган. Параллелограмм томонларининг ва диагоналларининг тенгламалари ёзилсин.

68. $A(4; 3)$ нуқтадан ўтувчи ва координаталар бурчагидан юзи 3 кв. бирликка тенг учбурчак кесувчи тўғри чизик тенгламаси ёзилсин.

69. $y = -2$ ва $y = 4$ тўғри чизиклар $3x - 4y - 5 = 0$ тўғри чизикни мос равишда A ва B нуқталарда кесиб ўтади. $\overline{AB}$ вектор ясалсин, унинг узунлиги ва ўқлардаги проекциялари аниқлансин.

70. $A(3; 5)$, $B(2; 7)$, $C(-1; -3)$ ва $D(-2; -6)$ нуқталар $y = 2x - 1$ тўғри чизикда ётадими, ё ўша тўғри чизикдан «оқорироқда» ёки «қуйироқда» жойлашганми?

71. 1) $y > 3x + 1$; 2) $y < 3x + 1$; 3) $2x + y - 4 \geq 0$ ва 4) $2x + y - 4 < 0$ тенгсизликлар қандай геометрик маънога эга?

72. Нуқталарининг координаталари ушбу

1) $y < 2 - x$, $x > -2$, $y > -2$;

$$2) y > 2 - x, x < 4, y < 0;$$

$$3) \frac{x}{4} + \frac{y}{2} < 1, y \geq x + 2, x \geq -4$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи соҳалар ясалсин*.

73. $M(x; y)$ нуқта шундай ҳаракат қиладики, унинг $A(-a; a)$ ва $B(a; -a)$ нуқталаргача бўлган масофалари квадратларининг айирмаси $4a^2$ га тенг бўлиб қола беради. Нуқта траекториясининг тенгламаси ёзилсин.

74. Ox ўқдаги проекцияси m бирлик/секунд тезлик билан Oy ўқдаги проекцияси n бирлик/секунд тезлик билан ҳаракат қилувчи $M(x; y)$ нуқта траекториясининг тенгламаси ёзилсин. Нуқтанинг бошланғич вазияти:

$$M_0(a; b).$$

75. 1) $b = -2$, $\varphi = 60^\circ$ ва 2) $b = -2$, $\varphi = 120^\circ$ параметрлар билан берилган тўғри чизиклар ясалсин ва уларнинг тенгламалари ёзилсин.

76. $(-2; 3)$ нуқтадан ўтиб, Ox ўқ билан 45° бурчак ташкил этувчи тўғри чизикнинг k ва b параметрлари аниқлансин.

77. Асослари 8 ва 2 см бўлган тенг ёнли трапециянинг ўткир бурчаги 45° . Трапециянинг катта асосини Ox ўқ, унинг симметрия ўқини Oy ўқ деб олиб, томонларининг тенгламалари ёзилсин.

78. Диагоналлари 10 ва 6 см бўлган ромбнинг катта диагоналинини Ox ўқ, кичик диагоналинини Oy ўқ деб олиб, унинг томонларининг тенгламалари ёзилсин.

79. $(-4; 6)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизик координаталар бурчагидан юзи 6 кв. бирликка тенг учбурчак ажратади. Бу тўғри чизик тенгламаси ёзилсин.

80. $x = -3$ тўғри чизикқа нисбатан Ox ўқдан икки марта узоқроқда ҳаракат қилувчи $M(x; y)$ нуқта траекториясининг тенгламаси ёзилсин.

81. $x = -1$ ва $x = 3$ тўғри чизиклар $y = 2x + 1$ тўғри чизикни A ва B нуқталарда кесиб ўтади. $\overrightarrow{AB}$ векторининг узунлиги ва ўқлардаги проекциялари аниқлансин.

$$\frac{1}{2} \sqrt{6^2 + 8^2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 62.2$$

* Ҳар бир нуқтасининг координаталари маълум бир шартларки (масалан, тенгсизликларни) қаноатлантирадиган xOy текислиkning қисми «соҳа» дейилади. Агар соҳа чегарасида ётувчи нуқталар ҳам унга қарши бўлса соҳа ёпиқ дейилади. Акс ҳолда соҳа очик дейилади.

$P_2 = 12$
n

$P(P - \Delta A) (B - \Delta B) \dots$

5-§. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Берилган нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси. Берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси. Икки тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтаси

1°. $y = k_1x + b_1$ тўғри чизиқдан $y = k_2x + b_2$ тўғри чизиқчага соат стрелкасига қарши йўналишда ҳисобланувчи φ бурчак

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad (1)$$

формула билан аниқланади.

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ ва } A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

тенгламалар билан берилган тўғри чизиқлар учун (1) формула қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

Параллеллик шarti: $k_1 = k_2$ ёки $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Перпендикулярлик шarti: $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ ёки $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

2°. Берилган $A(x_1; y_1)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (2)$$

3°. Берилган икки $A(x_1; y_1)$ ва $B(x_2; y_2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (3)$$

4°. Параллел бўлмаган икки $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ва $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтасини топиш учун уларнинг тенгламаларини биргаликда ечиш керак.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -C_1B_1 \\ -C_2B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1-C_1 \\ A_2-C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{vmatrix}}$$

ни ҳосил қиламиз.

82. Қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги бурчак аниқлансин:

$$1) \begin{cases} y = 2x - 3, \\ y = \frac{1}{2}x + 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x - y + 7 = 0, \\ 2x - 3y + 1 = 0; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x + y = 0, \\ y = 3x - 4; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3x + 2y = 0, \\ 6x + 4y + 9 = 0; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} 3x - 4y = 6, \\ 8x + 6y = 11; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \\ \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1. \end{cases}$$

83. $3x - 2y + 7 = 0$, $6x - 4y - 9 = 0$, $6x + 4y - 5 = 0$, $2x + 3y - 6 = 0$ тўғри чизиклардан параллел ва перпендикуляр бўлганлари кўрсатилсин.

84. $A(2; 3)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиклар дастасининг тенгламаси ёзилсин. Шу дастадан Ox ўқ билан: 1) 45° , 2) 60° , 3) 135° , 4) 0° бурчак ташкил этувчи тўғри чизиклар танлаб олинсин ва улар ясалсин.

85. $A(-2; 5)$ нуқта ва $2x - y = 0$ тўғри чизик ясалсин. A нуқтадан ўтувчи тўғри чизиклар дастасининг тенгламаси ёзилсин ва ўша дастадан берилган тўғри чизикқа: 1) параллел; 2) перпендикуляр бўлган тўғри чизиклар танлаб олинсин.

86. $2x - 5y - 10 = 0$ тўғри чизикнинг координата ўқлари билан кесишган нуқталаридан бу тўғри чизикқа перпендикулярлар чиқарилган. Уларнинг тенгламалари ёзилсин.

87. $A(-1; 3)$ ва $B(4; -2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизик тенгламаси ёзилсин.

88. Учлари $A(-2; 0)$, $B(2; 6)$ ва $C(4; 2)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг BD баландлиги ва BE медианаси ўтказилган. AC томон, BE медиана ва BD баландликнинг тенгламалари тузилсин.

89. Учбурчак томонлари $x + 2y = 0$, $x + 4y - 6 = 0$, $x - 4y - 6 = 0$ тенгламалар билан берилган. Унинг ички бурчаклари топилин.

Кўрсатиш. Учбурчакнинг ички бурчакларини топиш учун томонларнинг бурчак коэффициентларини камаювчи $k_1, k_2 > k_3$ тартибда ёзиб, $\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$, $\frac{k_2 - k_3}{1 + k_2 k_3}$, $\frac{k_3 - k_1}{1 + k_1 k_3}$ формулалар бўйича ўша бурчакларнинг тангенсларини ҳисоблаш керак. Бунга, учбурчак учларидан бирини координаталар бошида жойлаштириб, чизмадан ишонч ҳосил қилинсин.

90. Координаталар бошидан ўтиб, $y = 4 - 2x$ тўғри чизик билан 45° бурчак ташкил этувчи тўғри чизик тенгламаси ёзилсин.

91. $A(-1; 1)$ нуқтадан ўтиб, $2x + 3y = 6$ тўғри чизик билан 45° бурчак ташкил этувчи тўғри чизик тенгламаси ёзилсин.

92. Ox ўқ билан $\varphi = \operatorname{arctg} 2$ бурчак ташкил этувчи ёруғлик нури $A(5; 4)$ нуқтадан чиқади ва шу ўқдан қайтади. Тушувчи ва қайтувчи нурларнинг тенгламалари ёзилсин.

Кўрсатма. Нурнинг тушиш ва қайтиш бурчакларининг тенглигидан фойдаланилсин.

93. Учбурчак томонлари $x + 3y = 0$, $x = 3$, $x - 2y + 3 = 0$ тенгламалар билан берилган. Унинг учлари ва бурчаклари аниқлансин.

94. $3x + 2y = 6$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари орасидаги кесмаси тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси бўлиб ҳисобланади. Агар учбурчак тўғри бурчагининг учи берилган тўғри чизиқдан «юқорироқда» ётиши маълум бўлса, ўша уч топилсин.

Кўрсатма. Тўғри чизиқ Ox ўқни $A(2; 0)$ нуқтада, Oy ўқни эса $B(0; 3)$ нуқтада кесади. Учбурчак тўғри бурчагининг учини $M(x, y)$ деб олсак, $MA = MB$ ва $(AB)^2 = 2(MA)^2$ эканидан фойдаланиш керак.

95. Учлари $A(-2; 0)$, $B(2; 4)$ ва $C(4; 0)$ нуқталарда бўлган учбурчак берилган. Унинг томонлари, AE медианаси, AO баландлигининг тенгламалари ёзилсин ва AE медиана узунлиги топилсин.

96. Учлари $A(0; 7)$, $B(6; -1)$ ва $C(2; 1)$ нуқталарда бўлган учбурчак томонларининг тенгламалари ёзилсин ва бурчаклари топилсин.

97. $2x - y + 8 = 0$ тўғри чизиқ Ox ва Oy ўқларни A ва B нуқталарда кесиб ўтади. N нуқта AB ни $AN:NB = 3:1$ нисбатда бўлади. AB тўғри чизиққа N нуқтадан чиқарилган перпендикулярнинг тенгламаси ёзилсин.

98. Томонлари $x + y = 4$, $3x - y = 0$, $x - 3y - 8 = 0$ тенгламалар билан берилган учбурчак ясалсин, унинг бурчаклари ва юзи топилсин.

99. Учлари $A(-4; 2)$, $B(2; -5)$ ва $C(5; 0)$ нуқталарда бўлган учбурчак медианаларининг кесишган нуқтаси ва баландликларининг кесишган нуқтаси топилсин.

100. $A(-5; 6)$ нуқтадан Ox ўқ билан $\varphi = \operatorname{arctg}(-2)$ бурчак ташкил этувчи ёруғлик нури чиқади ва Ox ўқдан қайтади, сўнгра Oy ўқдан қайтади. Бу учала нурнинг тенгламалари ёзилсин.

Кўрсатма. 16-бетдаги 92-масалага берилган кўрсатмага қаралсин.

6-§. Тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси. Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа. Биссектрисаларнинг тенгламалари. Берилган икки тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтасидан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси

1°. Тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$x \cos \beta + y \sin \beta - p = 0. \quad (1)$$

Бунда p — координаталар бошидан тўғри чизиққа туширилган перпендикуляр (нормал) узунлиги, β эса ўша перпендикулярнинг Ox ўққа оғиш бурчаги. Тўғри чизиқнинг $Ax + By + C = 0$ умумий тенгламасини нормал кўринишга келтириш учун унинг барча ҳадларини

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

нормаллаштирувчи кўпайтувчига кўпайтириш керак. M нинг ишораси тенгламадаги озод ҳад C нинг ишорасига тескари қилиб олинади.

2°. $(x_0; y_0)$ нуқтадан тўғри чизиққача бўлган d масофа ни тапиш учун тўғри чизиқ нормал тенгламасининг чап томонидаги ўзгарувчи координаталар ўрнига $(x_0; y_0)$ координаталарни қўйиб, ҳосил бўлган соннинг абсолют қийматини оламиз, яъни

$$d = |x_0 \cos \beta + y_0 \sin \beta - p|. \quad (2)$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (2')$$

3°. $Ax + By + C = 0$ ва $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчаклар биссектрисаларининг тенгламалари:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}. \quad (3)$$

4°. Берилган икки тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтасидан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси:

$$\alpha (Ax + By + C) + \beta (A_1x + B_1y + C_1) = 0. \quad (4)$$

$\alpha = 1$ деб олиш мумкин, Ҳолда биз (4) дастадан берилган тўғри чизиқлардан иккинчисини йўқотган бўламиз, яъни у вақтда (4) дан иккинчи тўғри чизиқнинг тенгламасини ҳосил қила оламиз.

101. 1) $3x - 4y - 20 = 0$, 2) $x + y + 3 = 0$, 3) $y = kx + b$ тўғри чизиқларнинг тенгламалари нормал кўринишга келтирилсин.

102. Нормал узунлиги $p = 2$ ва унинг Ox ўққа оғиш бурчаги β : 1) 45° , 2) 135° , 3) 225° , 4) 315° бўлган тўғри чизиқлар ясалсин. Бу тўғри чизиқларнинг тенгламалари ёзилсин.

103. $A(4; 3)$, $B(2; 1)$ ва $C(1; 0)$ нуқталардан $3x + 4y - 10 = 0$ тўғри чиқиқча бўлган масофалар топилсин. Нуқталар ва тўғри чиқиқ ясалсин.

104. Координаталар бошидан $12x - 5y + 39 = 0$ тўғри чиқиқча бўлган масофа топилсин.

105. $2x - 3y = 6$ ва $4x - 6y = 25$ -тўғри чиқиқлар ўзаро параллел эканлиги кўрсатилсин ва улар орасидаги масофа аниқлансин.

Қўрсатма. Берилган тўғри чиқиқлардан биттасининг исталган нуқтасини олиб, ўша нуқтадан иккинчи тўғри чиқиқча бўлган масофани топиш керак.

106. $y = kx + 5$ тўғри чиқиқ координаталар бошидан $d = \sqrt{5}$ масофа узоқликда бўлса, k топилсин.

107. $4x - 3y = 0$ тўғри чиқиқдан 4 бирлик узоқликдаги нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

108. $8x - 15y = 0$ тўғри чиқиққа параллел бўлиб, $A(4; -2)$ нуқтадан 4 бирлик узоқликдаги тўғри чиқиқнинг тенгламаси ёзилсин.

109. $2x + 3y = 12$ ва $3x + 2y = 12$ тўғри чиқиқлар орасидаги бурчаклар биссектрисаларининг тенгламалари ёзилсин.

110. $3x + 4y = 12$ ва $y = 0$ тўғри чиқиқлар орасидаги бурчаклар биссектрисаларининг тенгламалари ёзилсин.

111. $M(x; y)$ нуқта $y = 4 - 2x$ тўғри чиқиққа нисбатан $y = 2x - 4$ тўғри чиқиқдан уч марта узоқроқда ҳаракат қилади. Ўша нуқта траекториясининг тенгламаси ёзилсин.

112. $2x + y + 6 = 0$ ва $3x + 5y - 15 = 0$ тўғри чиқиқларнинг кесишиш нуқтаси M ва $N(1; -2)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чиқиқ тенгламаси (M нуқтани топмасдан) ёзилсин.

113. $5x - y + 10 = 0$ ва $8x + 4y + 9 = 0$ тўғри чиқиқларнинг кесишиш нуқтаси M дан ўтиб $x + 3y = 0$ тўғри чиқиққа параллел бўлган тўғри чиқиқ тенгламаси (M нуқтани топмасдан) ёзилсин.

Қўрсатма. M дан ўтувчи изланган тўғри чиқиқ тенгламаси $\alpha(5x - y + 10) + \beta(8x + 4y + 9) = 0$ бўлсин. α ва β бу тўғри чиқиқнинг $x + 3y = 0$ га параллел эканлигидан фойдаланиб топилади.

114. Учлари $A(-3; 0)$, $B(2; 5)$ ва $C(3; 2)$ нуқталарда бўлган учбурчак BD баландлигининг узунлиги топилсин.

115. $A(2; 4)$ нуқтадан ўтувчи ва координаталар бошидан $d = 2$ узоқликда бўлган тўғри чиқиқ тенгламаси ёзилсин.

Қўрсатма. ϕ бурчак тўғри чиқиқнинг $x \cos \phi + y \sin \phi - 2 = 0$ нормал тенгламасидаги x ва y нинг ўрнига A нинг координаталарини қўйиб топилади.

116. $A(-4; -3)$, $B(-5; 0)$, $C(5; 6)$ ва $D(1; 0)$ нуқталар трапециянинг учлари бўлиши текширилсин ва унинг баландлиги топилсин.

117. Координаталар бошидан $A(2; 2)$ ва $B(4; 0)$ нуқталаргача масофалари бир хил бўлган тўғри чизик ўтказилган. Бу масофа топилсин.

118. $x + 2y - 5 = 0$ тўғри чизикдан $\sqrt{5}$ масофа узоқликда бўлган нуқталар геометрик ўринининг тенгламаси ёзилсин.

119. $y = -x$ тўғри чизикқа нисбатан $y = x$ тўғри чизикдан икки марта узоқроқда ҳаракат қилувчи $M(x; y)$ нуқта траекториясининг тенгламаси ёзилсин.

120. $2x - 3y + 5 = 0$ ва $3x + y - 7 = 0$ тўғри чизикларнинг кесишиш нуқтаси $M(x; y)$ дан ўтувчи ва $y = 2x$ тўғри чизикқа перпендикуляр тўғри чизик тенгламаси (M нуқтани топмасдан) ёзилсин.

Қўрсатма. 113-мисол учун берилган қўрсатмага қаралсин.

7-§. Тўғри чизикқа доир аралаш масалалар

121. Координаталар бошидан, $x + y = a$ ва $x = 0$ тўғри чизиклар билан юзи a^2 га тенг учбурчак ясовчи тўғри чизик ўтказилсин.

Қўрсатма. Изланган тўғри чизик тенгламаси $y = kx$ кўринишда бўлсин. $x + y = a$ ва $y = kx$ нинг кесишган нуқтасини топгандан сўнг, учбурчак юзининг формуласидан k ни топиш керак.

122. $A(-4; 0)$ ва $B(0; 6)$ нуқталар берилган. AB кесма ўртасидан Oy ўқдагига қараганда Ox ўқдан икки баравар катта кесма ажратувчи тўғри чизик ўтказилсин.

123. $A(-2; 0)$ ва $B(2; -2)$ нуқталар берилган. OA кесмани томон деб олиб, диагоналлари B нуқтада кесишувчи $OACD$ параллелограмм ясалган. Параллелограмм томонларининг, диагоналлариининг тенгламалари ёзилсин ва CAD бурчак топилсин.

124. $y = 2x$, $y = -2x$ ва $y = x + b$ тўғри чизиклар ҳосил қилган учбурчакнинг юзи ва бурчаклари топилсин.

125. Координаталар бошидан $2x + y = a$ тўғри чизик билан тенг ёнли учбурчак ҳосил қилувчи икки ўзаро перпендикуляр тўғри чизик ўтказилган. Шу учбурчакнинг юзи топилсин.

Қўрсатма. $2x + y = 3$ билан $y = kx$ ва $y = -\frac{x}{k}$ тўғри чизиқларнинг кесишган нуқталари M ва N нинг координатларини топгандан сўнг $OM = ON$ тенгликдан k ни топиш керак.

126. Учбурчак AB томонининг тенгламаси $x - 3y + 3 = 0$ ва AC томонининг тенгламаси $x + 3y + 3 = 0$ ҳамда AD баландлигининг асоси $D(-1; 3)$ берилган бўлса, учбурчакнинг ички бурчаклари топилсин.

127. Тенг ёнли учбурчак ён томонларининг тенгламалари $3x + y = 0$ ва $x - 3y = 0$ ҳамда асосидаги $(5; 0)$ нуқта берилган. Учбурчакнинг периметри ва юзи топилсин.

Қўрсатма. Учбурчакнинг бир учи $A(0, 0)$ дан иборат. Қолган икки учини, яъни $B(x_1, y_1)$ ва $C(x_2, y_2)$ учларни топишда, улар билан $(5, 0)$ нуқтанинг бир тўғри чизиқда ётишидан ва $2(AB)^2 = (BC)^2$ тенгликдан фойдаланиш керак.

128. ABC учбурчакда: 1) AB томоннинг тенгламаси $3x + 2y = 12$; 2) BN баландликнинг тенгламаси $x + 2y = 4$; 3) AN баландликнинг тенгламаси $4x + y = 6$ берилган. N — баландликларнинг кесишган нуқтаси. AC ва BC томонларнинг ҳамда CN баландликнинг тенгламалари ёзилсин.

129. Параллелограмм томонларидан икkitаси $y = x - 2$ ва $5y = x + 6$ тенгламалар билан берилган. Диагоналлари эса координаталар бошида кесишади. Параллелограммнинг қолган икки томонининг ва диагоналлариининг тенгламалари ёзилсин.

130. Учбурчак $A(0; -4)$, $B(3; 0)$ ва $C(0; 6)$ учлари билан берилган. C учидан A бурчакнинг биссектрисасигача бўлган масофа топилсин.

131. $M(x; y)$ нуқта шундай ҳаракат қиладики, ундан $y = 2x$ ва $y = -\frac{x}{2}$ тўғри чизиқларгача бўлган масофаларнинг йиғиндиси ўзгармас бўлиб, $\sqrt{5}$ га тенг. Ўша нуқта траекториясининг тенгламаси ёзилсин.

132. Нуқталарининг координаталари:

- 1) $x - 2 < y < 0$ ва $x > 0$;
- 2) $-2 \leq y \leq x \leq 2$;
- 3) $2 < 2x + y < 8$, $x > 0$ ва $y > 0$

тегисликларни қаноатлантирувчи соҳалар ясалсин.

133. Параллелограммнинг AB ва BC томонлари мос равишда $2x - y + 5 = 0$ ва $x - 2y + 4 = 0$ тенгламалар билан берилган, диагоналлари $M(1; 4)$ нуқтада кесишади. Унинг баландликларининг узунликлари топилсин.

134. Тенг ёнли ва тўғри бурчакли учбурчак тўғри бурчагининг учи $C(3; -1)$ ва гипотенузасининг тенгламаси $3x - y + 2 = 0$ берилган. Қолган уйлари топилсин.

Қўрсатма. 125-масалага берилган кўрсатмага қаранг.

135. Учбурчакнинг икки учи $A(-4; 3)$ ва $B(4; -1)$ ҳамда баландликларининг кесишган нуқтаси $M(3; 3)$ берилган. Учинчи учи C топилсин.

136. Ромб икки томонининг тенгламалари $x + 2y = 4$ ва $x + 2y = 10$ ҳамда диагоналларида бирининг тенгламаси $y = x + 2$ маълум бўлса, ромб учларининг координаталари ҳисоблансин.

137. Учбурчакнинг $A(0; 2)$ учини ҳамда BM ва CM баландликларининг $x + y = 4$ ва $y = 2x$ тенгламаларини билган ҳолда учбурчак томонларининг тенгламалари ёзилсин, бунда M —баландликларининг кесишган нуқтаси.

138. $A(5; 7)$ нуқта ва $x + 2y - 4 = 0$ тўғри чизик берилган. 1) A нуқтанинг берилган тўғри чизикдаги проекцияси B топилсин; 2) ўша тўғри чизикқа нисбатан A га симметрик C нуқта топилсин.

Қўрсатма. AB перпендикулярнинг тенгламасини ёзиб, уни берилган тўғри чизик тенгламаси билан биргаликда ечиб B нуқта топилади: B нуқта эса AC нинг ўртасидир.

139. $2x + y - 6 = 0$ тўғри чизик ва унда ординаталари $y_A = 6$ ва $y_B = -2$ бўлган икки A ва B нуқта берилган. AOB учбурчак AD баландлигининг тенгламаси ёзилсин, унинг узунлиги ва $\angle DAB$ топилсин.

8- §. Айлана

Маркази $C(a; b)$ нуқтада ва радиуси R бўлган айлана тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (1)$$

Агар (1) тенгламадаги қавсларни очсак, у ҳолда тенглама

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0 \quad (2)$$

кўринишга келади.

(2) тенгламадан қайтадан (1) тенгламага ўтиш учун (2) тенгламанинг чап томонидаги тўла квадратдан иборат ифодаларни ажратиб керак, яъни

$$\left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{n}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p. \quad (3)$$

140. Маркази $C(-4; 3)$, радиуси $R = 5$ бўлган айлана тенгламаси ёзилсин ва у ясалсин. $A(-1; -1)$, $B(3; 2)$, $O(0; 0)$ нуқталар бу айланада ётадими?

141. $A(-4; 6)$ нуқта берилган. Диаметри OA кесмадан иборат айлана тенгламаси ёзилсин.

142. 1) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$; 2) $x^2 + y^2 - 8x = 0$; 3) $x^2 + y^2 + 4y = 0$ айланалар ясалсин.

143. $x^2 + y^2 + 5x = 0$ айлана ва $x + y = 0$ тўғри чизиқ ясалсин ва уларнинг кесишган нуқталари топилсин.

144. $A(1; 2)$ нуқтадан ўтувчи ва координата ўқларига уринувчи айлана тенгламаси ёзилсин.

145. $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$ айлананинг Oy ўқ билан кесишган нуқталарига ўтказилган радиуслари орасидаги бурчак топилсин.

146. $A(-1; 3)$, $B(0; 2)$ ва $C(1; -1)$ нуқталардан ўтувчи айлана тенгламаси ёзилсин.

Қўрсатма. Изланаётган айлананинг тенгламасини $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$ кўринишда ёзиб, ундаги x ва y лар ўрнига берилган ҳар бир нуқтанинг координаталарини қўйгандан сўнг m , n ва p ларни топиш керак.

147. $A(4; 4)$ нуқтадан ва $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ айлана билан $y = -x$ тўғри чизиқнинг кесишган нуқталаридан ўтувчи айлана тенгламаси ёзилсин.

148. $y = -\sqrt{-x^2 - 4x}$ эгри чизиқнинг жойлашиш соҳаси аниқланиб, шакли чизилсин.

149. $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$ айланага координаталар бошидан ўтказилган уринмаларнинг тенгламалари ёзилсин.

150. $A(a; 0)$ нуқта берилган. M нуқта шундай ҳаракат қиладики, $\triangle OMA$ да OMA бурчак доимо тўғри бурчак бўлиб қолади. M нуқта траекториясининг тенгламаси ёзилсин.

151. $A(-6; 0)$ ва $B(2; 0)$ нуқталар берилган. Шундай нуқталарнинг геометрик ўрни топилсиники, улардан OA ва OB кесмалар тенг бурчаклар остида кўринсин.

Қўрсатма. Ўзгарувчи нуқтани M деб олсак, OM кесма AMB бурчакнинг биссектрисаси бўлади. Изланган тенгламани чиқариш учун уч бурчак ички бурчагининг биссектрисаси қарши томонни бўлиши ҳақидаги теоремадан фойдаланиш керак.

152. $M(x; y)$ нуқта шундай ҳаракатланадики, ундан $A(-a; 0)$, $B(0; a)$ ва $C(a; 0)$ нуқталаргача бўлган масофалар квадратларининг йиғиндисини $3a^2$ га тенг бўлиб қолаверади. Нуқта траекториясининг тенгламаси ёзилсин.

окуслари Ox ўқда ётувчи эллипс^{*} координата ўқларига нисбатан симметрик бўлиб, $M(-4; \sqrt{21})$ нуқтадан ўтади ва $e = \frac{3}{4}$ эксцентриситетга эга. Эллипс тенгламаси ёзилсин ва M нуқтанинг фокал радиуслари топилсин.

171. $x^2 + 2y^2 = 18$ эллипснинг ўқлари орасидаги бурчакни тенг иккига бўлувчи ватар узунлиги топилсин.

172. Агар эллипснинг фокуслари орасидаги масофа унинг катта ва кичик ярим ўқларининг учлари орасидаги масофага тенг бўлса, унинг эксцентриситети e топилсин.

173. $x^2 + 4y^2 = 4$ эллипсга учларидан бири эллипс катта ярим ўқининг учи билан устма-уст тушувчи мунтазам учбурчак ички чизилган. Учбурчакнинг қолган икки учининг координаталари аниқлансин.

$$x^2 + 2x + y^2 - 12y = 0$$

Қўрсатма. Учбурчак томонларидан бурчак коэффициентини $k = \operatorname{tg} 30^\circ$ бўлганининг тенгламасини ёзиб, унинг эллипс билан кесишган нуқталарини топиш керак.

$$R = \sqrt{5}x = \sqrt{6}y$$

174. $9x^2 + 25y^2 = 225$ эллипсда шундай $M(x; y)$ нуқта топилсинки, ундан ўнг фокусгача бўлган масофа чап фокусгача бўлган масофадан 4 марта катта бўлсин.

175. $x^2 + y^2 = 36$ айланадаги барча нуқталарнинг ординаталарини уч барабар қисқартишдан ҳосил бўлган янги эгри чизиқ тенгламаси ёзилсин.

176. $M(x; y)$ нуқта, $x = -4$ тўғри чизиққа нисбатан $F(-1; 0)$ нуқтага икки барабар яқинроқда ҳаракат қилади. Унинг траекторияси аниқлансин.

177. Узунлиги ўзгармас $a + b$ га тенг AB кесма шундай ҳаракат қиладики, унинг A учи Ox ўқ бўйича ва B учи Oy ўқ бўйича сирғанади. Бу кесмани $BM = a$ ва $MA = b$ бўлакларга бўлувчи M нуқтанинг траекторияси аниқлансин (Леонардо да Винчининг эллиптик циркули).

178. $x^2 + y^2 = b^2$ ва $x^2 + y^2 = a^2$ айланалар берилган ($b < a$). Ихтиёрий OBA нур уларни мос равишда B ва A нуқталарда кесди; бу нуқталардан координата ўқларига параллел қилиб ўтказилган тўғри чизиқлар ўзаро M нуқтада кесишгунча давом эттирилади. $M(x; y)$ нуқталарнинг геометрик ўрни аниқлансин.

Қўрсатма. OBA нур тенгламасини $y = kx$ деб олиб, унинг айланалар билан кесишган $B(x_1, y_1)$ ва $A(x_2, y_2)$ нуқталарини топиш керак. $M(x, y)$ нуқталар эса $y = y_2$ ва $x = x_1$ ҳамда $x = x_2$ ва $y = y_1$ тўғри чизиқларнинг кесишган нуқталаридан иборат.

179. Эллипс фокусларининг биридан катта ўқининг учларига бўлган масофалар 5 ва 1 га тенг. Унинг энг содда тенгламаси ёзилсин.

180. Координата ўқларига нисбатан симметрик эллипс $M(2\sqrt{3}; \sqrt{6})$ ва $A(6; 0)$ нуқталардан ўтади. Унинг тенгламаси ёзилсин, эксцентриситети ва M нуқтадан фокусларгача бўлган масофалар топилсин.

181. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсининг ўқларида ясалган тўғри тўртбурчак диагонали бўйича йўналган ватарининг узунлиги топилсин.

182. $x^2 + 4y^2 = 4$ эллипсининг, маркази шу эллипсининг «юқори» учида бўлган ва унинг фокусларидан ўтувчи айлана билан умумий нуқталари топилсин.

183. $x = -5$ тўғри чизиқда $x^2 + 5y^2 = 20$ эллипсининг «чап» фокусидан ва «юқори» учидан баравар узоқликда бўлган нуқта топилсин.

184. $x^2 + 5y^2 = 20$ эллипсининг радиус-векторлари ўзаро перпендикуляр бўлган нуқтаси топилсин.

Қўрсатма. Изланган нуқталар берилган эллипсининг, маркази координаталар бошида бўлган ва эллипсининг фокусларидан ўтувчи айлана билан кеснишган нуқталаридан иборатдир.

185. $x^2 + y^2 = 4$ айланадаги ҳар бир нуқтанинг абсциссаси икки баравар орттирилган. Ҳосил бўлган эгри чизиқ аниқлансин.

186. $x = 9$ тўғри чизиққа нисбатан $A(1; 0)$ нуқтага уч марта яқинроқ бўлиб ҳаракат қилувчи M нуқтанинг траекторияси аниқлансин.

10- §. Гипербола

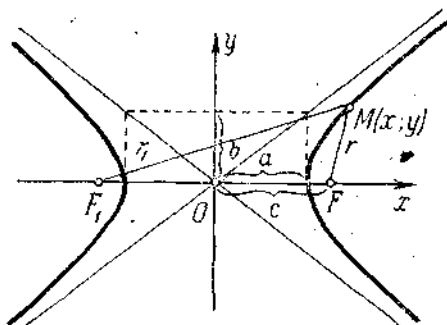
Гипербола деб шундай нуқталарнинг геометрик ўрнига айтингладики, уларнинг ҳар биридан берилган икки F ва F_1 нуқтагача (фокусларгача) бўлган масофалар айирмасининг абсолют қиймати ўзгармас $2a$ ($0 < 2a < F_1F$) миқдордан иборатдир.

Гиперболанинг каноник (энг содда) тенгламаси:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

1) тенглама билан берилган гипербола координата ўқларига нисбатан симметрикдир (2- чизма).

Гипербола Ox ўқни учлар деб аталувчи $A(a; 0)$, $A_1(-a; 0)$ нуқталарда кеседи, Oy ўқ билан эса кесинмайди. a параметр ҳақиқий ярим ўқ, b эса маъхум ярим ўқ дейилади. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ параметр марказдан фокусгача бўлган масофани билдиради. $\frac{c}{a} = e > 1$ гиперболанинг



2- чизма.

эксцентриситети дейилади. $y = \pm \frac{b}{a} x$ тўғри чизиқлар гипербо-
ланинг асимптоталари дейилади. $M(x; y)$ нуқталардан фокусларгача
бўлган масофалар (фокал радиус-векторлар):

$$r = |ex - a|, \quad r_1 = |ex + a| \quad (2)$$

формулалар билан аниқланади.

Агар $a = b$ бўлса, гипербола *тенг томонли* гипербола деб аталади.
Унинг тенгламаси $x^2 - y^2 = a^2$, асимптоталарининг тенгламалари эса
 $y = \pm x$ бўлади. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ва $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ гиперболалар *қўшма*
гиперболалар дейилади.

187. $x^2 - 4y^2 = 16$ гипербола ва унинг асимптоталари
ясалсин. Гиперболанинг фокуслари, эксцентриситети ва асимп-
тоталари орасидаги бурчак топилсин.

188. $x^2 - 4y^2 = 16$ гиперболада ординатаси 1 га тенг
 M нуқта олинган. Ундан фокусларгача бўлган масофалар
топилсин.

189. 1) Фокуслари орасидаги масофа $2c = 10$, учлари
орасидаги масофа $2a = 8$; 2) ҳақиқий ярим ўқи $a = 2\sqrt{5}$,
эксцентриситети $e = \sqrt{1,2}$ бўлган гиперболанинг каноник
тенгламаси ёзилсин.

190. Гипербола координата ўқларига нисбатан симметрик
бўлиб, $M(6; -2\sqrt{2})$ нуқтадан ўтади ва $b = 2$ мавҳум ярим
ўққа эга. Унинг тенгламаси ёзилсин ҳамда M нуқтадан фо-
кусларгача бўлган масофалар топилсин.

191. Учлари $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ эллипсининг фокусларида, фо-
куслари эса унинг учларида бўлган гиперболанинг тенгла-
маси ёзилсин.

A нуқтада кеседи. *OA* радиус билан *Ox* ўқни *C* нуқтада кесувчи ёй ўтказилган. *B* ва *C* нуқталардан мос равишда *Ox* ва *Oy* ўқларга параллел ҳамда *M* нуқтада кесишувчи тўғри чизиклар ўтказилган. *M* нуқталарнинг геометрик ўрни аниқлансин.

Қўрсатма. Нур билан *Ox* ўқ ва $x = \pm b$, $x = \pm a$ тўғри чизиклар орасида ҳосил бўлган учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланилсин.

203. Бирор учидан фокусларигача масофалари 9 ва 1 га тенг бўлган гиперболанинг каноник тенгламаси ёзилсин.

204. Маркази $x^2 - 3y^2 = 12$ гиперболанинг ўнг фокусида бўлган, координаталар бошидан ўтувчи айлана билан шу гипербола асимптоталарининг кесишган нуқталари топилсин.

205. $M(6; \frac{3}{2}\sqrt{5})$ нуқтадан ўтувчи, координата ўқларига нисбатан симметрик бўлган гиперболанинг ҳақиқий ярим ўқи $a = 4$. Гиперболанинг чап фокусдан асимптоталарига туширилган перпендикулярнинг тенгламалари ёзилсин.

206. $9x^2 - 16y^2 = 144$ гиперболада ўнг фокусга нисбатан чап фокусга икки марта яқинроқ бўлган нуқта топилсин.

207. $x^2 - y^2 = 4$ гиперболада фокал радиус-векторлар ўзаро перпендикуляр бўлган нуқта топилсин. (184-масалага берилган кўрсатмага қаралсин.)

208. *M* нуқта $9x^2 - 16y^2 = 144$ гиперболанинг фокуслари орасидаги масофани $F_1M : MF = 2:3$ нисбатда бўлади. Бунда F_1 — гиперболанинг чап фокуси. *M* нуқтадан *Ox* ўқ билан 135° бурчак ташкил этувчи тўғри чизик ўтказилган. Шу тўғри чизикнинг гипербола асимптоталари билан кесишган нуқталари топилсин.

209. $x = -2$ тўғри чизикқа нисбатан $F(-8; 0)$ нуқтадан икки барабар узоқроқда ҳаракат қилувчи *M* нуқтанинг траекторияси аниқлансин.

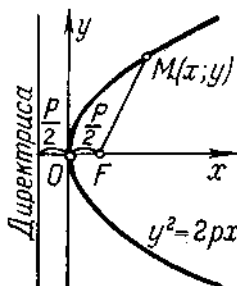
210. $A(-a; 0)$ ва $B(2a; 0)$ нуқталар берилган. *P* нуқта шундай ҳаракат қиладики, PAB бурчак APB учбурчакнинг APC ташқи бурчагидан уч марта кичик бўлиб қола беради. *P* нуқтанинг ҳаракат траекторияси аниқлансин.

Қўрсатма. $\angle APC = 3 \angle PAB$ бўлгани учун $\angle PBA = 2 \angle PAB$ ёки $\angle B = 2 \angle A$. $\operatorname{tg} A = \frac{y}{x+a}$; $\operatorname{tg} B = \frac{y}{2a-x}$ ва $\operatorname{tg} 2B = \frac{2 \operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg}^2 A}$ тенгликлардан изланган тенгламани топиш мумкин.

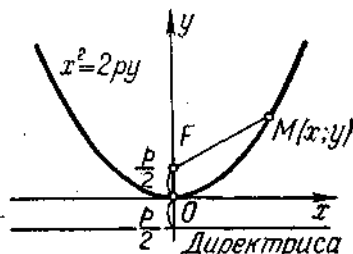
11- §. Парабола

Берилган нуқтадан (фокусдан) ва берилган тўғри чизикдан (директрисадан) бир хил узоқликда бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни парабола дейилади.

Параболанинг каноник тенгламаси қуйидаги икки кўринишга эга:
 1) $y^2 = 2px$ — Ox ўққа нисбатан симметрик парабола (4-чизма).
 2) $x^2 = 2py$ — Oy ўққа нисбатан симметрик парабола (5-чизма).
 Ҳар икки ҳолда ҳам параболанинг учи, яъни симметрия ўқда ётувчи нуқтаси, координаталар бошида бўлади.



4-чизма.



5-чизма.

парабола $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ фокус ва $x = -\frac{p}{2}$ директрисага эга; унинг $M(x, y)$ нуқтасининг фокал радиус-вектори $r = x + \frac{p}{2}$. $x^2 = 2py$ парабола $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ фокус ва $y = -\frac{p}{2}$ директрисага эга; унинг $M(x, y)$ нуқтасининг фокал радиус-вектори $r = y + \frac{p}{2}$.

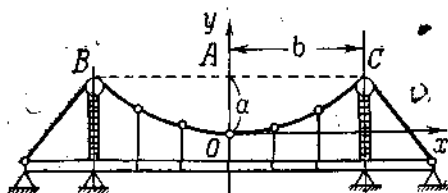
211. $F(0; 2)$ нуқтадан ва $y = 4$ тўғри чизиқдан бир хил узоқлашган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси тузилсин. Бу эгри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишган нуқталари топилин ва у ясалсин.

212. Координаталар бошидан ва $x = -4$ тўғри чизиқдан бир хил узоқликда бўлган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси тузилсин. Бу эгри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишган нуқталари топилин ва у ясалсин.

213. 1) $y^2 = 4x$; 2) $y^2 = -4x$; 3) $x^2 = 4y$; 4) $x^2 = -4y$ тенгламалар билан берилган параболалар ҳамда уларнинг фокуслари, директрисалари ясалсин ва директрисаларининг тенгламалари ёзилсин.

214. 1) $(0; 0)$ ва $(1; -3)$ нуқталардан ўтувчи ва Ox ўққа нисбатан симметрик; 2) $(0; 0)$ ва $(2; -4)$ нуқталардан ўтувчи ва Oy ўққа нисбатан симметрик бўлган парабола тенгламаси ёзилсин.

215. Осма кўприкнинг канати (симдан эшилган йўгон арқон) парабола шаклига эга (6-чизма). Агар канатнинг эгилиши $AO = a$, равоқ узунлиги $BC = 2b$ бўлса, унинг чизмада кўрсатилган ўқларга нисбатан тенгламаси ёзилсин.



6-чизма.

216. Маркази $y^2 = 2px$ параболанинг фокусиди бўлиб, парабола директрисасига уринувчи айлана тенгламаси ёзилсин. Парабола ва айлананинг кесишган нуқталари топилсин.

217. $x^2 + y^2 + 4y = 0$ айлана ва $x + y = 0$ тўғри чизиқнинг кесишган нуқталаридан ўтиб, Oy ўққа нисбатан симметрик бўлган параболанинг ва унинг директрисасининг тенгламалари ёзилсин. Айлана, тўғри чизиқ ва парабола ясалсин.

218. $y^2 = 6x$ параболада фокал радиус-вектори 4,5 га тенг бўлган нуқта топилсин.

219. Проекторнинг ойнали сирти параболанинг ўз симметрии ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган. Ойнанинг диаметри 80 см, чуқурлиги 10 см. Нурларнинг параллел даста шаклида қайтиши учун ёруғлик манбаи параболанинг фокусиди ўрнатилиши керак бўлса, ёруғлик манбаи парабола учидан қандай масофада ўрнатилиши керак?

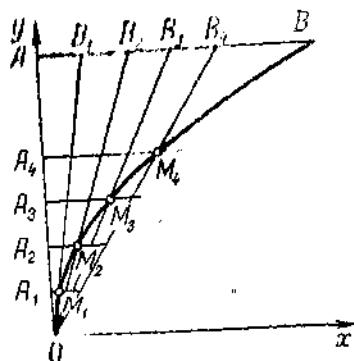
220. $y = -\sqrt{x}$ эгри чизиқнинг жойлашиш соҳаси аниқлансин. Бу эгри чизиқ ясалсин.

221. $y^2 = 2px$ парабола учидан ўтиши мумкин бўлган барча ватарлар ўтказилган. Бу ватарлар ўрталари геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

Қўрсатма. Ўтказилган ватарларнинг ўрта нуқталарини (ξ , η) билан белгиласак, $\xi = \frac{x}{2}$, $\eta = \frac{y}{2}$. Бу тенгликлар ва $y^2 = 2px$ тенгламадан x ва y ларни йўқотсак, изланган тенглама ҳосил бўлади.

222. $x^2 + y^2 = 2ax$ айланага ва Oy ўққа уринувчи айланалар марказларининг геометрик ўрни аниқлансин.

Қўрсатма. Берилган айлана марказини O_1 , уринувчи айланалар марказларини $M(x, y)$ ва радиусларини эса R билан белгилайлик. $MO_1 = R + a$, $R = x$ ва $MO_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ муносабатлардан фойдаланиб изланган тенглама топилади.



7-чизма.

223. $A(0; a)$ ва $B(a; a)$ нуқталар берилган. OA ва AB кесмалар $A_1, A_2, A_3, \dots$ ва $B_1, B_2, B_3, \dots$ нуқталар билан n та тенг бўлақларга бўлинган (7-чизма). M_k нуқта OB_k нур билан $A_k M_k$ ($A_k M_k \parallel Ox$) тўғри чизиқнинг кесишган нуқтаси бўлсин. Бундай M_k нуқталарининг $y^2 = ax$ параболада ётиши кўрсатилсин. Шу усул билан $y^2 = 4x$; $y^2 = 5x$; $y^2 = 3x$ параболалар ясалсин.

224. Координаталар бинидаги ва $x = 4$ тўғри чизиқдан тенг узоқлашган нуқталар геометрик ўринининг тенгламаси тузилсин. Бу эгри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишган нуқталари топилсин ва эгри чизиқ ясалсин.

225. $F(2; 0)$ нуқтадан ва $y = 2$ тўғри чизиқдан тенг узоқлашган нуқталар геометрик ўринининг тенгламаси тузилсин. Параболанинг учи, унинг Ox ўқ билан кесишган нуқтаси топилсин ва у ясалсин.

226. 1) $(0; 0)$ ва $(-1; 2)$ нуқталардан ўтувчи ва Ox ўққа нисбатан симметрик бўлган; 2) $(0; 0)$ ва $(2; 4)$ нуқталардан ўтувчи ва Oy ўққа нисбатан симметрик бўлган параболанинг тенгламаси ёзилсин.

227. $y = x$ тўғри чизиқ билан $x^2 + y^2 + 6x = 0$ айлананинг кесишган нуқталаридан ўтувчи ва Ox ўққа нисбатан симметрик бўлган параболанинг ва унинг директриса тенгламалари ёзилсин. Тўғри чизиқ, парабола ва айлана ясалсин.

228. $y^2 = 2px$ параболага мунтазам учбурчак ички чизилган. Учбурчак учларининг координаталари аниқлансин (173-масала) учун берилган кўрсатмага қаралсин).

229. $y^2 = 8x$ параболага $A(0; -2)$ нуқтадан ўтказилган уринмаларнинг тенгламалари ёзилсин.

230. $y^2 = -4x$ параболанинг фокусидан Ox ўқ билан 120° бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқ ўтказилсин. Ушбу тўғри чизиқ тенгламаси ёзилсин ва ҳосил бўлган ватарнинг узунлиги топилсин.

12-§. Иккинчи тартибли эгри чизикларнинг директрисалари, диаметрлари ва уларга ўтказилган уринмалар

1°. *Оу ўққа параллел ва унда $\frac{a}{e}$ масофада жойлашган тўғри чизиклар $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$) эллипсининг ва $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гипербола-нинг директрисалари дейилади, бунда e — эгри чизикнинг эксцентриситети.*

Директрисаларнинг тенгламалари:

$$x = \pm \frac{a}{e}. \quad (1)$$

Директрисаларнинг хоссаси: эгри чизик ихтиёрий нуқтасининг фокусгача ва мос директрисагача масофаларининг нисбати эксцентриситетга тенг:

$$\frac{r}{d} = e. \quad (2)$$

2°. Иккинчи тартибли эгри чизикнинг диаметри деб, параллел ватарлар ўрталарининг геометрик ўрнига айтилади. Эллипс билан гипербола-нинг диаметрлари уларнинг марказларидан ўтувчи тўғри чизиклар кесмаларидан ва нурларидан иборат бўлса, парабола-нинг диаметрлари эса унинг ўқига параллел нурлардан иборатдир.

$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ эгри чизиклар учун оғмаликлари $k = \operatorname{tg} \alpha$ бўлган ватарларни тенг бўлувчи диаметрнинг тенгламаси

$$y = \pm \frac{b^2}{a^2 k} x \quad (3)$$

бўлса, $y^2 = 2px$ парабола учун

$$y = \frac{p}{k} \quad (4)$$

бўлади.

Эллипс ва гиперболада бир диаметр иккинчи диаметрга параллел бўлган ватарларни тенг иккига бўлса, бундай икки диаметр *узасо қўши* дейилади. Қўшма диаметрларнинг бурчак коэффициентлари k ва k_1 про

$$kk_1 = -\frac{b^2}{a^2} \text{ (эллипс учун)}$$

$$kk_1 = \frac{b^2}{a^2} \text{ (гипербола учун)}$$

тенгликлар билан боғлангандир.

3°. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$ эллипсга ўтказилган уринманинг тенгламаси:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1;$$

$\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$ гиперболага ўтказилган уринманинг тенгламаси:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1;$$

$(y^2 = 2px)$ параболага ўтказилган уринманинг тенгламаси $y \cdot y_0 = p(x + x_0)$ дан иборатдир, бу ерда $(x_0; y_0)$ — уриниш нуқтаси.

231. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ эллипс ва унинг директрисалари ясалсин.

Эллипснинг $x = -3$ абсциссасидан ўнг фокусигача ва ўнг директрисасигача бўлган масофалар топилсин.

232. $\frac{x^2}{16^2} - \frac{y^2}{9} = 1$ гипербола ва унинг директрисалари ясалсин, гиперболанинг $x=5$ абсциссасидан чап фокусигача ва чап директрисасигача бўлган масофалар топилсин.

233. Катта ярим ўқи 2 га тенг, директрисалари $x = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$ тўғри чизиқлардан иборат эллипснинг каноник тенгламаси ёзилсин.

234. Асимптоталари $y = \pm x$, директрисалари эса $x = \pm \sqrt{6}$ бўлган гиперболанинг тенгламаси ёзилсин.

235. $x^2 + 4y^2 = 16$ эллипс, унинг $y = \frac{x}{2}$ диаметри ва унга қўшма диаметри ясалсин. Ясалган ярим диаметрларнинг a_1 ва b_1 узунликлари топилсин.

236. $x^2 - 4y^2 = 4$ гипербола, унинг $y = -x$ диаметри ва унга қўшма диаметри ясалсин, шунингдек ўша диаметрлар орасидаги бурчак топилсин.

237. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс диаметрларидан ўзига қўшма диаметрга тенг бўлганининг узунлиги топилсин.

238. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболанинг асимптотаси Ox ўқ билан 60° бурчак ташкил этади. Гиперболанинг $y = 2x$ диаметрига қўшма диаметрининг тенгламаси ёзилсин. Гиперболанинг ҳақиқий ярим ўқи учун ихтиёрий a кесма олиб, эгри чизиқ ва унинг диаметрлари ҳамда берилган диаметрга параллел ватарлари ясалсин.

239. $y^2 = 2x$ параболанинг Ox ўқ билан 45° бурчак ташкил этувчи ватарлари ўрталарининг геометрик ўрни аниқлансин.

240. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ эллипс берилган $(-2; 1)$ нуқта орқали шу нуқтада тенг иккига бўлинувчи ватар ўтказилсин.

241. $y^2 = -4x$ парабола берилган. $(-2; -1)$ нуқта орқали шу нуқтада тенг иккига бўлинувчи ватар ўтказилсин.

242. Агар a ва b — эллипснинг ярим ўқлари, a_1 ва b_1 эса қўшма диаметрлари яримларининг узунликлари, φ улар орасидаги бурчак бўлса, 235-масала учун Аполлоний теоремаси, яъни $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$ ва $a_1 b_1 \sin \varphi = ab$ экани текширилсин.

243. 1) $x^2 + 4y^2 = 16$; 2) $3x^2 - y^2 = 3$; 3) $y^2 = 2x$ эгри чизикларнинг абсциссаси $x_0 = 2$ нуқтасида ўтказилган уринмаларининг тенгламалари ёзилсин.

244. Агар $Ax + By + C = 0$ тўғри чизик $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсга уринма бўлса, $A^2 a^2 + B^2 b^2 = C^2$ тенгликнинг бажарилиши исбот қилинсин.

Кўрсатма. $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ ва $Ax + By + C = 0$ тенгламалар коэффициентларининг пропорционал бўлишидан фойдаланиб, x_0 ва y_0 ни топиб, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ тенгламага қўйиш керак.

245. $x^2 + 4y^2 = 20$ эллипснинг биринчи координата бурчагининг биссектрисасига параллел бўлган уринмаларининг тенгламалари ёзилсин.

246. $x^2 + 2y^2 = 8$ эллипсга $(0; 6)$ нуқтадан ўтказилган уринмаларнинг тенгламалари ёзилсин.

247. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипснинг координата ўқларидан тенг кесмалар ажратувчи уринмасининг тенгламаси ёзилсин.

248. Агар $Ax + By + C = 0$ тўғри чизик $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболга уринма бўлса, $A^2 a^2 - B^2 b^2 = C^2$ тенгликнинг бажарилиши исбот қилинсин (244-масалага берилган кўрсатмага қаралсин).

249. $4x^2 - 9y^2 = 36$ гиперболанинг $x + 2y = 0$ тўғри чизикқа перпендикуляр бўлган уринмаларининг тенгламалари ёзилсин.

250. Эллипснинг бирор нуқтасига ўтказилган нормал ўша нуқта фокал радиус векторлари орасидаги бурчакнинг биссектрисаси бўлиши исбот қилинсин.

251. Гиперболанинг бирор нуқтасига ўтказилган уринма ўша нуқта фокал радиус векторлари орасидаги бурчакнинг биссектрисаси бўлиши исбот қилинсин.

252. Парабола фокусидан чиққан нурлар параболадан қайтганда унинг ўқиға параллел бўлиши исбот қилинсин.

Кўрсатма. M нуқтадан ўтувчи нормал тенгламасини ёзиб, унинг абсциссалар ўқи билан кесишган N нуқтасини топиб, $FM = FN$ экани исботлансин, бу ерда F — параболанинг фокуси.

253. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ гипербола асимптоталарининг унинг директрисалари билан кесишган нуқталари топилсин.

254. $x^2 + 4y^2 = 16$ эллипс, унинг $y = x$ диаметри ҳамда унга қўшма диаметри ясалсин. Шу диаметрлар орасидаги бурчак топилсин.

255. $x^2 - 4y^2 = 16$ гиперболанинг Ox ўқ билан 45° бурчак ташкил этувчи ватарлари ўрталарининг геометрик ўрни аниқлансин.

256. $4x^2 - y^2 = 4$ гипербола берилган. $(2; 2)$ нуқта орқали шу нуқтада тенг иккига бўлинувчи ватар ўтказилсин.

257. $x^2 + 2y^2 = 6$ эллипсда ординатаси 1, абсциссаси манфий бўлган M нуқта олинган. Ўша нуқтадан ўтувчи уринма билан OM тўғри чизиқ орасидаги бурчак топилсин.

258. Агар $Ax + By + C = 0$ тўғри чизиқ $y^2 = 2px$ параболага уринма бўлса, $B^2p = 2AC$ тенгликнинг бажарилиши исбот қилинсин (244-масалага берилган кўрсатмага қаралсин).

259. $y^2 = 8x$ параболанинг $x + y = 0$ тўғри чизиққа параллел бўлган уринмасининг тенгламаси ёзилсин.

13- §. Декарт координаталарини алмаштириш.

$y = ax^2 + bx + c$ ва $x = ay^2 + by + c$ параболалар.

$xy = k$ гипербола

1°. Берилган системадаги $(x; y)$ координаталарни қуйидаги формулалар ёрдами билан янги системадаги $(X; Y)$ координаталарга алмаштириш мумкин:

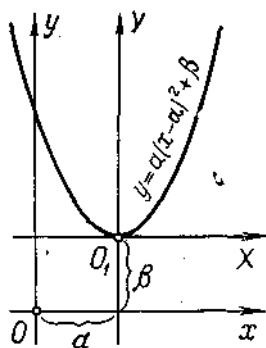
1) ўқларни параллел силжитиб, координаталар боши O_1 ($\alpha; \beta$) нуқтага кўчирилганда

$$x = X + \alpha, y = Y + \beta; \quad (1)$$

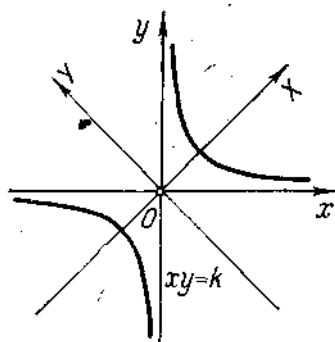
2) координаталар ёсини қўзгатмасдан ўқларнинг йўналишини φ бурчакка бурганда

$$x = X \cos \varphi - Y \sin \varphi, y = X \sin \varphi + Y \cos \varphi. \quad (2)$$

2°. Координаталар боши O_1 ($\alpha; \beta$) нуқтага кўчирилса $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ тенглама $Y = aX^2$ кўринишга келади, бу эса учини O_1 ($\alpha; \beta$) нуқтада бўлиб, симметрия ўқи Oy ўққа параллел (8-чизма) бўлган параболадир. $y = ax^2 + bx + c$ тенглама ўнг томонида тўлиқ квадратдан иборат бўлган



8- чизма.



9- чизма.

қисмини ажратсак, олдинги ҳолга келади, шунинг учун y ҳам параболани аниқлайди. $a > 0$ бўлганда эса параболани учидан пастга қараган бўлади.

3°. Ўқларнинг йўналиши $\varphi = 45^\circ$ га бурилса, $xy = k$ тенглама $X^2 - Y^2 = 2k$ кўринишга келтирилади. Демак, берилган тенглама xOy системага нисбатан асимптоталари координата ўқларидан иборат бўлган тенг томонли гиперболани билдиради (9- чизма). $(x - \alpha)(y - \beta) = k$ тенглама координаталар бошини $O_1(\alpha; \beta)$ нуқтага кўчириш билан $X'Y' = k$ кўринишга келтирилади. Шунинг учун y ҳам тенг томонли гиперболани аниқлайди (9- чизма).

260. 1) Координата ўқларини параллел кўчирганда $A(3; 1)$ нуқта янги $(2; -1)$ координаталарга эга бўлади. Эски ва янги координаталар системалари ҳамда A нуқта ясалсин.

2) Координата ўқларининг йўналишини маълум бир ўтқир бурчакка бурганда, $A(2; 4)$ нуқтанинг янги системадаги абсциссаси 4 га тенг бўлади. Ушунга бурчак топилсин. Иккала система ва A нуқта ясалсин.

261. Координата бошини кўчириб,

$$1) \frac{(x-2)^2}{4} + (y+1)^2 = 1; \quad 2) \frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1;$$

$$3) (y+2)^2 = 4(x-3); \quad 4) 2y = -(x+2)^2;$$

$$5) x^2 + 4y^2 - 6x + 8y = 3; \quad 6) y^2 - 8y = 4x;$$

$$7) x^2 - 4y^2 + 8x - 24y = 24; \quad 8) x^2 + 6x + 5 = 2y$$

тенгламалар соддалаштирилсин, эски ва янги координата ўқлари ва эгри чизиқлар ясалсин.

262. Координата ўқларини 45° га буриб,

1) $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 32$; 2) $3x^2 - 10xy + 3y^2 + 32 = 0$ тенгламалар соддалаштирилсин. Эски ва янги координата ўқлари ҳамда эгри чизиқлар ясалсин.

263. Нуқталари бўйича $xy = -4$ эгри чизиқ ясалсин ва координата ўқларини 45° га буриб, эгри чизиқ тенгламаси янги системада ёзилсин.

264. Координаталар бошини кўчириб, 1) $xy - 2x = 6$; 2) $xy - 2x - y + 8 = 0$; 3) $xy - x + 2y = 6$; 4) $xy + 2x = 3y$ эгри чизиқларнинг тенгламалари $xy = k$ кўринишга келтирилсин.

265. Ушбу параболалар ясалсин:

1) $y = (x - 2)^2$; 2) $y = (x - 2)^2 + 3$; 3) $y = (x + 2)^2$; 4) $y = -(x + 2)^2 - 3$.

266. Тенгламаларнинг ўнг томонларида тўлиқ квадратларни ажратиш йўли билан

1) $y = x^2 - 4x + 5$; 3) $y = -x^2 + 3x - 2$

2) $y = x^2 + 2x + 3$; параболалар ясалсин.

267. Ушбу

1) $y = 4x - x^2$ ва 2) $2y = 3 + 2x - x^2$

параболалар ясалсин ва уларнинг Ox ўқ билан кесишган нуқталари топилсин.

268. Фонтандан отилиб чиққан сув оқими, сув чиққан O нуқтадан ўтувчи вертикалдан $0,5$ м масофада 4 метрга кўтарилади. O нуқтадан $0,75$ м масофада оқимнинг Ox горизонталдан баландлиги аниқлансин.

269. Oy ўққа нисбатан симметрик, ундан b кесма, Ox ўқдан a ва $-a$ кесмалар ажратувчи парабола тенгламаси тузилсин.

Қўрсатма. Параболанинг $y = Ax^2 + Bx + C$ кўринишдаги тенгламасига берилган $(-a; 0)$, $(a; 0)$ ва $(0; b)$ нуқталарининг координаталарини қўйиб, ҳосил бўлган тенгламалардан A , B ва C ларини топиш керак.

270. $y = ax^2 + bx + c$ парабола $O(0; 0)$, $A(-1; -3)$ ва $B(-2, 4)$ нуқталардан ўтади. Диаметри, параболанинг Ox ўқдан ажратган кесмасидан иборат бўлган айлана тенгламаси тузилсин.

271. Координата ўқларини қандай бурчакка бурганда

1) $x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$; 2) $5x^2 - 4xy + 2y^2 - 24 = 0$ тенгламалардаги xy ҳадлар йўқолади? Эски ва янги координаталар системалари ҳамда эгри чизиқлар ясалсин.

272. v_0 бошланғич тезлик билан горизонтга φ бурчак остида отилган ўқ ҳаракатининг траекторияси аниқлансин.

Ўқнинг учини узоқлиги ва траекториясининг энг юқори нуқтаси аниқлансин (ҳавонинг қаршилиги эътиборга олинмасин).

273. $F(4; 0)$ нуқтагача бўлган масофасининг $x = -2$ тўғри чизиккача бўлган масофасига нисбати 2 га тенг бўлган $M(x; y)$ нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

274. Агар координаталар боши $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсининг чап учига ёки $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболаининг ўнг учига кўчирилса, ҳар икки тенглама ҳам $y^2 = 2px + qx^2$ кўринишга келтирилади, бунда $p = \frac{b^2}{a}$, $q = e^2 - 1$. Буни исбот қилинг.

275. 274-масаланинг натижасига асосан: 1) $y^2 = x - \frac{1}{4}x^2$; 2) $y^2 = x + \frac{1}{4}x^2$; 3) $y^2 = x$ эгри чизикларининг эксцентриситетлари ва типлари (турлари) аниқлансин. Биринчи ва иккинчиси учун Ox ўқ билан кесишган нуқталарни ҳамда a ва b параметрларни топиб, эгри чизиклар ясалсин.

276. Тўлиқ квадратларни ажратиб ва координаталар бошини кўчириш орқали қуйидаги чизикларнинг тенгламалари соддалаштирилсин:

1) $2x^2 + 5y^2 + 12x + 10y + 13 = 0$;

2) $x^2 - y^2 + 6x + 4y - 4 = 0$;

3) $y^2 + 4y = 2x$;

4) $x^2 - 10x = 4y - 13$.

Эски ва янги ўқлар ҳамда эгри чизиклар ясалсин.

277. Координата ўқларини 45° бурчакка буриб, $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8 = 0$ тенглама соддалаштирилсин. Эски координаталар системасида фокусларнинг координаталари аниқлансин.

278. Диаметри $y = 3 - 2x - x^2$ параболаининг Ox ўқдан ажратган кеemasидан иборат бўлган айлана тенгламаси ёзилсин. Иккала эгри чизик ясалсин.

279. Диаметри $xy = 8$ гиперболаининг $x + y = 6$ тўғри чизикдан ажратган кесмадан иборат бўлган айлана тенгламаси ёзилсин. Учала чизик ясалсин.

280. Тенгламаси $y = x^2 + 6x + 5$ бўлган параболаининг учини A нуқтада бўлиб, B — унинг Oy ўқ билан кесишган

нуқтаси. AB кесманинг ўртасидан чиқарилган перпендикуляр тенгламаси тузилсин.

281. Ox ўққа нисбатан симметрик, ундан -4 , Oy ўқдан эса 4 ва -4 кесмалар ажратувчи парабола тенгламаси ёзилсин.

Қўрсатма. Парабола тенгламаси $x = ay^2 + c$ кўринишда бўлиши керак (нима учун?).

282. Координата ўқлари билан кесишган нуқталари бўйича қуйидаги:

$$1) 3y = 9 - x^2; \quad 2) y^2 = 9 - 3x;$$

$$3) y^2 = 4 + x; \quad 4) x^2 = 4 + 2y$$

параболалар ясалсин.

283. $F(4; 0)$ нуқтагача бўлган масофасининг $x = 10$ тўғри чизиқгача бўлган масофасига нисбати $\frac{1}{2}$ га тенг $M(x; y)$ нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

14-§. 2-тартибли эгри чизиқларга доир аралаш масалалар

284. Диаметри $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари орасидаги кесмасидан иборат бўлган айлана тенгламаси ёзилсин.

285. $x^2 + y^2 + ay = 0$ айлана марказидан $y = 2(a - x)$ тўғри чизиқгача бўлган масофа топилсин.

286. $x^2 + y^2 = 2ax$ айлана марказидан уни A ва B нуқталарда кесувчи ва $x + 2y = 0$ тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ ўтказилган. $\triangle AOB$ нинг юзи топилсин.

287. Берилган B нуқтага нисбатан берилган A нуқтадан m марта узоқроқ бўлган M нуқталарнинг геометрик ўрни $m = 1$ бўлганда тўғри чизиқ, $m \neq 1$ бўлганда айлана экани кўрсатилсин.

288. AB кесма $OA = a$ ва $OB = b$ бўлакларга бўлинган. OA ва OB кесмалар тенг бурчаклар остида кўринувчи нуқталарнинг геометрик ўрни $a = b$ бўлганда тўғри чизиқ бўлиб, $a \neq b$ бўлганда айлана (Аполлоний айланаси) бўлиши кўрсатилсин.

289. Ҳаракатдаги $M(x; y)$ нуқтадан $y = kx$ ва $y = -kx$ тўғри чизиқларгача бўлган масофалар квадратларининг йиндиси a^2 га тенг. Ўша нуқта траекторияси аниқлансин.

290. Ох ўққа ва $x = -5$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик эллипс $(-1; 1,8)$ ва $(-5; 3)$ нуқталардан ўтади. Эллипснинг тенгламаси ёзилсин ва ўзи ясалсин.

Кўрсатма. Эллипс тенгламасини $\frac{(x+5)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ кўринишда излаш керак. Бу тенгламага берилган нуқталарнинг координаталарини қўйиб, ҳосил бўлган тенгламалардан a ва b ларни топамиз.

291. $x^2 - y^2 = a^2$ гиперболага ички чизилган тенг томонли учбурчакнинг юзи топилсин.

Кўрсатма. Учбурчакнинг бир учи гиперболанинг ўнг учиди ётса қолган икки учи гиперболанинг чап шохчасидаги (ёки аксинча) Ох ўққа нисбатан симметрик нуқталардан иборат бўлади.

292. Учлари $x^2 + 3y^2 = 12l^2$ эллипс билан $x^2 - 3y^2 = 6l^2$ гиперболанинг кесишган нуқталаридан иборат бўлган тўртбурчакнинг диагоналлари орасидаги бурчак топилсин.

293. Маркази координаталар бошида бўлган айлана $x^2 - y^2 = a^2$ гиперболанинг фокусларидан ўтади. Айлананинг гипербола асимптоталари билан кесишган нуқталари топилсин.

294. $xy = -4$ ва $x^2 - y^2 = 6$ гиперболалар ясалсин. А ва В — ўша гиперболаларнинг кесишувчи шохчаларининг учлари, С эса уларнинг қолган икки шохчаларининг кесишиш нуқтаси бўлса, $\triangle ABC$ нинг юзи ҳисоблансин.

295. Гиперболанинг ихтиёрий нуқтасидан асимптоталаригача бўлган масофаларнинг кўпайтмаси ўзгармас $\frac{a^2 b^2}{c^2}$ миқдорга тенг эканлиги исбот қилинсин.

296. Координата ўқларидан $a = b = 2$ кесмалар ажратувчи тўғри чизиққа $y = -\frac{x^2}{8}$ парабола фокусидан туширилган перпендикулярнинг узунлиги ва тенгламаси топилсин.

297. $x^2 + 4y^2 = 4$ эллипс ва $x^2 = 6y$ парабола ясалсин, ҳамда асослари эллипснинг кагта ўқи ва эллипс билан параболанинг умумий ватаридан иборат бўлган трапециянинг юзи топилсин.

298. Маркази $y^2 = 2px$ параболанинг фокусиди бўлган шундай айлана чизилганки, эгри чизиқларнинг умумий ватари параболанинг учидан ва фокусидан тенг узоқлашган. Шу айлананинг тенгламаси ёзилсин.

299. Координата ўқларидан a ва b кесмалар ажратувчи тўғри чизиққа $by = x^2 + 2ax + a^2 + b^2$ парабола учидан ту-

ширилган перпендикулярнинг узунлиги ва тенгламаси топилсин.

300. Координаталар ўқлари билан кесишган нуқталари бўйича $4y = 12 - x^2$ ва $4x = 12 - y^2$ параболалар ясалсин ва уларнинг умумий ватарининг узунлиги топилсин.

301. Учлари $y = 4 - x^2$ параболанинг Ox ўқ ва $y = 3x$ тўғри чизик билан кесишган нуқталарида бўлган тўртбурчакнинг юзи топилсин.

302. Координаталар босидан ва $y = \frac{x^2}{a} - 2x + a$ параболанинг координата ўқлари билан кесишган нуқталаридан ўтувчи айлана тенгламаси ёзилсин.

303. $x^2 + 4y^2 = 16$ эллипс берилган. Унинг $A(4; 0)$ нуқтидан ўтиши мумкин бўлган барча ватарлар ўтказилган. Ўша ватарлар ўрталарининг геометрик ўрни аниқлансин ва эгри чизиклар ясалсин.

Кўрсатма. Ватарлар ўрта нуқталарининг координаталари $x = \frac{x_2 + 4}{2}$,

$y = \frac{y_2}{2}$ дан иборат. Бундан x_2 ва y_2 ларни топиб, эллипс тенгламасига қўйиш керак.

304. Ҳаракатдаги $M(x; y)$ нуқтадан координата бурчакларининг биссектрисаларигача бўлган масофалар квадратларининг айирмаси 8 га тенг. Ўша нуқта траекторияси аниқлансин.

305. $A(3; 4)$ нуқтадан ўтувчи ва Ox ўққа уринувчи айланалар марказлари геометрик ўрнининг тенгламаси тузилсин.

306. $x^2 - y^2 - 4x - 6y - 9 = 0$ тенглама тўлиқ квадратдан иборат ҳадларини ажратиб ҳамда координаталар бошини кўчириб соддалаштирилсин. Эски ва янги координата ўқлари ҳамда эгри чизик ясалсин.

307. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ гиперболанинг ўнг фокусидан унинг барча нуқталарига ўтказилган фокал радиус-векторлари ўрталарининг геометрик ўрни топилсин.

308. Фокуслари $F(a; a)$ ва $F_1(-a; -a)$ нуқталарда бўлган ва $A(a; -a)$ нуқтадан ўтувчи эллипс тенгламаси ёзилсин. Тенгламави координата ўқларини 45° га буриб соддалаштирилсин.

309. Координаталар ўқларини $\varphi = \arctg \frac{1}{2}$ бурчакка буриб $3x^2 + 8xy - 3y^2 = 20$ тенглама соддалаштирилсин. Эски ва янги координата ўқлари ҳамда эгри чизик ясалсин.

310. $3x + 4y = 0$ тўғри чизиқча ва Ox ўқча бўлган масофалари квадратларининг айирмаси ўзгармас 2,4 га тенг бўлган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

311. $F\left(\frac{p}{e+1}; 0\right)$ нуқтага масофасининг $x = -\frac{p}{e(e+1)}$ тўғри чизиқча масофасига нисбати e га тенг бўлган $M(x, y)$ нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

312. Координатлари

1) $R^2 < x^2 + y^2 < 4R^2$ ва $x^2 > \frac{R^2}{4}$;

2) $x^2 - y^2 > a^2$ ва $x^2 < 4a^2$;

3) $xy > a^2$ ва $|x + y| < 4a$;

4) $2x < y^2 + 4y$ ва $x^2 + y^2 + 4x + 4y < 0$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи нуқталардан тузилган соҳалар ясалсин.

15-§. Иккинчи тартибли эгри чизиқнинг умумий тенгламаси

1°. Иккинчи тартибли чизиқ деб

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (1)$$

умумий кўринишда ёзилган иккинчи даражали тенглама билан аниқланувчи эгри чизиққа айтилади.

(1) тенгламанинг коэффицентларидан қуйидаги иккита:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \text{ ва } \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

детерминантни тузамиз.

Δ — детерминант (1) тенгламанинг дискриминанти, δ эса унинг юқори тартибли ҳадларининг дискриминанти дейилади. Δ ва δ ларнинг қийматларига қараб (1) тенглама қуйидаги геометрик шакллارни аниқлайди:

	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	Эллипс (ҳақиқий ёки мавҳум)	Нуқта
$\delta < 0$	Гипербола	Иккита кесилувчи тўғри чизиқ
$\delta = 0$	Парабола	Иккита параллел тўғри чизиқ (ҳақиқий ёки мавҳум)

2°. (1) тенгламани марказга нисбатан алмашти-
риш*. Агар $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$ бўлса, эгри чизик координатлари

$$\Phi'_x(x; y) = 0, \quad \Phi'_y(x; y) = 0 \quad (2)$$

тенгламалардан топилувчи бирдан-бир марказга эга бўлади, бунда $\Phi(x; y)$ — (1) тенгламанинг чап томони. Координаталар бошини $O_1(x_0; y_0)$ (10- чизма) марказга кўчириб, (1) тенгламани

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + F_1 = 0 \quad (3)$$

кўринишга келтирамиз, бунда

$$F_1 = Dx_0 + Ey_0 + F = \frac{\Delta}{\delta}. \quad (4)$$

3°. (3) тенгламани симметрия ўқларига келтириш. O_1x_1 ва O_1y_1 ўқларни бирор φ бурчакка буриб (10- чизма), (3) тенглама

$$A_1X^2 + C_1Y^2 + F_1 = 0 \quad (5)$$

каноник кўринишга келтирилади.

A_1 ва C_1 коэффициентлар

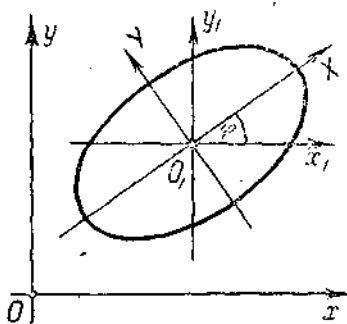
$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + \delta = 0 \quad (6)$$

тенгламанинг илдизларидан иборат.

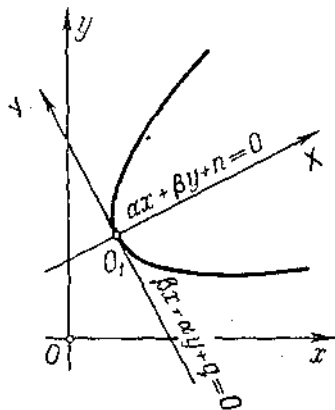
Буриш бурчаги φ

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A_1 - C} \quad (7)$$

формуладан топилади.



10- чизма.



11- чизма.

* Бу параграфда ва бундан сўнг ҳам тенгламани алмаштириш де-
ганда, координаталарни алмаштириш усули билан эгри чизикларнинг
тенгламаларини соддалаштиришни тушуниш керак,

4°. Марказсиз эгри чизиқларнинг тенгламаларини алмаштириш. Агар $\delta = 0$ бўлса, эгри чизиқ марказга эга бўлмайди ёки аниқ марказга эга бўлмайди. У ҳолда эгри чизиқнинг тенгламасини

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (8)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

I ҳол. D ва E лар α ва β ларга пропорционал: $D = m\alpha$, $E = m\beta$ у ҳолда (8) тенглама

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2m(\alpha x + \beta y) + F = 0$$

кўринишга келади. бундан

$$\alpha x + \beta y = m \pm \sqrt{m^2 - F}$$

иккита тўғри чизиқ ҳосил бўлади.

II ҳол. D ва E лар α ва β ларга пропорционал эмас. У ҳолда (8) тенгламани

$$(\alpha x + \beta y + n)^2 + 2m(\beta x - \alpha y + q) = 0 \quad (9)$$

кўринишда ёзиш мумкин. m , n ва q параметрлар (8) ва (9) тенгламаларнинг коэффициентларини таққослаш асосида топилади.

O_1X ўқ сифатида $\alpha x + \beta y + n = 0$ тўғри чизиқни, O_1Y ўқ сифатида эса $\beta x - \alpha y + q = 0$ тўғри чизиқни қабул қилиб (11-чизма),

$$Y = \frac{\alpha x + \beta y + n}{\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad X = \frac{\beta x - \alpha y + q}{\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \text{ ларни толамиз. Бундан сўнг (9)}$$

тенглама $Y^2 = 2pX$ кўринишга келади. Бунда $p = \frac{|m|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$. (9) тенгламага асосан O_1X ўқни шундай ярим текисликка йўналтириш керакки,

унда $\beta x - \alpha y + q$ учҳаднинг ишораси m нинг ишорасига тескари бўлсин.

313. Ушбу

$$1) 4x^2 - y^2 = 0; \quad 2) 4x^2 + y^2 = 0;$$

$$3) x^2 + y^2 + 2x + 2 = 0; \quad 4) x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0;$$

$$5) x^2 + xy = 0; \quad 6) y^2 - 16 = 0; \quad 7) x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$$

тенгламаларнинг геометрик маънолари аниқлансин.

314. Ушбу

$$1) 2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 7 = 0;$$

$$2) x^2 - y^2 - 4x + 2y - 4 = 0;$$

$$3) 2x^2 + 5xy + 2y^2 - 6x - 3y - 8 = 0$$

эгри чизиқларнинг марказлари топилин ва тенгламалари марказга нисбатан алмаштирилсин.

315. Координата ўқларини буриб, ушбу

$$1) 5x^2 - 4xy + 2y^2 = 24; \quad 2) 2x^2 + 4xy - y^2 = 12$$

эгри чизиқларнинг тенгламалари каноник кўринишга келтирилсин ва эгри чизиқлар ясалсин.

316. Ушбу

1) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 4y - 12 = 0$;

2) $x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 4y + 12 = 0$

тенгламалар каноник кўринишга келтирилсин ва эгри чизиклар ясалсин.

317. Қуйидаги эгри чизикларнинг тенгламалари каноник кўринишга келтирилсин ва чизиклар ясалсин:

1) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 20x + 10y - 50 = 0$;

2) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 12y + 8 = 0$.

318. δ ва Δ дискриминантларга қараб ушбу

1) $x^2 - 4xy + 3y^2 - 8x + 14y + 15 = 0$;

2) $x^2 + 2xy + 4y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$;

3) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x + 6y + 2 = 0$

тенгламаларнинг геометрик маънолари аниқлансин. Биринчи ва учинчи тенгламаларни y га нисбатан ечиб, шу тенгламалар билан аниқланувчи эгри чизиклар ясалсин.

319. $y = \frac{3x^2 - 12x + 4}{4x - 8}$ эгри чизик тенгламаси каноник

кўринишга келтирилсин ва эгри чизик ясалсин.

320. Маркази $O_1(1; 2)$ нуқтада бўлган ва координаталар боши ҳамда $(0; 4)$ ва $(1; -1)$ нуқталардан ўтувчи 2-тартибли эгри чизик тенгламаси ёзилсин.

321. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ тенглама парабола ёйини аниқлаши кўрсатилсин. Парабола ясалсин ва учи аниқлансин.

Кўрсатма. Координата ўқлари $\varphi = -45^\circ$ бурчакка бурилсин.

322. Ҳар бирдан $F(m; n)$ нуқтагача бўлган масофанинг $x \cos \alpha + y \sin \alpha - q = 0$ тўғри чизикқача бўлган масофага нисбати ε га тенг бўлган $M(x; y)$ нуқталар геометрик ўринининг тенгламаси ёзилсин. Бу тенглама коэффициентларини

$A, B, C, \dots$ лар орқали белгилаб, $A + C$ ва $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$

инвариантлар аниқлансин.

323. Ушбу

1) $x^2 - 4y^2 = 0$;

2) $x^2 + 2y^2 + 4x - 8y + 12 = 0$;

3) $x^2 + 5xy - 6y^2 = 0$

тенгламаларнинг геометрик маънолари аниқлансин.

324. Ушбу

1) $x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$;

2) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 12x - 12y + 4 = 0$

тенгламалар каноник кўринишга келтирилсин ва эгри чизиқлар ясалсин.

325. Ушбу

1) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;

2) $x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

тенгламалар каноник кўринишга келтирилсин ва бу тенгламалар билан ифодаланувчи эгри чизиқлар ясалсин.

326. δ ва Δ дискриминантлар бўйича

1) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0$;

2) $x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x + 10y - 7 = 0$

тенгламаларнинг геометрик маънолари аниқлансин. Тенгламаларнинг ҳар бирини y га нисбатан ечиб, бу тенгламалар билан аниқланувчи чизиқлар ясалсин.

327. Ҳар биридан $F(3; 3)$ нуқтагача бўлган масофанинг $x + y = 0$ тўғри чизиққача масофага нисбати:

1) $e = \frac{1}{2}$; 2) $e = 2$ га тенг бўлган $M(x; y)$ нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

328. $F\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$ нуқтадан ва $x + y = 0$ тўғри чизиқдан барабар узоқликда бўлган $M(x; y)$ -нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин ва y каноник кўринишга келтирилсин.

329. $x - 2y = 2$ тўғри чизиққача ва Ox ўққача бўлган масофаларни квадратларининг айирмаси ўзгармас 3,2 га тенг нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин. Тенглама каноник кўринишга келтирилсин ва эгри чизиқ ясалсин.

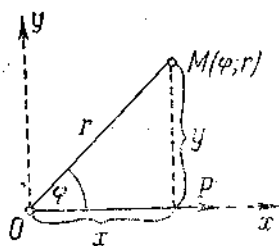
16-§. Қутб координаталари

Текисликда O нуқта — қутб ва OP нур — қутб ўқи берилган бўлсин (12-чизма). $\mathcal{U}$ ҳолда M нуқтанинг текисликдаги ўрни

1) $\varphi = \angle MOP$ қутб бурчак;

2) $r = OM$ радиус-вектор

билан аниқланади, φ билан r орасидаги боғланишни ифодаловчи тенгламани ўрганганда, қутб координаталари φ ва r ҳар қандай мусбат ва манфий қийметлар қабул қилади деб қараш фойдалидир. Манфий φ бурчак соат стрелкасининг юриши бўйича ҳисобланса, манфий r бўлса, нурнинг ўзи бўйича эмас, унинг қутбнинг иккинчи томонидаги давомида жойлаштирилади.



12- чизма.

Агар қутбни Декарт координаталари системасининг боши, OP қутб ўқини эса Ox ўқ деб қабул этсак, ихтиёрый M нуқтанинг Декарт системасидаги $(x; y)$ координаталари билан унинг $(\varphi; r)$ қутб координаталари орасидаги боғланиш

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi; \quad (1)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \quad (2)$$

тенгламалар билан ифодаланadi.

Агар эллипс, гипербола ва парабола фокусини қутб деб олиб, қутб ўқи эса қутбга энг яқин учига қаратилган йўналишга тескари йўналтирилган фокал симметрия ўқини олсак, бу эгри чизиқларнинг қутб координаталардаги тенгламалари бир хил

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \quad (3)$$

кўринишда бўлади, бунда ε — эксцентриситет, p — параметр. Эллипс ва гипербола учун $p = \frac{b^2}{a}$.

330. $(\varphi; r)$ қутб координаталар системасида $A(0; 3)$, $B\left(\frac{\pi}{4}; 2\right)$, $C\left(\frac{\pi}{2}; 3\right)$, $D(\pi; 2)$, $E\left(\frac{3\pi}{2}; 3\right)$ нуқталар ясалсин.

331. $A\left(\frac{\pi}{2}; -2\right)$, $B\left(-\frac{\pi}{2}; 3\right)$, $C\left(-\frac{\pi}{4}; -4\right)$, $D\left(\frac{2\pi}{3}; -3\right)$ нуқталар ясалсин.

332. $r = 2 + 2 \cos \varphi$ чизиқ ясалсин.

Кўрсатма. $\varphi = 0; \pm \frac{\pi}{3}; \pm \frac{\pi}{2}; \pm \frac{2\pi}{3}; \pi$ лар учун r қийматларининг жадвали тузилсин.

333.

- 1) $r = a\varphi$ (Архимед спирали);
- 2) $r = a(1 - \cos \varphi)$ (кардиоида);
- 3) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (лемниската);
- 4) $r = \frac{a}{\varphi}$ (гиперболик спираль);
- 5) $r = a(1 + 2 \cos \varphi)$ (Паскаль чиганоғи)

чизиқлар ясалсин (84, 85 ва 90- чизмаларга қаранг).

334. 1) $r = a$; 2) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; 3) $r = \frac{b}{\sin \varphi}$ чизиқлар ясалсин.

335. 1) Қутб ўқиға перпендикуляр бўлиб, ундан a кесма ажратувчи тўғри чизиқ;

2) $A(\alpha; a)$ нуқтадан ўтувчи ва қутб ўқиға параллел бўлган тўғри чизиқнинг қутб координаталаридаги тенгламалари ёзилсин.

336. $A(\alpha; a)$ нуқтадан ўтувчи ва қутб ўқи билан β бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқнинг қутб координаталаридаги тенгламаси ёзилсин.

337. Маркази $C(0; a)$ нуқтада ва радиуси a га тенг айлананинг қутб координаталаридаги тенгламаси ёзилсин.

338. 1) $r = 3 - 2 \sin 2\varphi$; 2) $r = 2 + \cos 3\varphi$; 3) $r = 1 - \sin 3\varphi$ чизиқлар ясалсин.

Кўрсатма. Олдин $r_{\max}$ ва $r_{\min}$ ларни берадиган бурчаклар аниқлансин.

339. 1) $r = a \sin 3\varphi$ (уч япроқли гул);

2) $r = a \sin 2\varphi$ (тўрт япроқли гул)

чизиқлар ясалсин (86 ва 87- чизмаларга қаранг).

340. Ушбу

$$1) x^2 - y^2 = a^2;$$

$$2) x^2 + y^2 = a^2;$$

$$3) x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0;$$

$$4) y = x;$$

$$5) x^2 + y^2 = ax;$$

$$6) (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

чизиқларнинг тенгламалари қутб координаталаридаги тенгламалари билан алмаштирилсин.

Кўрсатма. $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ ларни берилган тенгламаларга қўйиб соддалаштирилсин.

341. Ушбу

$$1) r \cos \varphi = a; \quad 2) r = 2a \sin \varphi; \quad 3) r^2 \sin 2\varphi = 2a^2;$$

$$4) r \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = a \sqrt{2}; \quad 5) r = a(1 + \cos \varphi)$$

чизиқларнинг тенгламалари декарт координаталаридаги тенгламалари билан алмаштирилсин ва эгри чизиқлар ясалсин.

Кўрсатма. $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ формулалардан фойдаланилсин.

342. Қуйидаги

1) $r = \frac{9}{5-4 \cos \varphi}$; 2) $r = \frac{9}{4-5 \cos \varphi}$; 3) $r = \frac{3}{1-\cos \varphi}$
 иккинчи тартибли эгри чизикларнинг каноник тенгламалари
 ёзилсин.

Қўрсатма. e ва p нинг қийматларидан фойдаланиб, эгри чизиклар-
 нинг параметрлари топиб олинсин. (48-бетдаги (3) формулага қаранг).

343. Конхоида. $A\left(\frac{\pi}{2}; a\right)$ нуқтадан қутб ўқига парал-
 лел қилиб тўғри чизик ўтказилган. Ихтиёрий OB нур бу
 тўғри чизикни B нуқтада кесади. Нурда B нинг ҳар икки
 тарафида $BM = BM_1 = b$ кесмалар ажратилган. Қутб коор-
 динаталарида M ва M_1 нуқталарнинг геометрик ўрни аниқ-
 лансин ва эгри чизик ясалсин.

Қўрсатма. B нуқтанинг координаталарини $(\varphi; r)$ деб олсак, $r =$
 $= \frac{a}{\sin \varphi}$. Изланган геометрик ўриннинг тенгласи $r = \frac{a}{\sin \varphi} \pm b$
 бўлади.

344. Строфоида. $x = a$ тўғри чизик Ox ўқни A
 нуқтада, ихтиёрий QB нурни эса B нуқтада кесади. Нурда
 B нинг ҳар икки тарафида AB га тенг BM_1 ва BM_2 кесма-
 лар қўйилган. M_1 ва M_2 нуқталар геометрик ўриннинг Де-
 карт ва қутб координаталаридаги тенгламалари ёзилсин
 (88-чизма).

345. Кассини овали. $M(\varphi; r)$ нуқта шундай ҳаракат
 қиладики, ундан $F(0; a)$ ва $F_1(\pi; a)$ нуқталаргача бўлган масо-
 фалар кўпайтмаси b^2 га тенг бўлиб қолади. Ҳаракатдаги M
 нуқта траекториясининг қутб координаталаридаги тенглама-
 си ёзилсин.

346. Кардиоида. $r = a \cos \varphi$ айланани A нуқтада
 кесувчи ихтиёрий OA нурда A нинг ҳар икки тарафида
 $AP = AP_1 = a$ кесмалар қўйилган. P ва P_1 нуқталар гео-
 метрик ўриннинг Декарт ва қутб координаталаридаги тенг-
 ламалари ёзилсин.

347. Кардиоида (эпициклоида). Диаметри a га
 тенг доира ўзининг диаметридай диаметрли доира бўйича
 ундан ташқарида қолиб, сирғанмасдан юмалайди. Қутб деб
 доираларнинг бошланғич вазиятидаги уриниш нуқтасини,
 қутб ўқи учун эса доираларнинг ўша вазиятидаги марказла-
 ри орқали ўтувчи тўғри чизикни қабул қилиб, юмаловчи ай-
 лананинг бошланғич вазиятда қутбда бўлган M нуқтаси
 чизган эгри чизик тенгласи ёзилсин.

348. 1) $r = 3 + 2 \cos 2 \varphi$; 2) $r = 3 - \sin 3 \varphi$; 3) $r = a \cos 2 \varphi$ чизиқлар ясалсин (338- масалага берилган кўрсатмага қаранг).

349. 1) $r = 4 (1 + \cos \varphi)$; 2) $r = 2 - \sin \varphi$ чизиқлар ясалсин.

350. Қутб координаталарида берилган $A (\alpha; a)$ ва $B (\beta; b)$ нуқталардан ўгувчи тўғри чизиқ тенгламаси ёзилсин.

Кўрсатма. $M(\varphi; r)$ нн тўғри чизиқдаги ихтиёрий нуқта деб, $АОМ$, $ВОМ$ -ва $АОВ$ учбурчак юзлари орасидаги муносабат текширилсин.

351. Ушбу

$$1) r = \frac{1}{2 - \sqrt{3} \cos \varphi}; \quad 2) r = \frac{1}{2 - \sqrt{5} \cos \varphi}; \quad 3) r = \frac{1}{2 - 2 \cos \varphi}$$

иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг каноник тенгламалари ёзилсин.

352. Бернулли лемнискатаси. $M(\varphi; r)$ нуқта шундай ҳаракат қиладики, ундан $F(0; c)$ ва $F_1(\pi; c)$ нуқталаргача бўлган масофалар кўпайтмаси c^2 га тенг бўлиб қолади. Бу нуқта ҳаракат траекториясининг Декарт ва қутб координаталаридаги тенгламалари ёзилсин.

Кўрсатма. Косинуслар теоремасига кўра $FM^2 = r^2 + c^2 - 2rc \cos \varphi$ ва $F_1M^2 = r^2 + c^2 + 2rc \cos \varphi$, ундан тўшқари масала шартига кўра $FM^2 \cdot F_1M^2 = c^4$.

353. Паскаль чиғанёғи. Ихтиёрий OA нур $r = a \cos \varphi$ айланани A нуқтада кеседи. OA нурда A нинг ҳар икки тарафида $AP = AP_1 = b$ кесмалар қўйилган. P нуқталар геометрик ўрнининг қутб координаталаридаги тенгламаси ёзилсин.

354. Тўрт япроқли гул. $AB = 2a$ кесманинг учлари Декарт координата ўқлари бўйича сирғанади. Координаталар бошидан AB га OM перпендикуляр туширилган. AB кесманинг ҳар қандай вазиятидаги $M(x; y)$ нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

17- §. Учинчи тартибли ва юқори тартибли алгебраик эгри чизиқлар

355. Ушбу

$$\left. \begin{array}{l} 1) y = \frac{x^3}{3} \\ 2) y^2 = x^3 \\ 3) y^3 = x^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(кубик парабола);} \\ \text{(ярим кубик парабола);} \end{array}$$

4) $y^2 = x(x-4)^2$ (илмоқли парабола)

эгри чизиклар ясалсин (70—73- чизмаларга қаранг).

356. 1) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (тенг томонли астроида);

2) $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, b \neq a$ (тенг томонли бўлмаган астроида) эгри чизиклар ясалсин.

Қўрсатма. Олдин ҳар бир эгри чизикнинг Ox ва Oy ўқлари билан кесилган нуқталари топилсин, сўнгра биринчи эгри чизик билан $y = \pm x$ тўғри чизикларининг, иккинчи эгри чизик билан $y = \pm \frac{b}{a} x$ тўғри чизикларининг кесилган нуқталари топилсин (82- чизмага қаранг).

357. $[-1; 1]$ кесмада $n = 1, 2, 4$ деб; 1) $y = x^{2n+1}$; 2) $y = x^{2n}$; 3) $x^{2n} + y^{2n} = 1$ эгри чизиклар ясалсин. $n \rightarrow \infty$ да бу эгри чизиклар қандай сининг чизикларга яқинлашади?

Қўрсатма. Биринчи эгри чизикнинг $y = \frac{x}{2n}$ тўғри чизик билан иккинчи эгри чизикнинг $y = \frac{1}{2n}$ тўғри чизик билан ва учинчи эгри чизикнинг $y = x$ тўғри чизик билан кесилган нуқталари топилсин. Масштаб бирлиги учун каттак қоғозининг 10 қатаги қабул қилинсин.

358. Астроида. $AB = a$ кесманинг учлари координата ўқлари бўйлаб сирғанади. Координата ўқларига параллел AC ва BC тўғри чизиклар C нуқтада кесилсади. C дан AB га CM перпендикуляр туширилган. AB кесманинг барча вазиятлари учун $M(x; y)$ нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

359. 1) $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$ (циссоида, 89- чизма);

2) $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ ((локон) зулф, 80- чизма) эгри чизиклар ясалсин.

360. $y^2 = 2px$ параболанинг ҳар бир $P(x_0; y_0)$ нуқтаси Ox ўққа параллел қилиб, $PM = \pm OP$ масофага кўчирилган. M нуқталар геометрик ўрни топилсин.

Қўрсатма. $PM = OP$ бўлсин. $y = y_0, x - x_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ ва парабола тенгламасидан x_0, y_0 ни йўқотиб, изланган тенгламага эга бўламиз.

361. $OA = a$ стержень координаталар боши O атрофида айланади. A нуқтага шарнир билан $AB = 2a$ стержень бириктирилган, унинг B нуқтаси Ox ўқ бўйлаб сирғанади.

AB кесманинг ўртаси *M* чизган эгри чизиқ тенгламаси ёзилсин.

Қўрсатма. $A(x_A; y_A)$; $M(x; y)$ ва $B(x_B; 0)$ нуқталарнинг координаталарини боғловчи қуйидаги тенгликларни тузиш мумкин:

$$\begin{array}{ll} 1) x_A + x_B = 2x; & 2) y_A^2 + x_A^2 = a^2; \\ 3) 4y^2 + x_A^2 = a^2; & 4) 4a^2 = a^2 + x_B^2 - 2x_B x_A. \end{array}$$

1), 2), 3) ва 4) лардан x_A , x_B ларни йўқотиб, изланган тенгламани ҳосил қиламиз.

362. Циссоида. Ихтиёрий *OA* нур (89- чизмага қаранг) $x^2 + y^2 = ax$ айланани *A* нуқтада ва $x = a$ тўғри чизиқни эса *B* нуқтада кесиб ўтади. Шу нурдан $OM = AB$ кесма ажратилади. *M* нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси тузилсин.

363. Ихтиёрий *OB* нур (89- чизма) $x = a$ тўғри чизиқни *B* нуқтада кесади, *C* нуқта — *B* нинг *Oy* ўқдаги проекцияси, *M* нуқта *C* нинг *OB* даги проекцияси. *M* нуқталар геометрик ўрни циссоида эканлиги кўрсатилсин.

364. $y^2 = -4ax$ парабола учидан параболага ўтказилган уринмаларнинг ҳар бирига перпендикуляр туширилса, бу перпендикулярлар асосларининг геометрик ўрни циссоида бўлади. Исбот қилинсин.

Қўрсатма. $y^2 = -4ax$ нинг $(x_0; y_0)$ нуқтасида ўтказилган уринма тенгламаси $y - y_0 = -4a(x + x_0)$ дан иборат. У ҳолда парабола учидан уринмага туширилган перпендикуляр тенгламаси $y = \frac{y_0}{4a}x$ бўлади. Бу икки тенгламадан ва парабола тенгламасидан x_0 , y_0 ларни йўқотилса, циссоида тенгламаси келиб чиқади.

365. Зулф (локон). Ихтиёрий *OA* нур $x^2 + y^2 = 2ay$ айланани ва $y = 2a$ тўғри чизиқни мос равишда *A* ва *B* нуқталарда кесади. *A* ва *B* лардан мос равишда *Ox* ҳамда *Oy* ўқларга параллел тўғри чизиқлар ўтказилган ва улар *M* нуқтада кесиштирилган. *M* нуқталарнинг геометрик ўрни аниқлансин.

366. Декарт япроғи $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Координата ўқларини 45° бурчакка буриб, бу тенгламани $Y^2 = \frac{X^2(3b - X)}{3(b + X)}$ кўринишга келтириш мумкин эканлиги кўрсатилсин, бунда $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$, янги координаталар системасида бу эгри чизиқнинг жойланиш соҳаси ва унинг симметрияси ҳамда $y = x$ (яъни янги *OX* ўқ) билан кесишган нуқталари ва асимпто-

таси аниқланиб, эгри чизиқ ясалсин. Асимптотанинг тенгламаси янги системада $X = -b$, эски системада эса $x + y + a = 0$ экани кўрсатилсин (83- чизмага қаранг).

18- §. Трансцендент эгри чизиқлар

367. Циклоида. Радиуси a бўлган доира сирғанмасдан тўғри чизиқ бўйича юмалайди. Юмаловчи доиранинг бурилиш (79- чизма) бурчаги t ни параметр деб олиб, айлананинг M нуқтаси чизган эгри чизиқнинг параметрик тенгламаси тузилсин. $t = 0$ бўлганда M нуқта координаталар бошида деб олинсин.

368. Доира ёйилмаси. $x^2 + y^2 = a^2$ айланага ўралган ип таранг қилиб тортилган ҳолда қайтадан ёйилган. Агар ипнинг охириги нуқтаси бошланғич вақтда $(a; 0)$ нуқтада бўлса, ипнинг ёйилиш вақтида унинг учини чизган эгри чизиқнинг параметрик тенгламаси тузилсин. Параметр t деб ўралган ёйнинг радиусга нисбатан ўлчанган узунлиги олинсин.

369. Квадратриса. Оу ўқ билан t бурчак (радиан ўлчовида) ташкил этувчи ихтиёрий OM нур $x = at$ тўғри чизиқни M нуқтада кесади. M нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

370. Эпициклоида. Радиуси r бўлган доира сирғанмасдан радиуси R бўлган доира ташқариси бўйича юмалайди. Юмаловчи айлананинг M нуқтаси чизган эгри чизиқнинг параметрик тенгламалари тузилсин. ($r = R$ бўлганда эпициклоида кардиоидага айланади. 347- масалага қаранг.)

371. Гипоциклоида. Радиуси r бўлган доира сирғанмасдан радиуси $R > r$ доиранинг ички томони бўйича юмалайди. Юмаловчи айлананинг M нуқтаси чизган эгри чизиқнинг параметрик тенгламалари тузилсин. ($r = \frac{R}{4}$ бўлган-

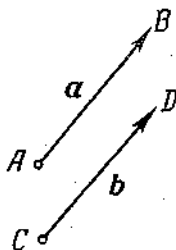
да гипоциклоида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ астроидага айланади).

II БОБ

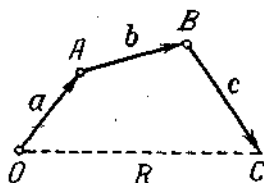
ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСИ

1- §. Векторларни қўшиш. Векторни скалярга кўпайтириш

1°. Таърифлар: Йўналтирилган $\overline{AB}$ кесма (13- чизма) *вектор* дейилади. Бунда A нуқта векторнинг боши, B нуқта эса унинг охири деб қаралади. Вектор боши ва охири кўрсатилиб тепасига стрелкани чизикча қўйилган AB кўринишида ёки қандайдир бирор ҳарф, масалан, a (босмада қалин ёзилган, ёзмада эса тепасига чизикча қўйилган) билан белгиланади. Векторнинг модули (узунлиги) $|\overline{AB}|$ ёки $|a|$, ёки AB , ёки a билан белгиланади. Бир тўғри чизикча параллел бўлган векторлар *коллинеар* векторлар дейилади. Бир текисликка параллел бўлган векторлар *компланар* векторлар дейилади. Агар икки a ва b (13- чизма)



13- чизма.



14- чизма.

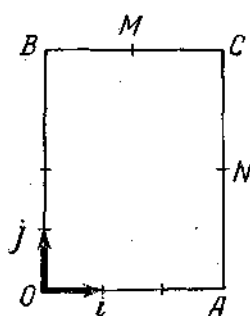
векторлар: 1) тенг модулга эга, 2) ўзаро коллинеар, 3) бир томонга йўналган бўлса, улар ўзаро тенг дейилади.

2°. Векторни скалярга кўпайтириш. a векторнинг бирор m сонга (скалярга) кўпайтмаси деб, узунлиги $a|m|$ га тенг бўлган ва йўналиши эса берилган вектор йўналишидай ($m > 0$ бўлганда) ёки унга қарама-қарши ($m < 0$ бўлганда) бўлган янги векторга айтилади.

3°. Векторларни қўшиш. Бир неча векторнинг йиғиндиси $a+b+c$ деб шу векторлардан тузилган (14- чизма) $OABC$ синиқ чизикнинг ёпувчисидан иборат $\overline{OC} = R$ векторга айтилади. Масалан, $\overline{OA} =$

$\vec{OA} = \vec{a}$ ва $\vec{OB} = \vec{b}$ векторларда ясалган параллелограммнинг бир диагональ вектори $\vec{OC}$ берилган векторларнинг йиғиндисини $\vec{a} + \vec{b}$, иккинчи диагональ вектори $\vec{BA}$ эса уларнинг айирмасини $\vec{a} - \vec{b}$ дан иборатдир.

4°. Векторнинг ўқдаги проекцияси. $\vec{a}$ вектор Ox ўқи билан φ бурчак ташкил этсин. У ҳолда векторнинг бу ўқдаги проекцияси



15- чизма.

$\text{пр}_x \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi = a \cos(\vec{a}, Ox)$.
формула билан аниқланади.

Бир неча вектор йиғиндисининг ўқдаги проекцияси қўшилувчи векторлар проекцияларининг йиғиндисига тенг:

$$\text{пр}_x (\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_x \vec{a} + \text{пр}_x \vec{b}.$$

372. $OACB$ тўғри тўртбурчакнинг (15- чизма) OA ва OB томонларига $\vec{i}$ ва $\vec{j}$ бирлик векторлар қўйилган. Агар OA нинг узунлиги 3 га ва OB нинг узунлиги 4 га тенг бўлса, $\vec{OA}$, $\vec{AC}$, $\vec{CB}$, $\vec{BO}$, $\vec{OC}$ ва $\vec{BA}$ векторлар $\vec{i}$ ва $\vec{j}$ орқали

ифодалансин.

373. 15- чизмада M нуқта BC нинг ўртаси, N нуқта эса AC нинг ўртаси бўлсин. $OA = 3$ ва $OB = 4$ бўлганда $\vec{OM}$, $\vec{ON}$ ва $\vec{MN}$ векторлар аниқлансин.

374. Текисликда $A(0; -2)$, $B(4; 2)$ ва $C(4; -2)$ нуқталар берилган. Координаталар бошидан $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ ва $\vec{OC}$ кучлар қўйилган. Уларнинг тенг таъсир этувчиси $\vec{OM}$ ясалсин ва унинг ўқлардаги проекциялари ҳамда узунлиги топилинсин. $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ ва $\vec{OM}$ кучлар $\vec{i}$ ва $\vec{j}$ бирлик векторлар орқали ифодалансин.

375. Учта компланар $\vec{m}$, $\vec{n}$ ва $\vec{p}$ бирлик вектор берилган бўлиб, $(\vec{m}, \vec{n}) = 30^\circ$ ва $(\vec{n}, \vec{p}) = 60^\circ$ $\vec{u} = \vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}$ вектор ясалсин ва унинг модули ҳисоблансин.

Қўрсатма. $\vec{m}$, $2\vec{n}$ ва $-3\vec{p}$ векторлардан тузилган синиқ чизиқнинг биринчи бўғини учинчи бўғини билан кесишгунча давом эттирилсин.

$$376. 1) \vec{a} + \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}; 2) \vec{a} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \frac{\vec{a} - \vec{b}}{2}$$

вектор айтишларнинг тўғрилиги аналитик ва геометрик текширилсин.

377. Ҳамакўпланар бўлмаган $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$ ва $\overline{OC} = c$ векторларда параллелепипед ясалган. Унинг мос равишда $a + b - c$, $a - b + c$, $a - b - c$ ва $b - a - c$ ларга тенг вектор-диagonalлари кўрсатилсин.

378. 377- масаланинг чизмасидан фойдаланиб, векторлар йиғиндисини учун ўрин алмаштириш хоссасини текширилсин:

$$a + b - c = a - c + b = b + a - c = b - c + a.$$

379. $\overline{OA} = a$ ва $\overline{OB} = b$ векторлар берилган. $\overline{OC} = c$ вектор $\triangle OAB$ нинг медианаси. 1) c вектор a ва b векторлар бўйича, 2) a вектор b ва c векторлар бўйича аналитик ва геометрик тарқатилсин.

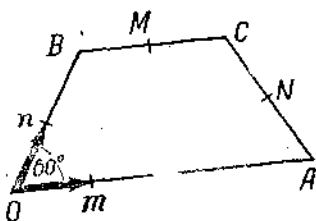
380. M ва N нуқталар $OACB$ тўғри тўртбурчак $BC = 3$ ва $AC = 4$ томонларининг ўрталари бўлсин. $\overline{OC} = c$ вектор $\overline{OM} = a$ ва $\overline{ON} = b$ векторлар бўйича тарқатилсин.

Кўрсатм. $c = ma + nb$ шартдаги a , b , c лар ўрнига уларнинг i ва j орқали ифодаларини қўйиб, чап ва ўнг томондаги i , j лар олдидаги коэффициентлар таққослансин.

381. OA томони 3 га тенг бўлган мунтазам $OABCDE$ олтибурчак берилган. $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ векторларга қарашли бирлик векторларни m , n ва p лар орқали белгилаб, бу бирлик векторлар орасидаги боғланиш аниқлансин (масалан, $OABC$ трапецияни текшириш орқали). Сўнгра $\overline{OB}$, $\overline{BC}$, $\overline{OD}$ ва $\overline{DA}$ векторлар m ва n векторлар орқали ифода қилинсин.

382. Тенг ёнли $OACB$ трапецияда (16- чизма) $\angle BOA = 60^\circ$, $OB = BC = CA = 2$, M ва N — мос равишда BC ва AC томонларнинг ўрталари, $\overline{AC}$, $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ ва $\overline{MN}$ векторлар $\overline{OA}$ ва $\overline{OB}$ векторларга қарашли m ва n бирлик векторлар орқали ифода қилинсин.

383. Ҳазор 120° бурчак ташкил этувчи a ва b векторлар берилган. Агар $a = 3$ ва $b = 4$ бўлса, $c = 2a - 1,5b$ вектор ясалсин ва унинг модули аниқлансин.



16- чизма.

384. Текисликда $A(3; 3)$, $B(-3; 3)$ ва $C(-3; 0)$ нуқталар берилган, координаталар бошидан $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ва $\overline{OC}$ кучлар қўйилган. Уларнинг тенг таъсир этувчиси $\overline{OM}$ ясалсин ва унинг ўқлардаги проекциялари ҳамда катталиги топилсин. $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ ва $\overline{OM}$ векторлар ўқлардаги i ва j бирлик векторлар орқали ифодалансин.

385. 1) $OACB$ трапецияда: $BC = \frac{1}{3}OA$ ва $BC \parallel OA$. $\overline{OA} = a$ вектор $\overline{OC} = c$ ва $\overline{OB} = b$ векторлар бўйича аналитик ва геометрик ёйилсин.

Қўрсатма. $\triangle OBC$ дан фойдаланиб, c ни b ва a орқали ифодалаш мумкин, сўнгра ҳосил бўлган тенгламани a га нисбатан ечиш керак.

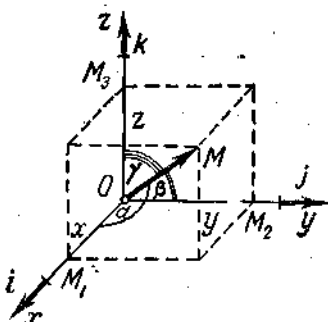
2) Маркази O нуқтада бўлган айлананинг $\widehat{AC} = 90^\circ$ ёйини B нуқта 1:2 нисбатда бўлади: $\overline{OC} = c$ вектор $\overline{OA} = a$ ва $\overline{OB} = b$ векторлар бўйича тарқатилсин.

2- §. Фазода нуқтанинг ҳамда векторнинг тўғри бурчакли координаталари

1°. Таъриф. Умумий бошланғич O нуқтага эга ва ўзаро перпендикуляр бўлган учта координата ўқи ва M нуқта берилган бўлсин (17-чизма). Бу нуқтанинг радиус-вектори $\overline{OM} = r$ нинг ўқлардаги $OM_1 = x$, $OM_2 = y$ ва $OM_3 = z$ проекциялари нуқтанинг ёки $r = \overline{OM}$ векторнинг тўғри бурчакли координаталари дейилади.

2°. Фазодаги нуқтанинг радиус-вектори. $\overline{OM} = r$ радиус-векторнинг модули ёки узунлиги ушбу:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1)$$



17-чизма.

формула билан аниқланади. Координата ўқларидаги i, j, k бирлик векторлар ортлар дейилади. Радиус-вектор ортлар орқали қуйидагича ифодаланади.

$$r = xi + yj + zk. \quad (2)$$

3°. Боши ва охирининг координаталари билан ифодаланган вектор. $A(x_1; y_1; z_1)$ ва $B(x_2; y_2; z_2)$ нуқталар берилган бўлсин, $u = \overline{AB}$ векторнинг координата ўқларидаги проекциялари қуйидагилардан иборат:

$$\left. \begin{aligned} \text{пр}_x \overline{AB} &= X = x_2 - x_1, \\ \text{пр}_y \overline{AB} &= Y = y_2 - y_1, \\ \text{пр}_z \overline{AB} &= Z = z_2 - z_1. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(1) ва (2) формулаларга ўхшаш

$$u = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (4)$$

$$u = \overline{AB} = Xi + Yj + Zk \quad (5)$$

формулаларни ёзиш мумкин.

Агар $u = \overline{AB}$ вектор координата ўқлари билан α , β ва γ бурчаклар ташкил этса, у ҳолда

$$\cos \alpha = \frac{X}{u}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{u}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{u}, \quad (6)$$

шу билан бирга

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \quad (7)$$

яъни ҳар қандай вектор йўналишувчи косинуслари квадратларининг йиғиндисидир 1 га тенг.

(4), (5) ва (6) формулалардан u вектор ўзининг проекциялари ёки координаталаридан иборат учта X , Y ва Z сн билан тўлиқ аниқланиши кўрилади. Шунинг учун баъзан $u \{X; Y; Z\}$ вектор берилган деб айтадилар ёки ёзадилар.

386. $M(5; -3; 4)$ нуқта ясалсин ва унинг радиус-векторининг узунлиги ҳамда йўналиши аниқлансин.

387. $r = \overline{OM} = 2i + 3j + 6k$ вектор ясалсин ва унинг радиус-векторининг узунлиги ҳамда йўналиши аниқлансин ($\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ формула бўйича текширилсин).

388. Вектор Ox ва Oz ўқлар билан мос равишда 40° ва 80° бурчак ташкил этади. Бу векторнинг Oy ўқ билан ташкил этган бурчаги топилсин.

389. M нуқтанинг радиус-вектори Ox ўқ билан 45° ва Oy ўқ билан 60° бурчак ташкил этади. Векторнинг узунлиги $r = 6$. Агар M нинг аппликатаси (z) манфий бўлса, унинг координаталари аниқлансин ва $\overline{OM} = r$ вектор i, j, k лар орқали ифодалансин.

390. $A(1; 2; 3)$ ва $B(3; -4; 6)$ нуқталар берилган. $u = \overline{AB}$ вектор ва унинг координата ўқларидаги проекциялари ясалсин ҳамда унинг узунлиги ва йўналиши аниқлансин. u векторнинг координата ўқлари билан ташкил этган бурчаклари ясалсин.

391. $\overline{OA} = i + j$ ва $\overline{OB} = k - 3j$ векторларда параллелограмм ясалсин ва унинг диагоналлари аниқлансин.

392. $A(2; 1; -1)$ нуқтага $R = 7$ куч қўйилган. Бу кучнинг икки координатаси $X = 2$ ва $Y = -3$; ўша кучни ифодаловчи векторнинг йўналиши ва охири нуқтаси аниқлансин.

393. xOy текисликда $A(4; 2)$, $B(2; 3)$ ва $C(0; 5)$ нуқталар берилган ва $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ ва $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ векторлар ясалган. $\mathbf{a}$ вектор $\mathbf{b}$ ва $\mathbf{c}$ векторлар бўйича аналитик ва геометрик тарқатилсин.

394. $A(2; 2; 0)$ ва $B(0; -2; 5)$ нуқталар берилган. $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$ вектор ясалсин ҳамда унинг узунлиги ва йўналиши аниқлансин.

395. $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$ вектор координата ўқлари билан бир хил ўткир бурчаклар ташкил этади. Агар векторнинг узунлиги $2\sqrt{3}$ бўлса, бурчаклар аниқлансин ва $\mathbf{r}$ вектор ясалсин.

396. Вектор Oy ва Oz ўқлар билан мос равишда 60° ва 120° бурчаклар ташкил этади. Ўша вектор Ox ўқ билан қандай бурчак ташкил этади?

397. Параллелограммнинг кетма-кет учта $A(1; -2; 3)$, $B(3; 2; 1)$ ва $C(6; 4; 4)$ учлари берилган. Унинг тўртинчи учи D топилсин.

Қўрсатма. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ тенгликдан уларнинг координаталарининг тенглиги ($x - 1 = 6 - 3$ ва ҳоказо) келиб чиқади.

398. xOy текисликда $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a} = 2\mathbf{i}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ ва $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ ясалсин. $\mathbf{c}$ вектор $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ векторлар бўйича аналитик ва геометрик тарқатилсин.

3- §. Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси

1°. Таъриф. Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси деб шу векторлар модулларининг ular орасидаги бурчак косинуси билан кўпайтмасига айтилади.

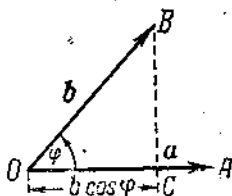
$\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ кўринишда белгиланади. Демак,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b \cdot \cos \varphi. \quad (1)$$

18- чизмадан кўринадики, $b \cos \varphi = \text{пр}_a \mathbf{b}$. Шунинг учун

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b \cos \varphi = a \cdot \text{пр}_a \mathbf{b} = b \cdot \text{пр}_b \mathbf{a}. \quad (2)$$

2°. Скаляр кўпайтманинг хос-салари.



18- чизма.

I. $a \cdot b = b \cdot a$ — *грин алмаштираш қонуни*.

II. $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ — *тарқатиш қонуни*.

III. Агар $a \parallel b$ бўлса, $a \cdot b = \pm a \cdot b$. Хусусий ҳолда, $a^2 = a \cdot a =$
 $= a \cdot a \cos 0^\circ = a^2$, бундан

$$a = \sqrt{a^2}. \quad (3)$$

IV. Агар $a \perp b$ бўлса, $a \cdot b = a \cdot b \cdot \cos 90^\circ = 0$.

V. Ортларнинг скаляр кўпайтмаси:

$$i \cdot j = 0, j \cdot k = 0, i \cdot k = 0, i \cdot i = 1, j \cdot j = 1, k \cdot k = 1.$$

VI. Агар векторлар $a \{a_x, a_y, a_z\}$ ва $b \{b_x, b_y, b_z\}$ координаталар орқали берилган бўлса,

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (4)$$

3°. Икки вектор орасидаги бурчак:

$$\cos \varphi = \frac{a \cdot b}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (5)$$

Параллеллик шартини: $b = ma$ ёки $\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = m$.

Перпендикулярлик шартини: $a \cdot b = 0$ ёки $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

399. $a = -i + j$ ва $b = i - 2j + 2k$ векторлар орасидаги бурчак аниқлансин.

400. Учлари $A(2; -1; 3)$, $B(1; 1; 1)$ ва $C(0; 0; 5)$ нуқталарда бўлган $\triangle ABC$ нинг бурчаклари аниқлансин.

401. $A(a; 0; 0)$, $B(0; 0; 2a)$ ва $C(a; 0; a)$ нуқталар берилган $\overline{OC}$ ва $\overline{AB}$ векторлар ясалсин ва улар орасидаги бурчак топилсин.

402. Текисликда учлари $O(0; 0)$, $A(2a; 0)$ ва $B(a; -a)$ нуқталарда бўлган учбурчак берилган. Шу учбурчакнинг OB томонин билан OM медианаси орасидаги бурчак топилсин.

403. xOy ва yOz бурчакларнинг биссектрисалари орасидаги бурчак топилсин.

404. Квадратнинг учидан қарши томонларни тенг иккига бўлувчи тўғри чизиқлар ўтказилган. Ўша тўғри чизиқлар орасидаги бурчак топилсин.

405. $a = 2i + j$ ва $b = -2j + k$ векторларда ясалган параллелограмм диагоналлари орасидаги бурчак топилсин.

406. $a = i + j + 2k$ ва $b = i - j + 4k$ векторлар берилган. $\text{пр}_b a$ ва $\text{пр}_a b$ аниқлансин.

407. $(2i - j) \cdot j + (j - 2k) \cdot k + (i - 2k)^2$ ифодадаги қавслар очилсин.

408. 1) Агар m ва n ўзаро 30° бурчак ташкил этувчи бирлик векторлар бўлса, $(m+n)^2$ ҳисоблансин; 2) агар

$a = 2\sqrt{2}$ ва $b = 4$ ҳамда $(a, b) = 135^\circ$ бўлса, $(a-b)^2$ ҳисоблансин.

409. 1) $(a+b)^2$, 2) $(a+b)^2 + (a-b)^2$ ифодалардаги қавслар очилсин ва ҳосил бўлган формулаларнинг геометрик маъноси аниқлансин.

410. Ўзаро компланар a , b ва c векторлар берилган бўлиб, $a = 3$, $b = 2$, $c = 5$ ва $(a, b) = 60^\circ$, $(b, c) = 60^\circ$. $u = a + b - c$ вектор ясалсин ва

$$u = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$$

формула бўйича унинг модули ҳисоблансин.

411. Агар O нуқтадан қўйилган ўзаро компланар тўртта кучнинг ҳар бирининг миқдори 10 кГ бўлиб, ҳар иккита кечма-кетди орасидаги бурчак 45° бўлса, уларнинг тенг таъсир этувчисининг миқдори топилсин.

412. Агар m ва n — ораларидаги бурчаги 60° га тенг бирлик векторлар бўлса, $a = 2m + n$ ва $b = m - 2n$ векторларда ясалган параллелограмм диагоналлари узуңликлари аниқлансин.

413. $a = 2m - n$ вектор берилган бўлиб, бунда m ва n ораларидаги бурчаги 120° га тенг бирлик векторлардир.

$\cos(a, m)$ ва $\cos(a, n)$ топилсин.

414. Мунтазам тетраэдрнинг бир учидан ўтказилган икки текис бурчагининг биссектрисалари орасидаги бурчак аниқлансин.

Қўрсатма. Агар m , n ва p тетраэдрнинг қирралари бўйича йўналтирилган бирлик векторлар бўлса, $m+n$ ва $m+p$ биссектрисалар бўйича йўналтирилган векторлар бўлади.

415. Ox , Oy ва Oz ўқларда O дан бошлаб ўзаро тенг $a = 4$ кесмалар қўйиб куб ясалсин. Кубнинг юзлари ёғининг маркази M , ўнг ёғининг маркази эса N бўлсин. $\overline{OM}$ ва $\overline{ON}$ векторлар ҳамда улар орасидаги бурчак аниқлансин.

416. $\overline{OA} = a$ ва $\overline{OB} = b$ векторлар берилган, $a = 2$, $b = 4$ ва $(a, b) = 60^\circ$. $\angle CAB$ нинг $\overline{CM}$ медианаси билан OA томони орасидаги бурчак аниқлансин.

417. Томонлари 6 ва 4 см бўлган тўғри тўртбурчак учидан қарши томонларини тенг иккига бўлувчи тўғри чизиқлар ўтказилган. Ўша тўғри чизиқлар орасидаги φ бурчак топилсин.

418. Параллелограммнинг кетма-кет учта $A(-3; -2; 0)$, $B(3; -3; 1)$ ва $C(5; 0; 2)$ учлари берилган. Унинг тўртинчи учи D ҳамда $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{BD}$ векторлар орасидаги бурчак топилсин.

419. $A(3; 3; -2)$, $B(0; -3; 4)$, $C(0; -3; 0)$ ва $D(0; 2; -4)$ нуқталар берилган. $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ ва $\overrightarrow{CD} = \mathbf{b}$ векторлар ясалсин ҳамда $\text{pr}_b \mathbf{a}$ топилсин.

420. Тенг ёнли $OACB$ трапецияда (16- чизма) M ва N нуқталар мос равишда $BC = 2$ ва $AC = 2$ томонларнинг ўрталари. Трапециянинг ўткир бурчаги 60° га тенг. $\overrightarrow{OM}$ ва $\overrightarrow{ON}$ векторлар орасидаги бурчак аниқлансин.

421. m ва n лар ўзаро 120° бурчак ташкил этувчи бирлик векторлар бўлса, $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ ва $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$ векторлар орасидаги бурчак топилсин.

422. Бир-бирига перпендикуляр бўлган $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ векторларда ясалган тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари орасидаги бурчак

$$\cos \varphi = \pm \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

формула билан аниқланиши кўрсатилсин.

423. Ҳаракатдаги нуқта йўлининг ўқлардаги проекциялари: $s_x = 2\text{м}$, $s_y = 1\text{м}$, $s_z = -2\text{м}$. Таъсир этувчи F кучнинг проекциялари $F_x = 5 \text{ кГ}$, $F_y = 4 \text{ кГ}$ ва $F_z = 3 \text{ кГ}$. F кучнинг бажарган иши $A (A = F, s)$ ва F куч билан s йўл орасидаги бурчак ҳисоблансин.

424. Қирраси a бўлган мунтазам тетраэдрнинг бир учидан, унинг вектор-қирралари билан ифодаланувчи учта куч қўйилган. Ўша кучларнинг тенг таъсир этувчиси аниқлансин.

Кўрсатма. Агар m , n ва p лар берилган кучларнинг бирлик векторлари бўлса, изланган миқдор $a\sqrt{(m+n+p)^2}$ га тенг.

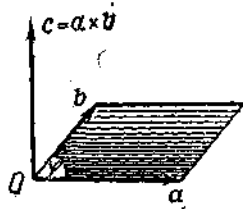
425. Квадрат бир хил тенгликдаги учта бўлакка (полосага) бўлиниб, сўнгра уларни буклаб мунтазам уч бурчакли призма ясалган. Натижада квадратнинг диагоналидан ҳосил бўлган синиқ чизиқнинг икки қўшни бўғинлари орасидаги бурчак топилсин.

4-§. Икки векторнинг вектор кўпайтмаси

1°. Таъриф. a ва b векторларнинг вектор кўпайтмаси деб шундай учинчи c векторга айтиладики:

1) у сон қиймати бўйича берилган a ва b векторларда ясалган параллелограмм юзига тенг модулга эга;

2) у параллелограмм текислигига перпендикуляр;



19-чизма.

3) у шундай томонга йўналтирилганки, унинг учидан қараганда a вектордан b векторга қараб энг кичик бурилиш соат стрелкасига қарама-қарши бўлади. a , b ва c векторларнинг бу хилдаги жойланишига ўнг боғлам дейилади.

Икки векторнинг вектор кўпайтмаси $a \times b$ кўринишда белгиланади. Шундай қилиб,

агар $\begin{cases} 1) c | a \times b | = a \cdot b \sin \varphi, \\ 2) c \perp a \text{ ва } c \perp b, \\ 3) a, b, c \text{ лар ўнг боғлам ҳосил қилса} \end{cases}$

$$a \times b = c$$

бўлади.

2°. Вектор кўпайтманинг хоссалари:

I. $a \times b = -b \times a$.

II. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ — тақсирот қонуни.

III. Агар $a \parallel b$ бўлса, $a \times b = 0$, хусусий ҳолда $a \times a = 0$.

3°. Ортларнинг вектор кўпайтмалари:

$$i \times j = k, j \times k = i, k \times i = j. \quad (1)$$

Умуман, ҳар икки қўшни векторнинг қуйидаги тартибдаги

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ i & j & k \end{pmatrix}$$

кўпайтмаси $(+)$ ишора билан олинган учинчи векторга, тескари тартибдаги кўпайтмаси эса $(-)$ ишора билан олинган учинчи векторга тенг.

4°. Вектор кўпайтмани кўпайтувчилар координаталари $a \{a_x, a_y, a_z\}$ ва $b \{b_x, b_y, b_z\}$ орқали ифодалаш:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (2)$$

5°. a ва b векторларда ясалган параллелограммнинг юзи:

$$S_{\square} = |a \times b|, \quad (3)$$

шу векторларда ясалган учбурчакнинг юзи:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |a \times b|.$$

426. Агар 1) $a = 3i$; $b = 2k$; 2) $a = i + j$; $b = i - j$; 3) $a = 2i + 3j$; $b = 3j + 2k$ бўлса, $c = a \times b$ вектор

аниқлансин ва ясалсин. Ҳар бир ҳол учун берилган векторларда ясалган параллелограмм юзи ҳисоблансин.

427. Учлари $A(7; 3; 4)$; $B(1; 0; 6)$ ва $C(4; 5; -2)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

428. $a = 2j + k$ ва $b = i + 2k$ векторларда параллелограмм ясалсин ҳамда унинг юзи ва баландлиги аниқлансин.

429. Ушбу

$$1) i \times (j + k) - j \times (i + k) + k \times (i + j + k);$$

$$2) (a + b + c) \times c + (a + b + c) \times b + (b - c) \times a;$$

$$3) (2a + b) \times (c - a) + (b + c) \times (a + b);$$

$$4) 2i \cdot (j \times k) + 3j \cdot (i \times k) + 4k \cdot (i \times j)$$

ифодалар қавсларни очиб соддалаштирилсин.

430. $(a - b) \times (a + b) = 2a \times b$ экани исботлансин ва бу айниятнинг геометрик маъноси аниқлансин.

431. a ва b векторлар ўзаро 45° бурчак ташкил этади. Агар $|a| = |b| = 5$ бўлса, $a - 2b$ ва $3a + 2b$ векторларда ясалган учбурчакнинг юзи топилсин.

432. m ва n ўзаро 45° бурчак ташкил этувчи бирлик векторлар. Диагоналлари $2m - n$ ва $4m - 5n$ векторлардан иборат бўлган параллелограммнинг юзи топилсин.

Қўрсатма. Агар a ва b векторлар параллелограмм томонларидан иборат бўлса, $a + b = 2m - n$ ва $a - b = 4m - 5n$. Бу векторларни вектор кўпайтириб, $2b \times a$ векторни топамиз унинг модули изланган юзанинг иккиланганига тенг.

433. $a = 3k - 2j$, $b = 3i - 2j$ ва $c = a \times b$ векторлар ясалсин. c векторнинг модули ҳамда a ва b векторларда ясалган учбурчак юзи ҳисоблансин.

434. Учлари $A(1; -2; 8)$, $B(0; 0; 4)$ ва $C(6; 2; 0)$ нуқталарда бўлган учбурчак ясалсин. Унинг юзи ва BD баландлиги ҳисоблансин.

435. $a = k - j$ ва $b = i + j + k$ векторларда ясалган параллелограммнинг юзи ҳисоблансин.

436. $(2a + b) \times (a + 2b) = 3a \times b$ эканлиги исботлансин.

437. m ва n ўзаро 30° бурчак ташкил этувчи бирлик векторлар бўлса, $a = m + 2n$ ва $b = 2m + n$ векторларда ясалган параллелограммнинг юзи топилсин.

5-§. Уч векторнинг аралаш кўпайтмаси

1°. Таъриф. a , b ва c векторларнинг аралаш кўпайтмаси деб $(a \times b) \cdot c$ кўринишдаги ифодага айтилади.

Агар a , b ва c векторлар ўзларининг координаталари билан берилса, у ҳолда

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (1)$$

2°. Аралаш кўпайтманинг хоссалари.

I. Аралаш кўпайтманинг исталган иккита кўпайтувчисининг ўринлари ўзаро алмаштирилса, кўпайтманинг ишораси ўзгаради:

$$(a \times b) \cdot c = -(a \times c) \cdot b = -(c \times b) \cdot a. \quad (2)$$

II. Агар берилган учта вектордан икkitаси ўзаро тенг ёки параллел бўлса, аралаш кўпайтма 0 га тенг бўлади.

III. «Нуқта» билан кўрсатилган ва «крест» ($\times$) билан кўрсатилган амалларнинг ўринларини алмаштириш мумкин:

$$(a \times b) \cdot c = a \cdot (b \times c);$$

шунинг учун ҳам аралаш кўпайтма abc кўринишда, яъни қавсларни ва амаллар белгиларини кўрсатмасдан ёзиш қабул қилинган.

3°. a , b ва c векторларда ясалган параллелепипеднинг ҳажми:

$$V = \pm abc \begin{cases} + \text{ векторлар ўнг боғлам ташкил этса,} \\ - \text{ векторлар чап боғлам ташкил этса.} \end{cases}$$

a , b ва c векторларда ясалган пирамиданинг ҳажми:

$$V_{\text{пир}} = \pm \frac{1}{6} abc.$$

4°. Компланарлик шарт. Агар a , b ва c векторлар ўзаро компланар бўлса, $abc = 0$, ва аксинча, сўнгги тенглик бажарилса, берилган уч вектор ўзаро компланар бўлади. Шунинг билан бирга a , b ва c орасида $c = ma + nb$ кўринишдаги чиқиқли боғланиш мавжуд бўлади.

438. $a = 3i + 4j$, $b = -3j + k$, $c = 2j + 5k$ векторларда параллелепипед ясалсин ҳамда унинг ҳажми ҳисоблансин. Берилган (a, b, c) векторлар қайси боғламни ташкил этади?

439. Учлари $O(0; 0; 0)$, $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$ ва $C(1; 2; 4)$ нуқталарда бўлган пирамида ясалсин ҳамда унинг ҳажми, ABC ёғининг юзи ва шу ёққа туширилган баландлиги ҳисоблансин.

440. $A(2; -1; -2)$, $D(1; 2; 1)$, $C(2; 3; 0)$ ва $D(5; 0; -6)$ нуқталарнинг бир текисликда ётиши кўрсатилсин.

441. $a = -i + 3j + 2k$, $b = 2i - 3j - 4k$, $c = -3i + 12j + 6k$ векторларнинг ўзаро компланар экани кўрсатилсин. c вектор a ва b векторлар бўйича тарқатилсин.

$$442. 1) (a + b) \cdot [(a + c) \times b] = -abc;$$

$$2) (a + 2b - c) \cdot [(a - b) \times (a - b - c)] = 3abc$$

эканлиги исбот қилинсин.

443. Узунликлари 2 га тенг бўлган ва координаталар бурчакларининг биссектрисалари бўйича йўналган $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ва $\overline{OC}$ векторларда ясалган тетраэдрнинг ҳажми топилсин.

444. Учлари $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 6)$ ва $D(2; 3; 8)$ нуқталарда бўлган пирамида ясалсин ҳамда унинг ҳажми ва ABC ёғига туширилган баландлиги ҳисоблансин.

445. $a = i + j + 4k$, $b = i - 2j$ ва $c = 3i - 3j + 4k$ векторлар ясалсин ва улар ўзаро компланар эканлиги кўрсатилсин. Бу векторлар орасидаги чизикли боғланиш топилсин.

446. Берилган параллелепипеднинг ёқларининг диагоналларида ясалган параллелепипед ҳажми дастлабки параллелепипед ҳажмининг иккиланганига тенг экани кўрсатилсин.

447. m , n ва p бирлик векторлар берилган. Агар $\wedge (m, n) = [p, (m \times n)] = \alpha$ бўлса, $(m \times n) \cdot p = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ экани исботлансин.

448. Ҳар қандай a , b ва c векторлар $a - b$, $b - c$ ва $c - a$ векторлар ўзаро компланар бўлади. Бу мулоҳаза аналитик ва геометрик (a , b ва c векторлардан тузилган параллелепипедни қараб) исботлансин.

449. $OABCO_1A_1B_1C_1$ параллелепипед пастки асосининг учта учи $O(0; 0; 0)$, $A(2; -3; 0)$ ва $C(3; 2; 0)$ ҳамда OO_1 қиррага қарши бўлган BB_1 ён қиррада ётувчи юқори асосининг учи $B_1(3; 0; 4)$ берилган. Ўша параллелепипеднинг ҳажми ҳисоблансин.

III БОБ ФАЗОДАГИ АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ

1-§. Текисликнинг тенгламаси

1°. $M_1(x_1; y_1; z_1)$ нуқтадан ўтувчи ва $N(A; B; C)$ векторга перпендикуляр текислик тенгламаси.

$M(x; y; z)$ текисликнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин (20-чизма). У ҳолда $\overline{M_1M} \perp N$ ва икки векторнинг перпендикулярлик шартига кўра

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \quad (1)$$

2°. Текисликнинг умумий тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (2)$$

$N(A; B; C)$ вектор (1) ёки (2) текисликка нормал вектор дейилади.

3°. $Ax + By + Cz + D = 0$ тенгламанинг махсус ҳоллари:

I. $D = 0$ бўлганда, $Ax + By + Cz = 0$ — текислик координаталар бошидан ўтади.

II. $C = 0$ бўлганда, $Ax + By + D = 0$ — текислик Oz ўққа параллел.

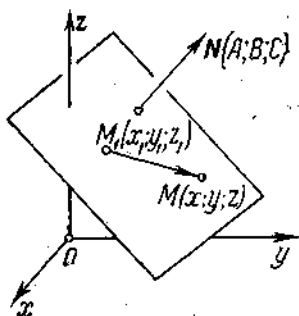
III. $C = D = 0$ бўлганда, $Ax + By = 0$ — текислик Oz ўқдан ўтади.

IV. $B = C = 0$ бўлганда, $Ax + D = 0$ — текислик yOz текисликка параллел.

V. Координата текисликларининг тенгламалари: $x = 0$, $y = 0$ ва $z = 0$.

4°. Текисликнинг координата ўқларидан ажратган кесмалар бўйича тенгламаси:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (3)$$



20-чизма.

450. 1) $5x - 2y + 3z - 10 = 0$; 2) $3x + 2y - z = 0$;

3) $3x + 2z = 6$; 4) $2z - 7 = 0$

текисликлар ясалсин.

451. $2x + 3y + 6z - 12 = 0$ текислик ясалсин ва унга нормал векторнинг координата ўқлари билан ташкил этган бурчаклари топилсин.

452. $M_1(0; -1; 3)$ ва $M_2(1; 3; 5)$ нуқталар берилган. M_1 нуқтадан ўтувчи ва $N = \overline{M_1M_2}$ векторга перпендикуляр текислик тенгламаси ёзилсин.

453. $M(a; a; 0)$ нуқтадан ўтувчи ва $\overline{OM}$ векторга перпендикуляр текислик тенгламаси ёзилсин ва текислик ясалсин.

454. $A(a; -\frac{a}{2}; a)$ ва $B(0; \frac{a}{2}; 0)$ нуқталардан тенг узоқликда бўлган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

455. $M_1(0; 1; 3)$ ва $M_2(2; 4; 5)$ нуқталардан ўтувчи ва Ox ўққа параллел текислик тенгламаси ёзилсин ва текислик ясалсин.

456. Ox ўқдан ва $M_1(0; -2; 3)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси ёзилсин ва текислик ясалсин.

457. Oz ўқдан ва $M_1(2; -4; 3)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси ёзилсин ва текислик ясалсин.

458. Oy ўққа параллел, Ox ва Oz ўқлардан a ва c кесмалар ажратувчи текислик тенгламаси ёзилсин. Текислик ясалсин.

459. $M(2; -1; 3)$ нуқтадан ўтувчи ва координата ўқларидан тенг кесмалар ажратувчи текислик тенгламаси ёзилсин.

460. $M_1(-4; 0; 4)$ нуқтадан ўтувчи ва Ox ва Oy ўқлардан $a = 4$ ва $b = 3$ кесмалар ажратувчи текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

461. 1) $2x + y - z + 6 = 0$; 2) $x - y - z = 0$; 3) $y - 2z + 8 = 0$; 4) $2x - 5 = 0$; 5) $x + z = 1$; 6) $y + z = 0$ текисликлар ясалсин.

462. $2x - 2y + z - 6 = 0$ текислик ясалсин ва унга нормал векторнинг координата ўқлари билан ташкил этган бурчаклари топилсин.

463. $M(-1; 2; 3)$ нуқтадан OM га перпендикуляр текислик ўтказилган. Унинг тенгламаси ёзилсин.

464. Oy ўқдан ва $(4; 0; 3)$ нуқтадан ўтувчи текисликнинг тенгламаси ёзилсин. Текислик ясалсин.

465. Oz ўққа параллел ҳамда $M_1(2; 2; 0)$ ва $M_2(4; 0; 0)$ нуқталардан ўтувчи текисликнинг тенгламаси ёзилсин. Текислик ясалсин.

466. $M(1; -3; 5)$ нуқтадан ўтувчи ва Oy ва Oz ўқлардан Ox ўқдагидан кўра икки марта катта кесма ажратувчи текислик тенгламаси ёзилсин.

2-§. Текисликка доир асосий масалалар

1°. Икки текислик орасидаги бурчак

$$\cos \varphi = \pm \frac{NN_1}{NN_1} = \pm \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{NN_1} \quad (1)$$

формуладан топилади, бунда N ва N_1 мос равишда $Ax + By + Cz + D = 0$ ва $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ текисликларга нормал векторлар.

Параллеллик шarti:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}. \quad (2)$$

Перпендикулярлик шarti:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0. \quad (3)$$

2°. $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нуқтадан $Ax + By + Cz + D = 0$ текисликка қача бўлган масофа:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{N}. \quad (4)$$

3°. Берилган икки текисликнинг кесишган чизигидан ўтувчи барча текисликлар дастасининг тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\alpha(Ax + By + Cz + D) + \beta(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0. \quad (5)$$

$\alpha = 1$ деб олиш мумкин, у ҳолда (5) дастадан берилган текисликлардан иккинчисини чиқариб ташлаган бўламиз.

467. 1) $x - 2y + 2z - 8 = 0$ ва $x + z - 6 = 0$;

2) $x + 2z - 6 = 0$ ва $x + 2y - 4 = 0$

текисликлар орасидаги бурчак топилин.

468. $(2; 2; -2)$ нуқтадан ўтувчи ва $x - 2y - 3z = 0$ текисликка параллел текислик топилин.

469. $(-1; -1; 2)$ нуқтадан ўтувчи ва $x - 2y + z - 4 = 0$ ҳамда $x + 2y - 2z + 4 = 0$ текисликларга перпендикуляр текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

470. $(0; 0; a)$ нуқтадан ўтувчи ва $x - y - z = 0$ ҳамда $2y = x$ текисликларга перпендикуляр текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

471. $M_1(-1; -2; 0)$ ва $M_2(1; 1; 2)$ нуқталардан ўтувчи ҳамда $x + 2y + 2z - 4 = 0$ текисликка перпендикуляр текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

472. $M_1(1; -1; 2)$, $M_2(2; 1; 2)$ ва $M_3(1; 1; 4)$ нуқталардан ўтувчи текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

473. Оз ўқдан $2x + y - \sqrt{5}z = 0$ текислик билан 60° бурчак ташкил этувчи текислик ўтказилсин.

474. $(5; 1; -1)$ нуқтадан $x - 2y - 2z + 4 = 0$ текисликкача бўлган масофа топилсин.

475. $(4; 3; 0)$ нуқтадан $M_1(1; 3; 0)$, $M_2(4; -1; 2)$ ва $M_3(3; 0; 1)$ нуқталардан ўтувчи текисликкача бўлган масофа топилсин.

476. $4x + 3y - 5z - 8 = 0$ ва $4x + 3y - 5z + 12 = 0$ параллел текисликлар орасидаги масофа топилсин.

Қўрсатма. Биринчи текисликда ихтиёрий, масалан $(2; 0; 0)$ нуқта олиб, ундан иккинчи текисликкача бўлган масофа топилсин.

477. 1) $x - 2y + 2z - 5 = 0$ текисликка параллел ва ундан 2 бирлик узоқликда бўлган текисликлар тенгламалари ёзилсин.

2) $2x + 2y = z$ ва $z = 0$ текисликлар орасидаги икки ёқли бурчакни тенг иккига бўлувчи текисликлар тенгламалари ёзилсин ҳамда берилган ва изланган текисликлар ясалсин.

478. 1) $2x - y + 3z - 6 = 0$ ва $x + 2y - z + 3 = 0$ текисликларнинг кесишган чизигидан ва $(1; 2; 4)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси ёзилсин.

2) $x = y$ ва $z = 0$ текисликларнинг кесишган тўғри чизигидан ўтувчи ўзаро перпендикуляр иккита текисликдан биттаси $(0; 4; 2)$ нуқтадан ҳам ўтади. Тўғри чизиқ ва изланган текисликлар топилсин.

479. $2x - y + 3z - 9 = 0$; $x + 2y + 2z - 3 = 0$; $3x + y - 4z + 6 = 0$ текисликларнинг кесишган нуқтаси топилсин.

480. $(2; -1; 1)$ нуқтадан ўтувчи ва $3x + 2y - z + 4 = 0$ ва $x + y + z - 3 = 0$ текисликларга перпендикуляр текисликнинг тенгламаси ёзилсин. Текислик ясалсин.

481. $(0; -5; 0)$ ва $(0; 0; 2)$ нуқталардан ўтувчи ҳамда $x + 5y + 2z - 10 = 0$ текисликка перпендикуляр текисликнинг тенгламаси ёзилсин. Текислик ясалсин.

482. $O(0; 0; 0)$, $M_1(a; -a; 0)$ ва $M_2(a; a; a)$ нуқталардан ўтувчи текислик билан xOy текислик орасидаги бурчак топилсин.

483. Координаталар бошидан $M_1(a; 0; 0)$, $M_2(0; a; 0)$ ва $M_3(a; a; a)$ нуқталардан ўтувчи текисликкача бўлган масофа топилсин.

484. Ox ўқдан ўтувчи ва $y = x$ текислик билан 60° бурчак ташкил этувчи текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

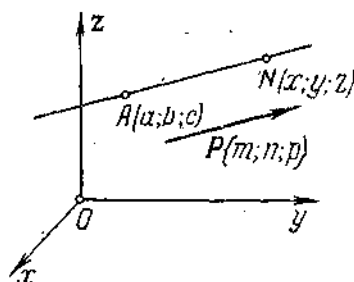
485. $(a; b; c)$ нуқтадан, координаталар ўқларидан a , b ва c кесмалар ажратувчи текисликкача бўлган масофа топилсин.

486. $2x + 2y + z - 8 = 0$ текисликка параллел ва ундан $d = 4$ масофада бўлган текисликларнинг тенгламалари ёзилсин.

487. $4x - y + 3z - 6 = 0$ ва $x + 5y - z + 10 = 0$ текисликларнинг кесилган чизиғидан ўтувчи ва $2x - y + 5z - 5 = 0$ текисликка перпендикуляр текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

3-§. Тўғри чизик тенгламалари

1°. $A(a; b; c)$ нуқтадан ўтувчи ва $P(m; n; p)$ векторга параллел бўлган тўғри чизик тенгламалари. $N(x; y; z)$ — тўғри чизикнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин (21-чизма). У ҳолда $\overline{AN} \parallel P$ ва икки векторнинг параллеллик шартига кўра:



21-чизма.

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}. \quad (1)$$

(1) тенгламалар тўғри чизикнинг каноник тенгламалари дейилади. $P(m; n; p)$ вектор тўғри чизикнинг йўналтирувчи вектори дейилади.

2°. (1) тенгламадаги ҳар бир нисбатни t параметрга тенглаб, тўғри чизикнинг

$$\left. \begin{aligned} x &= mt + a, \\ y &= nt + b, \\ z &= pt + c \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

кўринишдаги параметрик тенгламаларига эга бўламиз.

3°. Икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизик тенгламалари:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \quad (3)$$

4°. Тўғри чизикнинг умумий тенгламалари:

$$\left. \begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

5°. (4) тенгламалардан бир марта y ни, иккинчи марта x ни йўқотиб, тўғри чизикнинг проекциялари бўйича ёзилган тенгламаларга эга бўламиз:

$$\begin{cases} x = mz + a, \\ y = nz + b. \end{cases} \quad (5)$$

(5) тенгламаларни ушбу

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-0}{1}$$

каноник кўринишда ёзиш мумкин.

488.

$$1) \begin{cases} x = z + 5 \\ y = 4 - 2z \end{cases} \text{ ва } 2) \begin{cases} \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1} \end{cases}$$

тўғри чизикларнинг xOy ва xOz текисликлардаги излари топилин ва тўғри чизиклар ясалсин.

Қўрсатма. Тўғри чизикнинг тенгламаларида 1) $z = 0$; 2) $y = 0$ деб фараз қилиш керак.

$$489. \begin{cases} x + 2y + 3z - 13 = 0 \\ 3x + y + 4z - 14 = 0 \end{cases} \text{ тўғри чизик тенгламаларининг}$$

1) проекциялари бўйича; 2) каноник кўринишда ёзилсин. Тўғри чизикнинг координата текисликларидаги излари топилин ҳамда тўғри чизик ва унинг проекциялари ясалсин.

490. $A(4; 3; 0)$ нуқтадан ўтувчи ва $P(-1; 1; 1)$ векторга параллел бўлган тўғри чизик тенгламалари ёзилсин. Тўғри чизикнинг yOz текисликдаги изи топилин ва тўғри чизик ясалсин.

491. $x = 4$, $y = 3$ тўғри чизик ясалсин ва унинг йўналтирувчи вектори топилин.

492.

$$1) \begin{cases} y = 3 \\ z = 2 \end{cases}, \quad 2) \begin{cases} y = 2 \\ z = x + 1 \end{cases}, \quad 3) \begin{cases} x = 4 \\ z = y \end{cases}$$

тўғри чизиклар ясалсин ва уларнинг йўналтирувчи векторлари аниқлансин.

493. $A(-1; 2; 3)$ ва $B(2; 6; -2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизик тенгламалари ёзилсин ва унинг йўналтирувчи косинуслари топилин.

494. $A(2; -1; 3)$ ва $B(2; 3; 3)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизик ясалсин ва унинг тенгламалари ёзилсин.

495. $A(4; -3; 1)$ нуқтадан чиқиб $V(2; 3; 1)$ тезлик билан ҳаракат қилувчи $M(x; y; z)$ нуқта траекториясининг тенгламалари ёзилсин.

496. 1) $(-2; 1; -1)$ нуқтадан ўтувчи ва $P\{1; -2; 3\}$ векторга параллел бўлган;

2) $A(3; -1; 4)$ ва $B(1; 1; 2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламалари ёзилсин.

497. $(a; b; c)$ нуқтадан ўтувчи ва: 1) Oz ўққа параллел; 2) Oz ўққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламалари ёзилсин.

498. $x = 2z - 1$; $y = -2z + 1$ тўғри чизиқ билан $(1; -1; -1)$ нуқта ва координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқ орасидаги бурчак топилсин.

499.

$$\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 2x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ 2x + 3y - z - 6 = 0 \end{cases}$$

тўғри чизиқлар орасидаги бурчак топилсин.

Қўрсатма. Берилган тўғри чизиқлардан ҳар бирининг йўналтирувчи векторини, текисликлар нормал векторларининг вектор кўпайтмаси $(P = N \times N_1)$ сифатида аниқлаш мумкин.

500. $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$ тўғри чизиқнинг. $x = z + 1$, $y = 1 - z$ тўғри чизиққа перпендикуляр экани кўрсатилсин.

501. $(-4; 3; 0)$ нуқтадан ўтувчи ва $\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламалари ёзилсин.

502. $(2; -3; 4)$ нуқтадан Oz ўққа туширилган перпендикулярнинг тенгламалари ёзилсин.

Қўрсатма. Изланган тўғри чизиқ $(0; 0; 4)$ нуқтадан ҳам ўтади.

503. $N(2; -1; 3)$ нуқтадан $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{5}$ тўғри чизиққа бўлган масофа топилсин.

Қўрсатма. $A(-1; -2; 1)$ — тўғри чизиқдаги нуқта; $P\{3; 4; 5\}$ — тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори. У вақтда

$$d = AN \sin \alpha = \frac{AN |P \times \overline{AN}|}{P \cdot AN} = \frac{|P \times \overline{AN}|}{P}$$

504. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$ ва $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$

параллел тўғри чизиқлар орасидаги масофа топилсин.

$$505. \frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2} \text{ тўғри чизикнинг координата}$$

текисликларидаги излари топилсин ва тўғри чизик ясалсин.

$$506. \begin{cases} 2x + y + 8z - 16 = 0 \\ x - 2y - z + 2 = 0 \end{cases} \text{ тўғри чизик тенгламалари:}$$

1) проекциялари бўйича; 2) каноник кўринишда ёзилсин. Тўғри чизикнинг координаталар текисликларидаги излари топилсин, тўғри чизик ва унинг проекциялари ясалсин.

507. $A(0; -4; 0)$ нуқтадан ўтувчи ва $P\{1; 2; 3\}$ векторга параллел тўғри чизик тенгламалари ёзилсин; тўғри чизикнинг xOz текислигидаги изи топилсин ва тўғри чизик ясалсин.

508. $x = 3, z = 5$ тўғри чизик ясалсин ва унинг йўналтирувчи вектори топилсин.

509. $x + y - z = 0, y = x$ тўғри чизикнинг йўналтирувчи вектори ва координата ўқлари билан ташкил қилган бурчаклари топилсин (499-масалага берилган кўрсатмага қаранг).

510. $(2; -3; 4)$ нуқтадан Oy ўққа туширилган перпендикулярнинг тенгламалари ёзилсин.

$$511. \begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ 2x - z + 5 = 0 \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} 3x - 2y + 8 = 0 \\ z = 3x \end{cases}$$

тўғри чизиклар орасидаги бурчак топилсин.

512. $(-1; 2; -2)$ нуқтадан ўтувчи ва $x - y = 2, y = 2z + 1$ тўғри чизикқа параллел тўғри чизик тенгламалари ёзилсин.

513. $M(3; 0; 4)$ нуқтадан $y = 2x + 1; z = 2x$ тўғри чизикқа бўлган масофа топилсин (503-масалага қаранг).

4-§. Тўғри чизик ва текислик

1°. $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$ тўғри чизик билан $Ax + By + Cz + D = 0$ текислик орасидаги бурчак:

$$\sin \theta = \frac{|N \cdot P|}{NP} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{NP}. \quad (1)$$

Уларнинг параллеллик шарти ($N \parallel P$):

$$Am + Bn + Cp = 0. \quad (2)$$

Уларнинг перпендикулярлик шарти ($N \perp P$):

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \quad (3)$$

2°. Текислик билан тўғри чизиқнинг кесишган нуқтаси. Тўғри чизиқ тенгламаларини $x = mt + a$, $y = nt + b$, $z = pt + c$ параметрик кўринишда ёзиб, текисликнинг $Ax + By + Cz + D = 0$ тенгласидаги x , y , z ларнинг ўрнига уларнинг t га нисбатан ёзилган қийматларини қўямиз. Ҳосил бўлган тенгламадан t_0 ни, сўнгра кесишган нуқта координаталари x_0 , y_0 , z_0 ни топамиз.

3°. Икки тўғри чизиқнинг бир текисликда ётиш шарти:

$$\begin{vmatrix} a-a_1 & b-b_1 & c-c_1 \\ m & n & p \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

514. $y = 3x - 1$, $2z = -3x + 2$ тўғри чизиқ билан $2x + y + z - 4 = 0$ текислик орасидаги бурчак топилсан.

515. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{3}$ тўғри чизиқ $2x + y - z = 0$ текисликка параллел эканлиги, $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{3}$ тўғри чизиқ эса шу текислик устида ётиши кўрсатилсин.

516. $(-1; 2; -3)$ нуқтадан ўтувчи ва $x = 2$, $y - z = 1$ тўғри чизиққа перпендикуляр текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

517. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$ тўғри чизиқдан ва $(3; 4; 0)$ нуқтадан ўтувчи текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

518. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ тўғри чизиқдан ўтувчи ва $2x + 3y - z = 4$ текисликка перпендикуляр текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

519. $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ ва $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$ параллел тўғри чизиқлардан ўтувчи текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

520. Координаталар бошидан ўтувчи ва $4y = 3x$, $y = 0$ ва $z = 0$ текисликлар билан тенг бурчаклар ташкил этувчи тўғри чизиқ тенгламалари ёзилсин ва ўша бурчаклар топилсин.

521. $x = 2t - 1$, $y = t + 2$, $z = 1 - t$ тўғри чизиқнинг $3x - 2y + z = 3$ текислик билан кесишган нуқтаси топилсин.

522. $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ тўғри чизиқнинг $x + 2y + 3z - 29 = 0$ текислик билан кесишган нуқтаси топилсин.

523. $(3; 1; -1)$ нуқтанинг $x + 2y + 3z - 30 = 0$ текисликдаги проекцияси топилсин.

524. $(2; 3; 4)$ нуқтанинг $x = y = z$ тўғри чизиқдаги проекцияси топилсин.

525. Ушбу:

$$1) \frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p} \text{ ва } \frac{x-a_1}{m_1} = \frac{y-b_1}{n_1} = \frac{z-c_1}{p_1};$$

$$2) \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2} \text{ ва } \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$$

параллел бўлмаган тўғри чизиқлар орасидаги энг қисқа масофа топилсин.

Қўрсатма. Умумий ҳолда тўғри чизиқларни учрашмайдиган деб фараз қилиб, улар ётган ўзаро параллел текисликларни чизамиз. $A(a; b; c)$ ва $A_1(a_1; b_1; c_1)$ нуқталардан $\overline{AB} = \overline{A_1B_1} = P\{m; n; p\}$ ва $\overline{AC} = \overline{A_1C_1} = P_1\{m_1; n_1; p_1\}$ векторларни ўтказамиз. $ABCA_1B_1C_1$ призманинг баландлиги изланган масофа бўлади.

$$526. \left. \begin{array}{l} x = z - 2 \\ y = 2z + 1 \end{array} \right\} \text{ ва } \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}$$

тўғри чизиқларнинг кесишувчи эканлиги кўрсатилсин ва улар ётган текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

527. $(2; 1; 0)$ нуқтадан $x = 3z - 1$; $y = 2z$ тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг тенгламалари ёзилсин.

528. $A(0; 0; 4)$ ва $B(2; 2; 0)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ ва $x + y - z = 0$ текислик ясалсин. Тўғри чизиқнинг текислик билан кесишган нуқтаси ва улар орасидаги бурчак топилсин.

529. $y = z$ текислик, $\left. \begin{array}{l} x = -z + 1 \\ y = 2 \end{array} \right\}$ тўғри чизиқ ясалсин ва: 1) уларнинг кесишган нуқтаси; 2) улар орасидаги бурчак топилсин.

530. $(3; 1; -1)$ нуқтанинг $3x + y + z - 20 = 0$ текисликдаги проекцияси топилсин.

531. $(1; 2; 8)$ нуқтанинг $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = z$ тўғри чизиқдаги проекцияси топилсин.

532. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{3}$ ва $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{3}$ параллел тўғри чизиқлардан ўтувчи текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

533. $\frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{1}$ ва $\left. \begin{array}{l} x = 3z - 4 \\ y = z + 2 \end{array} \right\}$ тўғри чизиқларнинг кесишувчи эканлиги кўрсатилсин, уларнинг кесишиш нуқтаси топилсин.

534. $(1; 0; -1)$ нуқтадан $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-3}$ тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг тенгламалари ёзилсин.

535. $x = -2y = z$ ва $x = y = 2$ тўғри чизиқлар орасидаги энг қисқа масофа топилсин.

5-§. Сферик ва цилиндрик сиртлар

1°. Маркази $C(a; b; c)$ нуқтада ва радиуси R бўлган сферик сиртнинг тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2. \quad (1)$$

2°. z иштирок этмаган $F(x; y) = 0$ тенглама, ясовчилари O_z ўққа параллел цилиндрик сиртни аниқлайди. Шунга ўхшаш 1) $F(y; z) = 0$ ва 2) $F(x; z) = 0$ тенгламаларнинг ҳар бир ясовчилари 1) Ox , 2) Oy ўқларга параллел бўлган цилиндрик сиртларни аниқлайди.

3°. Йўналтирувчиси $F(x; y) = 0$, $z = 0$, ясовчилари эса $P\{m; n; p\}$ векторга параллел бўлган цилиндрик сирт тенгламаси. Ихтиёрий ясовчининг тенгламаси

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z}{p}$$

дан иборат, бундаги $(x_0; y_0; 0)$ —йўналтирувчида ётувчи нуқта. Сўнгги тенгликлардан x_0 ; y_0 ни топиб, йўналтирувчининг тенгламасига қўйсак, цилиндрик сиртнинг

$$F\left(x - \frac{m}{p}z, y - \frac{n}{p}z\right) = 0 \quad (2)$$

тенгламасини ҳосил қиламиз.

536. 1) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 4z = 0$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ сфераларнинг маркази ва радиуси топилсин ҳамда иккинчи сферанинг тасвири ясалсин.

537. $3x - 2y + 6z - 18 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ текисликлардан ҳосил бўлган тетраэдрнинг ичига қизилган сферик сиртнинг тенгламаси ёзилсин.

538. $B(-4; 0; 0)$ нуқтага нисбатан $A(2; 0; 0)$ нуқтага икки марта яқинроқ бўлган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

539. $\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 \\ x + y + z &= a \end{aligned} \right\}$ айланадан ва $(a; a; a)$ нуқтадан ўтувчи сферик сиртнинг тенгламаси ёзилсин.

Қўрсатма. Изланган тенглама

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 + \lambda(x + y + z - a) = 0$$

кўринишда бўлиши керак.

540. Координаталарнинг чап системасида

$$1) y^2 + z^2 = 4; 2) y^2 = ax; 3) xz = 4; 4) x^2 + y^2 = ax$$

сиртлар ясалсин.

541. $x = a$, $y = 0$ тўғри чизиқдан ва yOz текисликдан тенг узоқлашган нуқталар геометрик ўриннинг тенгламаси ёзилсин. Топилган сирт ясалсин.

542. $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0$ сфера ташқарисида чизилган, ясовчилари мос равишда: 1) Ox ўққа; 2) Oy ўққа; 3) Oz ўққа параллел учта цилиндр сиртнинг тенгламалари ёзилсин.

$$543. \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ x^2 + y^2 = 4x \end{cases}$$

Вивини эгри чизигининг $x = 0$; 2 ва 4 бўлгандаги нуқталарини ясаб, координаталар чап системасининг биринчи октантида унинг шакли чизилсин. Эгри чизиқнинг xOz текисликдаги проекцияси парабола экани кўрсатилсин.

$$544. \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 10y \\ x + 2y + 2z - 19 = 0 \end{cases}$$

айлананинг маркази ва радиуси топилсин.

Қўрсатма. Айлананинг маркази шар марказининг текисликдаги проекциясидир (530-масаллага қarang.)

545. Йўналтирувчиси $y^2 = 4x$, $z = 0$ чизиқдан иборат ва ясовчиси $P\{1; 2; 3\}$ векторга параллел бўлган цилиндр сиртнинг тенгламаси ёзилсин.

546. Биринчи октантда $(x + y)^2 + az = a^2$ сирт, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = h \leq a$ текисликлар билан ҳосил қилган кесимлари бўйича ясалсин ҳамда у, ясовчилари $x + y = a$, $z = 0$ тўғри чизиққа параллел бўлган цилиндр сирт эканлиги кўрсатилсин.

547. $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ шар $x = 0$, $y = z$ тўғри чизиққа параллел нурлар билан ёритилган. Шарнинг xOy текисликдаги соясининг шакли аниқлансин.

Қўрсатма. Шар сиртига уринма бўлган нурлардан тузилган цилиндр сирт тенгламасини ёзиш керак. Унинг йўналтирувчиси деб, шар марказидан ўтувчи ва нурларга перпендикуляр текислик билан шар сиртининг кесишишидан ҳосил бўлган чизиқ қабул қилинсин.

548. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - 3z = 0$ сиртнинг маркази C дан ўтувчи ва OC тўғри чизиққа перпендикуляр текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

549. $(0; -3; 0)$ нуқтага нисбатан координаталар бошидан икки баравар узоқроқ бўлган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

550. $x^2 + y^2 + z^2 = 4(x - 2y - 2z)$ шар сиртини унинг марказдан ўтувчи ва $x = 0$, $y + z = 0$ тўғри чизикқа перпендикуляр текислик билан кесишдан ҳосил бўлган кесимининг $z = 0$ текисликдаги проекцияси топилсин.

Қўрсатма. Шар сиртининг тенгламасини $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z + 4)^2 = 36$ (1) кўринишда ёзиш мумкин. Шар маркази $C(2; -4; -4)$ нуқтадан ўтувчи ва $x = 0$, $y + z = 0$ тўғри чизикқа перпендикуляр текислик тенгламаси $y = z$ (2) дан иборат. У ҳолда изланган тенгламани топниш учун (1) ва (2) дан z ни йўқотиш керак.

551. Координаталарнинг чап системасида

$$1) z = 4 - x^2; 2) y^2 + z^2 = 4z; 3) y^2 = x^2$$

сиртлар ясалсин.

552. Координаталар чап системасининг биринчи октантида $x^2 + z^2 = a^2$ ва $x^2 + y^2 = a^2$ цилиндрларнинг кесишган эгри чизиги ясалсин.

Қўрсатма. xOz ва xOy текисликларда йўналтирувчи айлананинг чоракларини ясаб, уларни тенг бўлақларга (масалан, 4 га) бўлиб, бўлиниш нуқталаридан ўзаро кесишгунча цилиндрларнинг ясовчилари ўтказилсин (64- чизмага қаранг).

553. Йўналтирувчиси $x^2 + y^2 = 4x$, $z = 0$ чизикдан иборат бўлган ва ясовчиси $P(1; 1; 1)$ векторга параллел бўлган цилиндрлик сиртнинг тенгламаси ёзилсин.

554. $y^2 = x$, $z = 0$, $z = 4$, $x = 4$ сиртлар билан чегараланган жисм ясалсин ва унинг $x = 4$ текисликда ётувчи ёғи диагоналлариининг тенгламалари ёзилсин.

6- §. Конус сиртлар ва айланиш сиртлари

1°. Конус сиртлар. Конус сиртнинг учи координаталар бошида бўлсин ва $z = h$ текисликда ётувчи $F(x, y) = 0$ йўналтирувчига эга бўлсин. Ясовчисининг тенгламалари $\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{h}$ бўлади, бундаги $(x_0; y_0; h)$ — йўналтирувчининг нуқтасидир. Бундан x_0, y_0 ни топиб $F(x, y) = 0$ тенгламага қўйсақ, учи координаталар бошида бўлган конус сирт тенгламасига эга бўламиз.

$$F\left(\frac{xh}{z}, \frac{yh}{z}\right) = 0 \quad (1)$$

Агар конуснинг учи $(a; b; c)$ нуқтада бўлса, тенглама

$$F \left[\frac{(x-a)(h-c)}{z-c} + a, \frac{(y-b)(h-c)}{z-c} + b \right] = 0 \quad (2)$$

кўринишга эга бўлади.

(1) тенглама x, y, z га нисбатан бир жинсли, (2) тенглама эса $(x-a), (y-b)$ ва $(z-c)$ га нисбатан бир жинслидир. Тенгламанинг бир жинсли эканидан унинг конус сирт тенгламаси эканини билиш мумкин.

2°. Айланиш сиртлари:

Эгри чизик тенгламалари	Айланиш ўқи	Айланиш сирти тенгламаси
$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$	Ox Oy	$F(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ $F(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$

Эгри чизик тенгламалари	Айланиш ўқи	Айланиш сирти тенгламаси
$\begin{cases} F(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$	Ox Oz	$F(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ $F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$
$\begin{cases} F(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$	Oy Oz	$F(y, \sqrt{x^2 + z^2}) = 0$ $F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$

555. Учи координаталар бошида ва йўналтирувчиси $x^2 + y^2 = a^2, z = c$ дан иборат конус сирт тенгламаси ёзилсин. Сиртнинг тасвири ясалсин.

556. Учи $A(0; -a; 0)$ нуқтада ва йўналтирувчиси $x^2 = 2py, z = h$ бўлган конус сиртнинг тенгламаси ёзилсин. Сиртнинг тасвири ясалсин.

557. $x^2 + (y-a)^2 - z^2 = 0$ конуснинг учи, унинг $z = a$ текисликдаги йўналтирувчиси аниқлансин ҳамда конус ясалсин.

558. $x^2 = 2yz$ конуснинг учи ва унинг $z = h$ текисликдаги йўналтирувчиси аниқлансин ҳамда конус ясалсин.

559. $(a^2 - x^2)y^2 = h^2z^2$ коноид* ёки понанинг сирти уни $z = 0, y = h, x = \pm c (c \leq a)$ текисликлар билан кесилдан

* Тўғри чизиқнинг берилган эгри ва тўғри чизиқлар билан кесилиб, берилган текисликка параллел ҳаракат қилишдан ҳосил бўлган сирт коноид дейилади.

ҳосил бўлган кесимлар бўйича текширилсин ва коноид $z \geq 0$ соҳада ясалсин.

560. $z = x^2$, $y = 0$ эгри чизиқнинг: а) Oz ўқ атрофида; б) Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сиртнинг тенгламаси ёзилсин. Иккала сирт ясалсин.

561. Oz ўқ атрофида: 1) $z = e^{-x^2}$, $y = 0$ эгри чизиқнинг; 2) $z = \frac{4}{x^2}$, $y = 0$ эгри чизиқнинг айланишидан ҳосил бўлган сиртнинг тенгламаси ёзилсин. Иккала сирт (координаталарнинг чап системасида) ясалсин.

562. Учи $O(0; 0; 0)$ нуқтада ва йўналтирувчиси $\begin{cases} x^2 + (y-6)^2 + z^2 = 25 \\ y = 3 \end{cases}$ бўлган конус сиртнинг тенгламаси ёзилсин ҳамда сирт ясалсин.

563. Учи $C(0; -a; 0)$ нуқтада, йўналтирувчиси $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ y + z = a \end{cases}$ бўлган конус сиртнинг тенгламаси ёзилсин ва сирт ясалсин.

Кўрсатма. Ясовчининг тенгламалари $\frac{x}{x_0} = \frac{y+a}{y_0+a} = \frac{z}{z_0}$ дан иборат. $(x_0; y_0; z_0)$ йўналтирувчида ҳам ётади, уларни ёзилган тенгламалардан топиб, йўналтирувчининг тенгламаларига қўйсак, изланган тенглама ҳосил бўлади.

564. $x = 0$, $z = y$ тўғри чизиқнинг: а) Oy ўқ атрофида; б) Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сиртнинг тенгламаси ёзилсин ва иккала сирт ясалсин.

565. $z^2 = xy$ конуснинг $x + y = 2a$ текислик билан кесими эллипс эканлиги кўрсатилсин ва унинг ярим ўқлари топилин.

7-§. Эллипсонд, гиперболоидлар ва параболоидлар

1°. Қаноник тенгламалар. Цилиндрик сиртлардан бошқа қуйидаги қаноник (энг содда) тенгламалар билан аниқланувчи олгита асосий иккинчи тартибли сиртлар бор:

$$I. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \text{эллипсоид.}$$

$$II. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \text{бир ковакли гиперболоид.}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \text{икки ковакли гиперболоид.}$$

$$III. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 - \text{иккинчи тартибли конус.}$$

$$\text{IV. } \left. \begin{aligned} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} &= 2z - \text{эллиптик параболоид,} \\ \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} &= 2z - \text{гиперболик параболоид.} \end{aligned} \right\} (pq > 0 \text{ бўлганда})$$

2°. Тўғри чизикли ясовчилар. Бир кавакли гиперboloиднинг ҳар бир нуқтасидан унинг иккита тўғри чизикли ясовчиси:

$$\left. \begin{aligned} \alpha \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) &= \beta \left(1 + \frac{y}{b} \right) \\ \beta \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) &= \alpha \left(1 - \frac{y}{b} \right) \end{aligned} \right\} \text{ва} \left. \begin{aligned} \gamma \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) &= \delta \left(1 - \frac{y}{b} \right) \\ \delta \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) &= \gamma \left(1 + \frac{y}{b} \right) \end{aligned} \right\}$$

ўтади.

Гиперболик параболоиднинг ҳар бир нуқтасидан ҳам унинг иккита тўғри чизикли ясовчиси ($p > 0$ ва $q > 0$ бўлганда) ўтади:

$$\left. \begin{aligned} \alpha \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} \right) &= 2\beta \\ \beta \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} \right) &= \alpha z \end{aligned} \right\} \text{ва} \left. \begin{aligned} \gamma \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} \right) &= \delta z \\ \delta \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} \right) &= 2\gamma \end{aligned} \right\}$$

3°. Доиравий кесимлар. Эллиптик кесимга эга бўлган ҳар бир сиртда доиравий кесимлар ҳам бўлади. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсоиднинг ($a > b > c$ бўлганда) энг катта доиравий кесими $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ сферада ётади. $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ эллиптик параболоиднинг учидан ўтувчи доиравий кесими $x^2 + y^2 + z^2 = 2pz$ сферада ётади ($p > q$ бўлганда).

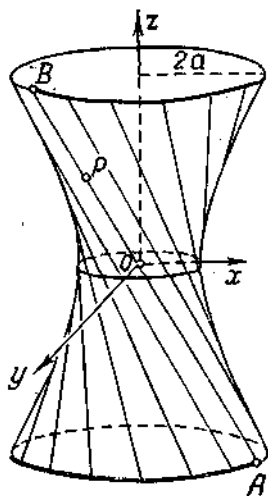
566. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1, y = 0$ эллипснинг Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сиртнинг тенгламаси ёзилсин.

567. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1$ сирт ясалсин ва унинг: 1) $z = 3$; 2) $y = 1$ текисликлар билан кесимларининг юзлари топилин.

568. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, y = 0$ эгри чизикнинг: а) Oz ўқ; б) Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт тенгламаси ёзилсин. Иккала сирт (координаталарнинг чап системасида) ясалсин.

569. 1) $x^2 + y^2 - z^2 = 4$; 2) $x^2 - y^2 + z^2 + 4 = 0$ сиртлар ясалсин.

570. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = 1$ гиперболоид ясалсин ва унинг (4; 1; -3) нуқтадан ўтувчи ясовчилари топилин.



22-чизма.

571. Ипдан ясалган цилиндр модели, устки доирасини (22-чизма) α° бурчакка буриб «ўралган». Агар ҳосил бўлган «чизиқли» сирт асосларининг доиралари $z = \pm c$ текисликларда, марказлари эса Oz ўқда ётса ва радиуслари $2a$ га тенг бўлса, ўша сирт тенгламаси ёзилсин. $\alpha = 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ$ бўлгандаги хусусий ҳоллар қаралсин.

Қўрсатма. $P(x; y; z)$ нукта $A(2a \cos t; 2a \sin t; -c)$ ва $B[2a \cos(t+\alpha); 2a \sin(t+\alpha); c]$ нукталар орасидаги масофани $AP: PB = -c+z):(c-z)$ нисбатда бўлади.

572. $az = x^2, y = 0$ параболанинг (Oz) ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт тенгламаси ёзилсин. $z = a, x = 0, y = 0$ текисликлар билан ҳосил қилган кесимлари бўйича сирт ясалсин.

$$573. 1) 2z = x^2 + \frac{y^2}{2};$$

$$2) z = c \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \text{ сиртлар ясалсин.}$$

574. $x^2 - y^2 = 4z$ сирт (координаталарнинг чап система-сида) ясалсин ва унинг (3; 1; 2) нуқтадан ўтувчи ясовчилари топилсин.

575. Ҳар бирдан $x = 2a$ текисликкача бўлган масофанинг $F(a; 0; 0)$ нуқтагача бўлган масофага нисбати $\sqrt{2}$ га тенг бўлган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин. Сирт ясалсин.

576. Ҳар бирдан $F(0; 0; 2a)$ нуқтагача бўлган масофанинг $z = a$ текисликкача бўлган масофага нисбати $\sqrt{2}$ га тенг бўлган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин. Сирт ясалсин.

577. $F(-a; 0; 0)$ нуқтадан ва $x = a$ текисликдан тенг узоқлашган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

578. $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$ эллипсоиднинг энг катта доиравий кесими топилсин.

579. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = z$ эллиптик параболоиднинг координаталар бошидан ўтувчи доиравий кесимлари аниқлансин.

580. Ушбу

- | | |
|------------------------------|------------------------------------|
| 1) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$; | 6) $x^2 = 2az$; |
| 2) $x^2 + y^2 = 2az$; | 7) $x^2 = 2yz$; |
| 3) $x^2 + z^2 = 2az$; | 8) $z = 2 + x^2 + y^2$; |
| 4) $x^2 - y^2 = 2az$; | 9) $(z - a)^2 = xy$; |
| 5) $x^2 - y^2 = z^2$; | 10) $(z - 2x)^2 + 4(z - 2x) = y^2$ |

сиртлардан ҳар бирининг номи аниқлансин ва улар ясалсин.

581. $x^2 - y^2 + z^2 = 4$ гиперболоиднинг (2; 4; 4) нуқтадан ўтувчи чизиқли ясовчиларининг тенгламалари ёзилсин.

582. $z = -\frac{a}{2}$ текисликдан ва $F(0; 0; \frac{a}{2})$ нуқтадан тенг узоқлашган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин. Сирт ясалсин.

583. $z = \frac{3a}{2}$ текисликдан ва $F(0; 0; \frac{a}{2})$ нуқтадан тенг узоқлашган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин. Сирт ясалсин.

584. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{3z^2}{25} = 1$ гиперболоиднинг энг кичик доиравий кесимлари топилсин.

585. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 2z$ гиперболик параболоиднинг (4; 3; 0) нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар ясовчиларининг тенгламалари ёзилсин.

IV БОБ ОЛИЙ АЛГЕБРА

1- §. Детерминантлар

1°. Детерминантлар. 2-тартибли детерминант деб
 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ символ билан белгиланувчи ва

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad (1)$$

тенглик билан аниқланувчи сонга айтилади.

3-тартибли детерминант деб, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ символ билан бел-
 гиланувчи ва

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad (2)$$

тенглик билан аниқланувчи сонга айтилади.

(2) тенгликнинг ўнг томонидаги 2-тартибли детерминантларнинг ҳар бири берилган учинчи тартибли детерминантнинг битта сатри ва битта устунини ўчиришдан ҳосил бўлади ва улар ўша детерминантнинг *минорлари* деб аталади. (2) формула эса 3-тартибли детерминантни биринчи сатри элементлари бўйича ёйиш формуласи дейилади.

2°. Детерминантларнинг хоссалари.

I. Детерминантнинг сатрларини устуллари билан алмаштиришдан унинг қиймати ўзгармайди.

II. Детерминантнинг иккита параллел қаторларини ўзаро алмаш-тирганда детерминант қийматининг ишораси ўзгаради.

I ва II хоссалардан равшанки, детерминантнинг исталган қаторини биринчи сатр ўрнига келтириш мумкин, шунинг учун уни исталган қа-тор элементлари бўйича ёйиш мумкин.

III. Иккита параллел қатори бир хил бўлган детерминант нолга тенг.

IV. Бир қатор элементларининг умумий кўпайтувчисини детерминант белгисидан ташқарига чиқариш мумкин.

V. Детерминантнинг бирор қаторининг элементларига унга параллел қатор элементларини ихтиёрий бир хил сонга кўпайтириб қўшишдан детерминант қиймати ўзгармайди. Масалан:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + mc_1 & b_1 + nc_1 & c_1 \\ a_2 + mc_2 & b_2 + nc_2 & c_2 \\ a_3 + mc_3 & b_3 + nc_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Бу хоссага асосланиб, 3-тартибли детерминантнинг исталган қаторида иккита ноль ҳосил қилиш мумкин, бунинг натижасида детерминантнинг ўша қатор элементлари бўйича ёйилмаси соддалашади.

3°. Учлари $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ нуқталарда бўлган уч бурча к ю зи:

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Қуйидаги детерминантлар ҳисоблансин:

$$586. \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}. \quad 587. \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}. \quad 588. \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$589. \begin{vmatrix} \sqrt{a} - 1 \\ a \sqrt{a} \end{vmatrix}. \quad 590. \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}.$$

$$591. \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta \end{vmatrix}.$$

Қуйидаги детерминантлар биринчи устун элементлари бўйича ёйиб ҳисоблансин:

$$592. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}. \quad 593. \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}.$$

Қуйидаги детерминантлар ноллар энг кўп бўлган қатор элементлари бўйича ёйиб ҳисоблансин:

$$594. \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}. \quad 595. \begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}.$$

Қуйидаги детерминантлар соддалаштирилсин ва ҳисоблансин:

$$596. \begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix} \quad 597. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$$

$$598. \begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} \quad 599. \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}$$

$$600. \begin{vmatrix} 1 + \cos \alpha & 1 + \sin \alpha & 1 \\ 1 - \sin \alpha & 1 + \cos \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad 601. \begin{vmatrix} 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} & \sin \alpha & 1 \\ 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} & \sin \beta & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

602. Учлари $A(2; 3)$, $B(4; -1)$ ва $C(6; 5)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

603. $A(1; 3)$, $B(2; 4)$ ва $C(3; 5)$ нуқталар бир тўғри чизиқда ётадилми?

604. 1) $(x_1; y_1)$ ва $(x_2; y_2)$; 2) $(2; 3)$ ва $(-1; 5)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси 3-тартибли детерминант ёрдами билан ёзилсин.

Қуйидаги детерминантлар соддалаштирилсин ва ҳисоблансин:

$$605. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad 606. \begin{vmatrix} m+a & m-a & a \\ n+a & 2n-a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix}$$

$$607. \begin{vmatrix} ax & a^2 + x^2 & 1 \\ ay & a^2 + y^2 & 1 \\ az & a^2 + z^2 & 1 \end{vmatrix} \quad 608. \begin{vmatrix} \sin 3\alpha & \cos 3\alpha & 1 \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 1 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

Қўрсатма. 607- мисолда олдин a ни детерминант белгисидан ташқарига чиқариб, сўнгра биринчи ва иккинчи сатрдан учинчи сатрни айириш $(x-z)$ ва $(y-z)$ ни детерминант белгиси ташқарисига чиқариш керак.

609.

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} & \frac{y_1+y_2}{2} & 1 \\ \frac{x_1-x_2}{2} & \frac{y_1-y_2}{2} & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

тенглик исботлансин.

610. Ушбу

$$1) \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad 2) \begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

тенгламалардан x топилсин ва илдизларнинг детерминантга қўйиб текширилсин.

2-§. Чизиқли тенгламаларнинг системалари

1°. Икки номаълумли иккита чизиқли тенглама системаси

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \quad (1)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ шарт бажарилганда}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad (2)$$

ечимларга эга.

2°. Бир жинсли уч номаълумли иккита тенглама системаси

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \end{cases} \quad (3)$$

ушбу

$$x = k \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad y = -k \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad z = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad (4)$$

формулалар билан аниқланувчи ечимларга эга, бундаги k — ихтиёрий сон.

3°. Бир жинсли уч номаълумли учта тенглама системаси

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0, \end{cases} \quad (5)$$

унинг детерминанти $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ бўлса, нолга тенг бўлмаган ечим-

ларига эга бўлади ва аксинча.

4°. Икки номалумли учта чиизқли тенглама системаси,

$$\left. \begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2, \\ a_3x + b_3y &= c_3. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ бўлганда ва унинг ҳеч қайси иккита тенгламаси}$$

ўзаро зид бўлмаса, биргаликда бўлади.

5°. Уч номалумли учта чиизқли тенглама системаси

$$\left. \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

унинг детерминанти

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

нолдан фарқли бўлганда бирдан-бир

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} \quad (8)$$

ечимга эга бўлади, бунда

$$\Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

6°. Биргаликда бўлмаган ва аниқмас тенгламалар системаси. (7) тенгламаларнинг чап томонларини X_1, X_2, X_3 лар билан белгилайлик, системанинг детерминанти $\Delta = 0$ бўлсин. У ҳолда қуйидаги икки ҳол бўлиши мумкин:

1. Δ детерминантнинг қандайдир иккита сатрининг элементлари бир-бирига пропорционал, масалан $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = m$. У ҳолда $X_2 = mX_1$ ва

1) агар $d_2 \neq md_1$ бўлса, система биргаликда эмас (биринчи икки тенглама бир-бирига зид);

2) агар $d_2 = md_1$ бўлса, система аниқмас (агар биринчи ва учинчи тенгламалар бир-бирига зид бўлмаса).

II. Δ детерминантда пропорционал элементларга эга бўлган сатрлар йўқ. У ҳолда нолга тенг бўлмаган шундай m ва n сонлар мавжудки, $mX_1 + nX_2 = X_3$ ва

1) агар $md_1 + nd_2 \neq d_3$ бўлса, система биргаликда эмас;

2) агар $md_1 + nd_2 = d_3$ бўлса, система аниқмас.

m ва n сонларни мулоҳазалар ёрдами билан ёки $a_1m + a_2n = a_3$, $b_1m + b_2n = b_3$, $c_1m + c_2n = c_3$ тенгламалардан топиш мумкин.

Детерминантлар ёрдами билан қуйидаги тенгламалар системалари ечилсин:

$$611. \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 5y = 40. \end{cases} \quad 612. \begin{cases} ax - 3y = 1 \\ ax - 2y = 2. \end{cases}$$

$$613. \begin{cases} 5x + 2y = 4. \\ 7x + 4y = 8. \end{cases} \quad 614. \begin{cases} mx - ny = (m - n)^2 \\ 2x - y = n \quad (m \neq 2n) \end{cases}$$

бўлганда)

Қуйидаги тенгламалар системалари ечилсин:

$$615. \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ x + 5y - 4z + 5 = 0 \\ 4x + y - 3z + 4 = 0. \end{cases} \quad 616. \begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2. \end{cases}$$

$$617. \begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + 4y - 3z = 0. \end{cases} \quad 618. \begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x + 3y - 4z = 0. \end{cases}$$

$$619. \begin{cases} 3x + 2y - z = 0. \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x + y - z = 0. \end{cases} \quad 620. \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 4y + 6z = 3 \\ 3x + y - z = 1. \end{cases}$$

$$621. \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 7. \end{cases} \quad 622. \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 10. \end{cases}$$

$$623. 1) \begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 3x + y = 9 \\ x + 4y = 3 \end{cases} \quad \text{ва } 2) \begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ x + 2y = 4 \\ x - 5y = 5 \end{cases}$$

тўғри чизиқлар бир нуқтада кесишадими? Иккала ҳолда ҳам чизиқлар ясалсин.

Қуйидаги чизиқли тенгламалар системалари ечилсин:

$$624. \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y = 2z = -2 \\ x - 2y + z = 1. \end{cases} \quad 625. \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6. \end{cases}$$

$$626. \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ 5x + 2y + 3z = 0. \end{cases} \quad 627. \begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ 2x + 3y - 5z = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

$$628. \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + 2y - 5z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0. \end{cases} \quad 629. \begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ 4x - y + z = 11. \end{cases}$$

3-§. Комплекс сонлар

1°. Таърифлар. x ва y ҳақиқий сонлар, i эса қандайдир бир символ бўлса, $x + yi$ ифода комплекс сон дейилади, бунда қуйидаги шартлар қабул қилинган деб ҳисобланади.

- 1) $x + 0i = x$; $0 + yi = yi$ ва $1i = i$; $-1i = -i$.
 - 2) фақат $x = x_1$, $y = y_1$ бўлгандагина, $x + yi = x_1 + y_1i$ бўлади.
 - 3) $(x + yi) + (x_1 + y_1i) = (x + x_1) + (y + y_1)i$.
 - 4) $(x + yi)(x_1 + y_1i) = (xx_1 - yy_1) + (xy_1 + x_1y)i$.
- 1) ва 4) шартлардан i нинг даражалари ҳосил бўлади:

$$i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i \text{ ва ҳоказо.} \quad (1)$$

$x + yi$ комплекс сонда $x = 0$, $y \neq 0$ бўлса, у *мавҳум сон* дейилади. i сон мавҳум бирлик дейилади.

2°. Комплекс сонлар устида бажариладиган амаллар. Комплекс сонларни қўшиш, айириш, кўпайтириш ва даражага кўтариш амаллари, шу амалларни кўпхадлилар устида бажариш қондалари асосида бажарилади, бунда i соннинг даражаларининг (1) формулалар бўйича алмаштириш зарур.

Комплекс сонларни бўлиш, комплекс сондан илдиз чиқариш амаллари мос равишда кўпайтириш ва даражага кўтариш амалларига тескари амаллар сифатида аниқланади.

3°. Комплекс соннинг тригонометрик кўриниши. $x + yi$ комплекс сон икки ҳақиқий (x ; y) сон билан аниқланади, шунинг учун ҳам у текисликдаги $M(x, y)$ нуқта ёки унинг $r = OM$ (12-чизма) радиус-вектори билан ифодаланади. Бу векторнинг узунлиги $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ комплекс соннинг *модули*, вектор билан Ox ўқ орасидаги φ бурчак эса комплекс соннинг *аргументи* дейилади. $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ бўлгани учун:

$$x + yi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (2)$$

4°. Тригонометрик кўринишда берилган комплекс сонлар устида бажариладиган амаллар:

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = (rr_1)[\cos(\varphi + \varphi_1) + i \sin(\varphi + \varphi_1)]. \quad (3)$$

$$\frac{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)} = \frac{r}{r_1} [\cos(\varphi - \varphi_1) + i \sin(\varphi - \varphi_1)]. \quad (4)$$

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad (5)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad (6)$$

бунда $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$.

(5) ва (6) формулалар Муавр формулалари дейилади.

5°. Эйлер формуласи:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (7)$$

6°. Комплекс соннинг логарифми қуйидагича ёзилади:

$$\ln z = \ln k + i\varphi_0 + i2k\pi, \quad (8)$$

φ нинг $-\pi < \varphi \leq \pi$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи қиймати φ_0 бўлади. $\ln r + i\varphi_0$ ифода логарифмнинг бош қиймати дейилади.

630. 1) $(2 + 3i)e^{(3-2i)}$; 2) $(a + bi)(a - bi)$; 3) $(3 - 2i)^2$;

$$4) (1 + i)^3; 5) \frac{1+i}{1-i}; 6) \frac{2i}{1+i}$$

амаллар бажарилсин.

631. 1) $x^2 + 25 = 0$; 2) $x^2 - 2x + 5 = 0$; 3) $x^2 + 4x + 13 = 0$ тенгламалар ечилсин ва илдизлар тенгламага қўйилиб текширилсин.

Қуйидаги комплекс сонлар векторлар билан тасвирлансин ва уларнинг модуллари ва аргументлари аниқлансин ҳамда тригонометрик кўринишда ёзилсин:

632. 1) $z = 3$; 2) $z = -2$; 3) $z = 3i$; 4) $z = -2i$.

633. 1) $z = 2 - 2i$; 2) $z = 1 + i\sqrt{3}$; 3) $z = -\sqrt{3} - i$.

634. 1) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$; 2) $\sin \alpha + i(1 - \cos \alpha)$.

635. 632 — 634-масалаларда берилган сонлар $re^{i\varphi}$ кўринишда ёзилсин ($-\pi < \varphi \leq \pi$ бўлганда).

636. Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи z нуқталарнинг соҳалари ясалсин:

1) $|z| < 3$; 2) $|z| < 2$ ва $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$;

3) $2 < |z| < 4$ ва $-\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$.

637. $|z_1 - z_2|$ ифода z_1 ва z_2 нуқталар орасидаги масофа эканлиги кўрсатилсин.

638. $z_0 = -2 + 3i$ нуқта берилган. $|z - z_0| < 1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи z нуқталарнинг соҳаси ясалсин.

639. z сонга қўшма бўлган сон $\bar{z}$ билан белгиланади.

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$ эканлиги исботлансин.

640. Қуйидагилар Муавр формуласи билан ҳисоблансин:

1) $(1 + i)^{10}$; 2) $(1 - i\sqrt{3})^6$; 3) $(-1 + i)^5$;

4) $\left(1 + \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^4$; 5) $(\sqrt{3} + i)^3$.

641. $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha$ айниятдан фойдаланиб, $\sin 3\alpha$ ва $\cos 3\alpha$ лар α бурчакнинг функциялари орқали ифодалансин.

642. $z = \sqrt[6]{1}$ нинг барча қийматлари топилсин ва радиуси 1 га тенг доира ясаб, топилган қийматлар радиус-векторлар билан тасвирлансин.

643. 1) $\sqrt[3]{1}$; 2) $\sqrt[3]{i}$; 3) $\sqrt[6]{-1}$; 4) $\sqrt[3]{-2+2i}$ топилсин.

644. 1) $\sqrt{-i}$; 2) $\sqrt[3]{-1+i}$; 3) $\sqrt[4]{-8+8i\sqrt{3}}$ топилсин.

645. 1) $x^3 + 8 = 0$; 2) $x^4 + 4 = 0$ икки ҳадли тенгламалар ечилсин.

646. 1) $\ln(-2)$; 2) $\ln(1+i)$; 3) $\ln i$; 4) $\ln(x+yi)$; 5) $\ln(2-2i)$ логарифмнинг бош қиймати топилсин.

647. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx$ йиғинди топилсин.

Қўрсатма. Эйлер формуласига асосан $\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$ ва ҳоказо алмаштиришлар бажарилсин.

648. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx$ йиғинди топилсин.

649. $x^5 - 1 = (x-1)(x^2 - 2x \cos 72^\circ + 1)(x^2 - 2x \cos 144^\circ + 1)$ айният исботлансин.

650. Қуйидагиларни ҳисобланг:

1) $\frac{4-3i}{4+3i}$; 2) $(a+bi)^3 - (a-bi)^3$.

Қуйидаги мисолларда комплекс сонлар векторлар билан тасвирлансин, уларнинг модуллари ва аргументлари топилсин ҳамда улар тригонометрик кўринишда ва re^{it} (бунда $-\pi < \varphi \leq \pi$) кўринишда ёзилсин:

651. 1) $z = 4 + 4i$; 2) $z = -1 + i\sqrt{3}$; 3) $z = 1 - i$.

652. 1) $z = 5$; 2) $z = -i$; 3) $z = -\sqrt{2} - \sqrt{-2}$.

653. Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи z нуқталарнинг соҳалари ясалсин:

$$1 < |z| < 3 \text{ ва } \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}.$$

654. $z_0 = 3 - 4i$ нуқта берилган. $|z - z_0| < 5$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи z нуқталарнинг соҳаси ясалсин.

655. Қуйидагилар Муавр формуласи билан ҳисоблансин:

1) $(1 - i)^6$; 2) $(2 + i\sqrt{12})^6$; 3) $\left(1 + \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^6$.

656. $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^4 = \cos 4\alpha + i \sin 4\alpha$ айниятдан фойдаланиб, $\sin 4\alpha$ ва $\cos 4\alpha$ лар α бурчак функциялари орқали ифодалансин.

657. Ушбу 1) $\sqrt[4]{-1}$ ва 2) $\sqrt[5]{1}$ илдизларнинг барча қийматлари топилинсин ҳамда улар радиус-векторлар билан тасвирлансин.

658. 1) $x^3 - 8 = 0$; 2) $x^6 + 64 = 0$; 3) $x^4 - 81 = 0$ тенгламалар ечилсин.

659. $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots + \cos (2n-1)x$ йиғинди ҳисоблансин (647-масалага қаралсин).

4-§. Юқори даражали тенгламалар.

Тенгламаларни тақрибий ечиш

1°. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (1) тенглама кубик тенглама дейлади.

Агар x_1, x_2, x_3 лар (1) тенгламанинг илдизлари бўлса, тенгламани $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$ кўринишда ёзиш мумкин. Бундан $a = -(x_1 + x_2 + x_3)$, $b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, $c = -x_1x_2x_3$.

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ тенглама $x = z - \frac{a}{3}$ алмаштириш ёрдами билан $z^3 + pz + q = 0$ кўринишга келтирилади. $z^3 + pz + q = 0$ тенглама ушбу

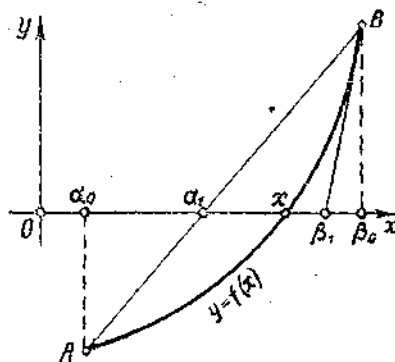
$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = u + v$$

Кардано формуласи билан ечилади.

I. Агар $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ бўлса, у ҳолда $z_1 = u_1 + v_1$; $z_{2,3} = -\frac{u_1 + v_1}{2} \pm \frac{u_1 - v_1}{2} i \sqrt{3}$ бўлади, бунда u_1 ва v_1 лар u ва v илдизларининг ҳақиқий қийматлари.

II. Агар $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$ бўлса, у ҳолда $z_1 = \frac{3q}{p}$; $z_2 = z_3 = -\frac{3q}{2p} = -\frac{z_1}{2}$ бўлади.

III. Агар $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ бўлса, у ҳолда $z_1 = 2 \sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \frac{\varphi}{3}$, $z_{2,3} = 2 \sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \left(\frac{\varphi}{3} \pm 120^\circ\right)$ бўлади, бундаги $\cos \varphi = -\frac{q}{2} : \sqrt{\frac{-p^3}{27}}$.



23-чизма.

2°. $f(x) = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизини ажратиш. Агар $f(a)$ ва $f(b)$ нинг ишоралари ҳар хил ва $f(x)$ эса $[a, b]$ кесмада узлуксиз ҳамда шу кесма ичида $f'(x) \neq 0$ ҳо-силага эга бўлса, $f(x) = 0$ тенгламанинг a -ва b орасида бирдан бир илдизи жойлашган бўлади. Бундан ташқари, $[a, b]$ кесмада $f''(x) \neq 0$ деб ҳисоблаймиз.

3°. $f(x) = 0$ тенгламани тақрибий ечишнинг ватарлар усули. α_0 — тенгла-ма илдизини ажратувчи $[a, b]$ кесманинг икки учидан ўшаниси-ки, унда $f(\alpha_0) \cdot f''(\alpha_0) < 0$ шарт бажарилади. У ҳолда AB ватар билан Ox ўқнинг кесишган нуқ-таси α_1 (23-чизма) тенглама ил-

дизи x нинг тақрибий қиймати бўлади:

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{f(\alpha_0)}{k},$$

$$\text{бунда } k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

4°. Уринмалар (Ньютон) усули. $\beta_0 \in [a, b]$ кесманинг икки учидан ўшанисики, унда $f(\beta_0) \cdot f''(\beta_0) > 0$ шарт бажарилади. У ҳолда, $y = f(x)$ эгри қизиқнинг $[\beta_0; f(\beta_0)]$ нуқтасига ўтказилган уринма билан Ox ўқнинг кесишган нуқтаси β_1 (23-чизма) тенглама илдизи x нинг тақрибий қиймати бўлади:

$$\beta_1 = \beta_0 - \frac{f(\beta_0)}{k_1},$$

бунда

$$k_1 = f'(\beta_0).$$

Ватар ва уринма усулларини янгидан татбиқ этиб, ушбу

$$\frac{\alpha \mid \beta \mid f(\alpha) \mid f(\beta) \mid k \mid k_1 \mid \Delta\alpha \mid \Delta\beta}{\dots \mid \dots \mid \dots \mid \dots \mid \dots \mid \dots \mid \dots \mid \dots} \quad (2)$$

жадвални тузиш мумкин. Бунда k ва k_1 — мос равишда ватар ва урин-манинг бурчак коэффициентларидир, $\Delta\alpha$ ва $\Delta\beta$ бўлса,

$$\Delta\alpha = -\frac{f(\alpha)}{k} \quad \text{ва} \quad \Delta\beta = -\frac{f(\beta)}{k_1}$$

тенгликлар билан аниқланади.

(2) жадвалда ҳосил бўладиган α ва β қийматларнинг кетма-кетлик-лари изланган илдизга яқинлашади.

5°. Итерациялар усули. Агар $f(x) = 0$ тенгламани $x = \varphi(x)$ кўринишга келтириш мумкин бўлса, ундан ташқари, тенглама илдизининг

қандайдир бир атрофда $|\varphi'(x)| < 0 \leq 1$ бўлса ва x_0 — шу атрофдаги ихтиёрий бир сон бўлса, у ҳолда тақрибий ечимларнинг яқинлашувчи кетма-кетлиги:

$$x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), x_3 = \varphi(x_2) \dots$$

бўлади.

660, 661- мисолларда берилган тенгламалар озод ҳадларининг бутун кўпайтувчилари орасидан тенгламанинг битта илдизи x_1 ни толиб, сўнггра тенглама чап томонини $(x - x_1)$ га бўлиб, қолган илдизлар топилсин.

660. 1) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$; 2) $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$ тенгламаларнинг ечимлари

$$x_1 + x_2 + x_3; x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3; x_1 x_2 x_3$$

ифодаларни тузиб, текширилсин.

661. 1) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$; 2) $x^4 + x^3 + 2x - 4 = 0$;
3) $9x^3 + 18x^2 - x - 2 = 0$; 4) $4x^3 - 4x^2 + x - 1 = 0$.

Қуйидаги тенгламалар Кардано формуласи бўйича ечилсин:

662. 1) $z^3 - 6z - 9 = 0$; 2) $z^3 - 12z - 16 = 0$.

663. 1) $z^3 - 12z - 8 = 0$; 2) $z^3 + 6z - 7 = 0$.

664. $x^3 + 9x^2 + 18x + 9 = 0$.

665. $f(x) = x^4 - x - 10 = 0$ тенглама берилган. $x = 0, 1, 2, \dots$ лар учун $f(x)$ ишораларининг жадвалини тузиб, мусбат илдиз чегаралари аниқлансин ва уни 0,01 аниқлик билан ватарлар ҳамда уринмалар усули бўйича ҳисоблансин.

666. $y = \frac{x^3}{3}$ функция графиги ясалсин, $x^3 - 6x + 3 = 0$ тенглама илдизларининг чегаралари графикдан аниқлансин ҳамда илдизлар учинчи хона бирлиги аниқлиги билан ҳисоблансин.

667. Итерациялар (кетма-кет яқинлашишлар) усули билан:
1) $x^3 + 60x - 80 = 0$; 2) $2^x = 4x$; 3) $x^3 + l^2x + l^3 = 0$; 4) $x^4 - 2x - 2 = 0$ тенгламаларнинг ҳақиқий илдизлари топилсин.

668. 1) $x^3 + 8x^2 + 15x + 18 = 0$; 2) $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ тенгламаларнинг озод ҳадлари бутун кўпайтувчилари орасидан тенгламанинг битта илдизини топиб, тенглама ечилсин. Текшириш учун $\sum x_i$, $\sum x_i x_j$ ва $x_1 x_2 x_3$ ифодалар тузилсин.

669. 1) $z^3 + 18z - 19 = 0$; 2) $z^3 - 6z - 4 = 0$;
 3) $z^2 - 3z + 2 = 0$; 4) $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$

тенгламалар Кардано формуласи бўйича ечилсин.

670. $y = \frac{x^4}{5}$ функция графигини ясаб, $x^4 + 3x - 75 = 0$ тенглама илдизларининг чегаралари аниқлансин ва илдизлар 0,01 аниқлик билан ҳисоблансин.

671. 0,01 аниқлик билан 1) $x^3 + 50x - 60 = 0$, 2) $x^3 + x - 32 = 0$ тенгламаларнинг мусбат илдизлари топилсин.

672. Итерациялар усули билан $x = \sqrt[3]{8 - 2x}$ формулага асосан кетма-кет яқинлашишларни (логарифмик линейка ёрдами билан) ҳисоблаб, $x^3 + 2x - 8 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизи топилсин.

АНАЛИЗГА КИРИШ

1-§. Ўзгарувчи миқдорлар ва функциялар

1°. Интерваллар. $a < x < b$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи x сонлар тўплами *оралиқ* дейилади ва (a, b) билан белгиланади. $a < x \leq b$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи x сонлар тўплами *сегмент* дейилади ва $[a, b]$ билан белгиланади.

Оралиқ ва *сегмент* (қесма) *интервал* деган умумий ном билан юргизилади. Ўзаро эквивалент

$$x^2 < a^2 \text{ ёки } |x| < a \text{ ёки } -a < x < a$$

тенгсизликлар ($a > 0$ бўлганда) нолга нисбатан симметрик оралиқларни билдиради.

2°. Ўзгарувчи миқдорлар ва функциялар. Агар ўзгарувчи x нинг ҳар бир қийматига битта сон мос келтирилган бўлса, y ҳолда ўша сонлар тўплами билан аниқланган y ўзгарувчи x нинг бир қийматли *функцияси* дейилади. Бунда ўзгарувчи x *аргумент*, аргумент қийматларининг берилган тўплами эса *функциянинг аниқланиш соҳаси* дейилади.

y нинг x функцияси экани символик $y = f(x)$, $y = F(x)$ ёки $y = \varphi(x)$ ва шунга ўхшаш кўринишда ёзилади. $f(x)$ ёки $F(x)$ ва шунга ўхшаш *символ* x ва y ўзгарувчиларнинг мослик қонунини белгилайди, хусусий ҳолда, x нинг қийматига мос келадиган y нинг қийматини топиш учун x устида бажариш керак бўлган *амаллар* ёки операциялар *тўпламини* билдириши мумкин.

673. 1) $|x| < 4$; 2) $x^2 \leq 9$; 3) $|x - 4| < 1$;
4) $-1 < x - 3 \leq 2$; 5) $x^2 > 9$; 6) $(x - 2)^2 \leq 4$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи x нинг ўзгариш интерваллари ясалсин.

674. Ўзгарувчиларнинг $[-1; 3]$; $(0, 4)$; $[-2, 1]$ ўзгариш интерваллари тенгсизликлар орқали ёзилсин ва ясалсин.

675. $x = 1 - \frac{1}{t}$ ўзгарувчининг ўзгариш интервали аниқлансин, бундаги t бирдан кичик бўлмаган ҳар қандай қийматни қабул қилади ($t \geq 1$).

676 — 678- масалаларда $|x| \leq 3$ сегментда берилган функцияларнинг графиклари нуқталар бўйича ясалсин:

676. 1) $y = 2x$; 2) $y = 2x + 2$; 3) $y = 2x - 2$.

677. 1) $y = x^2$; 2) $y = x^2 + 1$; 3) $y = x^2 - 1$.

678. 1) $y = \frac{x^3}{3}$; 2) $y = \frac{x^3}{3} + 1$; 3) $y = \frac{x^3}{3} - 1$.

679. 1) $y = \frac{6}{x}$; 2) $y = 2^x$; 3) $y = \log_2 x$

функцияларнинг графиклари ясалсин. Бу эгри чизиқларнинг координата ўқларига нисбатан вазиятларида қандай хусусиятларни кўриш мумкин?

680. 1) $y = \sin x$; 2) $y = \cos x$

функцияларнинг графиклари y нинг энг катта, энг кичик ва нолга тенг қийматлар қабул этувчи нуқталар бўйича ясалсин. Бу эгри чизиқлар ординаталарини қўшиб, ўша чизманинг ўзида $y = \cos x + \sin x$ функция графиги ясалсин.

681. $y = 4x - x^2$ функциянинг илдизлари x_1 ва x_2 топилсин ҳамда унинг $[x_1 - 1, x_2 + 1]$ сегментдаги графиги ясалсин.

682. 1) $y = |x|$; 2) $y = -|x - 2|$; 3) $y = |x| - x$

функцияларнинг графиклари ясалсин.

683 — 686- масалалардаги функцияларнинг ҳақиқий қийматларини аниқловчи соҳалар топилсин ва уларнинг графиклари ясалсин:

683. 1) $y = \sqrt{x + 2}$; 2) $y = \sqrt{9 - x^2}$; 3) $y = \sqrt{4x - x^2}$.

684. 1) $y = \sqrt{-x} + \sqrt{4 + x}$; 2) $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$.

685. 1) $y = \frac{x(2 \pm \sqrt{x})}{4}$; 2) $y = \pm x \sqrt{4 - x}$.

686. 1) $y = -\sqrt{2 \sin x}$; 2) $y = -\frac{x \sqrt{16 - x^2}}{2}$.

687. 1) $f(x) = x^2 - x + 1$ бўлса, $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(a+1)$ ҳисоблансин; 2) $\varphi(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}$ бўлса, $\varphi(0)$, $\varphi(-1)$,

$\varphi\left(\frac{3}{2}\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{\varphi(x)}$ ҳисоблансин.

688. $F(x) = x^2$ бўлса, 1) $\frac{F(b) - F(a)}{b - a}$; 2) $F\left(\frac{a+h}{2}\right) - F\left(\frac{a-h}{2}\right)$ ҳисоблансин.

689. $f(x) = x^2$; $\varphi(x) = x^3$ бўлса, $\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$ ҳисоблансин.

690. $F(x, y) = x^3 - 3xy - y^2$ бўлса, $F(4, 3)$ ва $F(3, 4)$ ҳисоблансин.

691. Агар $f(-x) = f(x)$ бўлса, $f(x)$ функция *жуфт*, агар $f(-x) = -f(x)$ бўлса — *тоқ* дейилади. Ушбу 1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; 2) $\varphi(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$; 3) $F(x) = a^x + \frac{1}{a^x}$;

4) $\Phi(x) = a^x - \frac{1}{a^x}$; 5) $\Psi(x) = x \sin^2 x - x^3$; 6) $f_1(x) = x + x^2$ функциялардан қайсилари жуфт, қайсилари тоқ эканлиги кўрсатилсин.

692. Қандайдир $f(x)$ функция графигининг исталган ватарининг ўртаси шу функция графигидан юқориқда ётади. Функциянинг бу хоссаси тенгсизлик орқали ёзилсин. $f(x) = x^2$ функциянинг ўша хоссага эга эканлиги текширилсин.

693. Элементар функциялардан қайсиси

$$f(1) = 0, f(a) = 1; f(xy) = f(x) + f(y)$$

хоссаларга эга?

694. Элементар функциялардан қайсиси

$$f(0) = 1, f(1) = a, f(x + y) = f(x) f(y)$$

хоссаларга эга?

695. 1) $|x| < 3$; 2) $x^2 \leq 4$; 3) $|x - 2| < 2$; 4) $(x - 1)^2 \leq 4$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи x нинг ўзгариш интерваллари ясалсин.

696. $x = 2 + \frac{1}{t}$ ўзгаришнинг ихтиёрий $t \geq 1$ қийматлар қабул қилгандаги ўзгариш интервали аниқлансин.

697. Қуйидаги функцияларнинг графиклари ясалсин:

1) $y = 4 - \frac{x^2}{2}$ нинг $|x| \leq 2$ сегментда;

2) $y = 3,5 + 3x - \frac{x^2}{2}$ нинг абсциссалар ўқи билан кесишган нуқталари орасида.

698. Қуйидаги функцияларнинг графиклари ясалсин:

1) $y = x - 4 + |x - 2|$ нинг $[-2, 5]$ сегментда;

2) $y = 1 - \cos x$ нинг $|x| \leq 2\pi$ сегментда.

699. 1) $y = -\frac{4}{x}$; 2) $y = 2^{-x}$

функцияларнинг графиклари ясалсин.

$$700. 1) y = \sqrt{4-x^2}; \quad 2) y = \sqrt{x+1} - \sqrt{3-x};$$

$$3) y = 1 - \sqrt{2 \cos 2x}; \quad 4) y = \frac{4}{1 + \sqrt{x^2-4}}$$

функциялар ҳақиқий қийматларининг аниқланиш соҳалари топилсин ва уларнинг графиклари ясалсин.

$$701. 1) \text{ Агар } f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} \text{ бўлса, } f(0); f(-2); f\left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$f(x-1); f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ ҳисоблансин.}$$

$$2) \text{ агар } \varphi(x) = x^3 \text{ бўлса, } \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x-h)}{h} \text{ ҳисоблансин;}$$

$$3) \text{ агар } f(x) = 4x - x^2 \text{ бўлса, } f(a+1) - f(a-1) \text{ ҳисоблансин.}$$

2- §. Сонлар кетма-кетлиги.

Чексиз кичик ва чексиз катта ўзгариувчилар.
Ўзгариувчининг limiti. Функция limiti.

1°. Сонлар кетма-кетлиги. Ўзгариувчи x ушбу

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \quad (1)$$

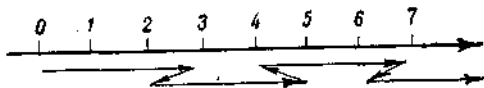
қийматларни кетма-кет қабул қилсин. Бундай номерланган сонлар *тўплами кетма-кетлик* дейилади. (1) кетма-кетликнинг тузилиш қонуни n -хад формуласи билан берилади.

Масалан: $x_n = n + (-1)^n$ бўлсин; $n = 1, 2, 3, \dots$ деб олсак,

$$0, 3, 2, 5, 4, 7, \dots \quad (2)$$

кетма-кетлик ҳосил бўлади.

Агар ўзгариувчи x фақат (2) кетма-кетлигининг қийматларинигина қабул қилмасдан, 0 билан 3 орасидаги барча қийматлари (ўса бориб), 3 билан 2 орасидаги (камая бориб) барча қийматларни ҳам қабул қилади ва ҳоказо деб фараз қилсак, x нинг ўзгаришини $M(x)$ нуқтанинг Ox ўқидаги ҳаракати билан тасвирлаш мумкин. 24-чизмада (2) кетма-кетлик билан берилган x нинг ўзгариши тасвирланган.



24-чизма.

Бундан сўнг ўзгариувчи $x = f(n)$ кетма-кетлик билан ёки умумий ҳолда $a < t < b$ интервалдан аниқланган $x = f(t)$ функция билан берилган деб ҳисоблаймиз. Агар $t > t_0$ бўлса, $x = f(t)$ қиймат $x_0 = f(t_0)$ дан

кейин келади деб шарт қилинган (хусусий ҳолда t вақтни билдириши ҳам мумкин).

2°. Чексиз кичик ўзгарувчи. Агар ҳар қандай мусбат ε сон учун ўзгарувчининг шундай α_0 қиймати мавжуд бўлсаки, α нинг ундан сўнгги ҳар бир қийматининг абсолют миқдори ε дан кичик бўлса, α ўзгарувчи *чексиз кичик* дейилади.

Агар α чексиз кичик бўлса, у нолга *интилади* дейилади ва $\alpha \rightarrow 0$ кўринишида ёзилади.

3°. Чексиз катта ўзгарувчи. Агар ҳар қандай мусбат ε сон учун ўзгарувчининг шундай қиймати мавжуд бўлсаки, x нинг ундан сўнгги ҳар бир қийматининг абсолют миқдори ε дан катта бўлса, x ўзгарувчи *чексиз катта* дейилади. Бу $x \rightarrow \infty$ кўринишида ёзилади.

Шунинг билан бирга, агар x нинг x_0 дан кейинги барча қийматлари ўз белгиларини сақласа, у ҳолда $x \rightarrow +\infty$ (ёки $x \rightarrow -\infty$) деб ёзилади.

Чексиз катта ўзгарувчига тесқари миқдор чексиз кичик миқдор ва аксинча (чексиз кичик ўзгарувчига тесқари миқдор чексиз катта миқдор) бўлади.

4°. Ўзгарувчининг лимити. Агар ўзгармас a ва ўзгарувчи x орасидаги айирма чексиз кичик миқдор, яъни агар $x = a + \alpha$ бўлса, ўзгармас a ўзгарувчи x нинг *лимити* дейилади, $\lim x = a$, ва аксинча.

Агар a ўзгарувчи x нинг лимити бўлса, у ҳолда ўзгарувчи x ўзгармас a га *интилади* деб ҳам айтадилар ва $x \rightarrow a$ ёки $x \rightarrow a - 0$ (агар x ҳар доим a дан *чапда* қолса) ёки $a \rightarrow a + 0$ (агар x ҳар доим a дан *ўнгда* қолса) кўринишида ёзадилар.

($a - \varepsilon$, $a + \varepsilon$) оралиқ a соннинг *атрофи* дейилади. Агар ҳар қандай мусбат ε сон учун шундай x қиймат топиш мумкин бўлсаки, x нинг ундан кейинги барча қийматлари a сонининг *атрофи*га жойлашса, x ўзгарувчи a га *интилади* дейиш мумкин (25-чизма).



25- чизма.

Агар $x \rightarrow +\infty$ (ёки $x \rightarrow -\infty$) бўлса, у ҳолда ўзгарувчи x нинг лимити $+\infty$ га (ёки $-\infty$ га) тенг дейдилар ва

$$\lim x = +\infty \text{ (ёки } \lim x = -\infty \text{)}$$

деб ёзадилар.

5°. Функциянинг лимити. Агар x нинг a га тенг бўлмасдан унга яқинлишидан ҳар доим $f(x)$ нинг b га *интилиши келиб чиқса*, b сон $f(x)$ функциянинг x нинг a га *интилгандаги лимити* дейилади. Буни $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ кўринишида ёзадилар.

Юқорида келтирилган таъриф, a ёки b ларни $+\infty$ ёки $-\infty$ символлар билан алмаштирилгандаги қуйидаги махсус ҳолларни ҳам ўз ичига олади:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ ва ҳоказо.}$$

$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$ ни (ёки $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$ ни) $f(x)$ функциянинг x нинг a га *чапдан* (ёки *ўнгда*) *интилгандаги лимити* деймиз.

702. $n = 0, 1, 2, \dots$ деб

$$\alpha = \frac{1}{2^n}, \alpha = -\frac{1}{2^n}, \alpha = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

ўзгарувчилар қийматларининг кетма-кетлиги ёзилсин ва уларнинг ўзгариши график усулда тасвирлансин. n нинг қайси қийматларидан бошлаб ўзгарувчилардан ҳар қайсисининг модули 0,001 дан, берилган мусбат ε дан кичик бўлади ва шундай бўлиб қола беради?

703. $x = 1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}$ ўзгарувчи қийматларининг кетма-кетлиги ёзилсин ва унинг ўзгариши график усулда тасвирлансин. n нинг қайси қийматидан бошлаб $x - 1$ нинг модули 0,01 дан, берилган мусбат ε дан кичик бўлади ва шундай бўлиб қола беради?

704. 3 га олдин 1 ни, сўнгра 0,1 ни, ундан сўнг 0,01 ни ва ҳоказо қўшиб (ёки айириб) ўзгарувчи x нинг $x \rightarrow 3 + 0$ ёки $x \rightarrow 3 - 0$ лимитларга яқинлашиши «ўнли» кетма-кетликлар билан ёзилсин.

705. «Ўнли» кетма-кетликлар билан ўзгарувчиларнинг $x \rightarrow 5 + 0$, $x \rightarrow 5 - 0$, $x \rightarrow -2 + 0$, $x \rightarrow -2 - 0$, $x \rightarrow 1 + 0$, $x \rightarrow 1 - 0$, $x \rightarrow 1,2 + 0$, $x \rightarrow 1,2 - 0$ лимитларга яқинлашишлари ёзилсин.

706. $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ экани кўрсатилсин. x ва x^2 қийматларининг жадваллари билан тушунтирилсин.

Қўрсатма. $x = 2 + \alpha$ деб, бунда α чексиз кичик, $x^2 - 4$ айрма тузилсин ва унинг чексиз кичикка тенглиги исбот қилинсин.

707. $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5$ экани исбот қилинсин. Берилган $\varepsilon > 0$ сон бўйича шундай энг катта $\delta > 0$ топилсинки, 3 соннинг δ атрофидаги ҳар қандай x учун $(2x - 1)$ функциянинг қиймати 5 соннинг ε атрофида бўлсин. График усулда тушунтирилсин.

708. $\lim_{x \rightarrow -1} (3 - 2x - x^2) = 4$ экани исбот қилинсин. Функциянинг қиймати ўз лимитидан $\varepsilon = 0,0001$ дан кичик сонга фарқ қилиши учун x нинг қийматини -1 соннинг қандай энг катта δ атрофидан олиш керак?

709. α чексиз кичик бўлганда, $\sin \alpha$ ҳам чексиз кичик экани исбот қилинсин.

Қўрсатма. Чизма ясалсин ва $|\sin \alpha| < |\alpha|$ экани кўрсатилсин.

710. $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$ экани кўрсатилсин.

Қўрсатма. $x = a + \alpha$ деб, $\sin x - \sin a$ айрма тузилсин.

711. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+4}{x} = 3$ экани исбот қилинсин. $x = 1, 10, 100,$

1000, ... бўлганда x ва $\frac{3x+4}{x}$ ларнинг қийматлари жадваллари билан тушунтирилсин.

Қўрсатма. x чексиз каттага интилганда ($x \rightarrow \infty$) $\frac{3x+4}{x} = 3$ айрма чексиз кичик экани кўрсатилсин.

712. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-3}{2x+1} = 2$ экани исбот қилинсин. x нинг қандай қийматлари учун функция ўз лимитидан 0,001 дан кўра кичик сонга фарқ қилади?

713. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{1-2x^2}{2+4x^2} = -0,5$ экани исбот қилинсин. Қандай x лар учун функциянинг қийматлари ўз лимитидан 0,01 дан кўра кичик сонга фарқ қилади?

714. $\frac{1}{3} = 0,3; \frac{1}{3} = 0,33; \frac{1}{3} = 0,333, \dots, \frac{1}{3} = \underbrace{0,333\dots3}_{n \text{ рақам}}$ айырмаларни тузиб, $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{0,333\dots3}_{n \text{ рақам}} = \frac{1}{3}$ экани исбот қилинсин.

715. 1) $x = \frac{n}{n+1}$; 2) $x = -\frac{n}{n+1}$; 3) $x = \frac{(-1)^n n}{n+1}$;

4) $x = \frac{8 \cos n \frac{\pi}{2}}{n+4}$; 5) $x = \frac{2n + (-1)^n}{n}$;

6) $x = 2^{-n} a \cos n \pi$

ўзгарувчилар қийматларининг кетма-кетликлари ёзилсин ва уларнинг ўзгариши график усулда тасвирлансин. Ҳар бир мисол учун $\lim x$ мавжудми ва у нимага тенг?

716. $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{3}{x-2}$ ва $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{3}{x-2}$ лар топилсин ва жадваллар билан тушунтирилсин.

717. $\lim_{x \rightarrow 0+0} 2^{\frac{1}{x}}$ ва $\lim_{x \rightarrow 0-0} 2^{\frac{1}{x}}$ топилсин ва жадваллар билан тушунтирилсин.

718. Ушбу

1) $\frac{2}{\infty} = 0$; 2) $\frac{2}{0} = \pm \infty$; 3) $3^\infty = \infty$; 4) $3^{-\infty} = 0$;

5) $\lg_{10} 0 = -\infty$; 6) $\lg 90^\circ = \pm \infty$

«шартли» ёзишларнинг аниқ маънолари тушунтирилсин.

719. 1) $x = n\pi$ бўлганда; 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ бўлганда;
 3) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ бўлганда ($n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$) $\sin x$ қийматларининг кетма-кетликларини тузиб, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ мавжуд эмаслиги кўрсатилсин.

720. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ мавжуд эмаслиги кўрсатилсин.

721. Чексиз кичиклар ҳақидаги теоремалардан бирини татбиқ этиб, x қайси усул билан нолга яқинлашса ҳам $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ экани кўрсатилсин.

722. Радиуси R га тенг доирага томонларининг сони n ва томони a_n бўлган мунтазам кўпбурчак ички чизилган. Ҳа доирага ташқи чизилган квадрат ясаб, $n > \frac{8R}{\varepsilon}$ бўлган замон $a_n < \varepsilon$, яъни $a_n \rightarrow 0$ экани кўрсатилсин.

723. r_n — радиуси R га тенг доирага ички чизилган мунтазам n бурчакнинг апофемаси бўлса, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = R$ экани исбот қилинсин.

724. ABC учбурчакнинг B учи AC га параллел BE тўғри чиқиқ бўйича ўнг томонга қараб чексиз узоқлашади. Бу ҳолда учбурчак томонлари, унинг юзи, ички бурчаклари ва BCD ташқи бурчаги қандай ўзгаради?

725. Ўзгарувчиларнинг лимитларига яқинлашишларининг «ўнли» кетма-кетликлари ёзилсин: $x \rightarrow 4 + 0$; $x \rightarrow 4 - 0$; $x \rightarrow -1,5 + 0$; $x \rightarrow -1,5 - 0$.

726. 1) $\lim_{x \rightarrow 3} x^3 = 27$; 2) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 2x) = 3$ экани исбот қилинсин (706-масалага берилган кўрсатмага қаралсин).

727. x чексиз катта бўлганда $\frac{5x+2}{2x} = 2,5$ нинг чексиз кичик эканини кўрсатиб, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+2}{2x} = 2,5$ исбот қилинсин. $x = 1, 10, 100, 1000, \dots$ деб фараз қилиб, жадвал билан тушунтирилсин.

728. $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$ экани исбот қилинсин (709-масалага қаралсин.)

$$729. 1) x = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n; \quad 2) x = (-1)^n + \frac{1}{2^n};$$

$$3) x = (-1)^n (2n + 1); \quad 4) x = \frac{2n \sin \frac{n\pi}{2}}{n+1}$$

ўзгарувчилар қийматларининг кетма-кетликлари ёзилсин ва уларнинг ўзгариши график усулда тасвирлансин. $n \rightarrow +\infty$ да бу ўзгарувчиларнинг қайси бири лимитга эга?

$$730. 1) \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{2^{x-1}}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{2^{x-1}};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} 3^{\lg 2x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+0} 3^{\lg 2x}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{2}{1+2^{\lg x}};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{2}{1+2^{\lg x}}; \quad 7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{1+a^x}$$

лимитлар топилсин.

$$731. \frac{2}{3} \rightarrow 0,6; \quad \frac{2}{3} \rightarrow 0,66; \quad \dots; \quad \frac{2}{3} \rightarrow 0,66 \dots 6 \text{ айрма}$$

ларни тузиб, $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{0,666 \dots 6}_{n \text{ рақам}} = \frac{2}{3}$ экани исбот қилинсин.

732. α_n мунтазам n бурчаклининг ички бурчаги бўлсин. $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \pi$ экани исбот қилинсин.

733. $AB = a$ кесма давомининг ўнг томонидан $BP = x$ масофада P нуқта олинган. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{AP}{BP}$ топилсин.

3- §. Лимитларнинг хоссалари. $\frac{0}{0}$ ва $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликларни очиб

1°. Ўзгармас миқдорнинг limiti ўзига тенг.

Агар $\lim u$ ва $\lim v$ мавжуд бўлса:

2°. $\lim (u + v) = \lim u + \lim v$;

3°. $\lim (uv) = \lim u \cdot \lim v$.

4° Агар $\lim u$ ва $\lim v$ мавжуд ва $\lim v \neq 0$ бўлса, $\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}$.

5°. Агар a нуқтанинг, қандайдир бир атрофидаги x нинг, балки фақат $x = a$ дан бошқа, барча қийматларида $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар бир-бирига тенг бўлса ва улардан бири $x \rightarrow a$ да лимитга эга бўлса, иккинчиси ҳам ўша лимитга эга бўлади.

Бу ҳосса $\frac{0}{0}$ ва $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликларни очишга татбиқ этилади. Масалан, x нинг a дан бошқа барча қийматлари учун $\frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$. 5° ҳоссага кўра: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = 2a$.

Қуйидаги лимитлар топилсин:

$$734. 1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 1}{2x + 1}; 2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 + \sin 2x}{1 - \cos 4x}.$$

$$735. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 1} \text{ жадвал билан тушунтирилсин.}$$

$$736. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 3x + 2}. 737. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 2x - 3}.$$

Қўрсатма. 736- мисолни икки усул: 1) $x = 2 + \alpha$ деб оlib; 2) махражни кўпайтувчиларга ажратиш билан ечилсин.

$$738. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}. 739. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}.$$

$$740. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}. 741. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{ax} - x}{x - a}.$$

$$742. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}. 743. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + mx} - 1}{x}.$$

Қўрсатма. 742- мисолда $x = t^6$, 743- да эса $1 + mx = t^3$ деб олинсин.

$$744. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}.$$

$$745. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}}{\sin 2x}.$$

$$746. 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{3x^2 - 4x}; 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x}{1 - 2x^3}.$$

Қўрсатма. Икки усул: 1) сураат ва махражни x нинг энг катта даражасига бўлиш; 2) $x = \frac{1}{\alpha}$ деб олиш билан ечиш мумкин.

$$747. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 1}{x^2 + 1}. 748. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}.$$

$$749. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 6x}{3x + 1}.$$

$$750. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{1 - 2n}.$$

$$751. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2 + 1}}{2n - 1}.$$

$$752. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{\sqrt{9n^2 + 1}}.$$

Қуйидаги лимитлар топилинсин:

$$753. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x + 6}{x^3 + 8}.$$

$$754. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{\sqrt{3x} - 3}$$

$$755. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}.$$

$$756. \lim_{x \rightarrow \pi+0} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sin x}.$$

$$757. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 4x + 1}.$$

$$758. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 1}{\sqrt{3n^2 + 1}}.$$

$$759. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2}{1 - x^2} + 2^{\frac{1}{x}} \right).$$

$$760. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$$

$$761. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}.$$

$$762. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\cos x - \sin x}.$$

4. §. $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ нисбатнинг $\alpha \rightarrow 0$ даги limiti

Агар α бурчак радиан ўлчови билан берилган бўлса, у ҳолда

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1; \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1.$$

Қуйидаги лимитлар топилинсин:

$$763. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}.$$

$$764. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{3}}{x}.$$

Қўрашма. 763- мисолда касрнинг сурат ва махражи 4 га кўпайтирилсин (ёки $4x = \alpha$ деб олинсин).

$$765. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

$$766. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}.$$

$$767. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$$

$$768. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}.$$

$$769. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{h}.$$

$$770. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arc} \sin(1-2x)}{4x^2 - 1}.$$

Қўрсатма. 1) мисолда $\arcsin x = \alpha$, 2) мисолда эса $\arcsin (1-2x) = \alpha$ деб олиш керак.

$$771. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}. \quad 772. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x - \sin x}{x^2}.$$

Қуйидаги лимитлар топилсин.

$$\begin{aligned} 773. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x}. \quad 774. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}. \\ 775. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}. \quad 776. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{\sec x - 1}. \\ 777. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos mx}{x^2}. \quad 778. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin x}. \\ 779. \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{\sin(x-2)}{x^2-4} + 2^{-\frac{1}{(x-2)^2}} \right] (x = 2 + \alpha \text{ деб олинсин}). \\ 780. 1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x-h)}{h}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}. \\ 781. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x}. \end{aligned}$$

5-§. $\infty - \infty$ ва $0 \cdot \infty$ кўринишдаги аниқмасликлар

Қуйидаги лимитлар топилсин:

$$\begin{aligned} 782. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x} - x). \\ 783. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right). \\ 784. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x}). \\ 785. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^2-8} \right). \quad 786. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \right). \\ 787. \lim_{n \rightarrow 0} \left[\frac{1+3+\dots+(2n-1)}{n+3} - n \right]. \\ 788. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x \quad (x = 1 - \alpha \text{ деб олинсин}). \\ 789. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-4x}). \end{aligned}$$

$$790. \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} + \frac{4}{x^2-4} \right).$$

Қуйидаги лимитлар топилин:

$$791. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - x + 1}).$$

$$792. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - a^2}). \quad 793. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x \right).$$

$$794. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+3+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right).$$

$$795. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{tg} x \left(x = \frac{\pi}{2} + \alpha \text{ деб олинсин} \right).$$

6- §. Лимитларни ҳисоблашга доир аралаш мисоллар

Қуйидаги лимитлар топилин:

$$796. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 x}.$$

$$797. 1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}.$$

$$798. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 - ax}).$$

$$799. 1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1-2x}{\sqrt[3]{1+8x^3}} + 2^{-x^3} \right); \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{1-5x}.$$

$$800. 1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{(\sin x+1)}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+x-2}{x^2+2x}.$$

$$801. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sqrt{1+x}-1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos \frac{x}{2}}{x-\pi}.$$

$$802. 1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-10^n}{1+10^{n+1}}.$$

$$803. 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{3x^4}{1-2x^4} - 2\frac{1}{x} \right]; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-10^n}{2+10^{n+1}}.$$

$$804. 1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{\pi}-\sqrt{2x}}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \cos \frac{\pi(x+1)}{\sqrt[3]{x}+1}.$$

7- §. Чексиз кичикларни таққослаш

1°. Таърифлар. $x \rightarrow a$ да $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ функциялар чексиз кичик бўлсин. У вақтда:

I. Агар $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta}{\alpha} = 0$ бўлса, β α га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик дейилади.

II. Агар $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta}{\alpha^n} = A$ (чекли ва 0 дан фарқли) бўлса, β α га нисбатан n - тартибли чексиз кичик дейилади.

III. Агар $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta}{\alpha} = 1$ бўлса, β ва α эквивалент чексиз кичиклар

дейилади. Эквивалентлик $\beta \approx \alpha$ кўринишда ёзилади.

2°. Эквивалент чексиз кичикларнинг хоссалари:
а) Эквивалент чексиз кичикларнинг айирмаси уларнинг ҳар бирига нисбатан ҳам юқори тартибли чексиз кичик бўлади.

б) Агар бир нечта ҳар хил тартибли чексиз кичиклар йиғиндисидан юқори тартиблилари чиқариб ташланса, у ҳолда қолган қисми бош қисм дейилади ва у умумий йиғиндига эквивалент бўлади.

Биринчи хоссадан, эквивалент чексиз кичиклардан бири, исталганча кичик нисбий хато билан иккинчисига тенг бўлиши мумкин эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун $\approx$ белгиси ҳам, чексиз кичикларнинг эквивалентликларини белгилаш учун ҳам уларнинг етарли кичик қийматларининг тақрибий тенглигини белгилаш учун ишлатамиз.

805. Чексиз кичик x га нисбатан: 1) $1 - \cos x$; 2) $\operatorname{tg} x - \sin x$ чексиз кичикларнинг тартиблари аниқлансин.

x бурчак икки барабар камайганда $1 - \cos x$ миқдор тахминан тўрт марта, $\operatorname{tg} x - \sin x$ миқдор эса тахминан саккиз марта камайиши чизмада кўрсатилсин.

806. Чексиз кичик x га нисбатан:

1) $2 \sin^4 x - x^5$; 2) $\sqrt{\sin^2 x + x^4}$; 3) $\sqrt{1 + x^3} - 1$ чексиз кичикларнинг тартиблари аниқлансин.

807. Доира сегменти «ўқининг» сегментнинг чексиз кичик ёйига нисбатан кичиклик тартиби аниқлансин.

808. x нолга интилганда ($x \rightarrow 0$):

1) $\sin mx \approx mx$, 2) $\operatorname{tg} mx \approx mx$; 3) $\sqrt[3]{1+x} - 1 \approx \frac{1}{3} x$ эканлиги исбот қилинсин.

809. Жисмнинг ҳажмий кенгайиш коэффициентини узунлик кенгайиш коэффициентининг учланганига тахминан тенг деб олинади. Бу қандай чексиз кичикларнинг эквивалентлигига асосланган?

810. Агар $\alpha \approx \alpha_1$, $\beta \approx \beta_1$ ва $\lim \frac{\beta}{\alpha}$ ёки $\lim \frac{\beta_1}{\alpha_1}$ лимитлардан бири мавжуд бўлса, $\lim \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \lim \frac{\beta}{\alpha}$ бўлади, деган теоремага асосланиб,

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax + x^2}{\operatorname{tg} bx}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \sin^2 x}{\sin 2x - x^2}$ лимитлар топилин.

811. Сув томчиси буғланганда (парга айланганда) унинг радиуси нолга интилади. Радиусга нисбатан сув томчиси сиртининг ва ҳажмининг чексиз кичиклик тартиби аниқлансин.

812. Чексиз кичик x га нисбатан:

1) $\sqrt{1+x^2} - 1$; 2) $\sin 2x - 2 \sin x$; 3) $1 - 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ чексиз кичикларнинг тартиблари аниқлансин.

813. x нолга интилганда ($x \rightarrow 0$); 1) $\operatorname{arctg} mx \approx mx$;

2) $\sqrt{1+x} - 1 \approx \frac{1}{2} x$; 3) $1 - \cos^3 x \approx 1,5 \sin^2 x$ экани исбот қилинсин.

8- §. Функциянинг узлуксизлиги

1°. Таъриф. Агар $f(x)$ функция a нинг бирор атрофида аниқланган ва

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

бўлса, у $x = a$ бўлганда *узлуксиз дейилади*. Бу таъриф қуйидаги тўртта узлуксизлик шартини ўз ичига олади:

1) $f(x)$ функция a нинг қандайдир атрофида аниқланган бўлиши керак;

2) чекли $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ ва $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ лимитлар мавжуд бўлиши керак;

3) бу (чап ва ўнг) лимитлар бир хил бўлиши керак;

4) бу лимитлар $f(a)$ га тенг бўлиши керак.

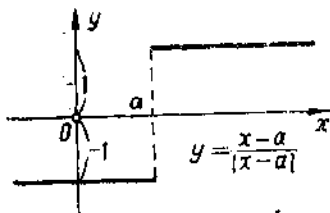
Агар функция $[x_1, x_2]$ сегментнинг ҳар бир ички нуқтасида узлуксиз бўлса ва унинг чегараларида эса $\lim_{x \rightarrow x_1+0} f(x) = f(x_1)$ ва $\lim_{x \rightarrow x_2-0} f(x) = f(x_2)$ бўлса, у *шу сегментда узлуксиз дейилади*.

2°. Функциянинг узилышлари. Агар функция a дан ўнгга ва чапга аниқланган бўлса, аммо a нуқтада узлуксизликнинг тўртта шартидан ақалли биттаси бажарилмаса, $f(x)$ функция $x = a$ бўлганда *узилишга эга бўлади*. Узилишларни икки асосий турга ажратадилар.

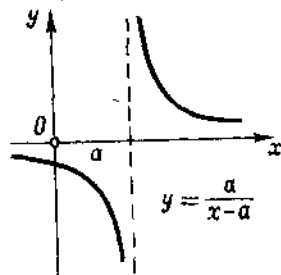
1) *Биринчи тур узилиш*—чекли $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ ва $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ лимитлар мавжуд, яъни узлуксизлик шартларидан иккинчиси бажарилади ва қолгандари (ёки улардан ақалли биттаси) бажарилмайди.

Масалан, $x < a$ бўлганда -1 га тенг, $x > a$ бўлганда $+1$ га тенг бўлган $y = \frac{x-a}{|x-a|}$ функция $x = a$ да биринчи тур узилишга эга (26-чизма), чунки $\lim_{x \rightarrow a-0} y = -1$ ва $\lim_{x \rightarrow a+0} y = +1$ лимитлар мавжуд, аммо бу лимитлар ўзаро тенг эмас.

2) *Иккинчи тур узилиш* — $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ўнгдан ёки чапдан $\pm \infty$ га тенг. Масалан, $y = f(x) = \frac{a}{x-a}$ функция (27-чизма) $x = a$ бўлганда иккинчи тур узилишга эга. $x = a$ бўлганда махражи 0 (ноль) га тенг



26- чизма.



27- чизма.

бўлиб, сурати 0 (ноль) га тенг бўлмаган барча каср функциялар $x=a$ бўлганда иккинчи тур узилишга эга бўлади. $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ функция (819-масала, 42-чизма) ҳам $x=0$ бўлганда иккинчи тур узилишга эга, чунки $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 0$, лекин $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$.

814. $y = \frac{4}{x-2}$ функциянинг узилиш нуқтаси кўрсатилсин, $\lim_{x \rightarrow -2-0} y$; $\lim_{x \rightarrow -2+0} y$; $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} y$ лар топилсин ва $x = -2, 0, 1, 3, 4$ ва 6 нуқталар бўйича эгри чизиқ ясалсин.

815. 1) $y = \frac{6}{x}$; 2) $y = \lg x$; 3) $y = \frac{4}{4-x^2}$ функцияларнинг узилиш нуқталари топилсин ва графиклари ясалсин.

816. $y = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \neq 2 \text{ бўлганда,} \\ 0, & x = 2 \text{ бўлганда} \end{cases}$

функциянинг графиги ясалсин ва унинг узилиш нуқтаси кўрсатилсин. Нуқтада узлуксизликнинг тўртта шартидан қайсилари бажарилади ва қайсилари бажарилмайди?

817. 1) $y = \frac{x+1}{|x+1|}$ ва 2) $y = x + \frac{x+1}{|x+1|}$ функцияларнинг графиклари ясалсин. Бу функцияларнинг узилиш нуқталарида узлуксизлик шартларидан қайсилари бажарилади ва қайсилари бажарилмайди?

818.

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 2, & x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг графиги ясалсин ва унинг узилиш нуқтаси кўрсатилсин. Унда узлуксизлик шартларидан қайсилари бажарилади ва қайсилари бажарилмайди?

819. $y = 2^{\frac{1}{x}}$ функциянинг узилиш нуқтаси кўрсатилсин, $\lim_{x \rightarrow -0} y$, $\lim_{x \rightarrow +0} y$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$ лар топилсин ва функциянинг графиги ясалсин. Узилиш нуқтасида узлуксизлик шартларидан қайсилари бажарилади ва қайсилари бажарилмайди?

820.

$$y = f(x) = \begin{cases} 0,5x^2, & |x| < 2 \text{ бўлганда,} \\ 2,5, & |x| = 2 \text{ бўлганда,} \\ 3, & |x| > 2 \text{ бўлганда} \end{cases}$$

функциянинг графиги ясалсин ва унинг узилиш нуқталари кўрсатилсин.

821.

$$1) y = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}; \quad 2) y = \arctg \frac{a}{x-a}; \quad 3) y = \frac{x^3 - x^2}{2|x-1|}$$

функцияларнинг узилиш нуқталари топилсин ва графиклари ясалсин.

822. $x^2 - y^2 = 0$ тенглама билан неча бир қийматли функция берилган? Улардан $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ бўлганда чекли (1 тур) узилишга эга: 1) жуфт функция; 2) тоқ функциялар аниқлансин ва уларнинг графиклари ясалсин.

823. $y = \frac{x}{x+2}$ функциянинг узилиш нуқтаси кўрсатилсин, $\lim_{x \rightarrow -2-0} y$, $\lim_{x \rightarrow -2+0} y$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$ лар топилсин ва $x = -6, -4, -3, -1, 0, 2$ нуқталар бўйича графиги ясалсин.

824.

$$y = f(x) = \begin{cases} 2, & x = 0 \text{ ва } x = \pm 2 \text{ бўлса,} \\ 4 - x^2, & 0 < |x| < 2 \text{ бўлса,} \\ 4, & |x| > 2 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг графиги ясалсин ва ўзилиш нуқталари кўрсатилсин. Ўзилиш нуқталарида узлуксизлик шартларидан қайсилари бажарилади ва қайсилари бажарилмайди?

825.

$$1) y = 2 - \frac{|x|}{x}; \quad 2) y = 2^{\frac{1}{x-2}}; \quad 3) y = 1 - 2^{\frac{1}{x}};$$

$$4) y = \frac{x^3 + x}{2|x|}; \quad 5) y = \frac{4 - x^2}{|4x - x^3|}$$

функцияларнинг ўзилиш нуқталари топилсин ва графиклари ясалсин.

826. $x^3 + y^2 = 4$ тенглама билан нечта бир қийматли функциялар берилган? Улардан: 1) $|x| \leq 2$ сегментда узлуксиз бўлган иккитаси; 2) $|x| \leq 1$ сегментда манфий бўлиб, x нинг қабул қилиши мумкин бўлган бошқа қийматларида мусбат бўлгани аниқлансин. Охириги функциянинг графиги ясалсин ва ўзилишлари кўрсатилсин.

9- §. Асимптоталар

Эгри чизиқнинг асимптотаси деб шундай тўғри чизиққа, айтиладикки, эгри чизиқнинг нуқтаси, эгри чизиқ бўйича чексиз узоқлашганда, у тўғри чизиққа чексиз яқинлашиб боради.

1. Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$ бўлса, у ҳолда $x = a$ тўғри чизиқ, $y = f(x)$ эгри чизиқнинг асимптотаси бўлади. Масалан, $y = \frac{a}{x-a}$ эгри чизиқ $x = a$ асимптотага эга (27- чизма).

II. Агар $y = f(x)$ эгри чизиқ тенгламасининг ўнг томонида чизиқли қисмини шундай ажратиш мумкин бўлсакки, яъни $y = f(x) = kx + b + \alpha(x)$, $x \rightarrow \pm \infty$ да қолган қисми $\alpha(x) \rightarrow 0$, у ҳолда $y = kx + b$ тўғри чизиқ эгри чизиқнинг асимптотаси бўлади. Мисоллар: 1) $y = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2} =$

$= x + 1 + \frac{1}{x^2}$ эгри чизиқ $y = x + 1$ асимптотага эга ($x = 0$ ҳам асимптота бўлади). 2) $y = \frac{a}{x-a} = 0 + \frac{a}{x-a}$ эгри чизиқ $y = 0$ (27- чизма) асимптотага эга.

III. Агар чекли $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ ва $\lim_{x \rightarrow +\infty \text{ ёки } -\infty} [f(x) - kx] = b$ лимитлар мавжуд бўлса, у ҳолда $y = kx + b$ тўғри чизиқ асимптота бўлади.

827. $y = 1 - \frac{4}{x^2}$ эгри чизиқнинг асимптоталари аниқлансин ва $x = \pm 1, \pm 2, \pm 4$ нуқталар бўйича эгри чизиқ ясалсин.

828 — 830. мисолларда, касрнинг чизиқли бутун қисмини ажратиб, эгри чизиқларнинг асимптоталари топилсин; асимптоталар ва эгри чизиқлар ясалсин.

$$828. 1) y = \frac{x^2 + 1}{x}; \quad 2) y = \frac{x^2}{x + 1}; \quad 3) y = \frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

$$829. 1) y = \frac{2}{|x|} - 1; \quad 2) y = \frac{x^2 - x - 1}{x}; \quad 3) y = \frac{ax + b}{mx + n}.$$

$$830. 1) y = \frac{1 - 4x}{1 + 2x}; \quad 2) y = \frac{x^3}{x^2 + 1}; \quad 3) y = \frac{4x - x^3}{x^2 + 4}.$$

Қуйидаги эгри чизиқларнинг асимптоталари топилсин ва эгри чизиқлар ясалсин:

$$831. 1) x^2 - y^2 = a^2; \quad 2) x^3 + y^3 = 3axy;$$

$$3) y = x - 2 \operatorname{arctg} x; \quad 4) y = \operatorname{arctg} \frac{x}{a - x}.$$

$$832. 1) y = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}; \quad 2) y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}; \quad 3) y = x - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$833. 1) y = \frac{x^4 + 1}{3x}; \quad 2) y = \frac{x^3 + x^2 - 2}{x + 1} \quad \text{эгри чизиқлар}$$

ва бу эгри чизиқлар асимптотик равишда яқинлашадиган параболалар ясалсин.

834. 1) $y = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2$; 2) $y = -x + \frac{1}{x^2}$ эгри чизиқларнинг асимптоталари топилсин ва $x = \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2$ нуқталар бўйича эгри чизиқлар ясалсин.

$$835. 1) y = \frac{x - 4}{2x + 4}; \quad 2) y = \frac{x^2}{2 - 2x}; \quad 3) y = \frac{x^2}{x^2 - 4};$$

4) $y = \frac{x^3}{1 - x^2}$ эгри чизиқларнинг асимптоталари топилсин ва эгри чизиқлар ясалсин.

10- §. e сони

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{a \rightarrow 0} (1 + a)^{\frac{1}{a}} = e \text{ лимит } e \text{ сони}$$

дейлади. Бу сон иррационал бўлиб, тахминан $e = 2,71828 \dots$. Асоси e га тенг логарифмлар *натурал* логарифмлар дейлади ва $\log_e x = \ln x$ кўринишда белгиланади.

Ули логарифм: $\lg_{10} x = M \ln x$, бунда $M = 0,43429 \dots$

Қуйидаги лимитлар топилсин:

$$836. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{n}\right)^n \left(-\frac{5}{n} = \alpha \text{ деб олинсин}\right).$$

$$837. 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{n+3}.$$

$$838. 1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{\frac{1-x}{x}}.$$

$$839. 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}.$$

$$840. 1) \lim_{x \rightarrow \infty} n [\ln(n+3) - \ln n]; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \lg^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

$$841. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x} (\sin^2 x = \alpha \text{ деб олинсин}).$$

$$842. 1) \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\ln(1+a)}{a}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}-1}{x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{2x}-1}{x}.$$

Қўрсатма. 2) мисолда $e^{-x} - 1 = \alpha$ деб олинсин.

843. $6(1 - 1,01^{-100})$ ифодани ўртага олувчи кетма-кет иккита бутун сон топилсин.

Қуйидаги лимитлар топилсин:

$$844. 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-3}{n}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

$$845. 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x}-1}{x}.$$

$$846. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x} (\cos^2 2x = \alpha \text{ деб олинсин}).$$

$$847. 1) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+xt)}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} n [\ln n - \ln(n+2)].$$

VI БОБ

ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛ

1- §. Алгебраик ва тригонометрик функцияларнинг ҳосилалари

1°. Таъриф. $y = f(x)$ функциянинг x нуқтадаги ҳосиласи деб

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1)$$

лимитга айтилади.

Агар бу лимит чекли бўлса, у ҳолда $y = f(x)$ функция x нуқтада дифференциалланувчи дейилади; бунда $y = f(x)$ функция шу нуқтада албатта узлуксиз ҳам бўлади.

Агар (1) лимит $+\infty$ (ёки $-\infty$) га тенг ва, ундан ташқари, шу нуқтада $f(x)$ функция узлуксиз бўлса, у ҳолда функция x нуқтада чексиз ҳосиллага эга деймиз.

Ҳосила y' , ёки $f'(x)$, ёки $\frac{dy}{dx}$, ёки $\frac{df(x)}{dx}$ орқали белгиланади.

осилани топиш функцияни дифференциаллаш дейилади.

2°. Дифференциаллашнинг асосий формулалари:

1) $(c)' = 0$; 2) $(x^n)' = nx^{n-1}$; 3) $(cu)' = cu'$;

4) $(u+v)' = u' + v'$; 5) $(uv)' = u'v + uv'$;

6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$; 7) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

8) $(\sin x)' = \cos x$; 9) $(\cos x)' = -\sin x$;

10) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; 11) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

848. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ни ҳисоблаб, қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

1) $y = x^3$; 2) $y = x^4$; 3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = \sin x$; 5) $y = \frac{1}{x}$;

6) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; 7) $y = \frac{1}{x^2}$; 8) $y = \operatorname{tg} x$; 9) $y = \frac{1}{x^3}$;

$$10) y = \sqrt{1+2x}; \quad 11) y = \frac{1}{3x+2}; \quad 12) y = \sqrt{1+x^2}.$$

Формуларга асосан қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

$$849. \quad 1) y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5; \quad 2) y = \frac{bx+c}{a}.$$

$$850. \quad 1) y = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x; \quad 2) y = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2.$$

$$851. \quad 1) y = x + 2\sqrt{x}; \quad 2) y = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2.$$

$$852. \quad 1) y = \frac{10}{x^3}; \quad 2) y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}.$$

$$853. \quad 1) y = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}; \quad 2) y = 3x - 6\sqrt{x}.$$

$$854. \quad 1) y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}; \quad 2) y = \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2.$$

$$855. \quad 1) y = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3}; \quad 2) y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$856. \quad 1) y = x - \sin x; \quad 2) y = x - \operatorname{tg} x.$$

$$857. \quad 1) y = x^2 \cos x; \quad 2) y = y^2 \operatorname{ctg} x.$$

$$858. \quad 1) y = \frac{\cos x}{x^2}; \quad 2) y = \frac{x^2}{x^2+1}.$$

$$859. \quad 1) y = \frac{x}{1-4x}; \quad 2) y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}.$$

$$860. \quad 1) f(x) = \frac{\cos x}{1-\sin x}; \quad 2) \varphi(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}.$$

$$861. \quad 1) s = \frac{gt^2}{2}; \quad 2) x = x(t - \sin t).$$

$$862. \quad f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x; \quad f'(0), f'(1), f'(-1) \text{ лар ҳисоблансин.}$$

$$863. \quad f(x) = x^2 - \frac{1}{2x^2}; \quad f'(2) - f'(-2) \text{ ҳисоблансин.}$$

$$864. \quad f(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}; \quad 0,01 \cdot f'(0,01) \text{ ҳисоблансин.}$$

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

$$865. \quad 1) y = (a - bx^2)^3; \quad 2) y = (1 + \sqrt[3]{x})^2.$$

$$866. \quad 1) y = \frac{1}{10x^5} - \frac{1}{4x^4}; \quad 2) y = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

867. 1) $y = x + \sin x$; 2) $y = x + \operatorname{ctg} x$.
 868. 1) $y = x^2 \sin x$; 2) $y = x^2 \operatorname{tg} x$.
 869. 1) $y = \sqrt{x} \cos x$; 2) $s = \frac{t}{2} - \frac{2}{t}$.
 870. 1) $y = x - \frac{2}{x} - \frac{1}{3x^3}$; 2) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.
 871. 1) $y = \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3$; 2) $y' = \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x}$.
 872. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$; $f'(-8)$ топилсин.
 873. $f(x) = \frac{x}{2x-1}$; $f'(0)$, $f'(2)$ ва $f'(-2)$ топилсин.

2- §. Мураккаб функциянинг ҳосиласи

Агар $y = f(u)$ ва $u = \varphi(x)$ бўлса, у ҳолда y функциянинг функцияси ёки x нинг мураккаб функцияси дейилади. У вақтда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ ёки } y' = f'(u) \cdot u'. \quad (1)$$

Утган параграфдаги формулалар қуйидаги умумий кўринишга эга бўлади:

- 1) $(u^n)' = nu^{n-1}u'$; 2) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$; 3) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
 4) $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$; 5) $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$; 6) $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$.

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

874. 1) $y = \sin 6x$; 2) $y = \cos(a - bx)$.
 875. 1) $y = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$; 2) $y = 6 \cos \frac{x}{3}$.
 876. 1) $y = (1 - 5x)^4$; 2) $y = \sqrt[3]{(4 + 3x)^2}$.
 877. 1) $y = \frac{1}{(1-x^2)^5}$; 2) $y = \sqrt{1-x^2}$; 3) $y = \sqrt{\cos 4x}$.
 878. $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$. 879. $y = \sin^4 x = (\sin x)^4$.
 880. 1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = \cos^2 x$; 3) $y = \sec^2 x$.
 881. $y = \sin^3 x + \cos^3 x$. 882. $y = \operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x + 3x$.
 883. $y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}$. 884. $y = \sin \sqrt{x}$.
 885. $y = \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}$.
 886. $y = \frac{1}{(1 + \cos 4x)^5}$. 887. $y = \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{3}$.
 888. $y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$. 889. $y = x\sqrt{x^2 - 1}$.

$$890. y = \frac{\sqrt{2x-1}}{x}.$$

$$891. s = a \cos^2 \frac{t}{a}.$$

$$892. 1) r = a \sqrt{\cos 2\varphi}; 2) r = \sqrt{2\varphi + \cos^2(2\varphi + \frac{\pi}{4})}.$$

$$893. f(t) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos t}; f'(\pi), f'(\frac{3\pi}{2}), f'(\frac{\pi}{2}) \text{ лар ҳисоблансин.}$$

$$894. f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x}}; f'(1) \text{ топилсин.}$$

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

$$895. y = \sqrt{4x + \sin 4x}. 896. y = x^2 \sqrt{1-x^2}.$$

$$897. y = \sin^4 x + \cos^4 x. 898. y = \sqrt[3]{1 + \cos 6x}.$$

$$899. 1) y = \operatorname{tg} x + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x; 2) y = \sin^2 x^3.$$

$$900. y = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}. 901. s = \sqrt{\frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2}}.$$

$$902. r = \cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}). 903. y = \frac{\sqrt{4x+1}}{x^2}.$$

$$904. f(t) = \sqrt{1 + \cos^2 t^2}; f'(\frac{\sqrt{\pi}}{2}) \text{ топилсин.}$$

3- §. Текис эгри чизиққа ўтказилган уринма ва нормал

$y=f(x)$ эгри чизиқнинг $(x_0; y_0)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини $f(x)$ функция ҳосиласининг $(x_0; y_0)$ нуқтадаги қийматига тенг.

$$k = \operatorname{tg} \varphi = f'(x_0) = [y']_{x=x_0} \quad (1)$$

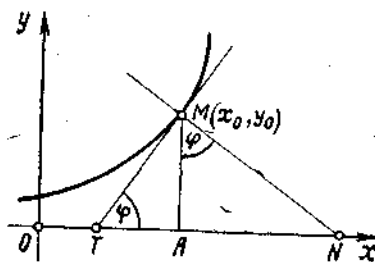
Бу k сон баъзан эгри чизиқнинг $(x_0; y_0)$ нуқтадаги оғмалиги ҳам дейилади. Эгри чизиқнинг $(x_0; y_0)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг (28- чизма) тенгламаси:

$$y - y_0 = k(x - x_0); \quad (2)$$

нормалнинг тенгламаси:

$$y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0), \quad (3)$$

бунда k (1) формула бўйича аниқланади.



28- чизма.

$TA = y_0 \operatorname{ctg} \varphi$, $AN = y_0 \operatorname{tg} \varphi$ кесмалар (28- чизма) мос равишда уринма ости ва нормал ости дейилади, MT ва MN кесмаларнинг узунликлари эса — уринма ва нормал узунликлари дейилади.

905. $y = x^2$ параболанинг $x = \pm 2$ нуқталардаги оғмалиги топилсин.

906. $y = 4 - x^2$ параболага унинг Ox ўқ билан кесишган нуқтасида ($x > 0$ бўлганда) ўтказилган уринма ва нормалнинг тенгламаси ёзилсин ҳамда парабола, уринма ва нормал ясалсин.

907 — 910- масалаларда эгри чизиқларга ўтказилган уринмаларнинг тенгламалари ёзилсин ва эгри чизиқлар ҳамда уринмалар ясалсин.

907. $y = \frac{x^3}{3}$ эгри чизиққа $x = -1$ нуқтада.

908. $y^2 = x^3$ эгри чизиққа $x_1 = 0$ ва $x_2 = 1$ нуқталарда.

909. $y = \frac{8}{4+x^2}$ локонга (зулфга) $x = 2$ нуқтада.

910. $y = \sin x$ синусоидага $x = \pi$ нуқтада.

911. $y = \sin x$ эгри чизиқ Ox ўқ билан қандай бурчак остида кесишади?

912. $2y = x^2$ ва $2y = 8 - x^2$ эгри чизиқлар қандай бурчак остида кесишади?

913. 1) $y = x^2$; 2) $y^2 = x^3$ эгри чизиқларга $x = 1$ нуқтада ўтказилган уринма ости, нормал ости, уринма ва нормалнинг узунликлари топилсин.

914. $y^2 = 2px$ параболанинг уринма ости уриниш нуқта абсциссасининг иккиланганига, нормал ости эса p га тенг экани исбот қилинсин.

915. Агар $y = x^2 + bx + c$ парабола $x = 2$ нуқтада $y = x$ тўғри чизиққа уринса, парабола тенгламасидаги b ва c аниқлансин.

916. $xy = 4$ гиперболога $x_1 = 1$ ва $x_2 = -4$ нуқталарда ўтказилган уринмаларнинг тенгламалари ёзилсин ва уринмалар орасидаги бурчак топилсин. Эгри чизиқ ва уринмалар ясалсин.

Қуйидаги эгри чизиқларга ўтказилган уринмаларнинг тенгламалари ёзилсин ва эгри чизиқ ҳамда уларга ўтказилган уринмалар ясалсин.

917. $y = 4x - x^2$ га Ox ўқ билан кесишган нуқталарида.

918. $y^2 = 4 - x$ га Oy ўқ билан кесишган нуқталарида.

919. $y^2 = (4+x)^3$ га Ox ва Oy ўқлар билан кесишган нуқталарида.

920. $y = x^2 - 4x + 5$ парабола учидан унга Oy ўқ билан кесишган нуқтасида ўтказилган уринмагача бўлган масофа топилин.

921. $y = 0,5$ тўғри чизиқ $y = \cos x$ эгри чизиқни қандай бурчак остида кесади?

922. $y = x^2 + 4x$ параболага қайси нуқтада ўтказилган уринма Ox ўққа параллел бўлади?

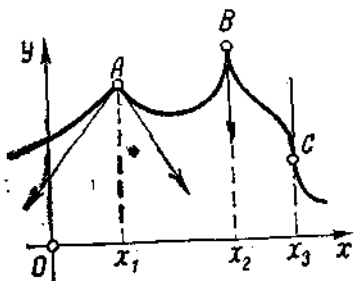
923. $y = x^2 - 2x + 5$ параболага ўтказилган уринма, биринчи координаталар бурчагининг биссектрисасига перпендикуляр бўлиши учун, уринма параболанинг қайси нуқтасида ўтказилиши керак?

924. $y = \frac{2}{1+x^2}$ эгри чизиққа $x = 1$ нуқтада ўтказилган уринма ости, нормал ости, уринма ва нормал узунликлари топилин.

925. $y = \frac{x^2}{4}$ парабола, учларининг абсциссалари 2 ва 4 га тенг ватари билан қандай бурчаклар тузади?

4- §. Дифференциалланмайдиган узлуксиз функциялар

1°. Эгри чизиқнинг синиш нуқтаси. Агар $y = f(x)$ эгри чизиқнинг $A(x_1; y_1)$ нуқтасида (29- чизма) y' ҳосила мавжуд бўлмасдан, ҳар хил чап $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k_1$ ва ўнг $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k_2$ ҳосилалар мавжуд бўл-



29- чизма.

са, бу нуқта синиш нуқтаси дейилади. Синиш нуқтасидан k_1 ва k_2 бурчак коэффициентларига эга иккита уринма нурлар чиқади.

2°. Вертикал уринмали қайтиш нуқтаси. Агар $B(x_2; y_2)$ нуқтада (29- чизма) y' ҳосила мавжуд бўлмасдан, лекин ҳар хил ишорали чексиз $(+\infty$ ва $-\infty)$ чап ва ўнг ҳосилалар мавжуд бўлса, бу нуқта вертикал уринмали қайтиш нуқтаси дейилади. Бундай нуқта бурчак нуқтасининг хусусий ҳоли бўлади. Ундан битта уринма нур ёки устма-уст тушган иккита уринма нурлар чиқади деб ҳисоблаш мумкин.

3°. Вертикал уринмали букилиш нуқтаси. Агар $C(x_3; y_3)$ нуқтада (29- чизма)

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty \text{ (ёки } -\infty)$$

ҳосила мавжуд бўлса, бу нуқта *вертикал уринмали букилиш нуқтаси* дейилади. Бундай нуқтада вертикал уринма мавжуддир.

А ва В нуқталарда $y = f(x)$ функция ҳосилага эга эмас; С нуқтада эса чексизга тенг бўлган ҳосилага эга. Бу уч нуқтанинг ҳар бирида функция узлуксиз, аммо *дифференциалланмайди*.

926. $y = \sqrt{x^2}$ (ёки $y = |x|$) функция графиги ясалсин ҳамда графикнинг синиш нуқтасида чап y' ва ўнг y' ҳосилалар топилсин.

927. $[0; 4]$ кесмада $y = 0,5\sqrt{(x-2)^2}$ функциянинг графиги ясалсин ҳамда графикнинг синиш нуқтасида чап y' ва ўнг y' ҳосилалар топилсин.

928. $[-\pi, \pi]$ сегментда $y = \sqrt{\sin^2 x}$ функциянинг графиги ясалсин ва эгри чизиққа синиш нуқтасида ўтказилган уринмаларнинг тенгламалари ёзилсин.

929. $[0; 2\pi]$ сегментда $y = \sqrt{1 + \cos x}$ функциянинг графиги ясалсин ҳамда унга синиш нуқтасида ўтказилган уринмаларнинг тенгламалари ёзилсин ва улар орасидаги бурчак топилсин.

930. $[-2; 2]$ сегментда $y = \sqrt[3]{x^2}$ функциянинг графиги ясалсин ва $x = 0$ нуқтадаги уринманинг тенгламаси ёзилсин.

931. $[0; 4]$ сегментда $y = 1 - \sqrt[3]{(x-2)^2}$ функциянинг графиги ясалсин ва $x = 2$ нуқтада унга ўтказилган уринманинг тенгламаси ёзилсин.

932. $[-2; 2]$ сегментда $y^3 = 4x$ функциянинг графиги ясалсин ва $x = 0$ нуқтада унга ўтказилган уринманинг тенгламаси ёзилсин.

933. $[0; 4]$ сегментда $y^3 = 4(2-x)$ функциянинг графиги ясалсин ва $x = 2$ нуқтада унга ўтказилган уринманинг тенгламаси ёзилсин.

934. $[0; \pi]$ сегментда $y = 1 - \sqrt{\cos^2 x}$ функциянинг графиги ясалсин ва унга синиш нуқтасида ўтказилган уринмаларнинг тенгламалари ёзилсин.

935. $[-2; 0]$ сегментда $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - 1$ функциянинг графиги ясалсин ва эгри чизиққа $x = -1$ нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламаси ёзилсин.

936. $[-1; 5]$ сегментда $y = [4x - x^2]$ функциянинг графиги ясалсин ва унга $x = 0$ синиш нуқтасида ўтказилган уринмаларнинг тенгламалари ёзилсин ҳамда улар орасидаги бурчак топилсин.

5-§. Кўрсаткичли ва логарифмик функцияларнинг ҳосилалари

Асосий формулалар:

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}; (e^u)' = e^u \cdot u'; (a^u)' = a^u \ln a \cdot u'.$$

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

937. 1) $y = x \ln x$; 2) $y = \frac{1 + \ln x}{x}$; $y = \lg(5x)$.

938. 1) $y = \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2}$; 2) $y = \ln(x^2 + 2x)$.

939. 1) $y = \ln(1 + \cos x)$; 2) $y = \ln \sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x$.

940. $y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$.

941. $y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$. 942. $y = \ln \frac{x^2}{1 - x^2}$.

943. $y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$. 944. $y = \ln \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$.

945. $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$.

946. $y = 2\sqrt{x} - 4 \ln(2 + \sqrt{x})$.

947. 1) $y = \frac{\cos x}{\sin^3 x} + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; 2) $y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}}$.

948. $y = \ln x$ эгри чизиққа унинг Ox ўқ билан кесишган нуқтасида ўтказилган уринма тенгламаси ёзилсин. Эгри чизиқ ва уринма ясалсин.

949. $y = \frac{x^2}{2e}$ параболанинг $y = \ln x$ эгри чизиққа уриниши кўрсатилсин ва унинг уриниш нуқтасини топилсин. Эгри чизиқлар ясалсин.

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

950. 1) $y = x^2 + 3^x$; 2) $y = x^2 \cdot 2^x$; 3) $y = x^2 e^x$.

951. 1) $y = a^{\sin x}$; 2) $y = e^{-x^2}$; 3) $y = x^2 e^{-2x}$.

952. $y = 2(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})$. 953. $y = \sqrt{x} e^{\sqrt{x}}$.

954. $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$. 955. $y = e^{\frac{x}{a}} \cos \frac{x}{a}$.

$$956. y = e^{-x} (\sin x + \cos x); \quad 2) y = \ln(e^{-x} + xe^{-x}).$$

$$957. y = \ln \frac{e^x}{x^2 + 1}. \quad 958. y = (e^{ax} - e^{-ax})^2.$$

$$959. f(t) = \ln(1 + a^{-2}t); \quad f'(0) \text{ топилин.}$$

960. $y = e^{2x}$ эгри чизик Oy ўқни қандай бурчак остида кесади?

961. $y = e^{\frac{x}{a}}$ эгри чизикнинг исталган нуқтасидаги уринма ости узунлиги a га тенг экани исбот қилинсин.

962. Аввал логарифмлаб: 1) $y = x^x$; 2) $y = x^{\sin x}$ функцияларнинг ҳосилалари топилинсин.

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилинсин:

$$963. y = \ln \cos x - \frac{1}{2} \cos^2 x.$$

$$964. y = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}). \quad 965. y = \ln \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x}.$$

$$966. y = \ln(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}).$$

$$967. y = \ln \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad 968. y = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} x + \ln \cos x.$$

$$969. y = \ln \sqrt{\frac{\sin 2x}{1 - \sin 2x}}. \quad 970. y = \ln(1 + \sec x).$$

$$971. y = a \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x}) - \sqrt{x^2 + ax}.$$

$$972. y = ae^{\frac{x}{a}} + xe^{-\frac{x}{a}}. \quad 973. y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}).$$

$$974. y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \quad 975. y = \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1}).$$

$$976. y = \ln \sqrt{\frac{e^{4x}}{e^{4x} + 1}}. \quad 977. y = x^{\frac{1}{x}}.$$

$$978. f(t) = \ln \frac{2 + \operatorname{tg} t}{2 - \operatorname{tg} t}; \quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ топилин.}$$

979. $y = 1 - e^{\frac{x}{2}}$ эгри чизикқа унинг Oy ўқ билан кесилган нуқтасида ўтказилган уринма тенгламаси ёзилсин. Эгри чизик, унинг уринмаси ва асимптотаси ясалсин.

6- §. Тескари тригонометрик функцияларнинг ҳосилалари

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \quad (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$(\arctg u)' = \frac{u'}{1+u^2}; \quad (\operatorname{arctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

$$980. y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x.$$

$$981. y = x - \arctg x. \quad 982. y = \arcsin \sqrt{1-4x}.$$

$$983. y = \arcsin \frac{x}{a}. \quad 984. y = \arctg \frac{x}{a}.$$

$$985. y = \arccos(1-2x). \quad 986. y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}.$$

$$987. 1) y = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x; \quad 2) y = \arcsin(e^{3x}).$$

$$988. y = \arctg x + \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}. \quad 989. y = \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$990. y = x \arctg \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(x^2 + a^2).$$

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

$$991. y = \arcsin \sqrt{x}. \quad 992. y = \arctg \sqrt{6x-1}.$$

$$993. 1) y = \arccos(1-x^2); \quad 2) y = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x}.$$

$$994. y = e^x \sqrt{1-e^{2x}} + \arcsin e^x.$$

$$995. y = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}.$$

$$996. y = \arctg e^{2x} + \ln \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}}.$$

$$997. s = \sqrt{4t-t^2} + 4 \arcsin \frac{\sqrt{t}}{2}.$$

$$998. y = \arccos \sqrt{1-2x} + \sqrt{2x-4x^2}.$$

$$999. f(z) = (z+1) \arctg e^{-2z}; \quad f'(0) \text{ топилсин.}$$

7- §. Гиперболик функцияларнинг ҳосилалари

1°. Таърифлар. $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ифодалар ва уларнинг нисбатлари мос равишда гиперболик синус, косинус, тангенс, котангенс дейилади ва

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}; \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

кўринишда белгиланади.

2°. Гиперболик функцияларнинг хоссалари:

1) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$; 4) $\operatorname{sh} 0 = 0$, $\operatorname{ch} 0 = 1$;

2) $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x$; 5) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

3) $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$; 6) $(\operatorname{th} x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилинсин:

1000. 1) $y = \operatorname{sh}^3 x$; 2) $y = x - \operatorname{th} x$; 3) $y = 2\sqrt{\operatorname{ch} x - 1}$.

1001. $f(x) = \operatorname{sh} \frac{x}{2} + \operatorname{ch} \frac{x}{2}$; $f'(0) + f(0)$ топилинсин.

1002. 1) $y = \ln [\operatorname{ch} x]$; 2) $y = \operatorname{th} x + \operatorname{cth} x$.

1003. 1) $y = x - \operatorname{cth} x$; 2) $y = \ln [\operatorname{th} x]$.

1004. 1) $y = \arcsin [\operatorname{th} x]$; 2) $y = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 4x}$.

1005. $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ *чизик занжир чизик*

дейлади. Бу чизикқа $x = a$ нуқтасида ўтказилган нормалнинг тенгламаси ёзилсин (гиперболик функцияларнинг ило-вада берилган жадвалига қаралсин).

Эгри чизик ва нормал ясалсин.

1006. $y = \operatorname{sh} x$ эгри чизикқа $x = -2$ нуқтада ўтказилган уринма тенгламаси ёзилсин. Эгри чизик ва унга ўтказилган уринма ясалсин.

1007. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ занжир чизикдаги исталган нуқта ординатасининг шу чизик нормалидаги проекцияси ўзгармас бўлиб, a га тенг экани исбот қилинсин.

8- §. Дифференциаллашга доир аралаш мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилинсин:

1008. 1) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + \arcsin \frac{1}{x}$; 2) $y = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln \cos x$.

1009. $y = \sqrt{4x - 1} + \arcsin \sqrt{4x - 1}$.

1010. $x = \ln(e^{2t} + 1) - 2 \arcsin(e^t)$.

1011. $y = 4 \ln(\sqrt{x - 4} + \sqrt{x}) + \sqrt{x^2 - 4x}$.

1012. $s = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 t - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 t - \ln(\cos t)$.

1013. $f(x) = (x^2 + a^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - ax$; $f'(a)$ топилсин.

1014. 1) $y = \ln \left[x - \frac{a^2}{x} \right]$; 2) $y = x (\cos \ln x + \sin \ln x)$.

1015. $f(x) = \operatorname{arcsin} \frac{x-1}{x}$; $f'(5)$ топилсин.

1016. $\varphi(u) = e^{-\frac{u}{a}} \cos \frac{u}{a}$; $\varphi(0) + a\varphi'(0) = 0$ экани кўрсатилсин.

1017. $f(y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{a} - \ln \sqrt[4]{y^4 - a^4}$; $f'(2a)$ топилсин.

1018. $F(z) = \frac{\cos^2 z}{1 + \sin^2 z}$; $F\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3F'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$ экани кўрсатилсин.

1019. $s = \frac{1}{t \ln a}$ функциянинг $t \frac{ds}{dt} + s = -ts^2$ дифференциал тенгламани қаноатлантириши кўрсатилсин.

1020. $x = \frac{t - e^{-t^2}}{2t^2}$ функциянинг $t \frac{dx}{dt} + 2x = e^{-t^2}$ дифференциал тенгламани қаноатлантириши кўрсатилсин.

9-§. Юқори тартибли ҳосилалар

Биз $y = f(x)$ функциянинг $y' = f'(x)$ ҳосиласини топдик деб фараз қилайлик. Бу ҳосиланинг ҳосиласи $f'(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи дейилади ва y'' ёки $F''(x)$ ёки $\frac{d^2 y}{dx^2}$ лар билан белгиланади. Шунга ўхшаш, юқори тартибли ҳосилалар аниқланади ва:

3-тартибли ҳосила $y''' = f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3}$ билан,

4-тартибли ҳосила $y^{IV} = f^{IV}(x) = \frac{d^4 y}{dx^4}$ билан ва умуман

n -тартибли ҳосила $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$ билан белгиланади.

1021. 1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = \operatorname{tg} x$; 3) $y = \sqrt{1+x^2}$ функцияларнинг 2-тартибли ҳосилалари топилсин.

1022. 1) $y = \cos^2 x$; 2) $y = \frac{1}{x^2}$; 3) $y = x \sin x$ функцияларнинг 3-тартибли ҳосилалари топилсин.

1023. Қуйидаги функцияларнинг 3-тартибли ҳосилалари топилсин:

$$1) y = x \ln x; 2) s = te^{-t}; 3) y = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$1024. s = \frac{t}{2} \sqrt{2-t^2} + \arcsin \frac{t}{\sqrt{2}} \text{ бўлса, } \frac{d^3s}{dt^3} \text{ топилсин.}$$

Қуйидаги функцияларнинг n -тартибли ҳосилалари топилсин:

$$1025. 1) e^{\frac{x}{a}}; 2) \ln x; 3) \sqrt{x}.$$

$$1026. 1) x^n; 2) \sin x; 3) \cos^2 x.$$

1027. Кетма-кет дифференциаллаб, қуйидаги Лейбниц формулалари чиқарилсин:

$$(uv)' = u'v + 2u'v' + uv'';$$

$$(uv)'' = u''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''';$$

$$(uv)^{IV} = u^{IV}v + 4u''v'' + 6u'v''' + 4uv^{IV} \text{ ва Ҳоказо.}$$

1028. Лейбниц формуласи бўйича:

1) $y = e^x \cos x$; 2) $y = a^x x^3$; 3) $y = x^2 \sin x$ функциялардан 2-тартибли ҳосилалар топилсин.

1029. Лейбниц формуласи бўйича:

1) $y = e^{-x} \sin x$; 2) $y = x^2 \ln x$; 3) $y = x \cos x$ функциялардан 3-тартибли ҳосилалар топилсин.

$$1030. f(x) = xe^{\frac{x}{a}}, f''(x), f^{(n)}(x), f^{(n)}(0) \text{ топилсин.}$$

$$1031. f(x) = (1+x), f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), \dots, f^{(n)}(0) \text{ топилсин.}$$

$$1032. f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}; n \geq 2 \text{ бўлганда,}$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^{n-1}} n \text{ экани кўрсатилсин.}$$

$$1033. f(x) = \frac{1}{1-x^2};$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} n! & , n = 2m \text{ бўлганда.} \\ 0 & , n = 2m-1 \text{ бўлганда экани кўрсатил-} \end{cases}$$

син.

Кўрсатма. $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right)$ айниятдан фойдаланиш керак.

1034. $(x-1) \cdot (x^2 + x^3 + \dots + x^n) = x^{n+1} - x^2$ айнияти
 уч марта дифференциаллаб ҳамда $x = 1$ деб, $\sum_{k=1}^n k(k-1) =$
 $= \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$ йигинди, сўнгра натурал қатор сонларининг
 квадратлари йигиндиси
 $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ топилсин.

1035. 1) $y = e^{-x^2}$; 2) $y = \operatorname{ctg} x$; 3) $y = \arcsin \frac{x}{2}$ функция-
 ларнинг 2-тартибли ҳосилалари топилсин.

1036. 1) $y = a^x$; 2) $y = \frac{1}{1+2x}$; 3) $y = \sin^2 x$
 функцияларнинг n -тартибли ҳосилалари топилсин

1037. $f(x) = \arcsin \frac{1}{x}$; $f(2)$; $f'(2)$ ва $f''(2)$ топилсин.

1038. Лейбниц формуласига кўра:

1) $y = x^2 e^x$; 2) $y = x^2 \sin \frac{x}{a}$;

3) $y = x f'(a-x) + 3f(a-x)$ функциялардан 3-тартиб-
 ли ҳосилалар топилсин.

1039. $y = e^x \cos x$ функция $y^{IV} + 4y = 0$ дифференциал
 тенгламани қаноатлантириши кўрсатилсин.

1040. $y = x e^{-\frac{1}{x}}$ функция $x^2 y'' - x y' + y = 0$ тенгламани
 қаноатлантириши кўрсатилсин.

1041. $f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{a}}$ бўлса, $f^{(n)}(0) = \frac{n(n-1) \cdot (-1)^n}{a^{n-2}}$ эка-
 ни кўрсатилсин.

1042. $f(x) = e^{-x^2}$ бўлса,
 $f^{(n)}(0) = -2(n-1)f^{(n-2)}(0)$, $f^{(2m-1)}(0) = 0$,
 $f^{(2m)}(0) = (-2)^m (2m-1)(2m-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1$ экани
 кўрсатилсин.

1043. $f(x) = x^n$ бўлса,

$f(1) + \frac{f'(1)}{1} + \frac{f''(1)}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = 2^n$ эканлиги кўрсатилсин.

10- §. Ошкормас функциянинг ҳосиласи

Агар y га нисбатан ечилмаган $F(x; y) = 0$ тенглама y ни x нинг бир қийматли функцияси сифатида аниқласа, у ҳолда y x нинг *ошкормас функцияси* дейилади. Бу ошкормас функциядан y' ҳосиласи топиш учун y ни x нинг функцияси деб, $F(x; y) = 0$ тенгламанинг икки томонини x бўйича дифференциаллаш керак. Ҳосил бўлган тенгламадан изланган y' ни толаимиз. y'' ни топиш учун $F(x; y) = 0$ тенгламани x бўйича икки марта дифференциаллаш керак ва ҳоказо.

Қуйидаги тенгламалардан y' топилисин:

1044. 1) $x^2 + y^3 = a^3$; 2) $y^3 = 2px$; 3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1045. 1) $x^2 + xy + y^2 = 6$; 2) $x^3 + y^2 - xy = 0$.

1046. 1) $\frac{2}{x^3} + \frac{2}{y^3} = a^{\frac{2}{3}}$; $e^y - e^{-x} + xy = 0$.

1047. $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$.

1048. $x = y + \arctg y$.

1049. $e^{xy} - x^3 + y^3 = 0$; $\frac{dy}{dx}$ нинг $x = 0$ бўлгандаги қиймати топилисин.

1050. 1) $x^2 + y^2 = a^2$; 2) $ax + by - xy = c$; 3) $x^m y^n = 1$ тенгламалардан y'' топилисин.

1051. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; (0; b) нуқтадаги y'' топилисин.

1052. $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ эгри чизиқнинг Oy ўқ билан кесишган нуқталарида ўтказилган уринмаларининг тенгламалари ёзилсин.

1053. $x^2 - y^2 = 9$ гиперболанинг (5; 4) нуқтасида ўтказилган нормалнинг асимптоталар билан кесишган нуқталари топилисин.

1054. 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; 2) $y^3 = 2px$ эгри чизиққа $(x_0; y_0)$ нуқтада ўтказилган уринма тенгламаси ёзилсин.

1055. $x^2/3 + y^2/3 = a^2/3$ астроидага унинг $y = x$ тўғри чизиқ билан кесишган нуқталарида ўтказилган уринмалар тенгламалари ёзилсин.

1056. $x^2 + y^2 = 5$ ва $y^2 = 4x$ эгри чизиклар қандай бурчак остида кесишади?

1057. 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; 2) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ тенгламалардан y' топилсин.

1058. 1) $x^2 - y^2 = a^2$; 2) $(x - \alpha)^2 + (x - \beta)^2 = R^2$;

3) $\arctg y = x + y$; 4) $x^3 + xy + y^2 = a^2$ тенгламалардан y'' топилсин.

1059. $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$ айланага унинг Ox ўқ билан кесишган нуқталарида ўтказилган уринмаларнинг тенгламалари ёзилсин. Айлана ва уринмалар ясалсин.

1060. $x^2 + 4y^2 = 16$ эллипсининг биринчи чоракда ётувчи шундай нуқтасида уринма ўтказилсинки, унинг координата ўқлари орасидаги кесмаси шу нуқтада тенг иккига бўлинсин ҳамда уринманинг тенгламаси ёзилсин.

1061. $te^{-\frac{s}{2}} + se^{-\frac{t}{2}} = 2$; $t = 0$ бўлганда $\frac{ds}{dt}$ топилсин.

1062. $t \ln x - x \ln t = 1$; $t = 1$ бўлганда $\frac{dx}{dt}$ топилсин.

1063. $x^2 \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$; $y = \frac{\pi}{2}$ бўлганда y' топилсин.

11-§. Функциянинг дифференциали

Агар $y = f(x)$ функция x нуқтада дифференциалланувчи бўлса, яъни ўша нуқтада чекли y' ҳосиллага эга бўлса, у ҳолда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$$

бўлади, бунда $\Delta x \rightarrow 0$ да $\alpha \rightarrow 0$. Бундан

$$\Delta y = y' \Delta x + \alpha \Delta x. \quad (1)$$

Функция *опптирмаси* Δy нинг Δx га нисбатан чизикли бўлган бош қисми $y' \Delta x$, функциянинг *дифференциали* дейилади ва dy билан белгиланади:

$$dy = y' \Delta x. \quad (2)$$

(2) формулада $y = x$ деб $dx = x' \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$ га эга бўламиз, шунинг учун ҳам

$$dy = y' dx. \quad (3)$$

(3) формула x қандайдир янги ўзгарувчи t нинг функцияси бўлган ҳол учун ҳам тўғри бўлади.

(1) дан $\Delta y \approx dy$ экани, яъни етарлича кичик $dx = \Delta x$ учун функция орттирмаси унинг дифференциалига тақрибий тенг экани келиб чиқади.

Хусусий ҳолда чизикли функция $y = ax + b$ учун $\Delta y = dy$.

Қуйидаги функцияларнинг дифференциаллари топилсин:

1064. 1) $y = x^n$ 2) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$.

1065. 1) $y = \sqrt{1+x^2}$; 2) $s = \frac{gt^2}{2}$.

1066. 1) $r = 2\varphi - \sin 2\varphi$, 2) $x = \frac{1}{t^2}$.

1067. 1) $d(\sin^2 t)$; 2) $d(1 - \cos u)$.

1068. 1) $d\left(\frac{a}{x} + \arctg \frac{x}{a}\right)$; 2) $d(\alpha + \ln \alpha)$;

3) $d\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right)$ 4) $d\left(\arcsin \frac{1}{x}\right)$.

1069. 1) $x^2 + y^2 = a^2$; 2) $xy = a^2$; 3) $x^2 - xy - y^2 = 0$ тенгламаларнинг ҳар бир ҳадларининг дифференциалларини топиб, $\frac{dy}{dx}$ топилсин.

1070. 1) $y = x^2$ бўлса, x нинг қиймати 2 дан 2,01 гача ўзгарганда, y ўзгаришининг тақрибий қиймати топилсин ($\Delta y \approx dy$); 2) $y = \sqrt{x}$ бўлса, x нинг қиймати 100 дан 101 гача ўзгарганда, y ўзгаришининг тақрибий қиймати топилсин.

1071. 1) Кубнинг қирраси $x = 5 \text{ м} \pm 0,01 \text{ м}$. Куб ҳажмини ҳисоблашдаги абсолют ва нисбий хатолар аниқлансин.

2) Телеграф симининг узунлиги $s = 2b\left(1 + \frac{2f^2}{3b^2}\right)$, бундаги $2b$ — симнинг устунга биркирилган нуқталари орасидаги масофа, f эса симнинг энг катта эгилиши. Иссиқлик таъсирида сим узунлиги ds га ортса, эгилиш қанчага ортади?

1072. 1) $x \leq 4$ бўлганда, $y = x^2 \sqrt{x}$ эгри чизик ординатасини ҳисоблашдаги хато 0,1 дан ортиқ бўлмаслиги учун унинг абсциссасини қандай аниқликда ўлчаш керак?

2) Шар ҳажмини ҳисоблашда 1% дан ортиқ хато қилмаслик учун шар радиусини қандай нисбий аниқликда ўлчаш зарур?

1073. 1) Доиравий ҳалқанинг юзи; 2) сферик қатламнинг (иккита концентрик сфера орасидаги қатламнинг) ҳажми тақрибий ҳисоблансин. Улар аниқ қийматлари билан таққослансин.

Қуйидаги функцияларнинг дифференциаллари топилсин:

1074. 1) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$; 2) $r = \cos(a - b\varphi)$; 3) $s = \sqrt{1-t^2}$.

1075. 1) $y = \ln \cos x$; 2) $z = \arctg \sqrt{4u-1}$; 3) $s = e^{-2t}$.

1076. 1) $d(\sqrt{x+1})$; 2) $d(\lg \alpha - \alpha)$; 3) $d(bt - e^{-bt})$.

1077. 1) $y = x^3$ бўлса, Δy ҳамда dy лар аниқлансин ва улар x нинг қиймати 2 дан 1,98 гача ўзгарганда ҳисоблансин.

2) Маятник тебранишининг даври $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{980}}$ секунд,

бундаги l — сантиметр билан ўлчанган маятник узунлиги. Тебраниш даври 0,1 секундга камайиши учун маятник узунлиги $l = 20$ см ни қандай ўзгартириш керак?

3) $x \geq 0,5$ бўлганда, $xy = 4$ эгри чизиқ ординатасини ҳисоблашдаги хато 0,1 дан катта бўлмаслиги учун унинг абсциссасини қандай аниқлик билан ўлчаш керак?

12-§. Эгри чизиқнинг параметрик тенгламалари

Эгри чизиқ $x=f(t)$ ва $y=\varphi(t)$ параметрик тенгламалар билан берилган бўлсин. x ва y нинг тепасидаги нуқталар билан уларнинг параметр t бўйича олинган ҳосилаларини белгилаб:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}; \quad d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\ddot{y}x - \dot{y}\dot{x}}{x^2}$$

ларни топамиз.

1078. 1) $\left. \begin{aligned} x &= t^2 \\ y &= \frac{1}{2}t^3 \end{aligned} \right\}; \quad 2) \left. \begin{aligned} x &= \\ y &= \frac{t^3}{3} - t \end{aligned} \right\}$

параметрик тенгламалар билан берилган эгри чизиқлар ясалсин. Тенгламалардан t ни чиқариб, ҳар бир эгри чизиқ тенгламаси одатдаги $F(x, y) = 0$ кўринишда ёзилсин.

Қуйидаги параметрик тенгламалар билан берилган эгри чизиқларнинг тенгламалари $F(x, y) = 0$ (ёки $y = f(x)$) кўринишга келтирилсин:

$$1079. 1) \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$$

$$1080. 1) \begin{cases} x = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = \frac{e^t - e^{-t}}{2}; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$$

1081. t га $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ қийматларни бериб, доира «эвольвентаси» ёки «ёйилмаси» ясалсин:

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$

1082. $y = xt$ деб, $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ «Декарт япроғи» нинг параметрик тенгламалари ёзилсин (366- масалага қаралсин) ва t ; 1) 0 дан $+\infty$ гача; 2) 0 дан -1 гача; 3) $-\infty$ дан -1 гача монотон ўзгарганда нуқтанинг эгри чизик бўйлаб ҳаракати текширилсин.

1083. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоиданинг (367- масалага қаралсин) $t = \frac{\pi}{2}$ нуқтасига ўтказилган уринма тенгламаси ёзилсин. Эгри чизик ва уринма ясалсин.

1084. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ гипоциклоидага (астроида-га) $t = \frac{\pi}{4}$ нуқтада ўтказилган уринма тенгламаси ёзилсин. Эгри чизик ва уринма ясалсин.

Қўрсатма. Эгри чизикни яшаш учун $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \dots$ бўлгандаги x ва y лар қийматларининг жадвали тузилсин.

$$1085. 1) \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t; \end{cases} 2) \begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{t^3}{3} - t; \end{cases} 3) \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

тенгламалардан $\frac{d^2y}{dx^2}$ топилсин.

1086. 1) $x = 2t - 1$, $y = 1 - 4t^2$; 2) $x = t^3$, $y = t^2 - 2$ параметрик тенгламалар билан берилган эгри чизиклар, координаталар ўқлари билан кеснишган нуқталарини топиб

ҳамда иккинчи эгри чизиқ учун $t = 0$ бўлганда $\frac{dy}{dx} = \infty$ эканини эътиборга олиб ясалсин. Эгри чизиқ тенгламаси $F(x, y) = 0$ кўринишда ёзилсин.

1087. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоидага $t = \frac{3\pi}{2}$ нуқтада ўтказилган уринма тенгламаси ёзилсин. Эгри чизиқ ва уринма ясалсин.

1088. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ доира ёйилмасига $t = \frac{\pi}{4}$ нуқтада ўтказилган уринма тенгламаси ёзилсин.

1089. 1) $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t + t^3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = e^{3t} \end{cases}$ тенгламалардан $\frac{d^2y}{dx^2}$ топилсин.

ҲОСИЛАНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

1-§. Тезлик ва тезланиш

Нуқта Ox ўқ бўйича ҳаракат қилиб, вақтнинг t пайтида $x = f(t)$ координатага эга бўлсин, у ҳолда вақтнинг t пайтида

$$\text{тезлик } v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt},$$

$$\text{тезланиш } w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ бўлади.}$$

1090. Зенит снаряд бошланғич a м/сек тезлик билан вертикал йўналишда отилган. t секунддан сўнг снаряд қандай x баландликда бўлади? Снаряднинг ҳаракат тезлиги ва тезланиши аниқлансин. Неча секунддан сўнг снаряд энг юқори баландликка кўтарилади ва ердан қандай масофада бўлади?

1091. Жисм $x = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$ қонунга асосан Ox тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қилади. Ҳаракат тезлиги ва тезланиши аниқлансин. Қайси пайтларда жисм ҳаракат йўналишини ўзгартиради?

1092. Моддий нуқта $x = a \cos \omega t$ қонун бўйича тебранма ҳаракат қилади. $x = \pm a$ ва $x = 0$ нуқталардаги тезлик ва тезланиш аниқлансин.

$\frac{d^2x}{dt^2}$ тезланиш ҳамда нуқтанинг узоқлашиши x ушбу $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ «дифференциал» тенглама билан боғлангани кўрсатилсин.

1093. Тормоз билан тўхтатиладиган айланувчи маховик t секундда $\varphi = a + bt - ct^2$ бурчакка бурилади. Бундаги a , b ва c лар мусбат ўзгармас миқдорлар. Тезлик ва тезланиш аниқлансин. Гилдирак қачон тўхтайдми?

1094. Радиуси a га тенг гилдирак тўғри чизиқ бўйича юмалайди. Гилдиракнинг t секунддаги бурилиш бурчаги $\varphi = t + \frac{t^2}{2}$ тенглама билан аниқланади. Гилдирак марказининг ҳаракат тезлиги ва тезланиши аниқлансин.

1095. Ox ўқ бўйича ҳаракат қилувчи нуқтанинг тезлиги v , тезланиши w бўлсин, $w dx = v dv$ экани кўрсатилсин.

1096. Тўғри чизиқли ҳаракатдаги нуқтанинг тезлиги v , ўтган йўли x бўлиб, $v^2 = 2ax$ шарт бажарилади; a — ўзгармас. Ҳаракат тезланиши аниқлансин.

1097. 10 метр баландликдаги жисм 20 м/сек бошланғич тезлик билан юқорига вертикал отилган. t секунддан кейин у қандай x баландликда бўлади? Ҳаракат тезлиги ва тезланиши аниқлансин. Неча секунддан сўнг жисм энг юқори нуқтага чиқади ва ердан қанча баландликда бўлади?

1098. Радиуси R см бўлган ярим шар шаклидаги идишга ўзгармас a л/сек тезлик билан сув қуйилади. Идишдаги сувнинг h см баландликдаги кўтарилиш тезлиги аниқлансин ва у сувнинг эркин сиртига тескари пропорционал экани кўрсатилсин.

Кўрсатма. Шар сегментининг ҳажми $V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$ экани

маълум. Масаланинг шартига кўра $\frac{dV}{dt} = a$ эканини ҳисобга олиб, биринчи тенгликнинг икки томонини t бўйича дифференциаллаш керак.

1099. Қандайдир химиявий реакция натижасида ҳосил қилинадиган жисм миқдори x билан t вақт орасидаги боғланиш $x = A(1 - e^{-kt})$ тенглама билан ифодаланади. Реакция тезлиги аниқлансин.

1100. Бурчак тезлиги $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, бурчак тезланиши эса $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ бўлсин. $\frac{d(\omega^2)}{d\mu} = 2\varepsilon$ экани кўрсатилсин.

2-§. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремалар

1°. Ролль теоремаси. Агар $f(x)$: 1) $[a, b]$ сегментда узлуксиз, 2) шу сегментнинг ички нуқталарида ҳосилга эга, 3) $f(a) = f(b)$ бўлса, у ҳолда a билан b орасида шундай $x = c$ нуқта мавжудки,

унда

$$f'(c) = 0 \quad (1)$$

бўлади.

2°. Лагранж теоремаси. Агар $f(x)$: 1) $[a, b]$ сегментда узлуксиз, 2) шу кесманинг ички нуқталарида ҳосилага эга бўлса, у ҳолда a билан b орасида шундай $x = c$ нуқта мавжудки, унда

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c) \quad (2)$$

бўлади.

3°. Қоши теоремаси. Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$: 1) $[a, b]$ сегментда узлуксиз, 2) шу кесманинг ички нуқталарида ҳар иккала функция ҳам ҳосилага эга, шунинг билан бирга $\varphi'(x) \neq 0$ бўлса, у ҳолда a билан b орасида $x = c$ нуқта мавжудки, унда

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \quad (3)$$

бўлади.

Бу теоремаларда a билан b орасидаги қандайдир ўрта $x = c$ қиймат ҳақида сўз юритилгани учун, улар ўрта қиймат ҳақидаги теоремалар деб аталади.

Геометрик нуқтан назардан Ролль ва Лагранж теоремалари, ҳар бир нуқтаси учун аниқ бир уринма мавжуд бўлган, қайтиш нуқтаси бўлмаган узлуксиз $y = f(x)$ эгри чизиқнинг AB ёйида шундай ички нуқта борки, унда ўтказилган уринма AB ватарга параллел бўлишини тасдиқлайди.

Равшанки, синиш ёки қайтиш нуқталарга эга ёйлар учун юқоридаги теоремаларнинг шартлари бажарилмайди

$f(b) = f(a) = 0$ бўлган хусусий ҳол учун Ролль теоремаси қуйидагича ўқилади: агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз ва сегментнинг ички нуқталарида ҳосилага эга бўлса, $f(x)$ функциянинг иккита илдизи a ва b орасида $f'(x)$ нинг ҳам ҳеч бўлмаганда битта илдизи бўлади.

1101. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ функция илдизлари орасида унинг ҳосиласининг ҳам илдизи бор экани текширилсин. Бу график усулда тушунтирилсин.

1102. Ролль теоремасини $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ функцияга $[-1, 1]$ сегментда татбиқ қилиш мумкинми?

1103. $y = |\sin x|$ эгри чизиқнинг $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ сегментдаги AB ёйи ясалсин. Нима учун бу ёйда AB ватарга параллел уринма йўқ? Ролль теоремасининг қайси шarti бу ерда бажарилмайди?

1104. $y = x^2$ параболаининг қайси нуқтасида ўтказилган уринма $A(-1; 1)$ ва $B(3; 9)$ нуқталарни бирлаштирувчи ватарга параллел бўлади?

1105. $[a, b]$ сегментда $f(x) = x^2$ функция учун Лагранж формуласи ёзилсин ва c топилсин. График усул билан тушунтирилсин.

1106. $[1, 4]$ сегментда $f(x) = \sqrt{x}$ функция учун Лагранж формуласи ёзилсин ва c топилсин.

1107. $[-1, 2]$ сегментда $\frac{4}{x}$ ва $1 - \sqrt[3]{x^2}$ функцияларга Лагранж теоремасини татбиқ қилиш мумкин эмаслиги кўрсатилсин. График усулда тушунтирилсин.

1108. $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ сегментда $y = |\cos x|$ эгри чизиқнинг $\overline{AB}$ ёни ясалсин. Нима учун бу ёйда AB ватарга параллел уринма йўқ? Лагранж теоремасининг қайси шarti бунда бажарилмайди?

1109. $f(x) = \begin{cases} x, & |x| < 2 \\ 1, & |x| \geq 2 \end{cases}$ бўлганда, функция графиги

ясалсин. Унда $O(0; 0)$ ва $B(2; 1)$ нуқталарни олиб, графикнинг O билан B нуқтаси орасида уринмаси OB га параллел бўлган нуқта йўқлиги кўрсатилсин. $[0, 2]$ сегментда бу функция учун Лагранж теоремасининг қайси шартлари бажарилади ва қайси шартлари бажарилмайди?

1110. Поезд икки станция орасидаги масофани $v_0 = 40$ км/соат ўртача тезлик билан босиб ўтган. Лагранж теоремасига кўра шундай момент бўладики, ўша вақтда ҳақиқий тезлик (ўртача тезлик эмас) $\frac{ds}{dt} = 40$ км/соат бўлади. Бунинг тўғрилиги кўрсатилсин.

1111. $[a, b]$ сегментда узлуксиз ва шу сегментнинг ҳар бир ички нуқтасида ҳосиллага эга $f(x)$ функция берилган.

$$\Phi(x) = \begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix}$$

функцияга Ролль теоремасини татбиқ этиб, $f(x)$ функция учун Лагранж теоремаси ҳосил қилинсин. $\Phi(x)$ функциянинг геометрик маъноси аниқлансин.

1112. $f(x) = x^3$ ва $\Phi(x) = x^2$ функциялар учун Кошининг $\frac{f(b) - f(a)}{\Phi(b) - \Phi(a)} = \frac{f'(c)}{\Phi'(c)}$ формуласи ёзилсин ҳамда c топилсин.

1113. Геометрик нуқтан назардан Коши теоремаси қуйидагини тасдиқлайди: агар $[a, b]$ сегментда $x = \varphi(t)$ ва $y = f(t)$ функциялар Коши теоремасининг шартларини қаноатлантир-

са, у ҳолда t нинг $a \leq t \leq b$ сегментдан олинган қийматлари учун $x = \varphi(t)$ ва $y = f(t)$ эгри чизиқнинг ёни устида шундай ички нуқта топиладики, бу нуқтада ёйга ўтказилган уринма ватарга параллел бўлади. Бу исбот қилинсин.

1114. 1) $f(x) = x^2$, 2) $f(x) = x^3$ функциялар учун Лагранж формуласи $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta \Delta x)$ кўринишда ёзилсин, бунда $0 < \theta < 1$ ҳамда биринчи функция учун θ нинг x га боғлиқ эмаслиги, иккинчи функция учун эса θ ва Δx ларга боғлиқ эканлиги кўрсатилсин.

1115. $\sqrt{101} = 10 + \frac{1}{2\sqrt{100 + \theta}} \approx 10,05$ экани кўрсатилсин.

1116. Агар

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$$

бўлса, Коши формуласи ёрдами билан

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}$$

экани кўрсатилсин, бунда $0 < \theta < 1$.

1117. $f(x) = x^3$ функция учун Лагранжнинг

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$$

формуласи ёзилсин ва c топилинсин.

1118. Қуйидаги функциялар учун Лагранж формуласи ёзилсин ва c топилинсин.

1) $[0, 1]$ сегментда $f(x) = \arctg x$;

2) $[0, 1]$ сегментда $f(x) = \arcsin x$;

3) $[1, 2]$ сегментда $f(x) = \ln x$.

1119. Қуйидаги функциялар учун Коши формуласи ёзилсин ва c топилинсин:

1) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ сегментда $\sin x$ ва $\cos x$;

2) $[1, 4]$ сегментда x^2 ва $\sqrt{x}$.

1120. $y = |x - 1|$ функциянинг $[0, 3]$ сегментдаги графиги ясалсин. Нима учун бунда ватарга параллел уринма ўтказиш мумкин эмас? Лагранж теоремасининг шартларидан қайси бири бажарилмайди?

1121. $y = 4 - x^2$ эгри чизиқнинг қайси нуқтасида ўтказилган уринма унинг $A(-2; 0)$ ва $B(1; 3)$ нуқталарини бирлаштирувчи ватарга параллел бўлади? График усулда тушунтирилсин.

3-§. Аниқмасликларни очиш. Лопитал қондаси

1°. $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмаслик. Лопиталнинг биринчи қондаси. Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ ва $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ мавжуд бўлса, у ҳолда $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ бўлади.

2°. $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмаслик. Лопиталнинг иккинчи қондаси. Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$ ва $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ мавжуд бўлса, у ҳолда $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ бўлади.

3°. $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, $1 \cdot \infty$ ва 0^0 кўринишдаги аниқмасликлар алгебраик алмаштиришлар ёрдами билан $\frac{0}{0}$ ва $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликларга келтирилади.

Қуйидаги лимитлар топилсин:

$$1122. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin 3x}{x}.$$

$$1123. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}.$$

$$1124. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{x^n - a^n}.$$

$$1125. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - 1}{\ln x}.$$

$$1126. \lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}.$$

$$1127. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$1128. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

$$1129. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x - \sin x}{x - \sin x}.$$

$$1130. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3}.$$

$$1131. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}.$$

$$1132. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}.$$

$$1133. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\lg x}{\lg 3x}.$$

$$1134. \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$1135. \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x.$$

$$1136. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \cdot e^{-x}.$$

$$1137. \lim_{x \rightarrow 0} x^x.$$

$$1138. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{1/x}.$$

$$1139. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x.$$

1140. $xe^x - \sin x$ чексиз кичикнинг нолга интилувчи x ($x \rightarrow 0$) га нисбатан тартиби аниқлансин.

1141. x нолга интилса ($x \rightarrow 0$):

$$1) x - \arctg x \approx \frac{x^3}{3};$$

$$2) a^x - b^x \approx x \ln \frac{a}{b};$$

$$3) e^{2x} - 1 - 2x \approx 2x^2;$$

$$4) 2x - \ln(1 + 2x) \approx 2x^2$$

бўлиши исбот қилинсин.

1142. x нолга интилганда ($x \rightarrow 0$) $x - \sin x \approx \frac{x^3}{6}$ ва бун-

дан тахминан $\frac{x^3}{6}$ хато билан $\sin x \approx x$ экани исбот қилинсин, $\sin 1^\circ$ ва $\sin 6^\circ$ ҳисоблансин ҳамда хатолар баҳолансин.

1143. α нолга интилганда $\sqrt[3]{1+\alpha} - 1 - \frac{1}{3}\alpha \approx -\frac{\alpha^2}{9}$ ва

бундан тахминан $\frac{\alpha^2}{9}$ хато билан $\sqrt[3]{1+\alpha} \approx 1 + \frac{1}{3}\alpha$ экани ис-
бот қилинсин. $\sqrt[3]{1,006}$, $\sqrt[3]{0,991}$, $\sqrt[3]{65}$, $\sqrt[3]{210}$ лар ҳисоблан-
син ва хатолар баҳолансин.

Қуйидаги лимитлар ҳисоблансин:

$$1144. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x}.$$

$$1145. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3}.$$

$$1146. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2a}} \frac{1 - \sin ax}{(2ax - \pi)^2}.$$

$$1147. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{\lg x}.$$

$$1148. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x}.$$

$$1149. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \lg x}{\cos 2x}.$$

$$1150. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + 2x)}$$

$$1151. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1 - x^2}.$$

$$1152. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{2x}) \operatorname{ctg} x. \quad 1153. \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

$$1154. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right). \quad 1155. \lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} + x)^{\frac{1}{x}}.$$

1156. x нолга интилганда $\arcsin x - x \approx \frac{x^3}{6}$ экани исбот қилинсин.

1157. α нолга интилганда $\sqrt{1+\alpha} - 1 - \frac{\alpha}{2} \approx -\frac{\alpha^2}{8}$ бўлиши ва бундан тахминан $\frac{\alpha^2}{8}$ хато билан $\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}$ экани келиб чиқиши исбот қилинсин. $\sqrt{1,006}$, $\sqrt{1,004}$, $\sqrt{0,998}$, $\sqrt{0,994}$, $\sqrt{65}$, $\sqrt{85}$ лар ҳисоблансин ва хатолар баҳолансин.

4-§. Функциянинг ўсиши ва камайиши. Максимум ва минимум

1°. Таърифлар. 1. Агар x_0 нуқтанинг қандайдир ε атрофида, исталган мусбат $h < \varepsilon$ учун

$$f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада ўсувчи дейилади.

II. Агар $[a, b]$ сегментдаги исталган x_1 ва x_2 учун $x_1 < x_2$ бўлганда $f(x_1) < f(x_2)$ бўлса, $f(x)$ функция шу сегментда ўсувчи дейилади. Функциянинг нуқтада ва сегментда камаювчи бўлиши ҳам шунинг сингари таърифланади.

III. Агар $f(x_0)$ қиймат x_0 нуқтанинг қандайдир икки томонлама атрофида $f(x)$ функциянинг энг катта ёки энг кичик қиймати бўлса, x_0 нуқтада $f(x)$ функция экстремумга (максимумга ёки минимумга) эга дейилади.

2°. $y = f(x)$ функциянинг (нуқтада ва сегментда) ўсувчи ва камаювчи бўлишининг етарли аломатлари:

агар $y' > 0$ бўлса, функция ўсувчи бўлади.

агар $y' < 0$ бўлса, функция камаювчи бўлади.

3°. Экстремумнинг зарурий шarti. $y = f(x)$ функция, фақат $y' = 0$ ёки бу ҳосила мавжуд бўлмаган нуқталардагина экстремумга эга бўлиши мумкин. Бу нуқталар критик нуқталар деб аталади. Функциянинг критик нуқталаридан ўтувчи уринма горизонтал ($y' = 0$) ёки вертикал (қайтиш нуқтасида) бўлади, ёки аниқ уринмага эга бўлмайди (масалан, синиш нуқтасида). Сўнгги икки ҳолда y' мавжуд бўлмайди.

4°. Экстремумнинг етарли шартлари. Агар $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлса ва ўша нуқта ихтиёрий атрофининг, балки фақат x_0 нинг ўзидан бошқа нуқталарида чекли ҳосиллага эга бўлса ва агар x нинг қиймати x_0 дан ўтганда

y' ўз ишорасини + дан — га ўзгартса, y ҳолда

$$f(x_0) = y_{\max} \text{ бўлади;}$$

y' ўз ишорасини — дан + га ўзгартса, у ҳолда

$$f(x_0) = y_{\min} \text{ бўлади;}$$

y' ўз ишорасини ўзгартмаса, у ҳолда функция экстремумга эга бўлмайди.

Учинчи ҳол ($y' > 0$ ёки $y' < 0$ бўлганда) оддий нуқтада ҳамда бурилиш нуқтасида ва шунингдек синий нуқтасида рўй беради.

Демак, функциянинг экстремумини топиш учун:

1) y' ни топиб, уни нолга айлантирувчи ёки у мавжуд бўлмаган критик нуқталарни топиш керак;

2) ҳар бир критик нуқтадан чап ва ўнг томонларида y' нинг ишорасини, масалан, ушбу

x		x_1		x_2		x_3		x_4	
y'	—	0	+	ўққ	—	0	—	$-\infty$	—
y	кама- яди	$\cup$ min	ўсади	$\cap$ max	кама- яди	$\cup$ букиляди	кама- яди	$\cup$ букиляди	кама- яди

кўринишдаги жадвал тузиб, аниқлаш керак.

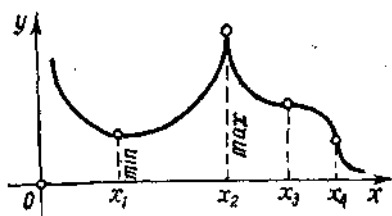
Сўнгра $y_{\max}$ ва $y_{\min}$ ларни топиб эгри чизиқни (функция графигини) ясаш мумкин. 30- чизмада юқорида келтирилган жадвалга мос келувчи эгри чизиқ ясалган.

5°. Функция экстремумининг етарли шартлари (текширишнинг иккинчи усули).

Агар бирор $x = x_0$ нуқтада:

1) $y' = 0$ ва $y'' < 0$ бўлса, у ҳолда $f(x_0) = y_{\max}$ бўлади;

2) $y' = 0$ ва $y'' > 0$ бўлса, у ҳолда



$$f(x_0) = y_{\min} \text{ бўлади;}$$

30- чизма.

3) $y' = 0$ ва $y'' = 0$ бўлса, у ҳолда масала ечилмасдан қолади ва уни ечиш учун биринчи усулга мурожаат қилиш керак.

Қуйидаги функцияларнинг ўсиши ва камайиши текширилсин:

1158. 1) $y = x^2$; 2) $y = x^3$; 3) $y = \frac{1}{x}$; 4) $y = \ln x$.

1159. 1) $y = \lg x$; 2) $y = e^x$. 3) $y = 4x - x^2$.

Қуйидаги функцияларнинг экстремумлари топилинсин ва уларнинг графиклари ясалсин*:

* 1165, 1168, 1173 шунингдек бошқа бир қанча масалалардаги эгри чизиқларини ясаш учун аввал уларнинг асимптоталарини топиш зарур (V боб, 9- § га қаралсин).

1160. $y = x^3 + 4x + 5$, 1161. $y = 4x - \frac{x^3}{3}$.
 1162. $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$, 1163. $y = 1 + 2x^2 - \frac{x^4}{4}$.
 1164. $y = \frac{x^4}{4} - x^3$, 1165. $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$.
 1166. $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$, 1167. $y = \frac{1}{1+x^2}$.
 1168. $y = \frac{y^2 - 6x + 13}{x - 3}$, 1169. $y = x^2(1-x)$.
 1170. $y = 1 - \sqrt[3]{(x-4)^2}$, 1171. $y = e^{-x^2}$.
 1172. $y = x + \cos 2x$, $(0, \pi)$ оралиқда.
 1173. $y = 4x - \operatorname{tg} x$, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ оралиқда.
 1174. $y = \frac{1 + \ln x}{x}$, 1175. $y = x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2x$.
 1176. 1) $y = xe^{-\frac{x}{2}}$; 2) $y = x \ln x$.
 1177. 1) $y = \sqrt{\sin x^2}$; 2) $y = \sqrt{e^{x^2} - 1}$.
 1178. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$, 1179. $y = x\sqrt{1-x}$.
 1180. $y = \frac{4\sqrt{x}}{x+2}$, 1181. $y = \frac{x}{(x-1)(x-4)}$.
 1182. $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$, 1183. $y = x^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{2}{3}}$.
 1184. $y = \frac{x^5}{5} - x^4 + x^3$, 1185. $y = x^3(x+2)^2$.
 1186. $y = 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$, 1187. $y = \frac{x^3}{x^2-3}$.
 1188. $y = 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x$, 1189. $y = x + \ln(\cos x)$.
 1190. 1) $y = \ln\sqrt{1+x^2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$; 2) $y = |x|(x+2)$.
 1191. $y = x^2 e^{-x}$, 1192. $y = 3\sqrt[3]{(x+1)^2} - 2x$.

Қуйидаги функцияларнинг экстремумлари топилсин ва графиклари ясалсин:

1193. $y = 4x - x^2$.

1194. $y = x^2 + 2x - 3$.

1195. $y = \frac{x^3}{3} + x^2.$

1196. $y = x^3 + 6x^2 + 9x.$

1197. $y = \frac{x^2}{x-2}.$

1198. $y = x^3 + \frac{x^4}{4}.$

1199. $y = \frac{x^3}{4} - 2x^2.$

1200. $y = 2x - 3 \sqrt[3]{x^2}.$

1201. $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$

1202. $y = xe^{\frac{x^2}{2}}.$

1203. $y = x - 2 \ln x.$

1204. $y = x^{\frac{2}{3}}(x-5).$

1205. $y = \sin 2x - x, \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ оралиқда.

1206. $y = 2x + \operatorname{ctg} x, (0, \pi)$ оралиқда.

1207. $y = x + \operatorname{arc} \operatorname{ctg} 2x.$

1208. $y = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}.$

1209. $y = 2 \sin x + \cos 2x, (0, \pi)$ оралиқда.

1210. $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2.$

1211. $y = \frac{\ln x}{x}.$

1212. $y = \frac{3-x^2}{x+2}.$

1213. $y = x + \frac{1}{x}.$

1214. 1) $y = ae^{-x} \cos x \ (x > 0 \text{ бўлганда});$

2) $y = 3x^5 - 5x^3.$

1215. $y = \frac{(4-x)^3}{9(2-x)}.$

1216. $y = \frac{12\sqrt{(x+2)^2}}{x^2+8}.$

1217. $y = \frac{2x^2-1}{x^4}.$

1218. $y = (1-x^2)(1-x^3).$

1219. $y = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}.$

1220. $y = x + 2\sqrt{-x}.$

1221. 1) $y = \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2};$

2) $y = \sqrt{1-\cos x}.$

5-§. Миқдорларнинг энг катта ва энг кичик қийматларига доир масалалар

Бу параграфда берилган масалаларни ечиш учун масалада берилган шартларга кўра энг катта ва энг кичик қийматини топиш зарур бўлган миқдорни (функцияни) тузиб олиш керак. 1229-масалани ечайлик: бу масалада туннель кесими юзининг энг катта бўлиш шартлари сўралади. Шунинг учун туннель кесими юзи S учун формула тузамиз.

Ярим айлана радиусини x , тўртбурчак баландлигини y десак:

$$S = \frac{\pi}{2} x^2 + 2xy. \quad (1)$$

$$\text{Масаланинг шартига кўра } 2x + 2y + \pi x = 18. \quad (2)$$

Бундан y ни топиб (1) га қўйсак $S = f(x) = 18x - \frac{\pi + 4}{2} x^2$ функцияга эга бўламиз. Энди бу функциянинг энг катта қийматини топамиз. $S = f(x)$ функция $\left(0, \frac{18^2}{\pi + 4}\right)$ оралиқда мавжуд. Бу оралиқдаги экстремум нуқталарни топамиз: 1) $f'(x) = 18 - (4 + \pi)x$; 2) $18 - (4 + \pi)x = 0$; $x = \frac{18}{4 + \pi}$; 3) $f''(x) = -(4 + \pi) < 0$. $f\left(\frac{18}{4 + \pi}\right)$ функциянинг тахитини қиймати бўлади. Равшанки, у функциянинг энг катта қиймати ҳам бўлади. Демак, туннель кесими юзининг энг катта бўлиши учун ярим доира радиуси $x = \frac{18}{4 + \pi}$ бўлиши керак.

1222. Узувлиги 120 метрлик панжара билан бир томондан уй билан чегараланган энг катта юзага эга тўғри тўртбурчак шаклидаги майдон ўраб олиниши керак. Тўғри тўртбурчакли майдон ўлчовлари аниқлансин.

1223. 10 сони шундай иккита қўшилувчига ажратилсинки, уларнинг кўпайтмаси энг катта бўлсин.

1224. Асоси a ва баландлиги h бўлган учбурчакка энг катта юзли тўғри тўртбурчак ички чизилган. Тўғри тўртбурчак юзи аниқлансин.

1225. Томони a бўлган квадрат шаклидаги картон қоғознинг тўртта учидан катталиги бир хил квадратлар кесиб олиниб, қолган қисмидан тўғри бурчакли қути ясалган. Қутининг ҳажми энг катта бўлиши учун кесиб ташланган квадратнинг томони қандай бўлиши керак?

1226. Таги квадрат шаклида, ҳажми 32 м^3 га тенг очиқ ҳовузнинг ўлчовлари шундай аниқлансинки, унинг деворлари билан тагини қоплаш учун мумкин қадар оз материал сарф этилсин.

1227. Трапециянинг кичик асоси ва ён томонларининг ҳар бири 10 см га тенг. Унинг катта асоси шундай аниқлансинки, трапеция юзи энг катта бўлсин.

1228. Ярим доирага асоси ярим доира диаметридан иборат бўлган трапеция ички чизилган. Трапециянинг асосига ёпишган бурчаги қандай бўлганда трапециянинг юзи энг катта бўлади?

Қўрсатма. Доира диаметрини d , трапеция ён томонининг асосидаги проекциясини x деб олсак, трапециянинг кичик асоси $d - 2x$ ва баландлиги $h = x \operatorname{tg} \alpha$ бўлади. У ҳолда $S_{\text{тр}} = (d - x)x \operatorname{tg} \alpha$.

Планиметриядан маълумки, $h^2 = (d - x)x$; $x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = dx - x^2$ $x = d \cos^2 \alpha$. Бундан $S_{\text{тр}} = d^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha = f(\alpha)$.

Бундан кейин $S = f(\alpha)$ нинг тахитини нуқтаси топилади.

1229. Туннелнинг кесими бир томони ярим доирадан иборат тўғри тўртбурчак шаклига эга. Кесим периметри 18 м. Ярим доира радиуси қандай бўлса, кесим юзи энг катта бўлади?

1230. А заводга яқин бўлган жойдан белгиланган тўғри чизик бўйича В шаҳарга қараб темир йўл ўтказилмоқда. Агар бир тонна юкни бир километрга тош йўл бўйича ташиш темир йўл бўйича ташишга қараганда m марта қимматроқ бўлса, А дан В га юк ташиш энг арзон бўлиши учун, А заводдан темир йўлгача тош йўлни темир йўлга нисбатан қандай α бурчак остида ўтказиш керак?

Қўрсатма. 1 тонна юкни тош йўл бўйлаб ташиш учун x сўм сарф бўлсин. Ташилган юк А дан В гача $\frac{b}{\sin \alpha}$ км тош йўл бўйича, $(a - b \operatorname{ctg} \alpha)$ км темир йўл бўйича юради. У ҳолда юкни ташиш учун ҳаммаси бўлиб

$$f(\alpha) = \frac{bx}{\sin \alpha} + (a - b \operatorname{ctg} \alpha) \frac{x}{m}$$

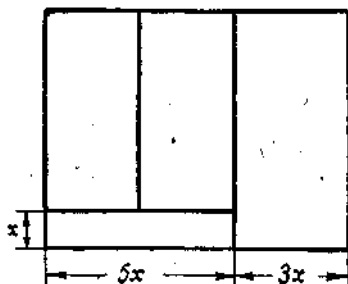
сўм пул сарфланади. Бундан кейин $f(\alpha)$ нинг минимуми топилсин.

1231. Иккита ёруғлик манбалари бир-биридан 30 м масофада жойлашган. Агар бу манбаларнинг ёруғлик кучлари 27:8 нисбатда бўлса, уларни туташтирувчи тўғри чизикда энг суст ёритилган нуқта топилсин.

1232. Иккита самолёт бир хил v км/соат тезлик билан бир текислик устида 120° бурчак ташкил этувчи тўғри чизиклар бўйича учadi. Маълум пайтда самолётлардан бири уларнинг ҳаракат чизикларининг кесишган нуқтасида бўлган ва иккинчисини эса бу нуқтага етишга a км қолган. Қанча вақтдан сўнг улар орасидаги масофа энг кичик бўлади ва бу масофа нимага тенг?

1233. Икки учи таянч устига эркин қўйилган, кесими тўғри тўртбурчак бўлган балканинг барча нуқталари текис юкланган. Унинг эгилиш ўқи балка кесимининг инерция моменти $I = \frac{xy^3}{12}$ га тескари пропорционал, бунда x ва y — балканинг ўлчовлари. Агар балка, диаметри D бўлган юмалоқ ёғочдан кесиб олинган бўлса, эгилиш ўқи энг кичик бўлганда унинг ўлчовлари аниқлансин.

1234. Шар ҳажми унга ички чизилган энг катта цилиндр ҳажмидан неча марта катта бўлади?



31- чизма.

1235. Эни 2,4 ва 1,6 м бўлган икки даҳлиз тўғри бурчак остида кесишади. Бир даҳлиздан иккинчи даҳлизга (горизонтал ҳолатда) кўчириш мумкин бўлган нарвоннинг энг катта узунлиги аниқлансин.

1236. Асосининг радиуси 4 дм, баландлиги 6 дм бўлган конусга ҳажми энг катта цилиндр ички чизилган. Уша цилиндрнинг ҳажми топилинсин.

1237. Радиуси R бўлган ярим донрага юзи энг катта тўғри тўртбурчак ички чизилган. Тўғри тўртбурчак ўлчовлари аниқлансин.

1238. $y = x^2$ параболада $y = 2x - 4$ тўғри чизиққа энг яқин нуқта топилинсин.

1239. Сурат деворга осилган. Унинг пастки қирраси кузатувчининг кўзидан b см баландликда, устки қирраси a см баландликда. Суратни энг катта бурчак остида кўриш учун кузатувчи девордан қанчалик узоқликда туриши керак?

Қўрсатма. Суратни девордан x см узоқликда туриб қарагандаги кўриш бурчаги қуйидагича аниқланади:

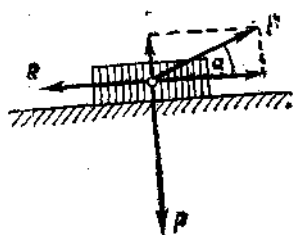
$$\alpha = \frac{(a-b)x}{ab+x^2}.$$

1240. Панда кўрсатилган уй деворларининг умумий узунлиги (31- чизма) 90 м га тенг. Даҳлизнинг эни x қандай бўлса, қолган уч хонанинг юзи энг катта бўлади?

1241. Гипотенузаси 8 см ва ўткир бурчакларидан бири 60° бўлган тўғри бурчакли учбурчакка асоси гипотенузада ётувчи тўғри тўртбурчак ички чизилган. Тўғри тўртбурчакнинг ўлчовлари қандай бўлганда унинг юзи энг катта бўлади?

1242. $A(0; 3)$ ва $B(4; 5)$ нуқталар берилган. Ох ўқда шундай P нуқта топилинсинки, $S = AP + PB$ масофа энг кичик бўлсин.

1243. Балкани узунлиги бўйича қисганда кўрсатадиган қаршилиги кўндаланг кесими юзига пропорционал бўлади.



32- чизма.

Диаметри D бўлганда юмалоқ ёғочдан кесиб олинган балканинг ўлчовларини шундай аниқлангки, у энг катта қаршиликка эга бўлсин.

1244. Доирадан α бурчакли сектор қирқилиб, сўнгра ундан конус ясалган. α бурчак катталиги қандай бўлганда конуснинг ҳажми энг катта бўлади?

1245. Горизонтал текисликда ётувчи P оғирликка эга юкни (32- чизма) унга тиркалган F куч таъсири билан силжитиш керак. Сарф этиладиган F куч мумкин қадар кам бўлиши учун кучни текисликка нисбатан қандай бурчак остида йўналтириш керак? Ишқаланиш коэффициентини $\mu = 0,25$.

6- §. Эгри чизиқ қавариқлигининг йўналиши ва бурилиш нуқталари. Эгри чизиқларни ясаш

1°. Қавариқлик. Агар $x = x_0$ нуқтанинг қандайдир атрофида (чапдан ва ўнгдан) эгри чизиқ ўша нуқтада ўтказилган уринмадан «пастда» («юқорида») жойлашган бўлса, эгри чизиқ шу нуқтада қавариқлиги билан «юқорига» («пастга») қараган дейилади.

Агар $x = x_0$ нуқтада:

1) $y'' > 0$ бўлса, эгри чизиқнинг қавариқлиги пастга қараган бўлади;

2) $y'' < 0$ бўлса, эгри чизиқнинг қавариқлиги юқорига қараган бўлади.

2°. Эгри чизиқ ўзининг бирор нуқтасида уринманинг бир томонидан иккинчи томонига ўтса (демак, у қавариқлигининг йўналишини ўзгартса), ўша нуқта эгри чизиқнинг бурилиш нуқтаси дейилади. Нуқтанинг бурилиш нуқта бўлиши учун зарурий шарғ бўлиб ўша нуқтада $y' = 0$ ёки унинг мавжуд бўлмаслиги ҳисобланса, ўша нуқта атрофида y' ўз ишорасини ўзгартириши унинг *етарли* шарти бўлади.

3°. Эгри чизиқни ясаш учун қуйидагиларни аниқлаш тавсия қилинади: 1) симметриклиги; 2) жойлашиш соҳаси; 3) Ox ва Oy ўқлар билан кесилган нуқталари; 4) $y = f(x)$ ёки $x = f(y)$ функцияларнинг узилиш нуқталари ва асимптоталари; 5) x ёки y нинг ўсиши ва камайиши ҳамда уларнинг экстремум нуқталари; 6) қавариқлик йўналиши ҳамда бурилиш нуқталари.

1246. 1) $y = x^2$; 2) $y = x^3$; 3) $y = e^x$; 4) $y = \ln x$; 5) $y = x^{1/2}$ эгри чизиқларнинг қавариқлик йўналишлари текширилсин ва ўзлари ясалсин.

1247. 1) $y = \frac{x^3}{6} - x^2$; 2) $y = e^{-x^2}$;

$$3) y = \frac{2x}{1+x^2}; \quad 4) y = 2^{\frac{1}{x}}$$

эгри чизикларнинг экстремум ҳамда бурилиш нуқталари аниқлансин ва эгри чизиклар ясалсин.

3° да кўрсатилган баъзи қондаларни татбиқ қилиб, 1248—1262- масалалардаги тенгламалар билан берилган эгри чизиклар ясалсин:

$$1248. y^2 = 2x + 9. \quad 1249. y = -x^2 - 4x.$$

Қўрсатма. 1248- масалада симметриклги, жойлашиш соҳаси ва координата ўқлари билан кесишган нуқталари, 1249- масалада бўлса экстремум ва Ox ўқ билан кесишган нуқталари аниқлансин.

$$1250. y = \sin x, \quad y = \cos x. \quad 1251. y = \operatorname{sh} x, \quad y = \operatorname{ch} x.$$

Қўрсатма. 1250, 1251- масалаларда экстремум ва бурилиш нуқталари аниқлансин.

$$1252. y = \ln(x + 2). \quad 1253. y = e^{-x}.$$

Қўрсатма. 1252, 1253- масалаларда жойлашиш соҳаси, ўқлар билан кесишган нуқталари, асимптоталари ҳамда қавариклик йўналиши аниқлансин.

$$1254. 1) y^2 = x^3; \quad 2) y^2 = (x + 3)^3.$$

$$1255. 1) y = 2 + \frac{12}{x^2 - 4}; \quad 2) y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}.$$

$$1256. 1) y = \frac{e \ln x}{x}; \quad 2) y = x e e^{-x}.$$

$$1257. 1) y = x + \frac{4}{x + 2}; \quad 2) y = \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2}.$$

$$1258. 1) y = x - \ln x; \quad 2) y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

$$1259. 1) y = \frac{x^4}{x^3 - 1}; \quad 2) y = \frac{4}{x} + \frac{1}{x^4}.$$

$$1260. 1) y^2 = 2x^2 - x^4; \quad 2) x(y - x)^2 = 4.$$

$$1261. y = (x + 2)^{1/2} - (x - 2)^{1/2}. \quad 1262. y^2 = x e^{-x}.$$

VIII БОБ

АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ

1- §. Аниқмас интеграл. Ёйиш усули билан интеграллаш

1°. Аниқмас интеграл $\int f(x) dx$ деб, ўзгармас C ни ўз ичига олган шундай $F(x) + C$ функцияга айтиладики, унинг дифференциали интеграл белгиси остидаги $f(x) dx$ ифодага тенгдир, яъни агар

$$d[F(x) + C] = f(x) dx$$

бўлса, $\int f(x) dx = F(x) + C$ бўлади.

2°. Асосий интегралларнинг жадвали:

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

($n \neq -1$).

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$5. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ \text{ёки} \\ -\operatorname{arctg} x + C_1. \end{cases}$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arcsin} x + C \\ \text{ёки} \\ -\operatorname{arcsin} x + C_1. \end{cases}$$

3°. Аниқмас интегралнинг хоссалари:

$$I. \int u dx = u dx.$$

$$II. \int du = u + C.$$

$$III. \int A u dx = A \int u dx.$$

$$IV. \int (u + v) dx = \int u dx + \int v dx.$$

Ейиш йўли билан интеграллаш (IV хоссага асосан) берилган интегрални содда интегралларнинг йиғиндисига келтиришдан иборатдир.

1263. Ушбу

$$1) d(\quad) = 2x dx; \quad 2) d(\quad) = x^3 dx;$$

$$3) d(\quad) = \cos x dx; \quad 4) d(\quad) = \frac{dx}{x};$$

$$5) d(\quad) = \frac{dx}{\cos^2 x}; \quad 6) d(\quad) = \frac{dx}{1+x^2}.$$

тенгликлардаги бўш жойлар тегишли мулоҳазалар ёрдамида тўлдирилсин. Сўнгра $\int 2x dx$, $\int x^3 dx$ ва ҳоказо интеграллар топилсин.

Қуйидаги интеграллар топилсин:

$$1264. 1) \int \left(x^3 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx; \quad 2) \int \frac{10x^3 + 3}{x^4} dx.$$

$$1265. 1) \int \frac{x-2}{x^3} dx; \quad 2) \int \frac{(x^2+1)^2}{x^3} dx.$$

$$1266. 1) \int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx; \quad 2) \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx.$$

$$1267. 1) \int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x} dx; \quad 2) \int \frac{x-1}{\sqrt{x^3}} dx.$$

$$1268. 1) \int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2} \right) dx; \quad 2) \int a^x \left(1 + \frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}} \right) dx.$$

$$1269. 1) \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx; \quad 2) \int \operatorname{ctg}^2 x dx.$$

$$1270. 1) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}; \quad 2) \int \frac{3 - 2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx.$$

$$1271. 1) \int \sin^2 \frac{x}{2} dx; \quad 2) \int \cos^2 \frac{x}{2} dx.$$

$$1272. 1) \int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx; \quad 2) \int \frac{x^4}{1+x^2} dx.$$

Қуйидаги интеграллар топилсин:

$$1273. 1) \int \frac{(x^2-1)^2}{x^3} dx; \quad 2) \int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^3}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) dx.$$

$$1274. 1) \int \frac{x-2}{\sqrt{x^3}} dx; \quad 2) \int \frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{x^2} dx.$$

$$1275. 1) \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx; \quad 2) \int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx.$$

$$1276. 1) \int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx; \quad 2) \int a^x \left(1 + \frac{a^{-x}}{x^3} \right) dx.$$

$$1277. \int \frac{1 - \sin^2}{\sin^2 x} dx; \quad 1278. \int \lg^2 x dx.$$

2- §. Урнига қўйиш усули билан ва бевосита интеграллаш

$x = \varphi(u)$, $dx = \varphi'(u) du$ деб олсак,

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(u)] \varphi'(u) du \quad (1)$$

бўлади.

Интегрални бу ҳилда алмаштириш ўрнига қўйиш ёрдами билан интеграллаш дейилади.

Содда ҳолларда, интеграл белгиси остидаги дифференциал ифодани қўйида кўрсатилгандек:

$$dx = \frac{1}{a} d(ax + b); \quad 2x dx = d(x^2);$$

$$\cos x dx = d(\sin x); \quad \frac{dx}{x} = d(\ln x) \text{ ва шунга ўхшаш}$$

алмаштириб ва қавслар ичидаги ифодаларни u деб фараз қилиш асосида, янги ўзгарувчи u ни киритиш амалини кўнгилда бажариш тавсия қилинади. Бу усул билан интеграллаш бевосита интеграллаш дейилади.

Қўйидаги интеграллар топилин:

$$1279. \int \cos 3x dx. \quad 1280. \int \sin \frac{x}{2} dx.$$

Кўрсатма. 1279- мисолни 1) $3x = u$, $x = \frac{u}{3}$, $dx = \frac{1}{3} du$ деб олиб:

2) берилган интегрални $\frac{1}{3} \int \cos 3x d(3x)$ кўринишга келтириб, икки усул билан ечиш мумкин.

$$1281. \int e^{-3x} dx. \quad 1282. \int \frac{dx}{\cos^2 5x}.$$

$$1283. \int (e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}) dx. \quad 1284. \int \sqrt{4x-1} dx.$$

$$1285. \int (3-2x)^4 dx. \quad 1286. \int \sqrt[3]{5-6x} dx.$$

$$1287. \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}} \quad 1288. \int \sin(a-bx) dx.$$

$$1289. \int \frac{2x-5}{x^2-5x+7} dx. \quad 1290. \int \frac{x dx}{x^2+1}.$$

Қўрсатма. 1289—1298- мисоллар ушбу

$$\int \frac{u' dx}{u} = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

формула билан ечилади, яъни интеграл белгиси остидаги касрнинг сўра-ти махражнинг дифференциалидан иборат бўлса, у ҳолда интеграл махражнинг логарифмига тенгдир.

$$1291. \int \frac{dx}{1-10x}. \quad 1292. \int \frac{e^{2x} dx}{1-3e^{2x}}.$$

$$1293. \int \operatorname{ctg} x dx. \quad 1294. \int \operatorname{tg} x dx.$$

$$1295. \int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} dx. \quad 1296. \int \frac{\sin x dx}{1+3 \cos x}.$$

$$1297. \int \frac{\cos x}{1+2 \sin x} dx. \quad 1298. \int \frac{dx}{x(1+\ln x)}.$$

$$1299. \int \sin^2 x \cos x dx. \quad 1300. \int \cos^3 x \sin x dx.$$

Қўрсатма. 1299- мисолни $\sin x = u$ деб ўрнига қўйиш йўли билан ёки бевосита $\cos x dx$ ни $d(\sin x)$ билан алмаштириб ечиш мумкин.

$$1301. \int \frac{\cos x dx}{\sin^4 x}. \quad 1302. \int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x}.$$

$$1303. \int \frac{1-2 \cos x}{\sin^2 x} dx. \quad 1304. \int \sin x \cos x dx.$$

$$1305. \int e^{\cos x} \sin x dx. \quad 1306. \int e^{x^3} x^2 dx.$$

Қўрсатма. 1306-мисолни $x^3 = u$ ўрнига қўйиш йўли билан ёки бевосита $x^2 dx$ ни $\frac{1}{3} d(x^3)$ билан алмаштириб ечиш мумкин.

$$1307. \int e^{-x^2} x dx. \quad 1308. \int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}.$$

$$1309. \int \sqrt{x^2+1} x dx. \quad 1310. \int \sqrt[3]{x^3-8} x^2 dx.$$

Қўрсатма. 1309- мисолни $x^2+1 = u$ ўрнига қўйиш усули билан ёки берилган интегрални $\frac{1}{2} \int (x^2+1)^{\frac{1}{2}} d(x^2+1)$ кўринишга келтириб ечиш мумкин.

$$1311. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}}.$$

$$1312. \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1313. \int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{1+2\cos x}}.$$

$$1314. \int \frac{\sqrt{1+\ln x} \, dx}{x}.$$

$$1315. \int \sqrt{1+4\sin x} \cos x \, dx.$$

$$1316. \int \sqrt[3]{1-6x^6} x^4 \, dx.$$

Қуйидаги интеграллар топилисин:

$$1317. \int (e^x + e^{-x})^2 \, dx.$$

$$1318. \int \sin^3 x \cos x \, dx.$$

$$1319. \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x}}.$$

$$1320. \int \cos(a-bx) \, dx.$$

$$1321. \int \sqrt[3]{1+3x} \, dx.$$

$$1322. \int \sqrt[6]{1-2x^3} x^2 \, dx.$$

$$1323. \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$1324. \int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x} \, dx.$$

$$1325. \int \frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x} \, dx.$$

$$1326. \int e^{\sin x} \cos x \, dx.$$

$$1327. \int \frac{x^2 \, dx}{1-x^3}.$$

$$1328. \int \frac{dx}{(a-bx)^2}.$$

3-§. $\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}}$ кўринишдаги ва шу кўринишга келтириладиган интеграллар.

1329. Қуйидагилар кўрсатилсин:

$$1) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C \text{ экани, } x = a \operatorname{tg} t \text{ деб;}$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \text{ экани, } x = a \sin t \text{ деб;}$$

$$3) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \text{ экани, } \frac{1}{x^2 - a^2} \text{ ни қуйида-}$$

$$\text{гича ёйиб: } \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \frac{a+x+a-x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right);$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C \text{ экани,}$$

$$\sqrt{x^2 + k} = t - x \text{ деб.}$$

Қуйидаги интеграллар ҳисоблансин:

$$1330. 1) \int \frac{dx}{x^2 - 25};$$

$$2) \int \frac{dx}{x^2 + 9}.$$

$$\begin{array}{ll}
1331. 1) \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}; & 2) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}. \\
1332. 1) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}; & 2) \int \frac{dx}{x^2+3}. \\
1333. 1) \int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}; & 2) \int \frac{x^2 dx}{4+x^4}. \\
1334. 1) \int \frac{x dx}{\sqrt{3-x^4}}; & 2) \int \frac{dx}{b^2 x^2 - a^2}. \\
1335. 1) \int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}; & 2) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^3-1}}. \\
1336. 1) \int \frac{5x-2}{x^2+4} dx; & 2) \int \frac{3x-4}{x^2-4} dx. \\
1337. 1) \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx; & 2) \int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx. \\
1338. \int \frac{x^2 dx}{x^2+1}. & 1339. \int \frac{x^4 dx}{x^2-3}.
\end{array}$$

Құрсапта. 1338, 1339-мисолларда олдин интеграл белгиси остидаги нотўғри касрнинг бутун қисмини ажратиш керак.

$$1340. \int \frac{dx}{x^2+4x+5}. \quad 1341. \int \frac{dx}{x^2-6x+13}.$$

Құрсапта. 1340—1347-мисолларда квадрат учқадлардан тўлиқ квадрат бўлган қисмини ажратиш зарур.

$$\begin{array}{ll}
1342. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}. & 1343. \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}. \\
1344. \int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^3}}. & 1445. \int \frac{dx}{x^2+3x+3}. \\
1346. \int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}. & 1347. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x-1}}.
\end{array}$$

Қуйидаги интеграллар топилсин:

$$\begin{array}{ll}
1348. \int \left(\frac{3}{x^2+3} + \frac{6}{x^2-3} \right) dx. & \\
1349. \int \left(\frac{1}{\sqrt{2-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+x^2}} \right) dx. & \\
1350. \int \frac{4x-5}{x^2+5} dx. & 1351. \int \frac{x^2 dx}{x^2-2}.
\end{array}$$

1352. $\int \frac{x^4 dx}{x^2 + 2}.$

1353. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}.$

1354. $\int \frac{xdx}{x^4 + 0,25}.$

1355. $\int \frac{dx}{x^3 + 4x + 29}.$

1356. $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5}.$

1357. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}.$

1358. $\int \frac{xdx}{x^3 + x + 1}.$

1359. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3}}.$

4-§. Бўлаклаб интеграллаш

Кўпайтманинг дифференциалини ҳисоблаш формуласи $d(uv) = u dv + v du$ дан бўлаклаб интеграллаш формуласи

$$\int u dv = uv - \int v du$$

келиб чиқади. Бу формула кўпроқ интеграл белгиси остида алгебраик функция билан трансцендент функциялар кўпайтмасидан иборат ифода-
лар бўлган ҳолларда татбиқ этилади. Масалан, $\int x^2 e^x dx$ ёки

$\int x \ln x dx$ га ўхшаш. Бу ҳолларда u деб дифференциаллаш натижаси-
соддалашадиган функцияни қабул қилиб, dv учун эса интеграл бел-
гиси остидаги ифоданинг dx ни ўз ичига олган ва интегрални маълум
ёки топилиши мумкин бўлган қисми қабул қилинади.

Одатда u деб трансцендент функциялардан $\ln x$, $\arctg x$ ва $\arcsin x$
лар қабул қилинади.

Масалан, $\int x^2 \ln x dx$ интегралда u деб $\ln x$ ни (x^2 ни эмас), $\int x^2 e^x dx$
интегралда эса x^2 ни (e^x ни эмас) қабул қилиш керак.

Қуйидаги интеграллар топилин:

1360. $\int \ln x dx.$

1361. $\int x \ln(x - 1) dx.$

1362. $\int x e^{2x} dx.$

1363. $\int x \arctg x dx.$

1364. $\int x^2 \cos x dx.$

1365. $\int e^x \sin x dx.$

$$1366. \int \sqrt{x^2 + k} dx = \frac{1}{2} [x \sqrt{x^2 + k} + k \ln(x + \sqrt{x^2 + k})] + C \text{ экани кўрсатилсин.}$$

1367. $\int (\ln x)^2 dx.$

1368. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}.$

$$\begin{array}{ll}
 1369. \int \frac{\ln x dx}{x^2} & 1370. \int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x}} \\
 1371. \int \arcsin x dx & 1372. \int x^2 e^{-x} dx \\
 1373. \int \ln(x^2 + 1) dx & 1374. \int \cos(\ln x) dx
 \end{array}$$

Қуйидаги интеграллар топилин:

$$\begin{array}{ll}
 1375. \int \sqrt{x} \ln x dx & 1376. \int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx \\
 1377. \int \arctg x dx & 1378. \int \frac{x dx}{\cos^2 x} \\
 1379. \int e^x \cos x dx & 1380. \int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}} dx \\
 1381. \int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x} & 1382. \int \arctg \sqrt{2x-1} dx
 \end{array}$$

5-§. Тригонометрик функцияларни интеграллаш

1°. Синус ҳамда косинуснинг квадратларидан ва уларнинг бошқа жуфт даражаларидан олинган интеграллар, ушбу

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

формулаларни татбиқ этиб даражаларини пасайтиргандан сўнг топилади.

2°. Синус ҳамда косинуснинг кубларидан ва уларнинг бошқа тоқ даражаларидан олинган интеграллар, ўша тоқ даражалардан битта кўпайтувчини ажратиб ва кофункцияни и деб олиб топилади.

$\int \cos^m x \sin^n x dx$ интегралда m ва n ларнинг иккаласи ҳам жуфт бўлса, интеграл 1° усул билан топилади, борди-ю m ёки n лардан биттаси тоқ бўлса, 2° усул билан топилади.

$$\begin{array}{ll}
 1383. \int \sin^3 x dx & 1384. \int (1 + 2 \cos x)^2 dx \\
 1385. \int (1 - \sin 2x)^2 dx & 1386. \int \cos^4 x dx \\
 1387. \int \sin^2 x \cos^2 x dx & 1388. \int \sin^4 x \cos^4 x dx
 \end{array}$$

1389. $\int \sin^2 \cos^4 x \, dx.$

1390. $\int \sin^5 x \, dx.$

1391. $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx.$

1392. $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx.$

1393. $\int \cos^7 x \, dx.$

1394. $\int (1 + 2 \cos x)^3 \, dx.$

1395. $\int \frac{\cos^3 x \, dx}{\sin^2 x}.$

1396. $\int \frac{\sin^3 x \, dx}{\cos^2 x}.$

1397. $\int \frac{dx}{\sin 2x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2 \sin x \cos x} dx = ?$

1398. 1) $\int \frac{dx}{\sin x},$ 2) $\int \frac{dx}{\cos x}.$

1399. $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin 2x} dx.$

1400. $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}.$

1401. $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx.$

1402. $\int \operatorname{ctg}^3 x \, dx.$

Құрастырма. 1401-мисолда $\operatorname{tg} x = t, x = \arctg t$ деб олинсын.

1403. $\int \sin 3x \cos x \, dx.$

1404. $\int \cos mx \cos nx \, dx.$

Құрастырма. 1403—1406-мисолларға ушбу

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)], \cos \alpha \cos \beta = \\ &= \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)], \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \\ &\quad - \cos (\alpha + \beta)] \end{aligned}$$

формулалар татбиқ қилинсын.

1405. 1) $\int \sin 3x \sin 5x \, dx;$ 2) $\int \sin mx \sin nx \, dx.$

1406. $\int \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) dx.$

1407. Бұлақлаб интеграллаш асосида ушбу

1) $\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx;$

2) $\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$

«даражаларни пасайтириш» формулалари чиқарилсин ва ўша формулаларға асосан 1) $\int \sin^6 x \, dx;$ 2) $\int \cos^6 x \, dx$ интеграллар топилсин.

1408. Ушбу

$$1) \int \frac{dx}{\sin^3 x}; \quad 2) \int \frac{dx}{\cos^3 x}$$

интеграллар топилсин.

Қўрсатма. $\int \frac{dx}{\sin x}$ ва $\int \frac{dx}{\cos x}$ интегралларга 1407-масаладаги формулалар татбиқ қилинсин.

$$1409. \int (1 + 3\cos 2x)^2 dx.$$

$$1410. \int \sin^4 x dx.$$

$$1411. \int \sin^4 x \cos^2 x dx.$$

$$1412. \int \cos^5 x dx.$$

$$1413. \int \sin^3 x \cos^3 x dx.$$

$$1414. \int (1 + 2 \sin x)^3 dx.$$

$$1415. \int \frac{(\sin x - \cos x)^2}{\sin 2x} dx.$$

$$1416. \int \sin 3x \sin x dx.$$

$$1417. \int \frac{\sin^3 x + 1}{\cos^2 x} dx.$$

$$1418. \int \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \cos x dx.$$

6-§. Рационал алгебраик функцияларни интеграллаш

1°. Агар интеграл белгиси остидаги каср *ноғўри каср* бўлса, олдин ундан бутун қисмини ажратиш керак.

2°. Тўғри каср махражга $(x-a)^\alpha$ ва $(x^2+px+q)^\beta$ [қўринишдаги кўпайтувчиларга ажратилади, тўғри касрнинг ўзи эса

$$\frac{P(x)}{(x-a)^\alpha (x^2+px+q)^\beta \dots} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} +$$

$$+ \frac{M_1 x + N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{M_\beta x + N_\beta}{(x^2+px+q)^\beta} + \dots$$

қўринишдаги бир нечта элементар касрлар йиғиндисига ажратилади. Бундаги $P(x)$ —махражга нисбатан паст даражали кўпхаддир.

Қуйидаги интеграллар топилсин:

$$1419. 1) \int \frac{x^3}{x-2} dx; \quad 2) \int \frac{x^4}{x^2+a^2} dx; \quad 3) \int \frac{x^6}{x^3-a^3} dx.$$

$$1420. \int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} dx. \quad 1421. \int \frac{2x+7}{x^2+x-2} dx.$$

$$1422. \int \frac{3x^3 + 2x - 3}{x^3 - x} dx.$$

$$1423. \int \frac{(x+1)^3}{x^2 - x} dx.$$

$$1424. \int \frac{x+2}{x^3 - 2x^2} dx.$$

$$1425. \int \frac{3x - 2a}{x^4 - ax^3} dx.$$

$$1426. \int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx.$$

$$1427. \int \frac{5x - 1}{x^3 - 3x - 2} dx.$$

$$1428. \int \frac{5x + 2}{x^3 + 2x + 10} dx.$$

$$1429. \int \frac{4x - 2,4}{x^3 - 0,2x + 0,17} dx.$$

Қўрсатма. 1428-мисолнинг махражиди тўлиқ квадрат ифодани ажратгандан сўнг $x + 1$ ни t деб олиш керак.

$$1430. \int \frac{2x^2 + x + 4}{x^3 + x^2 + 4x + 4} dx.$$

$$1431. \int \frac{7x - 15}{x^3 - 2x^2 + 5x} dx.$$

$$1432. \int \frac{dx}{x^3 + 8}.$$

$$1433. \int \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx.$$

$$1434. 1) \int \frac{dx}{(x^2 + b^2)^2};$$

$$2) \int \frac{dx}{(x^2 + b^2)^3}.$$

Қўрсатма. $x = b \operatorname{tg} t$ деб олиб, сўнггра (иккинчи мисолда) 1407-масаладаги 2) формулани татбиқ қилиш керак.

$$1435. 1) \int \frac{(2x+1)dx}{(x^3 + 2x + 5)^2};$$

$$2) \int \frac{dx}{(x^2 - 6x + 10)^2}.$$

$$1436. \int \frac{4x dx}{(1+x)(1+x^2)^2}.$$

$$1437. \int \frac{x+1}{x^4 + 4x^2 + 4} dx.$$

Аниқмас коэффициентларнинг умумий усулини татбиқ қилмасдан, қуйидаги интеграллар топилин:

$$1438. \int \frac{dx}{x(x+a)}.$$

$$1439. \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}.$$

1438—1442-мисолларга *қўрсатма.* Интеграл белгиси остидаги касрнинг суратига махраж кўпайтувчиларининг айирмасини ёзиб, интегрални мос (ўша айирмага тенг) сонга бўлиш керак.

$$1440. \int \frac{dx}{x^3 - 2x}.$$

$$1441. \int \frac{dx}{(x^2 - 3)(x^2 + 2)}.$$

$$1442. \int \frac{dx}{x^4 - x^2}.$$

$$1443. \int \frac{dx}{x^3 + 4x}.$$

Қуйидаги интеграллар топилин:

$$1444. \int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} dx.$$

$$1445. \int \frac{3x+2}{2x^2+x-3} dx.$$

$$1446. \int \frac{5x-14}{x^3-x^2-4x+4} dx.$$

$$1448. \int \frac{5x-8}{x^3-4x^2+4x} dx.$$

$$1450. \int \frac{x-a}{x^3+a^2x} dx.$$

$$1452. \int \frac{dx}{x^3-8}.$$

$$1447. \int \frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2} dx.$$

$$1449. \int \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x} dx.$$

$$1451. \int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}.$$

$$1453. \int \frac{xdx}{(x^2+2x+2)^2}.$$

1454—1457. мисоллардаги интеграллар аниқмас коэффициентлар усулидан фойдаланмасдан ҳисоблансин.

$$1454. \int \frac{dx}{x^3+5x}.$$

$$1455. \int \frac{dx}{x^4+3x^2}.$$

$$1456. \int \frac{dx}{x^4-1}.$$

$$1457. \int \frac{dx}{x^4-x^2-2}.$$

7-§. Баъзи бир иррационал алгебраик функцияларни интеграллаш

1°. $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx$ кўринишдаги интеграл, бунда $R(x, y)$ —рационал функция, $ax+b=t^n$ ўрнига қўйиш ёрдами билан топилади, умумийроқ кўринишдаги $\int R(x^m, \sqrt[n]{ax^m+b}) x^{m-1} dx$ интеграл бўлса, $ax^m+b=t^n$ ўрнига қўйиш ёрдами билан топилади.

2°. $\int \frac{(Mx+N)dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ кўринишдаги интеграл $x-a=\frac{1}{t}$ ўрнига қўйиш ёрдами билан топилади.

3°. Тригонометрик ўрнига қўйишлар.

$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2}) dx$ кўринишдаги интеграл $x=asin t$ ўрнига қўйиш натижасида, $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2}) dx$ кўринишдаги интеграллар $x=atg t$ ўрнига қўйиш натижасида рационал тригонометрик кўринишга келтирилади.

4°. $\int \frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\dots+a_m}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ кўринишдаги интегралдан ушбу

$$\int \frac{a_0x^m+\dots+a_m}{W} dx = (A_0^{m-1}+\dots+A_{m-1})W + A_m \int \frac{dx}{W}$$

формулага асосан алгебраик қисмини ажратиш мумкин. Бунда $W = \sqrt{ax^2 + bx + c}$. А коэффициентлар тенгликнинг икки томонини дифференциаллаб ва махраждан қутқаргандан сўнг чап ва ўнг томонидаги бир хил даражали x лар олдидаги коэффициентларни тенглаштириб топилади.

5°. Дифференциал биномдан олинган $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ интеграл қуйидаги уч ҳолда охиригача олиниши мумкин: 1) p —бутун бўлганда ёйиш ёрдами билан; 2) $\frac{m+1}{n}$ бутун бўлганда $a + bx^n = t^s$ ўрнига қўйиш ёрдами билан; 3) $\frac{m+1}{n} + p$ бутун бўлганда эса $ax^{-n} + b = t^s$ ўрнига қўйиш ёрдами билан, s бунда p нинг махражидан иборат.

1° ўрнига қўйишдан фойдаланиб, қуйидаги интеграллар топилсин:

$$1458. \int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx.$$

$$1459. \int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1+1}}.$$

$$1460. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}.$$

$$1461. \int x \sqrt{a-x} dx.$$

$$1462. \int \frac{x^3 dx}{1 + \sqrt[3]{x^4 + 1}}.$$

$$1463. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 + 2}}.$$

2° ўрнига қўйишдан фойдаланиб, қуйидаги интеграллар топилсин:

$$1464. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$1465. \int \frac{dx}{x \sqrt{2x^2 + 2x + 1}}.$$

$$1466. \int \frac{dx}{x \sqrt{2ax - x^2}}.$$

$$1467. \int \frac{dx}{(x+1) \sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

3° ўрнига қўйишдан фойдаланиб, қуйидаги интеграллар топилсин:

$$1468. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

$$1469. \int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}.$$

$$1470. \int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx.$$

$$1471. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}.$$

$$1472. \int \sqrt{3 + 2x - x^2} dx.$$

$$1473. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(2-x^2)^3}}.$$

4° қоидадан фойдаланиб, қуйидаги интеграллар топилсин:

$$1474. \int \frac{x^2 + 4x}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx.$$

$$1475. \int \frac{xdx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}.$$

$$1476. \int \sqrt{x^2 + k} dx.$$

$$1477. \int \sqrt{2ax - x^2} dx.$$

Дифференциал биномлардан олинган қуйидаги интеграллар топилсин.

$$1478. \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^3}}.$$

$$1479. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt[3]{2-x^3}}.$$

$$1480. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

$$1481. \int \frac{x^3 dx}{(a-bx^2)^{3/2}}.$$

Қуйидаги интеграллар топилсин:

$$1482. \int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} dx.$$

$$1483. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}.$$

$$1484. \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}+1}.$$

$$1485. \int \frac{x}{\sqrt[3]{a-x}} dx.$$

$$1486. \int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx.$$

$$1487. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^3+1}-1}.$$

$$1488. \int \frac{x dx}{x^2+2+2\sqrt{1+x^2}}.$$

$$1489. \int \frac{x^3 dx}{2+\sqrt{4-x^2}}.$$

$$1490. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x}}.$$

$$1491. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}.$$

$$1492. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$1493. \int \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx.$$

Қўрсатма. 1493- мисолда $x=2\sin^2 t$ деб олинсин.

$$1494. \int \sqrt{4x+x^2} dx.$$

$$1495. \int \frac{x^2}{\sqrt{5+4x+x^2}} dx.$$

$$1496. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1+x^2}}.$$

$$1497. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}.$$

$$1498. \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1499. \int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}.$$

8- §. Баъзи бир трансцендент функцияларни интеграллаш

Қуйидаги интеграллар:

$\int R(e^x) dx$ интеграл $e^x = t$, $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$ ўрнига қўйиш ёрдами билан;

$\int R(\operatorname{tg} x) dx$ интеграл $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ ўрнига қўйиш ёрдами билан;

$\int R(\sin x, \cos x) dx$ интеграл $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ ўрнига қўйиш ёрдами билан рационал алгебраик кўринишга келтирилади.

Қуйидаги интеграллар топилсин:

$$1500. \int \frac{e^{2x} - 2e^x}{e^{2x} + 1} dx.$$

$$1501. \int \operatorname{tg}^4 x dx.$$

$$1502. \int \frac{e^{3x} dx}{e^x + 2}.$$

$$1503. \int \frac{dx}{\sin x}.$$

$$1504. \int \frac{dx}{5 + 3 \cos x}.$$

$$1505. \int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x}.$$

$$1506. \int \frac{dx}{\sin^4 x}.$$

$$1507. \int \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x}.$$

Қўрсатма. Интеграл белгиси остида $\sin x$ ва $\cos x$ ларнинг фақат жуфт даражаларига бўлган 1506, 1507, 1512, 1513- мисолларда

$$\operatorname{tg} x = t, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

ўрнига қўйишни татбиқ қилиш яхши.

Қуйидаги интеграллар топилсин:

$$1508. \int \frac{e^{2x} dx}{e^x - 1}.$$

$$1509. \int \operatorname{tg}^6 x dx.$$

$$1510. \int \frac{e^{3x} dx}{e^{2x} - 1}.$$

$$1511. \int \frac{dx}{3 + \cos x}.$$

$$1512. \int \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

$$1513. \int \frac{dx}{1 + 3 \sin^2 x}.$$

$$1514. \int \frac{dx}{2 \sin x + \sin 2x}.$$

$$1515. \int \frac{1 + \cos x}{\sin^3 x} dx.$$

$$1516. \int \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx.$$

$$1517. \int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx.$$

9- §. Гиперболик функцияларни интеграллаш.
Гиперболик ўрнига қўйишлар

$$\begin{aligned} 1. \int \operatorname{ch} x \, dx &= \operatorname{sh} x + C. & 2. \int \operatorname{sh} x \, dx &= \operatorname{ch} x + C. \\ 3. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} &= \operatorname{th} x + C. & 4. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} &= -\operatorname{cth} x + C. \end{aligned}$$

$\operatorname{sh} x$ ва $\operatorname{ch} x$ ларнинг квадратларидан ва бошқа жуфт даражаларидан олин-
диган интеграллар

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}, \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{sh} 2x - 1}{2}, \quad \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{sh} 2x}{2}$$

формулаларни татбиқ қилиб топилади.

$\operatorname{ch} x$ ва $\operatorname{sh} x$ ларнинг тоқ даражаларидан олинладиган интеграллар
 $\sin x$ ва $\cos x$ ларнинг тоқ даражаларидан олинладиган интеграллар син-
гари топилади.

Гиперболик ўрнига қўйишлар баъзан $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) \, dx$,
 $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) \, dx$ кўринишдаги интегрални топнишда татбиқ қилинади.
Масалан, биринчи интегрални топнишда $x = a \operatorname{ch} t$, иккинчисини топнишда
 $x = a \operatorname{sh} t$ ўрнига қўйишлар татбиқ этилади. Шунинг билан бирга агар
 $x = a \operatorname{ch} t$ бўлса, у ҳолда $t = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right|$ бўлади, агар $x = a \operatorname{sh} t$
бўлса, у ҳолда $t = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}$ бўлади.

Қуйидаги интеграллар ҳисоблансин:

$$\begin{aligned} 1518. 1) \int \operatorname{sh}^3 3x \, dx; & \quad 2) \int (1 + \operatorname{sh} 2x)^2 \, dx. \\ 1519. \int \operatorname{ch}^3 x \, dx. & \quad 1520. \int \operatorname{th} x \, dx. \\ 1521. \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x + 1}. & \quad 1522. \int \frac{dx}{\operatorname{th} x - 1}. \\ 1523. \int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx. & \quad 1524. \int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx. \\ 1525. \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}. & \quad 1526. \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 5)^3}}. \end{aligned}$$

Қуйидаги интеграллар ҳисоблансин:

$$\begin{aligned} 1527. \int \operatorname{sh}^3 3x \, dx. & \quad 1528. \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x \, dx. \\ 1529. \int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch} x \, dx. & \quad 1530. \int \operatorname{cth}^2 x \, dx. \end{aligned}$$

$$1531. \int \sqrt{\operatorname{ch} x + 1} dx.$$

$$1532. \int \frac{1 + 2 \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} dx.$$

$$1533. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 - 3}}.$$

$$1534. \int \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x^2} dx.$$

10- §. Интеграллашга донр аралаш мисоллар

Қуйидаги интеграллар топилинсин:

$$1535. \int \frac{\sqrt{1+x} dx}{x}.$$

$$1536. \int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx}{1+x^2}.$$

$$1537. \int \frac{dx}{x^3 + ax^2}.$$

$$1538. \int \frac{dx}{1 + \sin x}.$$

$$1539. \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

$$1540. \int \frac{dx}{\frac{\sin^2 x}{a^2} + \frac{\cos^2 x}{b^2}}.$$

$$1541. \int x \cos^2 x dx.$$

$$1542. \int \frac{dx}{e^{2x} + e^x}.$$

$$1543. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx.$$

$$1544. \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^4 x}.$$

$$1545. \int x \operatorname{tg}^2 x dx.$$

$$1546. \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin x}.$$

$$1547. \int \frac{\sin x dx}{b^2 + \cos^2 x}.$$

$$1548. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 + 2\sqrt{x}}}.$$

$$1549. \int \frac{ax-b}{(ax+b)^4} dx.$$

$$1550. \int \frac{dx}{x^4 + x^2}.$$

$$1551. \int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}.$$

$$1552. \int \frac{dx}{x\sqrt{a+b \ln x}}.$$

$$1553. \int \frac{x^2 dx}{(a-bx^3)^n}.$$

$$1554. \int \sqrt{1-2x-x^2} dx.$$

$$1555. \int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^3}.$$

$$1556. \int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx}{x^2}.$$

$$1557. \int \frac{e^x - 2}{e^{3x} + 4} dx.$$

$$1558. \int \frac{dx}{(2x+1)(1+\sqrt{2x+1})}.$$

$$1559. \int \operatorname{ctg}^4 x dx.$$

$$1560. \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx.$$

$$1561. 1) \int \frac{\cos x}{\cos 3x} dx;$$

$$2) \int \frac{\sin x}{\sin 3x} dx.$$

$$1562. 1) \int \frac{dx}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}};$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-x}.$$

$$1563. \int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2} dx.$$

$$1565. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^3 - 1}}.$$

$$1567. \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$1569. \int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x} dx.$$

$$1571. \int \frac{dx}{e^{3x} - e^x}.$$

$$1573. \int \frac{\ln(x+1) dx}{x^2}.$$

$$1575. \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}.$$

$$1577. \int e^{-\sqrt{x}} dx.$$

$$1579. \int \frac{\sqrt{\tan x} dx}{\sin 2x}.$$

$$1581. \int \frac{a^x dx}{a^{2x} + 1}.$$

$$1583. \int \sqrt{\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}} dx.$$

$$1585. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$1587. \int \frac{x-a}{\sqrt{2ax + x^2}} dx.$$

$$1589. \int \frac{\cos^3 x + 1}{\sin^2 x} dx.$$

$$1564. \int \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x^3} dx.$$

$$1566. \int \frac{dx}{1 + \tan x}.$$

$$1568. \int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x} dx.$$

$$1570. \int \frac{\ln(\cos x) dx}{\sin^2 x}.$$

$$1572. \int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^5 x}.$$

$$1574. \int \sqrt{1 - \sin x} dx.$$

$$1576. \int \frac{x dx}{x^4 - x^2 - 2}.$$

$$1578. \int \frac{\arcsin \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}.$$

$$1580. \int \frac{\ln(x^2 + 1) dx}{x^3}.$$

$$1582. \int \frac{1 - \sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$1584. \int \frac{x \arcsin x dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$1586. \int \frac{x^2 dx}{(x+1)^4}.$$

$$1588. \int \frac{4x+1}{2x^3 + x^2 - x} dx.$$

$$1590. \int \frac{dx}{x^4 + 4}.$$

IX БОБ

АНИҚ ИНТЕГРАЛ

1-§. Аниқ интегрални ҳисоблаш

$[a, b]$ сегментда $f(x)$ функция аниқланган бўлсин. $[a, b]$ сегментни $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ нуқталар билан n та бўлақларга ажратайлик.

Ҳар бир $[x_{i-1}, x_i]$ сегментдан ихтиёрий ξ_i нуқта олиб, $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$

йиғиндини тузамиз, бунда $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ кўринишдаги

йиғинди *интеграл йиғинди* дейилиб, унинг $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ даги limiti, у мавжуд ва чекли бўлса, $f(x)$ функциянинг a дан b гача *аниқ интеграли* дейилади ҳамда

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (1)$$

кўринишда ёзилади.

Бу ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда *интегралланувчи* дейилади. $f(x)$ функциянинг *интегралланувчи бўлиши* учун унинг $[a, b]$ сегментда *узлуксиз* бўлиши ёки чекли сондаги чекли узилишларга эга бўлиши кифоядир.

$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда *узлуксиз* бўлсин. У ҳолда бу сегментда

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (2)$$

аниқмас интеграл мавжуддир ва ушбу

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \left[\int_a^x f(x) dx \right]_a^b \quad (3)$$

формула ўринли, яъни *узлуксиз функциядан олинган аниқ интеграл бошланғич функциянинг (ёки аниқмас интегралнинг) юқори ва қўли чегаралардаги қийматларининг айирмасига тенгдир*. (3) формула Ньютон-Лейбниц формуласи дейилади.

1591. Ушбу

$$1) \int_0^a x dx; 2) \int_0^a x^2 dx; 3) \int_0^a e^x dx; 4) \int_0^{\pi} \sin x dx$$

интеграллар интеграл йиғиндиларни тузиш ва лимитга ўтиш йўли билан топилсин.

Қўрсатма. Иккинчи ва тўртинчи мисолларни ечишда 1034 ва 647- мисолларнинг натижаларидан фойдаланилсин.

1592. [1, 2] сегментни бешта тенг бўлакка ажратиб

$\int_1^2 \frac{dx}{x}$ интеграл учун s_5 ва S_5 «қуйи» ва «юқори» интеграл йиғиндилар ҳисоблансин. Натижа интегралнинг аниқ қиймати билан таққослансин.

Қўрсатма. Ажралган бўлакларнинг i -сида интеграл остидаги функциянинг энг кичик қиймати m_i , энг катта қиймати M_i деб белгиласак, $s_5 = \sum_{i=1}^5 m_i \Delta x$, $S_5 = \sum_{i=1}^5 M_i \Delta x$.

Қуйидаги интеграллар ҳисоблансин:

$$1593. \int_1^3 x^3 dx.$$

$$1594. \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx.$$

$$1595. \int_1^4 \sqrt{x} dx.$$

$$1596. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$1597. \int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2}.$$

$$1598. \int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx.$$

$$1599. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$1600. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx.$$

$$1601. \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}.$$

$$1602. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2} dx.$$

Қўрсатма. 1601- мисолда $x = t^2$ ўрнига қўйишни татбиқ этиш керак; бунда интегралнинг чегаралари ўзгаради, буни

x	4	9
t	2	3

жадвал би-

лан кўрсатиш мумкин. Шунга ўхшаш 1602- мисолда $\operatorname{tg} x = t$ ўрнига қўйишни татбиқ этиб, бунга мос равишда интеграл чегараларини ўзгартириш керак.

$$1603. \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}.$$

$$1604. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$1605. \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}.$$

$$1606. \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx.$$

$$1607. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx.$$

$$1608. \int_0^{\sqrt{a}} x^2 \sqrt{a-x^2} dx.$$

$$1609. \int_0^1 \ln(x+1) dx.$$

$$1610. \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx.$$

$$1611. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}^3}.$$

$$1612. \int_0^3 \frac{dx}{x+x^2}.$$

1613. 1407- масала формуласидан

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx$$

тенгликни ҳосил қилиб,

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx; \quad 2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx; \quad 3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx$$

интеграллар ҳисоблансин.

Қуйидаги интеграллар ҳисоблансин:

$$1614. \int_0^a (x^2 - ax) dx.$$

$$1615. \int_2^3 \frac{dx}{x^2}.$$

$$1616. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{4x - x^2}}$$

$$1617. \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$$

$$1618. \int_1^4 \frac{dx}{(1 + \sqrt{x})^2}$$

$$1619. \int_0^1 \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$$

$$1620. \int_1^5 \frac{x dx}{\sqrt{4x + 5}}$$

$$1621. \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2} dx$$

$$1622. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$$

$$1623. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x dx$$

1624. 1407-масаланинг формуласидан

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x dx$$

тенглик чиқарилсин ва

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx; \quad 2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx; \quad 3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx$$

интеграллар ҳисоблансин.

2-§. Юзларни ҳисоблаш

1°. Ох ўққа ёпишган A_1ABB_1 эгри чизиқли трапециянинг юзи (33-чизма).

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum y \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} y dx. \quad (1)$$

A_1APP_1 ўзгарувчи юзнинг дифференциали $dS = y dx$. Агар эгри чизиқ $x = f(t)$ ва $y = \varphi(t)$ тенгламалар билан берилган бўлса, у ҳолда $dS = \varphi(t) \cdot f'(t) dt$.

2°. Оу ўққа ёпишган эгри чизиқли трапециянинг юзи

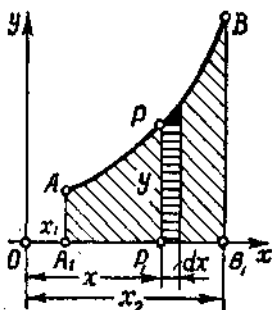
$$S = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \sum x \Delta y = \int_{y_1}^{y_2} x dy. \quad (2)$$

Ўзгарувчи юзнинг дифференциали $dS = x dy$.

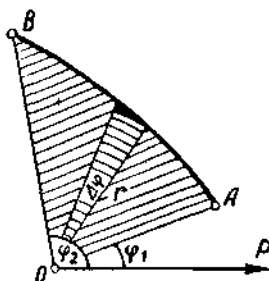
3°. Қутб координаталар системасида берилган эгри чизиқли QAB секторнинг юзи (34- чизма).

$$S = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \sum \frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2} r^2 d\varphi. \quad (3)$$

Ўзгарувчи юзнинг дифференциали $dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$.



33- чизма.



34- чизма

Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган юзлар ҳисоблансин:

1625. $y = 4 - x^2$, $y = 0$. 1626. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1627. $y^3 = 2px$, $x = h$. 1628. $y = 3 - 2x - x^2$,
 $y = 0$.

1629. $xy = 4$, $x = 1$, 1630. $y = \ln x$, $x = e$,
 $x = 4$, $y = 0$. $y = 0$.

1631. $y^2 = 2x + 4$, $x = 0$. 1632. $y^2 = x^3$, $y = 8$.
 $x = 0$.

1633. $y^2 = (4 - x)^3$, $x = 0$. 1634. $4(y^3 - x^2) + x^3 = 0$
эгри чизиқ илмоғи.

1635. $y = x^2$, $y = 2 - x^2$. 1636. $y = x^2 + 4x$,
 $y = x + 4$.

1637. $a^2 y^2 = x^3 (2a - x)$. 1638. $(y - x)^3 = x^3$, $x = 1$.

1639. $y^2 (2a - x) = x (x - a)^3$ строфоида илмоғи.

1640. $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ занжир чизиқ, $x = \pm a$ ва
 $y = 0$ чизиқлар.

1641. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоиданинг бир
даври (аркаси) ва Ox ўқ.

1642. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ астроида.
 1643. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ лемниската.
 1644. $r = a(1 - \cos \varphi)$ кардиоида.
 1645. $r = 3 + \sin 2\varphi$ } ҳар бир чизиқнинг қўшни энг
 1646. $r = 2 - \cos 3\varphi$ } катта ва энг кичик радиус-вектор-
 лари орасидаги юз.
 1647. $r = a \cos 2\varphi$ 1648. $r = a \sin 3\varphi$.
 1649. $r = a(\sin \varphi + \cos \varphi)$. 1650. $r = \frac{a}{\varphi}$. $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq 2\pi$.
 1651. $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ эгри чизиқ билан чегараланиб, қутб
 ўқидан пастда ётган юз.
 1652. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ Декарт япроғининг илмоғи би-
 лан чегараланган юз (83-чизмага қаралсин) (қутб координа-
 таларига ўтилсин).
 Қўрсатма. $\int \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi}{(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi)^2}$ интегралда касрнинг сурат ва мах-
 ражини $\cos^3 \varphi$ га бўлиб, $\operatorname{tg} \varphi = u$ деб олиш керак.

Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган юзлар ҳисоблан-
 син:

1653. $y = 6x - x^2$, $y = 0$. 1654. $y = x^3$, $y = 8$,
 $x = 0$.
 1655. $y^2 = 1 - x$ ва $x = -3$. 1656. $y^2 + x^4 = x^3$.
 1657. $y = x^3 + 4x + 5$, $x = 0$, $y = 0$ ва берилган парабо-
 ланинг минимал ординатаси билан чегараланган юз.
 1658. $y = \sin x$ синусоиданинг битта ярим тўлқини ва
 $y = 0$ орасидаги юз.
 1659. $4y = x^2$ ва $y^2 = 4x$.
 1660. $xy = 6$ ва $x + y - 7 = 0$.
 1661. $x^3 + x^2 - y^2 = 0$ эгри чизиқнинг илмоғи билан че-
 гараланган юз.
 1662. $r = 3 - \cos 2\varphi$ } ҳар бир чизиқнинг қўшни энг
 1663. $r = 2 + \sin 3\varphi$ } катта ва энг кичик радиус-век-
 торлари орасидаги юз.
 1664. $r = a \sin 2\varphi$. 1665. $r = a \cos 3\varphi$.
 1666. $r = ae^{\varphi}$; $\varphi = -\pi$ дан $\varphi = \pi$ гача.
 1667. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ва $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ эллипсларнинг умумий
 қисмининг юзи (қутб координаталарига ўтилсин).
 1668. $r = a(1 + \sin^2 2\varphi)$ ва $r = a$.

3- §. Айланиш жисмининг ҳажми

1°. A_1ABB_1 эгри чизиқли трапециянинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмининг ҳажми, $\overline{AB}$ ёй $y = f(x)$ эгри чизиқнинг ёйи бўлса,

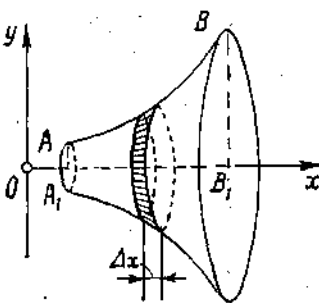
$$V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \pi y^2 \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} \pi y^2 dx \quad (1)$$

формула билан аниқланади.

Ўзгарувчи ҳажмининг дифференциали $dV = \pi y^2 dx$.

2°. Oy ўққа ёпишган эгри чизиқли трапециянинг Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмининг ҳажми

$$V = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \sum \pi x^2 \Delta y = \int_{y_1}^{y_2} \pi x^2 dy \quad (2)$$



35- чизма.

формула билан аниқланади.

Ўзгарувчи ҳажмининг дифференциали $dV = \pi x^2 dy$.

Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган фигураларнинг айланишидан ҳосил бўлган жисмларнинг ҳажмлари аниқлансин:

1669. $y^2 = 2px$ ва $x = h$, Ox ўқ атрофида.

1670. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ва $y = \pm b$, Oy ўқ атрофида.

1671. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$, Ox ўқ атрофида.

1672. $y^2 = (x + 4)^3$ ва $x = 0$, Oy ўқ атрофида.

1673. $x^2 + y^2 = a^2$, $x = b > a$ тўғри чизиқ атрофида.

Қурсатма. $dV = \pi(b+x)^2 dy - \pi(b-x)^2 dy = 4\pi b x dy$.

1674. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $x = \pm a$, $y = 0$, Ox ўқ атрофида.

1675. $y^2 = 4 - x$, $y = 0$, Oy ўқ атрофида.

1676. $(y - a)^2 = ax$, $x = 0$, $y = 2a$, Ox ўқ атрофида.

1677. $y = \cos x$ ва $y = -1$, $-\pi \leq x \leq \pi$ бўлганда $y = -1$ тўғри чизиқ атрофида.

1678. $y = x \sqrt{-x}$, $x = -4$ ва $y = 0$, Oy ўқ атрофида.

1679. $y = \cos \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, $x = 0$; $y = 0$, $(x > 0)$ бўлганда

Ox ўқ атрофида.

1680. $y = a - \frac{x^2}{a}$ ва $x + y = a$, Oy ўқ атрофида.

Қуйидаги чизиклар билан чегараланган фигураларнинг айланишидан ҳосил бўлган жисмларнинг ҳажмлари аниқлансин:

1681. $y = \sin x$ (битта ярим тўлқини), $y = 0$, Ox ўқ атрофида.

1682. $x^2 - y^2 = 4$, $y = \pm 2$, Oy атрофида.

1683. $y = \frac{1}{1+x^2}$, $x = \pm 1$, $y = 0$, Ox ўқ атрофида.

1684. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, Oy ўқ атрофида:

1685. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, Ox ўқ атрофида.

1686. $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$, Oy ўқ атрофида.

1687. $x^2 - y^2 = a^2$, $x = \pm 2a$, Ox ўқ атрофида.

1688. $y = x^2$, $y = 4$, $x = 2$ тўғри чизик атрофида.

Қўрсатма. $dV = \pi(2+x)^2 dy - \pi(2-x)^2 dy$.

1689. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоиданинг бир даври, Ox ўқ атрофида.

1690. $(y-3)^2 + 3x = 0$, $x = -3$, Ox ўқ атрофида.

4-§. Текис эгри чизик ёйининг узунлиги

1°. $y = f(x)$ эгри чизик $\overline{AB}$ ёйининг узунлиги:

$$s = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (1)$$

Ёй дифференциали: $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

2°. $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$ эгри чизик $\overline{AB}$ ёйининг узунлиги:

$$s = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt. \quad (2)$$

3°. $r = f(\varphi)$ эгри чизик $\overline{AB}$ ёйининг узунлиги

$$s = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{r'^2 + r^2} d\varphi. \quad (3)$$

Қуйидаги эгри чизиклар ёйларининг узунликлари аниқлансин:

1691. $y^2 = x^3$ эгри чизикнинг $x = \frac{4}{3}$ тўғри чизик билан кесилган қисмининг узунлиги.

1692. $x^2 + y^2 = a^2$ эгри чизикнинг бутун узунлиги.

1693. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ эгри чизикнинг бутун узунлиги.

1694. $y^2 = (x+1)^3$ эгри чизикнинг $x = 4$ тўғри чизик билан кесилган қисмининг узунлиги.

1695. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоида бир даврининг узунлиги.

1696. $x = \frac{t^6}{6}$, $y = 2 - \frac{t^4}{4}$ эгри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишган нуқталари орасидаги қисмининг узунлиги.

1697. $y = \frac{x^2}{2} - 1$ эгри чизиқнинг Ox ўқ кесган бўлагининг узунлиги.

Қўрсатма. $\int \sqrt{1+x^2}$ интегрални бўлаклаб ёки 1366-масаладаги формула ёрдами билан ҳисоблаш мумкин.

1698. $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ эгри чизиқнинг $x = \pm a$ тўғри чизиқлар орасидаги қисмининг узунлиги.

1699. $y = \ln x$ нинг $x = \frac{3}{4}$ дан $x = \frac{12}{5}$ гача бўлган қисмининг узунлиги.

Қўрсатма. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx$ интеграл $1+x^2 = t^2$ ўрнига қўйиш ёрдами билан топилади.

1700. $y = \ln(2 \cos x)$ эгри чизиқнинг Oy ва Ox ўқлар билан кесишган икки қўшни нуқталари орасидаги қисмининг узунлиги.

1701. 1) $9y^2 = x(x-3)^2$ эгри чизиқнинг Ox ўқ билан кесишган нуқталари орасидаги қисмининг узунлиги.

2) $e^{2y} \operatorname{th} x = 1$ эгри чизиқ ёйининг $x = 1$ дан $x = 2$ гача бўлган узунлиги.

1702. 1) $r = a(1 - \cos \varphi)$ кардиоиданинг;

2) $r = a\varphi$ спираль биринчи гажаги ёйининг узунлиги.

1703. $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ эгри чизиқнинг бутун узунлиги.

1704. Эластик ип бир хил баландликдаги A ва B нуқталарга осилган. $AB = 2b$ ва илнинг эгилиш ўқи f га тенг. Илнинг шакли параболадан иборат деб ҳисоблаб, $\frac{f}{b}$ етарли кичик бўлганда $s \approx 2b \left(1 + \frac{2}{3} \frac{f^2}{b^2} \right)$ экани кўрсатилсин.

Қўрсатма. 1157-масаладаги $\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{1}{2} \alpha$ тақрибий формула татбиқ қилинсин.

1705. $y^2 = \frac{4}{9} (2 - x)^3$ нинг $x = -1$ тўғри чизиқ билан кесилган қисмининг узунлиги.

1706. $y = \ln(\sin x)$ нинг $x = \frac{\pi}{3}$ дан $x = \frac{2\pi}{3}$ гача қисмининг узунлиги.

1707. $y = \ln(1 - x^2)$ нинг $x = -\frac{1}{2}$ дан $x = \frac{1}{2}$ гача қисмининг узунлиги.

1708. $y^2 = 2px$ нинг $x = \frac{p}{2}$ тўғри чизиқ билан кесилган қисмининг узунлиги.

1709. $\left. \begin{aligned} x &= t^2, \\ y &= \frac{b}{t} (t^2 - 3) \end{aligned} \right\}$ Ox ўқ билан кесишган нуқталари орасидаги бўлагининг узунлиги.

5-§. Айланиш жисми сиртининг юзи

1. $y = f(x)$ эгри чизиқ ёйи $\widehat{AB}$ нинг Ox ўқ атрофида айланишдан ҳосил бўлган сиртнинг юзи:

$$P_x = 2\pi \int_{\widehat{AB}} y \, ds, \text{ буида } ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

2°. $x = \varphi(y)$ эгри чизиқ ёйи $\widehat{AB}$ нинг Oy ўқ атрофида айланишдан ҳосил бўлган сирт юзи:

$$P_y = 2\pi \int_{\widehat{AB}} x \, ds, \text{ буида } ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Қуйидаги эгри чизиқларнинг айланишидан ҳосил бўлган сиртларнинг юзлари аниқлашсин:

1710. $x^2 + y^2 = R^2$, Ox ўқ атрофида.

1711. $y = \frac{x^2}{2}$ нинг $y = 1,5$ тўғри чизиқ билан кесишган қисми, Oy ўқ атрофида.

1712. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ нинг $x = \pm a$ тўғри чизиқлар орасидаги қисми, Ox ўқ атрофида.

1713. $4x^2 + y^2 = 4$, Oy ўқ атрофида.

Қўрсатма. y ни эркин ўзгарувчи деб олсак, изланган сирт юзи.

$$P = \pi \int_0^2 \sqrt{16 - 3y^2} \, dy \text{ бўлади. Сўнгра } y = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin t \text{ ўр-}$$

нига қўйишни татбиқ этамиз.

1714. $y = \sin x$ эгри чизикнинг битта ярим тўлқини, Ox ўқ атрофида.

1715. $\left. \begin{aligned} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned} \right\}$ циклоиданинг бир даври, Ox ўқ атрофида.

1716. $x = t^2, y = \frac{t}{3}(t^2 - 3)$ эгри чизик нлмоғи, Ox ўқ атрофида.

1717. $x^2 + y^2 = a^2, x = b > a$ тўғри чизик атрофида.

Қўрсатма.

$$dP = 2\pi(b+x)ds + 2\pi(b-x)ds.$$

Қуйидаги эгри чизиклар ёйларининг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сиртларнинг юзлари аниқлансин:

1718. $y = \frac{x^3}{3}$ эгри чизикнинг $x = -2$ дан $x = 2$ гача бўлган ёйи.

1719. $y^2 = 4 + x$ эгри чизикнинг $x = 2$ тўғри чизик билан кесилган қисми.

1720. $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ эгри чизикнинг барча ёйи.

1721. $x = \frac{t^3}{3}, y = 4 - \frac{t^2}{2}$ эгри чизикнинг координата ўқлари билан кесишган нуқталари орасидаги қисми.

6- §. Физика масалалари

1722. Баландлиги 6 м ва асоси 8 м тўғри бурчакли вертикал шлюзга бўлган сув босими аниқлансин. Шлюзнинг пастки ярмига бўлган босим ҳам аниқлансин.

1723. a асоси сув юзида жойлашган, баландлиги h га тенг уч бурчакли вертикал юзга бўлган сув босими аниқлансин.

1724. $2R$ диаметри сув юзида жойлашган вертикал ярим доирага бўлган сув босими аниқлансин.

1725. Тўғон юқори асоси 20 м, қуйи асоси 10 м ва баландлиги 6 м бўлган трапеция шаклида, Сувнинг тўғонга бўлган босими аниқлансин.

Қўрсатма. ВС нинг тенгламаси: $\frac{x}{6} = \frac{y-20}{-10}$ ёки $y = -\frac{5}{3}x + 20$.

Сув учун $\omega = 1$; $P = \int_0^6 \left(20 - \frac{5}{3}x\right) x dx = 240 \text{ Т.}$

1726. $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ ва $y = b$ чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчакнинг Ox ва Oy ўқларга нисбатан инерция моментлари аниқлансин.

Қўрсатма. Тўғри тўртбурчакни горизонтал, юзларга ажратиб, ҳар бир юзидан Ox ўққача бўлган масофа квадратига, яъни y^2 га кўпайтирамиз. Кўпайтмаларни қўшиб лимитга ўтсак, қуйдагичини ҳосил қиламиз:

$$J_x = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \sum a \Delta y \cdot y^2 = \int_0^b ay^2 dy.$$

$$\text{Шунга ўхшаш } J_y = \int_0^a bx^2 dx.$$

1727. $x = 0$, $y = 0$ ва $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ чизиқлар билан чегараланган учбурчакнинг Ox ва Oy ўқларга нисбатан инерция моментлари топилсин.

1728. $x = 2$, $y = x^2$ ва $y = 0$ чизиқлар билан чегараланган юзнинг Oy ўққа нисбатан инерция momenti топилсин.

1729. $x = 0$, ва $x + y = a$ чизиқлар билан чегараланган учбурчакнинг Ox ва Oy ўқларга нисбатан статик momenti ва оғирлик марказининг координаталари топилсин.

Қўрсатма. Статик моментлар қуйдагидан иборат:

$$M_x = \int_0^a xy dy, \quad M_y = \int_0^a xy dx.$$

Оғирлик марказининг координаталари:

$$x_c = \frac{M_y}{S}, \quad y_c = \frac{M_x}{S},$$

бунда S — шаклнинг юзи.

1730. $a^2y = bx^2$, $x = a$ ва $y = 0$ чизиқлар билан чегараланган юзнинг оғирлик маркази топилсин.

1731. $x^2 + y^2 = a^2$ айлананинг Ox ўқ билан кесилишидан ҳосил бўлган ярим доиранинг оғирлик маркази топилсин.

1732. 1) Асосининг радиуси 0,5 м бўлган цилиндрлик ҳовуздаги сувнинг бошланғич сатҳи 2,8 м ва цилиндрдаги сув оқиб чиқадиған жўмракдан 0,2 м қуйи бўлса, ҳовуздаги сувни тортиб чиқариш учун сарф этилган иш ҳисоблансин.

2) Радиуси R м бўлган ярим шардаги сувни тортиб чиқариш учун сарф этилган иш ҳисоблансин.

1733. Массаси m бўлган жисмни ердан h баландликка кўтариш учун сарф этиш керак бўлган иш аниқлансин.

Кўрсатма. Ер марказидан x масофада марказга тортиш кучи F ушбу $F:mg = R^2:x^2$ пропорциядан аниқланади, бунда R — ер шарининг радиуси.

1734. Қозон асосининг радиуси $R = 0,4$ м, чуқурлиги $H = 0,5$ м дан иборат айланиш параболоид шаклида. Сув тўлдирилган шундай қозондан барча сувни тортиб чиқариш учун сарф этилган иш аниқлансин.

1735. Цилиндрдаги поршень остида ҳажми $V_0 = 0,1$ м³, эластиклиги $p_0 = 10330$ кГ/м² бўлган ҳаво бор. Ҳаво ҳажмини $V_1 = 0,03$ м³ га келтириш учун, ҳавони изотермик қишиш учун бажарилган иш аниқлансин. (Бойль-Мариотт қонуни бўйича $pV = P_0V_0$.)

1736. Узунлиги 1 м, кесим радиуси 2 мм бўлган мис симни 0,001 м чўзиш учун сарф этилган иш ҳисоблансин.

Кўрсатма. Узунлиги 1 м, кесими s мм² бўлган симни x м чўзиш учун сарф этиладиган куч $F = E \frac{sx}{l}$ формула билан аниқланади, бунда E — эластиклик модули. Мис учун $E \approx 12\,000$ кГ/мм² деб олиш мумкин.

1737. Асоси $S = 420$ см², баландлиги $H = 40$ см бўлган цилиндрик идишдаги сув цилиндр тубидаги юзи $s = 2$ см² бўлган тешикдан қанча вақт ичида оқиб тамом бўлади?

Кўрсатма. Юксаклиги x см баландликда бўлган сувнинг оқиш тезлиги $v = \mu \sqrt{2gx}$ формула билан ҳисобланади, бунда μ — суюқликнинг ёпишқоқлигига, идишнинг шаклига ва тешикнинг юзига боғлиқ коэффициент. Бу ерда ва шунингдек 1738-масалада $\mu = 0,6$ деб оламиз.

1738. Пастки асосининг радиуси $r = 0,3$ см, юқори асосининг радиуси $R = 6$ см, баландлиги $H = 40$ см бўлган конус шаклидаги воронкадан сув қанча вақт ичида оқиб бўлади (1737-масалага берилган кўрсатмага қаранг)?

1739. Баландлиги h , асоси a сув юзига параллел, унга қарши учи эса сув юзида бўлган уч бурчакли вертикал юзга бўлган сув босими аниқлансин.

1740. Асоси 4 м га тенг ва сув юзига жойлашган парабolik сегментнинг учи 4 м чуқурликда ётади. Уша сегментга бўлган сув босими аниқлансин.

1741. Баландлиги h га тенг тўғри бурчакли шлюз шундай x чуқурликда икки горизонтал бўлакка ажратилсинки, уларга бўлган сув босими бир хил бўлсин.

1742. Горизонтал ўққа эга цилинрик идиш ярмисигача ёр (солиштирма оғирлиги 0,9) билан тўлдирилган. Агар цилиндр текис деворларининг радиуси 2 м га тенг бўлса, уларнинг ҳар бирига бўлган ёр босими аниқлансин.

1743. $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ доира чорак юзининг Ox ўққа нисбатан инерция моменти топилсин.

1744. $y = 4 - x^2$ ва $y = 0$ чизиқлар билан чегараланган юзининг оғирлик марказининг координаталари топилсин.

1745. Баландлиги $H = 2$ м, асосининг радиуси $R = 0,3$ м га тенг конус шаклидаги чуқурдан (конуснинг учи пастга қараган) барча сувни тортиб чиқариш учун бажариш керак бўлган иш ҳисоблансин.

1746. Ҳажми $V_0 = 0,1$ м³, эластиклиги $p_0 = 10330$ кГ/м² га тенг ҳавони $V_1 = 0,03$ м³ ҳажмгача адиабатик қиспиш учун бажарилган иш аниқлансин. (Адиабатик қиспиш Пуассон қонунига бўйсунади: $pV^k = p_0V_0^k$ бунда $k \approx 1,4$.)

1747. Радиуси 40 см га тенг ярим шар шаклидаги идиш ни тўлғазиб турган сув қанча вақт ичида шар тубидаги юзи 2 см² бўлган тешикдан оқиб бўлади? (1737-масалага берилган кўрсатмага қаралсин; ёпишқоқлик коэффициентини $\mu = 0,8$ деб фараз қиламиз).

7- §. Хосмас интеграллар

1°. Таърифлар.

1. Агар $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ мавжуд ва чекли бўлса, у $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл деб айтилади. $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ ва $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ интеграллар ҳам

шунга ўхшаш таърифланади.

II. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментнинг c нуқтасидан бошқа барча нуқталарида узлуксиз бўлиб, c да II тур узлукчага эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ дан a дан b гача чегараларда олинган интеграл деб

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x) dx$$

йигиндига айтилади (агар бу лимитлар мавжуд ва чекли бўлса).

Чегаралари чексиз бўлган ҳамда узлукли (чегараланмаган) функциялардан олинган интеграллар хосмас интеграллар дейилади.

Агар юқорида келтирилган лимитлар чекли бўлса умумлашган интеграллар ақинлашади, чекли бўлмаса — узоқлашади дейилади.

2. Хосмас интегралларнинг яқинлашиши кўпинча таққослаш методи билан аниқланади: агар $x > a$ бўлганда $|f(x)| < \varphi(x)$

бўлса ва $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ яқинлашса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ҳам яқинлашади. Шунга ўхшаш яқинлашиш аломатини узилувчи функциядан олинган интеграл учун ҳам кўрсатиш мумкин.

Қуйидаги интеграллар ҳисоблансин:

$$1748. \quad 1) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}; \quad 2) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x}; \quad 3) \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}; \quad 4) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

$$1749. \quad 1) \int_0^{\infty} e^{-x} dx; \quad 2) \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx; \quad 3) \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2};$$

$$4) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}}; \quad 5) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3+x}; \quad 6) \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx.$$

$$1750. \quad 1) \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}; \quad 2) \int_1^{\infty} \frac{\arctg x dx}{x^2}; \quad 3) \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

$$1751. \quad 1) \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}; \quad 2) \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}; \quad 3) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

1752. Қуйидаги интегралларнинг яқинлашиши текширилсин.

$$1) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}; \quad 2) \int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}; \quad 3) \int_1^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{x};$$

$$4) \int_1^{\infty} \frac{\sin x dx}{x^2}; \quad 5) \int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}; \quad 6) \int_0^{\infty} e^{-x} dx.$$

$$1753. \quad 1) \int_0^1 \frac{dx}{x^n}; \quad 2) \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} \quad (b > a \text{ бўлганда}).$$

Қўрсатма. $n = 1 - \alpha < 1$, $n = 1$ ва $n = 1 + \alpha > 1$ бўлган уч ҳол кўриласин.

1754. $y = \frac{1}{1+x^2}$ зулф билан унинг асимптотаси орасидаги юз ҳисоблансин.

1755. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ эгри чизиқ билан унинг асимптотаси орасидаги юз ҳисоблансин ($x > 0$ бўлганда).

1756. $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ гиперболоида билан унинг асимптотаси орасидаги юз ҳисоблансин.

Қўрсатма. $x = 2a \sin^2 t$ деб параметрик тенгламаларга ўтиш керак.

1757. $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ гиперболоиданинг ўз асимптотаси атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажми аниқлансин (1756-масалага қаралсин).

1758. $y = e^{-x}$ эгри чизиқнинг x мусбат бўлгандаги чексиз ёнининг Ox ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажми аниқлансин.

1759. $y = 2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$ эгри чизиқнинг $x \geq 1$ бўлгандаги чексиз шохчасининг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми топилсин.

1760. 1) m бутун ва мусбат бўлганда

$$\left. \begin{aligned} 1) \int_0^{\infty} e^{-x} x^m dx &= m!; \\ 2) \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2m+1} dx &= \frac{m!}{2} \end{aligned} \right\} \text{ экани кўрсатилсин*}.$$

1761. Қуйидаги интеграллар ҳисоблансин:

$$1) \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2}; \quad 2) \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx; \quad 3) \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx; \quad 4) \int_1^e \frac{dx}{x \ln x}.$$

Қўрсатма. 3) мисолда $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$ ни топилганда Лопитал қоидаси татбиқ этилсин.

$$* \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx = \Gamma(t) \text{ функция } t \text{ нинг гамма-функцияси дейилади.}$$

1760-масаладаги 1) мисолдан t бутун ва > 1 бўлганда $\Gamma(t) = (t-1)!$ экани келиб чиқади. Бу ерда $t=1$ деб шартли $0! = \Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^0 dx = 1$ га эга бўламиз. Шунинг учун $0! = 1$ деб ҳисобланади.

$$1762. 1) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{1+x^2}}; \quad 2) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(1+x)^3}}; \quad 3) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x^4}.$$

1763. $y = e^{-2x}$ эгри чизиқ ва координата ўқлари орасидаги юз ҳисоблансин ($x > 0$ бўлганда).

1764. $xy = 4$, $y = 1$, $x = 0$ чизиқлар билан чегараланган чексиз узун юз Ox ўқ атрофида айланишдаги ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми топилсин.

1765. $y = xe^{-\frac{x}{2}}$ эгри чизиқнинг ($x > 0$ бўлганда) ўз асимптотаси атрофида айланишдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми аниқлансин.

8-§. Функциянинг ўрта қиймати

Ўрта қиймат ҳақидаги теорема. Агар $y = f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx$ интегралнинг чегаралари орасида шундай $x = c$ топиладики,

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(c) \quad (1)$$

бўлади. Функциянинг

$$y_m = f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \quad (2)$$

қиймати $y = f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги ўрта қиймати дейлади.

1766. Қуйидаги функцияларнинг ўрта қийматлари аниқлансин:

- 1) $y = \sin x$, $[0, \pi]$ сегментда;
- 2) $y = \operatorname{tg} x$, $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ сегментда;
- 3) $y = \ln x$, $[1, e]$ сегментда;
- 4) $y = x^2$, $[a, b]$ сегментда;
- 5) $y = \frac{1}{1+x^2}$, $[-1, 1]$ сегментда.

Ҳар бир мисолда функция ўрта қиймати чизмада кўрсатилсин.

9. §. Трапециялар формуласи ва Симпсон формуласи

1°. Трапециялар формуласи:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right], \quad (I)$$

бунда $h = \frac{b-a}{n}$, $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ лар эса $y = f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги бир-бирдан барабар узқликда турган ординаталаридан иборат.

(I) формуланing хатоси:

$$\varepsilon(h) < \frac{(b-a)h^2}{12} |y''|_{\max}. \quad (I)$$

2°. Симпсоннинг параболик формуласи (оралиқ иккига бўлинганда):

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2), \quad (II)$$

бунда $h = \frac{b-a}{2}$.

3°. $[a, b]$ оралиқ $2n$ бўлакка бўлинган ҳол учун Симпсон формуласи:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[y_0 + y_{2n} + 4 \sum_{i=1}^n y_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_{2i} \right], \quad (III)$$

бунда $h = \frac{b-a}{2n}$, (II) ва (III) формулаларнинг хатоси:

$$\varepsilon(h) < \frac{(b-a)h^4}{180} |y^{IV}|_{\max}. \quad (2)$$

яъни (II) формула иккинчи ва учинчи даражали

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

параболалар учун интегралнинг аниқ қийматини беради.

1767. Трапециялар формуласига кўра $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ ҳисоблансин ва (I) формулага асосан хатоси баҳолансин.

1768. Симпсоннинг (II) формуласига кўра $\int_1^5 x^3 dx$ ва

$\int_0^2 x^4 dx$ интеграллар ҳисоблансин ҳамда (2) формулага асосан хатоси баҳолансин ва натижа интегралларнинг аниқ қийматлари билан таққослансин.

1769. Симпсоннинг (III) формуласига кўра

$$1) \int_0^2 \sqrt{1+x^3} dx \quad (2n=4); \quad 2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3-\cos 2x} dx \quad (2n=6);$$

$$3) \int_0^4 \frac{dx}{1+x^4} \quad (2n=4)$$

интеграллар ҳисоблансин ва (2) формулада тахминан $h^4 |y^{IV}|_{\max} \approx |\Delta^4 y|_{\max}$ деб олиб, хатоси баҳолансин.

1770. Баландлиги 50 см, ҳар бир асосининг диаметри 20 см ва ўрта кесимининг диаметри 30 см бўлган бочканинг ҳажми Симпсоннинг (II) формуласи бўйича топилсин.

1771. Симпсоннинг (II) формуласидан пирамида ва шар ҳажмларининг формулалари чиқарилсин.

$$1772. \ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} \text{ интеграл Симпсоннинг умумий (III)}$$

формуласи бўйича ҳисоблансин ($2n=10$ бўлганда) ва (2) формула бўйича хатоси баҳолансин.

1773. $x=5\cos t$, $y=3\sin t$ эллипс биринчи чорак ёйининг узунлигини ҳисоблаб берувчи интегралга Симпсоннинг (II) формуласини татбиқ этиб, эллипснинг узунлиги топилсин.

$$1774. \text{Симпсоннинг (II) формуласини татбиқ этиб, } \pi = 6 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \text{ интегралнинг тақрибий қиймати ҳисоблансин.}$$

$$1775. \text{Симпсоннинг умумий (III) формуласи бўйича } (2n=10 \text{ бўлганда}) \frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \text{ интеграл ҳисоблансин, (2)}$$

формулада тахминан $h^4 |y^{IV}|_{\max} \approx |\Delta^4 y|_{\max}$ деб, хатоси баҳолансин.

1776. $x^2 + y^2 = 32$ эгри чизик билан чегараланган доира қисмининг юзини қараб, $\int_0^4 \sqrt{32 - x^2} dx = 4\pi + 8$ экани кўр-

сатилсин ва бундан, интегрални Симпсон формуласига асосан ҳисоблаб, π топилсин (формулада $2n = 4$ деб олинсин).

1777. $[0, \pi]$ сегментни олтига тенг бўлакка бўлиб, Симпсоннинг (III) формуласи бўйича $y = \sin x$ синусоида ярим тўлқини ёйининг узунлиги ҳисоблансин.

ТЕКИС ВА ФАЗОВИЙ ЭГРИ ЧИЗИҚНИНГ ЭГРИЛИГИ

1- §. Текис эгри чизиқнинг эгрилиги.
Эгрилик маркази ва радиуси. Эволюта.

1°. Эгрилик:

$$k = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \quad (1)$$

2°. Эгрилик радиуси:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{y}x - \dot{x}y|}. \quad (2)$$

3°. Эгрилик марказининг координаталари:

$$\left. \begin{aligned} X &= x - \frac{1 + y'^2}{y''} y' = x + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{y}x - \dot{x}y} \dot{y}, \\ Y &= y + \frac{1 + y'^2}{y''} = y + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{y}x - \dot{x}y} x. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$S(X; Y)$ эгрилик марказларининг геометрик ўрни эволюта дейилади. (3) тенгламалар эволютанинг параметрик тенгламалари бўлади.

4°. r ва φ қутб координаталари бўлганда, $r = f(\varphi)$ тенглама билан берилган эгри чизиқнинг эгрилик радиуси:

$$R = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}. \quad (4)$$

Қуйидаги эгри чизиқларнинг эгрилик радиуслари аниқлансин ва эгри чизиқ ҳамда унинг учидagi эгрилик доираси ясалсин:

1778. $y = 4x - x^2$.

1780. $x^2 + 4y^2 = 4$.

1782. $y = xe^{-x}$.

1779. $y = e^{-x^2}$.

1781. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

Қуйидаги эгри чизикларнинг эгрилик марказлари аниқлансин ва эгри чизик ҳамда унинг мисолда кўрсатилган нуқтасидаги эгрилик доираси ясалсин:

1783. $xy = 4$, $x = 2$ нуқтада.

1784. $y = \ln x$, Ox ўқ билан кесишган нуқтасида.

1785. $y = -\frac{x^3 + 1}{3}$, Ox ўқ билан кесишган нуқтасида.

Қуйидаги эгри чизикларнинг эволюталарининг тенгламалари ёзилсин ва эгри чизик ҳамда унинг эволютаси ясалсин:

1786. $y = 1 - \frac{x^2}{2}$. 1787. $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

1788. $x^2 - y^2 = a^2$ (ёки $x = a \operatorname{ch} t$ ва $y = a \operatorname{sh} t$).

1789. $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t). \end{cases}$

1790. $y = e^x$ эгри чизикнинг энг катта эгрилиги топилсин.

1791. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ занжир чизикнинг ихтиёрий нуқтасидаги эгрилик радиуси $\frac{y^2}{a}$ га тенг бўлиб, у ўша нуқтада ўтказилган нормалнинг эгри чизик билан Ox ўқ орасидаги кесмасига тенг эканлиги исбот қилинсин.

1792. 1) $r = a(1 - \cos \varphi)$; 2) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$; 3) $r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$ эгри чизикнинг ихтиёрий нуқтасидаги эгрилик радиуси аниқлансин.

Қуйидаги эгри чизикларнинг учларидаги эгрилик радиуси аниқлансин ва эгри чизик ҳамда унинг эгрилик доираси ясалсин.

1793. $y = \frac{1}{1+x^2}$. 1794. $x^2 - y^2 = 4$.

1795. $y = \sin x$. 1796. $2y = x^2 + 4x$.

Қуйидаги эгри чизикларнинг эгрилик маркази координатлари аниқлансин ва эгри чизик ҳамда унинг эгрилик доираси ясалсин:

1797. $y = e^x$, Oy ўқ билан кесишган нуқтасида.

1798. $y = \frac{x^3}{3}$, $(-1; -\frac{1}{3})$ нуқтада.

1799. $y^2 = x^3$, $(1; 1)$ нуқтада.

1800. $y = \cos x$, $x = \frac{\pi}{4}$ нуқтада.

Қуйидаги эгри чизиклар эволюталарининг тенгламалари ёзилсин ва эгри чизик ҳамда унинг эволютаси ясалсин.

$$1801. y^2 = 2(x+1). \quad 1802. x = t^2, y = \frac{t^3}{3}.$$

$$1803. xy = 4. \quad 1804. x = a \cos^3 t, y = \sin^3 t.$$

$$1805. x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \text{ астроидадининг ихтиёрий нуқта-}$$

сидаги эгрилик радиуси $3\sqrt[3]{a|xy|}$ га тенг эканлиги кўрсатилсин.

2-§. Фазодаги эгри чизиқ ёйининг узунлиги

Ёй дифференциали: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ ёки

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

$$\text{Ёй узунлиги: } s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

Қуйидаги эгри чизиқлар ёйларининг узунликлари топилсин:

$$1806. x = t, y = t^2, z = \frac{2}{3} t^3, t = 0 \text{ дан } t = 3 \text{ гача.}$$

$$1807. x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = 4t, t = 0 \text{ дан исалган } t \text{ гача.}$$

$$1808. y = \frac{x^2}{2}, z = \frac{x^3}{6}, x = 0 \text{ дан } x = 3 \text{ гача.}$$

Қуйидаги эгри чизиқлар ёйларининг узунликлари топилсин:

$$1809. x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4 \sin \frac{t}{2}, t = 0 \text{ дан } t = \pi \text{ гача.}$$

$$1810. x = e^t, y = e^{-t}, z = t\sqrt{2}, t = 0 \text{ дан } t = 1 \text{ гача.}$$

$$1811. y = \frac{1}{2} \ln x, z = \frac{x^2}{2}, x = 1 \text{ дан } x = 2 \text{ гача.}$$

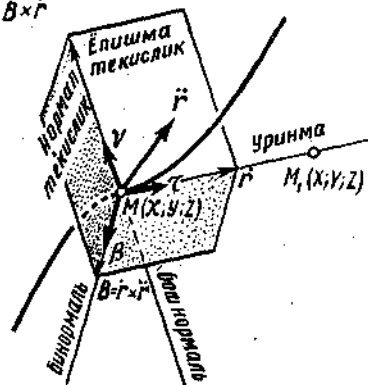
3-§. Вектор-функциянинг скаляр бўйича ҳосиласи ва унинг механик ҳамда геометрик маъноси.

Эгри чизиқнинг табиий уч ёқлиги

$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ эгри чизиқ нуқтасининг $r = xi + yj + zk$ радиус-вектори скаляр t нинг вектор-функцияси бўлади. $r = xi + yj + zk$ ҳосила тангенциал вектор бўлиб, унинг

$$\text{модули } |r| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = s = \frac{dx}{dt}.$$

$$N = B \times \dot{r}$$



36- чизма.

Текисликларнинг кесишишидан

- 1) r — тангенциал;
- 2) $B = r \times \dot{r}$ бинормаль;
- 3) $N = B \times \dot{r}$ бош нормаль

векторлар билан аниқланувчи учта: уринма бинормаль ва бош нормаль тўғри чизиклар ҳосил бўлади.

Бу йўналишларнинг бирлик векторларини τ , β , ν деб белгилайлик; улар $\frac{d\tau}{ds} = \left| \frac{d\tau}{ds} \right| \gamma$ ва $\beta = \tau \times \nu$ муносабатлар билан боғланган.

$M_1(X; Y; Z)$ — уринманинг нуқтаси бўлсин (36-чизма). У ҳолда $\overline{MM}_1 \parallel \dot{r}$ бўлади ва векторларнинг параллеллик шартидан уринманинг ушбу

$$\frac{X-x}{x} = \frac{Y-y}{y} = \frac{Z-z}{z} \quad (I)$$

тенгламалари ҳосил бўлади.

$M_2(X; Y; Z)$ — нормаль текисликда ётувчи нуқта бўлсин.

У ҳолда $\overline{MM}_2 \perp \dot{r}$ бўлади ва векторларнинг перпендикулярлик шартидан нормал текислиكنинг ушбу

$$\dot{x}(X-x) + \dot{y}(Y-y) + \dot{z}(Z-z) = 0 \quad (II)$$

тенгламаси ҳосил бўлади.

Бинормаль ва бош нормаль тенгламалари (I) тенгламалардаги $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ ларни мос равишда B_x , B_y , B_z лар ёки N_x , N_y , N_z лар билан алмаштиришдан ҳосил бўлади.

Епишма текислик тенгламаси эса (II) тенгламадаги $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ ларини B_x , B_y , B_z лар билан алмаштиришдан ҳосил бўлади.

Шунинг учун, агар t — вақт, эгри чизик — ҳаракат траекторияси бўлса, $r = v$ тезлик вектори, $\dot{r} = a$ тезланиш вектори бўлади.

Эгри чизикнинг $M(x; y; z)$ нуқтасидан учта текислик ўтказайлик (36- чизма);

1) $\dot{r}$ га перпендикуляр текислик; у нормал текислик дейилади.

2) r ва $\dot{r}$ ни ўз ичига олувчи текислик; у епишма текислик дейилади;

3) олдинги икки текисликка перпендикуляр текислик.

Бу текисликлар эгри чизикнинг табиий уч ёқлики (триэдр) ҳосил қилади.

1812. Ҳаракат қилувчи нуқтанинг t моментдаги радиус-вектори $r = 4ti - 3tj$ тенглама билан берилган. Ҳаракатнинг траекторияси, тезлиги ва тезланиши аниқлансин.

1813. $r = 3ti + (4t - t^2)j$ ҳаракат тенгламаси бўлсин. Ҳаракат траекторияси ва тезлиги аниқлансин. Ҳаракат траекторияси ва $t = 0, 1, 2$ ва 3 секунд вақтдаги тезлик векторлари ясалсин.

Қўрсатма. Ҳаракат тенгламаси $r = 3ti + (4t - t^2)j$ бўлса, $x = 3t$, $y = 4t - t^2$ бўлади; бу тенгликлардан t ни йўқотиб, ҳаракат траекториясининг тенгламаси $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{9}x^2$ ёки $(x - 6)^2 + 9(y - 4) = 0$ ни топамиз. $\Phi = \frac{dr}{dt} = 3i + 2(2 - t)j$.

1814. 1813- масаладаги ҳаракатнинг тезланиши w ва унинг ихтиёрий t ва $t = 0$ вақтлардаги тангенциал $w_t = \frac{dw}{dt}$ ҳам нормал $w_n = \sqrt{w^2 - w_t^2}$ тузувчилари аниқлансин.

1815. $r = a \cos t \cdot i + b \sin t \cdot j$ ҳаракат тенгламаси бўлсин. Ҳаракат траекторияси, тезлиги ва тезланиши аниқлансин ва $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ нуқталарда тезлик ва тезланиш векторлари ясалсин.

1816—1818- масалаларда берилган эгри чизиқларнинг уринма чизигининг ва нормал текислигининг тенгламалари ёзилсин.

1816. $x = t, y = t^2, z = t^3$ исталган нуқтасида ва $t = 1$ бўлганда.

1817. $y = x^2, z^2 = x$ исталган нуқтада ($x \geq 0$) ва $x = 4$ бўлганда.

1818. $\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 10 \\ y^2 + z^2 = 25 \end{array} \right\} (1; 3; 4) \text{ нуқтада.}$

Қўрсатма. Ҳар бир тенгламанинг ўнг ва чап томонларидан дифференциал олиб, сўнггра $dx:dy:dz$ нисбатлар топилсин.

1819. $x = 1 - \sin t, y = \cos t, z = t$ эгри чизиқнинг $t = 0$ нуқтадаги тангенциал r , бинормал B ва бош нормал N векторлари топилсин. Шунингдек берилган нуқтада τ, β ва ν топилсин.

1820. $x = t, y = t^2, z = t^3$ эгри чизиқнинг $t = 1$ нуқта-сида ўтказилган бош нормал, бинормал ва ёпишма текисли-нинг тенгламалари ёзилсин.

1821. $x = e^t, y = e^{-t}, z = t$ эгри чизиқнинг $t = 0$ нуқ-тасида ўтказилган бош нормал ва бинормалнинг тенгламала-ри ёзилсин.

1822. $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$ тенгламалар конус устидаги винт чизиқни аниқлаши кўрсатилсин ва координаталар бошида бу чизиққа ўтказилган бош нормал, бинормал ҳам уринманинг тенгламалари ёзилсин.

1823. $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ винт чизиқнинг ихтиёрий нуқтасида ва $t = \frac{\pi}{2}$ бўлганда ўтказилган уринманинг тенгламалари ёзилсин. Винт чизиқ $x^2 + y^2 = a^2$ цилиндрнинг ясовчилари билан бир хил $\gamma = \arccos \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ бурчак остида кесилгани кўрсатилсин.

1824. $x^2 = 2az$ ва $y^2 = 2bz$ эгри чизиқнинг $z = \sqrt{ab}$ нуқтасида ўтказилган тангенциал векторнинг координата ўқлари билан ҳосил қилган бурчаклари топилинсин.

1825. $2z = x^2$, $y = 0$ эгри чизиқ жойлашган $y = 0$ текислик $x^2 + y^2 = 2y$ цилиндрга ўралади. Цилиндр сирти устида берилган эгри чизиқ ҳосил қилган винтнинг параметрик тенгламалари ёзилсин ҳамда унинг исталган ва $t = \frac{\pi}{2}$ нуқтада бинормал вектори аниқлансин, бунда t — текисликнинг бурилиш бурчаги.

1826. Ҳаракатдаги нуқтанинг t моментдаги радиус-вектори $r = a(t - \sin t)i + a(1 - \cos t)j$ тенглама билан берилган. $t = \frac{\pi}{2}$ ва $t = \pi$ учун тезлик ва тезланиш векторлари аниқлансин ва ясадсин.

1827—1829- масалаларда берилган эгри чизиққа ўтказилган уринманинг тенгламалари ёзилсин:

1827. $y = x$, $z = 2x^2$, $x = 2$ нуқтада.

1828. $\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x + 2y - z = 2 \end{array} \right\}$ (1; 2; 3) нуқтада (1818- масалага қаралсин).

1829. $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t^2$, $t = 1$ нуқтада.

1830. $r = e^t i + e^{-t} j + t \sqrt{2k}$. $t = 0$ нуқтада бинормал вектор b нинг координата ўқлари билан ташкил этган бурчаклари топилинсин.

1831. $y = x^2$, $z = y^2$ эгри чизиқнинг $x = 1$ нуқтадаги бош нормал ва бинормалининг тенгламалари ёзилсин.

1832. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4 \sin \frac{t}{2}$ эгри чизиқнинг $t = \pi$ нуқтадаги бош нормал ва бинормалининг тенгламалари ёзилсин.

4-§. Фазодаги эгри чизиқнинг эгрилиги ва буралиши

Эгрилик $\frac{1}{R}$ уринманинг буралиш бурчаги ϕ нинг ёй узунлиги Δs га нисбатининг $\Delta s \rightarrow 0$ даги лимитидан иборатдир.

Буралиш $\frac{1}{\rho}$, бинормал буралиш бурчаги θ нинг ёй узунлиги Δs га нисбатининг $\Delta s \rightarrow 0$ даги лимитидан иборатдир. $\phi \approx |\Delta \tau|$ ва $\theta \approx \pm |\Delta \beta|$ бўлгани учун, $\frac{1}{R}$ ва $\frac{1}{\rho}$ нинг сон қийматлари

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{R} v, \quad \frac{d\beta}{ds} = -\frac{1}{\rho} v \quad (1)$$

векторнинг модулларига тенг. Агар эгри чизиқ $r = r(t)$ тенглама билан берилса, у ҳолда

$$\frac{1}{R} = \frac{|r \times \dot{r}|}{|\dot{r}|^3}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\dot{r} \ddot{r} \ddot{r}}{|\dot{r} \times \ddot{r}|^2} \quad (2)$$

1833. $v = v\tau$ тенгликни t бўйича дифференциаллаб, (1) формула ёрдами билан тезланиш ω нинг тангенциал ва нормал тузувчиларга ёйилмаси

$$\omega = v\tau + \frac{v^2}{R} v$$

ҳосил қилинсин.

1834. Нуқтада $x=t$, $y=t-t^2$ парабола бўйича ҳаракат қилади, бунда t —ҳаракат вақти. Ихтиёрий t моментда ва $t=0$ бўлганда траекториянинг эгрилиги $\frac{1}{R}$ ва тангенциал ҳам нормал тезланишлар аниқлансин.

1835. Нуқта $x=4 \cos t$, $y=3 \sin t$ эллипс бўйича ҳаракат қилади, бунда t —ҳаракат вақти. $t = \frac{\pi}{4}$ бўлганда траекториянинг эгрилиги $\frac{1}{R}$ ва тангенциал ҳамда нормал тезланишлар аниқлансин.

1836. Агар ҳаракат тенграмаси $r = ti + t^2j + \frac{2}{3} t^3k$ дан иборат бўлса, исталган вақтда ва $t=1$ бўлганда траектория эгрилиги $\frac{1}{R}$ ва тангенциал ҳамда нормал тезланишлар аниқлансин.

Қуйидаги эгри чизиқларнинг эгриликлари $\frac{1}{R}$ ни буралишлари $\frac{1}{\rho}$ аниқлансин.

1837. $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ исталган нуқтасида ва $t=0$ бўлганда.

1838. $x=e^t$, $x=e^{-t}$, $z=t\sqrt{2}$ исталган нуқтасида ва $t=0$ бўлганда.

1839. $y=\frac{x^2}{2}$, $z=\frac{x^3}{3}$ исталган нуқтасида ва $x=1$ бўлганда.

1840. Ўнг винтда ($x=a \cos t$, $y=a \sin t$, $z=bt$) буралиш мусбат, чап винтда ($x=a \cos t$, $y=-a \sin t$, $z=bt$) манфий экани кўрсатилган.

Қуйидаги эгри чизиқларнинг эгриликлари $\frac{1}{R}$ ва буралишлари $\frac{1}{\rho}$ аниқлансин:

1841. $x=2t$, $y=\ln t$, $z=t^2$ исталган нуқтасида ва $t=1$ бўлганда.

1842. $x=\frac{y^2}{2}$, $z=x^2$ исталган нуқтасида ва $y=1$ бўлганда.

1843. $x=e^t \sin t$, $y=e^t \cos t$, $z=e^t$ $t=0$ нуқтасида.

XI БОБ

ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛАР, ТЎЛИҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАР ВА УЛАРНИНГ ТАТБИҚИ

1-§. Икки аргументли функциялар ва уларнинг геометрик тасвири

1°. Таъриф. Агар x ва y ўзгарувчиларнинг бирор ўзгариш соҳасидаги ҳар бир қийматлари жуфтга ўзгарувчи z нинг аниқ бир қиймати мос келтирилса, z ўзгарувчи x ва y ўзгарувчиларнинг *бир қийматли функцияси* дейилади. z нинг x ва y га функционал боғлиқ бўлиши

$$z = F(x, y) \quad (1)$$

кўринишда ёзилади.

2°. Геометрик тасвир. (1) тенглама геометрик нуқтаи назардан қандайдир сиртни аниқлайди, x ва y нинг қийматлари жуфти xOy текисликда $P(x, y)$ нуқтани аниқлайди, $z = F(x, y)$ эса сиртдаги унга мос $M(x, y, z)$ нуқтанинг аппликатасини аниқлайди. Шу сабабли z ўзгарувчи $P(x, y)$ нуқтанинг функцияси дейилади ва $z = F(P)$ деб ёзилади.

3°. Функциянинг limiti. Агар ҳаракатдаги P нуқта ҳар қандай усул билан P_0 нуқтага яқинлашганда (масалан, ихтиёрий чизық бўйлаб), яъни $\rho = P_0P$ нолга интилганда ($\rho = P_0P \rightarrow 0$) $F(P) \rightarrow A$ айирма чексиз кичик бўлса, $\lim_{P \rightarrow P_0} F(P) = A$ дейилади.

4°. Функциянинг узлуксизлиги. Агар $\lim_{P \rightarrow P_0} F(P) = F(P_0)$ бўлса, $F(x, y)$ функция P_0 нуқтада *узлуксиз* дейилади. Бошқача айтганда, агар $\lim F(x + \Delta x, y + \Delta y) = F(x, y)$ бўлса,

$$\begin{aligned} \Delta x &\rightarrow 0 \\ \Delta y &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$F(x, y)$ функция (x, y) нуқтада *узлуксиз* дейилади.

1844. Қуйидаги функциялар ҳақиқий қийматларга эга бўлишлари учун x ва y ларнинг ўзгариш соҳалари кўрсатилсин.

$$1) z = x^2 + y^2; \quad 2) az = a^2 - x^2 - y^2; \quad 3) z = \frac{4}{x^2 + y^2};$$

$$4) z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}; \quad 5) z = \sqrt{xy}; \quad 6) z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}};$$

$$7) z = \frac{xy}{y - x}$$

ва сиртларнинг $x=0$, $y=0$, $z=0$ ва $z+h$ текисликлар билан кесилган кесимлари бўйича бу функцияларнинг геометрик тасвирлари ясалсин.

1845. Учбурчакнинг периметри $2p$ берилган. Учбурчакнинг икки томонини x ва y деб, унинг юзи S шу томонларнинг функцияси сифатида аниқлансин. x ва y нинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматларининг соҳаси аниқлансин ва ясалсин.

$$1846. F(x, y) = \frac{x-2y}{2x-y}; \quad F(3, 1), F(1, 3), \\ F(1, 2), F(2, 1), F(a, a), F(a, -a)$$

лар ҳисоблансин.

$$1847. F(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4} - 2xy; \\ F(tx, ty) = t^2 F(x, y)$$

эқани исбот қилинсин.

1848. $z = x^2 - xy + y^2$; $\Delta_x z$, $\Delta_y z$ ва Δz лар аниқлансин. Агар x 2 дан 2,1 гача, y эса 2 дан 1,9 гача ўзгарса $\Delta_x z$, $\Delta_y z$, Δz лар ҳисоблансин.

1849. $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ тенглама z ни x ва y нинг чексиз кўп бир қиймати функциялари сифатида аниқлаши ва улардан иккитаси узлуксиз экани кўрсатилсин. Бу функцияларнинг аниқланиш соҳаси кўрсатилсин ва мусбат узлуксиз функциянинг геометрик тасвири ясалсин. Шу $x^2 - y^2 = z^2$ тенглама билан аниқланувчи бир қийматли, лекин узлукли бўлган $z = F(x, y)$ функцияга мисол келтирилсин.

1850. Қуйидаги функцияларнинг ($z = 0, 1, 2$ ва ҳоказо бўлгандаги) юксаклик чизиқлари ясалсин:

$$1) z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2}; \quad 2) z = x^2 - y; \\ 3) z = x^2 - y^2; \quad 4) z = xy.$$

1851. x ва y нолга интилганда ($x \rightarrow 0$ ва $y \rightarrow 0$) $u = \frac{y}{x-y}$ ифода ҳар қандай лимитга интилиш мумкинлиги кўрсатилсин. (x, y) нуқтанинг $(0, 0)$ нуқтага шундай интилишларига мисоллар келтирилсинки, ўша ҳолларда $\lim u = 3$, $\lim u = 2$, $\lim u = 1$, $\lim u = 0$, $\lim u = -2$ бўлсин.

Кўрсатма. x ва y нинг $y = kx$ тўғри чизиқлар бўйича ўзгариши қаралсин.

1852. (x, y) нукта $(0, 0)$ нуктага ҳар қандай усул билан яқинлашганида ҳам

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy} = -\frac{1}{4}; \quad 2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1;$$

$$3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x} = 0$$

экани кўрсатилсин.

Кўрсатма. $xy = a$ деб олинсин.

1853.

$$z = F(x, y) = \begin{cases} 1, & xy > 0 \text{ бўлганда} \\ 0, & xy = 0 \text{ бўлганда} \\ -1, & xy < 0 \text{ бўлганда} \end{cases}$$

функция геометрик тасвирлансин ва унинг узиллиш чизиги кўрсатилсин.

$$1854. \quad 1) z = x + y; \quad 2) z = \frac{4}{x+y}; \quad 3) \frac{z}{c} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}};$$

$$4) \frac{z}{c} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}; \quad 5) z = x + \sqrt{x^2 - y^2};$$

$$6) \sqrt{z} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

функцияларнинг аниқланиш соҳалари кўрсатилсин ва бу функцияларнинг геометрик тасвирлари ясалсин.

$$\forall 1855. \quad F(x, y) = \frac{x}{x-y};$$

$$F(a, b) + (b, a) = 1$$

экани кўрсатилсин.

$$1856. \quad z^2 = \frac{4}{4 - x^2 - y^2} \text{ тенглама } z \text{ ни } x \text{ ва } y \text{ нинг чексиз}$$

кўп бир қийматли функциялари сифатида аниқлаши ва улардан иккитаси узлуксиз экани кўрсатилсин. Бу функцияларнинг аниқланиш соҳаси кўрсатилсин ва улар ичидан $x^2 + y^2 \leq 1$ соҳада мусбат ва бу соҳадан ташқарида манфий бўлган функциянинг геометрик тасвири ясалсин.

1857. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ тенглама билан аниқланувчи ва бу соҳадан ташқарида манфий бўлган бир қийматли $z = F(x, y)$ функциянинг геометрик тасвири ясалсин.

2- §. Биринчи тартибли хусусий ҳосилалар

$z = F(x, y)$ функцияда y ни ўзгармас деб қараб, ундан x бўйича олинган ҳосила z нинг x бўйича хусусий ҳосиласи дейилади ва $y \frac{\partial z}{\partial x}$ ёки $F'_x(x, y)$ кўринишда белгиланади. z нинг y бўйича хусусий ҳосиласи ҳам шунга ўхшаш таърифланади ва белгиланади:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = F'_y(x, y).$$

Қуйидаги функцияларнинг хусусий ҳосилалари топилсин.

$$1858. z = x^3 + 3x^2y - y^3. \quad 1859. z = \ln(x^2 + y^2).$$

$$1860. z = \frac{y}{x}. \quad 1861. z = \arctg \frac{y}{x}.$$

$$1862. z = \frac{xy}{x-y}. \quad 1863. u = \ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right).$$

$$1864. c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}.$$

$$1865. u = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z}. \quad 1866. u = xe^{-yx}.$$

$$1867. u = \frac{2x-t}{x+2t}. \quad 1868. \alpha = \arcsin(t\sqrt{x}).$$

$$1869. z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}); \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \quad \text{экани исбот қилинсин.}$$

$$1870. z = \sqrt{x} \sin \frac{y}{x}; \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{2} \quad \text{экани исбот қилинсин.}$$

$$1871. u = e^{\frac{x}{t^2}}; \quad 2x \frac{\partial u}{\partial x} + t \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{экани исбот қилинсин.}$$

$$1872. u = xy; \quad \frac{x}{y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial u}{\partial y} = 2u \quad \text{экани исбот қилинсин.}$$

1873. Қуйида, 1898-масалада Эйлернинг ушбу теоремаси исботланади:

«Агар $z = F(x, y)$ — n ўлчови бир жинсли функция бўлса, y ҳолда $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = nz$ бўлади».

Бу теорема ушбу

$$1) z = x^3 + xy^2 - 2y^3; \quad 2) z = \sqrt{x^2 + xy + y^2};$$

$$3) z = \frac{1}{x^2 - y^2}; \quad 4) z = e^{\frac{x}{y}}$$

функциялар учун текширилсин.

Қуйидаги функцияларнинг хусусий ҳосилалари топилинсин:

$$1874. z = \cos(ax - by). \quad 1875. z = \arcsin \frac{y}{x}.$$

$$1876. z = \frac{x}{3y - 2x}. \quad 1877. u = \ln \sin(x - 2t).$$

$$1878. u = \sin^2(x + y) - \sin^2 x - \sin^2 y.$$

$$1879. u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1 \text{ экани исбот қилинсин.}$$

$$1880. z = e^{\frac{x}{y}} \ln y; \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{\ln y} \text{ экани исбот қилинсин.}$$

$$1881. T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}; \quad l \frac{\partial T}{\partial l} + g \frac{\partial T}{\partial g} = 0 \text{ экани исбот қилинсин.}$$

$$1882. z = e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right);$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{2} e^x \sin^2 \frac{y}{2} \text{ экани исбот қилинсин.}$$

1883. Ушбу

$$1) z = \frac{x^3}{x - y}; \quad 2) z = \frac{1}{x^2 + y^2}; \quad z = \arctg \frac{y}{x}$$

функциялар учун бир жинсли функциялар ҳақидаги Эйлер теоремаси (1873- масалага қаранг) текширилсин.

3- §. Биринчи тартибли тўлиқ дифференциал

Агар $z = F(x, y)$ функция (x, y) нуқтада узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлса, унинг тўлиқ орттирмаси

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \epsilon \cdot \rho \quad (1)$$

кўринишида ёзилади, бунда $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ нолга интилганда ($\rho \rightarrow 0$) $\epsilon \rightarrow 0$. У ҳолда $\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$ ифода тўлиқ орттирма Δz нинг беш қисми бўлади: у функциянинг тўлиқ дифференциали дейилади ва dz орқали белгиланади:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y. \quad (2)$$

Агар (2) да z нг 1) x га; 2) y га тенг деб олсак, $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ бўлади. Шунинг учун

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (3)$$

(1) дан

$$\Delta z \approx dz \quad (4)$$

эгани келиб чиқади, яъни Δx ва Δy етарли кичик бўлган ҳолда функциянинг тўлиқ ортитирмаси тақрибан тўлиқ дифференциалга тенг бўлади (V боб, 7-§).

Агар $F(x, y)$ функциянинг (x, y) нуқтада тўлиқ дифференциали мавжуд бўлса, функция бу нуқтада дифференциалланувчи дейилади.

1884. Ушбу

$$1) z = x^2y; \quad 2) z = \frac{xy}{x-y}; \quad 3) u = e^{\frac{s}{t}}; \quad 4) z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

функцияларнинг тўлиқ дифференциаллари топилсин.

1885. Қуйидаги функциялар тўлиқ дифференциалларининг қийматлари топилсин:

$$1) z = \frac{y}{x}, \quad x = 2, \quad y = 1, \quad dx = 0,1, \quad dy = 0,2 \quad \text{бўлганда};$$

$$2) u = e^{xy}, \quad x = 1, \quad y = 2, \quad dx = -0,1, \quad dy = 0,1 \quad \text{бўлганда}.$$

1886. $z = xy$ функция учун $x = 5$, $y = 4$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = -0,2$ бўлганда dz ва Δz ҳисоблансин.

1887. x 2 дан 2,1 гача, y эса 3 дан 2,5 гача ўзгарганда $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$ функциянинг ўзгариши тақрибан ҳисоблансин.

1888. Цилиндрни деформация қилиш натижасида унинг радиуси R 2 дан 2,05 дм гача ортиб, баландлиги H эса 10 дан 9,8 дм гача камайган. $\Delta V \approx dV$ формулага асосан цилиндр ҳажми V нинг ўзгариши тақрибан топилсин.

1889. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари 0,1 см аниқлик билан ўлчанганда 7,5 ва 18 см га тенг бўлган. Гипотенузани ҳисоблашдаги абсолют хато аниқлансин.

1890. Ушбу

$$1) z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}; \quad 2) s = x \ln t; \quad 3) u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

функцияларнинг тўлиқ дифференциаллари топилсин.

1891. x 2 дан 2,1 гача, y эса 1 дан 0,9 гача ўзгарганда $z = \ln(x^2 + y^2)$ функция учун dz ва Δz ларнинг қийматлари топилсин.

1892. x 5 дан 4,5 гача, y эса 3 дан 3,3 гача ўзгарганда $z = \arcsin \frac{y}{x}$ функциянинг ўзгариши тақрибан ҳисоблансин.

1893. Конусни деформация қилиш натижасида унинг радиуси R 30 дан 30,1 см гача ортиб, баландлиги H эса 60 дан 59,5 см гача камайган. $\Delta V \approx dV$ формулага асосан конус ҳажми V нинг ўзгариши тақрибан ҳисоблансин.

4-§. Мураккаб функцияларнинг ҳосилалари

1°. Агар $z = F(x, y)$ бўлиб, $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$ бўлса, z t нинг мураккаб функцияси дейилади. У ҳолда, агар F , f ва φ дифференциалланувчи функциялар бўлса,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (1)$$

бўлади.

2°. Агар $z = F(x, y)$ бўлиб, $x = f(u, v)$, $y = \varphi(u, v)$ ва F , f , φ дифференциалланувчи функциялар бўлса,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \quad (2)$$

бўлади.

1894. Қуйидаги тенгламалардан (1) формулага асосан $\frac{\partial z}{\partial t}$ топилин.

- 1) $z = x^2 + xy + y^2$, $x = t^2$, $y = t$;
- 2) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$;

z функция ифодасига x ва y ларнинг қийматларини қўйиб ва сўнгра t бўйича ҳосила олиб, натижа текширилсин.

1895. $z = \frac{y}{x}$, $x = e^t$, $y = 1 - e^{2t}$; $\frac{dz}{dt}$ топилин.

1896. $z = u^v$, бунда u ва v лар x нинг функциялари, $\frac{dz}{dx}$ ёзилсин.

1897. $z = xe^y$, бунда y ўзгарувчи x нинг функцияси $\frac{dz}{dx}$ ёзилсин.

1898. Агар $F(xt, yt) = t^n \cdot F(x, y)$ бўлса, $z = F(x, y)$ функция бир жинсли дейилади. $F(xt, yt) = t^n \cdot F(x, y)$ тенгликнинг иккала томонини t бўйича дифференциаллаб, сўнгра $t = 1$ деб, Эйлернинг бир жинсли функциялар ҳақидаги теоремаси исбот қилинсин:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

1899. $z = \frac{x^2}{y}$, бунда $x = u - 2v$, $y = v + 2u$. $\frac{\partial z}{\partial u}$ ва $\frac{\partial z}{\partial v}$ топилин.

1900. $z = F(x, y)$. Агар: 1) $u = mx + ny$, $v = px + qy$; 2) $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ лар $\frac{\partial z}{\partial u}$ ва $\frac{\partial z}{\partial v}$ лар орқали ифода қилинсин.

1901. $u = F(x, y)$; $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. $\frac{\partial u}{\partial r}$ ва $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ лар $\frac{\partial u}{\partial x}$ ва $\frac{\partial u}{\partial y}$ лар орқали ифода қилинсин ҳамда

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

экани кўрсатилсин.

1902. $z = y + F(u)$, бунда $u = x^2 - y^2$. $F(u)$ исталган дифференциалланувчи функция бўлганда $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = x$ бўлиши исбот қилинсин.

1903. Қуйидаги тенгламалардан $\frac{dz}{dt}$ топилинсин:

1) $z = Ax^3 + 2Bxy + Cy^2$, $x = \sin t$, $y = \cos t$;

2) $z = \arctg \frac{y}{x}$, $x = e^{2t} + 1$, $y = e^{2t} - 1$.

1904. $z = xy + xF(u)$, бунда $u = \frac{y}{x}$,

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + xy$$

экани исбот қилинсин.

1905. $z = y\varphi(u)$, бунда $u = x^2 - y^2$.

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$$

экани исбот қилинсин.

1906. $z = F(x, y)$. Агар: 1) $u = x + 2y$, $v = x - y$; 2) $u = \sqrt{xy}$, $v = x + y$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ лар $\frac{\partial z}{\partial u}$ ва $\frac{\partial z}{\partial v}$ лар орқали ифодалансин.

5-§. Ошкормас функцияларнинг ҳосилалари

1°. (x_0, y_0) ечимга эга бўлган $F(x, y) = 0$ тенглама, унинг $\frac{\partial F}{\partial y}$ ҳосиласи (x_0, y_0) нуқтанинг қандайдир атрофида узлуксиз ва нолга тенг эмаслик $\left(\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0\right)$ шартларини қаноатлантиргандагина, x_0 атрофида y ни x нинг узлуксиз функцияси сифатида аниқлаб беради. (x_0, y_0) нуқта атрофида, юқоридаги шартлардан ташқари $\frac{\partial F}{\partial x}$ ҳосила ҳам мав-

жуд ва узлуксиз бўлса, у ҳолда *ошкормас функция* $\frac{dy}{dx}$ ҳосилага эга бўлиб, бу ҳосила ушбу

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \quad (1)$$

формула билан аниқланади.

2°. $F(x, y, z) = 0$ тенглама учун юқоридаги шартларга ўхшаш шартлар бажарилса (яъни $\frac{\partial F}{\partial z}$ ҳосила $(x_0; y_0; z_0)$ нуқта атрофида нолдан фарқли ва узлуксиз: $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ ҳосилалар бу нуқта атрофида мавжуд ва узлуксиз бўлса), бу тенглама z ни x ва y нинг ошкормас функцияси сифатида аниқлайди ва у қуйидаги хусусий ҳосилаларга эга бўлади:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad (2)$$

Қуйидаги тенгламалардан $\frac{dy}{dx}$ топилсин:

1907. $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$.

1908. 1) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; 2) $xe^{2y} - ye^{2x} = 0$.

1909. $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

Қуйидаги эгри чизиқларга ўтказилган уринмаларнинг бурчак коэффициентлари топилсин:

1910. $x^2 + y^2 = 10y$, $x = 3$ тўғри чизиқ билан кесишган нуқталарда.

1911. $x^3 + y^3 - 2axy = 0$, $x = y = a$ нуқтасида.

1912. $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 2$ эгри чизиқнинг уринмалари:

1) Ox ; 2) Oy ўққа параллел бўлган нуқталари топилсин.

Қуйидаги тенгламалардан $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ топилсин:

1913. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$. 1914. $z^2 = xy$.

1915. $\cos(ax + by - cz) = b(ax + by - cz)$.

1916. $xyz = a^3$; $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = -2z$ экани кўрсатилсин.

1917. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$ дифференциал тенгламани, $\frac{z}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ (конус сиртлар) тенгламаси билан берилган ошкормас функция z қаноатлантириши кўрсатилсин.

Қуйдаги тенгламалардан $\frac{dy}{dx}$ топилсин:

1918. $x^2 - 4y^2 = 4$. 1919. $xy + \ln y + \ln x = 0$.

1920. $y + x = e^{\frac{y}{x}}$. 1921. $2 \cos(x - 2y) = 2y - x$.

1922. $y^2 - xy = 4$ эгри чизиқнинг $x = 3$ тўғри чизиқ билан кесилган нуқталарида ўтказилган уринмаларнинг бурчак коэффициентлари топилсин.

1923. $x^2 + y^2 + z^2 - 2zx = a^2$ дан $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ топилсин.

1924. $2 \sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ бўлиши кўрсатилсин.

1925. $m \frac{\partial z}{\partial x} + n \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ дифференциал тенгламани цилиндрик сиртлар тенгламаси билан $x - mz = \varphi(y - nz)$ берилган ошқормас z функция қаноатлантириши кўрсатилсин.

6-§. Юқори тартибли хусусий ҳосилалар ва тўлиқ дифференциаллар

$\frac{\partial F}{\partial x}$ ва $\frac{\partial F}{\partial y}$ хусусий ҳосилаларга эга $z = F(x, y)$ функция берилган бўлсин. Бу ҳосилалардан олинган хусусий ҳосилалар 2-тартибли хусусий ҳосилалар дейилади. Улар қуйидагича белгиланади:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; & \frac{\partial \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)}{\partial y} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}; & \frac{\partial \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)}{\partial y} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Учинчи тартибли ва бошқа юқори тартибли хусусий ҳосилалар ҳам шунга ўхшаш таърифланади ва белгиланади.

Ҳосила олиш тартиби билангина фарқланувчи аралаш ҳосилалар узлуксиз бўлсалар, улар ўзаро тенг бўлади:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 F}{\partial y \partial x^2} \text{ ва ҳо.казо.}$$

Юқори тартибли ҳосилаларнинг қуйидаги жадвалига эга бўламиз:

$$2\text{-тартибли } \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$

3- тартибли $\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}$; $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2 \partial y}$; $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y^2}$; $\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}$ ва ҳоказо.

Юқори тартибли тўлиқ дифференциаллар қуйидагича аниқланади:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \text{ Бу теълиқни символик}$$

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z \text{ кўринишда ёзиш мумкин. Шунга ўхшаш}$$

$$d^3 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 z \text{ ва ҳоказо.}$$

1926. $z = x^3 + x^2 y + y^3$. 3- тартибли хусусий ҳосилалар топилисин.

1927. 1) $z = \sin(ax - by)$; 2) $z = \frac{x^2}{y^2}$; 3) $z = \ln(x - 2y)$ функциялар учун $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ экани текширилсин.

1928. $u = x^4 + 3x^2 y^2 - 2y^4$. 4- тартибли хусусий ҳосилалар топилисин.

1929. $u = \frac{y}{x}$. 3- тартибли хусусий ҳосилалар топилисин.

1930. $s = \ln \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{t} \right)$; $\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}$ экани текширилсин.

1931. $z = \arctg \frac{y}{x}$. 2- тартибли ҳосилалар топилисин.

1932. $z = \sin \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)$; $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 z = - \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^2 z$ экани текширилсин.

1933. $u = \arctg(2x - t)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$ экани текширилсин.

1934. $s = \sqrt[3]{ax + bt}$; $\left(x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 s = - \frac{2s}{9}$ экани текширилсин.

1935. $u = xe^{-\frac{y}{x}}$ функция

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

дифференциал тенгламани қаноатлантириши кўрсатилсин.

1936. Агар $z = F(x, y)$ функция n - ўлчовли бир жинсли функция бўлса,

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = n(n-1) z$$

ёки символик кўринишда

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z = n(n-1)z$$

бўлиши исбот қилинсин.

Кўрсатма. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = nz$ тенгликни (1898-масалага қаранг):

1) x бўйича; 2) y бўйича дифференциаллаб, натижаларни мос равишда x ва y га кўпайтириб, ҳадма-ҳад қўшиш керак.

1937. Ушбу 1) $z = x^2 + xy + y^2$; 2) $z = \frac{y}{x^2}$; 3) $z = \frac{1}{x^2 - y^2}$

4) $z = \ln\left(\frac{y}{x} - 1\right)$ бир жинсли функциялар учун $x\left(\frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z = n(n-1)z$ тенглик текширилсин.

1938. Агар: 1) $u = \frac{y^2}{x^2}$; 2) $u = x \ln \frac{y}{x}$ бўлса, d^2u то-

пилсин.

1939. $z = \cos(mx + ny)$. $d^2z = -z(mdx + ndy)^2$ экани исбот қилинсин.

1940. $z = \ln(ax + by)$. 1) $d^2z = 2dz^2$; 2) $d^2z = (-1)^{n-1} \times \times (n-1)! dz^n$ экани исбот қилинсин.

1941. Агар $z = F(u, v)$, бунда $u = mx + ny$ ва $v = px + qy$ бўлса, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(m \frac{\partial}{\partial u} + p \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(m \frac{\partial}{\partial u} + p \frac{\partial}{\partial v}\right) \times \times \left(n \frac{\partial}{\partial u} + q \frac{\partial}{\partial v}\right) z$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(n \frac{\partial}{\partial u} + q \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z$ бўлиши исбот қилинсин.

1942. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ифодада x, y ўзгарувчиларни янги $u = 3x + y$ ва $v = x + y$ ўзгарувчилар билан алмаштирилсин (1941-масалага қаранг).

1943. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ифоданинг ўзгарувчилари $u = 2x + y$ ва $v = y$ ўзгарувчилар билан алмаштирилсин (1941-масалага қаранг).

1944. Агар u ва v лар x ва y ларнинг функцияси бўлиб, $z = F(u, v)$ бўлса, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(u'_x \frac{\partial}{\partial u} + v'_x \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z + u''_{xx} \frac{\partial z}{\partial u} + + v''_{xx} \frac{\partial z}{\partial v}$ экани кўрсатилсин. Шунга ўхшаш $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ва $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ аниқлансин.

1945. $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ифодада ўзгарувчилар $u = xy$ ва $v = \frac{y}{x}$ янги ўзгарувчилар билан алмаштирилсин (1944- масалага қаранг).

1946. $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r}$ ифодада ўзгарувчилар $x = r \cos \varphi$ ва $y = r \sin \varphi$ янги ўзгарувчилар билан алмаштирилсин (1944- масалага қаранг).

1947. $z = \frac{x^2}{1-2y}$ 2- тартибли хусусий ҳосилалар топилсин.

1948. $u = \frac{x}{\sqrt[3]{t}}$ 3- тартибли хусусий ҳосилалар топилсин.

1949. $z = \frac{xy}{x-y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x-y}$ экани исбот қилинсин.

1950. $s = \ln(ax - bt)$; $\left(x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t}\right)^3 s = 2$ экани исбот қилинсин.

1951. $z = 2 \cos^2\left(x - \frac{t}{2}\right)$; $2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = 0$ экани исбот қилинсин.

1952. $z = e^{\frac{x}{y}}$; $y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}$ экани исбот қилинсин.

1953. $u = y \ln x$. $d^2 u$ ва $\partial^3 u$ топилсин.

1954. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ифодада ўзгарувчилар янги $u = ax + y$ ва $v = ax - y$ ўзгарувчиларга алмаштирилсин (1944- масалага қаранг).

1955. $x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ифодада ўзгарувчилар $u = y$ ва $v = \frac{y}{x}$ янги ўзгарувчиларга алмаштирилсин (1944- масалага қаранг).

1956. f ва φ функциялар икки марта дифференциалланувчи функциялар бўлганда $u = \frac{xf(x)}{y} + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ функция ушбу

$$xy \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

дифференциал тенгламани қаноатлантириши кўрсатилсин.

7. §. Тўлиқ дифференциалларни интеграллаш

1°. P ва Q лар x ва y ларнинг дифференциалланувчи функциялари бўлганда $Pdx + Qdy$ ифода тўлиқ дифференциал du бўлиши учун $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ шартнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

u ни топиш учун $\frac{\partial u}{\partial x} = P$ ва $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$ шартлардан $u = \int Pdx + \varphi_1(y)$, $u = \int Qdy + \varphi_2(x)$ тенгликларни ҳосил қиламиз.

Биринчи ифодадан барча маълум ҳадларни олиб, унга иккинчи ифодадаги биринчида етишмаган ва фақат y га боғлиқ бўлган маълум ҳадларни қўшсак, u ҳосил бўлади.

2° P , Q ва R лар x , y ва z нинг дифференциалланувчи функциялари бўлганда $Pdx + Qdy + Rdz$ тўлиқ дифференциал du бўлиши учун

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

шартларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Бу шартлар бажарилганда u қуйидагича топилади:

$$u = \int Pdx + \varphi_1(y, z), \quad u = \int Qdy + \varphi_2(x, z), \quad u = \int Rdz + \varphi_3(x, y).$$

Биринчи ифодадан маълум ҳадларни олиб, унга иккинчи ва учинчи ифодадаги, биринчида етишмаган, y билан z га боғлиқ маълум ҳадлар қўшилиб ечилса, u ҳосил бўлади.

Функцияни унинг тўлиқ дифференциали бўлишига топиш, тўлиқ дифференциални интеграллаш дейилади.

Қуйидаги ифодалар тўлиқ дифференциал du экани текширилсин ва u топилсин:

1957. $(2x + y) dx + (x - 2y - 3) dy$.

1958. $x \sin 2y dx + x^2 \cos 2y dy$.

1959. $(x + \ln y) dx + \left(\frac{x}{y} + \sin y\right) dy$.

1960. $\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$.

1961. $(yz - 2x) dx + (xz + y) dy + (xy - z) dz$.

1962. $\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x^2}\right) dx + \frac{dy}{y} - \left(\frac{x}{z^2} + \frac{1}{1+z^2}\right) dz$.

Қуйидаги ифодалар тўлиқ дифференциал du экани текширилсин ва u топилсин:

1963. $(y^2 - 1) dx + (2xy + 3y) dy$.

1964. $(\sin 2y - y \operatorname{tg} x) dx + (2x \cos 2y + \ln \cos x + 2y) dy$.

$$1965. \left(y - \frac{\sin^2 y}{x^2} \right) dx + \left(x + \frac{\sin 2y}{x} + 1 \right) dy.$$

$$1966. t \sqrt{\frac{x}{t^2+1}} dt + \frac{1 + \sqrt{t^2+1}}{2\sqrt{x}} dx.$$

$$1967. (\ln y - \cos 2z) dx + \left(\frac{x}{y} + z \right) dy + (x + 2x \sin 2z) dz.$$

$$1968. \frac{dx - 3 dy}{z} - \frac{3u - z}{z^2} dz.$$

8-§. Текис эгри чизиқнинг махсус нуқталари

$F(x, y) = 0$ эгри чизиқнинг бирорта нуқтасида $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ ва $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ бўлса, бундай нуқта *махсус* дейилади.

Бу нуқтада ўтказилган уринманинг $k = y'$ бурчак коэффициенти $A + 2Bk + Ck^2 = 0$ тенгламадан топилади, бундаги A , B ва C лар мос равишда $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ ва $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ ҳосилаларнинг шу нуқтадаги қийматларидан иборат. Бу ерда қуйидаги уч ҳол бўлиши мумкин:

1) $B^2 - AC > 0$ — уринмалар иккита бўлиб, нуқта *туғун нуқта* дейилади.

2) $B^2 - AC < 0$ — уринма бўлмайди, нуқта *яккаланган* бўлади.

3) $B^2 - AC = 0$ — бу ҳолда нуқта ёки *яккаланган*, ёки *қайтиш* нуқтаси, ёки эгри чизиқнинг ўз-ўзига уриниш нуқтаси бўлади; қайтиш ва ўз-ўзига уриниш нуқталарида эгри чизиқнинг икки шохчасига битта умумий уринма мавжуд бўлади.

Учинчи, шубҳали ҳолда масалага тўла жавоб бериш учун, текширилаётган нуқтанинг ихтиёрий кичик атрофида эгри чизиқнинг бошқа нуқталари бор ёки йўқлигини аниқлаш керак.

Қуйидаги эгри чизиқларнинг жойлашган соҳалари, координата ўқлари билан кесишган нуқталари, махсус нуқталари аниқлансин ва эгри чизиқлар ясалсин.

$$1969. x^3 + x^2 - y^2 = 0. \quad 1970. y^2 = (x + 2)^3.$$

$$1971. x^3 - x^2 - y^2 = 0. \quad 1972. y^2 + x^4 - x^2 = 0.$$

$$1973. (y - x)^2 = x^3. \quad 1974. y^2 = (x - 2)^2.$$

Қуйидаги эгри чизиқларнинг жойлашган соҳалари, махсус нуқталари ва асимптоталари аниқлансин ҳамда эгри чизиқлар ясалсин:

$$1975. (x + 2a)^3 + xy^2 = 0. \quad 1976. x^3 - y^3 - 3y^2 = 0.$$

$$1977. x^3 + y^3 - 3axy = 0. \quad 1978. y^2 (x^2 - a^2) = x^4.$$

Қуйидаги эгри чизиқларнинг жойлашган соҳалари, координата ўқлари билан кесишган нуқталари, махсус нуқталари аниқлансин ва эгри чизиқлар ясалсин;

$$1979. y^2 + x^3 - 2x^2 = 0. \quad 1980. a^2 y^2 = x^2 (2ax - x^2).$$

$$1981. y^2 = x(x+2)^2. \quad 1982. xy^2 = (x+a)^3.$$

$$1983. 4y^2 = x^5 + 5x^4. \quad 1984. y^2 - x^4 + x^2 = 0.$$

1985. $4x^2 - y^2 + x^3 - y^3 = 0$ эгри чизиқнинг асимптотаси, махсус нуқтаси, $y_{\max}$, координата ўқлари билан кесишган нуқталари топилсин ва эгри чизиқ ясалсин.

Қуйидаги эгри чизиқларнинг жойлашган соҳалари, махсус нуқталари ва асимптоталари топилсин:

$$1986. 1) y^2 (2a - x) = x(x - a)^2 \text{ (строфоида);}$$

$$2) a^2 (a^2 + y^2) = x^2 y^2.$$

$$1987. 1) x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2);$$

$$2) a(x^2 + y^2) = x(x^2 - y^2).$$

9-§. Текис эгри чизиқлар оиласининг ўрамаси

$F(x, y, \alpha) = 0$ эгри чизиқлар оиласининг ўрамаси деб шундай эгри чизиққа айтиладики: 1) у оиланинг ҳар бир чизигига уринади; 2) унинг ҳар бир нуқтаси оила эгри чизиқларидан ўзидан фарқли биттаси билан унинг уриниш нуқтаси бўлади.

$F(x, y, \alpha) = 0$ эгри чизиқлар оиласининг ўрамаси мавжуд бўлса, унинг тенгламаси,

$$F(x, y, \alpha) = 0 \text{ ва } F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$$

тенгликлардан α параметрни йўқотиш натижасида ҳосил бўлади.

Бу усул билан топилган эгри чизиқ ўрама бўлмасдан, оила эгри чизиқлари махсус нуқталарининг геометрик ўрни ҳам бўлиши мумкин [1990, 2) масаланинг жавобига қаралсин].

Қуйидаги эгри чизиқлар оиласининг ўрамаси топилсин ва ўрама ҳамда оила эгри чизиқлари ясалсин:

$$1988. 1) y = ax + a^2; \quad 2) y = ax^2 + \frac{1}{a}.$$

$$1989. 1) (x - a)^2 + y^2 = R^2; \quad 2) 4ay = (x - a)^2.$$

$$1990. 1) y - 1 = (x - a)^2; \quad 2) (y - 1)^3 = (x - a)^2;$$

$$3) (y - 1)^3 = (x - a)^3; \quad 4) 9(y - a)^2 = (x - a)^3.$$

1991. Узунлиги ўзгармас a бўлган кесманинг учлари координата ўқлари бўйича сирғанади. Бундай кесмалар оиласининг ўрамаси топилсин.

1992. Координаталар бошидан ўтувчи ва марказлари $y^2 = 4x$ параболада ўтувчи айланалар оиласининг ўрамаси топилсин.

1993. Диаметрлари $xy = a^2$ гипербола нуқталарининг фокал радиус-векторларидан иборат бўлган айланалар оиласининг ўрамаси топилсин.

1994. Координаталар бошидан бошланғич b тезлик билан Ox ўққа α бурчак остида тўп отилган, α ҳар хил бўлганда тўп траекториялари оиласининг ўрамаси топилсин.

1995. 1) p ўзгармас бўлганда $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ тўғри чизиқлар оиласининг; 2) $y = ax + \frac{1}{a}$ тўғри чизиқлар оиласининг; 3) $y - 1 = (x - a)^3$ кубик параболалар оиласининг ўрамалари топилсин.

1996. Марказлари Ox ўқда ётувчи, радиуслари эса ўша марказлардан чиқарилган $y^2 = 4x$ параболанинг мос ординаталарига тенг айланалар оиласининг ўрамаси топилсин.

1997. Ярим ўқларининг йиғиндиси ўзгармас f узунликка тенг бўлган $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипслар оиласининг ўрамаси топилсин.

1998. a ни ўзгарувчи ҳисоблаб, симметрия ўқи Oy ўққа параллел бўлган, $(-a; 0)$, $(3a; 0)$ ва $(0; 3a^3)$ нуқталардан ўтувчи параболалар оиласининг ўрамаси топилсин.

10-§. Сиртга ўтказилган уринма текислик ва нормал

Сирт $F(x, y, z) = 0$ тенглама билан берилган бўлсин; ўша сиртда $M(x; y; z)$ нуқта олинган. Бу нуқтада ўтказилган нормал тенгламалари қуйидагича ёзилади:

$$\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \quad (1)$$

Уринма текислик тенгламаси:

$$\frac{\partial F}{\partial x} (X - x) + \frac{\partial F}{\partial y} (Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z} (Z - z) = 0 \quad (2)$$

дан иборат бўлади.

(1) ва (2) тенгламалардаги X, Y, Z — нормалнинг ёки уринма текислиكنинг ўзгарувчи координаталаридан иборат.

$N \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}; \frac{\partial F}{\partial y}; \frac{\partial F}{\partial z} \right\}$ векторни сиртнинг нормал вектори деймиз.

Агар сиртдаги бирор нуқтада $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ бўлса, у махсус нуқта дейилади. Бундай нуқтада сиртнинг нормали ҳам уринма текислиги ҳам бўлмайди.

Қуйидаги сиртларга ўтказилган уринма текисликлар тенгламаси ёзилсин:

1999. $z = x^2 + 2y^2$, (1; 1; 3) нуқтада.

2000. $xy = z^2$, $(x_0; y_0; z_0)$ нуқтада.

2001. $xyz = a^3$, $(x_0; y_0; z_0)$ нуқтада.

2002. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $(x_0; y_0; z_0)$ ва $(a; b; c)$ нуқталарда.

2003. $x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$ сиртга уринма ва $x + y - z = 0$ текисликка параллел бўлган текислик аниқлансин.

2004. $x^2 + y^2 = z^2$ конус сиртнинг (3; 4; 5) нуқтасида ўтказилган нормалнинг тенгламалари ёзилсин. Конуснинг қандай нуқтасида нормал аниқмас?

2005. $x^2 + y^2 - xz - yz = 0$ сиртнинг (0; 2; 2) нуқтасида ўтказилган нормалнинг координата ўқлари билан ҳосил қилган бурчаклари топилсин.

2006. $x^2z + y^2z = 4$ сиртнинг $(-2; 0; 1)$ нуқтасида ўтказилган нормалнинг тенгламалари ёзилсин. Нормал ва сирт ясалсин.

2007. $xyz = a^3$ сиртга ўтказилган уринма текисликлар координата текисликлари билан ўзгармас ҳажмга эга пирамидалар ҳосил қилиши кўрсатилсин.

2008. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ сиртга ўтказилган уринма текисликларнинг координата ўқларидан кесган кесмалари квадратларининг йиғиндиси ўзгармас a^2 га тенг экани кўрсатилсин.

2009. Координаталар бошидан $y = x \operatorname{tg} \frac{z}{a}$ геликоиднинг $(a; a; \frac{\pi a}{4})$ нуқтасида ўтказилган уринма текисликкача бўлган масофа аниқлансин. $z = 0; \frac{\pi a}{4}; \frac{\pi a}{4}$ ла кесимлар бўйича сирт ясалсин.

2010. $az = x^2 + y^2$ сиртнинг $x = y = z$ тўғри чизик билан кесилган нуқталарида ўтказилган уринма текисликларнинг тенгламалари ёзилсин.

2011. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ сиртнинг $(x_0; y_0; z_0)$ нуқтасида ўтказилган уринма текисликнинг тенгламаси

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

кўринишда бўлиши кўрсатилсин.

2012. $x^2 + y^2 - (z - 5)^2 = 0$ сиртнинг $x_0 = 4$, $z_0 = 0$ ва $y_0 = 3$ нуқтасида ўтказилган нормалнинг тенгламалари ёзилсин. Биринчи октантда ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$) сирт ва нормал ясалсин.

2013. $2z = x^2 - y^2$ сиртнинг $(2; 2; 0)$ нуқтасида ўтказилган нормалнинг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчаклар топилисин.

2014. Координаталар бошидан $(2a^2 - z^2) x^2 - a^2 y^2 = 0$ коноиднинг $(a; a; a)$ нуқтасида ўтказилган уринма текисликкача бўлган масофа аниқлансин.

2015. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ сиртнинг ихтиёрий нуқтасида ўтказилган уринма текисликнинг координата ўқларидан кесган кесмаларининг йиғиндиси ўзгармас a га тенглиги кўрсатилсин.

2016. $z = 4 - x^2 - y^2$ сиртнинг қайси нуқтасида ўтказилган уринма текислик: 1) xOy текисликка; 2) $2x + 2y + z = 0$ текисликка параллел бўлади? Уша уринма текисликларнинг тенгламалари ёзилсин.

11-§. Скаляр майдон. Юксакликлар чизиқлари ва сиртлари. Берилган йўналиш бўйича ҳосила.

Градиент

$u = F(x, y)$ тенглама бирор соҳанинг ҳар бир (x, y) нуқтасида u ни аниқлаб беради, уша соҳа скаляр u нинг майдони дейилади.

$F(x, u) = u_1$, $F(x, y) = u_2, \dots$ лардаги $u_1, u_2, \dots$ лар ўзгармас бўлганда чизиқларнинг ҳар бири бўйича скаляр u ўзгармас бўлиб, у фақат $(x; y)$ нуқта бир чизиқдан иккинчи чизиққа ўтганидагина ўзгаради. Бу чизиқлар юксакликлар чизиқлари ёки изочизиқлар (изотермалар, изобаралар ва шунга ўхшаш дейилади).

$u = F(x, y, z)$ тенглама уч ўлчовли фазонинг бирор қисмида скаляр u нинг майдонини аниқлайди. У ҳолда изосиртлар ёки юксакликлар сиртларининг тенгламалари

$F(x, y, z) = u_1$, $F(x, y, z) = u_2, \dots$ лардан иборат бўлади.

$(x; y; z)$ нуқта $x = x_0 + l \cos \alpha$, $y = y_0 + l \cos \beta$, $z = z_0 + l \cos \gamma$ тўғри чизиқ бўйича $\frac{dl}{dt} = 1$ тезлик билан ҳаракат қилсин.

У ҳолда $F(x, y, z)$ скаляр

$$v = \frac{du}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial F}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial F}{\partial z} \cos \gamma = N \cdot l_0$$

тезлик билан ўзгаради, бундаги $N \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}; \frac{\partial F}{\partial y}; \frac{\partial F}{\partial z} \right\}$ — изосиртнинг нормал вектори бўлиб, $l_0 \{ \cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma \}$ — йўналишнинг бирлик векторидан иборат.

Ушбу

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial F}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial F}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial F}{\partial z} \cos \gamma = N \cdot l_0.$$

ҳосила $u = F(x, y, z)$ функциянинг берилган $l_0 \{ \cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma \}$ йўналиш бўйича ҳосиласи дейилади.

$u = F(x, y, z)$ скалярнинг градиенти деб $\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k$ векторга айтилади. Градиент скаляр u нинг энг тез ўзгариши тезлигининг векторидан иборат.

2017. $z = 4 - x^2 - y^2$. Юксаклик чизиқлари ва $A(1; 2)$ нуқтада $\text{grad } z$ ясалсин.

2018. $z = \arctg \frac{y}{x}$. Юксаклик чизиқлари ясалсин ва: 1) $y = x$ тўғри чизиқнинг исталган нуқтасида, $y = -x$ тўғри чизиқнинг исталган нуқтасида, жумладан $(\frac{1}{2}; \pm \frac{1}{2})$, $(1; \pm 1)$, ... нуқталарда $\text{grad } z$ ясалсин.

2019. Баландлик горизонталлари $h = 20 - \frac{x^2}{4} - y^2$ тенглама билан аниқланади. $h = 20, 19, 18, 16$ ва 11 м га мос горизонталлар ясалсин. Бунда $\text{grad } h$ нинг йўналиши энг тикка қияликка эга чизиқ йўналишини аниқлаб берса, унинг катталиги эса юксакликнинг ўша қиялик тиккалигини беради. $x = 2$ ва $y = 1$ нуқтада $\text{grad } h$ ясалсин.

2020. $z^2 = xy$ сиртнинг $(4; 2)$ нуқтадаги энг катта тиккалиги топилсин.

2021. $u = \ln(e^x + e^y)$ функциянинг координата бурчагининг биссектрисасига параллел йўналиш бўйича ҳосиласи топилсин.

2022. $u = x^2 + y^2 + z^2$ функциянинг $l \{ \cos 45^\circ; \cos 60^\circ; \cos 60^\circ \}$ йўналиш бўйича $(1; 1; 1)$ нуқтада ҳосиласи топилсин; ўша нуқтада $\text{grad } u$ ва унинг узунлиги топилсин. Юксаклик сиртлари ясалсин.

2023. $u = x^2 + y^2 - 2z$ скалярнинг юксаклик сиртлари ясалсин ва $u = 4$ сиртнинг Ox ўқ билан кесишган нуқталарида $\text{grad } u$ топилсин ва ясалсин.

2024. $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ функциянинг (a, b, c) нуқтада, ўша нуқтанинг радиус-вектори йўналиши бўйича ҳосиласи топилсин.

2025. $z = \frac{4}{x^2 + y^2}$. Юксаклик чизиқлари ва $(-1; 2)$ нуқтада $\text{grad } z$ ясалсин ҳамда $|\text{grad } z|$ топилисин.

2026. $u = xyz$. Координата ўқлари билан бир хил бурчак тузувчи йўналиш бўйича исталган нуқтада ва $(1; 2; 1)$ нуқтада $\frac{du}{dl}$ топилисин.

2027. $u = x^2 + y^2 - z^2$ скалярнинг юксаклик сиртлари ясалсин, координаталар бошидан ўтувчи сиртда $\text{grad } u$ аниқлансин ва ўша сиртнинг $y = 0$ ва $z = 2$ бўлган нуқталарида $\text{grad } u$ ясалсин.

2028. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. $\text{grad } u$ ва унинг узунлиги топилисин.

2029. $u = \frac{z}{c} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ функция майдонининг изосиртлари ясалсин ва $(a; b; c)$ нуқтада ўша нуқтанинг радиус-вектори йўналиши бўйича u нинг ҳосиласи топилисин.

12-§. Икки ўзгарувчили функциянинг экстремуми

1°. Зарурий шартлар $z = F(x; y)$ функция фақат $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$

ва $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ бўлган нуқталардагина экстремумга эга бўлиши мумкин.

Бу нуқталар критик нуқталар дейилади.

2°. Етарли шартлар. $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ ва $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ ҳосилаларнинг $(x_0$

$y_0)$ критик нуқтадаги қийматларини A , B ва C орқали белгилайлик. У вақтда агар:

- 1) $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$, бўлса, у ҳолда $\begin{cases} A < 0 \text{ бўлганда } F(x_0; y_0) = z_{\max} \\ A > 0 \text{ бўлганда } F(x_0; y_0) = z_{\min}; \end{cases}$
- 2) $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} < 0$, бўлса, у ҳолда экстремум бўлмайди;
- 3) $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0$, бўлса, у ҳолда экстремум бўлиши ҳам мумкин, бўл-

маслиги ҳам мумкин (шубҳали ҳол).

3°. Шартли экстремум $z = F(y, x)$ функциянинг, x ва y ўзаро $\varphi(x, y) = 0$ тенглама билан боғланган ҳолдаги экстремумини топиш учун $u = F(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$ ёрдамчи функцияни тузамиз.

Экстремал (x, y) нуқтанинг координаталари ушбу $\varphi(x, y) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$,

$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ учта тенгламани қаноатлантириши керак λ , x ва y ўша тенгламалардан топилди.

Қуйидаги функцияларнинг экстремумлари топилсин:

2030. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

2031. $z = y \sqrt{x - y^2} - x + 6y$.

2032. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

2033. $z = 2xy - 4x - 2y$. 2034. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.

2035. $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ва

$0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ бўлганда.

2036. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $x + y = 2$ бўлганда.

2037. $z = x + y$, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$ бўлганда.

2038. Ҳажми V га тенг ва энг кичик сиртга эга бўлган тўғри тўрт бурчакли очиқ ҳовузнинг ўлчовлари аниқлансин.

2039. $x^2 + 4y^2 = 4$ эллипс ва $2x + 3y - 6 = 0$ тўғри чизик ясалсин ва эллипснинг берилган тўғри чизикдан энг узоқ ва энг яқин бўлган нуқталари топилсин.

2040. $x^2 - y^2 = 4$ гиперболода $(0; 2)$ нуқтадан энг кичик масофада бўлган нуқта топилсин.

2041. Тўлиқ сирти $S = 6\pi \text{ дм}^2$ га тенг ва энг катта ҳажмга эга бўлган цилиндрнинг ўлчовлари аниқлансин.

2042. 1) $x^2 + 3y^2 = 12$ эллипсга ички чизилган ва асоси унинг катта ўқиға параллел бўлган тенг ёнли учбурчаклардан юзи энг каттаси топилсин.

2) Ох ўқ икки муҳитнинг чегараси бўлиб ҳисобланади. $A(0; a)$ нуқтадан чиққан ёруғлик нури $B(c; -b)$ нуқтага энг қисқа вақтда етиб бориши учун y қандай йўл билан юриши керак ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$)?

Қўрсатма. $T = \frac{a}{v_1 \cos \alpha} + \frac{b}{v_2 \cos \beta}$ функциянинг $\alpha \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta = c$

шарт бажарилгандаги минимумини топиш керак, бунда v_1 ва v_2 ёруғлик нурунинг икки муҳитдаги тезликлари, α ва β эса нурунинг тушиш ва сиғиш бурчаклари.

Қуйидаги функцияларнинг экстремумлари топилсин:

2043. $z = 3x + 6y - x^3 - xy - y^2$.

$$2044. z = x^2 + y^2 - 2x - 4\sqrt{xy} - 2y + 8.$$

$$2045. z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

$$2046. z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8.$$

$$2047. z = xy, x^2 + y^2 = 2 \text{ бўлганда.}$$

2048. Диагоналининг узунлиги $2\sqrt{3}$ бўлган тўғри бурчакли параллелепипедлардан энг катта ҳажмга эга бўлгани топилсин.

2049, 1) $y^2 = 4x$ параболада $x - y + 4 = 0$ тўғри чизиққа энг яқин бўлган нуқта топилсин.

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсга энг катта юзга эга бўлган тўғри тўртбурчак ички чизилган. Унинг юзи топилсин.

2050. Ён сиртлари S бўлган конуслардан энг катта ҳажмга эга бўлганининг ўлчовлари аниқлансин.

XII БОБ

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1-§. Дифференциал тенглама ҳақида тушунча

1°. n -тартибли оддий дифференциал тенглама деб

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

кўринишдаги тенгламага айтилади.

Тенгламадаги y ўрнига қўйганда уни айниятга айлантирувчи $\varphi(x)$ функция тенгламанинг *ечими* дейилади. Шу функцияни аниқловчи $y = \varphi(x)$ ёки $\Phi(x, y) = 0$ тенглама дифференциал тенгламанинг *интеграли* дейилади. Ҳар бир интеграл xOy текисликда дифференциал тенгламанинг *интеграл чизиғи* деб аталувчи эгри чизиқни аниқлайди.

Агар x, y ва n та ихтиёрий $C_1, C_2, \dots, C_n$ ўзгармасларни ўз ичига олган

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0 \quad (2)$$

тенгламадаги ихтиёрий ўзгармасларга ҳар хил қийматлар берганда (1) тенглама ечимларининг мавжудлик ва ягоналик соҳасидан ўтувчи ҳамма интеграл чизиқлар ва фақат ўша чизиқларгина ҳосил бўлса, (2) тенглама (1) дифференциал тенгламанинг ўша соҳадаги *умумий интеграли* дейилади.

Ихтиёрий ўзгармасларга аниқ қийматлар бериб, умумий интегралдан ҳосил қилинган интеграл *хусусий интеграл* дейилади.

Умумий интеграл (2) ни n марта x бўйича дифференциаллаб, ҳосил бўлган n та тенгламадан ва (2) тенгламадан n та ихтиёрий ўзгармасни йўқотсак, берилган (1) дифференциал тенгламага эга бўламиз.

2°. Биринчи тартибли дифференциал тенглама

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (3)$$

кўринишга эга. (3) тенгламани $\frac{dy}{dx}$ га нисбатан ечиш мумкин бўлса, уни *ешиб*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (4)$$

тенгламага эга бўламиз.

(4) тенглама, интеграл чизиқнинг $(x; y)$ нуқтадаги $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$ қиялиги аниқлайди, яъни у интеграл чизиқлар *йўналишлари* нинге *майдонини* аниқлайди.

Агарда бирор соҳада $f(x, y)$ функция узлуксиз бўлса ва чегараланган $f_y(x, y)$ хусусий ҳосилага эга бўлса, у ҳолда шу соҳанинг ҳар бир ички $(x_0; y_0)$ нуқтасидан *бирдан-бир* интеграл чизиқ ўтар экан.

Бундай соҳада (4) тенглама $y = \varphi(x, C)$ ёки $\Phi(x, y, C) = 0$ умумий интегралга эга; бу умумий ечимдан $x = x_0$ бўлганда $y = y_0$ бўладиган *бошланғич шартларни* қаноатлантирувчи бирдан-бир хусусий интеграл топиш мумкин.

2051. Ўрнига қўйиш йўли билан $y = Cx^3$ функция $3y - xy' = 0$ тенгламанинг ечими эканлиги текширилсин. Ушбу

$$1) (1; \frac{1}{3}); 2) (1; 1); 3) (1; -\frac{1}{3})$$

нуқталардан ўтувчи интеграл чизиқлар ясалсин.

2052. Ўрнига қўйиш йўли билан: 1) $y'' + 4y = 0$ ва 2) $y''' - 9y' = 0$ дифференциал тенгламалар мос равишда 1) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ ва 2) $y = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-3x}$ умумий интегралларга эга эканликлари текширилсин.

2053. $C = 0; \pm 1; \pm 2$ бўлганда $y = Cx^2$ параболалар ясалсин ва шу параболалар оиласининг дифференциал тенгламаси тузилсин.

2054. 1) $x^2 + y^2 = 2Cx$ айланалар, 2) $y = x^3 + 2Cx$ параболалар оиласининг тасвири ясалсин ва уларнинг дифференциал тенгламалари тузилсин.

2055. 1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$; 2) $\frac{dy}{dx} = y - x$; 3) $\frac{dy}{dx} = y + x^2$ тенгламаларнинг ҳар қайсиси билан аниқланган йўналиш *майдонларининг* тасвири ясалсин.

2056. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2}$ тенглама билан аниқланувчи йўналиш *майдонининг* тасвири, барча нуқталарида $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$; 1; 2; 3; ... бўлган айланалар ёрдами билан ясалсин. Координатлар бошидан ўтувчи интеграл чизиқ тахминий чизилсин.

2-§. Ўзгарувчилари ажраладиган 1-тартибли дифференциал тенглама. Ортогонал траекториялар

1°. 1-тартибли

$$Pdx + Qdy = 0 \quad (1)$$

дифференциал тенгламадаги дифференциаллар олдидаги P

ва Q коэффициентлар фақат x ёки фақат y нинг функцияларидан иборат бўлган кўпайтувчиларга ажралса, яъни агарда тенглама

$$f(x) \varphi(y) dx + f_1(x) \varphi_1(y) dy = 0 \quad (2)$$

кўринишда бўлса, (1) тенглама *ўзгарувчилари ажраладиган* тенглама дейилади.

(2) тенгламанинг иккала ҳадини $\varphi(y) f_1(x)$ кўпайтмага бўлиб,

$$\frac{f(x) dx}{f_1(x)} + \frac{\varphi_1(y) dy}{\varphi(y)} = 0 \quad (3)$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

(3) тенгламанинг, демак, (2) тенгламанинг умумий интеграл

$$\int \frac{f(x) dx}{f_1(x)} + \int \frac{\varphi_1(y) dy}{\varphi(y)} = C \quad (4)$$

дан иборат бўлади.

2°. Берилган $F(x, y, a) = 0$ чизиклар оиласининг ҳар бир чизигини тўғри бурчак остида кесувчи чизиклар ўша чизиклар оиласининг ортогонал траекториялари дейилади.

$F(x, y, a) = 0$ тенгламани x бўйича дифференциаллаб, ҳосил бўлган ва $F(x, y, a) = 0$ тенгламалардан a йўқотилса, берилган чизиклар оиласининг $y' = f(x, y)$ дифференциал тенгламасига эга бўламиз. U вақтда ортогонал траекторияларнинг дифференциал тенгламаси $y' = -$

$$-\frac{1}{f(x, y)} \text{ дан иборат бўлади.}$$

Қуйидаги дифференциал тенгламаларда: 1) умумий интеграл топилсин; 2) бир нечта интеграл чизиклар чизилсин; 3) $x = -2$ бўлганда $y = 4$ бошланғич шартлар бўйича хусусий интеграл топилсин:

$$2057. xy' - y = 0. \quad 2058. xy' + y = 0.$$

$$2059. yy' + x = 0. \quad 2060. y' = y.$$

Қуйидаги тенгламаларнинг умумий интеграллари топилсин:

$$2061. x^2 y' + y = 0. \quad 2062. x + xy + y' (y + xy) = 0.$$

$$2063. \varphi^2 dr + (r - a) d\varphi = 0. \quad 2064. 2st^2 ds = (1 + t^2) dt.$$

Қуйидаги тенгламаларнинг умумий интеграллари ва берилган бошланғич шартлар бўйича хусусий интеграллари топилсин:

$$2065. 2y' \sqrt{x} = y, \quad x = 4 \text{ бўлганда } y = 1.$$

$$2066. y' = (2y + 1) \operatorname{ctg} x, \quad x = \frac{\pi}{4} \text{ бўлганда } y = \frac{1}{2}.$$

$$2067. x^2 y' + y^2 = 0, \quad x = -1 \text{ бўлганда } y = 1.$$

2068. 1) $y' (x^2 - 4) = 2xy$, 2) $y' + y \operatorname{tg} x = 0$, тенгламалардан ҳар бирининг 1) $(0; 1)$; 2) $(0; \frac{1}{2})$; 3) $(0; -\frac{1}{2})$; 4) $(0; -1)$ нуқталардан ўтувчи интеграл чизиклари ясалсин.

2069. Агар $(1; \frac{1}{3})$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг ихтиёрий нуқтасида ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти уриниш нуқта радиус-векторининг бурчак коэффициентида уч марта катта бўлса, ўша эгри чизиқ топилсин.

2070. Эгри чизиқ $A(0; a)$ нуқтадан ўтади, PN — унинг ихтиёрий нуқтасининг ординатаси. AP ёйнинг узунлиги s бўлганда $OAPN$ нинг юзи as га тенг бўлиш шартидан эгри чизиқ аниқлансин.

2071. Эгри чизиқ $(a; a)$ нуқтадан ўтади. Ихтиёрий нуқтасидаги уринма ости уриниш нуқтаси абсциссасининг иккиланганига тенг. Шу чизиқ топилсин.

2072. $(-1; -2)$ нуқтадан ўтиб, ҳар бир нуқтасидаги нормал ости 2 га тенг эгри чизиқ топилсин.

2073. Температураси 20° бўлган уйдаги жисми 100° дан 60° гача совутиш учун 10 минут вақт кетса, уни 25° гача совутиш учун қанча вақт кетади? (Ньютон қонунига асосан совуш тезлиги температуралар айирмасига пропорционал.)

2074. Осма кўприк (31-бетдаги 6-чизма) канатига горизонтал балканинг ҳар бир бирлик узунлигидан тунадиган юк p кг га тенг. Канатнинг энг қуйи нуқтасидаги тарангликни H кг деб ҳамда канат оғирлигини ҳисобга олмасдан унинг шакли топилсин.

Қўрсатма. OS ёйда ихтиёрий M нуқта олампиз (31-бетдаги 6-чизма). Канатнинг OM бўлагига учта куч: горизонтал H (M дан чапда), вертикал px оғирлик ва тангенциал T (M дан ўнгда) кучлар таъсир этади. Мувозанат бўлиши учун кучларнинг Ox ва Oy ўқлардаги проекциялари йиғиндисини нолга тенг бўлиши керак.

2075. $P(-a; a)$ нуқтадан ўтувчи ва исталган нуқтасидаги уринманинг координата ўқлари орасидаги кесмаси уриниш нуқтаси M да тенг иккига бўлинувчи эгри чизиқ аниқлансин ва ясалсин.

2076. $ay = x^2$ параболалар оиласининг ортогонал траекториялари топилсин. Улар ясалсин.

2077. $xy = c$ гиперболалар оиласининг ортогонал траекториялари топилсин.

2078. $ay^3 = x^3$ ярим кубик параболалар оиласининг ортогонал траекториялари топилсин.

2079. $x^2 + 4y^2 = a^2$ эллипслар оиласининг ортогонал траекториялари топилсин.

Қуйидаги тенгламалар ечилсин:

2080. $y'x^3 = 2y$. 2081. $(x^2 + x)y' = 2y + 1$.

2082. $y' \sqrt{a^2 + x^2} = y$. 2083. $(1 + x^2)y' + 1 + y^2 = 0$.

2084. $dr + r \operatorname{tg} \varphi d\varphi = 0$; $\varphi = \pi$ бўлганда $r = 2$.

2085. $y' = 2 \sqrt{y} \ln x$; $x = e$ бўлганда $y = 1$.

2086. $(1 + x^2)y' + y \sqrt{1 + x^2} = xy$; $x = 0$ бўлганда $y = 1$.

2087. $A(-1; 1)$ нуқтадан ўтувчи ва исталган нуқтасидаги уринманинг бурчак коэффициенти уриниш нуқта ординатасининг квадратига тенг бўлган эгри чизик аниқлансин.

2088. Эгри чизик $A(0; a)$ нуқтадан ўтади, PN — ихтиёрий нуқтасининг ординатаси. $OAPN$ нинг юзи $= a(PN - a)$ эканига кўра эгри чизик аниқлансин.

2089. $(-1; 1)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизикнинг исталган нуқтасида ўтказилган уринма Ox ўқдан уриниш нуқтаси абсциссасининг квадратига тенг OT кесма кесади. Ўша эгри чизик аниқлансин ва ясалсин.

2090. $x^2 - 2y^2 = a^2$ гипербодалар оиласининг ортогонал траекториялари топилсин.

2091. Исталган нуқтасининг радиус-вектори, шу нуқтада ўтказилган нормалнинг эгри чизик билан Ox ўқ орасидаги кесмасига (яъни нормал узунлигига) тенг эгри чизик аниқлансин.

2092. Эгри чизик ва унинг ихтиёрий нуқтасининг ординатаси ҳамда координата ўқлари билан чегараланган юз, эгри чизикнинг ўша нуқтасининг координаталарига асосан ясалган тўғри тўртбурчак юзининг $\frac{1}{3}$ га тенг. Ўша чизик аниқлансин.

3 - §. 1-тартибли: 1) бир жинсли, 2) чизикли дифференциал тенгламалар ва 3) Бернулли дифференциал тенгламаси

1°. Бир жинсли тенглама. $Pdx + Qdy = 0$ қўринишдаги тенглама P ва Q x ва y нинг бир хил ўлчовли бир жинсли функциялари бўлганда, бир жинсли тенглама дейилади. Бу тенглама $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

қўринишга келтирилиб, $\frac{y}{x} = u$ ёки $y = ux$ алмаштириш билан ечилади.

2°. Чизикли тенглама. Изланувчи y ва унинг барча ҳосилаларига нисбатан биринчи даражали бўлган тенглама чизикли дейилади. 1-тартибли чизикли тенглама $y' + Py = Q$ қўринишга эга, $y = uv$ ал-

маштириш билан бу тенглама ўзгарувчилари ажраладиган иккита тенгламага келтирилади. 1-тартибли чизикли тенгламанинг ечиш йўлларида иккинчиси (ихтиёрий ўзгармасини вариация қилиш) қуйидагидан иборат:

олдин $y' + Py = 0$ тенгламани ечиб, $y = -Ae^{-\int P dx}$ ечимни топамиз. Бундаги A ни x нинг функцияси ҳисоблаб, берилган тенгламага қўямиз. Бундан A' ва A ни топамиз.

3°. Бернулли тенгламаси: $y' + Py = Qy^n$ чизикли тенгламага ўхшаш $y = uv$ алмаштириш билан ёки ихтиёрий ўзгармасини вариация қилиш билан ечилади. Бернулли тенгламаси $z = y^{1-n}$ алмаштириш натижасида чизикли тенгламага келтирилади.

Қуйидаги дифференциал тенгламалар интеграллансин:

$$2093. yy' = 2y - x. \quad 2094. x^2 + y^2 - 2xyy' = 0.$$

$$2095. \frac{ds}{dt} = \frac{s}{t} - \frac{t}{s}. \quad 2096. y' - \frac{3y}{x} = x.$$

$$2097. y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}. \quad 2098. y' \cos x - y \sin x = \sin 2x.$$

$$2099. y'x + y = -xy^2. \quad 2100. y' - xy = -y^2e^{-x^2}.$$

$$2101. xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x.$$

$$2102. x^2y' = y^2 + xy. \quad 2103. xy' + y = \ln x + 1.$$

$$2104. x^2y^2y' + yx^3 = 1.$$

2105 — 2107- масалаларда берилган бошланғич шартлар бўйича хусусий интеграллар топилсин:

$$2105. y + \sqrt{x^2 + y^2} - xy' = 0; x = 1 \text{ бўлганда } y = 0.$$

$$2106. t^2 \frac{ds}{dt} = 2ts - 3; t = -1 \text{ бўлганда } s = 1.$$

$$2107. xy' = y \left(1 + \ln \frac{y}{x} \right); x = 1 \text{ бўлганида } y = \frac{1}{V_e}.$$

2108. Исталган нуқтасидаги уринма ости, уриниш нуқтаси координаталарининг ўрта арифметик қийматига тенг бўлган эгри чизиклар оиласи топилсин.

2109. $x^2 + y^2 = 2ax$ айланалар оиласининг ортогонал траекториялари топилсин.

2110. Қаршилиги R , ўз-ўзидан индукцияланиши Δ ва электр юргизувчи кучи E бўлган занжирда оқим кучи i

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E$$

дифференциал тенгламани қаноатлантиради. R ва L ни ўзгармас, электр юргизувчи куч E ни чизикли ўсувчи: $E = kt$

деб олиб, юқоридаги тенглама ечилсин. Бошланғич шартлар: $t = 0$ бўлганда $i = 0$.

2111. Берилган нуқтадан чиқувчи барча нурларни берилган йўналишга параллел қилиб қайтарувчи кўзгунинг формаси (шакли) аниқлансин.

Қўрсатма. Кўзгунинг текис кесимини олиб, берилган нуқтани координаталар боши, берилган йўналишни эса Oy ўқ деб оламиз. Изланувчи эгри чизиқнинг M нуқтасида ўтказилган уринма Oy ўқ ва OM билан тенг бурчаклар ҳосил қилади, яъни Oy ўқдан OM га тенг ON кесма кеседи.

Қуйидаги дифференциал тенгламалар ечилсин:

$$2112. xy + y^2 = (2x^2 + xy) y'.$$

$$2113. (a^2 + x^2) y' + xy = 1.$$

$$2114. xy' + 2\sqrt{xy} = y. \quad 2115. (2x + 1) y' + y = x.$$

$$2116. y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x. \quad 2117. tds - 2sdt = t^3 \ln t dt.$$

$$2118. y' + xy = xy^3. \quad 2119. y' + y \cos x = \sin 2x.$$

$$2120. y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}; \quad x = -1 \text{ бўлганда } y = 1.$$

$$2121. 3y^2 y' + y^3 = x + 1; \quad x = 1 \text{ бўлганда } x = -1.$$

$$2122. (1 - x^2) y' - xy = xy^2; \quad x = 0 \text{ бўлганда } y = 0,5.$$

2123. $A(a; a)$ нуқтадан ўтувчи ва координаталар бошидан чизиқнинг исталган нуқтасидаги уринмагача бўлган масофа ўша нуқта абсциссасига тенг бўлган эгри чизиқ аниқлансин.

4-§. Қўпайтма ва бўлинманинг дифференциалларини ўз ичига олган дифференциал тенгламалар

$$d(xy) = xdy + ydx; \quad d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x dy - y dx}{x^2};$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y dx - x dy}{y^2}.$$

Бундай тенгламалар баъзан, мос равишда $xy = u$, $y = \frac{u}{x}$ ёки $\frac{y}{x} = u$, $y = ux$ алмаштиришлар ёрдами билан осонгина ечилади.

$$2124. x^2 dy + xy dx = dx. \quad 2125. y^2 x dy - y^3 dx = x^2 dy.$$

Қўрсатма. 2125- мисолдаги тенглама $y^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = dy$ ёки $y^2 du = dy$

кўринишга келтирилади.

$$2126. y dx + (x - y^3) dy = 0. \quad 2127. yx dx - (x - y^3) dy = 0.$$

$$2128. y \cos x dx + \sin x dy = \cos 2x dx.$$

$$2129. t \frac{ds}{dt} - s = s^2 \ln t. \quad 2130. x^2 y^2 + 1 + x^3 y y' = 0.$$

$$2131. t^2 s dt + t^3 ds = dt. \quad 2132. x dy - y dx = x^2 dx.$$

$$2133. xy' + \operatorname{tg} y = 2x \sec y. \quad 2134. y (ye^{-\frac{x}{2}} + 1) = xy'.$$

5-§. Тўлиқ дифференциалли 1-тартибли дифференциал тенгламалар. Интегралловчи кўпайтувчи

1. Агар $Pdx + Qdy = 0$ дифференциал тенгламада $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ бўлса, бу тенглама $du = 0$ кўринишга эга ва унинг умумий интегралли $u = C$ бўлади.

2°. Агар $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ бўлса, у ҳолда баъзи бир шартлар бажарилганда шундай $\mu(x, y)$ функция топиш мумкинки, $\mu Pdx + \mu Qdy = du$ бўлади. Бу $\mu(x, y)$ функция интегралловчи кўпайтувчи дейилади.

Қуйидаги ҳолларда интегралловчи кўпайтувчини топиш осон:

$$1) \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \Phi(x) \text{ бўлганда } \ln \mu = \int \Phi(x) dx \text{ бўлади.}$$

$$2) \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \Phi_1(y) \text{ бўлганда } \ln \mu = \int \Phi_1(y) dy \text{ бўлади.}$$

4-§ даги дифференциал тенгламалар ушбу параграфда қаралаётган тенгламаларнинг хусусий ҳолларидир.

Қуйидаги «тўлиқ дифференциалли» дифференциал тенгламалар ечилсин:

$$2135. \left(4 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx + \frac{2y}{x} dy = 0.$$

$$2136. 3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1) dy = 0.$$

$$2137. e^{-y} dx + (1 - xe^{-y}) dy = 0.$$

$$2138. 2x \cos^2 y dx + (2x - x^2 \sin 2y) dy = 0.$$

Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг интегралловчи кўпайтувчилари топилисин ва тенгламалар ечилсин:

$$2139. (x^2 - y) dx + x dy = 0.$$

$$2140. 2x \operatorname{tg} y dx + (x^2 - 2 \sin y) dy = 0.$$

$$2141. (e^{2x} - y^2) dx + y dy = 0.$$

$$2142. (1 + 3x^2 \sin y) dx - x \operatorname{ctg} y dy = 0.$$

Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг чап томонлари тўлиқ дифференциалдан иборат эканлиги текширилсин ва тенгламалар ечилсин:

$$2143. (3x^2 + 2y) dx + (2x - 3) dy = 0.$$

$$2144. (3x^2y - 4xy^2) dx + (x^3 - 4x^2y + 12y^3) dy = 0.$$

$$2145. (x \cos 2y + 1) dx - x^2 \sin 2y dy = 0.$$

Қуйидаги тенгламаларнинг интегралловчи қўпайтувчилари топилисин ва тенгламалар ечилсин:

$$2146. y^2 dx + (yx - 1) dy = 0.$$

$$2147. (x^2 - 3y^2) dx + 2xy dy = 0.$$

$$2148. (\sin x + e^y) dx + \cos x dy = 0.$$

$$2149. (x \sin y + y) dx + (x^2 \cos y + x \ln x) dy = 0.$$

6 - §. Ҳосилага нисбатан ечилмаган 1-тартибли дифференциал тенгламалар.

Лагранж ва Клеро тенгламалари

1°. Агар $F(x, y, y') = 0$ тенглама y' га нисбатан 2- даражали бўлса, бу тенглама y' га нисбатан иккита бирор соҳадан x ва y га нисбатан узлуксиз $y' = f_1(x, y)$ ва $y' = f_2(x, y)$ ечимга эга. Геометрик нуқтаи назардан бу тенглама шу соҳанинг ихтиёрий (x_0, y_0) нуқтасида иккита интеграл чизикнинг йўналишларини аниқлайди.

Бундай $F(x, y, y') = 0$ дифференциал тенгламалар, $\Phi(x, y, C) = 0$ умумий ва хусусий интеграллардан ташқари баъзан ихтиёрий ўзгармасни ўз ичига олмаган ва умумий интегралдан ихтиёрий ўзгармасга бирор қиймат беришдан ҳосил бўлмайдиган махсус интегралга эга бўлади.

Махсус интеграл мавжуд бўлса, уш $F(x, y, p) = 0$ ва $F'_p(x, y, p) = 0$ тенгламалардан $y' = p$ ни йўқотиб ёки умумий интеграл $\Phi(y, x, C) = 0$ билан $\Phi'_C(x, y, C) = 0$ дан C ни йўқотиб топниш мумкин. Геометрик нуқтаи назардан махсус интеграл, интеграл чизиклар оиласининг ўрамасини аниқлайди*.

2°. Лагранж тенгласи

$$y = xf(p) + \varphi(p) \quad (1)$$

кўринишда ёзилади, бунда $p = y'$. Бу тенглама қуйидагича интегралланади.

(1) ни x бўйича дифференциаллаб,

$$p = f(p) + [xf'(p) + \varphi'(p)] \frac{dp}{dx}$$

тенгламани топамиз.

* 216- бетдаги ўраманинг таърифига қаралсин.

Бу тенглама x ва $\frac{dx}{dp}$ га нисбатан чиқиқли. Уни ечиб

$$x = CA(p) + B(p) \quad (2)$$

га эга бўламиз.

(1) ва (2) тенгламалар умумий интегрални параметр орқали аниқлайди. Бу тенгламалардан (мумкин бўлса) p ни йўқотиб, $\Phi(x, y, C) = 0$ кўринишдаги умумий интегралга эга бўламиз.

3°. Клеро тенгламаси

$$y = px + \phi(p) \quad (3)$$

Лагранж тенгламасининг хусусий ҳолидир. Бу тенглама $y = Cx + \phi(C)$ умумий интегралга ва $y = px + \phi(p)$ ҳамда $x = -\phi'(p)$ тенгламалардан p параметрни йўқотишдан ҳосил бўладиган махсус ечимга эгадир.

2150. $y'^2 = 4y$ тенгламанинг бир нечта интеграл чиқиқлари ясалсин. $M(1; 4)$ нуқтадан қандай иккита интеграл чиқиғи ўтади?

2151. $y'^2 + y^2 - 1 = 0$ тенгламанинг интеграл чиқиқлари чизилсин. $M\left(\frac{\pi}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ нуқтадан қандай иккита интеграл чиқиғи ўтади?

2152. $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$ тенгламанинг интеграл чиқиқлари $y = \pm 2x$ тўғри чиқиқлар орасидаги ўткир бурчак ичида ётиши кўрсатилсин. Умумий интегралда ўзгармас $C = \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2$ ва ҳоказо деб олиб, интеграл чиқиқлар ясалсин.

2153. 1) $yy'^2 + y'(x - y) - x = 0$; 2) $xy'^2 + 2xy' - y = 0$ тенгламалар ечилсин ва интеграл чиқиқлари ясалсин.

2154. Ўзгарувчилардан биттаси ошкор иштирок этмаган:

$$1) y = 1 + y'^2; \quad 2) x = 2y' - \frac{1}{y'^2}$$

тенгламалар ечилсин.

Кўрсатма. y' ни p деб белгилаб, биринчи тенгламани x бўйича, иккинчи тенгламани y бўйича дифференциаллаш керак.

$$2155. \quad 1) y = xy'^2 + y'^2; \quad 2) y = 2xy' + \frac{1}{x'^2}; \quad 3) 2y = \frac{xy'^2}{y' + 2}$$

Лагранж тенгламаларининг умумий ва махсус интеграллари топилсин.

2156. 1) $y = xy' - y'^2$; 2) $y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2}$; 3) $y = xy' + \frac{1}{2y'}$. Клеро тенгламаларининг умумий ва махсус интеграллари топилсин ва интеграл чиқиқлари ясалсин.

2157. $y'^2 + y = 1$ тенгламанинг интеграл чизиқлари ясалсин. $M\left(1; \frac{3}{4}\right)$ нуқтадан қандай иккита интеграл чизиғи ўтади?

2158. Ўзгарувчилардан бири ошкор иштирок этмаган тенгламалар ечилсин: 1) $y' = y'^2 + y'^3$; 2) $x = \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$

2159. $y = 2y'x + \frac{x^2}{2} + y'^2$.

2160. 1) $y = y'x + \frac{1}{y'}$; 2) $y = xy' + y' + y'^2$ Клеро тенгламаларининг умумий ва махсус интеграллари топилсин ва интеграл чизиқлари ясалсин.

2161. Уринмалари координата ўқлари билан юзи ўзгармас $2a^2$ га тенг учбурчак тузувчи эгри чизиқ топилсин.

2162. Уринмасининг координата ўқларидан кесган кесмаларининг йиғиндиси a га тенг эгри чизиқ топилсин.

7-§. Тартибини пасайтириш мумкин бўлган юқори тартибли дифференциал тенгламалар

1°. $y^{(n)} = f(x)$ кўринишдаги тенглама ўнг томонини кетма-кет n марта интеграллаб ечилади. Ҳар бир интеграллашда битта ихтиёрий ўзгармас ҳосил бўлади, охириги натижада n та ихтиёрий ўзгармас иштирок этади.

2°. y ошкор иштирок этмаган $F(x, y', y'') = 0$ тенглама $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dx}$ алмаштириш билан

$$F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0$$

кўринишга келтирилади.

3°. x ошкор иштирок этмаган $F(y, y', y'') = 0$ тенглама $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ алмаштириш билан $F\left(y, p, p \frac{dp}{dy}\right) = 0$ кўринишга келтирилади.

Қуйидаги тенгламалар ечилсин:

2163. 1) $y''' = \frac{6}{x^3}$; бошланғич шартлар: $x = 1$ бўлганда $y = 2$, $y' = 1$, $y'' = 1$; 2) $y'' = 4 \cos 2x$, $x = 0$ бўлганда $y = 0$, $y' = 0$; 3) $y'' = \frac{1}{1+x^2}$.

2164. $x^3 y'' + x^2 y' = 1$. 2165. $yy'' + y'^2 = 0$.

$$2166. y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x. \quad 2167. y'' + 2y(y')^3 = 0.$$

$$2168. y'' x \ln x = y'. \quad 2169. y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2.$$

$$2170. 1) xy'' - y' = e^x x^2; \quad 2) y'' + 2xy'^2 = 0.$$

2171. Горизонтал тўсиннинг бир учи бириктирилган, иккинчи учига P куч таъсир этади (тўсиннинг оғирлиги ҳисобга олинмасин ва эгилиши шу қадар кичик ҳисоблансинки, $1 + y'^2 \approx 1$). Тўсин қандай эгри чизиқ бўйлаб эгилиши аниқлансин.

2172. Эгрилик радиуси нормал узунлигидан икки марта катта бўлган эгри чизиқлар аниқлансин.

2173. Эгрилик радиуси нормал узунлигига тенг бўлган эгри чизиқлар аниқлансин.

2174. $[0, 1]$ сегментда эгрилиги $k = x$, яъни эгрилиги Ox ўқ бўйлаб текис ўсувчи, координаталар бошида Ox ўққа уринувчи эгри чизиқ аниқлансин (*ўтувчи* чизиқ). Тахминан $1 + y'^2 \approx 1$ деб олинсин.

Қуйидаги тенгламалар ечилсин:

$$2175. y'' = \frac{1}{\cos^2 x} : x = \frac{\pi}{4} \text{ бўлганда } y = \frac{\ln 2}{2}, y' = 1.$$

$$2176. (1 + x^2) y'' + 2xy' = x^3. \quad 2177. y'' y^3 = 1.$$

$$2178. 2yy'' = (y')^2. \quad 2179. t \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} + t = 0.$$

$$2180. 2yy'' = 1 + y'^2. \quad 2181. y'' \operatorname{tg} x = y' + 1.$$

2182. Эгрилик радиуси нормал узунлигининг кубига тенг бўлган эгри чизиқ аниқлансин.

2183. $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ораликда шундай эгри чизиқ аниқлансинки, у координаталар бошида Ox ўққа уринсин ва унинг ихтиёрий нуқтадаги эгрилиги $k = \cos x$ бўлсин.

8-§. Ўзгармас коэффицентли бир жинсли чизиқли дифференциал тенгламалар

Бир жинсли чизиқли дифференциал тенглама

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0, \quad (1)$$

дан иборат. Бунда p_i — x нинг функциялари. Тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \quad (2)$$

дан иборат, бунда $y_1, y_2, \dots, y_n$ лар (1) тенгламанинг чиқиқли бўлмаган хусусий ечимлари, $C_1, C_2, \dots, C_n$ лар эса ихтиёрый ўзгармаслар.

Агар (1) тенгламанинг $p_1, p_2, \dots, p_n$ коэффициентлари ўзгармас бўлса, у ҳолда тенгламанинг $y_1, y_2, \dots, y_n$ хусусий ечимлари

$$r^n + p_1 r^{n-1} + \dots + p_n = 0 \quad (3)$$

характеристик тенглама ёрдами билан топилади.

1) (3) тенгламанинг ҳар бир m қаррали $r = a$ ҳақиқий илдизига $e^{ax}, xe^{ax}, \dots, x^{m-1} e^{ax}$ хусусий ечимлар мос келади.

2) Ҳар бир m қаррали $r = \alpha \pm \beta i$ мавҳум илдизлар жуфтга m жуфт

$$\begin{cases} e^{ax} \cos \beta x, xe^{ax} \cos \beta x, \dots, x^{m-1} e^{ax} \cos \beta x, \\ e^{ax} \sin \beta x, xe^{ax} \sin \beta x, \dots, x^{m-1} e^{ax} \sin \beta x \end{cases}$$

хусусий ечимлар мос келади.

Қуйидаги тенгламалар ечилсин:

$$2184. y'' - 4y' + 3y = 0. \quad 2185. y'' - 4y' + 4y = 0.$$

$$2186. y'' - 4y' + 13y = 0. \quad 2187. y'' - 4y = 0.$$

$$2188. y'' + 4y = 0. \quad 2189. y'' + 4y' = 0.$$

$$2190. \frac{d^2x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} - 4x = 0. \quad 2191. 4 \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = 0.$$

$$2192. \frac{d^2s}{dt^2} + 2 \frac{ds}{dt} + 2s = 0; t = 0 \text{ бўлганда } s = 1, s' = 1.$$

$$2193. y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0.$$

$$2194. y^{IV} - 16y = 0, \quad 2195. y''' - 8y = 0,$$

$$2196. y''' + 3ay'' + 3a^2y' + a^3y = 0.$$

$$2197. y^{IV} + 4y = 0. \quad 2198. 4y^{IV} - 3y'' - y = 0.$$

2199. l узунликдаги илга осилган массаси m га тенг маятник тебранишларининг тенгламаси аниқлансин (қариш-лик ҳисобга олинмасин ва узоқлашиш бурчаги α кичик бўлган ҳолда $\sin \alpha \approx \alpha$ деб ҳисоблансин). Тебраниш даври аниқлансин.

Қўрсатма. Массаси m бўлган нуқта радиуси l га тенг айлана бўйлаб оғирлик кучи таъсиридагина ҳаракат қилади деб қаралса, нуқтанинг ҳаракати кучнинг фақат тангенциал (уринма бўйлаб) ташкил қилувчиси таъсиридагина бўлади. Тангенциал ташкил қилувчи, бир томондан $m \frac{d^2s}{dt^2}$ бўлса, иккинчи томондан, mg кучнинг уринмага бўлган проекциясига тенгдир, яъни $m \frac{d^2s}{dt^2} = mg \cos \theta$; бунда $s = \alpha l$ бўлгани учун масаланинг шартига кўра $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l} \alpha$.

2200. Пружинанинг учига иккита бир хил юк осилган. Юклардан биттасининг таъсирида пружина a см чўзилади. Юклардан биттаси узилганда иккинчисининг ҳаракати аниқлансин, яъни ҳаракат қонунини тузилсин (қаршилиқ ҳисобга олинмасин). Тебраниш даври аниқлансин.

2201. 2200- масалани ҳаракат тезлигига пропорционал бўлган қаршилиқни ҳисобга олиб ечилсин.

Қуйидаги тенгламалар ечилсин:

$$2202. y'' + 3y' + 2y = 0. \quad 2203. y'' + 2ay' + a^2y = 0.$$

$$2204. y'' + 2y' + 5y = 0. \quad 2205. \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = 0.$$

$$2206. \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0. \quad 2207. \frac{d^2s}{dt^2} + a\frac{ds}{dt} = 0.$$

$$2208. \ddot{x}_{tt} + 2\dot{x}_t + 3x = 0. \quad 2209. y''' - 3y'' + 4y = 0.$$

$$2210. y^{IV} - 3y'' - 4y = 0. \quad 2211. y^{IV} + 8y'' + 16y = 0.$$

2212. $y'' - y = 0$ тенгламанинг $(0; 0)$ нуқтада $p = x$ тўғри чиқиққа уринувчи интеграл чизиги топилинсин.

9-§. Ўзгармас коэффициентли бир жинсли бўлмаган чиқиқли дифференциал тенгламалар

1°. Асосий ҳосса. Бир жинсли бўлмаган

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = f(x) \quad (1)$$

ва бир жинсли

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0 \quad (2)$$

тенгламалар берилган; u — (2) тенгламанинг умумий ечими, y_1 эса (1) тенгламанинг хусусий ечими бўлсин. У ҳолда (1) тенгламанинг умумий ечими

$$y = u + y_1$$

дан иборат.

2°. Аниқмас коэффициентлар методи. $p_1, p_2, \dots, p_n$ лар ўзгармас бўлганда хусусий ечим y_1 қуйидаги ҳолларда аниқмас коэффициентлар методи билан топилади:

1) $f(x)$ — кўпхад,

2) $f(x) = e^{mx} (a \cos nx + b \sin nx)$.

3) $f(x)$ — олдинги функцияларнинг йиғиндиси ёки кўлайтмаси.

Бу ҳолларда y_1 нинг кўриниши $f(x)$ га ўхшаш бўлиб, ундан фақат коэффициентлари билан фарқланади.

Қуйидаги махсус ҳоллар олдингилардан фарқланади: 1) $f(x)$ — кўпхад, лекин $r = 0$ — характеристик тенгламанинг k каррали илдизи;

2) $f(x) = e^{mx} (a \cos nx + b \sin nx)$, лекин $r = m \pm ni$ характеристик

теңгламанинг k каррали илдики. Бу махсус ҳолларда y_1 хусусий ечим $f(x)$ дан коэффициентлари билангина эмас, балки x^k кўпайтувчи билан ҳам фарқланади.

3°. Ихтиёрий ўзгармасни вариациялаш усули. Бир жинсли бўлмаган чизикли теңгламани ечиш усулларидан умумий-роғи бўлиб Лагранж методи ёки ихтиёрий ўзгармасни вариациялаш методи ҳисобланади. y_1 ва y_2 бир $y'' + py' + qy = 0$ теңгламанинг ўзаро боғлиқ бўлмаган иккита хусусий ечими бўлса, у ҳолда $y'' + py' + qy = f(x)$ теңгламанинг ечими, Лагранж методига асосан, $y = Ay_1 + By_2$ кўринишида изланади, бундаги A ва B лар x нинг функциялари бўлиб улар

$$\begin{cases} A'y_1 + B'y_2 = 0, \\ A'y_1' + B'y_2' = f(x) \end{cases}$$

теңгламалар системасини қаноатлантириши керак.

$$\text{Бундан } A' = -\frac{y_2 f(x)}{w}, \quad B' = \frac{y_1 f(x)}{w}, \quad w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Қуйидаги теңгламалар ечилсин:

$$2213. y'' - 2y' + y = e^{2x}. \quad 2214. y'' - 4y = 8x^3.$$

$$2215. y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + 2 \cos 2x.$$

$$2216. y'' + y = x + 2e^x. \quad 2217. y'' + 3y' = 9x.$$

$$2218. y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5.$$

$$2219. y'' - 3y' + 2y = e^x. \quad 2220. \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 2k \sin kt.$$

$$2221. y'' - 2y = xe^{-x}. \quad 2222. y'' - 2y' = x^2 - x.$$

$$2223. y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}.$$

$$2224. \ddot{x} + 2k\dot{x} + 2k^2 x = 5k^2 \sin kt.$$

$$2225. y''' + y'' = 6x + e^{-x} \quad 2226. y^{IV} - 81y = 27e^{-3x}.$$

$$2227. \ddot{x} + \dot{x} = 3t^2. \quad 2228. y''' + 8y = e^{-2x}.$$

$$2229. 1) \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = e^{-2t}; \quad 2) a^3 \ddot{x} + ax = 1.$$

$$2230. x'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}. \quad 2231. y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}.$$

$$2232. y'' - 2y' + y = x^{-2} e^x. \quad 2233. y'' + y = \operatorname{tg} x.$$

$$2234. 1) y'' + y' = \frac{1}{1+e^x}; \quad 2) y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}.$$

2235. Бирлик масса Ox ўқ бўйича йўналтирилган ўзгармас a куч таъсири билан ўқ йўналишида ҳаракат қилади; ҳаракатга бўлган қаршиликнинг қиймати ҳаракат тезлигига тенг. Агар $t = 0$ бўлганда $x = 0$ ва тезлик $v = 0$ бўлса, ҳаракат қонуни топилсин.

Қуйидаги тенгламалар ечилсин:

$$2236. y'' + y' - 2y = 6x^2.$$

$$2237. y'' - 5y' + 6y = 13 \sin 3x$$

$$2238. y'' + 2y' + y = e^x.$$

$$2239. y'' + y' + 2,5y = 25 \cos 2x.$$

$$2240. 4y'' - y = x^3 - 24x.$$

$$2241. y'' - y = e^{-x}.$$

$$2242. \frac{d^2s}{dt^2} + 2 \frac{ds}{dt} + 2s = 2t^3 - 2.$$

$$2243. 1) y'' - 2my' + m^2y = \sin mx; \quad 2) n^2y'' - 4ny = 8.$$

$$2244. y^{IV} + 5y'' + 4y = 3 \sin x.$$

$$2245. y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x.$$

Қуйидаги тенгламалар ихтиёрий ўзгармасларни вариациялаш усули билан ечилсин:

$$2246. y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x.$$

$$2247. 1) y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}; \quad 2) y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$2248. y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

10 - §. Ҳар хил типдаги дифференциал тенгламаларга мисоллар

Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг типини аниқлаш ва ечилсин:

$$2249. y' + \frac{y}{1+x} = e^{-x}.$$

$$2250. y' + y \tan x = \tan x.$$

$$2251. (x-x^3) y' + (2x^2-1) y = x^3.$$

$$2252. (1+x^2) y' + y (x - \sqrt{1+x^2}) = 0.$$

$$2253. t^2 ds + 2ts dt = e^t dt.$$

$$2254. xy' = 4 (y + \sqrt{-y}).$$

$$2255. 2xyy' = 2y^2 + \sqrt{y^4 + x^4}.$$

$$2256. xy'' + y' = \ln x.$$

$$2257. yy'' - 2y'^2 = 0.$$

$$2258. y'' - m^2y = e^{-mx}.$$

$$2259. y'x \ln x + y = 2 \ln x.$$

$$2260. xy' + y \ln \frac{y}{x} = 0.$$

$$2261. 2y' + y = y^3 (x-1)$$

$$2262. y''' - 2y'' + y' = x^2$$

$$2263. y'' = y' + y'^2.$$

$$2264. \frac{d^3s}{dt^3} - 3 \frac{ds}{dt} - 2s = \sin t + 2 \cos t.$$

$$2265. 1) \sin t \, ds = \left(4t \sin^2 \frac{t}{2} + s \right) dt; 2) yy'x - y^2 = 1.$$

$$2266. 1) xy' + y (x \operatorname{tg} x + 1) = \sec x; 2) y'' + y = e^{-x}.$$

$$2267. 1) y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}; 2) y'''y = y''y'.$$

2268. Оғирлиги $P = a^3 \kappa \Gamma$ ва радиуси a дециметр цилиндр ўқи вертикал бўлган ҳолда сувда сузади. Цилиндрни озгина сувга ботириб кейин қўйиб юборишдан ҳосил бўлган тебранишнинг даври топилсин. Ҳаракатга бўлган қаршиликни тахминан нолга тенг деб қабул қилинсин.

2269. Сиртларнинг радиуслари a ва $2a$ га тенг, ичи қавқак темир шарнинг ички сиртининг температураси 100° ва ташқи сиртининг температураси 20° . Марказдан исталган r масофада ($a \leq r \leq 2a$) ва $r = 1,6 a$ бўлганда шар девори ичидаги температура аниқлансин.

Қўрсатма. Температураси стационар тақсимланган ўтказувчида температуранинг тушиш тезлиги $\frac{dT}{dr}$, кўндаланг кесим юзига тескари пропорционал.

11-§. Эйлернинг чизиқли дифференциал тенгламаси

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x).$$

Бир жинсли ($f(x) = 0$ бўлганда) тенгламанинг хусусий ечимини $y = x^r$ кўринишда топиш мумкин, бунда r — ўзгармас сон r ни аниқлаш учун бир жинсли дифференциал тенгламада y ўрнига $y = x^r$ ни қўйиб, r га нисбатан ҳосил бўлган *характеристик* тенгламани ечиш керак. Бунда:

1) Ҳар бир ҳақиқий m қаррали $r = a$ илдизга m та x^a , $x^a \ln x^a$, $x^a (\ln)^2$, ... хусусий ечим мос келади.

2) Ҳар бир m қаррали $r = a \pm \beta i$ мавҳум илдизлар жуфтига m жуфт

$$x^a \cos(\beta \ln x), x^a \cos(\beta \ln x) \ln x, \dots$$

$$x^a \sin(\beta \ln x), x^a \sin(\beta \ln x) \ln x, \dots$$

хусусий ечимлар мос келади.

Эйлернинг бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламаси ўзгармасларни вариациялаш методи билан ечилади.

Қуйидаги тенгламалар ечилсин:

$$2270. 1) x^3 y'' - 3xy' + 3y = 0; 2) x^2 y'' - 2y = 0;$$

$$3) x^2 y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0.$$

$$2271. 1) x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0; 2) x^2 y'' + xy' + y = 0.$$

$$2272. 1) xy'' + 2y' = 10x; 2) x^2 y'' - 6y = 12 \ln x.$$

$$2273. 1) x^2 y'' - 2xy' + 2y = 4x;$$

$$2) x^3 y'' + 3x^2 y' + xy = 6 \ln x.$$

$$2274. 1) x^2 y'' - 4xy' + 6y = x^5; 2) x^2 y'' + xy' + y = x.$$

12- §. Ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар системалари

Ушбу

$$2275. \begin{cases} \frac{dx}{dt} + y = 0 \\ \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$$

$$2276. \begin{cases} \frac{dx}{dt} + x - y = e^t \\ \frac{dy}{dt} - x + y = e^t \end{cases}$$

тенгламалар ечилсин.

2275-масалага қўрсатма. Тенгламаларнинг биринчисидан t бўйича ҳосил олиб унга тенгламадан y ва $\frac{dy}{dt}$ ни йўқотамиз.

$$2277. \begin{cases} 5 \frac{dx}{dt} - 2 \frac{dy}{dt} + 4x - y = e^{-t} \\ \frac{dx}{dt} + 8x - 3y = 5e^{-t}. \end{cases}$$

$$2278. \begin{cases} \ddot{x} - 4\dot{x} + 4x - y = 0 \\ \ddot{y} + 4\dot{y} + 4y - 24x = 16e^t. \end{cases}$$

Қуйидаги тенгламалар ечилсин:

$$2279. \begin{cases} \dot{x} + 3x + y = 0 \\ y - x + y = 0, \end{cases} \quad t = 0 \text{ бўлганда } x = 1, y = 1.$$

$$2280. \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + 2 \operatorname{sh} t. \end{cases}$$

13- §. 2- тартибли хусусий ҳосилалли чизиқли дифференциал тенгламалар (характеристикалар методи)

2281. Қуйидаги тенгламаларнинг умумий (иккита ихтиёрий функцияларни ўз ичига олган) ечимлари топилсин:

$$1) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0; 2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; 3) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$4) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2a \frac{x}{y} + b.$$

Қўрсатма. $\frac{\partial u}{\partial y} = z$ деб олинсин.

2282. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ тенгламанинг $x = 1$ бўлганда $z = y^3$, $\frac{\partial z}{\partial x} = y^3$ шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечими топилсин.

2283. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ тенглама каноник кўринишга келтирилсин ва унинг умумий ечими топилсин.

2284. $x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0$ тенглама каноник формага келтирилсин ва унинг умумий ечими топилсин.

Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимлари топилсин, бошланғич шартлар берилган ҳолларда хусусий ечимлари топилсин:

$$2285. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2286. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; x = 0 \text{ бўлганда } u = \sin y, \frac{\partial u}{\partial x} = y.$$

$$2287. x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$x = 1 \text{ бўлганда } u = 2y + 1, \frac{\partial u}{\partial x} = y.$$

$$2288. t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; t = 1 \text{ бўлганда } u = 2x^2, \frac{\partial u}{\partial t} = x^2.$$

Қуйидаги тенгламаларнинг хусусий ечимлари топилсин:

$$2289. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0;$$

$$t = 0 \text{ бўлганда } u = 0, \frac{\partial u}{\partial t} = -x - 1.$$

$$2290. 4a^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

$$t = 0 \text{ бўлганда } u = 0, \frac{\partial u}{\partial p} = ax.$$

$$2291. a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; t = 0 \text{ бўлганда } u = f(x), \frac{\partial u}{\partial t} = F(x).$$

ХИИ БОБ

ИККИ ЎЛЧОВЛИ, УЧ ЎЛЧОВЛИ ВА ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

1-§. Икки ўлчовли интеграл билан юзларни ҳисоблаш

1°. Агар (S) соҳа

$$a \leq x \leq b, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$$

тенгсизликлар билан аниқланган бўлса, у ҳолда бу соҳанинг юзи қуйи-
дагича ифодаланади:

$$S = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum \sum \Delta x \Delta y = \iint_{(S)} dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy.$$

2°. Агар (S) соҳа

$$h \leq y \leq l, \quad x_1(y) \leq x \leq x_2(y),$$

тенгсизликлар билан аниқланган бўлса, у ҳолда

$$S = \iint_{(S)} dx dy = \int_h^l dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx.$$

3°. Агар (S) соҳа қутб координаталарида $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)$
тенгсизликлар билан аниқланса, у ҳолда бу соҳанинг юзи

$$S = \iint_{(S)} r dr d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r dr.$$

Қуйидаги чизиклар билан чегараланган юзлар икки ўлчов-
ли интеграллар билан ёзилсин ва ҳисоблансин:

2292. $xy = 4$, $y = x$, $x = 4$.

2293. 1) $y = x^2$, $4y = x^2$, $y = 4$;

2) $y = x^2$, $4y = x^2$, $x = \pm 2$.

2294. $y^2 = 4 + x$, $x + 3y = 0$.

2295. $ay = x^2 - 2ax$, $y = x$.

2296. $y = \ln x$, $x - y = 1$ ва $y = -1$.

2297. Юзлари ушбу

$$1) \int_0^a dx; \quad 2) \int_0^a dy \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx; \quad 3) \int_0^a dx \int_x^{\sqrt{2a^2-x^2}} dy$$

интеграллар билан ифодаланувчи соҳалар ясалсин. Бу интегралларда интегралланиш тартиби ўзгартирилсин.

Кўрсатма. Соҳани чегараловчи чиқиқларнинг тенгламаларини ҳосил қилиш учун dx бўйича олинган интегралнинг чегараларини x га, dy бўйича олинган интегралнинг чегараларини эса y га тенглаш керак.

$$2298. \text{Юзлари } 1) \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} dy; \quad 2) \int_{-2}^0 dy \int_{y^2-4}^0 dx \text{ интеграл-}$$

лар билан ифодаланувчи соҳалар ясалсин. Интеграллаш тартиби ўзгартирилсин ва юзлар ҳисоблансин.

2299. $r = a(1 - \cos \varphi)$ ва $r = a$ чиқиқлар билан чегараланиб, доира ташқарисида жойлашган соҳа юзи ҳисоблансин.

2300. $r \cos \varphi = a$ тўғри чиқиқ ва $r = 2a$ айлана билан чегараланган юз ҳисоблансин.

Қуйидаги чиқиқлар билан чегараланган юзлар ҳисоблансин:

$$2301. \quad xy = \frac{a^2}{2}, \quad xy = 2a^2, \quad y = \frac{x}{2}, \quad y = 2x.$$

Кўрсатма. Бу масалада $xu = u$ ва $y = vx$ ларга асосан янги u, v координаталарга ўтиш қулайроқ, у ҳолда юз ушбу $\iint |J| du dv$

формула бўйича ҳисобланади, бунда $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}$ якобиан дейилади. 2302-

масалада $u^3 = ux$, $vy^3 = x^3$ деб, 2303-масалада эса $x = r \cos^3 \varphi$ ва $y = r \sin^3 \varphi$ деб умумлашган қутб координаталарига ўтилсин.

$$2302. \quad y^{\frac{2}{3}} = ax, \quad y^2 = 16ax, \quad ay^2 = x^3, \quad 16ay^2 = x^3.$$

$$2303. \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Қуйидаги чиқиқлар билан чегараланган юзлар ҳисоблансин:

$$2304. \quad y = x^2, \quad y = x + 2.$$

$$2305. \quad ax = y^2 - 2ay \text{ ва } y + x = 0.$$

$$2306. \quad y = \sin x, \quad y = \cos x \text{ ва } x = 0.$$

$$2307. \quad y^2 = a^2 - ax, \quad y = a + x.$$

2308. $r = 4(1 + \cos \varphi)$, $r \cos \varphi = 3$ (тўғри чиқиқдан ўнг томондаги юз).

2309. $r = a(1 - \cos \varphi)$, $r = a$ ва кардиоиданинг ташқари-
сида жойлашган юз.

2310. $xy = 1$, $xy = 8$; $y^2 = x$, $y^2 = 8x$.

2311. Юзлари

$$1) \int_a^b dx \int_a^x dy; \quad 2) \int_0^a dy \int_{\sqrt{ay}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} dx; \quad 3) \int_0^4 dx \int_{\frac{2}{\sqrt{x}}}^{\frac{8-x}{2}} dy$$

интеграллар билан ифодаланувчи соҳалар ясалсин. Интеграл-
лаш тартиби ўзгартирилсин ва юзлар ҳисоблансин.

2-§. Массаси текис тақсимланган юзнинг (зичлиги $\mu = 1$ бўлганда) оғирлик маркази ва инерция моменти

Массаси текис тақсимланган S юзнинг оғирлик маркази координата-
лари:

$$x_c = \frac{\iint_S x \, dx \, dy}{S}, \quad y_c = \frac{\iint_S y \, dx \, dy}{S}, \quad (1)$$

S юзнинг инерция моментлари:

$$I_x = \iint_{(S)} y^2 \, dx \, dy, \quad I_y = \iint_{(S)} x^2 \, dx \, dy, \quad I_0 = \iint_{(S)} r^2 \, dx \, dy. \quad (2)$$

Қуйидаги чизиклар билан чегараланган юзнинг оғирлик
маркази топилсин:

2312. $y = 0$ ва $y = \sin x$ синусоиданинг битта ярим тўл-
қини.

2313. $y = x^2$, $x = 4$, $y = 0$. 2314. $y^2 = ax$ ва $y = x$.

2315. $x^2 + y^2 = a^2$ ва $y = 0$.

2316. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ астроида ва Ox ўқ билан чегаралан-
ган юзнинг оғирлик маркази.

Қўрашма. $x = r \cos^3 \varphi$ ва $y = r \sin^3 \varphi$ орқали умумлашган қутб ко-
ординаталарига ўтилсин.

2317. $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ ва $y = b$ чизиклар билан чега-
раланган тўртбурчак юзининг I_x , I_y ва I_0 инерция моментла-
ри аниқлансин.

2318. $y = \frac{x}{2}$, $x = a$, $y = a$ чизиклар билан чегараланган
юзнинг Ox ўққа нисбатан инерция моменти аниқлансин.

2319. Учлари $A(0; 2a)$, $B(a; 0)$ ва $C(a; a)$ нуқталарда
бўлган учбурчак юзининг Oy ўққа нисбатан инерция моменти
топилсин.

2320 — 2323-масалаларда берилган чизиқлар билан чегараланган юзларнинг қутб инерция моментлари аниқлансин:

2320. $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$. 2321. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

2322. $r = a$ айлана билан чегараланган юзнинг.

2323. $y^2 = ax$, $x = a$.

Қуйидагиларнинг оғирлик марказлари аниқлансин:

2324. $y^2 = ax$, $x = a$, $y = 0$ лар билан чегараланган параболо ярим сегментининг ($y > 0$ бўлганда).

2325. Ox ўқ билан кесилган $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ярим эллипсининг.

2326. $y = a + \frac{x^2}{a}$, $y = 2x$ ва $x = 0$ чизиқлар билан чегараланган юзнинг Oy ўққа нисбатан инерция моменти аниқлансин.

2327. Учлари $A(1; 1)$, $B(2; 1)$, $C(3; 3)$ нуқталарда бўлган учбурчак юзининг Ox ўққа нисбатан инерция моменти аниқлансин.

Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган юзнинг қутб инерция моменти аниқлансин:

2328. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

2329. $y = 4 - x^2$ ва $y = 0$. 2330. $r = a(1 - \cos \varphi)$.

3-§. Икки ўлчовли интеграл билан ҳажми ҳисоблаш

Юқорида $z = F(x, y)$ сирт, қуйидан $z = 0$ текислик ва ён томонлардан, xOy текисликлдан (S) соҳа кесувчи цилиндрик сирт билан чегараланган жисм ҳажми қуйидагига тенг:

$$V = \int \int_{(S)} z dx dy = \int \int_{(S)} F(x, y) dx dy.$$

Қуйидаги сиртлар билан чегараланган жисмнинг ҳажми ҳисоблансин:

2331. $z = x^2 + y^2$, $x + y = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

2332. $z = x + y + a$, $y^2 = ax$, $x = a$, $z = 0$, $y = 0$ ($y > 0$ бўлганда).

2333. $(x + y)^2 + az = a^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (сиртни $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = h \leq a$ кесимлар бўйича ясаш керак; 546-масалага қаралсин).

2334. $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$ (552-масалага қаралсин).

2235. $z^2 = xy$, $x = a$, $x = 0$, $y = a$, $y = 0$.

2336. $az = x^2 - y^2$, $z = 0$, $x = a$.

2337. $z^2 = xy$, $x + y = a$.

2338. $x + y + z = 3a$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$.

Қўрсатма. 2338 — 2344-масалаларда қутб координаталарига ўтилсин.

2339. $z = mx$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$.

2340. $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = 0$.

2341. $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, $x^2 + y^2 = a^2$ (цилиндр ташқарисиди).

2342. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 \pm ax = 0$ (цилиндр ичида).

2343. $x^2 + y^2 = a^2$ цилиндр ичидаги $y = x \operatorname{tg} \frac{z}{a}$ геликоиднинг биринчи ўрамси ва $z = 0$ текислик.

2344. $z^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = ax$.

2345. $\frac{z}{c} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, $z = 0$.

Қўрсатма. 2345- ва 2346-масалаларда умумлашган (эллиптик) қутб координаталари $x = ar \cos \varphi$, $y = br \sin \varphi$ га ўтилсин.

2346. $z = ce^{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ ва $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2347. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($x = r \cos^3 \varphi$, $y = r \sin^3 \varphi$ деб олинсин.)

Қуйидаги сиртлар билан чегараланган жисмларнинг ҳажмлари ҳисоблансин:

2348. $z = a - x$, $y^2 = ax$ ва $z = 0$.

2349. $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

2350. $y^2 + z^2 = 4ax$, $y^2 = ax$, $x = 3a$ (цилиндрдан ташқарида).

2351. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2352. Қононда $x^2 y^2 + h^2 z^2 = a^2 y^2$, $0 \leq y \leq h$ бўлганда (559-масалага қаралсин).

2353. $x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

2354. $4z = 16 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$ (цилиндрдан ташқарида).

Кўрсатма. 2354 — 2358- масалаларда қутб координаталарига ўтилсин.

$$2355. z^2 = (x + a)^2, x^2 + y^2 = a^2.$$

$$2356. z = \frac{4}{x^2 + y^2}, z = 0, x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4.$$

$$2357. az = x^2 + y^2, z = 0, x^2 + y^2 \pm ax = 0.$$

$$2358. az = a^2 - x^2 - y^2, z = 0, x^2 + y^2 \pm ax = 0 \text{ (цилиндрлар ичида).}$$

$$2359. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Кўрсатма. $x = ar \cos \varphi$, $y = br \sin \varphi$ деб олинсин.

4- §. Эгри сиртларнинг юзлари

$F(x, y, z) = 0$ сиртнинг $z = 0$ текисликдаги проекцияси σ_z бўлган σ қисмининг юзи қуйидагига тенг:

$$\sigma = \iint_{(\sigma_z)} \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} dx dy = \int_{(\sigma_z)} \int \frac{N}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} dx dy.$$

Шунга ўхшаш қолган икки координата текисликларига проекцияланганда

$$\sigma = \iint_{(\sigma_y)} \frac{N}{\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|} dx dz, \quad \sigma = \iint_{(\sigma_x)} \frac{N}{\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|} dy dz$$

ларга эга бўламыз.

Қуйидаги юзлар ҳисоблансин:

$$2360. 2z = x^2 \text{ цилиндр сиртидан } y = \frac{x}{2}, y = 2x, x = 2\sqrt{2} \text{ текисликлар билан кесилган юз.}$$

$$2361. x \geq 0 \text{ ва } y \geq 0 \text{ бўлганда } z^2 = 2xy \text{ конус сиртидан } x = a \text{ ва } y = a \text{ текисликлар билан кесилган юз.}$$

$$2362. y^2 + z^2 = x^2 \text{ конуснинг } x^2 + y^2 = a^2 \text{ цилиндр ичидаги сиртининг юзи.}$$

$$2363. az = xy \text{ сиртнинг } x^2 + y^2 = a^2 \text{ цилиндр ичидаги сиртининг юзи.}$$

$$2364. x^2 + y^2 = z^2 \text{ конуснинг } z^2 = 2px \text{ цилиндр ичидаги сиртининг юзи.}$$

Қуйидаги юзлар ҳисоблансин:

2365. $x^2 + z^2 = a^2$ цилиндрнинг $x^2 + y^2 = a^2$ цилиндр ичидаги сиртининг юзи.

2366. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ шарнинг $x^2 + y^2 \pm ax = 0$ цилиндр ичидаги сиртининг юзи.

2367. $x^2 + y^2 = 2az$ параболоиднинг $x^2 + y^2 = 3a^2$ цилиндр ичидаги сиртининг юзи.

2368. 0° ва β° меридианлар, экватор ва α° параллел билан чегараланган ер сирти қисмининг юзи икки ўлчовли интеграл ёрдами билан ҳисоблансин. $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$ бўлгандаги хусусий ҳол кўрилсин.

5- §. Уч ўлчовли интеграл ва унинг татбиқи

Агар (V) соҳа

$$a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$$

тенгсизликлар билан аниқланган бўлса, у ҳолда

$$\iiint_{(V)} F(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} F(x, y, z) dz$$

$F(x, y, z) = 1$ бўлганда V нинг ҳажми ҳосил бўлади. Ҳажми V га тенг бўлган бир жинсли жисмнинг оғирлик маркази координатлари қуйидаги формулалар билан топилди:

$$x_c = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} x dx dy dz, \quad y_c = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} y dx dy dz \quad \text{ва ҳоказо.}$$

2369. $az = x^2 + y^2$, $2az = a^2 - x^2 - y^2$ сиртлар билан чегараланган жисмнинг ҳажми аниқлансин.

2370. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ сиртлар билан чегараланган жисмнинг конус ичидаги қисмининг ҳажми аниқлансин.

2371. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ конус сирти $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ шарнинг ҳажмини 3 : 1 нисбатда бўлиши кўрсатилсин.

2372. Ёқлари $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ текисликлар билан ташкил этилган пирамиданинг ҳар бир нуқта-сидаги зичлик шу нуқтанинг аппликата-си z га тенг. Пирамиданинг масаси аниқлансин.

Қуйидаги сиртлар билан чегараланган бир жинсли жисмнинг оғирлик маркази аниқлансин:

2373. $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

2374. $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = 0$.

Қуйида кўрсатилган сиртлар билан чегараланган жисмнинг (зичлик $\mu = 1$) Oz ўққа нисбатан инерция моменти аниқлансин:

$$2375. x = 0, y = 0, y = a, z = 0 \text{ ва } x + z = a.$$

$$2376. x + y + z = a \sqrt{2}, x^2 + y^2 = a^2, z = 0.$$

$$2377. 1) (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 x; \quad 2) (x^2 + y^2 + z^2)^2 = az (x^2 + y^2)$$

ёпиқ сирт билан чегараланган жисмнинг ҳажми аниқлансин.

Кўрсатма. $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$ формулалар бўйича сферик координаталарга ўтилсин, ҳажм элементи қуйидагича ҳисобланади:

$$dV = r^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, dr.$$

Қуйидаги сиртлар билан чегараланган жисмнинг ҳажми аниқлансин:

$$2378. az = x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2.$$

$$2379. x^2 + y^2 - z^2 = 0, z = 6 - x^2 - y^2.$$

$$2380. az = x^2 + y^2, z^2 = x^2 + y^2.$$

2381. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ва $z = h$ сиртлар билан чегараланган жисмнинг ҳар бир нуқтасида зичлик шу нуқтанинг аппликатасига тенг бўлса, жисмнинг массаси аниқлансин.

2382. Агар $2x + z = 2a$, $x + z = a$, $y^2 = ax$, $y = 0$ сиртлар билан чегараланган ($y > 0$ бўлганда) жисмнинг ҳар бир нуқтасидаги зичлик шу нуқтанинг ординатасига тенг бўлса, жисмнинг массаси аниқлансин.

2383. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z = 0$ сиртлар билан чегараланган бир жинсли ярим шарнинг оғирлик маркази аниқлансин ($z \geq 0$).

2384. $z^2 = 2ax$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = ax$ сиртлар билан чегараланган жисмнинг Oz ўққа нисбатан инерция моменти аниқлансин.

2385. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz$ сирт билан чегараланган жисмнинг ҳажми аниқлансин (сферик координаталарга ўтилсин) (2377-масалага қаралсин).

2386. Агар $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ва $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ сиртлар орасидаги сферик қатламнинг ҳар бир нуқтасидаги зичлиги шу нуқтадан координаталар бошигача бўлган масофага тескари пропорционал бўлса, қатламнинг массаси аниқлансин (сферик координаталарига ўтилсин).

6-§. Эгри чизиқли интеграл. Грин формуласи

1°. Эгри чизиқли интегралнинг таърифи. Тўғриланувчи эгри чизиқнинг $\overline{AB}$ ёни устида узлуксиз $P(x, y, z)$ функция аниқланган бўлсин.

$A(x_0; y_0; z_0), M_1(x_1; y_1; z_1), \dots, M_{n-1}(x_{n-1}; y_{n-1}; z_{n-1})$ ва $B(x_n; y_n; z_n)$ нуқталар билан ёни бўлакларга ажратиллик $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ бўлсин. У ҳолда $\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i$ $\overline{AB}$ ёни бўйича

олинган эгри чизиқли интеграллар дейилади ва $\int_{\overline{AB}} P(x, y, z) dx$ кў-

ринишда белгиланади. Шунга ўхшаш $\int_{\overline{AB}} Q(x, y, z) dy$ ва $\int_{\overline{AB}} R(x, y, z) dz$

интеграллар ҳам таърифланади, $\int_{\overline{AB}} (P dx + Q dy + R dz)$ интеграл эса

олдинги интегралларнинг йиғиндиси сифатида таърифланади. Ниҳоят,

$$\int_{\overline{AB}} P(x, y, z) ds = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i, \text{ бу ерда } \Delta s_i = \overline{M_i - M_{i-1}}$$

кўринишдаги эгри чизиқли интеграл ҳам учрайди.

2°. Эгри чизиқли интегрални ҳисоблаш. $\overline{AB}$ эгри чизиқ $x = f(t), y = \varphi(t), z = \psi(t)$ тенгламалар билан берилган бўлиб, бундаги t параметр, $M(t)$ нуқта $\overline{AB}$ ёни бўйлаб бир томонга қараб ҳаракат қилганда монотон ўзгарувчи бўлсин; у вақтда

$$\int_{\overline{AB}} P(x, y, z) dx = \int_{t_A}^{t_B} P[f(t), \varphi(t), \psi(t)] f'(t) dt,$$

яъни эгри чизиқли интеграл белгиси остидаги барча ўзгарувчиларни ва дифференциалларни эгри чизиқ тенгламаларидон битта (t) ўзгарувчи ва унинг дифференциали (dt) орқали ифодалаш керак.

3°. Эгри чизиқли интегралнинг механик маъноси

$\int_{\overline{AB}} (P dx + Q dy + R dz)$ кўринишдаги интеграл, бирлик массанинг

$F(P; Q; R)$ куч ҳосил қилган майдонда $\overline{AB}$ ёни бўйлаб ҳаракат қилишидаги ишни аниқлайди.

4°. Тўлиқ дифференциал бўлган ҳол. Агар бирор (V) соҳада $P dx + Q dy + R dz = du$ бўлса, у ҳолда $\int_{\overline{AB}} (P dx + Q dy + R dz) = u_B - u_A$ бўлади, яъни у $u(x, y, z)$ функциянинг B ва A

нуқталардаги қийматларининг айримасига тенг бўлиб, (V) соҳада олинган интеграллаш йўли AB га боғлиқ эмас.

$$\oint_{(C)} (P dx + Q dy) = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$Pdx + Qdy$ функциядан (C) ёниқ контур бўйича (соат стрелкасига қарши йўналишда) олинган эгри чизиқли интегрални шу контур билан чегараланган (S) соҳа бўйича олинган икки ўлчовли интегралга алмаштиради.

5°. Грин формуласи

$$\oint_{(C)} (Pdx + Qdy) = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$Pdx + Qdy$ функциядан (C) контур бўйича (соат стрелкасига қарши йўналишда) олинган эгри чизиқли интегрални шу контур билан чегараланган (S) соҳа бўйича олинган икки ўлчовли интегралга алмаштиради.

6°. (C) контур билан чегараланган юз:

$$S = \frac{1}{2} \oint_{(C)} (x dy - y dx).$$

2387. $A(2; 2)$ -ва $B(2; 0)$ нуқталар берилган. 1) OA тўғри чизиқ; 2) $y = \frac{x^2}{2}$ параболанинг OA ёйи; OBA синиқ чизиқ бўйича $\int_{(C)} (x + y) dx$ ҳисоблансин.

2388. $A(4; 2)$ ва $B(2; 0)$ нуқталар берилган, 1) OA тўғри чизиқ; 2) OBA синиқ чизиқ бўйича

$$\int_{(C)} [(x + y) dx - x dy]$$

ҳисоблансин.

2389. 2388-масала $\int_{(C)} (y dx + x dy)$ интеграл учун ечилсин.

Нима учун бу ерда интегралнинг қиймати интеграллаш йўлига боғлиқ эмас?

2390. $A(a; 0; 0)$, $B(a; a; 0)$ ва $C(a; a; a)$ нуқталар берилган. OC тўғри чизиқ ва $OABC$ синиқ чизиқ бўйича $\int (y dx + z dy + x dz)$ интеграл ҳисоблансин.

2391. Координатлари $P = x - y$, $Q = x$ бўлган $F[P, Q]$ куч майдон ҳосил қилади. Томонлари $x = \pm a$ ва $y = \pm a$ дан иборат квадратнинг ҳар бир учига F куч ясалсин ва бирлик масса квадратнинг контури бўйича ҳаракат қилгандаги иш ҳисоблансин.

2392. $F[P, Q]$ куч майдон ҳосил қилади, бундай $P = x + y$, $Q = 2x$, $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ айлананинг ҳар

бир чораги бошида F кучи ясалсин ва ўша айлана бўйича бирлик масса ҳаракат қилгандаги иш ҳисоблансин.

Шу масала $P = x + y$, $Q = x$ ҳол учун ҳам ечилсин. Нима учун бу ерда иш нолга тенг?

2393. $F[y, a]$ куч майдон ҳосил қилади. m масса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ эллипсининг биринчи чораги ва координата ярим ўқларидан иборат контур бўйича ҳаракат қилганидаги иш ҳисоблансин.

2394. $F[x, y, z]$ куч майдон ҳосил қилади. Бирлик масса, $O(0; 0; 0)$, $A(0; a; 0)$, $B(a; a; 0)$, $C(a; a; a)$ нуқталарни бирлаштирувчи $OABCO$ синик чизик бўйича ҳаракат қилгандаги иш ҳисоблансин.

2395. Томонлари $x = 0$, $y = 0$, $x + y = a$ тўғри чизикларда ётган учбурчак контури бўйича олинган $\oint_{(C)} [(x + y) dx - 2x dy]$ интеграл учун Грин формуласи ёзилсин ва текширилсин.

$$2396. 1) \int_{AB} [2xy dx + x^2 dy],$$

$$2) \int_{AB} [\cos 2y dx - 2x \sin 2y dy]; 3) \int_{AB} [\operatorname{tg} y dx + x \sec^2 y dy]$$

интеграллар $A\left(1; \frac{\pi}{6}\right)$ нуқтадан $B\left(2; \frac{\pi}{4}\right)$ нуқтагача ихтиёрий чизик бўйича ҳисоблансин.

2397. Грин формуласини татбиқ этиб, учлари $A(a; 0)$, $B(a; a)$ ва $C(0; a)$ нуқталарда бўлган $\triangle ABC$ контури бўйича $\oint_{(C)} [y^2 dx + (x + y)^2 dy]$ интеграл ҳисоблансин.

2398. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ эллипс юзи эгри чизикли интеграл билан ҳисоблансин.

2399. $x^3 + x^2 - y^2 = 0$ эгри чизик илмогининг юзи эгри чизикли интеграл билан ҳисоблансин (53- чизмага қаралсин).

Кўрсатма. $y = xt$ деб олиб параметрик тенгламаларга ўтилсин.

2400. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ Декарт япроғи илмогининг юзи эгри чизикли интеграл билан ҳисоблансин (2399- масалада берилган кўрсатмага ва 83- чизмага қаралсин).

2401. $x^2 + y^2 = a^2$ айлананинг юқори ярмида текис тақсимланган M масса координаталар бошида жойлашган m массани қандай куч билан тортади?

Кўрсатма. μ — чизикли зичлик, ds — ярим айлана узунлигининг элементи, θ — радиус-векторнинг Ox ўқ билан ҳосил қилган бурчаги, X ва Y лар эса тортиш кучининг проекциялари бўлсин.

U ҳолда

$$X = \int_{(C)} \frac{k\mu \cos \theta ds}{r^2}, \quad Y = \int_{(C)} \frac{k\mu \sin \theta ds}{r^2},$$

бундаги k — тортиш ўзгармаси.

2402. $A(-a; a)$ ва $B(a; a)$ нуқталар берилган, AB кесма бўйича текис тақсимланган M масса $(0; 0)$ нуқтада жойлашган m массани қандай куч билан тортади?

2403. $A(a; 0)$, $B(0; a)$ ва $C(-a; 0)$ нуқталар берилган. ABC синиқ чизик бўйича текис тақсимланган M масса координаталар бошида жойлашган m массани қандай куч билан тортади?

2404. $A(0; 1)$, $B(2; 5)$ ва $C(0; 5)$ нуқталар берилган $\int_{(C)} [(x+y)dx - 2ydy]$ интеграл: 1) AB тўғри чизик бўйича; 2) $y = x^2 + 1$ параболанинг $\overline{AB}$ ёни бўйича; 3) ABC синиқ чизик бўйича ҳисоблансин.

2405. $A(-a; 0)$ ва $B(0; a)$ нуқталар берилган. Бирлик масса: 1) AB тўғри чизик бўйича; 2) AOB синиқ чизик бўйича; 3) $y = a - \frac{x^2}{a}$ параболанинг $\overline{AB}$ ёни бўйича ҳаракат қилганда $F(P, Q)$ кучнинг иши ҳисоблансин, бунда $P = y$ ва $Q = y - x$.

2406. Исталган ёпиқ контур бўйича олинган $\oint_{(C)} [ydx + (x+y)dy]$ интегралнинг нолга тенг эканлиги кўрсатилсин. $y = x^2$ ва $y = 4$ чизиклар билан чегараланган фигуранинг контури бўйича интегрални ҳисоблаб, олдинги натижа текширилсин.

2407. Учлари $A(1; 1)$, $B(2; 1)$ ва $C(2; 2)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг контури бўйича олинган $\oint_{(C)} \left(\frac{dx}{y} - \frac{dy}{x} \right)$ интеграл учун Грин формуласи ёзилсин ва текширилсин.

2408. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ астроида билан чегараланган юзни эгри чизикли интеграл билан ҳисоблансин.

2409. $y^2 + x^4 - x^2 = 0$ эгри чизик билан чегараланган юзни эгри чизикли интеграл билан ҳисоблансин.

7-§. Сирт бўйича олинган интеграллар. Остроградский ва Стокс формуллари

1°. Остроградский формуласи қуйидагича ёзилади:

$$\iint_{(S)} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds = \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

бунда α , β ва γ — ёпиқ S сирт ташқи нормалнинг бурчакларидан, V эса шу сирт билан чегараланган ҳажмдан иборатдир. Биринчи интегрални $\pm \iint_{(S_z)} \left[P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial y} + R \frac{\partial F}{\partial z} \right] \frac{dx dy}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ кўринишда ёзиш мумкин,

бунда $F(x, y, z) = 0$ — сиртнинг тенгламаси, S_z эса S нинг $z = 0$ текисликдаги проекциясидир.

2°. Стокс формуласи қуйидагича ёзилади:

$$\oint_{(C)} (P dx + Q dy + R dz) = \iint_{(S)} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds,$$

бунда β ва γ — S сиртга ўтказилган нормал бурчакларидан иборат бўлиб, u сиртнинг шундай томонига йўналтирилганки, ундан C контури айланиш соат стрелкасининг юршига қарши кўрғнади.

2410. $\iint_{(S)} [x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma] ds$ интеграл,

$x + y + z = a$ текислигининг биринчи октантада ётган қисмининг устки сирти бўйича ҳисоблансин.

2411. $\iint_{(S)} [x^2 \cos(n, i) + y^2 \cos(n, j) + z^2 \cos(n, k)] ds$

интеграл, $x^2 + y^2 + 2az = a^2$ параболоиднинг иккинчи октантада ётган қисмининг устки сирти бўйича ҳисоблансин (бунда $x < 0$, $y > 0$, $z > 0$).

Қўрсатма. Интегрални $\iint_{(S_z)} (x^2 + y^2 + az^2) \frac{dx dy}{a}$ кўринишга

келиштириб, қутб координаталарига ўтиш керак. φ бурчак $\frac{\pi}{2}$ дан π гача ўзгаради.

2412. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ шарнинг сирти бўйича олинган $\iint_{(S)} [x \cos(n, i) + y \cos(n, j) + z \cos(n, k)] ds$ интеграл учун Остроградский формуласи ёзилсин ва текширилсин.

2413. $x^2 + y^2 + 2az = a^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ сиртлар билан чегараланган жисмнинг биринчи октантада ётган қис-

мининг ташқи сирти бўйича олинган $\int \int_{(S)} [x^2 \cos(n, i) + y^2 \cos(n, j) + z^2 \cos(n, k)] ds$ интеграл учун Остроградский формуласи ёзилсин ва текширилсин.

Кўрсатма. Жисмининг текис ёқлари бўйича олинган икки ўлчовли интеграл 0 га тенг, чунки, масалан, $z = 0$ текисликда $\cos(n, i) = 0$ ва $\cos(n, j) = 0$.

2414. Остроградский формуласида $P = x$, $Q = y$, $R = z$ деб олиб, ҳажм учун ушбу

$$V = \frac{1}{3} \int \int_{(S)} [x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma] ds$$

формула ҳосил қилинсин. Бу формулага асосан $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсоиднинг ҳажми ҳисоблансин.

2415. Остроградский формуласида $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, $R = \frac{\partial u}{\partial z}$ деб олиб (яъни $\{P, Q, R\}$ векторни $\text{grad} u$ га тенг деб олиб), $\int \int \int_{(V)} \Delta u \, dx \, dy \, dz = \int \int_{(S)} \frac{du}{dn} ds$ тенглик исбот қилинсин, бундаги $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ — Лаплас оператори.

2416. Олдинги масаладаги формулани $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ сирт устида $u = x^2 + y^2 + z^2$ функция учун текширилсин.

2417. Стокс формуласи ёрдами билан исталган контур бўйича олинган $\int_{(C)} (yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz)$ интегралнинг нолга тенглиги кўрсатилсин. Бунинчлари $O(0; 0; 0)$, $A(1; 1; 0)$ ва $B(1; 1; 1)$ нуқталардан иборат $\triangle OAB$ контури бўйича интегрални ҳисоблаб текширилсин.

2418. Учлари $A(a; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$ ва $C(0; 0; a)$ нуқталардан иборат $\triangle ABC$ контури бўйича олинган $\oint_{(C)} [(z - y) \, dx + (x - z) \, dy + (y - x) \, dz]$ интеграл учун Стокс формуласи ёзилсин ва текширилсин.

Кўрсатма. Икки қаррали интегрални ABC учбурчакнинг периметридан ўтувчи ихтиёрий сирт бўйича олиш мумкин, масалан, $x + y + z = a$ текислик бўйича олиниши мумкин.

2419. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ шар сирти бўйича олинган $\int\int_{(S)} [x^3 \cos(n, i) + y^3 \cos(n, j) + z^3 \cos(n, k)] ds$ интеграл учун Остроградский формуласи ёзилсин ва текширилсин.

Кўрсатма. Уч ўлчовли интегралда сферик координаталарга ўтилсин.

2420. Учлари $A(a; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$ ва $C(0; 0; a)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг контури бўйича олинган $\oint_{(C)} [x(z - y) dx + y(x - z) dy + z(y - x) dz]$ интеграл учун Стокс формуласи ёзилсин ва текширилсин (2418- масалага берилган кўрсатмадан қаралсин).

2421. $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ текисликлар билан ҳосилқилинган пирамиданинг ташқи сирти бўйича олинган $\int\int_{(S)} (x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy)$ интеграл Остроградский формуласи ёрдами билан ҳисоблансин.

XIV БОБ ҚАТОРЛАР

1- §. Сонли қаторлар.

1° Агар $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ қаторнинг биринчи n та ҳаднинг йиғиндиси S_n , n чексизликка интилганда ($n \rightarrow \infty$) чекли S лимитга яitiaлса: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, қатор *яқинлашувчи* дейилади. S сон яқинлашувчи қаторнинг *йиғиндиси* дейилади. Яқинлашувчи бўлмаган қатор *узоқлашувчи* дейилади.

Қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун n чексизликка интилганда ($n \rightarrow \infty$) u_n нинг нолга интилиши ($u_n \rightarrow 0$) зарурдир (аммо етарли эмас).

2°. Ҳадлари мусбат ҳамда камаювчи бўлган қаторнинг яқинлашиши учун интеграл аломат:

Агар $u_n = f(n)$ деб олинса, бунда $f(n)$ камаювчи функция ва

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \begin{cases} A \text{ бўлса, у ҳолда қатор яқинлашади,} \\ \infty \text{ бўлса, у ҳолда қатор узоқлашади.} \end{cases}$$

3°. Мусбат ҳадли қаторнинг яқинлашиши учун Даламбер аломати:

Агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = r \begin{cases} < 1 \text{ бўлса, у ҳолда қатор яқинлашади,} \\ > 1 \text{ бўлса, у ҳолда қатор узоқлашади,} \\ = 1 \text{ бўлса, у ҳолда масала ечиммай қолади.} \end{cases}$$

4°. Мусбат ҳадли қаторларни тақослаш.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots \quad (2)$$

иккита мусбат ҳадли қатор бўлсин.

1) Агар $u_n \leq v_n$ бўлиб, (2) қатор *яқинлашса*, у ҳолда (1) қатор ҳам *яқинлашади*.

2) Агар $u_n > v_n$ бўлиб, (1) қатор *узоқлашса*, у ҳолда (2) қатор ҳам *узоқлашади*.

5°. Агар ишоралари навбатлашувчи

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$$

қаторида $u_1 > u_2 > u_3 > \dots$ ва $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ бўлса, қатор яқинлашувчи бўлади.

6°. Абсолют яқинлашиш.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (3)$$

қатор ҳадларнинг абсолют қийматларидан тузилган

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots \quad (4)$$

қатор яқинлашса, (3) қатор ҳам яқинлашади. Бу ҳолда (3) қатор *абсолют* яқинлашувчи дейилади. (3) қатор яқинлашувчи бўлиб, (4) қатор узоклашувчи бўлса, (3) қатор *шартли* (абсолютмас) яқинлашувчи дейилади.

Қуйидаги қаторлар учун яқинлашишнинг зарурий шarti бажариладими?

$$2422. \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \dots$$

$$2423. \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

$$2424. \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots$$

Интеграл аломати билан қуйидаги қаторларнинг яқинлашиши текширилсин:

$$2425. 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

$$2426. 1 + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \dots$$

$$2427. \frac{1}{2^3} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{4^3} + \dots$$

$$2428. \frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+3^2} + \dots$$

$$2429. \frac{1}{1+1^3} + \frac{2}{1+2^3} + \frac{3}{1+3^3} + \dots$$

$$2430. \frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{5^2-1} + \frac{1}{7^2-1} + \dots$$

$$2431. \frac{1}{2 \ln^2 2} + \frac{1}{3 \ln^2 3} + \frac{1}{4 \ln^2 4} + \dots$$

Даламбер аломатига асосан қуйидаги қаторларнинг яқинлашиши текширилсин:

$$2432. \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots$$

$$2433. 1 + \frac{2}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{8}{4!} + \dots$$

$$2434. 1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$$

$$2435. 1 + \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{3^2}{2^2 \cdot 5} + \frac{3^3}{2^3 \cdot 7} + \dots$$

$$2436. \frac{1}{2} + \frac{3!}{2 \cdot 4} + \frac{5!}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{7!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots$$

$$2437. \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{2 \cdot 3^3}} + \frac{9}{\sqrt{3 \cdot 3^3}} + \frac{13}{\sqrt{4 \cdot 3^3}} + \dots$$

Гармоник қатор ёки камаювчи прогрессия билан таққослаб, қуйдаги қаторларнинг яқинлашиши текширилсин:

$$2438. 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

$$2439. 1 + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \frac{1}{4 \cdot 5^3} + \dots$$

$$2440. \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 5} + \dots$$

2441. Қаторларни таққослаш усули билан $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^4} + \frac{1}{1+x^6} + \dots$ қаторнинг $|x| \leq 1$ бўлганда узоқлашиши, $|x| > 1$ бўлганда эса яқинлашиши кўрсатилсин.

Кўрсатма. Таққослаш учун биринчи $x^2, x^4, x^6, \dots$ ларни бирлар билан алмаштирилсин, иккинчи ҳолда эса махражлардаги бирлар ташлансин.

$$2442. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots \text{ қаторнинг йиғиндиси топилсин.}$$

Кўрсатма. u_n элементар касрларга ёйилсин.

$$2443. \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots \text{ қаторнинг йиғиндиси топилсин.}$$

Қуйдаги қаторларнинг яқинлашиши текширилсин:

$$2444. 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

$$2445. 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots$$

$$2446. \frac{1}{2 \ln 2} - \frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{4 \ln 4} - \dots$$

$$2448. \frac{\sin \alpha}{1} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \dots$$

2448. Агар $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ шартли яқинлашувчи қаторда ҳар бир мусбат ҳаддан сўнг ундан кейинги иккита кетма-кет манфий ҳад ёзилса, қатор йиғиндиси S икки марта камайиши, агар ҳар иккита мусбат ҳадлардан сўнг битта манфий ҳад ёзилса, йиғинди бир ярим марта кўпайиши исбот қилинсин.

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашиши текширилсин:

$$2449. 1 + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \dots$$

$$2450. 1 + \frac{1}{101} + \frac{1}{201} + \frac{1}{301} + \dots$$

$$2451. \frac{1}{1+1^4} + \frac{2}{1+2^4} + \frac{3}{1+3^4} + \dots$$

$$2452. 1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \dots$$

$$2453. 1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \dots$$

$$2454. \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \dots$$

$$2455. \frac{21}{3} + \frac{41}{9} + \frac{61}{27} + \dots$$

$$2456. \frac{2}{1} + \frac{4}{3!} + \frac{6}{5!} + \dots$$

$$2457. 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \dots$$

$$2458. 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \dots$$

$$2459. 1 - \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a^4} - \frac{4}{4a^6} + \dots$$

Қуйидаги қаторларнинг йиғиндиси топилинсин:

$$2460. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$$

$$2461. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

2-§. Функционал қаторнинг текис яқинлашиши

1°. x нинг

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

функционал қатор яқинлашадиган қийматларининг тўплами бу қаторнинг яқинлашиши соҳаси дейилади. $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ функция қаторнинг

йиғиндиси, $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ айирма эса қаторнинг қолдиғи дейилади.

2°. Агар ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун шундай N номер кўрсатиш мумкин бўлсаки, $n > N$ бўлганда $[a, b]$ сегментдан олинган исталган x учун $|R_n(x)| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, (1) қатор $[a, b]$ сегментда текис яқинлашувчи дейилади.

3°. Текис яқинлашишнинг аломати

Агар ҳадлари мусбат ва яқинлашувчи

$$c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n + \dots$$

сонлар қатори мавжуд бўлиб, x нинг $[a, b]$ даги барча қиймаглари учун $|u_n(x)| \leq c_n$ бўлса, (1) қатор $[a, b]$ сегментда абсолют ва текис яқинлашади,

2462. $|x| < 1$ бўлганда ушбу

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

қаторнинг йиғиндиси ва қолдиғи топилсин ва $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ сегментда қаторнинг текис яқинлашиши кўрсатилсин. n қандай бўлганда шу сегментдан олинган ҳар қандай x учун қолдиқ $|R_n(x)| < 0,001$ бўлади?

2463. $x + x(1-x) + x(1-x)^2 + x(1-x)^3 + \dots$ қаторнинг $[0, 1]$ сегментда текисмас, $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ сегментда текис яқинлашиши кўрсатилсин. n қандай бўлганда $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ сегментдан олинган ҳар қандай x учун қатор қолдиғи $|R_n(x)| < 0,01$ бўлади?

2464. Ушбу $\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ қаторнинг $[0, 1]$ сегментда текис яқинлашиши кўрсатилсин. n нинг қандай қийматларида шу сегментдан олинган ҳар қандай x учун $|R_n(x)| < 0,1$ бўлади?

2465. Ушбу $x^3 + \frac{x^3}{1+x^3} + \frac{x^3}{(1+x^3)^2} + \dots$ қаторнинг $x > 0$ бўлганда текисмас, $x \geq 1$ бўлганда эса текис яқинлашиши кўрсатилсин. n нинг қандай қийматида ҳар қандай $x \geq 1$ учун қатор қолдиғи $|R_n(x)| < 0,001$ бўлади.

2466. $\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{3\sqrt{1+3x}} + \frac{1}{3^2\sqrt{1+5x}} + \frac{1}{3^3\sqrt{1+7x}} + \dots$ қаторнинг $0 \leq x < \infty$ интервалда текис яқинлашиши кўрсатилсин. n қандай бўлганда манфиймас ихтиёрий x учун қатор қолдиғи $|R_n(x)| < 0,01$ бўлади?

Кўрсатма. Берилган қатор яқинлашувчи сонлар қатори билан таққослансин.

2467. $\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+4} + \frac{1}{x^2+9} - \frac{1}{x^2+16} + \dots$ қаторнинг сонлар ўқининг ҳамма жойида яқинлашиши кўрсатилсин. n қандай бўлганда (ихтиёрий x учун) қаторнинг қолдиғи $|R_n(x)| < 0,0001$ бўлади?

2468. $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \dots$ қаторнинг $0 < x < \infty$ интервалда $\frac{1}{x}$ га текис яқинлашиши исбот

қилинсин. Қандай n учун (ихтиёрий $x > 0$ бўлганда) қаторнинг қолдиги $|R_n(x)| < 0,1$ бўлади?

$$2469. \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+2x}} + \frac{1}{\sqrt{2^4+3x}} + \frac{1}{\sqrt{2^6+4x}} + \dots$$

қаторнинг $0 \leq x < \infty$ интервалда текис яқинлашиши исбот қилинсин. Қандай n учун $|R_n(x)| < 0,01$ бўлади?

3-§. Даражали қаторлар

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

даражали қатор берилган бўлсин. Агар $|x| < R$ бўлганда қатор яқинлашувчи ва $|x| > R$ бўлганда қатор узоқлашувчи бўлса, R сон (I) қаторнинг яқинлашиш радиуси дейилади. R ни, (I) қаторнинг абсолют яқинлашиш Даламбер аломатига асосан текшириб ёки, барча a_i лар нолдан фарқли бўлган ҳолда, $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ формула бўйича топиш мумкин. Жумладан, агар лимит ∞ га тенг бўлса, (I) қатор бутун Ox ўқда абсолют яқинлашади.

Даражали қатор ўзининг яқинлашиш интервали $(-R, R)$ ичида ётувчи ҳар қандай $[a, b]$ сегментда абсолютгина эмас, балки текис ҳам яқинлашади.

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашиш интервали аниқлансин ва қаторлар интервалнинг чегараларида ҳам яқинлашиши текширилсин:

$$2470. 1 + \frac{x}{3 \cdot 2} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3^3 \cdot 4} + \dots$$

$$2471. 1 - \frac{x}{5\sqrt{2}} + \frac{x^2}{5^2\sqrt{3}} - \frac{x^3}{5^3\sqrt{4}} + \dots$$

$$2472. 1 + \frac{2x}{3^2\sqrt{3}} + \frac{4x^2}{5^2\sqrt{3^3}} + \frac{8x^3}{7^2\sqrt{3^3}} + \dots$$

$$2473. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$2474. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n-1}}{n}$$

$$2475. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-3)2^n}}$$

$$2476. 1) \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \cdot n!; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{(n+1)^n}$$

$$2477. (x+1) + \frac{(x+1)^2}{2 \cdot 4} + \frac{(x+1)^3}{3 \cdot 4^2} + \frac{(x+1)^4}{4 \cdot 4^3} + \dots$$

$$2478. \frac{2x-3}{1} - \frac{(2x-3)^2}{3} + \frac{(2x-3)^3}{5} - \dots$$

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашиш интерваллари аниқлансин ва йиғиндилари топилсин:

$$2479. 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

Қўрсатма. S йиғиндини топиш учун аввало $\int_0^x S dx$ топилсин.

$$2480. x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Қўрсатма. Аввал $\frac{dS}{dx}$ топилсин.

$$2481. 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \dots$$

Қўрсатма. Қаторнинг йиғиндисини S билан белгилаб, $S - Sx$ ифодани қатор шаклида ёзгандан сўнг ундан S ни топиш керак.

$$2482. 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

Қўрсатма. $\frac{S'}{m} + \frac{S'x}{m} = S$ эканлиги кўрсатилсин ва бу дифференциал тенглама ечилсин.

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашиш интервали аниқлансин ва қаторларнинг интервалнинг чегараларида ҳам яқинлашишлари текширилсин:

$$2483. 1 + \frac{2x}{\sqrt{5 \cdot 5}} + \frac{4x^2}{\sqrt{9 \cdot 5^2}} + \frac{8x^3}{\sqrt{13 \cdot 5^3}} + \dots$$

$$2484. 1 - \frac{x^2}{3 \cdot 2\sqrt{2}} + \frac{x^3}{3^2 \cdot 3\sqrt{3}} - \frac{x^4}{3^3 \cdot 4\sqrt{4}} + \dots$$

$$2485. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}} \quad 2486. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$2487. \frac{x-1}{1 \cdot 2} + \frac{(x-1)^2}{3 \cdot 2^2} + \frac{(x-1)^3}{5 \cdot 2^3} + \dots$$

$$2488. \frac{2x+1}{1} + \frac{(2x+1)^2}{4} + \frac{(2x+1)^3}{7} + \dots$$

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашиш интерваллари аниқлансин ва уларнинг йиғиндилари топилсин:

$$2489. 1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + \dots$$

Қўрсатма. S йиғиндини топиш учун аввал $\int_0^x S dx$ топилсин.

$$2490. x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

Кўрсатма. Аввал $\frac{dS}{dx}$ топилин.

$$2491. 1 - 4x + 7x^2 - 10x^3 + \dots$$

Кўрсатма. $S + Sx$ ифода тузилсин.

4-§. Тейлор ва Маклорен қаторлари

$$1^\circ. f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + R_n(x) \quad (1)$$

кўринишдаги формула Маклорен формуласи дейилади, бунда $R_n(x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x)$; $0 \leq \theta < 1$.

$$2^\circ. f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + R_n(x) \quad (2)$$

кўринишдаги формула Тейлор формуласи дейилади, бунда $R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}[a + \theta(x-a)]$.

3°. Тейлор ва Маклорен қаторлари. (1) ва (2) формулаларда n чексизликка интилганда ($n \rightarrow \infty$) R_n нолга интилса ($R_n(x) \rightarrow 0$), у ҳолда бу формулалардан x нинг $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ бўлгандаги қийматлари учун $f(x)$ га яқинлашувчи қуйидаги

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots \quad (3)$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots \quad (4)$$

чексиз қаторлар ҳосил бўлади.

4°. Элементар функцияларнинг қаторларга ёйилмалари:

$$\left. \begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{бу қаторлар } x \text{ нинг ҳар қан-} \\ \text{дай қийматлари учун мос} \\ \text{(кўрсатилган) функцияларга} \\ \text{яқинлашади.} \end{array}$$

$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \dots$ — биномиал қатор бўлиб, $|x| < 1$ бўлганда $(1+x)^m$ биномга яқинлашади.

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ қатор $-1 < x \leq 1$ бўлганда $\ln(1+x)$ га яқинлашади.

$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$ қатор $|x| \leq 1$ бўлганда $\arctg x$ га яқинлашади.

2492. Қуйидаги функциялар x нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин ва қолдиқ ҳаднинг формуласи ёзилсин ва у текширилсин: 1) $\cos(x - \alpha)$; 2) $\sin^2 x$; 3) xe^x ; 4) $\sin\left(mx + \frac{\pi}{3}\right)$.

2493. $f(x) = \ln(1 + e^{kx})$ функциянинг қаторга ёйилмасидаги биринчи учта ҳади ёзилсин.

2494. $\left(1 + \frac{x}{a}\right)^m$ бином Маклорен формуласига асосан x нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин ва ҳосил бўлган қатор $|x| < a$ бўлганда яқинлашувчи эканлиги аниқлансин.

2495. Биномиал қаторга асосан $|x| < 1$ бўлганда

$$\frac{1}{(1+x)^3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} (-x)^{n-1}$$

эканлиги кўрсатилсин.

2496. Биномиал қаторга асосан $|x| < 1$ бўлганда

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^6 + \dots$$

ёйилмаси ҳосил қилинсин.

2497. Қуйидаги функцияларни x нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин:

$$1) \ln \frac{1+x}{1-x}; \quad 2) \ln(2 - 3x + x^2); \quad 3) \ln(1 - x + x^2).$$

2498. 2496-масаладаги қаторни интеграллаб, $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ функция учун қатор ёзилсин.

2499. $f(x) = e^{\frac{x}{a}}$ функцияни $x - a$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин, қолдиқ ҳаднинг формуласи ёзилсин ва текширилсин.

2500. $f(x) = x^3 - 3x$ функция $x + 1$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин.

2501. $f(x) = x^4$ функция $x + 1$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин.

2502. $f(x) = \frac{1}{x}$ функцияни $x + 2$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйиб, ҳосил бўлган қаторнинг яқинлашиши Даламбер аломатига асосан текширилсин.

2503. 1) $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ функция $x - \frac{\pi}{2}$ нинг даражалари бўйича; 2) $f(x) = \sin 3x$ функция $x + \frac{\pi}{3}$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин.

2504. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ функцияни $x + 1$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйиб, ҳосил бўлган қаторнинг яқинлашиши Даламбер аломатига асосан текширилсин.

2505. Қуйидаги функциялар x нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин: 1) 2^x ; 2) $\cos\left(mx + \frac{\pi}{4}\right)$. Ёйилмаларнинг қолдиқ ҳадларининг формулалари ёйилсин ва текширилсин.

2506. $f(x) = x^4 - 4x^2$ функция $x + 2$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин.

2507. $f(x) = \cos^2 x$ функция $x - \frac{\pi}{3}$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин, ёйилманинг қолдиқ ҳадининг формуласи ёзилсин ва текширилсин.

2508. $f(x) = \sin \frac{\pi x}{3}$ функция $(x - 1)$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин.

2509. $f(x) = \sqrt{x}$ функция $x - 4$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин, ҳосил бўлган қаторнинг яқинлашиши Даламбер аломатига асосан текширилсин.

2510. Биномиал қатор ёрдами билан $|x| < 1$ бўлганда

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^6 + \dots$$

эқани кўрсатилсин.

2511. 2510-масаладаги қаторни ҳадма-ҳад интеграллаб, $\arcsin x$ учун қатор ёзилсин.

5- §. Қаторнинг тақрибий ҳисоблашларга татбиқи

2512. $\sqrt{1+x}$ учун биномиал қатор ёзилсин ва $\sqrt{1,004}$, $\sqrt{0,992}$, $\sqrt{90}$ ҳисоблансин, ҳисоблашда қаторнинг иккита ҳади билан чегараланилсин.

Ҳисоблаш хатоси баҳолансин.

2513. $\sqrt[3]{1+x}$ учун биномиал қатор ёзилсин, бунга асосан қаторнинг биринчи иккита ҳадини олиб $\sqrt[3]{1,006}$, $\sqrt[3]{0,991}$, $\sqrt[3]{130}$ ҳисоблансин, ҳисоблаш хатоси баҳолансин.

2514. $\sin x$ учун ёзилган қаторнинг биринчи иккита ҳади билан чегараланиб, $\sin 12^\circ$ ҳисоблансин ва ҳисоблаш хатоси баҳолансин.

Қўрсатма. $x = 12^\circ$ радиан ўлчовида $x = \frac{\pi}{15} = 0,2094$ бўлади. Хатонинг юқори чегараси $x < 0,3$ шартдан аниқлансин.

2515. $\frac{1}{1+x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ ёйилмани $\frac{1}{1+x^2}$ касрининг суратини махражига бўлиб ҳосил қилинсин ва уни ҳадма-ҳад интеграллаб $\arctg x$ учун қатор ёзилсин.

$$2516. \arctg x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} \text{ ёйилмада } x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

деб олиб, π ни ҳисоблаш учун ушбу

$$\pi = 2 \sqrt{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}$$

қатор ҳосил қилинсин.

2517. 2516-масаладаги қаторда биринчи бешта ҳадни олиб π ҳисоблансин.

2518. 2497-масаладаги

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right]$$

қатордан фойдаланиб $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 4$, $\ln 6$ ҳисоблансин.

Қўрсатма. $\frac{1+x}{1-x} = 2$ деб олиб, x топилсин ва ҳоказо.

2519. $\int \frac{\sin x}{x} dx$ ва $\int \frac{e^x}{x} dx$ интеграллар қаторлар шаклида аниқлансин.

$$2520. \Phi(x) = \int_0^x e^{-x^2} dx \text{ функцияни қатор шаклида}$$

ёзиб, бу қаторга асосан $\Phi\left(\frac{1}{3}\right)$ ҳисоблансин. Ҳисоблашда олинadиган ҳадларнинг сони, хато 0,001 дан кичик бўладиган қилиб олинсин.

$$2521. \Phi(x) = \int_0^x \sqrt[3]{1+x^2} dx \text{ функцияни қатор шаклида}$$

ёзиб, бу қаторга асосан $\Phi\left(\frac{1}{5}\right)$ ҳисоблансин, ҳисоблашда олинган ҳадларнинг сони, хато 0,00001 дан кичик бўладиган қилиб олинсин.

2522. $y'' = x^2 y$ тенгламанинг $x = 0$ бўлганда $y = 1$, $y' = 1$ бўладиган ечими қатор шаклида топилсин.

2523. $y' = 1 + x - y^2$ Риккати тенгламасининг $x = 0$ бўлганда $y = 1$ бўладиган ечимини аниқловчи қаторнинг биринчи тўртта ҳади топилсин.

2524. $xy'' + y' + xy = 0$ Бессель тенгламасининг $x = 0$ бўлганда $x = 1$, $y' = 0$ бўладиган ечимини қатор шаклида ёзилсин.

2525. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{1 \cdot 2} + \dots$ биномал қаторнинг биринчи иккита ҳади билан чегараланиб, $\sqrt[3]{1,005}$; $\sqrt[3]{1,0012}$; $\sqrt[3]{0,993}$; $\sqrt[3]{0,997}$; $\sqrt[3]{110}$; $\sqrt[3]{70}$; $\sqrt[5]{40}$ ҳисоблансин ва ҳисоблаш хатоси баҳолансин..

2526. $\cos x$ нинг қаторга ёйилмасида биринчи иккита ҳади билан чегараланиб, $\cos 12^\circ$ ҳисоблансин, ҳисоблаш хатоси баҳолансин.

2527. 2511-масаладаги $\arcsin x$ нинг қаторга ёйилмасида биринчи учта ҳад билан чегараланиб ва $x = \frac{1}{2}$ деб олиб, π ҳисоблансин.

Қўрсатма. Аввало ташлаб қолдирилган ҳадлардан биринчисини (яъни тўртинчи ҳадни) ҳисоблаб, сўнггра биринчи учта ҳаддан ҳар бирининг хатоси биринчи ташланган ҳаддан ошмайдиган қилиб ўли каср орқали ифодалаш керак.

2528. $\frac{\pi}{4} = \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3}$ айниятдан фойдаланиб, π учун иккита чексиз қаторнинг йиғиндисидан иборат ифода ёзилсин.

2529. $\ln(1+x)$ нинг қаторга ёйилмасида $x = \frac{1}{N}$ деб олиб, қуйидаги формулалар ҳосил қилинсин:

$$1) \ln(N+1) = \ln N + \left[\frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \dots \right];$$

$$2) \lg_{10}(N+1) = \lg_{10} N + 0,4343 \left[\frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \dots \right].$$

2530. $\ln 2 = 0,6931$ эканлигидан фойдаланиб, $\ln 5$ ва $\ln 10$ ҳисоблансин ва модуль $M = \frac{1}{\ln 10} \approx 0,4343$ эканлиги кўрсатилсин.

2531. $\lg_{10} 101$ ва $\lg_{10} 102$ ҳисоблансин.

2532. Эллипс ёйининг узунлиги қатор кўринишида аниқлансин.

2533. $\sqrt{1+x^2}$ функциянинг қаторидан фойдаланиб $\int_0^{0.5} \sqrt{1+x^2} dx$ интеграл ҳисоблансин. Ҳисоблашда олинган ҳадларнинг сони хато 0,001 дан кичик бўладиган қилиб олинсин.

2534. $\Phi(x) = \int_0^x \cos \frac{x^2}{4} dx$ функцияни қатор билан аниқлансин ва 0,000001 аниқлик билан $\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$ ҳисоблансин.

2535. $y' = x^2 + y^2$ тенгламанинг $x=0$ бўлганда $y=0$ бўладиган ечимини аниқловчи қаторнинг биринчи учта ҳади ёзилсин.

2536. $y'' + xy = 0$ тенгламанинг $x=0$ бўлганда $y=1$, $y'=0$ бўладиган ечими қатор кўринишида ёзилсин.

2537. Эгрилиги k , ёйининг узунлиги s га пропорционал бўлиб ўсувчи ўтиш эгри чизигининг тенгламалари қаторлар орқали ёзилсин.

Қўрсатма. C ўзгармас бўлсин. $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{s}{C}$ ифодадан φ ни аниқлаб, $dx = ds \cos \varphi$ ва $dy = ds \sin \varphi$ тенгламалар ечилсин.

6-§. Икки аргументли функция учун Тейлор қатори

Икки аргументли функция учун Тейлор қаторини қуйидаги учта кўринишда ёзиш мумкин:

$$F(x+h, y+l) = F(x, y) + \frac{1}{1!} \left[h \frac{\partial}{\partial x} + l \frac{\partial}{\partial y} \right] F(x, y) + \frac{1}{2!} \left[h \frac{\partial}{\partial x} + l \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 F(x, y) + \dots \quad (I)$$

$$F(x, y) = F(a, b) + \frac{1}{1!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right] F(a, b) + \frac{1}{2!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 F(a, b) + \dots \quad (II)$$

$$\Delta z = \frac{dz}{1!} + \frac{d^2 z}{2!} + \dots + \frac{d^n z}{n!} \Big|_{\substack{x=x_0+\theta\Delta x \\ y=y_0+\theta\Delta y}} \quad (III)$$

2538. Агар $F(x, y) = x^2 + xy + y^2$ бўлса. Тейлорнинг (I) формуласига асосан $F(x+h, y+l)$ функциянинг қаторга ёйилмаси ёзилсин.

2539. $F(x, y) = x^3 + 2xy^2$ функция $(x-1)$ ва $(y-2)$ нинг даражалари бўйича (II) формулага асосан қаторга ёйилсин.

2540. $F(x, y) = \ln(x-y)$ функция x ва $(y+1)$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин ва унинг 1-ҳамда 2-тартибли ҳадлари ва қолдиқ ҳади ёзилсин [(II) формула].

2541. $F(x, y) = \sin(mx + ny)$ функция x ва y нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин ва унинг 1-, 2- ва 3-тартибли (даражалари) ҳадлари ҳамда қолдиқ ҳади ёзилсин [$a = b = 0$ бўлгандаги (I) формула].

2542. $e^{-x^2-y^2}$ функция x ва y нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин [$a = b = 0$ бўлгандаги (II) формула].

2543. $z = x^2 - xy + y^2$ функциянинг орттирмаси Δz аниқлансин [(III) формула] ва x 2 дан 2,1 гача, y 3 дан 2,8 гача ўзгарганда бу орттирма ҳисоблансин.

2544. $z = \cos(ax - by)$ функция учун (III) формуланинг биринчи икки ҳади ва қолдиқ ҳади ёзилиб, функциянинг орттирмаси аниқлансин.

2545. $F(x, y) = x^2y$ функция $(x-1)$ ва $(y+1)$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин [(II) формула].

2546. 1- ва 2- тартибли ҳадлар билан чегараланиб, $F(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ функция $(x-1)$ ва y нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин.

2547. $z = y^x$ функция $(x-2)$ ва $(y-1)$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин ва унинг 1- ва 2- тартибли (даражалари) ҳадларини ёзиб, $1,1^{2,1}$ ҳисоблансин.

2548. $z = x^2y - y^2$ функциянинг Δz орттирмаси аниқлансин ва x 2 дан 1,99 гача ва y 5 дан 5,02 гача ўзгарганда 0,0001 аниқлик билан ҳисоблансин.

7- §. Фурье қатори. Фурье интеграли

1°. Таъриф. Агар $[a, b]$ сегментда $f(x)$ функция

1) сони чекли узилишларга эга бўлиб, уларнинг ҳаммаси 1- тур узилишлар бўлса;

2) сони чекли экстремумларга эга бўлса;

3) (a, b) оралиқнинг ҳар бир нуқтасида $f(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$

бўлса, функция шу сегментда Дирихле шартларига бўйсунди дейилад.

2° $[-1, 1]$ сегментда Дирихле шартларига бўйсунувчи $f(x)$ функция кесманинг ҳар бир нуқтасида қуйидаги Фурье қатори билан аниқланиши мумкин:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right], \quad (1)$$

бунда

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx; \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (2)$$

Агар $f(x) = f(-x)$, яъни $f(x)$ — *жуфт* функция бўлса, у ҳолда $b_n = 0$ ва

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}. \quad (3)$$

Агар $f(x) = -f(-x)$ яъни $f(x)$ — *тоқ* функция бўлса, у ҳолда $a_n = 0$ ва

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (4)$$

Агар $[-l, l]$ сегментда (1) қатор билан аниқланган $f(x)$ функцияни $f(l) = \frac{f(l-0) + f(l+0)}{2}$ шартнинг бажарилишини талаб этиб, уни $2l$ га тенг давр билан даврий давом эттирсак, функция ўзининг бутун давомида ҳам (1) қатор билан аниқланади.

3°. $f(x)$ функция $(-\infty, \infty)$ оралиқда *абсолют интегралланувчи* (яъни $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ яқинлашади) бўлса ва ҳар қандай чекли сегментда Дирихле шартларига бўйсунса, у ҳолда бу функция қуйидаги Фурье интеграли билан ифодаланади:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(x-t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} [a(\alpha) \cos \alpha x + b(\alpha) \sin \alpha x] d\alpha, \end{aligned} \quad (5)$$

бунда

$$a(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha t dt \quad \text{ва} \quad b(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \alpha t dt. \quad (6)$$

Даври 2π бўлган қуйидаги функциялар Фурье қаторларига ёйилсин:

2549. $0 < x < \pi$ бўлганда $f(x) = 1$ га $f(-x) = -f(x)$. Ҳосил бўлган қатор ёрдами билан

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

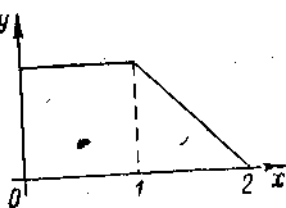
эканлиги кўрсатилсин.

2550. $0 \leq x \leq \pi$ бўлганда $f(x) = x$ ва $f(-x) = f(x)$. Ҳосил бўлган қатор ёрдами билан

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

эканлиги кўрсатилсин.

2551. $-\pi \leq x \leq \pi$ бўлганда $f(x) = x^2$. Ҳосил бўлган қатор ёрдами билан



27 чизма

$$1) 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^4}{12};$$

$$2) 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

эканлиги кўрсатилсин.

$$2552. f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi < x < 0 \text{ бўлганда,} \\ \pi - x, & 0 \leq x \leq \pi \text{ бўлганда.} \end{cases}$$

Қуйидаги даври $2l$ бўлган функциялар Фурье қаторига ёйилсин:

$$2553. f(x) = 1, 0 < x < l \text{ бўлганда ва } f(-x) = -f(x).$$

$$2554. f(x) = 1 - x; 0 \leq x \leq l \text{ бўлганда, } f(-x) = f(x), l = 1.$$

$$2555. f(x) = \begin{cases} 0, & -l < x \leq 0 \text{ бўлганда,} \\ x, & 0 \leq x < l \text{ бўлганда.} \end{cases}$$

2556. Даври $2l = 4$ бўлган $f(x)$ функция $(0, 2]$ соҳада график билан берилиб (37-чизма): 1) жуфт; 2) тоқ даврийлик қонунига асосан давом этирилган. Бу функцияларнинг ҳар бири Фурье қаторига ёйилсин.

2557. Узунлиги l га тенг стерженда иссиқлик тарқалиши $\frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенглама билан, бунда $u(x, t)$ — температура ва қуйидаги шартлар билан аниқланади:

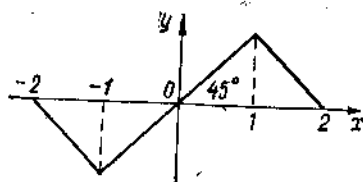
1) чегаравий шартлар: $x = 0$ ва $x = l$ бўлганда $u = 0$;

2) бошланғич шартлар: $t = 0$ бўлганда

$$u = \begin{cases} x, & x < \frac{l}{2} \text{ бўлганда,} \\ l - x, & x > \frac{l}{2} \text{ бўлганда.} \end{cases}$$

Фурье методига асосан $u(x, t)$ функция аниқлансин.

2558. Узунлиги l , бир учи ($x = 0$) бириктирилган иккинчи ($x = l$) учи эса эркин бўлган стерженнинг бўйлама теб-



38- чизма.

ранишлари $\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенглама билан, бунда $u(x, t)$ — бўйлама силжиши ва қуйидаги шартлар билан аниқланади:

1) чегаравий шартлар: $x = 0$ бўлганда $u = 0$; $x = l$ бўлганда $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$;

2) бошланғич шартлар: $t = 0$ бўлганда $u = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$.
 $u(x, t)$ функция Фурье методи билан аниқлансин.

2559. Узунлиги l , икки учи биркирилган стерженнинг кўндаланг тебранишлари $\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$ тенглама ва қуйидаги шартлар билан берилади:

1) чегаравий шартлар: $x = 0$ ва $x = l$ бўлганда $u = 0$ ва $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

2) бошланғич шартлар; $t = 0$ бўлганда $u = f(x)$ ва $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Фурье методи билан $u(x, t)$ функция аниқлансин.

2560 — 2562- масалаларда берилган функциялар учун Фурье интегрални ёзилсин:

$$2560. f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \text{ бўлганда} \\ 0, & x > 1 \text{ бўлганда.} \end{cases} \quad \text{ва } f(-x) = -f(x).$$

$$2561. f(x) = e^{-\beta x} \quad x > 0 \text{ бўлганда } f(-x) = f(x).$$

2562. $[-2, 2]$ сегментда 38- чизмадаги график билан берилган ва бу сегментдан ташқарида нолга тенг $f(x)$.

Қуйидаги функциялар Фурье қаторига ёйилсин:

$$2563. f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x \leq \pi \text{ бўлганда,}$$

$$f(-x) = f(x), \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

$$2564. f(x) = |\sin x|; \quad \text{ҳосил бўлган қатор ёрдами билан} \\ \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots = \frac{1}{2} \text{ эканлиги кўрсатилсин.}$$

$$2565. f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ бўлганда,} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \text{ бўлганда.} \end{cases} \quad \text{ва } f(-x) = -f(x).$$

$$2566. f(x) = x, \quad 0 \leq x \leq l \text{ бўлганда,} \\ f(-x) = f(x), \quad f(x + 2l) = f(x).$$

$$2567. f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0 \text{ бўлганда} \\ x, & 0 < x \leq 1 \text{ бўлганда.} \end{cases} \quad \text{ва } f(x + 2) = f(x).$$

$$2568. f(x) = e^x, \quad -l < x < l \text{ бўлганда ва} \\ f(x + 2l) = f(x).$$

$$2569. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ тенглама, ушбу}$$

$$1) \quad x = 0 \text{ да } u = 0, \quad x = \pi \text{ да } \frac{\partial u}{\partial x} = 0;$$

$$2) \quad t = 0 \text{ бўлганда } u = f(x) \text{ ва } \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ шартлар бажарилганда} \\ \text{Фурье методи билан ечилсин.}$$

2570.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1 \text{ бўлганда} \\ 0, & |x| > 1 \text{ бўлганда.} \end{cases}$$

функция учун Фурье интеграли ёзилсин.

✓ N

ЖАВОБЛАР

1. $AB = 9$, $BC = -6$, $AC = 3$, $9 - 6 = 3$. 3. $5(2 + \sqrt{2})$, 90°
 45° . 5. 20. 6. $5\sqrt{2}$. 7. $(5; 5)$, $(5; -3)$. 8. $B(0; 2)$ ва $B(0; -4)$,
9. $x = a \pm \sqrt{c^2 - b^2}$; $c > |b|$ бўлганда икки нукта, $c = |b|$ бўлганда
битта, $c < |b|$ бўлганда битта ҳам йўқ. 10. $M(5; 0)$. 11. Марказ
 $(1; -1)$, $R = 5$. 12. $\text{пр}_x \overline{AB} = -2$, $\text{пр}_y \overline{AB} = -4$, $|\overline{AB}| = 2\sqrt{5}$.
13. $B(5; 8)$, $|\overline{AB}| = 3\sqrt{2}$. 14. $B(4; -3)$. 15. $-4; 1; 3$. 16. $18\sqrt{2}$.
17. $(0; 2,9)$. 18. $B(4; 0)$, $B_1(-8; 0)$. 19. Марказ $(2; -1)$, $R = 5$.
21. $X = 7$, $Y = -1$; $5\sqrt{2}$. 22. $M(1; 4)$. 23. $M(13; 16)$. 24. $x =$
 $= \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$. 26. 100° огирликдаги шар марказидан 26 см
узоқликда. 27. $(1; 2,5)$. 29. $OC = 5$, $OD = \frac{24\sqrt{2}}{7}$. 30. $(3; 3)$. 31. 9 кв.
бир. 33. 13 кв. бир. 34. $(1; 3)$ — агар кучлар бир томонга йўналган
бўлса, ва $(25; 27)$ — агар кучлар турли томонга йўналган бўлса,
35. $(1; -1)$; 36. $\frac{10\sqrt{2}}{3}$. 37. $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$; $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$.
38. $\left(\frac{37}{27}; \frac{13}{27}\right)$. 39. $C_1(3; 0)$, $C_2(-7; 0)$. 40. $M(2; -6)$, $N(5; 8)$,
 $P(-4; 1)$, $k = \frac{7}{3}$. 42. $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$, A ва O айланада ётади.
43. $x - y - 2 = 0$, D ва E чизиқда ётади. 45. $x^2 + y^2 = 8$.
46. $y = \pm x$. 47. $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$. 48. $y = \frac{x^2}{4} - x + 2$. 49. $y = \pm 2x$. 51.
 $(1; 0)$, $(3; 0)$, $(0; 3)$. 53. $y^2 = 8(x - 2)$. 54. $2x - y + 5 = 0$. B ва D
нукталар чизиқда ётади. 55. $x^2 + y^2 = 4$. 57. $y = \frac{x^2}{4} + 1$.
58. $\sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2} - \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = 4$ ёки $xy = 2$;
 $x = \pm \frac{1}{2}$, ± 1 , ± 2 , ± 4 бўлганда, $y = \pm 4$, ± 2 , ± 1 , $\pm \frac{1}{2}$ бўлганда
бу нукталар бўйича эгри чизиқни яшаш мумкин. 59. $y = x + 3$, $y = -x + 3$.
60. $y = x\sqrt{3} - 3$, $y = -x\sqrt{3} - 3$. 62. $y = -1,5x$. 63. 1) $k = \frac{2}{3}$,

$$b = -2; 2) k = -\frac{2}{3}, b = 0; 3) k = 0, b = -3; 4) k = -\frac{3}{4}, b = 3.$$

$$65. k = 1, b = 1, y = x + 1. 66. 1) \frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1; 2) \frac{x}{-4/3} + \frac{y}{4} = 1.$$

$$67. y = 0; 4x - 3y = 0; y = 4; 4x - 3y + 12 = 0; x = 0; 2x - 3y + 3 = 0.$$

$$68. \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \text{ ёки } -\frac{x}{4} + \frac{2y}{3} = 1. 69. \text{пр}_{Ox} \overline{AB} = 8, \text{пр}_{Oy} \overline{AB} =$$

$$= 6, |\overline{AB}| = 10. 70. A \text{ ва } C - \text{тўғри чизикда, } B - \text{ундан «юқорида, } D \text{ эса «қуйида» ётади. 71. Тенгсизликлар қуйидагиларни аниқлайди:}$$

1) $y = 3x + 1$ тўғри чизикдан «юқорида» ётувчи барча нуқталарни (яъни ярим текисликни); 2) $y = 3x + 1$ тўғри чизикдан «қуйида» ётувчи барча нуқталарни; 3) $y = 4 - 2x$ тўғри чизикда ва ундан «юқорида» ётувчи барча нуқталарни; 4) $y = 4 - 2x$ тўғри чизикдан «қуйида» ётувчи барча нуқталарни. 73. $x - y = \pm a$. 74. t секунддан сўнг M нуқтанинг координатлари $x = a + mt$, $y = b + nt$ бўлади. t ни йў-

қотиб, траекториянинг $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n}$ тенгмасини ҳосил қиламиз.

$$75. 1) y = x \sqrt{3} - 2; 2) y = -x \sqrt{3} - 2. 76. k = 1, b = 5.$$

$$77. x + y - 4 = 0; x - y + 4 = 0; y = 3, y = 0. 78. \frac{x}{5} \pm \frac{y}{3} = \pm 1.$$

$$79. \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \text{ ва } \frac{x}{-2} + \frac{y}{-6} = 1. 80. y = \pm 2(x + 3). 81. AB = 4\sqrt{5},$$

$$\text{пр}_{Ox} \overline{AB} = 4, \text{пр}_{Oy} \overline{AB} = 8. 82. 1) \arctg \frac{3}{4}; 2) 45^\circ; 3) 45^\circ; 4) 0^\circ;$$

$$5) 90^\circ; 6) \arctg \frac{a^2 - b^2}{2ab}. 86. 5x + 2y + 4 = 0; 5x + 2y = 25. 88. x -$$

$$- 3y + 2 = 0; 5x - y = 4; 3x + y = 12. 89. 28^\circ, 12^\circ 30' \text{ ва } 139^\circ 30'.$$

$$90. y = 3x \text{ ва } y = -\frac{1}{3}x. 91. x - 5y + 6 = 0; 5x + y = -4. 92. y =$$

$$= 2x - 6; y = -2x + 6. 93. (3; -1), (3; 3); \left(-\frac{9}{5}; \frac{3}{5}\right), 45^\circ,$$

$$71^\circ 34', 63^\circ 26'. 94. \left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right). 95. AE: 2x - 5y = -4; AD: x -$$

$$- 2y = -2; \sqrt{29}. 96. A = 18^\circ 26'; B = 26^\circ 34'; C = 135^\circ. 97. x +$$

$$+ 2y - 11 = 0. 98. \tg A = \frac{4}{3}; \tg B = \tg C = 2; S = 16. 99. (1; -1),$$

$$\left(\frac{8}{3}; -2\right). 100. 2x + y = -4; 2x - y = -4; 2x + y = 4. 109. 2, 8;$$

$$0; 1, 4; 105. \frac{\sqrt{13}}{2}. 106. k = \pm 2. 107. \text{Берилганига параллел икки тўғри}$$

$$\text{чизик: } 4x - 3y \pm 20 = 0. 108. 8x - 15y + 6 = 0; 8x - 15y = 130.$$

$$109. x - y = 0 \text{ ва } x + y - 4 = 0. 110. 3x - y = 12 \text{ ва } x + 3y = 4.$$

$$111. x + y = 2 \text{ ёки } 4x + y - 8 = 0. 112. 31x + 26y = -21.$$

$$113. x + 3y = 2. 114. \sqrt{10}. 115. 3x - 4y + 10 = 0; x = 2. 116. h =$$

$$= \frac{18}{\sqrt{34}}. 117. x + y = 0 \text{ ва } x - 3y = 0 \text{ тўғри чизиклар; масофалар: } d_1 =$$

$$= 2\sqrt{2}, d_2 = 0,4\sqrt{10}. 118. \text{Иккита тўғри чизик: } x + 2y = 0$$

- ва $x + 2y = 10$. 119. $x + 3y = 0$ ва $3x + y = 0$. 120. $11x + 22y = 74$. 121. $y = -\frac{x}{2}$ ва $y = -\frac{3}{2}x$. 122. $x + 2y = 4$. 123. $y = 0$; $2x + 3y = -4$; $y = -4$; $2x + 3y = 0$; $x + 2y = -2$; $y = -x$; $\lg \alpha = \frac{1}{8}$.
 124. $18^\circ 26'$, $108^\circ 27'$; $S_\Delta = \frac{2b^2}{3}$. 125. $\frac{a^2}{5}$ кв. бир. 126. $A = 36^\circ 52'$; $B = 127^\circ 52'$. 127. $4(\sqrt{10} + \sqrt{5})$; 20. 128. $2x - y + 6 = 0$; $x - 4y = 4$; $2x - 3y + 2 = 0$. 129. $y = x + 2$; $x - 5y = 6$; $y = -x$; $2y = x$.
 130. $\sqrt{10}$. 131. Нуқта $x - 3y = \pm 5$, $3x + y = \pm 5$ тўғри чизиқлар билан чегараланган квадрат томонлари бўйича ҳаракат қилади. 132. $\left(\frac{3}{5}; \frac{19}{5}\right)$, $\left(-\frac{9}{5}; -\frac{17}{5}\right)$. 133. $h_1 = h_2 = \frac{6}{\sqrt{5}}$. 134. $\left(\frac{3}{5}; \frac{19}{5}\right)$, $\left(-\frac{9}{5}; -\frac{17}{5}\right)$. 135. (4; 5). 136. (0; 2), (4; 0), (2; 4), (-2; 6). 137. $y - x = 2$; $x + 2y = 4$; $2x + y = 8$. 138. $B(2; 1)$, $C(-1; -5)$. 139. $y = 2x + 6$, $\frac{12}{\sqrt{15}}$; $\angle DAB \approx 53^\circ$. 140. $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$; A ва O айланада, B — ундан ташқарида. 141. $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$. 143. (0; 0), (-2,5; 2,5). 144. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ ёки $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$. 145. $\lg \alpha = -2,4$, $\alpha = 112^\circ 37'$. 146. $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 25$. 147. $x^2 + y^2 - 8y = 0$. 149. $y = \frac{4}{3}x$ ва $y = 0$. 150. $y^2 = x(a-x)$. 151. $(x-3)^2 + y^2 = 9$. 152. $x^2 + \left(y - \frac{a}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{9}$. 153. $x^2 + y^2 = a^2$. 154. $x^2 + y^2 = ax$. 155. $x^2 + y^2 - 6y - 9 = 0$. 156. 1) (3; -2), $R = 6$; 2) $\left(-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$, $R = 4$; 3) $\left(0; -\frac{7}{2}\right)$, $R = \frac{7}{2}$. 157. $x^2 + y^2 + 4y = 0$; (0; 0), (2; -2), (-2; -2). 158. $x^2 + y^2 + ax + ay = 0$. 159. $y = 0$. $15x + 8y = 0$. 160. 90° . 161. $x + y = 3$. 162. $x^2 + y^2 + ax = 0$. 163. $(x-2)^2 + y^2 = 16$. 164. $x^2 + y^2 = 2ax$. 165. $a = 4$; $b = 2$; $c = 2\sqrt{3}$; $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 166. 2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$. 167. $b = 1,4$; 3; 4; 4,8; 5; $\varepsilon = 0,96$; 0,8; 0,6; 0,28; 0. 168. $a = 150$ млн. км; $\varepsilon = \frac{1}{60}$.
 169. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $r = 4 - \sqrt{3}$; $r_1 = 4 + \sqrt{3}$. 170. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1$; $r = 11$; $r_1 = 5$. 171. 4. $\sqrt{3}$. 172. $\sqrt{0,4}$. 173. $\left(\frac{2}{7}; \pm \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$. 174. $\left(-\frac{15}{4}; \pm \frac{\sqrt{63}}{4}\right)$. 175. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$. 176. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. 178. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ёки $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$. 179. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ ёки $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$. 180. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$; $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $r = 3$, $r_1 = 9$. 181. $\sqrt{2(a^2 + b^2)}$. 182. $\left(\pm \frac{4\sqrt{2}}{3}; \frac{1}{3}\right)$ ва (0; -1). 183. (-5; 7). 184. $(\pm\sqrt{15}; \pm 1)$.

185. $x^2 + 4y^2 = 16$. 186. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$. 187. $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $53^\circ 08'$.
 188. $r = 1$, $r_1 = 9$. 189. 1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{4} = 1$. 190. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$; 2) $\sqrt{3}$ ва $6\sqrt{3}$. 191. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. 192. $x^2 - y^2 = a^2$.
 193. $(0; \pm a\sqrt{2})$; 90° . 194. $y + 2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$. 195. b ; $2 \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$.
 196. $\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}}$; $b > a$. 197. 1) $e = 2$; 2) $e = \sec \alpha$. 198. $y < -3$,
 $y < -|x|$. 199. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$. 200. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ ($x > 0$ бўлганда).
 201. $x^2 - y^2 = a^2$. 202. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. 203. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ($\text{ёки } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$). 204. $(0; 0)$ ва $(6; \pm 2\sqrt{3})$. 205. $y = \pm \frac{4}{3}(x + 5)$.
 206. $(-9, 6; \pm \frac{3}{5}, \sqrt{119})$. 207. $(\pm(\sqrt{6}; \pm\sqrt{2}))$. 208. $(-4; 3)$ ва $(-\frac{4}{7}; -\frac{3}{7})$. 209. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$. 210. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1$ ($x > 0$ бўлганда).
 211. $y = 3 - \frac{x^2}{4}$. 212. $y^2 = 8(x + 2)$. 214. 1) $y^2 = 9x$; 2) $y = -x^2$.
 215. $y = \frac{a}{b^2}x^2$. 216. $(x - \frac{p}{2})^2 + y^2 = p^2$; $(\frac{p}{2}; \pm p)$. 217. $y = -\frac{x^2}{2}$.
 218. $(3; \pm 3\sqrt{2})$. 219. 40 см. 221. $\frac{y^2}{3} = px$. 222. $y^2 = 4ax$ ва $y = 0$.
 224. $y^2 = 8(2 - x)$. 225. $y = x - \frac{x^2}{4}$; $O_1(2; 1)$. 226. 1) $y^2 = -4x$;
 2) $y = x^2$. 227. $y^2 = -3x$. 228. $(0; 0)$, $(6; \pm 2\sqrt{3})$. 229. $x = 0$;
 $x + y + 2 = 0$. 230. $y = -\sqrt{3}(x + 1)$; $\frac{16}{3}$. 231. $r = 7,4$; $d = 9,25$.
 232. Директрисалар; $x = \pm 3,2$; $e = 1,25$; $r = 10,25$; $d = 8,2$.
 233. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. 234. $x^2 - y^2 = 12$. 235. Қўшма диаметр
 $y = -\frac{x}{2}$; $a_1 = b_1 = \sqrt{10}$. 236. Қўшма диаметр $4y + x = 0$;
 31° . 237. Диаметр тенгламаси $y = \frac{b}{a}x$; унинг узунлиги $\sqrt{2(a^2 + b^2)}$.
 238. $y = 1,5x$. 239. $y = 2$. 240. $8x - 9y + 25 = 0$. 241. $y = 2x + 3$.
 243. 1) $x \pm 2\sqrt{3}$ $y = 8$; 2) $2x \pm y = 1$; 3) $x \pm 2y = -2$.
 245. $x - y = \pm 5$. 246. $y = \pm 2x + 6$. 247. $x + y = \sqrt{a^2 + b^2}$.
 249. $y = 2x \pm 4\sqrt{2}$. 250. MN нормалнинг тенгламаси: $a^2y_0x - b^2x_0y =$
 $= c^2x_0y_0$. $y = 0$ деб, MN нормалнинг Ox ўқ билан кесилишган нуқта-
 сининг абсциссасини топамиз: $x_1 = e^2x_0$. У вақтда $FN = x - e^2x_0 =$
 $= ex$, $F_1M = c + e^2x_0 = ex_1$, яъни MN нормал FF_1 ни $r : r_1$ нисбатда
 бўлади, шунинг учун ҳам биссектриса бўлади. 252. $y^2 = 2px$ пара-

болага ўтказилган нормал $y_0x + py = y_0(p + x_0)$ тенгламага эга.
 $y = 0$ деб, $x_1 = p + x_0$, $FN = x_1 - \frac{p}{2} = \frac{p}{2} + x_0 = FM$. ларни топа-
 миз, яъни $\angle FMN = \angle FNM$. 253. $(\pm 3, 2; \pm 2, 4)$. 254. Диаметрлар
 $y = x$ ва $y = -\frac{x}{4}$; бурчак $59^\circ 02'$. 255. $y = \frac{x}{4}$. 256. $4x - y = 6$.
 257. $\arcsin \frac{3}{4} \approx 47^\circ 31'$. 259. $x + y + 2 = 0$. 260. 1) $O_1(1; 2)$,
 2) $\lg \varphi = \frac{3}{4}$. 261. 5) $X^2 + 4Y^2 = 16$; 6) $Y^2 = 4X$; 7) $X^2 - 4Y^2 = 4$;
 8) $Y = \frac{1}{2}X^2$. 262. 1) $X^2 + 4Y^2 = 16$; 2) $X^2 - 4Y^2 = 16$. 263. $X^2 -$
 $- Y^2 = 8$. 264. 1) $XY = 6$; 2) $XY = -6$; 3) $XY = 4$; 4) $XY = -6$.
 268. Сув оқимининг тенгламаси: $y = 16(x - x^2)$; $x = 0,75$ м бўлган-
 да $y = 3$ м. 269. $y = b \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. 270. $x^2 + y^2 + 4x = 0$. 271. 1) 45° ;
 2) $\arcsin 2$. 272. $y = x \lg \varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos \varphi}$. 273. $y^2 = 24x + 3x^2$ (гипер-
 бола). 275. 1) Эллипс; 2) гиперболо. 276. 1) $\frac{X^2}{5} + \frac{Y^2}{2} = 1$, $O_1(3; -1)$;
 2) $X^2 - Y^2 = 9$; 3) $Y^2 = 2X$; 4) $X^2 = 4Y$. 277. $X^2 + 2Y^2 = 4$.
 Фокуслар эски системада: $(1; 1)$ ва $(-1; -1)$. 278. $(x+1)^2 + y^2 = 4$.
 279. $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 2$. 280. $x + 3y = 0$. 281. $y^2 = 4(x+4)$.
 283. $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. 284. $x^2 + y^2 - ax - by = 0$. 285. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.
 286. Асос $AB = 2a$, баландлик $OD = \frac{a}{\sqrt{5}}$, юз $\frac{a^2}{\sqrt{5}}$. 287. AB ни
 $AO:OB = m$ нисбатда бўлувчи O нуқтани координаталар боши
 деб, Ox ўқи деб эса OB тўғри чизиқни қабул қиламиз; $OB = a$
 бўлсин, у вақтда A ва B нуқталарнинг координаталари $A(-ma; 0)$,
 $B(a; 0)$. Изланган чизиқнинг тенгламаси: $(m-1)x^2 + (m-1)y^2 =$
 $= 2max$; $m \neq 1$ бўлганда $x^2 + y^2 = \frac{2ma}{m-1}$ х айлана; $m = 1$ бўл-
 ганда $x = 0$ тўғри чизиқ. 288. O нуқтани координаталар боши, OB
 ни эса Ox ўқи деб қабул қиламиз. Изланган чизиқнинг тенгламаси:
 $(a-b)(x^2 + y^2) = 2abx$; $a \neq b$ бўлганда $x^2 + y^2 = \frac{2ab}{a-b}$ х айлана;
 $a = b$ бўлганда $x = 0$ тўғри чизиқ. 289. $2(k^2x^2 + y^2) = a^2(k^2 + 1)$;
 $k \neq 1$ бўлганда эллипс, $k = 1$ бўлганда $x^2 + y^2 = a^2$ айлана.
 290. $\frac{x^2 + 10x}{25} + \frac{y^2}{9} = 0$. 291. $3a^2\sqrt{3}$. 292. $\arcsin \frac{3}{4} \approx 36^\circ 52'$.
 293. $(\pm a; \pm a)$. 294. $A(\sqrt{6}; 0)$; $B(2; -2)$, $C(-2\sqrt{2}; \sqrt{2})$;
 $\triangle ABC$ юзи $= \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$. 296. $2\sqrt{2}$; $y = x - 2$. 297. $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$.
 298. $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9p^2}{16}$. 299. $ax - by + a^2 + b^2 = 0$; $d = \frac{|ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
 300. Тенгламаларни ҳадма-ҳад айириб $4(y-x) = (y+x)(y-x)$ га эга
 бўламиз; бундан 1) $y = x$; 2) $x + y = 4$; демек, параболаларнинг

кесилиш нукталари $y = x$ ёки $x + y = 4$ тўғри чизиклардан бирида; ётади; $x_1 = 2$; $x_2 = -6$ ни топамиз; ватарнинг узунлиги $8\sqrt{2}$.

301. 30. 302. $x^2 + y^2 = a(x + y)$. 303. $\frac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$ [эллипс, маркази (2; 0)]. 304. $xy = 4$. 305. $y = \frac{x^2 - 6x + 25}{8}$. 306. $X^2 - Y^2 = 4$;

$O_1(2; -3)$. 307. $\frac{(x-2,5)^2}{2,25} - \frac{y^2}{4} = 1$ [гипербола, маркази (2,5; 0)].

308. $M(x, y)$ — эллипснинг нуқтаси бўлсин. У вақтда $FM + F_1M = AF + AF_1$ ёки $\sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} + \sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} = 4a$; $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 8a^2$; ўқларни 45° га бургандан сўнг: $X^2 + 2Y^2 = 4a^2$.

309. $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$; янги тенглама $X^2 -$

$-Y^2 = 4$. 310. $3x^2 + 8xy - 3y^2 = 20$; ўқларни $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ бурчакка

буриш натижасида $X^2 - Y^2 = 4$ кўринишга келтирилади (309 га қара). 311. $y^2 = 2px + (\epsilon^2 - 1)x^2$. 303. 1) $y = \pm 2x$ икки тўғри чизик; 2) (0; 0) нуқта 3) мавҳум айлана; 4) (3; 4) нуқта; 5) икки тўғри чизик: $x = 0$, $y = -x$; 6) икки тўғри чизик ($y = \pm 4$); 7) икки тўғри чизик $y = x$ ва $y = \frac{x}{2}$. 314. 1) (1; -1), $\frac{X^2}{6} + \frac{Y^2}{4} = 1$; 2) (2; 1), $X^2 -$

$-Y^2 = 9$; 3) $2X^2 + 5XY + 2Y^2 = 8$. 315. 1) $\frac{X^2}{24} + \frac{Y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{6} = 1$.

316. 1) $\frac{X^2}{8} + \frac{Y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{X^2}{8} - \frac{Y^2}{4} = 1$. 317. 1) $Y^2 = 2\sqrt{5}X$; 2) икки тўғри чизик $x - 2y = 3 \pm 1$. 318. 1) $3y = 2x - 7 \pm (x - 2)$; 2) (2; -1) нуқта; 3) $4y = -2x - 3 \pm 1$. 319. $4X^2 - Y^2 = 8$; марказ (2; 0); $\varphi = -45^\circ$. 320. $5(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$. 321. Ўқларни -45° га

буриб, $Y = \frac{X^2}{a\sqrt{2}} + \frac{a}{2\sqrt{2}}$ ни ҳосил қиламиз. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

тенглама шу параболанинг $x \leq a$ ва $y \leq a$ шартларга бўйсунувчи АВ ёйини аниқлайди (91- чизма). 322. $(x-m)^2 + (y-n)^2 = \epsilon^2 (x \cos \alpha + y \sin \alpha + q)^2 = 0$; $A + C = 2 - \epsilon^2$; $\delta = 1 - \epsilon^2$. 323. 1) Икки тўғри чизик $x \pm 2y = 0$; 2) (-2; 2) нуқта; 3) икки тўғри чизик $y = x$;

$x + 6y = 0$. 324. 1) $\frac{X^2}{12} + \frac{Y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{X^2}{20} - \frac{Y^2}{5} = 1$. 325. 1) $Y^2 = 4\sqrt{2}X$;

2) $x + y = 2 \pm 1$ тўғри чизиклар. 326. 1) $y = x - 2 \pm 1$; 2) $3y = x - 5 \pm 2(x + 1)$. 327. 1) $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 48x - 48y + 144 = 0$;

2) $x^2 + 4xy + y^2 + 6x + 6y - 18 = 0$. 328. $(x-y)^2 - 2a(x+y) + a^2 = 0$; $Y^2 = a\sqrt{2}X$. 329. $x^2 - 4xy - y^2 - 4x + 8y - 12 = 0$;

$X^2 - Y^2 = 3,2\sqrt{5}$. 335. 1) $r = \frac{a}{\cos \varphi}$; 2) $r = \frac{a \sin \alpha}{\sin \varphi}$. 336. $r =$

$\frac{a \sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta - \varphi)}$. 337. $r = 2a \cos \varphi$. 338. 1) $r_{\max} = 5$, $\varphi = 135^\circ$, 315°

бўлганда; $r_{\min} = 1$, $\varphi = 45^\circ$, 225° бўлганда; $r = 3$, $\varphi = 0^\circ$, 90° , 180° , 270° бўлганда; 2) $r_{\max} = 3$, $\varphi = 0^\circ$, 120° , 240° бўлганда; $r_{\min} = 1$, $\varphi = 60^\circ$, 180° , 360° бўлганда; 3) $r_{\max} = 2$, $\varphi = 90^\circ$, 210° , 330° бўлганда; $r_{\min} = 0$, $\varphi = 30^\circ$, 150° , 270° бўлганда; 339. 1) $r_{\max} = a$, $\varphi = 30^\circ$, 150° , 270° бўлганда; $r = 0$, $\varphi = 0^\circ$, 60° , 120° , 180° , 240° , 300° бўлганда;

2) $r = a$, $\varphi = 45^\circ, 225^\circ$ бўлганда; $r = -a$, $\varphi = 135^\circ, 315^\circ$ бўлганда; $r = 0$, $\varphi = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ бўлганда (87- чизмага қаранг). 340. 1) $r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$; 2) $r = a$; 3) $r = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}$; 4) $\lg \varphi = 1$; 5) $r = a \cos \varphi$; 6) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$. 341. 1) $x = a$; 2) $x^2 + y^2 = 2ay$; 3) $xy = a^2$; 4) $x + y = 2a$; 5) $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$. 342. 1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$;

2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; 3) $y^2 = 6x$. 343. $r = \frac{a}{\sin \varphi} \pm b$. 344. $r = OB \pm AB = \frac{a(1 \pm \sin \varphi)}{\cos \varphi}$ ёки Декарт координаталарда $y^2 = \frac{x(x-a)^2}{2a-x}$.

345. $FM^2 = r^2 + a^2 - 2ra \cos \varphi$; $F_1M^2 = r^2 + a^2 + 2ra \cos \varphi$; $FM^2 \cdot F_1M^2 = (r^2 + a^2)^2 - 4r^2a^2 \cos^2 \varphi = b^4$; бундан $r^4 - 2a^2r^2 \cos 2\varphi = b^4 - a^4$. 346. $r = a(1 + \cos \varphi)$; $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$. 347. C — қўзғалмас доиранинг маркази, C_1 — ҳаракатланувчи доиранинг маркази ва $M(\varphi; r)$ — ўзгарувчи нукта бўлсин. $\angle OCC_1 = \angle MC_1C = \varphi$ ва $CO = C_1M = \frac{1}{2}a$ бўлгани учун $OM \parallel CC_1$. $COMC_1$ синиқ чизикни CC_1 га

проекциялаб, $\frac{a}{2} \cos \varphi + r + \frac{a}{2} \cos \varphi = a$ ни ҳосил қиламиз. Бундан $r = a(1 - \cos \varphi)$. 348. 1) $r_{\max} = 5$, $\varphi = 0^\circ, 180^\circ$ бўлганда; $r_{\min} = 1$, $\varphi = 90^\circ, 270^\circ$ бўлганда; 2) $r_{\max} = 4$, $\varphi = 90^\circ, 210^\circ, 330^\circ$ бўлганда; $r_{\min} = 2$, $\varphi = 30^\circ, 150^\circ, 270^\circ$ бўлганда; 3) $r = a$, $\varphi = 0^\circ, 180^\circ$ бўлганда; $r = -a$, $\varphi = 90^\circ, 270^\circ$ бўлганда; $r = 0$, $\varphi = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$ бўлганда. 350. $r = \frac{ab \sin(\beta - \alpha)}{a \sin(\varphi - \alpha) + b \sin(\beta - \varphi)}$. 351. 1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; 2) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$; 3) $y^2 = x$. 352. $r^2 = 2c^2 \cos 2\varphi$; $(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$. 84- чизмада $c\sqrt{2} = a$ деб олинган. 353. $r = b + a \cos \varphi$. 354. $\triangle OAM$ дан: $r = OM = OA \cos \varphi$, аммо $\triangle OAB$ дан: $OA = 2a \sin \varphi$; бундан $r = a \sin 2\varphi$. 358. A нукта Ox ўқда, B нукта Oy ўқда ва $\angle OAB = t$ бўлсин. U вақта $x = BM \cos t = BC \cos^2 t = a \cos^3 t$, $y = AM \sin t = AC \sin^2 t = a \sin^3 t$; шундай қилиб: $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$; бундан, демак, $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. 360. $y^2 = \frac{px^2}{p+x}$.

361. $(3y^2 + x^2)^2 = 4x^2(a^2 - y^2)$. 362. Қўтб координаталарида: $r = OM = AB = BD \sin \varphi = a \lg \varphi \sin \varphi$; Декарт координаталарида: $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$ (89- чизма). 365. OA нурнинг Ox ўқ билан ҳосил қилган бурчагини t деб белгиләб, $x = 2a \operatorname{ctg} t$, $y = 2a \sin^2 t$ ни топамиз. t ни йўқотиб, $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ га келамиз. 367. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

368. $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$ 369. $y = x \operatorname{ctg} \frac{x}{a}$.

370. $\begin{cases} x = (R+r) \cos t - r \cos \frac{(R+r)t}{r} \\ y = (R+r) \sin t - r \sin \frac{(R+r)t}{r} \end{cases}$ бунда t — марказлар

чизигининг бурилиш бурчаги.

$$371. \begin{cases} x = (R-r) \cos t + t \cos \frac{R-r}{r} t, \\ y = (R-r) \sin t - r \sin \frac{R-r}{r} t. \end{cases}$$

$$374. X = \sum X_i = 8; Y = \sum Y_i = -2; OM = \sqrt{64+4} = 2\sqrt{17}.$$

$$375. \sqrt{8+2\sqrt{3}}. \quad 379. 1) c = \frac{a+b}{2}; \quad 2) a = 2c-b.$$

$$380. c = \frac{2}{3}(a-b). \quad 381. m+p=n; \quad \vec{OB} = 3(m+n);$$

$$\vec{BC} = 3(n-m); \vec{EO} = 3(m-n); \vec{OD} = 3(2n-m); \vec{DA} = 6(m-n).$$

$$382. \vec{AC} = 2(n-m); \vec{OM} = 2n+m; \vec{ON} = 3m+n; \vec{MN} = 2m-n.$$

$$383. 6\sqrt{3}. \quad 384. X = X_1 + X_2 + X_3 = -3; Y = \sum Y_i = 6;$$

$$OM = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}. \quad 385. 1) a = 3(c-b); \quad 2) c = 2b-a\sqrt{3}.$$

$$386. OM=r=5\sqrt{2}; \cos \alpha = 0,5\sqrt{2}; \cos \beta = -0,3\sqrt{2}; \cos \gamma =$$

$$= 0,4\sqrt{2}. \quad 387. r=7, \cos \alpha = \frac{2}{7}. \quad 388. \beta \approx 52^\circ \text{ ёки } 128^\circ.$$

$$389. M(3\sqrt{2}; 3; -3), r=3(\sqrt{2}i+j-k). \quad 390. u=2i-6j+$$

$$+3k, u=7. \quad 391. \vec{OC} = i-2j+k, OC=\sqrt{6}, \vec{AB} = k-4j-i;$$

$$AB=3\sqrt{2}. \quad 392. \text{Охири } B(4; -2; 5) \text{ ёки } B_1(4; -2; -7),$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{7}; \cos \beta = -\frac{3}{7}; \cos \gamma = \pm \frac{6}{7}. \quad 393. a=2b-0,8c,$$

$$394. u=3\sqrt{5}, \cos \alpha = -\frac{2}{3\sqrt{5}}. \quad 395. \cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$396. 45^\circ \text{ ёки } 135^\circ. \quad 397. D(4; 0; 6). \quad 398. c=2b-2a. \quad 399. 135^\circ.$$

$$400. B=C=45^\circ. \quad 401. \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0,316; \quad \varphi = 71^\circ 35'.$$

$$402. \cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,894; \quad \varphi \approx 26^\circ 37'. \quad 403. 60^\circ. \quad 404. \arccos 0,8.$$

$$405. 90^\circ. \quad 406. \text{пр}_b a = \frac{4\sqrt{2}}{3}. \quad 407. 2. \quad 408. 1) 2+\sqrt{3}; \quad 2) 40.$$

$$409. (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi \text{ (косинуслар теоремаси); } (a+b)^2 +$$

$$+(a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2 \text{ (параллелограмм диагоналлрининг хоссаси).}$$

$$410. 7. \quad 411. R = \sqrt{(a+b+c+d)^2} = 10\sqrt{4+2\sqrt{2}} \approx 25,3 \text{ кг.}$$

$$412. \sqrt{7} \text{ ва } \sqrt{13}. \quad 413. \cos(a, m) = \frac{(2m-n)m}{\sqrt{(2m-n)^2+1}} = \frac{5}{2\sqrt{7}}.$$

$$\cos(a, n) = -\frac{2}{\sqrt{7}}. \quad 414. \frac{5}{6}. \quad 415. \vec{OM} = 2(i+j+2k);$$

$$\vec{ON} = 2(i+2j+k); \quad \cos \theta = \frac{5}{6}. \quad 416. \cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

$$417. \cos \varphi = 0,26\sqrt{10}; \quad \varphi \approx 34^\circ 42'. \quad 418. D(-1; 1; 1); \quad \varphi = 120^\circ.$$

$$419. \text{пр}_a q = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{CD}}{AB} = -6. \quad 420. CM = \sqrt{(2+m)^2} = \sqrt{7}; \quad ON =$$

$$= \sqrt{(3m+n)^2} = \sqrt{13}; \cos \varphi = \frac{\overline{OM} \cdot \overline{ON}}{\overline{OM} \cdot \overline{ON}} = \frac{17}{2\sqrt{91}} = \frac{17}{19,08} \approx 0,891;$$

$$\varphi = 27^\circ. \quad 421. \quad 120^\circ. \quad 423. \quad 8 \text{ кгм}, \cos \theta = \frac{4\sqrt{2}}{15}. \quad 424. \quad a\sqrt{6}.$$

$$425. \cos \varphi = -\frac{1}{4}. \quad 426. \quad a \times b \text{ тенг: } 1) -6j; \quad 2) -2k;$$

$$3) 6i - 4j + 6k. \text{ Юз тенг: } 1) 6; \quad 2) 2; \quad 3) 2\sqrt{22}. \quad 427. \quad 24,5.$$

$$428. \sqrt{21} \text{ кв. бир.}, h = \sqrt{4,2}. \quad 429. \quad 1) 2(k-i); \quad 2) 2a \times c;$$

$$3) a \times c; \quad 4) 3. \quad 430. \text{ Берилган параллелограммнинг диагоналларида ясалган параллелограммнинг юзи берилган параллелограмм юзидан икки марта катта. } 431. \quad 50\sqrt{2}. \quad 432. \quad 1,5\sqrt{2}. \quad 433. \quad 3\sqrt{17},$$

$$S_{\Delta} = \frac{3\sqrt{17}}{2} \text{ кв. бир.} \quad 434. \quad S_{\Delta} = 7\sqrt{5} \text{ кв. бир.}, BD = \frac{2\sqrt{21}}{3}.$$

$$435. |a+b| = |a-b| = \sqrt{5}; \quad S = \sqrt{6} \text{ кв. бир.} \quad 437. \quad 1,5.$$

$$438. \quad V = 51, \text{ чап.} \quad 439. \quad V = 14 \text{ куб бир.}, H = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

$$441. \quad c = 5a + b. \quad 443. \quad \frac{2\sqrt{2}}{3}. \quad 444. \quad V = 14 \text{ куб бир.}, N = \sqrt{14}.$$

$$445. \quad c = a + 2b. \quad 446. \quad V = |(a+b) \cdot [(b+c) \times (a+c)]| = 2|abc|.$$

$$447. \quad (m \times n) \cdot p = |m \times n| \cdot 1 \cdot \cos \alpha = \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha. \quad 449. \quad 52.$$

$$451. \quad \cos \alpha = \frac{2}{7}, \quad \cos \beta = \frac{3}{7}, \quad \cos \gamma = \frac{6}{7}. \quad 452. \quad x + 4y - 2z = 2.$$

$$453. \quad x + y = 2a. \quad 454. \quad x - y + z = a. \quad 455. \quad 2y - 3z + 7 = 0.$$

$$456. \quad 3y + 3z = 0. \quad 457. \quad 2x + y = 0. \quad 458. \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{c} = 1.$$

$$459. \quad x + y + z = 4. \quad 460. \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1. \quad 462. \quad \cos \alpha = \frac{2}{3};$$

$$\cos \beta = -\frac{2}{3}; \quad \cos \gamma = \frac{1}{3}; \quad \alpha = 48^\circ 11', \quad \beta = 131^\circ 49', \quad \gamma = 70^\circ 32'.$$

$$463. \quad x - 2y - 3z + 14 = 0. \quad 464. \quad 3x - 4z = 0. \quad 675. \quad x + y = 4.$$

$$466. \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1. \quad 467. \quad 1) 45^\circ; \quad 2) 78^\circ 30'. \quad 468. \quad x - 2y - 3z = 4.$$

$$469. \quad 2x + 3y + 4z = 3. \quad 470. \quad 2x + y + z = a. \quad 471. \quad 2x - 2y + z = 2.$$

$$472. \quad 2x - y + z = 5. \quad 473. \quad 3x - y = 0 \text{ ва } x + 3y = 0.$$

$$474. \quad 3. \quad 475. \quad \sqrt{6}. \quad 476. \quad 2\sqrt{2}. \quad 477. \quad 1) x - 2y + 2z = 11 \text{ ва } x - 2y + 2z = -1;$$

$$2) x + y - 2z = 0 \text{ ва } x + y + z = 0. \quad 478. \quad 1) x - 8y + 9z = 21; \quad 2) x - y + 2z = 0 \text{ ва } x - y - z = 0.$$

$$479. \quad (1; -1; 2). \quad 480. \quad 3x - 4y + z = 11. \quad 481. \quad 2y - 5z + 10 = 0.$$

$$482. \quad \text{Текисликнинг тенгламаси: } x + y - 2z = 0; \text{ унинг } z = 0 \text{ текис-}$$

$$\text{лик билан ҳосил қилган бурчаги: } \cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0,8165; \quad \varphi = 35^\circ 15'.$$

$$483. \quad \frac{|a|}{\sqrt{3}}. \quad 484. \quad y = \pm z. \quad 485. \quad \frac{2abc}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}. \quad 486. \quad 2x + 2y +$$

$$+ z = 20 \text{ ва } 2x + 2y + z + 4 = 0. \quad 487. \quad 7x + 14y + 24 = 0. \quad 488. \quad 1) (5; 4; 0) \text{ ва } (7; 0; 2); \quad 2) (0; -4; 0) \text{ ва } (2; 0; 2). \quad 489. \quad x = -z + 3, \quad y =$$

$= -z + 5$; $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z}{-1}$. 490. $\frac{x-4}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$.
 491. $P\{0; 0; 1\}$. 492. 1) $P=i$; 2) $P=i+k$; 3) $P=j+k$. 493. $\frac{x+1}{2} =$
 $= \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-5}$; $\cos \alpha = 0,3 \sqrt{2}$; $\cos \beta = 0,4 \sqrt{2}$; $\cos \gamma = -0,5 \sqrt{2}$.
 494. $x=2$; $z=3$. 495. t секунддан кейин M нуқтанинг координаталари $x=4+2t$; $y=-3+3t$; $z=1+t$ бўлади. $\frac{x-4}{2} = \frac{y+3}{3} =$
 $= \frac{z-1}{1}$. 496. 1) $x=-2+t$; $y=1-2t$; $z=-1+3t$; 2) $x=1+t$,
 $y=1-t$; $z=2+t$. 497. 1) $\frac{x-a}{0} = \frac{y-b}{0} = \frac{z-c}{1}$, демак: $\begin{cases} x=a \\ y=b; \end{cases}$
 2) $z=c$ ва $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 498. $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 499. $\cos \varphi = \frac{11}{26}$. 501.
 Йўналтирувчи вектор $P = N \times N_1 = i + 3j + 5k$. Тўғри чизиқ тенг-
 ламалари: $\frac{x+4}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{5}$. 502. $3x + 2y = 0$, $z = 4$. 503. $0,3 \sqrt{38}$.
 504. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. 505. $(4; 2; 0)$, $(3; 0; 2)$, $(0; -6; 8)$. 506. $x=6-3z$,
 $y=-2z+4$; $\frac{x-6}{-3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z}{1}$; излари: $(6; 4; 0)$; $(0; 0; 2)$.
 507. $\frac{x}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z}{3}$. 508. $P\{0; 1; 0\}$. 509. $P\{1; 1; 2\}$; $\alpha = \beta =$
 $= \arccos \frac{1}{\sqrt{6}}$. 510. $y=-3$; $2x-z=0$. 511. Тенгламаларни
 каноник формага келтирамиз; $\frac{x}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-5}{2}$ ва $\frac{x}{2} =$
 $= \frac{y-4}{3} = \frac{z}{6}$; $\cos \varphi = \frac{20}{21} \approx 0,952$; $\varphi = 17^\circ 48'$. 512. Берилган
 тўғри чизиқ тенгламаларини $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-\frac{1}{3}}{1}$ кўринишда
 ёзиб, изланган тўғри чизиқ тенгламаларини ҳосил қила-
 миз: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{1}$. 513. $A(0; +1; 0)$, $\overline{AM}\{3; -1; 4\}$,
 $P\{1; 2; 2\}$, $d = \sqrt{17}$. 514. $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{6}}$. 515. Иккала тўғри чизиқ
 учун ҳам $Am + Bn + Cp = 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 = 0$, лекин би-
 ринчисининг $(-1; -1; 3)$ нуқтаси текисликда ётмайди, иккинчисини-
 нинг $(-1; -1; -3)$ нуқтаси эса текисликда ётади. 516. $y+z+$
 $+1=0$ (тўғри чизиқнинг тенгламаларини $\frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ кўри-
 нишда ёзиш мумкин). 517. $x-2y+z+5=0$. 518. $8x-5y+$
 $+z-11=0$. 519. $x+2y-2z=1$. 520. $\frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$; $17^\circ 33'$. 521.
 $(5; 5; -2)$. 522. $(6; 4; 5)$. 423. $(5; 5; 5)$. 524. $(3; 3; 3)$.

$$525. d = \frac{\vec{AA_1PP_1}}{|\vec{P \times P_1}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad 526. x + 2y - 5z = 0. \quad 527. \frac{x-2}{-9} = \frac{y-1}{8} = \frac{z}{11}. \quad 528. (1; 1; 2); 70^\circ. \quad 529. (-1; 2; 2), 30^\circ. \quad 530. (6; 2; 0). \quad 531. (3; -1; 1);$$

$$532. x - y - z = 0. \quad 533. (-1; 3; 1). \quad 534. \frac{x-1}{5} = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{-1}. \quad 535. \text{Тўғри чизиқлардаги нуқталар } O(0; 0; 0) \text{ ва } A(2; 2; 0); \text{ тўғри чизиқларнинг йўналишуви векторлари: } P(0; 0; 1) \text{ ва } P_1(2; -1; 2);$$

$$d = \frac{\vec{OAPP_1}}{|\vec{P \times P_1}|} = \frac{6}{\sqrt{5}}. \quad 536. 1) C(1,5; -2,5; 2), R=2,5 \sqrt{2}; 2) C(0;0;a),$$

$$R=a. \quad 537. (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 1. \quad 538. x^2 + y^2 + z^2 = 8x. \quad 539. x^2 + y^2 + z^2 - a(x+y+z) = 0. \quad 541. y^2 = 2ax - x^2. \quad 542. x^2 + y^2 = 2ax, x^2 + z^2 = 2ax, y^2 + z^2 = a^2. \quad 544. (1; 7; 2), R=4. \quad 545. (3Y - 2Z)^2 = 12(3X - Z). \quad 546. 1) y=0; x^2 = a^2 - az \text{ (парабола)}; 2) x=0; y^2 = a^2 - az \text{ (парабола)}; 3) z=h; x+y = \pm \sqrt{a(a-h)} \text{ — бу тўғри чизиқ } x+y=a \text{ га параллел (341-бет 63-чизмага қар.)}. \quad 547. \text{Цилиндр}$$

$$\text{сирт } 2x^2 + (y-z+2)^2 = 8, \text{ соянинг формаси } \frac{x^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{8} = 1 \text{ — эллипс. } \quad 548. 2x - y + 3z - 7 = 0. \quad 549. x^2 + (y+4)^2 + z^2 = 4. \quad 550. \frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{18} = 1. \quad 553. (x-z)^2 + (y-z)^2 = 4(x-z). \quad 554.$$

$$x=4, z \pm y = 2. \quad 555. \frac{x^2 + y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2}. \quad 556. h^2 x^2 = 2pz[h(y+a) - az].$$

$$557. (0; a; 0), \text{ йўналишуви айлана } z=a, x^2 + (y-a)^2 = a^2. \quad 558. \text{Учи } (0; 0; 0), \text{ йўналишуви — парабола } z=h; x^2 = 2hy. \quad 559. z=0 \text{ бўлганда } x = \pm a; y=h \text{ бўлганда } x^2 + y^2 = a^2; x = \pm c \text{ бўлганда}$$

$$z = \pm \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{h} y, \text{ тўғри чизиқлар, яъни сирт, } yOz \text{ текисликка параллел ва } ABC \text{ айланани ҳамда } Oх \text{ ўқини кесувчи тўғри чизиқнинг ҳаракати натижасида ҳосил бўлган (343-бет, 69-чизмага қарақин). } \quad 560. \text{ а) } z = x^2 + y^2; \text{ б) } \sqrt{y^2 + z^2} = x^2. \quad 561. 1) z = e^{-(x^2+y^2)};$$

$$2) z = \frac{4}{x^2 + y^2}. \quad 562. 9(x^2 + z^2) = 16y^2. \quad 563. x^2 + z^2 = z(y+a).$$

$$564. \text{ а) } x^2 + z^2 = y^2; \text{ б) } z^2 = x^2 + y^2. \quad 565. Oх \text{ ва } Oу \text{ ўқларини } Oз \text{ ўқи атрофида } 45^\circ \text{ га буриб, сирт ва текислик тенгламаларини } 2Z^2 = X^2 - Y^2, X = a\sqrt{2} \text{ кўринишга келтираемиз. Бундан кесим: } X = a\sqrt{2}, \frac{Y^2}{2a^2} + \frac{Z^2}{a^2} = 1; \text{ ярим ўқлари } a\sqrt{2} \text{ ва } a \text{ бўлган эллипс.}$$

$$566. \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad 567. \text{ а) } 3,84 \pi, \text{ б) } \frac{45}{4} \pi. \quad 568. \text{ а) } \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ (бир қавакли гиперболоид); б) } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1 \text{ (икки қавакли гиперболоид).}$$

$$570. \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{z}{6} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{y}{2}\right) \\ \frac{x}{4} - \frac{z}{6} = 3 \left(1 - \frac{y}{2}\right) \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{z}{6} = 1 - \frac{y}{2} \\ \frac{x}{4} - \frac{z}{6} = 1 + \frac{y}{2} \end{cases}$$

571. $x = \frac{a}{c} [(c-z) \cos t + (c+z) \cos (t+\alpha)]$, $y = \frac{a}{c} [(c-z) \sin t + (c+z) \sin (t+\alpha)]$; бундан: $\frac{x^2+y^2}{2a^2} - \frac{z^2}{c^2} (1 - \cos \alpha) = 1 + \cos \alpha$;
 $\alpha = 90^\circ$ бўлганда $\frac{x^2+y^2}{2a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; $\alpha = 120^\circ$ бўлганда $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{3z^2}{c^2} = 1$; $\alpha = 180^\circ$ бўлганда $\frac{x^2+y^2}{4a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (конус). 572. $x^2+y^2=az$.

574. $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=z \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=2z \\ x-y=2 \end{cases}$ 575. $\frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2+z^2}{a^2} = 1$.
 576. $x^2+y^2-z^2 = -2a^2$ (икки кавакли гиперболоид).

577. $x = -\frac{z^2+y^2}{4a}$. 578. $9x = \pm 13z$. 579. $4y = \pm 3z$. 580. 1) Маркази (0; 0; a) да ва радиуси $R=a$ бўлган сфера; 2) Oz ўқ атрофида айланма параболоид; 3) цилиндр; 4) гиперболоик параболоид; 5) конус; 6) параболоик цилиндр; 7) конус; 8) айланма параболоид; 9) конус; 10) цилиндр. 581. $\begin{cases} x+y=2+z \\ x-y=2-z \end{cases}$

$\begin{cases} x+y=3(z-2) \\ 3(y-x)=z+2 \end{cases}$ 582. $x^2+y^2=2az$ 583. $z = a - \frac{x^2+y^2}{2a}$.

584. $2y = \pm 3z$. 585. $\begin{cases} 3x+4y=24 \\ 3x-4y=12z \end{cases}$ $\begin{cases} z=0 \\ 3x=4y \end{cases}$ 586. 26.
 587. — 38. 588. 7. 589. $2a$. 590. 1. 591. $\sin(\alpha+\beta) \sin(\alpha-\beta)$.
 592. — 10. 593. $4a$. 594. — $2b^2$. 595. — $2x$. 596. — $4a^3$. 597. 144.
 598. — 72. 599. $(x-y)(y-z)(x-z)$. 600. 1. 601. $\sin(\beta-\alpha)$.

602. 10. 603. $y = x + 2$ гўғри чизикда ётади. 604. 1) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

2) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$. 605. 10. 606. amn . 607. $a(x-z)(y-z)(y-x)$.

608. $4 \sin \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2}$. 610. 1) $x_1=2$, $x_2=3$; 2) $x_1=0$; $x_2=-2$.

611. $x=5$; $y=-4$. 612. $x = \frac{4}{a}$; $y=1$. 613. $x=0$; $y=2$. 614. $x=m$; $y=2m-n$. 615. 5; 6; 10. 616. — 1; 0; 1. 617. $7k$; $8k$; $13k$.
 618. $5k$; — $11k$; $7k$. 619. $x=y=z=0$. 620. Система биргаликда эмас.

612. Аниқмас: $x = \frac{2+5z}{3}$, $y = \frac{5-7z}{3}$. 622. Система биргаликда эмас.

624. 2; — 1; — 3; 625. 1; — 1; 2. 626. $2k$; k ; — $4k$. 627. $x=y=z=0$. 628. — k ; $13k$; $5k$. 629. Аниқмас: $y=7-3x$, $z=18-7x$. 630. 1) $12+5i$; 2) a^2+b ; 3) $5-12i$; 4) $-2+2i$;

5) i ; 6) $1+i$. 634. 1) $2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$; 2) $2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$.

640. 1) $32i$; 2) 64 ; 3) $4(1-i)$; 4) $2(3+2\sqrt{2})i$; 5) $8i$.
 641. $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \cos^3 \alpha$; $\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$.

642. $\cos \frac{k\pi}{3} + i \sin \frac{k\pi}{3}$; $k=0, 1, \dots, 5$. 643. 1) $1, \frac{-1 \pm i \sqrt{3}}{2}$;
 2) $-i, \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$; 3) $\pm i, \frac{\pm \sqrt{3} \pm 1}{2}$; 4) $1+i; -1,36+0,365i$;
 $0,365-1,36i$. 644. 1) $\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt[6]{2} (\cos \varphi + i \sin \varphi)$; $\varphi=45^\circ, 165^\circ,$
 285° ; 3) $\pm 2(\sqrt{3} + i), \pm 2(-1 + i\sqrt{3})$. 645. 1) $-2, 1 \pm i\sqrt{3}$;
 2) $\pm 1 \pm i$. 646. 1) $\ln 2 + \pi i$; 2) $\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi i}{4}$; 3) $\frac{\pi i}{2}$; 4) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} +$
 $+ i \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; 5) $\frac{3}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} i$. 647. $\frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$.
 648. $\frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$. 650. 1) $\frac{7-24i}{25}$; 2) $2b(3a^2 - b^2)i$;
 651. 1) $4\sqrt[4]{2e^{\frac{\pi i}{4}}}$; 2) $2e^{\frac{2\pi i}{3}}$; 3) $\sqrt[4]{2e^{-\frac{\pi i}{4}}}$; 652. 1) $5(\cos 0 + i \sin 0)$;
 2) $e^{-\frac{\pi i}{2}}$; 3) $2e^{-\frac{3\pi i}{4}}$. 654. Маркази $C(z_0)$ ва радиуси $r=5$ бўлган
 доира ичидаги нуқталар. 655. 1) $8i$; 2) $512(1-i\sqrt{3})$; 3, -27 .
 657. 1) $\frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$; 2) $\cos \varphi + i \sin \varphi$, бунда $\varphi=0^\circ, 72^\circ, 114^\circ, 216^\circ, 288^\circ$.
 658. 1) $2, -1 \pm i\sqrt{3}$; 2) $\pm 2i; \pm \sqrt{3} \pm i$; 3) $\pm 3, \pm 3i$. 659. $\frac{\sin 2\pi x}{2 \sin x}$.
 660. 1) $-1, 2, 3$; 2) $5, \frac{-1 \pm i\sqrt{5}}{2}$. 661. 1) $x_1=3, x_2=4,$
 $x_3=-2$; 2) $x_1=1, x_2=-2, x_{3,4}=\pm i\sqrt{2}$; 3) $x_1=-2,$
 $x_{2,3}=\pm \frac{1}{3}$; 4) $x_1=1, x_{2,3}=\pm \frac{i}{2}$. 662. 1) $\Delta = \frac{49}{4} > 0, u_1=2,$
 $v_1=1, z_1=3, z_{2,3} = \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}$; 2) $\Delta=0, z_1=4, z_2=z_3=-2$.
 663. 1) $\Delta < 0, \varphi=60^\circ, z_1=4 \cos 20^\circ, z_{2,3}=4 \cos (20^\circ \pm 120^\circ)$.
 665.

α	β	$f(\alpha)$	$f(\beta)$	k	k_1	$\Delta\alpha$	$\Delta\beta$
1	2	-10	4	14	31	0,71	-0,13
1,71	1,87	-3,2	0,36	22	26	0,14	-0,01

$1,85 < x < 1,86$.

$$705. \quad x = 6; 5,1; 5,01; \dots \rightarrow 5 + 0; \quad x = 4; 4,9; 4,99; \dots \rightarrow 5 - 0.$$

$$x = -1; -1,9; -1,99; -1,999; \dots \rightarrow -2 + 0;$$

$$x = -3; -2,1; -2,01; -2,001; \dots \rightarrow -2 - 0.$$

$$707. \quad \delta = \frac{\varepsilon}{2}. \quad 708. \quad \delta = 0,01. \quad 712. \quad |x| > 2500,5 \text{ бўлганда. } 713. \quad |x| \geq 7,036$$

бўлганда. 715. $\lim_{x \rightarrow \infty} x$ Биринчи мисолда 1 га тенг, иккинчида — 1 га, тўртинчида 0 га, бешинчида 2 га, олтинчида 0 га, учинчи мавжуд эмас.

$$716. \quad \frac{x}{3} \left| \begin{array}{l} 3; 2,1; 2,01; \dots \rightarrow 2 + 0 \\ 3; 30; 300; \dots \rightarrow +\infty \end{array} \right.; \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{3}{x-2} = +\infty;$$

$$\frac{x}{3} \left| \begin{array}{l} 1; 1,9; 1,99; \dots \rightarrow 2 - 0 \\ -3; -30; -300; \dots \rightarrow -\infty \end{array} \right.; \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{3}{x-2} = -\infty.$$

$$717. \quad \frac{x}{2^x} \left| \begin{array}{l} 1; 0,1; 0,01; \dots \rightarrow +0 \\ 2; 2^{10}; 2^{100}; \dots \rightarrow +\infty \end{array} \right.; \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{2^x} = \infty.$$

$$x \left| \begin{array}{l} -1; -0,1; -0,01; \dots \rightarrow -0 \\ \frac{1}{2}; \frac{1}{2^{10}}; \frac{1}{2^{100}}; \dots \rightarrow 0 \end{array} \right.; \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{2^x} = 0.$$

$$718. \quad 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0; \quad 2) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2}{x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{2}{x} = -\infty;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} 3^x = \infty; \quad 4) \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x = 0; \quad 5) \lim_{x \rightarrow +0} \lg_{10} x = -\infty;$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 90^\circ - 0^\circ} \operatorname{tg} x = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 90^\circ + 0^\circ} \operatorname{tg} x = -\infty. \quad 724. \quad AB \rightarrow \infty.$$

$CB \rightarrow \infty, \angle BCD \rightarrow 0, \angle ACB \rightarrow 180^\circ.$

$$725. \quad x = 5; 4,1; 4,01; 4,001; \dots \rightarrow 4 + 0;$$

$$x = 3; 3,9; 3,99; 3,999; \dots \rightarrow 4 - 0;$$

$$x = -0,5; -1,4; -1,49; -1,499; \dots \rightarrow -1,5 + 0;$$

$$x = -2,5; -1,6; -1,51; -1,501; \dots \rightarrow -1,5 - 0.$$

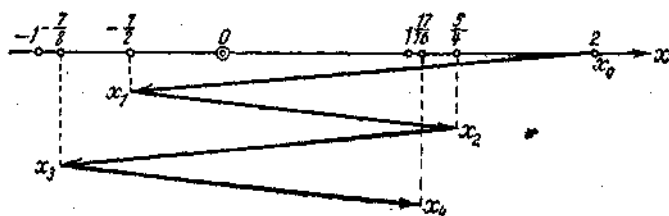
729. Фақат биринчи ўзгаришчигина $\lim_{n \rightarrow \infty} x = 1$ лимитга эга. Қолган мисолларда $\lim_{n \rightarrow \infty} x$ мавжуд эмас. Агар 39- қизмада координаталар

боши O ни 1 га чапга силжитиб, $-\frac{1}{2}$ ўрнига $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{8}$ ўрнига $+\frac{7}{8}$ ва ҳ. к. ёзилса, уни биринчи ўзгаришчигина ўзгариш графиги

деб қараса бўлади. Иккинчи ўзгаришчи $x = (-1)^n + \frac{1}{2^n}$ нинг ўзгариши $n=0, 1, 2 \dots$ бўлганда 40- қизма билан тасвирланган. 730. 1) 0;

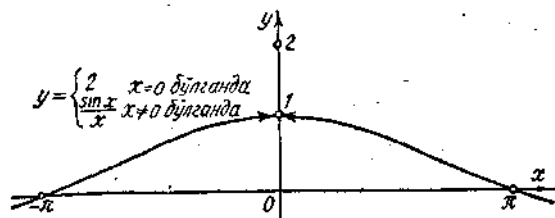
2) ∞ ; 3) ∞ ; 4) 0; 5) 2; 6) 0; 7) $a > 1$ бўлганда 0, $a=1$ бўлганда $\frac{1}{2}$,

$0 < a < 1$ бўлганда a . 733. 1. 734. 1) $-0,6$; 2) 1. 735. 4. 736. 1.



40. чизма.

737. $\frac{3}{2}$. 738. $\frac{1}{2}$. 739. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. 740. $\frac{2}{3}$. 741. $a > 0$
 бўлганда $-\frac{1}{2}$ ва $a < 0$ бўлганда ∞ . 742. $\frac{2}{3}$. 743. $\frac{m}{3}$.
 744. 1. 745. $-\frac{1}{2}$. 746. 1) $\frac{2}{3}$; 2) $-2,5$. 747. 0. 748. ∞ .
 749. -2 . 750. $-\frac{3}{2}$. 751. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 752. $\frac{1}{6}$. 753. $\frac{1}{4}$.
 754. -12 . 755. -1 . 756. $\lim_{x \rightarrow \pi+0} \frac{|\sin x|}{\sin x \sqrt{1 - \cos x}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.
 757. 2,5. 758. $\sqrt{3}$. 759. -4 . 760. 2. 761. $-\frac{1}{56}$.
 762. $-\sqrt{2}$. 763. 4. 764. $\frac{1}{3}$. 765. 1. 766. $\frac{1}{4}$. 767. 2. 768. $6\sqrt{2}$.
 769. $2 \cos x$. 770. 1) 1; 2) $-\frac{1}{2}$. 771. $\frac{1}{2}$. 772. $\frac{1}{2}$. 773. $\frac{1}{3}$.
 774. 8. 775. $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{2} |\sin x|}{x} = -\sqrt{2}$. 776. 4. 777. $\frac{m^2}{2}$. 778. 3.
 779. $\frac{1}{4}$. 780. 1) $-2 \sin x$; 2) $-\frac{1}{2}$. 781. 1. 782. 1,5. 783. $\frac{1}{2}$.
 784. 1. 785. $\frac{1}{2}$. 786. $\frac{1}{4}$. 787. -3 . 788. $\frac{2}{\pi}$. 789. -2 .
 790. $-\frac{1}{4}$. 791. $\frac{1}{2}$. 792. 0. 793. $\frac{1}{2}$. 794. $-\frac{1}{2}$. 795. -1 .
 796. 1) $\frac{1}{20}$; 2) 3. 797. 1) $\frac{3}{4}$; 2) 2 {1) мисолда $x = t^{13}$ деб. 2) мисолда эса $1 + 2x = t^4$ деб олиш керак}. 798. $-a$. 799. 1) -1 ; 2) $-0,2$.
 800. 1) 3; 2) $\frac{3}{2}$. 801. 1) 1; 2) $-\frac{1}{2}$. 802. 1) -2 ; 2) $-0,1$. 803. 1) $-2,5$;
 2) 1,5. 804. 1) $-\sqrt{2}\pi$; 2) -1 . 805. 1) 2; 2) 3. 806. 1) 4; 2) 1; 3) 3.
 807. 2-тарғибли. 809. $a \rightarrow 0$ бўлганда $(1+a)^3 - 1 \approx 3a$. 810. 1) 2,5;
 2) $\frac{a}{b}$; 3) 1,5. 811. 2 ва 3. 812. 1) 2; 2) 3; 3) 1. 815.
 1) $x = 0$ бўлганда; 2) $x = \frac{2n-1}{2}\pi$ бўлганда; 3) $x = \pm 2$ бўлганда.



41- чизма.

816. $x = 2$ бўлганда биринчи учта шарт бажарилади ва тўртинчи шарт бажарилмайди. 817.

$$1) y = \begin{cases} -1, & x < -1 \text{ бўлганда} \\ 1, & x > -1 \text{ бўлганда} \end{cases}, \quad 2) y = \begin{cases} x-1, & x < -1 \text{ бўлганда} \\ x+1, & x > -1 \text{ бўлганда} \end{cases}$$

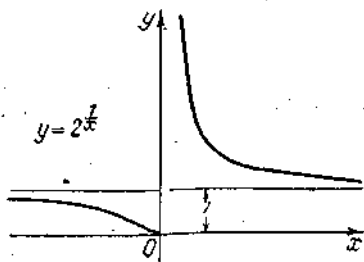
$x = -1$ бўлганда функциялар 1-тур узилишга эга (узлуксизликнинг фақат иккинчи шартига бажарилади). 818. $x = 0$ бўлганда тўртинчи шартга бажарилмайди (41- чизма). 819. $x = 0$ бўлганда узилиш. $\lim_{x \rightarrow +0} y = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -0} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 1$ (42- чизма). 820. $x = \pm 2$ бўлганда узилишлар. 821. 1) $x = 0$ бўлганда биринчи тур узилиш, бунда

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -0} y = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{1}{2} \quad (43- \text{чизма});$$

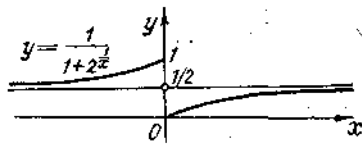
$$2) x = a \text{ бўлганда биринчи тур узилиш, бунда } \lim_{x \rightarrow a-0} y = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} y = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0; \quad 3) y = \frac{x^2}{2}, \quad x > 1 \text{ бўлганда ва } -\frac{x^2}{2}, \quad x < 1 \text{ бўлганда; } x = 1 \text{ бўлганда 1 тур узилиш, шунинг билан}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} y = \frac{1}{2}. \quad 822. \quad x^2 - y^2 = 0 \text{ тенглама } y \text{ ни } x$$



42- чизма.



43- чизма.

нинг чексиз кўл бир қийматли функциялари сифатида аниқлайди. Улардан икkitаси: $y = x$ ва $y = -x$ узлуксиз. Қолганлари эса (узилишга эга бўлганлари) Ох ўқнинг баъзи жойларида (участма-

ларида) $y = x$ тенглама билан, баъзиларида $y = -x$ тенглама билан аниқланади, $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ нуқталарда узилишга эга бўлган жикфт функцияни

$$y = \begin{cases} -|x|, & 2n-1 < x < 2n \text{ бўлганда} \\ +|x|, & 2n < x < 2n+1 \text{ бўлганда,} \end{cases}$$

кўринишда тоқ функцияни

$$y = \begin{cases} -x, & 2n-1 < x < 2n \text{ бўлганда} \\ +x, & 2n < x < 2n+1 \text{ бўлганда} \end{cases}$$

кўринишда аниқлаш мумкин, бунда $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ 823. $x = -2$ бўлганда, иккинчи тур узилиш $\lim_{x \rightarrow -2-0} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2+0} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$. 824. $x = 0$ бўлганда узлуксизликнинг фақат

тўртинчи шarti бажарилмайди; $x = \pm 2$ бўлганда учинчи ва тўртинчи шартлар бажарилмайди. 825. Узилиш нуқталари: 1) $x = 0$; 2) $x = 2$; 3) $x = 0$; 4) $x = 0$; 5) $x = \pm 2$ ва $x = 0$. 826. Чексиз кўп, улардан: 1) $y = \sqrt{4-x^2}$ ва $y = -\sqrt{4-x^2}$ лар узлуксиз; 2) нэланган узлукли функция:

$$y = \begin{cases} -\sqrt{4-x^2}, & |x| < 1 \text{ бўлганда} \\ +\sqrt{4-x^2}, & 1 < |x| < 2 \text{ бўлганда.} \end{cases}$$

827. $x = 0$ ва $y = 1$. 828. 1) $x = 0$ ва $y = x$; 2) $x = -1$ ва $y = x - 1$; 3) $y = 1$. 829. 1) $x = 0$, $y = -1$; 2) $x = 0$ ва $y = x - 1$;

3) $x = -\frac{n}{m}$ ва $y = \frac{a}{m}$. 830. 1) $x = -\frac{1}{2}$ ва $y = -2$; 2) $y = x$;

3) $y = -x$. 831. 1) $y = \pm x$; 2) $x + y = -a$; 3) $y = x \pm \pi$; 4) $y = -\frac{\pi}{4}$. 832. 1) $y = 0$, 2) $y = \pm 2x$; 3) $x = 0$ ва $y = x$. 833. Пара-

болалар: 1) $y = \frac{x^3}{3}$; 2) $y = x^2$. 834. 1) $x = 0$ ва $y = 1$; 2) $x = 0$ ва

$y = -x$. 835. 1) $x = -2$, $y = \frac{1}{2}$; 2) $x = 1$ ва $y = -\frac{x+1}{2}$; 3) $x = 2$, $x = -2$, $y = 1$ (44- чизма).

4) $x = 1$, $x = -1$ ва $y = -x$.

836. $\frac{1}{e^3}$. 837. 1) $e^{-\frac{1}{3}}$; 2) e^4 . 838.

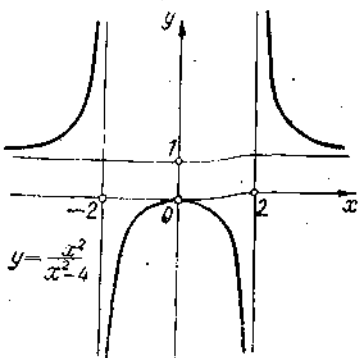
1) e^2 ; 2) e^{-1} . 839. 1) e^{-1} ; 2) e^{-2} .

840. 1) 3; 2) e^3 . 841. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 842. 1)

1; 2) -1 ; 3) $2 \ln a$. 843. 3 ва

4. 844. 1) e^0 ; 2) $\frac{1}{e\sqrt{e}}$. 845. 1)

$\frac{1}{e^3}$; 2) -3 . 846. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 847. 1) $\frac{1}{x}$;



44- чизма.

$$\begin{aligned}
& 2) -2. \quad 848. \quad 1) 3x^2; \quad 2) 4x^3; \quad 3) \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad 4) \cos x; \quad 5) -\frac{1}{x^2}; \quad 6) \\
& -\frac{1}{2x\sqrt{x}}; \quad 7) -\frac{2}{x^3}; \quad 8) \frac{1}{\cos^2 x}; \quad 9) -\frac{3}{x^4}; \quad 10) \frac{1}{\sqrt{1+2x}}; \quad 11) -\frac{3}{(3x+2)^2}; \\
& 12) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \quad 849. \quad 1) (x-2)^2; \quad 2) \frac{b}{a}. \quad 850. \quad 1) (x^2-1)^2; \quad 2) x^3-2x. \\
& 851. \quad 1) 1+\frac{1}{\sqrt{x}}; \quad 2) 1-\sqrt{\frac{a}{x}}. \quad 852. \quad 1) -\frac{30}{x^4}; \quad 2) -\frac{x^2+2x+3}{x^4}. \\
& 853. \quad 1) \left(1-\frac{1}{x^3}\right)^2; \quad 2) 3\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right). \quad 854. \quad 1) \frac{2}{\sqrt[3]{x^3}}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}; \\
& 2) \frac{2}{3x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right). \quad 855. \quad 1) \frac{1-x}{x^4}; \quad 2) \frac{2}{x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right). \\
& 856. \quad 1) 2\sin^2 \frac{x}{2}; \quad 2) -\operatorname{tg}^2 x. \quad 857. \quad 1) x(2\cos x - x\sin x); \\
& 2) \frac{x(\sin 2x - x)}{\sin^2 x}. \quad 858. \quad 1) -\frac{x\sin x + 2\cos x}{x^3}; \quad 2) \frac{2x}{(x^3+1)^2}; \\
& 859. \quad 1) \frac{1}{(1-4x)^2}; \quad 2) \frac{4x - \sin 2x}{4x\sqrt{x}\cos^2 x}. \quad 860. \quad 1) \frac{1}{1-\sin x}; \\
& 2) \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}. \quad 861. \quad 1) gt; \quad 2) 2a\sin^2 \frac{t}{2}. \quad 862. \quad 1; 0; 4. \quad 863. \quad 8, 25. \\
& 864. \quad -90. \quad 865. \quad 1) -6bx(a-bx^2)^2; \quad 2) \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+1\right). \\
& 866. \quad 1) \frac{2x-1}{2x^6}; \quad 2) \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right). \quad 867. \quad 1) 2\cos^2 \frac{x}{2}; \quad 2) -\operatorname{ctg}^2 x. \\
& 868. \quad 1) x(2\sin x + x\cos x); \quad 2) \frac{x(\sin 2x + x)}{\cos^2 x}. \quad 869. \quad 1) \frac{\cos x - 2x\sin x}{2\sqrt{x}}; \\
& 2) \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} + \frac{2}{t^2}. \quad 870. \quad 1) \frac{(x^2+1)^2}{x^4}; \quad 2) \frac{4x}{(x^2+1)^2}. \\
& 871. \quad 1) -\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2; \quad 2) -\frac{2+\sin x}{(1+2\sin x)^2}. \quad 872. \quad -\frac{1}{3}. \\
& 873. \quad -1; \quad -\frac{1}{9}; \quad -\frac{1}{25}. \quad 874. \quad 1) 6\cos 6x; \quad 2) b\sin(a-bx). \\
& 875. \quad 1) \frac{1}{2}\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right); \quad 2) -2\sin \frac{x}{3}. \quad 876. \quad 1) -20(1-5x)^3; \\
& 2) \frac{2}{\sqrt[3]{4+3x}}. \quad 877. \quad 1) \frac{10x}{(1-x^2)^2}; \quad 2) -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; \quad 3) -2\operatorname{tg} 4x\sqrt{\cos 4x}. \\
& 878. \quad \frac{2\sin^2 x}{\sqrt{2x-\sin 2x}}. \quad 879. \quad 4\sin^3 x \cos x. \quad 880. \quad 1) \sin 2x; \quad 2) -\sin 2x; \\
& 3) 2\operatorname{tg} x \sec^2 x. \quad 881. \quad \frac{3}{\sqrt{2}}\sin 2x \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right). \quad 882. \quad 3\operatorname{tg}^4 x. \\
& 883. \quad \frac{-\sin 2x}{4\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}}. \quad 884. \quad \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}. \quad 885. \quad \pm(\sqrt{1-\sin 2x} +
\end{aligned}$$

$+ \sqrt{1 + \sin 2x}$; $+$ иппора $\cos 2x > 0$ бұлганда; $-$ иппора $\cos 2x < 0$,
да, $\cos 2x = 0$ бұлганда эса y' мавжуд эмас ($\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4} - 0} y' = \sqrt{2}$).

- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4} + 0} y' = -\sqrt{2}$). 886. $\frac{20 \sin 4x}{(1 + \cos 4x)^6}$. 887. $= \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{3}}{\sin^2 \frac{x}{3}}$.
888. $\sin x (1 + \sec^2 x)$. 889. $\frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$. 890. $\frac{1 - x}{x^2 \sqrt{2x - 1}}$. 891. $-\sin \frac{2t}{a}$.
892. 1) $\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$; 2) $\frac{dr}{d\varphi} = \frac{2 \sin^2 2\varphi}{\sqrt{2\varphi + \cos^2 \left(2\varphi + \frac{\varphi}{4}\right)}}$.
893. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $f'(\pi) = 0$, $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
894. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 895. $\frac{4 \cos^2 2x}{\sqrt{4x + \sin 4x}}$. 896. $\frac{x(2 - 3x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}$. 897. $-\sin 4x$.
898. $-\frac{2 \sin 6x}{\sqrt{(1 + \cos 6x)^3}}$. 899. 1) $\sec^2 x$; 2) $3x^2 \sin 2x^3$.
900. $\frac{4 \cos 2x}{(1 - \sin 2x)^2}$. 901. $\frac{ds}{dt} = \frac{\sin^2 \frac{t}{4}}{2 \sqrt{\frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2}}}$. 902. $\frac{dr}{d\varphi} = \frac{1}{2} \cos \varphi$.
903. $-\frac{2(3x + 1)}{x^3 \sqrt{4x + 1}}$. 904. $-\sqrt{\frac{\pi}{6}}$. 905. $k = \operatorname{tg} \alpha = \pm 4$.
906. $y = 8 - 4x$, $x - 4y = 2$. 907. $y = x + \frac{2}{3}$. 908. $y = 0$ ва
 $y = \pm \frac{1}{2} (3x - 1)$. 909. $y = -\frac{x}{2} + 2$. 910. $y = \pi - x$. 911. 45° ва
 135° . 912. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{4}{3}$. 913. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sqrt{5}$; 2) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{3}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$.
915. $y = x^2 - 3x + 4$. Параметр b $y' = 2x + b = 4 + b = 1$ шартдан,
с эса (2; 2) нинг уринма нуқта бўлишидан топилади. 916. $y =$
 $= -4x + 8$, $y = -\frac{1}{4}x - 2$; $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{15}{8} \approx 62^\circ$. 917. $y = 4x$,
 $y = -4x + 16$. 918. $x \pm 4y = 8$. 919. $y = \pm (3x + 8)$ ва $y = 0$.
920. $\frac{4}{\sqrt{17}}$. 921. $40^\circ 54'$ ёки $139^\circ 6'$. 922. $(-2; -4)$. 923. $\left(\frac{1}{2}; \frac{17}{4}\right)$.
924. 1; 1; $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. 925. $11^\circ 20'$ ва $7^\circ 7'$. 926. $y' = -1$, $y' \mp 1$.
927. $y' = -\frac{1}{2}$; $y' = \frac{1}{2}$. 928. $y = x$ ва $y = -x$. 929. $y = \pm \frac{x - \pi}{\sqrt{2}}$;
 $109^\circ 30'$. 930. $x = 0$. 931. $x = 2$. 932. $x = 0$. 933. $x = 2$.

934. $y - 1 = \pm \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. 935. $x = -1$. 936. $y = \pm 4x$; 28°
 937. 1) $\ln x + 1$; 2) $-\frac{\ln x}{x^2}$; 3) $\frac{0,4343}{x}$. 938. 1) $\frac{(x+1)^2}{x^3}$; 2) $\frac{2(x+1)}{x(x+2)}$.
 939. 1) $-\operatorname{tg} \frac{x}{2}$; 2) $\operatorname{ctg} x \cos^2 x$. 940. $\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}$. 941. $\frac{1}{4a^2x}$.
 942. $\frac{2}{x(1-x^2)}$. 943. $\frac{1}{\cos x}$. 944. $\frac{1}{1-4x^2}$. 945. $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.
 946. $\frac{1}{2+\sqrt{x}}$. 947. 1) $-\frac{2\operatorname{ctg}^2 x}{\sin x}$; 2) $\frac{2}{x-ax^2}$. 948. $y = x - 1$.
 949. $\left(\sqrt{e}; \frac{1}{2}\right)$ нуқтада уринади. 950. 1) $2x + 3^x \ln 3$; 2) $(2x + x^2 \ln 2) 2^x$; 3) $x(2+x)e^x$. 951. 1) $a \sin x \cos x \ln a$; 2) $-2xe^{-x^2}$;
 3) $2x(1-x)e^{-2x}$. 952. $e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$. 953. $\frac{1}{2} e^{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.
 954. $\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$. 955. $\frac{1}{a} e^{\frac{x}{a}} \left(\cos \frac{x}{a} - \sin \frac{x}{a}\right)$. 956. 1) $-2e^{-x} \sin x$;
 2) $-\frac{x}{1+x}$. 957. $\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$. 958. $2a(e^{2ax} - e^{-2ax})$. 959. $-\ln a$.
 960. $26^\circ 35'$. 962. 1) $x^x (\ln x + 1)$; 2) $x^{\sin x} \left[\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right]$.
 963. $-\operatorname{tg} x \sin^2 x$. 964. $-\frac{1}{2\sqrt{x^2-x}}$. 965. $-\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$.
 966. $\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$. 967. $\frac{1}{x(1-x^2)}$. 968. $\operatorname{ctg} 2x$. 969. $\frac{1}{1-\sin 2x}$.
 970. $\frac{\operatorname{tg} x}{1+\cos x}$. 971. $-\frac{x}{\sqrt{ax+x^2}}$. 972. $-\frac{x}{a} e^{-\frac{x}{a}}$.
 973. $\frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$. 974. $-\frac{4}{(e^x - e^{-x})^2}$. 975. $\frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}+1}}$.
 976. $\frac{2}{e^{4x}+1}$. 977. $x^{\frac{1}{x}} \frac{1-\ln x}{x^2}$. 978. 16. 979. $y = -\frac{x}{2}$.
 980. $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. 981. $\frac{x^2}{1+x^2}$. 982. $-\frac{1}{\sqrt{x-4x^2}}$. 983. $\frac{a}{|a|\sqrt{a^2-x^2}}$.
 984. $\frac{a}{a^2+x^2}$. 985. $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$. 986. $-\frac{1}{1+x^2}$. 987. 1) $2\sqrt{1-x^2}$;
 2) $\frac{3e^{3x}}{\sqrt{1-e^{6x}}}$. 988. $\frac{1}{1-x^4}$. 989. $\frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$. 990. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a}$.
 991. $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$. 992. $\frac{1}{2x\sqrt{6x-1}}$. 993. 1) $\frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}$;
 2) $\frac{1}{x^2+x^4}$. 994. $2e^x \sqrt{1-e^{2x}}$. 995. $\operatorname{arc} \cos x$. 996. $\frac{2x}{1-e^{2x}}$.

997. $\sqrt{\frac{4}{t}-1}$. 998. $\sqrt{\frac{2}{x}-4}$. 999. $\frac{\pi}{4}-1$. 1000. 1) $\operatorname{sh} 2x$;
2) $\operatorname{th}^2 x$; 3) $\sqrt{\operatorname{ch} x+1}$. 1001. 1,5. 1002. 1) $\operatorname{th} x$; 2) $-\frac{4}{\operatorname{sh}^2 2x}$.
1003. 1) $\operatorname{cth}^2 x$; 2) $\frac{2}{\operatorname{sh} 2x}$. 1004. 1) $\frac{1}{\operatorname{ch} x}$; 2) $4 \operatorname{sh} 4x$.
1005. $x+1, 175y=2, 815a$. 1006. $y=3, 76x+3, 89$.
1008. 1) $\frac{1-x}{x^2 \sqrt{x^2-1}}$; 2) $\operatorname{tg}^3 x$. 1009. $\frac{\sqrt{4x-1}}{2x}$. 1010. $\frac{dx}{dt} =$
 $= \frac{2e^t(e^t-1)}{e^{2t}+1}$. 1011. $\frac{x}{\sqrt{x^2-4x}}$. 1012. $\frac{ds}{dt} = \operatorname{tg}^5 t$. 1013. $\frac{\pi a}{2}$.
1014. 1) $\frac{x^2+a^2}{x(x^2-a^2)}$; 2) $2 \cos(\ln x)$. 1015. $\frac{1}{15}$. 1017. $-\frac{1}{3a}$.
1021. 1) $2 \cos 2x$; 2) $2 \operatorname{tg} x \sec^2 x$; 3) $\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$. 1022. 1) $-4 \sin 2x$;
2) $-\frac{24}{x^5}$; 3) $-(x \cos x + 3 \sin x)$. 1023. 1) $-\frac{1}{x^5}$; 2) $e^{-t}(3-t)$;
3) $\frac{2a(3x^2-a^2)}{(x^2+a^2)^3}$. 1024. $-\frac{2}{\frac{3}{2}}$. 1025. 1) $\left(-\frac{1}{a}\right)^n e^{-\frac{x}{a}}$;
2) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$; 3) $\frac{(2-t)^2}{2^n \sqrt{x^{2n-1}}}$. 1026. 1) nl ;
2) $\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$; 3) $2^{n-1} \cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$. 1028. 1) $-2e^x \sin x$;
2) $xa^x(x^2 \ln^2 a + 6x \ln a + 6)$; 3) $2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x$.
1029. 1) $2e^{-x}(\sin x + \cos x)$; 2) $\frac{2}{x}$; 3) $x \sin x - 3 \cos x$.
1030. $f''(x) = \frac{x+3a}{a^3} e^{\frac{x}{a}}$; $f^{(n)}(x) = \frac{x+na}{a^n} e^{\frac{x}{a}}$; $f^{(n)}(0) = \frac{n}{a^{n-1}}$.
1031. $1, m, m(m-1); m(m-1)(m-2), \dots, m(m-1) \dots (m-n+1)$.
1035. 1) $2e^{-x^2}(2x^2-1)$; 2) $\frac{2 \operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}$; 3) $\frac{x}{(4-x^2)^{3/2}}$.
1036. 1) $a^x(\ln a)^n$; 2) $(-1)^n \frac{2^n \cdot n!}{(1+2x)^{n+1}}$; 3) $-2^{n-1} \cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$.
1037. $\frac{\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{7\sqrt{3}}{36}$. 1038. 1) $e^x(x^3+9x^2+18x+6)$;
2) $\frac{1}{a^3}\left(6a^3 \cos \frac{x}{a} - 6ax \sin \frac{x}{a} - x^2 \cos \frac{x}{a}\right)$; 3) $-x f^{IV}(a-x)$.
1041. Лейбниц формуласига кўра $f^{(n)}(x) = x^2 e^{-\frac{x}{a}} \left(-\frac{1}{a}\right)^n +$
 $+ n \cdot 2x e^{-\frac{x}{a}} \left(-\frac{1}{a}\right)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 2e^{-\frac{x}{a}} \left(-\frac{1}{a}\right)^{n-2}$. Бундан

$$f^{(n)}(0) = \frac{n(n-1)}{a^{n-2}} (-1)^{n-2} = \frac{n(n-1)}{a^{n-2}} (-1)^n. \quad 1042. \quad f'(x) =$$

$$= -2xe^{-x^2} = -2xf(x). \quad \text{Сўнгра Лейбниц формуласига кўра,}$$

$$f^{(n)}(x) = [-2xf(x)]^{(n-1)} \quad \text{ва ҳоказо.} \quad 1044. \quad 1) -\frac{x}{y}; \quad 2) \frac{p}{y}; \quad 3) \frac{b^2x}{a^2y}.$$

$$1045. \quad 1) -\frac{2x+y}{x+2y}; \quad 2) \frac{2x-y}{x-2y}. \quad 1046. \quad 1) -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}; \quad 2) \frac{e^{-x}+y}{e^y+x}.$$

$$1047. \quad -\frac{e^x \cos y + e^{-y} \sin x}{e^x \cos y + e^{-y} \cos x}. \quad 1048. \quad \frac{1}{y^2} + 1. \quad 1049. \quad \frac{1}{3}.$$

$$1050. \quad 1) -\frac{a^2}{y^3}; \quad 2) \frac{2(y-a)}{(x-b)^2}; \quad 3) \frac{m(m+n)y}{n^2x^2}. \quad 1051. \quad -\frac{b}{a^2}.$$

$$1052. \quad y = 3 - x \quad \text{ва} \quad y = x - 1. \quad 1053. \quad \left(\frac{40}{9}; \frac{40}{9}\right) \quad \text{ва} \quad (40; 40).$$

$$1054. \quad 1) \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1; \quad 2) y_{y_0} = p(x+x_0). \quad 1055. \quad x+y = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

$$1056. \quad \arctg 3. \quad 1057. \quad 1) -\frac{b^2x}{a^2y}; \quad 2) \frac{x^2-ay}{ax-y^2}. \quad 1058. \quad 1) -\frac{a^2}{y^3};$$

$$2) -\frac{R^2}{(y-\beta)^3}; \quad 3) -\frac{2(1+\beta^2)}{y^5}; \quad 4) -\frac{6a^2}{(x+2y)^3}. \quad 1059. \quad 2y = -x-3 \quad \text{ва}$$

$$2y = x+1. \quad 1060. \quad x+2y = 4\sqrt{2}. \quad 1061. \quad 1 - \frac{1}{e}. \quad 1062. \quad e(e-1).$$

$$1063. \quad \pm 2. \quad 1064. \quad 1) dy = nx^{n-1} dx; \quad 2) dy = 3(x-1)^2 dx.$$

$$1065. \quad 1) dy = \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}; \quad 2) ds = gt dt. \quad 1066. \quad 1) dr = 4 \sin^2 \varphi d\varphi;$$

$$2) dx = -\frac{2 dt}{t^3}. \quad 1067. \quad 1) \sin 2t dt; \quad 2) \sin u du. \quad 1068. \quad 1) -\frac{a^2 dx}{x^2(a^2+x^2)};$$

$$2) \frac{(a+1)da}{a}; \quad 3) -\frac{1}{2} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi; \quad 4) -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}. \quad 1070. \quad 1) 0,04;$$

$$2) 0,05. \quad 1071. \quad 1) dV = 3x^2 dx = 0,75; \quad \frac{dV}{x^3} = 0,006 \quad \text{ёки} \quad 0,6\%; \quad 2) df = \frac{3bds}{8f}.$$

$$1072. \quad 1) dx < \frac{0,1 \cdot 2}{5x\sqrt{x}} < 0,005; \quad 2) \text{радиусни хато } \frac{1}{3} \% \quad \text{дан ошмай-}$$

$$\text{диган қилиб ўлчаш керак.} \quad 1073. \quad 1) S = \pi R^2, \quad \Delta S \approx dS = 2\pi R dR;$$

$$2) V = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad \Delta V \approx dV = 4\pi R^2 dR. \quad 1074. \quad 1) \frac{(2-x)dx}{x^3};$$

$$2) b \sin(a-b\varphi) d\varphi; \quad 3) -\frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}}. \quad 1075. \quad 1) -\operatorname{tg} x dx; \quad 2) \frac{du}{2u\sqrt{4u-1}};$$

$$3) -2e^{-2t} dt. \quad 1076. \quad 1) \frac{dx}{2\sqrt{x}}; \quad 2) \operatorname{tg}^2 \alpha d\alpha; \quad 3) b(1+e^{-bt}) dt.$$

$$1077. \quad 1) \Delta y = 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3 = -0,2376, \quad dy = 3x^2 dx =$$

$$= -0,24; \quad 2) dl = -\frac{14}{\pi} \approx 4,46 \text{ см}; \quad 3) |dx| < \frac{x^2 \cdot 0,1}{4} < 0,006.$$

$$1078. \quad 1) 4y^2 = x^3; \quad 2) y^2 = x \left(\frac{x}{3} - 1\right)^2. \quad 1079. \quad 1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

2) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$. 1080. 1) $x^2 - y^2 = 1$; $y = \frac{1}{1+x^2}$. 1082. $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$. 1083. $y = x + \frac{(4-\pi)a}{2}$. 1084. $x + y = \frac{a}{\sqrt{2}}$.
1085. 1) $-\frac{1}{a \sin^3 t}$; 2) $\frac{t^2+1}{4t^3}$; 3) $-\frac{1}{4a \sin^3 \frac{t}{2}}$. 1086. 1) $y = -x^2 - 2x$;

2) $(y+2)^3 = x^3$. 1087. $x + y = a \left(\frac{3\pi}{2} + 2 \right)$. 1088. $y = x - \frac{a\pi}{2\sqrt{2}}$.
1089. 1) $-\frac{1}{4 \sin^3 t}$; 2) $\frac{3t^2-1}{4t^3}$; 3) $\frac{3}{4et}$. 1090. $x = at - \frac{g^2 t}{2}$; $\frac{dx}{dt} =$
 $= a - gt$; $\frac{d^2x}{dt^2} = -g$; $t = \frac{a}{g}$ орқали, $x = \frac{a^2}{2g}$ (юқори нуқта).

1091. $\frac{dx}{dt} = t^2 - 4t + 3$; $t_1 = 1$; $t_2 = 3$; 1095 $v = \frac{dx}{dt}$, $\frac{dv}{dt} = w$; ҳадма-
ҳад кўпайтирамиз. 1096. $2v \frac{dv}{dt} = 2a \frac{dx}{dt} = 2av$; бундан $w = \frac{dv}{dt} = a$.

1097. $x = 10 + 20t - \frac{gt^2}{2}$; $\frac{dx}{dt} = 20 - gt$; $\frac{d^2x}{dt^2} = -g$. Энг юқори
нуқтада $\frac{dx}{dt} = 0$; $t = \frac{20}{g} \approx 2,04$ сек. 1098. $\frac{dh}{dt} = \frac{a}{\pi h (2R - h)} = \frac{a}{\pi r^2}$.

1099. $\frac{dx}{dt} = k(A - x)$. 1100. $d(\omega^2) = 2\omega d\omega$, $\frac{d(\omega^2)}{d\varphi} = 2\omega \frac{d\omega}{d\varphi} =$
 $= 2\omega \frac{d\omega}{dt} \frac{dt}{d\varphi} = 2\omega \epsilon \frac{1}{\omega} = 2\epsilon$. 1101. Функциянинг илдиэлари 1; 3.

$f'(x) = 2x - 4$ ҳосиланинг илдиэи 2 га тенг; $1 < 2 < 3$. 1102. Тат-
биқ қилиб бўлмайди, чунки $x = 0$ бўлганда ҳосила мавжуд эмас.
1103. Чунки $x = 0$ синиш нуқтаси (уринма иккита). 1104. (AB) ва-
тарнинг қиялиги $k = \frac{9-1}{3+1} = 2$; $f'(x) = 2x = 2$, $x = 1$; $x = 1$
нуқтада уринма ватарга параллел. 1105. $f(b) = b^2$, $f(a) = a^2$,
 $f'(c) = 2c$; буни Лагранж формуласига қўйсак, $b^2 - a^2 = (b-a) \cdot 2c$;
бундан $c = \frac{b+a}{2}$. 1106. $c = \frac{9}{4}$. 1108. $x = \frac{\pi}{2}$ бўлганда ёй устида

синиш нуқтаси бор, бу нуқтада функция ҳосилага эга эмас. 1109.
[0; 2] сегментнинг ички нуқталарида функция узлуксиз ва ҳосилага
эга, аммо унинг ўнг учида узилишга эга. 1110. $s = f(t)$ ҳаракат
тенгласи, t_1 ва t_2 эса ҳаракатнинг бошланғич ва охири момент-
лари бўлсин. Лагранж теоремасига асосан t_1 ва t_2 орасида шундай
 t_3 топиладики, $\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = f'(t_3)$ бўлади, яъни t_3 моментда

$40 = f'(t_3) = \frac{ds}{dt}$. 1111. $\Phi'(x) = \begin{vmatrix} 1 & f'(x) & 0 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix}$. $\Phi(b) = \Phi(a) = 0$ ва

(a, b) ораликда $\Phi'(x)$ ҳосила мавжуд бўлгани учун, Ролль теорема-
сига асосан a ва b орасида $x = c$ топиладики, унда $\Phi'(c) = 0$ бў-

лади, яъни $\begin{vmatrix} 1 & f'(c) & 0 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix} = 0$; бундан $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

$\Phi(x)$ функция ΔAPB нинг иккиланган юзидан иборат, бунда $P - AB$ ёйнинг ихтиёрий нуқтаси. 1112. $\frac{b^2 - a^2}{b^2 - a^2} = \frac{3c^2}{2c}$; $c = \frac{2(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)}$.

1113. Уринманинг бурчак коэффициенти $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{\varphi'(t)}$, $t = c$ нуқтада

эса $k = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$. Кесувчининг бурчак коэффициенти $k_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$. Коши теоремасига асосан a ва b лар орасида $t = c$

топиладики, унда $k_1 = k$, яъни уринма ватарга параллел бўлади. Шунинг билан бирга $\varphi'(t) \neq 0$ бўлгани учун $\varphi(a) < \varphi(c) < \varphi(b)$ (ёки аксинча), ва уриниш нуқтаси ёйнинг ички нуқтаси. 1117. $c =$

$= \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}$. 1118. 1) $\sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}$; 2) $\sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}}$; 3) $\frac{1}{\ln 2}$.

1119. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{15}{4}} \approx 2,4$. 1120. $y = |x - 1|$ функция $x = 1$

бўлганда ҳосилага эга эмас. 1121. $x = -\frac{1}{2}$ нуқтада. 1122. 3. 1123.

$\frac{1}{2}$. 1124. $\frac{1}{na^{n-1}}$. 1125. 1. 1126. $\frac{a^2}{b^2}$. 1127. $\frac{1}{2}$. 1128. $\frac{1}{6}$. 1129. 3.

1130. 1) ∞ ; 2) 0. 1131. 0. 1132. 0. 1133. 3. 1134. 2. 1135. 0.

1136. 0. 1137. 1. 1138. 1. 1139. e^3 . 1140. 2- тартибли.

1144. $a - b$. 1145. $\frac{1}{3}$. 1146. $\frac{1}{8}$. 1147. $\ln \frac{a}{b}$. 1148. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 1149. 1.

1150. 1. 1151. $-\frac{1}{3}$. 1152. -2 . 1153. $\frac{1}{e}$. 1154. $\frac{1}{6}$. 1155. e^3 . 1160. $x =$

$= -2$ бўлганда $y_{\min} = 1$. 1161. $x = -2$ бўлганда $y_{\min} = -\frac{16}{3}$;

$x = 2$ бўлганда $y_{\max} = +\frac{16}{3}$; Ox билан кесишиш нуқталари: $x_1 = 0$;

$x_{2,3} = \pm 2\sqrt{3} \approx \pm 3,4$. 1162. $x = -1$ бўлганда $y_{\max} = 1\frac{2}{3}$; $x = 3$

бўлганда $y_{\min} = -9$; Ox ўқ билан кесишиш нуқталари: $x_1 = 0$

$x_{2,3} \approx 1,5 \pm 3,3$. 1163. $x = \pm 2$ бўлганда $y_{\max} = 5$. $x = 0$ бўлганда

$y_{\min} = 1$; $y = 0$ бўлганда $x \approx \pm 2,9$. 1164. $x = 0$, $y = 0$ бўлганда —

қайрилиш; $x = 3$ бўлганда $y_{\min} = -6\frac{3}{4}$. 1165. $x = -2$ бўлганда

$y_{\max} = -2$; $x = 2$ бўлганда $y_{\min} = 2$; асимптоталар $x = 0$ ва $y =$

$= \frac{x}{2}$. 1166. $x = 0$ бўлганда $y_{\min} = -1$ (қайтиш нуқта); Ox ўқ билан

кесишиш нуқталари: $x = \pm 1$. 1167. $x = 0$ бўлганда $y_{\max} = 1$;

$x \rightarrow \infty$ бўлганда $y \rightarrow 0$, яъни $y = 0$ — асимптота. Эгри чизиқ Oy ўққа

нисбатан симметрик (нима учун?). 1168. $x = 1$ бўлганда $y_{\max} = -4$;

$x = 5$ бўлганда $y_{\min} = 4$; асимптоталар: $x = 3$ ва $y = x - 3$. 1169. $x = 0$ бўл.

ганда $y_{\min}=0$; $x=\frac{2}{3}$ бўлганда $y_{\max}=\frac{4}{27}$. 1170. $x=4$ бўлганда $y_{\max}=1$,
 $y=0$ бўлганда $x=3$ ёки $x=5$; $y=-3$ бўлганда $x=-4$ ёки 12.
 1171. $x=0$ бўлганда $y_{\max}=1$; асимптота $y=0$. Оу ўққа нисбатан
 симметрик. 1172. $x=\frac{\pi}{12}$ бўлганда $y_{\max}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 1,1$; $x=$
 $=\frac{5\pi}{12}$ бўлганда $y_{\min}\approx 0,4$. 1173. $x=\frac{\pi}{3}$ бўлганда $y_{\max}=\frac{4\pi}{3}-$
 $-\sqrt{3}\approx 2,45$; $x=-\frac{\pi}{3}$ бўлганда $y_{\min}=\sqrt{3}-\frac{4\pi}{3}\approx -2,45$.

Асимптоталар $x=\pm\frac{\pi}{2}$. 1174. $x=1$ бўлганда $y_{\max}=1$; $x\rightarrow 0$ да
 $y\rightarrow -\infty$; $x\rightarrow\infty$ да $y\rightarrow 0$. Асимптоталар $x=0$ ва $y=0$. Ох ўқ
 билан кесишган нуқта: $1+\ln x=0$, $\ln x=-1$, $x=e^{-1}\approx 0,4$.

1175. $x=\frac{1}{2}$ бўлганда $y_{\min}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\approx -0,28$; $x=-\frac{1}{2}$ бўлган-
 да $y_{\max}\approx 0,28$. Асимптоталар: $y=x\pm\frac{\pi}{2}$. 1176. 1) $x=2$ бўлганда

$y_{\max}=\frac{2}{e}$. Асимптота $y=0$. 2) $x=\frac{1}{e}$ бўлганда $y_{\min}=-\frac{1}{e}$,
 $\lim_{x\rightarrow 0} y=0$ — четки нуқта; $x=1$ бўлганда $y=0$. 1177. 1) $x=0$ бўлганда

$y_{\min}=0$ (синий нуқтаси); $x=\pm\sqrt{\frac{4\pi+1}{2}}$ бўлганда $y_{\max}=1$;

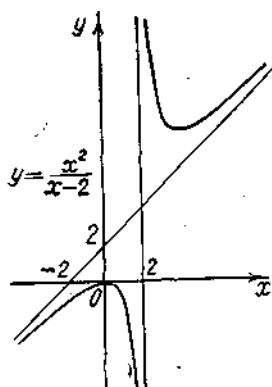
2) $x=0$ бўлганда $y_{\min}=0$ (синий нуқтаси). 1178. $x=\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; ...
 бўлганда $y_{\min}=\frac{1}{2}$; $x=0$; $\frac{\pi}{2}$; π ; $\frac{3\pi}{2}$... бўлганда $y_{\max}=1$.

1179. Эгри чизиқнинг жойлашиш соҳаси $x\leq 1$; $x=\frac{1}{2}$ бўлганда
 $y_{\max}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$; $x_1=0$ ва $x_2=1$ бўлганда $y=0$. 1180. $x=2$ бўлган-

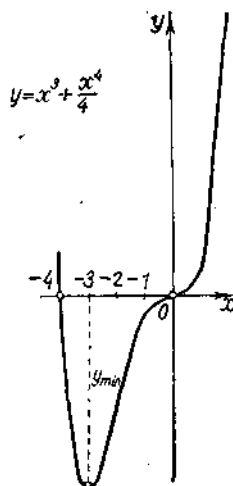
да $y_{\max}=\sqrt{2}$; эгри чизиқ жойлашган соҳа $x>0$. 1181. Асимпто-
 талар $x=1$ ва $x=4$ (узилишлар); $x=-2$ бўлганда $y_{\min}=-\frac{1}{2}$;
 $x=2$ бўлганда $y_{\max}=1$. 1182. $x=1$ бўлганда $y_{\min}=1,5$. Эгри
 чизиқ $y=\frac{x^2}{2}$ параболага ва Оу ўққа асимптотик яқинлашади.

1183. $x=0$ ва $x=2$ бўлганда $y_{\min}=\sqrt[3]{4}\approx 1,6$; $x=1$ бўлганда
 $y_{\max}=2$ (минимум нуқталарда қайтиш нуқталари). 1184. $x=0$
 бўлганда y букилиш $=0$, $x=1$ бўлганда $y_{\max}=0,2$ $x=3$ бўлганда
 $y_{\min}=-5,4$. 1185. $x_1=-2$ бўлганда $y_{\max}=0$, $x_2=-1,2$
 бўлганда $y_{\min}\approx -1,1$; $x=0$ бўлганда y букилиш $=0$. 1186. $x=2$
 бўлганда $y_{\max}=\frac{1}{2}$; $y=0$ бўлганда $x=1$; асимптоталар — коорди-
 наталар ўқлари. 1187. $x=-3$ бўлганда $y_{\max}=-4,5$; $x=0$ бўлган-
 да y букилиш $=0$; $x=3$ бўлганда $y_{\min}=-4,5$; асимптоталар $y=x$
 ва $x=\pm 3\sqrt{3}$. 1188. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ бўлганда $y_{\max}=1$; $x=\frac{\pi}{2}\pm k\pi$

бўлганда узқлишлар. 1189. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ бўлганда $y_{\max} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi - \frac{1}{2} \ln 2$. 1190. 1) $x = 1$ бўлганда $y_{\min} = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4}$; 2) $x = -1$ бўлганда $y_{\max} = 1$, $x = 0$ бўлганда $y_{\min} = 0$ қиялиги $k = \pm 2$ бўлган синус нуқтаси). 1191. $x = 0$ бўлганда $y_{\min} = 0$; $x = 2$ бўлганда $y_{\max} = \frac{4}{e^2} \approx \frac{1}{2}$; асимптота $y = 0$. 1192. $x = -1$ бўлганда қайтиш нуқтаси $y_{\min} = 2$, $x = 0$ бўлганда $y_{\max} = 3$, $y = 0$ бўлганда



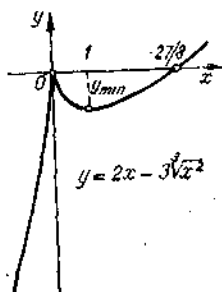
45- чизма.



46- чизма.

да $x \approx 4$. 1193. $x = 2$ бўлганда $y_{\max} = 4$; $y = 0$ бўлганда $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. 1194. $x = -1$ бўлганда $y_{\min} = -4$; $y = 0$ бўлганда $x_1 = 1$, $x_2 = -3$. 1195. $x = 0$ бўлганда $y_{\min} = 0$; $x = -2$ бўлганда $y_{\max} = \frac{4}{3}$; $y = 0$ бўлганда $x_1 = 0$, $x_2 = -3$. 1196. $x = -1$ бўлганда $y_{\min} = -4$; $x = -3$ бўлганда $y_{\max} = 0$. 1197. $x = 0$ бўлганда $y_{\max} = 0$; $x = 2$ бўлганда $y = \pm \infty$; $x = 4$ бўлганда $y_{\min} = 8$; асимптоталар $x = 2$ ва $y = x + 2$ (45- чизма). 1198. $x = -3$ бўлганда $y_{\min} = -6.75$; $x = 0$ бўлганда y букилиш $= 0$; $y = 0$ бўлганда $x_1 = 0$, $x_2 = -4$ (46- чизма). 1199. $x = \pm 2$ бўлганда $y_{\min} = -4$; $x = 0$ бўлганда $y_{\max} = 0$; $y = 0$ бўлганда $x_1 = 0$, $x_2 = \pm \sqrt[3]{8} \approx \pm 2.8$. 1200. $x = 0$ бўлганда қайтиш нуқтаси $y_{\max} = 0$; $x = 1$ бўлганда $y_{\min} = -1$; $y = 0$ бўлганда $x_1 = 0$, $x_2 = 3\frac{3}{8}$ (47- чизма). 1201. $x = -1$ бўлганда $y_{\max} = 2$; $x = 1$ бўлганда $y_{\min} = 0$; $x = 0$ бўлганда $y = 1$.

Асимптота $y = 1$. 1202. $x = -1$ бўлганда $y_{\min} = -\frac{1}{\sqrt{e}} \approx -0,6$; $x = 1$ бўлганда $y_{\max} \approx 0,6$; Ох ўқи асимптота. 1203. $x = 2$ бўлганда $y_{\min} = 2(1 - \ln 2) \approx 0,6$; Оу ўқи асимптота; $x = 1$ бўлганда $y = 1$; $x = e^2 \approx 7,4$ бўлганда $y \approx 3,4$. 1204. $x = 0$ бўлганда қайтиш нуқтаси $y_{\max} = 0$; $x = 2$ бўлганда $y_{\min} = -3\sqrt[3]{4} \approx -4,8$; $x = 5$ бўлганда $y = 0$. График 47- чизмадаги графикка ўхшаш. 1205. $x = +\frac{\pi}{6}$ бўлганда $y_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \approx 0,34$; $x = -\frac{\pi}{6}$ бўлганда $y_{\min} \approx -0,34$; $x = \pm \frac{\pi}{2}$ бўлганда $y = \pm \frac{\pi}{2} = \pm 1,57$. 1206. $x = \frac{\pi}{4}$ бўлганда $y_{\min} = \frac{\pi}{2} + 1 \approx 2,57$; $x = \frac{3\pi}{4}$ бўлганда $y_{\max} = +3,71$; асимптоталар $x = 0$ ва $x = \pi$. 1207. $x = -\frac{1}{2}$ бўлганда $y_{\max} = -\frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} \approx 1,85$; $x = \frac{1}{2}$ бўлганда $y_{\min} \approx 1,28$; $x = 0$ бўлганда $y = \frac{\pi}{2}$. Асимптота $y = x$. 1208. $x = 1$ да қайтиш нуқтаси $y_{\min} = 1$; $x = 0$ бўлганда $y = 2$; $x = 2$ бўлганда $y = 2$. 1209. $x = \frac{\pi}{6}$ ва $\frac{5\pi}{6}$ бўлганда $y_{\max} = 1,5$; $x = \frac{\pi}{2}$ бўлганда $y_{\min} = 1$. 1210. $x = 0$ бўлганда $y_{\min} = 0$; $x = 1$ бўлганда y букилиш $= 1$. 1211. $x = e$ бўлганда $y_{\max} = \frac{1}{e} \approx 0,4$; $y = 0$ бўлганда $x = 1$. Асимптоталар $x = 0$ ва $y = 0$. 1212. $x = -3$ бўлганда $y_{\min} = 6$; $x = -2$ бўлганда $y = \infty$ (узилиш); $x = -1$ бўлганда $y_{\max} = 2$. $x = 0$, $y = 1,5$; $y = 0$, $x = \pm \sqrt{3} \approx \pm 1,7$ — ўқлар билан кесишган нуқталар. Асимптоталар: $x = -2$ ва $y = 2 - x$. 1213. $x = 1$ бўлганда $y_{\min} = 2$; $x = -1$ бўлганда $y_{\max} = -2$; $x = 0$ бўлганда — узилиш. $y = x$ ва $x = 0$ — асимптоталар. 1214. 1) $x = 0$ бўлганда $y = a$. Ох ўқ билан кесишган нуқталар; $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Экстремум: $x_1 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ бўлганда — минимум, $x_2 = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ бўлганда — максимум. Эгри қизиқ — сўнувчи тебранишларнинг графиги; $y = \pm ae^{-x}$ эгри қизиқлар чиги қизилган; бу эгри қизиқларда экстремум нуқталар ётади. Олдин $y = \pm ae^{-x}$ эгри қизиқларни ясаи керак. Ох ўқ — асимптота. 2) $x = -1$ бўлганда $y_{\max} = 2$; $x = 0$ бўлганда — букилиш нуқтаси, $x = 1$ бўлганда $y_{\min} = -2$; $y = 0$ бўлганда $x_1 = 0$, $x_{2,3} \approx \pm 1,3$. 1215. $x = 1$ бўлганда $y_{\min} = 3$; $x = 2$ бўлганда $y = \infty$ (узилиш); $x = 4$ бўлганда y букилиш $= 0$; $x = 0$ бўлганда $y = 3,6$. 1216. $x = -2$ бўлганда $y_{\min} = 0$; $x = -4$ бўлганда $y_{\max} \approx 0,8$; $x = 1$ бўлганда $y_{\max} \approx 2,8$; Ох ўқ — асимптота 1217. $x = \pm 1$ бўл-



47-чизма.

ганда $y_{\max} = 1$; $y = 0$ бўлганда $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \approx \pm 0,7$. Ox ва Oy

ўқлар—асимптоталар. 1218. $x = 0$ бўлганда $y_{\max} = 1$; $x = 1$ бўлганда $y_{\min} = 0$; $y = 0$ бўлганда $x = \pm 1$. 1219. $x = -1$ бўлганда

$y_{\min} = \frac{1}{3}$; $x = 1$ бўлганда $y_{\max} = 3$; $x = 0$ бўлганда $y = 1$; $y = 1$

асимптота. 1220. $x = -1$ бўлганда $y_{\max} = 1$, $y = 0$ бўлганда $x_1 = 0$, $x_2 = -4$, эгри чизиқнинг жойлашиш соҳаси $x \geq 0$. 1221. 1) $x = -2$

бўлганда $y = \infty$ (узилиш); $x = -3$ бўлганда y букилиш $= 0$; $x = 0$ бўлганда $y_{\min} \approx 6 \frac{3}{4}$; асимптоталар $x = -2$ ва $y = x + 5$; 2) $x = 2n\pi$

бўлганда $y_{\min} = 0$; $x = (2n + 1)\pi$ бўлганда $y_{\max} = \sqrt{2}$. Минимум нуқталарда y' мавжуд эмас (синиш нуқталари). 1222. $30 \text{ м} \times 60 \text{ м}$.

1223. $5 \text{ ва } 5$. 1224. $\frac{ah}{4}$. 1225. $\frac{a}{6}$. 1226. $4\text{м} \times 4\text{м} \times 2\text{м}$. 1227. 20 см .

1228. 60° . 1229. $\frac{18}{\pi + 4} \approx 2,5$. 1230. $\cos \alpha = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} < \frac{a}{AB} \right)$ тенгсизлик

бажарилиш шарти билан, бунда a — AB нинг темир йўл йўналишига бўлган проекцияси). 1231. Кучлироқ ёруғлик манбадан 18 м

узоқликда. 1232. $\frac{a}{2v}$ соатдан кейин энг кичик масофа $\frac{a}{2}$ бўлади.

1233. $x = \frac{D}{2}$, $y = \frac{D\sqrt{3}}{2}$. 1234. $\sqrt{3} \approx 1,7$ марта. 1235. $l \approx 5,6 \text{ м}$;

$l = \frac{2,4}{\sin \alpha} + \frac{1,6}{\cos \alpha}$ функциянинг максимуми сифатида аниқланади.

1236. Баландлик $x = 2 \text{ дм}$ бўлганда $v_{\max} = \frac{128\pi}{9} \text{ дм}^3$. 1237. Баланд-

лик $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$ бўлганда $S_{\max} = R^2$. 1238. (1; 1). 1239. $\sqrt{ab}$. 1240. $x =$

$= 2 \text{ м}$ да. 1241. 4 см ва $\sqrt{3} \approx 1,7 \text{ см}$. 1242. $x = 1,5$ 1243. Кесим —

томони $\frac{D}{\sqrt{2}}$ бўлган квадрат. 1244. $\alpha = 2\pi$ бўлганда $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ради-

ан $\approx 294^\circ$. 1245. $F = \frac{\mu P}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$; $\lg \alpha = \mu = 0,25$ $\alpha \approx 14^\circ$. 1246. 1) $y =$

$= x^2$, $y' = 2 > 0$; эгри чизик барча нуқталарида «пастга» қавариқ;

2) $y = x^3$, $y' = 3x$, эгри чизик $x > 0$ бўлганда «пастга» ва $x < 0$

бўлганда «юқорига» қавариқ; $x = 0$ қайрилиш нуқтаси; 3) $y = e^x$, $y' = e^x > 0$, эгри чизик барча нуқталарида «пастга» қавариқ, Oy ўқ

билан кесишиш нуқтаси $(0, 1)$; 4) $y = \ln x$ ($x > 0$), $y' = \frac{1}{x} < 0$

эгри чизик барча нуқталарида «юқорига» қавариқ, Ox ўқ билан кеси-

шиш нуқтаси $(1, 0)$; 5) $(0, 0)$ қайрилиш нуқтаси. 1247. Эгри чи-

зиқларнинг қайрилиш нуқталари: 1) $\left(2; -\frac{8}{3} \right)$; 2) $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}; e^{-\frac{1}{2}} \right)$;

3) $\left(\pm \sqrt{3}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ ва $(0; 0)$; 4) $x = -\frac{\ln 2}{2} \approx -0,35$ бўлганда.

1252. Жойлашиш соҳаси $x > -2$. Ўқлар билан кесинган нуқталари $(-1, 0)$ ва $(0; \ln 2)$. y барча нуқталарда ўсувчи, эгри чизик «юқорига» қавариқ, $x = -2$ — асимптота. 1253. $y > 0$, $y = 0$ — асимптота.

1254. 1) Ox ўққа нисбатан симметрик. Жойлашиш соҳаси $x > 0$. Юқори шохчаси «пастга», пасткиси «юқорига» қавариқ. Иккала шохча ҳам Ox ўққа $(0; 0)$ нуқтада уринади. Эгри чизик «ярим кубик парабола» дейилади (Oy ўқ билан K ҳарфини ҳосил қилади); 2) олдингига ўхшаш эгри чизик, фақат чап томонга 3 бирликка силжиган. 1255. 1) $x = 0$ бўлганда $y_{\max} = -1$, асимптоталар $x = -2$, $x = 2$ ва $y = 0$ (учта шохча); 2) $x = 1$ бўлганда $y_{\max} = 2$; $x = -1$ бўлганда $y_{\min} = -2$, $x = \pm \sqrt{3}$ бўлганда Ox ўқ билан кесинади, $x = \pm \sqrt{2}$ бўлганда қайрилиш, Ox ва Oy ўқлар асимптоталар. 1256. Жойлашиш соҳаси $x > 0$; $y = 0$ бўлганда $x = 1$; Ox ва Oy ўқлар — асимптоталар. $x = e$ бўлганда $y_{\max} = 1$; 2) $x = 1$ бўлганда

$y_{\max} = 1$, $x = 2$ бўлганда $y_{\text{қайр.}} = \frac{2}{e} \approx \frac{2}{3}$, Ox ўқ — асимптота, $x = 0$ бўлганда $y = 0$. 1257. 1) $x = 0$ бўлганда $y_{\min} = 2$; $x = -2$ ва $x - y = 0$ — асимптоталар; 2) Oy га нисбатан симметрик, $y = 0$ бўлганда

$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \pm 0,7$; $x = \pm 1$ бўлганда $y_{\min} = -1$, Oy ўқ — асимптота. 1258. Жойлашиш соҳаси $x > 0$; $x = 1$ бўлганда $y_{\min} = 1$; «пастга» қавариқ; Oy ўқ — асимптота; 2) Oy ўқ — симметрия ўқи, $x = 0$ бўлганда $y_{\min} = a$; барча нуқталарда «пастга» қавариқ. Эгри чизик занжир чизик дейилади. 1259. 1) $x = 0$ бўлганда $y_{\max} = 0$,

$x = \sqrt[3]{4} \approx 1,6$ бўлганда $y_{\min} \approx 2,1$; $x = -\sqrt[3]{2} \approx -1,3$ бўлганда $y_{\text{қайр.}} \approx -0,8$; $x = 1$ ва $y = -$ асимптоталар; 2) $x = -1$ бўлганда $y_{\min} = -3$, $y = 0$ бўлганда $x = -\sqrt[3]{0,25} \approx -0,6$, Ox ва Oy ўқлар — асимптоталар. 1260. 1) Ox ва Oy ўқларга нисбатан симметрик; жойлашиш соҳаси $|x| < \sqrt{2}$, $x = \pm 1$ бўлганда $y_3 = \pm 1$, $y = 0$ бўлганда $x = 0$ ёки $\pm \sqrt{2}$; 2) $y = x + \frac{2}{\sqrt{x}}$ шохчасида $x = 1$

бўлганда $y_{\min} = 3$; $y = x - \frac{2}{\sqrt{x}}$ шохчаси Ox ўқни $x = \sqrt[3]{4} \approx 1,6$ бўлганда кеседи, иккала шохча ҳам $y = x$ ва $x = 0$ асимптоталарга эга. 1261. $x = -2$ бўлганда $y_{\min} = -\sqrt[3]{16} \approx -2,52$, $x = 2$ бўлганда $y_{\max} \approx 2,52$ (икки нуқта ҳам қайтиш нуқталари) Ox ўқ — асимптота, чунки $x \pm$ чексизликка интилганда ($x \rightarrow \pm \infty$)

$y = \frac{8x}{(x+2)^{1/3} + (x^2-4)^{2/3} + (x-2)^3} \rightarrow 0$. 1262. Ox ўққа нисбатан

симметрик, жойлашиш соҳаси $x > 0$; Ox ўқи — асимптота ($\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$); $x = 1$ бўлганда экстремум $y_3 = \pm \frac{1}{e} \approx \pm 0,3$.

1264. 1) $\frac{x^3}{3} + x^2 + \ln x + C$; 2) $2x^5 - \frac{1}{x^3} + C$. 1265. 1) $\frac{1-x}{x^2} + C$;

2) $\frac{x^2}{2} + 2 \ln x - \frac{1}{2x^3} + C$. 1266. 1) $x \left(\frac{2}{3} \sqrt{x} + \frac{3}{4} \sqrt[3]{x} \right) + C$;

$$\begin{aligned}
& 2) 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + C. \quad 1267. 1) \frac{2x\sqrt{x}}{3} - 3x + 6\sqrt{x} - \ln x + C; \\
& 2) \frac{3}{4}(x-4)\sqrt[3]{x} + C. \quad 1268. 1) e^x + \frac{1}{x} + C; 2) \frac{a^x}{\ln a} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C. \\
& 1269. 1) -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C; 2) -\operatorname{ctg} x - x + C. \\
& 1270. 1) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C; \\
& 2) 3 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} x + C. \quad 1271. 1) \frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} + C; 2) \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + C. \\
& 1272. 1) 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{arc} \sin x + C; 2) \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C. \\
& 1273. 1) \frac{x^3 - 1}{2x^2} - 2 \ln x + C; 2) 3\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + C. \\
& 1274. 1) \frac{2(x+2)}{\sqrt{x}} + C; 2) 4) \ln x - \frac{8}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + C. \quad 1275. 1) \ln x - \\
& - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C; 2) x + \cos x + C. \quad 1276. 1) e^x + \operatorname{tg} x + C; \\
& 2) \frac{a^x}{\ln a} - \frac{1}{4x^4} + C. \quad 1277. \cos x - \operatorname{ctg} x + C. \quad 1278. \operatorname{tg} x - x + C. \\
& 1279. \frac{1}{3} \sin 3x + C. \quad 1280. -2 \cos \frac{x}{2} + C. \quad 1281. -\frac{1}{3} e^{-3x} + C. \\
& 1282. \frac{1}{5} \operatorname{tg} 5x + C. \quad 1283. 2) (e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}) + C. \quad 1284. \frac{1}{6} (4x-1)^{3/2} + C. \\
& 1285. -\frac{(3-2x)^5}{10} + C. \quad 1286. -\frac{1}{8} (5-6x)^{4/3} + C. \\
& 1287. -\sqrt{3-2x} + C. \quad 1288. \frac{1}{b} \cos (a-bx) + C. \\
& 1289. \ln (x^2 - 5x + 7) + C. \quad 1290. \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) + C. \\
& 1291. -0,1 \ln |1 - 10x| + C. \quad 1292. -\frac{1}{6} \ln |1 - 3e^{2x}| + C. \\
& 1293. \ln |\sin x| + C. \quad 1294. -\ln |\cos x| + C. \quad 1295. \ln |\sin 2x| + C. \\
& 1296. -\frac{1}{3} \ln |1 + 3 \cos x| + C. \quad 1297. \frac{1}{2} \ln |1 + 2 \sin x| + C. \\
& 1298. \ln |1 + \ln x| + C. \quad 1299. \frac{\sin^3 x}{3} + C. \quad 1300. -\frac{\cos^4 x}{4} + C. \\
& 1301. -\frac{1}{3 \sin^3 x} + C. \quad 1302. \frac{1}{2 \cos^2 x} + C. \quad 1303. \frac{2 - \cos x}{\sin x} + C. \\
& 1304. \frac{\sin^2 x}{2} + C. \quad 1305. -e^{\cos x} + C. \quad 1306. \frac{1}{3} e^{x^3} + C. \\
& 1307. -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C. \quad 1308. 2e^{\sqrt{x}} + C. \quad 1309. \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + 1)^3} + C. \\
& 1310. \frac{1}{4} \sqrt[3]{(x^3 - 9)^4} + C. \quad 1311. \frac{1}{2} \sqrt[3]{(1 + x^3)^2} + C. \\
& 1312. -\sqrt{1 - x^2} + C. \quad 1313. -\sqrt{1 + 2 \cos x} + C.
\end{aligned}$$

1314. $\frac{2}{3} \sqrt{(1 + \ln x)^3} + C.$ 1315. $\frac{1}{6} (1 + 4 \sin x)^{3/2} + C.$
 1316. $-\frac{1}{40} (1 - 6x^5)^{4/3} + C.$ 1317. $2x + \frac{1}{2} (e^{2x} - e^{-2x}) + C.$
 1318. $\frac{\sin^4 x}{4} + C.$ 1319. $-\frac{1}{2} \sqrt{1 - 4x} + C.$ 1320. $-\frac{1}{b} \sin(ax - bx) + C.$
 1321. $\frac{1}{4} (1 + 3x)^{\frac{4}{3}} + C.$ 1322. $-\frac{1}{7} (1 - 2x^2)^{\frac{7}{6}} + C.$
 1323. $\sqrt{1 + x^2} + C.$ 1324. $\frac{\sin x - 2}{\cos x} + C.$ 1325. $2 \ln |\sin x| - \operatorname{ctg} x + C.$
 1326. $e^{\sin x} + C.$ 1327. $-\frac{1}{3} \ln |1 - x^3| + C.$ 1328. $\frac{1}{2b(a - bx)^2} + C.$
 1330. 1) $0, 1 \ln \left| \frac{x-5}{x+5} \right| + C;$ 2) $\frac{1}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{3} + C.$
 1331. 1) $\operatorname{arc} \sin \frac{x}{2} + C;$ 2) $\ln(x + \sqrt{x^2 + 5}) + C.$
 1332. 1) $\ln|x + \sqrt{x^2 - 4}| + C;$ 2) $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$
 1333. 1) $\operatorname{arc} \sin \frac{x}{\sqrt{5}} + C;$ 2) $\frac{1}{6} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x^3}{2} + C.$
 1334. 1) $\frac{1}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{x^2}{\sqrt{3}} + C;$ 2) $\frac{1}{2ab} \ln \left| \frac{bx - a}{bx + a} \right| + C.$
 1335. 1) $\frac{1}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{2x}{\sqrt{3}} + C;$ 2) $\frac{1}{4} \ln(x^4 + \sqrt{x^8 - 1}) + C.$
 1336. 1) $2,5 \ln(x^2 + 4) - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C;$ 2) $\frac{3}{2} \ln(x^2 - 4) - \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C.$
 1337. 1) $\sqrt{x^2 + 1} + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C;$ 2) $-\sqrt{1 + x^2} + \operatorname{arc} \sin x + C.$
 1338. $x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C.$ 1339. $\frac{x^3}{3} + 3x - \frac{3\sqrt{3}}{2} \ln \left| \frac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}} \right| + C;$
 1340. $\operatorname{arc} \operatorname{tg}(x + 2) + C.$ 1341. $\frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x-3}{2} + C.$
 1342. $\ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3}) + C.$ 1343. $\operatorname{arc} \sin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$
 1344. $\operatorname{arc} \sin \frac{x-2}{2} + C.$ 1345. $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x+3}{\sqrt{3}} + C.$
 1346. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \frac{4x-3}{5} + C.$
 1347. $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln |3x - 1 + \sqrt{9x^2 - 6x + 3}| + C.$
 1348. $\sqrt{3} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{3}} + \ln \left| \frac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}} \right| \right) + C.$
 1349. $\operatorname{arc} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} + \ln(x + \sqrt{2 + x^2}) + C.$

1350. $2 \ln(x^2 + 5) - \sqrt{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$
1351. $x + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} \right| + C.$
1352. $\frac{x^3}{3} - 2x + 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$ 1353. $\operatorname{arcsin}(e^x) + C.$
1354. $\operatorname{arctg}(2x^2) + C.$ 1355. $0,2 \operatorname{arctg} \frac{x+2}{5} + C.$
1356. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C.$ 1357. $\operatorname{arcsin} \frac{x+2}{3} + C.$
1358. $\frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$
1359. $\frac{1}{2} \ln(2x+1 + \sqrt{4x^2+4x+3}) + C.$ 1360. $x \ln|x| - x + C.$
1361. $\frac{x^2}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| \right) + C.$
1362. $\frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C.$ 1363. $\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.$
1364. $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$ 1365. $\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$
1367. $x[(\ln|x| - 1)^2 + 1] + C.$ 1368. $-x \operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C.$
1369. $-\frac{\ln|x|+1}{x} + C.$ 1370. $2\sqrt{1+x} \operatorname{arcsin} x + 4\sqrt{1-x} + C.$
1371. $x \operatorname{arcsin} x + \sqrt{1-x^2} + C.$ 1372. $-e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) + C.$
1373. $x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C.$ 1374. $\frac{x}{2} (\cos \ln x + \sin \ln x) + C.$
1375. $\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \left(\ln|x| - \frac{2}{3} \right) + C.$ 1376. $-2e^{-\frac{x}{2}} (x^2 + 4x + 8) + C.$
1377. $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$ 1378. $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C.$
1379. $\frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C.$ 1380. $4\sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x} \operatorname{arcsin} \frac{x}{2} + C.$
1381. $-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sin^2 x} + \operatorname{ctg} x \right) + C.$ 1382. $x \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} - \frac{\sqrt{2x-1}}{2} + C.$
1384. $3x + 4 \sin x + \sin 2x + C.$ 1385. $\frac{3x}{2} + \cos 2x - \frac{\sin 4x}{8} + C.$
1386. $\frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$ 1387. $\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C.$
1388. $\frac{3x}{128} - \frac{\sin 4x}{128} + \frac{\sin 8x}{1024} + C.$ 1389. $\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$
1390. $-\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$ 1391. $\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$
1392. $\frac{1}{4} \sin^4 x - \frac{1}{6} \sin^6 x + C.$ 1393. $\sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5} \sin^5 x -$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{7} \sin^7 x + C. \quad 1394. \quad 7x + 14 \sin x + 3 \sin 2x - \frac{8 \sin^3 x}{3} + C. \\
1395. & -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C. \quad 1396. \quad \frac{1}{\cos x} + \cos x + C. \\
1397. & \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} x| + C. \quad 1398. \quad 1) \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C; 2) \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C. \\
1399. & \frac{1}{2} \left[\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right] + C. \quad 1400. \quad \int \frac{dx}{\sin x - \cos x} = \\
& = \int \frac{dx}{\sin x - \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right| + C. \\
1401. & \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + C. \quad 1402. \quad -\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln |\sin x| + C. \\
1403. & -\frac{1}{8} (\cos 4x + 2 \cos 2x) + C. \quad 1404. \quad \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (m+n)x}{m+n} + \right. \\
& + \frac{\sin (m-n)x}{m-n} \left. \right] + C, \quad m \neq n \text{ бълганда ва } \frac{x}{2} + \frac{1}{4m} \sin 2mx + C \\
& m = n \text{ бълганда.} \quad 1405. \quad 1) \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C; \\
& 2) \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (m-n)x}{m-n} - \frac{\sin (m+n)x}{m+n} \right] + C \quad m \neq n \text{ бълганда ва } \frac{x}{2} - \\
& - \frac{1}{4m} \sin 2mx + C; \quad m = n \text{ бълганда.} \quad 1406. \quad -\frac{1}{12} \cos 6x - \frac{1}{8} \sin 4x + C. \\
1407. & 1) \frac{5}{16} x - \cos x \left(\frac{\sin^6 x}{6} + \frac{5 \sin^4 x}{24} + \frac{5 \sin^2 x}{16} \right) + C. \quad 1408. \quad 1) \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \\
& + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C; 2) -\frac{\sin x}{2 \cos^3 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C. \\
1409. & \frac{11x}{2} + 3 \sin 2x + \frac{9}{8} \sin 4x + C. \quad 1410. \quad \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \\
& + \frac{1}{32} \sin 4x + C. \quad 1411. \quad \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C. \\
1412. & \sin x - \frac{2 \sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C. \quad 1413. \quad \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C. \\
1414. & 7x - 14 \cos x - 3 \sin 2x + \frac{8 \cos^3 x}{3} + C. \quad 1415. \quad \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} x| - x + C. \\
1416. & \frac{1}{8} (2 \sin 2x - \sin 4x) + C. \quad 1417. \quad \frac{1}{\cos x} + \cos x + \operatorname{tg} x + C. \\
1418. & -\frac{1}{4} \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{4} x + C. \quad 1419. \quad 1) \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + \\
& + 8 \ln |x-2| + C; 2) \frac{x^3}{3} - a^2 x + a^3 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C; 3) \frac{x^3}{3} + \frac{a^3}{3} \ln |x^2 - a^2| + C. \\
1420. & \ln \frac{C(x-2)^2}{x-3}. \quad 1421. \quad \ln \left| \frac{(x-1)^3}{x+2} \right| + C. \quad 1422. \quad \ln \frac{C x^2 (x-1)}{x+1}. \\
1423. & \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \frac{(x-1)^8}{|x|} + C. \quad 1424. \quad \frac{1}{x} + \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1425. & \frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{x-a}{x} \right| + \frac{x-a}{ax^2} + C. & 1426. & \ln Cx(x-1) + \frac{2}{x-1}. \\
1427. & \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| - \frac{2}{x+1} + C. & 1428. & \frac{5}{2} \ln (x^2+2x+10) - \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C. \\
1429. & 2 \ln (x^2-0,2x+0,17) - 5 \operatorname{arctg} \frac{10x-1}{4} + C. \\
1430. & \ln |x+1| \sqrt{x^2+4} + C. & 1431. & 3 \ln \frac{\sqrt{x^2-2x+5}}{|x|} + 2 \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C \\
1432. & \frac{1}{24} \ln \frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C. & 1433. & \ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|} - \\
& - \frac{1}{x+1} + \operatorname{arctg} x + C. & 1434. & 1) \frac{1}{2b^3} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{b} + \frac{bx}{x^2+b^2} \right) + C; \\
& 2) \frac{1}{8b^4} \left[\frac{x(5b^2+3x^2)}{(x^2+b^2)^2} + \frac{3}{b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b} \right] + C. & 1435. & 1) - \frac{bx+9}{8(x^2+2x+5)} - \\
& - \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C; 2) \frac{1}{8} \left[\frac{(x-3)(3x^2-18x+32)}{(x^2-6x+10)^2} + 3 \operatorname{arctg} (x-3) \right] + C. \\
1436. & \ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|} + \frac{x-1}{x^2+1} + C. & 1437. & \frac{x-2}{4(x^2+2)} + \frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \\
1438. & \frac{1}{a} \ln \left| \frac{x}{x+a} \right| + C. & 1439. & \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right| + C. \\
1440. & \frac{1}{2} \ln \left| 1 - \frac{2}{x} \right| + C. & 1441. & \frac{1}{10\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right| - \\
& - \frac{1}{5\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C. & 1442. & \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C. \\
1443. & \frac{1}{4} \int \frac{4+x^2-x^2}{x(4+x^2)} dx = \frac{1}{4} \ln \frac{|x|}{\sqrt{4+x^2}} + C. & 1444. & \ln \frac{C(x-2)^3}{x-1}. \\
1445. & \ln C(x-1) \sqrt{2x+3}. & 1446. & \ln \frac{C(x-1)^3}{(x+2)^2(x-2)}. \\
1447. & 3 \ln \frac{C(x-1)}{x+2} - \frac{2}{x+2}. & 1448. & 2 \ln \frac{C(x-2)}{x} - \frac{1}{x-2}. \\
1449. & \ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2-2x+2}} + 2 \operatorname{arctg} (x-1) + C. & 1450. & \frac{1}{a} \ln \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{|x|} + \\
& + \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C. & 1451. & \frac{1}{3} \ln \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \\
1452. & \frac{1}{24} \ln \frac{(x-2)^3}{x^2+2x+4} - \frac{1}{4\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + x. \\
1453. & -\frac{1}{2} \left[\frac{x+2}{x^2+2x+2} + \operatorname{arctg} (x+1) \right] + C. \\
1454. & \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x}{x+5} \right| + C. & 1455. & \frac{1}{3} \int \frac{x^2+3-x^2}{x^2(x^2+3)} dx = \\
& = -\frac{1}{3x} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C. & 1456. & \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-(x^2-1)}{(x^2+1)(x^2-1)} dx =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C. \quad 1457. \quad \frac{1}{3} \int \frac{x^2+1-(x^2-2)}{(x^2+1)(x^2-2)} dx = \\
&= \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \right| - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x + C. \quad 1485. \quad \frac{x+2}{5} \sqrt[3]{(3x+1)^2} + C. \\
1459. & \frac{2x+1}{12} (2\sqrt{2x+1}-3) + C. \quad 1490. \quad 6 \left[\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} - \right. \\
&- \ln(1+\sqrt[6]{x}) \left. \right] + C. \quad 1461. \quad \frac{2}{15} (3x^2-ax-2a^2) \sqrt{a-x} + C. \\
1462. & \frac{3}{4} \left[\frac{\sqrt[3]{(x^4+1)^2}}{2} - \sqrt[3]{x^4+1} + \ln \sqrt[3]{x^4+1} + 1 \right] + C. \\
1463. & \frac{(x^2-4)\sqrt{x^2+2}}{3} + C. \quad 1464. \quad \mp \operatorname{arcsin} \frac{1}{x} + C (x>0 \text{ бұл-} \\
&\text{ганда} - \text{ва } x<0 \text{ бұлганда} +). \quad 1465. \quad \ln \frac{Cx}{x+1+\sqrt{2x^2+2x+1}}. \\
1466. & -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{2a-x}{x}} + C. \quad 1467. \quad \ln \frac{C(x+1)}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}. \\
1468. & \frac{1}{2} \left[x \sqrt{a^2-x^2} + a^2 \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} \right] + C. \\
1469. & \frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C. \quad 1470. \quad 2 \operatorname{arcsin} \frac{x}{2} - \frac{x}{4} (2-x)^2 \sqrt{4-x^2} + C. \\
1471. & \frac{x^3}{3a^2 \sqrt{(a^2+x^2)^3}} + C. \quad 1472. \quad \int \sqrt{4-(x-1)^2} dx; \quad x-1=2 \sin t \\
&\text{алмаштырыны татбық қилиб ечамиз,} \quad \int \sqrt{4-4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = \\
&= 2 \operatorname{arcsin} \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}}{2} + C. \quad 1473. \quad \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} - \\
&- \operatorname{arcsin} \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \quad 1474. \quad \frac{1}{2} (x+5) \sqrt{x^2+2x+2} - 3,5 \ln(x+1+ \\
&+ \sqrt{x^2+2x+2}) + C. \quad 1475. \quad -\sqrt{3-2x-x^2} - \operatorname{arcsin} \frac{x+1}{2} + C. \\
1477. & \frac{x-a}{2} \sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsin} \frac{x-a}{a} + C. \\
1478. & \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{1+x^3}-1}{\sqrt[4]{1+x^3}+1} \right| + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \sqrt[4]{1+x^3} + C. \\
1479. & -\frac{\sqrt{(2-x^3)^2}}{4x^2} + C. \quad 1480. \quad \frac{m+1}{n} + p = \frac{-2+1}{2} + \frac{3}{2} = \\
&\text{бугун сон; } x^{-2}+1=t^2 \text{ деб} \quad \int \frac{x^{-2}x^{-3}dx}{(x^{-2}+1)^2} = -\int \frac{t^2-1}{t^2} dt = \\
&= -\frac{1+2x^2}{x\sqrt{1+x^2}} + C \text{ ни ҳосил қиламиз.} \quad 1481. \quad \frac{m+1}{n} = \frac{3+1}{2} =
\end{aligned}$$

$$= \text{бутун сон; } a - bx^2 = t^2 \text{ деб } \frac{1}{b^2} \int \frac{t^2 - a}{t^3} dt = \frac{2a - bx^2}{b^2 \sqrt{a - bx^2}} + C$$

$$\text{ни ҳосил қиламиз. } 1482. \frac{(x-2) \sqrt{2x-1}}{3} + C. \quad 1483. \frac{(3x+1)^{\frac{2}{3}}}{2} +$$

$$+(3x+1)^{\frac{1}{3}} + \ln |(3x+1)^{\frac{1}{3}} - 1| + C. \quad 1484. \frac{x-2 \sqrt{x}}{2} + 2 \ln (\sqrt{x} + 1) + C. \quad 1485. -0,3 (2x+3a) \sqrt[3]{(a-x)^2} + C.$$

$$1486. 2 \sqrt{x-2} + \sqrt{2} \arctg \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C. \quad 1487. \frac{3(x^2+1)}{2} \times$$

$$\times \left(\frac{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}{5} + \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{4} + \frac{1}{3} \right) + C. \quad 1488. \ln (1 + \sqrt{1+x^2}) +$$

$$+ \frac{1}{1 + \sqrt{1+x^2}} + C. \quad 1489. x^2 + \frac{1}{3} \sqrt{(4-x^2)^3} + C; \text{ бу ми-}$$

солда аввал махражда иррационалликдан қутилиш қулай.

$$1490. \mp \sqrt{\frac{x+2}{x}} + C \quad (x > 0 \text{ бўлганда } - \text{ ва } x < -2 \text{ бўлганда } +).$$

$$1491. \arccos \frac{1}{x-1} + C. \quad 1492. 2 \arcsin \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + C.$$

$$1493. 2 \arcsin \sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt{2x-x^2} + C.$$

$$1494. \frac{2+x}{2} \sqrt{4x+x^2} - 2 \ln |x+2 + \sqrt{4x+x^2}| + C.$$

$$1495. -\frac{x+6}{2} \sqrt{5+4x-x^2} + \frac{17}{2} \arcsin \frac{x-2}{3} + C.$$

$$1496. -\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{|x|} + C. \quad 1497. -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$

$$1498. 1-x^2 = t^2 \text{ деб } \int \frac{x^2 dx}{x^3 \sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1} \right| + C \text{ ни топамиз.}$$

$$1499. x = \frac{1}{t} \text{ деб } - \int \frac{dt}{\sqrt{3-2t-t^2}} = - \frac{dt}{\sqrt{4-(t+1)^2}} = \arccos \frac{x+1}{2x} + C \text{ ни топамиз.}$$

$$1500. \frac{1}{2} \ln (e^{2x} + 1) - 2 \arctg (e^x) + C. \quad 1501. \frac{1}{3} \lg^3 x - \lg x + x + C.$$

$$1502. \frac{e^{2x}}{2} - 2e^x + 4 \ln (e^x + 2) + C. \quad 1503. \ln \left| \lg \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$1504. \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{1}{2} \lg \frac{x}{2} \right) + C. \quad 1505. \frac{1}{5} \ln \left| \frac{2 \lg \frac{x}{2} + 1}{\lg \frac{x}{2} - 2} \right| + C.$$

$$1506. -\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \operatorname{ctg} x + C. \quad 1507. \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{\lg x}{2} \right) + C.$$

1508. $e^x + \ln|e^x - 1| + C$. 1509. $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C$.
1510. $e^x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + C$. 1511. $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} \right) + C$.
1512. $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x + C$. 1513. $\frac{1}{2} \arctan(2 \operatorname{tg} x) + C$. 1514. $\frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| +$
 $+ \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + C$. 1515. $\frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} + C$.
1516. $2 \ln|e^x - 1| - x + C$. 1517. $\frac{1}{2} (\operatorname{tg} x + \ln|\operatorname{tg} x|) + C$.
1518. 1) $\frac{\operatorname{sh} 6x}{12} - \frac{x}{2} + C$; 2) $\frac{x}{2} + \operatorname{ch} 2x + \frac{\operatorname{sh} 4x}{8} + C$.
1519. 1) $\operatorname{sh} x + \frac{\operatorname{sh}^3 x}{3} + C$. 1520. $\ln|\operatorname{ch} x| + C$. 1521. $-\frac{1 - \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} + C$.
1522. $-\left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sh}^2 x}{2}\right) + C$. 1523. ва 1524. 161-бетдаги
 № 1366 га қар. 1525. $\frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C$. 1526. $-\frac{x}{5\sqrt{x^2-5}} + C$.
1527. $\frac{\operatorname{ch}^3 3x}{9} - \frac{\operatorname{ch} 3x}{3} + C$. 1528. $\frac{\operatorname{sh} 4x}{32} - \frac{x}{8} + C$. 1529. $\frac{\operatorname{sh}^5 x}{5} + C$.
1530. $x - \operatorname{cth} x + C$. 1531. $2\sqrt{\operatorname{ch} x - 1} + C$ (одни интеграл бел-
 гиси остидаги ифоданинг сурат ва махражини $\sqrt{\operatorname{ch} x - 1}$ га кўпай-
 тириш керак). 1532. $\frac{\operatorname{sh} x - 2}{\operatorname{ch} x} + C$. 1533. $\frac{3}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - 3}| +$
 $+ \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 3} + C$. 1534. $\ln|x + \sqrt{x^2 + 3}| - \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x} + C$.
1535. $2\sqrt{x+1} + \ln \left| \frac{x+2-2\sqrt{1+x}}{x} \right| + C$. 1536. $\frac{(\arctan x)^2}{2} + C$.
1537. $\frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{x+a}{x} \right| - \frac{1}{ax} + C$. 1538. $\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + C$.
1539. $2 \arcsin \sqrt{x} + C$ ($x = \sin^2 t$ деб олинсин). 1540. $ab \times$
 $\times \arctan \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} x \right) + C$. 1541. $\frac{1}{4} \left(x^3 + x \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) + C$.
1542. $\ln C(e^x + 1) - x - e^{-x}$. 1543. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx =$
 $= \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$. 1544. $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + C$.
1545. $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + C$. 1546. $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \cos x + C$.
1547. $-\frac{1}{b} \arctan \frac{\cos x}{b} + C$. 1548. $3x^{\frac{1}{3}} - 12x^{\frac{1}{6}} \ln \left(x^{\frac{1}{6}} + 2 \right) + C$.
1549. $\frac{b-3ax}{6a(ax+b)^3} + C$ ($ax+b=t$ деб олинсин). 1550. $-\frac{1}{x} + \arctan x + C$.

1551. $-\frac{1}{\operatorname{tg} x + 1}$ (сурат ва махраж $\cos^2$ га бўлиниб, $\operatorname{tg} x = t$

деб олинсин). 1552. $\frac{2}{b} \sqrt{a + b \ln x} + C$.

1553. $\frac{1}{3b(n-1)(a-bx^n)^{n-1}} + C \cdot n \neq 1$ бўлганда ва $-\frac{1}{3b} \ln |a - bx^n| + C$; $n = 1$ бўлганда. 1554. Радикал остида тўлиқ квадратни ажратиб $x + 1 = \sqrt{2} \sin t$ деб олиш керак (ёки аниқмас коэффициентлар методи билан ечиш керак), $\frac{x+1}{2} \sqrt{1-2x-x^2} +$

$+\arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$. 1555. $-\frac{2\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1})^2} + C$. 1556. $\frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} -$
 $-\frac{\arcsin \operatorname{tg} x}{x} + C$. 1557. $\frac{1}{2} \arcsin \frac{e^x}{2} - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \ln(4 + e^{2x}) + C$.

1558. $\ln \left| \frac{C\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}} \right|$. 1559. $x + \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C$.

1560. $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \arcsin \frac{x}{2} + C$. 1561. 1) $\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + \operatorname{ctg} x}{\sqrt{3} - \operatorname{tg} x} \right| +$
 $+ C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sin(x + \frac{\pi}{6})}{\sin(x - \frac{\pi}{6})} \right| + C$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x}{\sqrt{3} - \operatorname{tg} x} \right| + C$.

1562. 1) махраждаги иррационалликдан қутилиш керак; $\frac{2}{3a} \left[(x+a)^{\frac{3}{2}} - \right.$
 $\left. - x^{\frac{3}{2}} \right] + C$; 2) $\frac{1}{2} [x\sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + x^2] + C$.

1563. $\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{x} + \ln \frac{C(x-1)^2}{x}$. 1564. $-\frac{1}{3} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{\frac{3}{2}} + C$; $\left(x = \frac{1}{t} \right.$
деб олинсин). 1565. $\frac{2}{3} \arcsin \sqrt{x^3-1} + C (x^3-1 = t^2 \text{ деб олинсин})$.

1566. $\frac{1}{2} [x + \ln |\sin x + \cos x|] + C$. 1567. $2 [\sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} +$
 $+ \sqrt{1-x}] + C$. 1568. $\operatorname{tg}^2 x + C$ ёки $\frac{1}{\cos^2 x} + C_1$.

1569. $\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^4 x} dx = - \int \operatorname{ctg}^2 x d(\operatorname{ctg} x) + \int d(\operatorname{ctg} x) =$
 $= \operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + C$. 1570. $-\operatorname{ctg} x \ln(\cos x) - x + C$. 1571. $e^{-x} +$
 $+ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + C$. 1572. $\frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + C (\operatorname{tg} x = t \text{ деб олинсин})$.

$$1573. \ln|x| - \frac{x+1}{x} \ln|x+1| + C. \quad 1574. \int \sqrt{1-\sin x} dx =$$

$$= \pm \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin x}} = \pm 2 \sqrt{1+\sin x} + C (\cos x > 0 \text{ бўлганда } + \text{ ва}$$

$$\cos x < 0 \text{ бўлганда } -).$$

$$1575. \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C.$$

$$1576. \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{(x^2+1)(x^2-2)} = \frac{1}{6} \int \frac{x^2+1-(x^2-2)}{(x^2+1)(x^2-2)} d(x^2) =$$

$$= \frac{1}{6} \ln \frac{|x^2-2|}{x^2+1} + C. \quad 1577. -2e^{-\sqrt{x}} (\sqrt{x}+1) + C.$$

$$1578. 2\sqrt{x} \arctg \sqrt{x} - \ln|1+x| + C. \quad 1579. \sqrt{\operatorname{tg} x} + C \quad (\operatorname{tg} x = t$$

$$\text{деб олинсин}). \quad 1580. \ln|x| - \frac{x^2+1}{2x^2} \ln(x^2+1) + C. \quad 1581. \frac{1}{\ln a} \operatorname{arctg}(a^x) +$$

$$+ C. \quad 1582. 2(\sqrt{x} + \cos \sqrt{x}) + C.$$

$$1583. \frac{2(x+7)}{3} \sqrt{x+1} + 2\sqrt{2} \ln \frac{|\sqrt{x+1} - \sqrt{2}|}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}} + C; (x+1=t^2$$

$$\text{деб олинсин}). \quad 1584. x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x + C. \quad 1585. \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$\left(x = \frac{1}{t} \text{ деб олинсин}\right). \quad 1586. -\frac{3x^2+3x+1}{3(x+1)^3} + C; (x+1=t \text{ деб$$

$$\text{олинсин}). \quad 1587. \sqrt{2ax+x^2} - 2a \ln|x+a+\sqrt{2ax+x^2}| + C \quad (170\text{-бет.}$$

$$4^\circ). \quad 1588. \ln \frac{|x^2+x|}{(2x-1)^3} + C. \quad 1589. -\frac{1+\cos x + \sin^2 x}{\sin x} + C.$$

$$1590. \frac{1}{16} \ln \frac{C(x^2+2x+2)}{x^2-2x+2} + \frac{1}{8} \arctg \frac{2}{2-x^2} \quad \{\text{махражнинг кўпайтув-}$$

$$\text{чиларга ажралиши: } x^4+4 = x^4+4x^2+4-4x^2 = (x^2+2)^2-4x^2 =$$

$$\text{ва ҳоказо.}\} \quad 1592. s_5 = 0,646, S_5 = 0,746 \int_1^2 \frac{dx}{x} = 0,693. \quad 1593. 20.$$

$$1594. 2\frac{5}{8}. \quad 1595. \frac{14}{3}. \quad 1596. \frac{\pi}{6}. \quad 1597. \frac{\pi}{12a}. \quad 1598. 3(e-1).$$

$$1599. \ln(1+\sqrt{2}). \quad 1600. \frac{1}{2}. \quad 1601. x=t^2 \text{ деб, чегараларини ўзгарт-}$$

$$\text{сак, } \int_2^3 \frac{2t dt}{t-1} = [2t + 2 \ln(t-1)]_2^3 = 2(1 + \ln 2) \text{ ни ҳосил қиламиз.}$$

$$1602. \frac{2-\sqrt{3}}{2}. \quad 1603. 2 - \ln 2. \quad 1604. \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad 1605. \ln \frac{2e}{e+1}.$$

$$1606. \frac{a(\pi-2)}{4} (x=a \sin^2 t \text{ деб олинсин}). \quad 1607. \frac{1}{3}. \quad 1608. \frac{\pi a^2}{16}.$$

$$1609. 2 \ln 2 - 1. \quad 1610. \frac{\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})}{2}. \quad 1611. \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}.$$

$$1612. \ln \frac{3}{2}. 1613. 1) \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}; 2) \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\pi}{2}; 3) \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\pi}{2}. 1614. -\frac{a^3}{6}.$$

$$1615. \frac{1}{6}. 1616. 1. 1617. \frac{\sqrt{3}-1}{2}. 1618. 2 \ln 1,5 - \frac{1}{3}. 1619. \arctg e -$$

$$-\frac{\pi}{4} \approx 0,433. 1620. \frac{17}{6}. 1621. \frac{\pi-2}{4}. 1622. \frac{\pi}{2} - 1. 1623. \frac{1-\ln 2}{2}.$$

$$1624. 1) \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}; 2) \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\pi}{2}; 3) \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\pi}{2}. 1625. \frac{32}{3}. 1626. \text{пав.}$$

$$1627. (2\sqrt{2\rho h}) \text{ асоснинг } h \text{ баландликка кўпайтмасининг } \frac{2}{3} \text{ қисми.}$$

$$1628. \frac{32}{3}. 1629. 8 \ln 2. 1630. 1. 1631. \frac{16}{3}. 1632. 19,2. 1633. 25,6. 1634.$$

$$8 \frac{8}{15}. 1635. \frac{8}{3}. 1636. 20 \frac{5}{6}. 1637. \pi a^2 (60\text{- чизмага қар., } 330\text{- бет}). 1638.$$

$$0,8 (328\text{- бет, } 57\text{- чизма}). 1639. \frac{(4-\pi)a^2}{2}; x = 2a \sin^2 t \text{ деб олинсин}$$

$$(356\text{- бет, } 88\text{- чизма}). 1640. 2a^2 \operatorname{sh} 1 = a^2(e - e^{-1}) \approx 2,35a^2. 1641. 3\pi a^2.$$

$$1642. \frac{3\pi a^2}{8}. 1643. a^2. 1644. \frac{3\pi a^2}{2}. 1645. r_{\max} = 4; 2\varphi = 90^\circ + 360^\circ n$$

$$\text{бўлганда, яъни } \varphi = 45^\circ + 180^\circ n = 45^\circ, 225^\circ \text{ бўлганда; } r_{\min} = 2; 2\varphi =$$

$$= -90^\circ + 360^\circ n \text{ бўлганда, яъни } \varphi = -45^\circ + 180^\circ n = 135^\circ, 315^\circ \text{ бўлганда.}$$

$$45^\circ \text{ ва } 135^\circ \text{ бўлганда қўшни экстремал радиус векторлар. Изланган юз}$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (3 + \sin 2\varphi)^2 d\varphi = \frac{19\pi}{8} \text{ га тенг. } 1646. \frac{3\pi}{4}. 1647. \frac{\pi a^2}{2}. 1648. \frac{\pi a^2}{4}.$$

$$1649. r = a(\sin \varphi + \cos \varphi) = a\sqrt{2} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right); r_{\max} = a\sqrt{2},$$

$$\varphi - \frac{\pi}{4} = 0; \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ бўлганда; } \varphi - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{4} \text{ ва } \frac{3\pi}{4} \text{ бўл-}$$

$$\text{ганда } r_{\min} = 0. \text{ Юз } S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (a\sqrt{2})^2 \cos^2\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) d\varphi = \frac{\pi a^2}{2}. \text{ Агарда}$$

$$\text{декарт координаталарига ўтилса, жавоб соддароқ ҳосил бўлади:}$$

$$x^2 + y^2 = a(x + y) \text{ — айлана. } 1650. \frac{7a^2}{4\pi}. 1651. (10\pi + 27\sqrt{3}) \frac{a^2}{64}.$$

$$1652. \frac{3}{2} a^2. 1653. 36. 1654. 12. 1655. \frac{32}{3}. 1656. \frac{4}{3} (328\text{- бет, } 56\text{- чиз-}$$

$$\text{мага қар.}). 1657. \frac{14}{3}. 1658. 2. 1659. \frac{16}{3}. 1660. 17,5 - 6 \ln 6$$

$$316$$

$$1661. 2 \int_{-1}^0 -x \sqrt{x+1} dx = \frac{8}{15} \text{ (327-бет, 53-чизмага қар.)}. 1662. r_{\max} =$$

$$= 4, 2\varphi = 180^\circ + 360^\circ n, \varphi = 90^\circ + 180^\circ n = 90^\circ \text{ ёки } 270^\circ \text{ бўлганда};$$

$$r_{\min} = 2, 2\varphi = 0^\circ = 360^\circ n, \varphi = 180^\circ n; 0^\circ \text{ ёки } 180^\circ \text{ бўлганда. Юз}$$

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 + \cos 2\varphi)^2 d\varphi = \frac{19\pi}{8}. 1663. \frac{3\pi}{4}. 1664. \frac{\pi a^2}{2}. 1665. \frac{\pi a^3}{4}.$$

$$1666. \frac{a^2}{4} (e^{2\pi} - e^{-2\pi}) = \frac{a^2}{2} \operatorname{sh} 2\pi. 1667. 4ab \operatorname{arctg} \frac{b}{a}. 1668. \frac{11}{8} \pi a^2.$$

$$1669. \pi \rho h^2. 1670. \frac{8\pi a^2 b}{3}. 1671. 12\pi. 1672. 58,5\pi. 1673. 2\pi^2 a^2 b$$

$$1674. \pi a^3 \left(\frac{\operatorname{sh} 2}{2} + 1 \right). 1675. \frac{512\pi}{15}. 1676. \frac{7}{6} \pi a^3. 1677. 3\pi^3.$$

$$1678. \frac{512\pi}{7}. 1679. \frac{\pi}{4} \left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right). 1680. \frac{\pi a^3}{6}. 1681. \frac{\pi^2}{2}.$$

$$1682. \frac{64\pi}{3}. 1683. \frac{(\pi + 2)\pi}{4}. 1684. \frac{4}{3} \pi a^2 b. 1685. \frac{32\pi a^3}{105}.$$

$$1686. 19,2\pi. 1687. \frac{8\pi a^3}{3}. 1688. V = \frac{128\pi}{3}. 1689. 5\pi^2 a^3.$$

$$1690. 72\pi. 1691. \frac{112}{27}. 1693. 6a. 1694. \frac{670}{27}. 1695. 8a. 1696. \text{Уқлар}$$

$$\text{билан кесилиш нуқталари } t_1 = 0 \text{ ва } t_2 = \sqrt[4]{8}. s =$$

$$= \int_0^{\sqrt[4]{8}} \sqrt{t^4 + 1} \cdot t^3 dt = 4 \frac{1}{3}. 1697. \sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

$$1698. 2a \operatorname{sh} 1 \approx 2,35a. 1699. s = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{12}{5}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx; 1+x^2 = t^2 \text{ деб олампиз};$$

$$s = \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{13}{5}} \frac{t^2 dt}{t^2 - 1} = \left[t + \frac{1}{2} \ln \frac{t-1}{t+1} \right]_{1,25}^{2,6} = 1,35 + \ln 2 \approx 2,043. 1700. \text{Уқ.}$$

$$\text{лар билан кесилиш нуқталари } x_1 = 0 \text{ ва } x_2 = \frac{\pi}{3}; s = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x \, dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\sin x)}{1 - \sin^2 x} = \ln(2 + \sqrt{3}) \approx 1,31. \quad 1701. \quad 1) \quad 4\sqrt{3};$$

$$2) \quad \frac{1}{2} \ln(2 \operatorname{ch} 2) \approx 1,009. \quad 1702. \quad 1) \quad 8a; \quad 2) \quad \pi a \sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2} \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}). \quad 1703. \quad \frac{3\pi a}{2}. \quad 1705. \quad \frac{28}{3}. \quad 1706. \quad \ln 3. \quad 1707. \quad 2 \ln 3 - 1.$$

$$1708. \quad p[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})] \approx 2,29p. \quad 1709. \quad 4\sqrt{3}. \quad 1711. \quad \frac{14\pi}{3}.$$

$$1712. \quad \pi a^2 (\operatorname{sh} 2 + 2). \quad 1713. \quad 2\pi \left(1 + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\right). \quad 1714. \quad 2\pi[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]. \quad 1715. \quad \frac{64}{3} \pi a^2. \quad 1716. \quad 3\pi. \quad 1717. \quad 4\pi^2 ab. \quad 1718. \quad \frac{34\sqrt{17}-2}{9} \pi.$$

$$1719. \quad \frac{62\pi}{3}. \quad 1720. \quad 2,4 \pi a^2. \quad 1721. \quad 29,6\pi. \quad 1722. \quad 144 \, m; \text{ пастки яرمىга}$$

$$\text{бўлган босим } 108 \, m. \quad 1723. \quad \frac{ah^2}{6}. \quad 1724. \quad \frac{2}{3} R^3. \quad 1725. \quad 240 \, m.$$

$$1726. \quad J_x = \frac{ab^3}{3}; \quad J_y = \frac{a^3b}{3}. \quad 1727. \quad J_x = \frac{ab^3}{12}; \quad J_y = \frac{a^3b}{12}. \quad 1728. \quad 6,4.$$

$$1729. \quad M_x = M_y = \frac{a^3}{6}; \quad x_c = y_c = \frac{a}{3}. \quad 1730. \quad M_x = \int_0^a \frac{y}{2} y \, dx = 0,1 ab^2;$$

$$M_y = \int_0^a xy \, dx = \frac{1}{4} ba^2; \quad S = \int_0^a y \, dx = \frac{ab}{3}; \quad x_c = \frac{3}{4}a, \quad y_c = 0,3b. \quad 1731. \quad x_c = 0,$$

$$y_c = \frac{2 \int_0^a \frac{y}{2} y \, dx}{0,5 \pi a^2} = \frac{4}{3\pi} a \approx \frac{4}{9} a. \quad 1732. \quad 1) \quad 1120\pi \, \kappa\Gamma\text{м}; \quad 2) \quad 250 \pi R^4 \, \kappa\Gamma\text{м}.$$

$$1733. \quad \int_R^{R+h} \frac{mgR^2}{x^2} \, dx = \frac{mgRh}{R+h}. \quad 1734. \quad \frac{1000 \pi R^2 H^2}{6} \approx 21 \, \kappa\Gamma\text{м}.$$

$$1735. \quad 1241 \, \kappa\Gamma\text{м} \quad 1736. \quad 0,024 \, \pi \, \kappa\Gamma\text{м}. \quad 1737. \quad t = \int_0^H \frac{S \, dx}{0,6 s \sqrt{2gx}} =$$

$$= 100 \, \text{сек}. \quad 1738. \quad t = \frac{R^2}{0,6r^2 H^2 \sqrt{2g}} \int_h^{H+h} x \sqrt{x} \, dx, \text{ бунда } h \approx 2 - \text{қў-}$$

шимча конуснинг баландлиги. Ҳисоблаш натижасида $t \approx 42 \, \text{сек.}$ га эришамиз. 1739. $\frac{ah^2}{3}$. 1740. $17 \frac{1}{15}$. 1741. $\frac{h}{\sqrt{2}}$. 1742. Ҳар бир девор-

га босим 2,4 т. 1743. $I_x = \int_0^a y^2 x \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4 \sin^2 t \cos^2 t \, dt = \frac{\pi a^4}{16}$.

1744. $x_c = 0$; $y_c = \frac{\int_0^2 y^2 \, dx}{2 \int_0^2 y \, dx} = \frac{8}{5} \cdot 1745. \frac{\pi R^2 \cdot 1000}{H^3} \int_0^H (H-x)^2 x \, dx \approx$

$\approx 30\pi \text{ кгм. } 1746. \frac{p_0 v_0}{k-1} \left[\left(\frac{v_0}{v_1} \right)^{k-1} - 1 \right] \approx 1598 \text{ кгм. } 1747. t =$
 $= \frac{14\pi R^2}{15 \cdot s \cdot 0,8} \sqrt{\frac{R}{2g}} = \frac{400\pi}{3} \approx 419 \text{ сек. } 1748. 1) 1; 2) \text{ ва } 3) \text{ интег-}$

раллар узоқлашувчи; 4) $n > 1$ бўлганда $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}$; $n < 1$ бўлган-

да узоқлашади. 1749. 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) 1; 5) $\ln 2$; 6) 16

1750. 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$; 3) $\frac{\pi-2}{8}$. 1751. 1) $6\sqrt[3]{2}$; 2) узоқла-

шади 3) 6. 1752. 1) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ яқинлашади, чунки $\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} < \frac{1}{x^{3/4}}$;

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3/4}}$ эса яқинлашади. (1748-масалага қар.); 2) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{3\sqrt{x^3-1}}$ узоқла-

шади, чунки $\frac{1}{3\sqrt{x^3-1}} > \frac{1}{x}$. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x}$ эса узоқлашади; 3) $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x} \, dx}{x}$

яқинлашади, чунки $x \geq 1$ бўлганда $\frac{e^{-x}}{x} < e^{-x}$, $\int_1^{\infty} e^{-x} \, dx$ эса

яқинлашади (1749-масалага қар.); 4) $\int_1^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x^3}$ абсолют яқинлашади,

чунки $\frac{|\sin x|}{x^3} < \frac{1}{x^2}$, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ яқинлашади (1748-масалага қар.);

5) $\int_2^{\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{x^4+1}}$ узоқлашади, чунки $x > 1$ бўлганда $\frac{x}{\sqrt{x^4+1}} >$

$> \frac{x}{\sqrt{x^2 + x^2}} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{2}}$ эса узоқлашади; 6) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx +$
 $+ \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$ яқинлашади, чунки $x > 1$ бўлганда $e^{-x^2} < e^{-x}$,

$\int_1^{\infty} e^{-x} dx$ эса яқинлашади. 1753. 1) $n < 1$ бўлганда $\int_0^1 \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{1-n}$;

$n > 1$ бўлганда узоқлашади. 2) $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} = \frac{(b-a)^{1-n}}{1-n}$, $n < 1$ бўл-

ганда, $n > 1$ бўлганда узоқлашади. 1754. π . 1755. 2. 1756. $3\pi a^2$.
 1757. $2\pi^2 a^3$. 1758. $\pi [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$. 1759. $\frac{4\pi}{3}$. 1761. $\frac{1}{2}$;

2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) узоқлашади. 1762. 1) $\ln(1 + \sqrt{2})$; 2) 2; 3) $1 - \frac{\pi}{4}$.

1763. $\frac{1}{2}$. 1764. 16 π , 1765. 2 π . 1766. 1) $\frac{2}{\pi}$; 2) $\frac{3 \ln 2}{\pi}$; 3) $\frac{1}{e-1}$;

4) $\frac{a^2 + ab + b^2}{3}$; 5) $\frac{\pi}{4}$. 1768. 1) $s(h) = (0, 2)$ $|s(h)| < \frac{4}{15} < 0,3$.

1770. $\frac{55}{6}\pi \approx 28,8$ дм³. 1772. $\ln 2 = 0,6932$; $|s(h)| < \frac{2 \cdot 10^{-4}}{15} < 0,0001$.

1773. 8, 16 π . 1777. $\approx 1,22\pi$. 1778. $R = \frac{1}{2}$. 1779. $R = \frac{1}{2}$. 1780. (2; 0)

учида $R_1 = \frac{1}{2}$; (0; 1) учида $R_2 = 4$. 1781. $R = 4a$. 1782. $y_{\max} = \frac{1}{e}$, $x=1$

бўлганда; $R = e$. 1783. (4; 4). 1784. (3; -2). 1785. (0; 1). 1786. $27X^2 +$
 $+ 8Y^2 = 0$. 1787. $(2X)^{2/3} + Y^{2/3} = 3^{2/3}$, 1788. $X^{2/3} - Y^{2/3} = (2a)^{2/3}$;

1789. $X = a \cos t$; $Y = a \sin t$ ёки $X^2 + Y^2 = a^2$. 1790. $k = e^x (1 + e^x)^{-2/3}$;

$k_{\max} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ $x = -\frac{\ln 2}{2} \approx -0,347$ нуқтада. 1792. 1) $R = \frac{2}{3}\sqrt{2ar}$;

2) $\frac{a^2}{3r}$; 3) $\frac{r^2}{a^2}$. 1793. $\frac{1}{2}$. 1794. 2. 1795. 1. 1796. 1. 1797. (-2; 3)

1798. $(0; -\frac{4}{3})$. 1799. $(-\frac{11}{2}; \frac{16}{3})$. 1800. $X = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \approx -0,7$,

$Y = -\sqrt{2} \approx -1,4$. 1801. $8X^3 - 27Y^2 = 0$. 1802. $X = -t \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)$.

$Y = 4t \left(1 + \frac{t^2}{3}\right)$; эгри чизик ва унинг эволотасини яшаш учун

$t = 0; \pm 1; \pm \frac{3}{2}$ бўлганда x, y, X, Y ларнинг жадвалини тузиш

керак. 1803. $(X+Y)^{\frac{2}{3}} - (X-Y)^{\frac{2}{3}} = 4$. 1804. $(X+Y)^{\frac{2}{3}} + (X-Y)^{\frac{2}{3}} =$

$=2a^{\frac{2}{3}}$; ўқларни 45° га бурганда бу тенглама $x_1^{\frac{2}{3}} + y_1^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}}$ кўринишига келади, яъни астронданнинг эвалютаси, ўлчовлари икки ба-
равар ошган ва 45° га бурилган астронда бўлади. 1806. 21.

1807. 5*t*. 1808. 7,5. 1809. 2*π*. 1810. $2 \operatorname{sh} 1 \approx 2,35$. 1811. $\frac{3 + \ln 2}{2}$.

1812. $3x + 4y = 0$; $\frac{dr}{dt} = 4i - 3j$. 1813. $y = \frac{4}{3}x - \frac{x^2}{9}$; $\frac{dr}{dt} = 3i + 2(2-t)j$.

1814. $w = \frac{d^2r}{dt^2} = -2j$; $w_t = \frac{4|t-2|}{\sqrt{4t^2-16t+25}}$; $w_n = \frac{6}{\sqrt{4t^2-16t+25}}$;

$t = 0$ бўлганда $w_t = 1,6$; $w_n = 1,2$. 1815. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $v = -a \sin t i +$

$+ b \cos t j$; $w = -r$. 1816. $\frac{x-t}{1} = \frac{y-t^2}{2t} = \frac{z-t^3}{3t^2}$. 1817. $\frac{X-x}{1} =$

$= \frac{Y-x^2}{2x} = \frac{Z-\sqrt{x}}{1}$. 1818. $\frac{x-1}{12} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-4}{3}$. 1819. $r =$
 $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= -i + k$, $B = i + k$, $N = -2j$; $\tau = \frac{-i+k}{\sqrt{2}}$, $\beta = \frac{i+k}{\sqrt{2}}$, $v = -j$.

1820. $B = \dot{r} \times \ddot{r} = 6i - 6j + 2k$, $N = (r \times \ddot{r}) \times \dot{r} = -22i - 16j +$
 $+ 18k$, бош нормалнинг тенгламалари: $\frac{x-1}{11} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-1}{-9}$; би-

нормаль: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1}$ ва ёпишма текислик: $3x - 3y + z = 1$.

1821. $N = 3(i+j)$, $B = -i+j+2k$. Бош нормалнинг тенгламалари

$x = y$, $z = 0$; бинормаль: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. 1822. t ни йўқотиб,

конус сиртининг тенгласини $x^2 + y^2 = z^2$ кўринишда ҳосил қиламиз.

$\dot{r} = (\cos t - t \sin t)i + (\sin t + t \cos t)j + k = i + k$; $\ddot{r} = (-2 \sin t -$
 $- t \cos t)i + (2 \cos t - t \sin t)j = 2j$; $B = \dot{r} \times \ddot{r} = 2i + 2k$; $N = 4j$.

Уринма: $x = z$ ва $y = 0$ бош нормаль; Oy ўқи; Бинормаль: $x + z = 0$

ва $y = 0$. 1823. $t = \frac{\pi}{2}$ бўлганда $\frac{x}{-a} = \frac{z - \frac{\pi}{2}}{b}$, $y = a$.

1824. $\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$; $\cos \beta = \pm \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$; $\cos \gamma =$

$= \pm \frac{\sqrt{4ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$; ишорани танлаш эгри чизиқнинг ҳар бир шохчаси-

даги йўналишни танлашга боғлиқ. 1825. $x = \sin 2t$, $y = 1 - \cos 2t$,
 $z = 2t^2$ винт чизиғининг тенгламаларидир, бунда t — бурилиш бурчаги

(48- қизма). $\left(t = \frac{\pi}{2} \text{ бўлганда} \right)$ С нуқтадаги бирлик бинормаль вектор $\beta =$

$= \frac{\pi i + j + k}{\sqrt{2 + \pi^2}}$. 1826. $t = \frac{\pi}{2}$ бўлганда $v = a(i+j)$, $\omega = ai$. 1827.

Сўнгга топамиз:

$$\begin{array}{l} \dot{r} \\ \ddot{r} \\ \ddot{r} \\ \ddot{r} \end{array} \begin{array}{l} t \\ t^2 \\ t^3 \\ 6t^2 - 6t^2 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \\ 0 \end{array} \quad 1) \quad |\dot{r}| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

2) $|\dot{r} \times \ddot{r}| = 2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}$; 3) $\dot{r} \ddot{r} \ddot{r} = 12$; 4) $\frac{1}{R} = \frac{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{\sqrt{(1 + 4t^2 + 9t^4)^3}} = 2$; 5) $\frac{1}{\rho} = \frac{12}{4(9t^4 + 9t^2 + 1)} = 3$. 1838.

$\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{2}}{(x+y)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $\frac{1}{\rho} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. 1839. $\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{2}}{3}$; $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{3}$.

1840. «Ўнг» винт чизигида: $\frac{1}{\rho} = \frac{b}{a^2 + b^2}$; «чапда»: $\frac{1}{\rho} = -\frac{b}{a^2 + b^2}$.

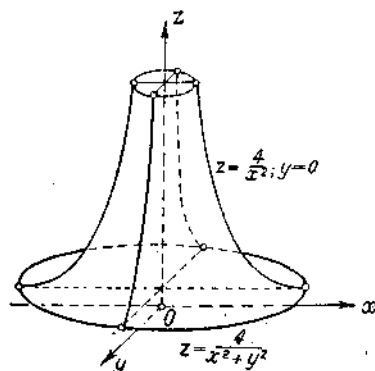
1841. $\frac{1}{R} = \frac{2t}{(2t^2 + 1)^3} = \frac{2}{9}$; $\frac{1}{\rho} = -\frac{2t}{(2t^2 + 1)^3} = -\frac{2}{9}$. 1842. $r = \frac{y^2}{1}t + yj = \frac{y^4}{4}k$; $\frac{1}{R^2} = \frac{9y^4 + 4y^6 + 1}{(y^2 + 1 + y^6)^3} = \frac{14}{27}$; $\frac{1}{\rho} = -\frac{3}{7}$. 1843. $\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{2}}{3}$; $\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{3}$. 1844. 3) (0, 0) нуқтадан бошқа бутун текислик;

4) $x^2 + y^2 \leq a^2$; 5) $xy > 0$ (биринчи ва учинчи квадрантлар); 6) $x^2 + y^2 < 1$; 7) тўғри чизиқдан бошқа бутун текислик. 1) ва

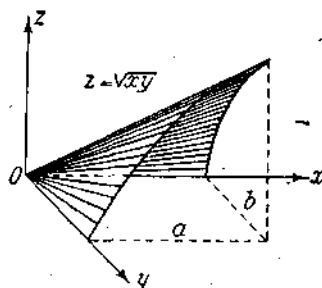
2) тенгламалар айланма параболаларни аниқлайди; 3) $z = \frac{4}{x^2}$ ва

$y = 0$ эгри чизиқнинг Oz ўқи атрофида айланишдан ҳосил бўлган айланма сирт (49- чизма); 4) ярим сфера; 5) конус, буни тасвирлаш учун $x = a$, $z^2 = ay$ ва $y = b$, $z^2 = bx$ — параболалардан иборат кесимларни олиш керак (50- чизма); 6) $z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $y = 0$ эгри чизиқнинг Oz ўқи атрофида айланишдан ҳосил бўлган айланма сирт;

7) Ясовчилари $y = kx$, $z = \frac{kx}{k-1}$, йўналтирувчилари эса асимптотала-

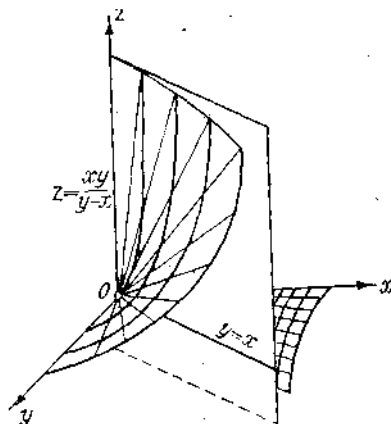


49- чизма.



50- чизма.

ридан бири $y = x$ ($x = h$, $y = h$) текисликда ётган ва учлари Oy ўқда бўлган $y = h$, $(x - h)(z + h) = -h^2$ тенг томонли гипербола-лардан иборат конус; олдингига ўхшаш гиперболалар $x = h$ ва $z = h$ кесимда ҳам ҳосил бўлади (51-чизма).



51-чизма.

1845. $s = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$. $0 < x < p$, $0 < y < p$ ва $x+y > p$. Функциянинг мавжудлик соҳаси, яъни $x = p$, $y = p$ ва $x+y = p$ чизиклар билан чегараланган учбурчак ичида нуқталар тўплами. 1848. $\Delta_x z = (2x-y+\Delta x)\Delta x = 0,21$; $\Delta_y z = (2y-x+\Delta y)\Delta y = -0,19$; $\Delta z = \Delta_x z + \Delta_y z - \Delta x \Delta y = 0,03$. 1849. $|y| \leq |x|$ соҳада узлуксиз ва бир қийматли бўлганда $z = +\sqrt{x^2 - y^2}$ ва $z = -\sqrt{x^2 - y^2}$ функциялар айланма конуснинг (Ox ўқ билан) юқори ва қуйи сиртлари билан тасвирланади. $z = \pm \sqrt{x^2 - y^2}$ тенглама билан аниқланувчи узлукли функцияга мисол сифатида қуйидагиларни келтириш мумкин:

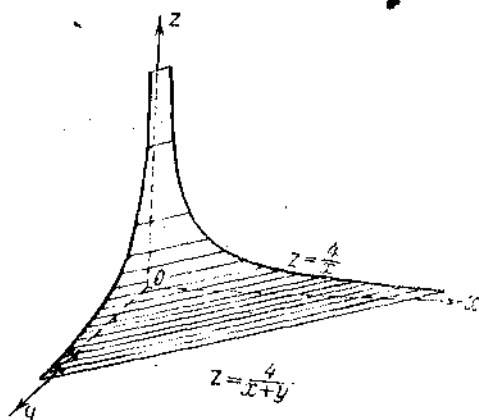
$$z = \begin{cases} +\sqrt{x^2 - y^2}, & 0 \leq x < 1 \\ -\sqrt{x^2 - y^2}, & 1 \leq x < 2 \\ +\sqrt{x^2 - y^2}, & 2 \leq x < 3 \end{cases} \text{ бўлганда } x = 1, x = 1 \text{ ва } x. \text{ к. тўғ-} \\ \text{ри чизиклар — узилиш чизиклари}$$

Бу функциянинг тасвири конуснинг юқори ва қуйи сиртларидан кетма-кет олинган полосалар бўлади. Функциянинг аниқланиш соҳаси $|y| \leq |x|$, яъни $y = \pm x$ тўғри чизиклар орасидаги ўткир бурчакнинг ичида ва тўғри чизикларда ётувчи нуқталар тўплами. 1854. 2)

$y = -x$ тўғри чизикдан бошқа бутун текислик; 3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс ичида ва унда ётувчи нуқталар; 4) бутун текислик; 5) $|y| \leq |x|$ бурчак ичидаги ва унинг томонларидаги нуқталар; 6) текислиكنинг $x \geq 0$ ва $y \geq 0$ квадранти, (2) текислик ясовчилари $z = h$, $x + y = \frac{4}{h}$ ва йўналтирувчиси $z = \frac{4}{x}$, $y = 0$ бўлган цилиндрик сирт

(52- чизма). (5) ва (6) сиртлар — конус сиртлардир; (4) эса — параболоиддир. 1858. $3x(x+2y)$; $3(x^2-y^2)$. 1860. $-\frac{y}{x^2}$; $\frac{1}{x}$. 1861.

$$\frac{-y}{x^2+y^2}; \frac{x}{x^2+y^2}. 1862. -\frac{y^2}{(x-y)^2}; \frac{x^2}{(x-y)^2}. 1863. \frac{\frac{3}{\sqrt[3]{t}}}{3x(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{t})};$$



52- чизма.

$$\frac{\frac{3}{\sqrt[3]{x}}}{3t(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{x})}. 1864. \frac{\partial c}{\partial a} = \frac{a-b \cos \alpha}{c}, \frac{\partial c}{\partial b} = \frac{b-a \cos \alpha}{c}; \frac{\partial c}{\partial \alpha} =$$

$$= \frac{ab \sin \alpha}{c}. 1866. \frac{\partial y}{\partial x} = e^{-xy}(1-xy); \frac{\partial u}{\partial y} = -x^2 e^{-xy}. 1867. \frac{\partial u}{\partial x} =$$

$$= \frac{5t}{(x+2t)^2}; \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{5x}{(x+2t)^2}. 1868. \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{t}{2\sqrt{x-x^2t^2}}; \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \sqrt{\frac{x}{1-xt^2}}.$$

$$1874. \frac{\partial z}{\partial x} = -a \sin(ax-by); \frac{\partial z}{\partial y} = b \sin(ax-by). 1875. \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y|x|}{x^2\sqrt{x^2-y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{|x|}{x\sqrt{x^2-y^2}}. 1876. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3y}{(3y-2x)^2}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3y}{(3y-2x)^2}.$$

$$1877. \frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{ctg}(x-2t); \frac{\partial u}{\partial t} = -2 \operatorname{ctg}(x-2t). 1878. \frac{\partial u}{\partial x} =$$

$$= 2 \sin y \cos(2x+y); \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \sin x \cos(x+2y). 1885. 1) 0,075.$$

$$2) -0,1e^2 \approx -0,739. 1887. -0,1. 1888. 1,2\pi \operatorname{cm}^3. 1889. 0,13 \operatorname{cm};$$

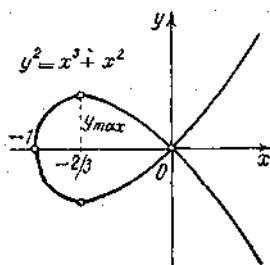
$$1890. 1) dz = -\left(\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{y^2}\right)dy; 2) ds = \ln t dx + \frac{x dt}{t}.$$

$$1891. \Delta z = 0,0431, dz = 0,04. 1892. 0,15. 1893. -30\pi \operatorname{cm}^3.$$

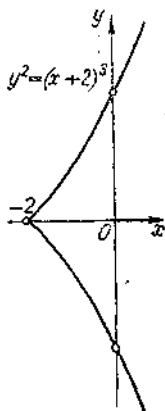
$$1895. \frac{dz}{dt} = -(e^t + e^{-t}) = -2 \operatorname{ch} t. 1897. \frac{dz}{dx} = e^y + xe^y \frac{dy}{dx}. 1899.$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2x}{y} \left(1 - \frac{x}{y}\right); \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{x}{y} \left(4 + \frac{x}{y}\right). \quad 1900. \quad 1) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \\
& = m \frac{\partial z}{\partial u} + p \frac{\partial z}{\partial v}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = n \frac{\partial z}{\partial u} + q \frac{\partial z}{\partial v}; \quad 2) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial z}{\partial v}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \\
& = x \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial v}. \quad 1901. \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi; \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \left(-\frac{\partial u}{\partial x} \sin \varphi + \right. \\
& \left. + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \varphi\right) r. \quad 1903. \quad 1) \quad \frac{\partial z}{\partial t} = 2[(Ax + By) \cos t - (Bx + Cy) \sin t] = \\
& = (A - C) \sin 2t + 2B \cos 2t; \quad 2) \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{2e^{2t}}{e^{4t} + 1}. \quad 1906. \quad 1) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \\
& + \frac{\partial z}{\partial v}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2 \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}; \quad 2) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} + \frac{\partial z}{\partial v} \\
& 1907. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2-x}{y+3}. \quad 1908. \quad 1) - \sqrt[3]{\frac{y}{x}}; \quad 2) \frac{2ye^{2x} - e^{2y}}{2xe^{2y} - e^{2x}}. \quad 1910. \quad \pm \frac{3}{4}. \\
& 1911. \quad -1. \quad 1912. \quad 1) (-1; 3) \text{ на } (-1; -1); \quad 2) (1; 1) \text{ на } (-3; 1). \quad 1913. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \\
& = \frac{3-x}{z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}. \quad 1914. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{2z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{2z}. \quad 1915. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a}{c}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \\
& = \frac{b}{c}. \quad 1918. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{4y}. \quad 1919. \quad -\frac{y}{x}. \quad 1920. \quad \frac{x^2 + xy + y^2}{xy}. \\
& 1921. \quad \frac{1}{2}. \quad 1922. \quad \frac{4}{5}; \quad \frac{1}{5}. \quad 1923. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x-z}. \quad 1926. \quad 6; \quad 2; \quad 0; \quad 6. \\
& 1929. \quad -\frac{6y}{x^4}; \quad \frac{2}{x^2}; \quad 0; \quad 0. \quad 1931. \quad \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}; \quad \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}; \quad \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}. \\
& 1938. \quad 1) \frac{2}{x^4} (3y^2 dx^2 - 4xy dx dy + x^2 dy^2); \quad 2) -\frac{(y dx - x dy)^2}{xy^3}. \\
& 1942. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(3 \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z = 9 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 6 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \quad 1 \\
& \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(3 \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right) \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right) z = 3 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \quad -4 \\
& \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \quad 3 \\
& \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}. \\
& 1943. \quad 1942\text{-масаладагидай ёзиб, } 4 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \text{ га эга бўламиз.} \\
& 1945. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2 \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{2y}{x^3} \frac{\partial z}{\partial v} \quad x^3 \\
& \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \quad -y^2 \\
& x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{2y}{x} \frac{\partial z}{\partial v}. \\
& 1946. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \quad 1947. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2}{1-2y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{4x}{(1-2y)^2};
\end{aligned}$$

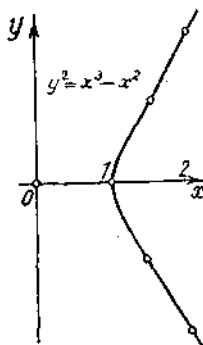
$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{8x^2}{(1-2y)^3}$. 1948. 0; 0; $\frac{4}{9t^2\sqrt[3]{t}}$; $-\frac{28x}{27t^3\sqrt[3]{t}}$. 1953. $d^2u =$
 $= -\frac{y}{x^2} dx^2 + \frac{2}{x} dx dy$; $d^3u = \frac{2y}{x^2} dx^3 - \frac{3}{x^2} dx^2 dy$. 1954. $4a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$.
 1955. $-v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{v^2}{u} \frac{\partial z}{\partial v}$. 1959. $u = \frac{x^2}{2} + x \ln y - \cos y + C$.
 1962. $u = \frac{x}{z} + \frac{1}{x} + \ln y - \arctg z + C$. 1963. $u = xy^2 - y + \frac{3y^2}{2} + C$.
 1964. $u = x \sin 2y + y \ln \cos x + y^2 + C$. 1965. $u = xy + \frac{\sin^2 y}{x} + y + C$.
 1966. $u = \sqrt{x(1+\sqrt{t^2+1})} + C$. 1967. $u = x \ln y - x \cos 2z + yz + C$.
 1968. $u = \frac{x-3y}{z} + C$. 1969. $y = \pm x\sqrt{1+x}$; жойлашиш соҳаси:
 $1+x \geq 0$; $x \geq -1$. Ох ўқ билан кесишгиш нуқталари: $y=0$, $x=0$
 ёки -1 махсус нуқта $O(0, 0)$ — тугун. $x = -\frac{2}{3}$ бўлганда y нинг
 экстремуми $y_3 = \mp \frac{2}{3\sqrt[3]{3}} \approx \mp \frac{2}{5}$ (53- чизма). 1970. $y = \pm (x+2) \times$
 $\times \sqrt{x+2}$; $x \geq -2$ жойлашиш соҳаси. $(-2; 0)$ махсус нуқта — қай-
 тиш нуқтаси. Ўқлар билан кесишган нуқталар: $x=0$ бўлганда $y = \pm$
 $\pm 2\sqrt[3]{2}$; $y=0$ бўлганда $x = -2$ (54- чизма. 1971. $y = \pm x\sqrt{x-1}$.
 Жойланиш соҳаси $x \geq 1$, $x=0$. $y=0$ — махсус яқкаланган нуқта.



53- чизма.



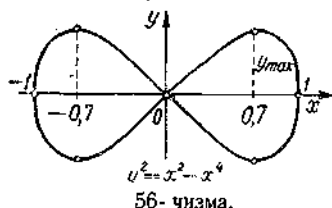
54- чизма.



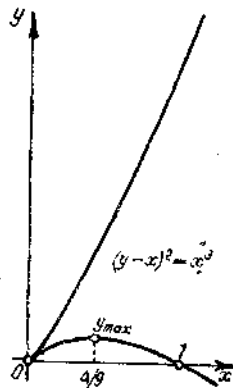
55- чизма.

$x=1$ бўлганда $y=0$, $x=2$ бўлганда $y = \pm 2$. Букилиш нуқтаси:
 $x = \frac{4}{3}$, $y = \pm \frac{4}{3\sqrt[3]{3}}$ (55- чизма). 1972. $y = \pm x\sqrt{1-x^2}$; жойлашиш
 соҳаси $|x| \leq 1$ ёки $-1 \leq x \leq 1$. Ўқлар билан кесишган нуқталари:
 $y=0$ бўлганда $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$. Махсус нуқта $O(0; 0)$ — ту-

гун. $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \approx \pm 0,7$ бўлганда экстремумлар $y_0 = \pm \frac{1}{2}$ (56-чизма). 1973. $y = x \pm x\sqrt{x}$ Жойлашиш соҳаси $x \geq 0$; ўқлар билан кесилиш нуқталари: $y = 0$ бўлганда $x = 0$ ёки $x = 1$; махсус нуқта $O(0, 0)$ — уринмаси $y = x$ бўлган биринчи тур қайтиш нуқтаси. $y = x - x\sqrt{x}$ функция $x = \frac{4}{9}$ бўлганда $y_{\max} = \frac{4}{27}$ экстремумга эга



56- чизма.



57- чизма.

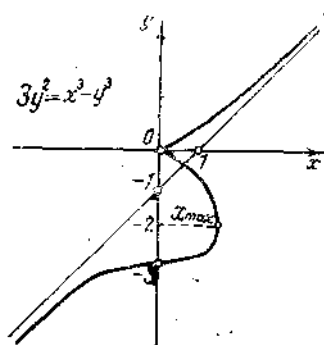
(57- чизма): 1974. $y = \pm (x-2)\sqrt{x}$; $x \geq 0$; $y = 0$ бўлганда $x = 0$ ёки $x = 2$; махсус нуқта $(2; 0)$ — тугун. Эгри чизиқнинг шакли 53- чизмадагидай, фақат ўнг томонга силжиган. 1975. $y = \pm (x+2a) \times \sqrt{\frac{x+2a}{x}}$; эгри чизиқ x ва $x+2a$ ҳар хил ишорага эга, яъни $2a \leq x < 0$ бўлган соҳада жойлашган. Махсус нуқта $(-2a; 0)$ — қайтиш нуқтаси; $x = 0$ асимптота. Эгри чизиқнинг шакли 89- чизмадаги циссоидадай, фақат $2a$ га чапга силжиган. 1976. $y = \pm \sqrt{\frac{x^3 - y^2}{3}}$;

жойлашиш соҳаси $y \leq x$. Ўқлар билан кесилиш нуқталари: $x = 0$ бўлганда $y = 0$ ёки $y = -3$. Махсус нуқта $(0; 0)$ — қайтиш нуқтаси. $y = kx + b$ кўринишдаги асимптотани топайлик. Тенгламенинг ҳадларини x^2 га бўлиб, $1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x} = 0$ ни ҳосил қиламиз. Бундан $k =$

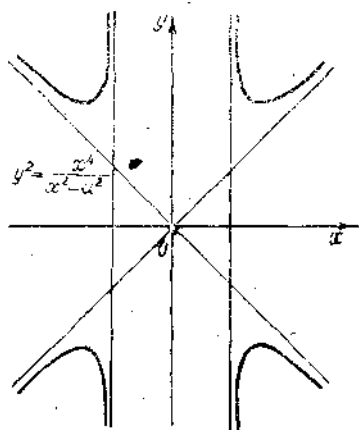
$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3y^2}{x^2 + xy + y^2} = -1$. Шундай қилиб, асимптота $y = x - 1$ бўлади. $y = -2$ бўлганда $x = \varphi(y) =$

$= \sqrt[3]{y^3 + 3y^2}$ функциянинг экстремуми $x_0 = \sqrt[3]{4} \approx 1,6$; $x = 0$ бўлганда $y = -3$ — букилиш (58- чизма). 1977. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Декарт япроғи (366- масалага қаранг). $O(0; 0)$ махсус нуқта — уринмаслари $y = 0$ ва $x = 0$ бўлган тугун. $y = kx + b$ кўринишдаги асимптотасини топамиз. Бунда тенгламани $1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 - 3a\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x} = 0$ кўринишга

келтирсак, бундан $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{y}{x}\right) = -1$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y + x) =$



58- чизма.



59- чизма.

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3axy}{x^2 - xy + y^2} = -a$. Демак, $y = -x - a$ — асимптота (83-чиз-

мага қаранг). 1978. $y = \pm \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}$. Ох ва Оу ўқларига нисбатан симметрик. Жойланиш соҳаси $|x| > a$ ва $|y| > |x|$. $O(0, 0)$ — махсус яккаланган нукта. $x = \pm a\sqrt{2}$ бўлганда $y = \pm 2a$ экстремум. Асимптоталар. $x = \pm a$ ва $y = \pm x$ (59-чизма). 1979. $y = \pm x\sqrt{2-x}$; жойланиш соҳаси $x \leq 2$. $y = 0$ бўлганда Ох ўқи билан кесишиш нуқталари $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Махсус нукта $(0; 0)$ — тугун. $x = \frac{4}{3}$ бўлганда y

нинг экстремуми $y_3 = \pm \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \pm 1,08$. (Эгри чизикнинг шакли 53-

чизмадагидай.) 1980. $y = \pm \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - (x-a)^2}$ жойланиш соҳаси $|x - a| \leq a$, ёки $-a \leq x - a \leq a$, ёки $0 \leq x \leq 2a$. $y = 0$ бўлганда $x_1 = 0$, $x_2 = 2a$. $(0; 0)$ нукта махсус нукта (қайтиш нуқтаси). $y' = 0$ бўлганда $\sqrt{2ax - x^2} + \frac{x(a-x)}{\sqrt{2ax - x^2}} = 0$, $x = \frac{3a}{2}$, $y_3 = \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}a \approx$

$\approx \pm \frac{5}{4}a$ (60-чизма). 1981. $y = \pm (x+2)\sqrt{x}$. Жойланиш соҳаси

$x \geq 0$ ва $(-2; 0)$ яккаланган нукта. $x = \frac{2}{3}$ бўлганда қайрилиш нуқтаси. Эгри чизик 55-чизмадагидай, фақат чапга силжиган. 1982. Жойланиш соҳаси иккита: 1) $x > 0$; 2) $x < -a$. Асимптоталар учта: $y = x + \frac{3a}{2}$, $y = -x - \frac{3x}{2}$ ва $x = 0$. $(-a; 0)$ қайтиш нуқтаси.

птота. Эгри чизик строфоида бўлиб 88- чизмани Оу ўқ бўйича бук-
лаб, сўнгра Оу ўқни a қадар чапга суришдан ҳосил бўлади.
2) Жойланиш соҳалари: $x \geq a$; $x < -a$ ва $x = 0$. (0; 0) нуқта — якка-
ланган. Асимптоталар $x = -a$, $y = a - x$ ва $y = x - a$. $x =$
 $= -\frac{a(\sqrt{5}+1)}{2} \approx -1,6a$ бўлганда $y \approx \pm 3,3a$. 1988. 1) $y =$

$= -\frac{x^2}{4}$; 2) $y = \pm 2x$. 1989. 1) $y = \pm R$; 2) $y = 0$ ва $y = -x$.

1990. 1) $y = 1$; 2) $y = 1$ — ўрама бўлмасдан, қайтиш нуқталарнинг
геометрик ўрнидир; 3) $y = 1$ ҳам ўрама, ҳам қайтиш нуқталарнинг
геометрик ўрни; 4) $y = x - \frac{4}{3}$ — ўрама, $y = x$ — қайтиш нуқталар-

нинг геометрик ўрни. 1991. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. 1992. $y^2 = -\frac{x^3}{x+2}$.

1993. $(x^2 + y^2)^2 = 4a^2 xy$. 1994. $y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2b^2 \cos^3 \alpha}$ траектория-
ларнинг оиласи. Буларнинг ўрамаси $y = \frac{b^2}{2g} - \frac{gx^2}{2b^2}$ («хавфсизлик»
параболаеси). 1995. 1) $x^2 + y^2 = r^2$; 2) $y^2 = 4x$; 3) $y = 1$. 1996. $y^2 =$

$= 4(x+1)$. 1997. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}$. 1998. $y = -\frac{4}{3}x^2$. 1999. $2x + 4y -$
 $- z = 3$. 2000. $xy_0 + yx_0 = 2zz_0$. 2001. $xy_0z_0 + yx_0z_0 + zx_0y_0 = 3a^3$.

2002. $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 1$. 2003. $x + y - z = \pm 9$. 2004. $\frac{x-3}{3} =$

$= \frac{y-4}{3} = \frac{z-5}{-5}$; (0; 0; 0) нуқтада. 2005. $\cos \alpha = -\cos \beta = \cos \gamma =$
 $= \frac{1}{\sqrt{3}}$. 2006. $y = 0$, $x + z +$

$1 = 0$; сирт 323-бетдаги 49-чиз-
мада тасвирланган. 2009. $x -$

$-y + 2z = \frac{\pi a}{2}$ уринма текислик.

Унинг координаталар бошидан
узоқлиги $\frac{\pi a}{2\sqrt{6}}$ Геликоид — «чи-
зикли» сирт. Тўғри чизиклар

$z = h$ кесимларда ҳосил бўлади.

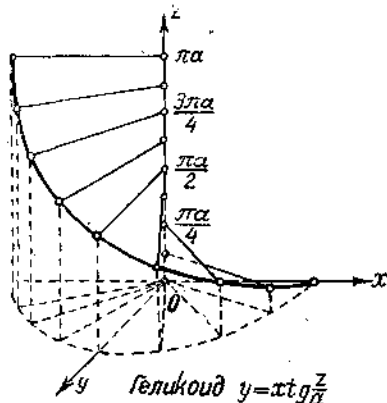
$z = 0$ бўлганда $y = 0$; $z = \frac{\pi a}{4}$

бўлганда $y = x$; $z = \frac{\pi a}{2}$ бўлган-

да $x = 0$; $z = \frac{3\pi a}{4}$ бўлганда $y =$

$= x$; $z = \pi$ бўлганда $y = 0$ (62-
чизма). 2010. $z = 0$ ва $x + y -$

$-z = \frac{a}{2}$. 2012. $\frac{x-4}{4} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{5}$. 2013. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$; $\cos \beta =$



62-чизма.

$= -\frac{2}{3}$; $\cos \gamma = -\frac{1}{3}$. 2014. $z + y - x = a$. текислик, $p = \frac{a}{\sqrt{3}}$.
 2016. 1) $z = 4$; 2) $2x + 2y + z = 6$. 2017. $\text{grad } z = -2xi - 2yj =$
 $= -2(i + 2j)$. 2018. 1) $\text{grad } z = \frac{-i + j}{2x}$; 2) $\text{grad } z = \frac{i + j}{2x}$.
 2019. $\text{grad } h = -\frac{x}{2}i - 2j$. 2020. $\text{tg } \varphi = |\text{grad } z| = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{4xy}} =$
 $= \frac{\sqrt{10}}{4} \approx 0,79$. 2021. $\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 2022. $\frac{du}{dt} = 2 + \sqrt{2}$; $\text{grad } u =$
 $= 2i + 2j + 2k$; $|\text{grad } u| = 2\sqrt{3}$. 2023. $\text{grad } u = \pm 4i$.
 2024. $\frac{6}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. 2025. $\text{grad } z = 0,32i - 0,64j$; $|\text{grad } z| = 0,32\sqrt{5}$.
 2026. $\frac{du}{dt} = \frac{xz + xz + xy}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$. 2027. $\text{grad } u = 2(xi + yj - zk)$;
 $|\text{grad } u| = 2z\sqrt{2}$. 2028. $\text{grad } u = \frac{xi + yj + zk}{u}$; $|\text{grad } u| = 1$ — ишти-
 ёрий нуқтада. 2029. $-\frac{3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. 2030. $z_{\min} = -1$, бунда $x =$
 $= -4$, $y = 1$. 2031. $z_{\max} = 12$, $x = y = 4$ бўлганда. 2032. $z_{\min} = 0$,
 $x = 1$, $y = -\frac{1}{2}$ бўлганда. 2033. Экстремум йўқ. 2034. $z_{\min} = -\frac{2}{e}$
 $x = -2$, $y = 0$ бўлганда. 2035. $x = y = \frac{\pi}{3}$ бўлганда $z_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
 2036. $x = y = 1$ бўлганда $z_{\min} = 2$. 2037. $x = y = -2$ бўлганда
 $z_{\max} = -4$ ва $x = y = -2$ бўлганда $z_{\min} = 4$. 2038. $x = y = \sqrt[3]{2V}$,
 $z = 0,5\sqrt[3]{2V}$. 2039. $(\frac{8}{5}; \frac{3}{5})$, $(-\frac{8}{5}; -\frac{3}{5})$. 2040. $x^2 - y^2 - 4 = 0$
 шарт бажарилганда $z = d^2 = x^2 + (y - 2)^2$ функциянинг миниму-
 минни топиш керак. Изланган нуқта $(\pm\sqrt{5}; 1)$ бўлади. 2041. $R = 1$,
 $H = 2$. 2041. 1) Учлари $(\pm 3; -1)$ ва $(0; 2)$ нуқталарда; 2) табият-
 дагидек нур A дан B га шундай ўтиши керакки, $\sin \alpha: \sin \beta = v_1: v_2$
 бўлсин. 2043. $x = 0$ ва $y = 3$ бўлганда $z_{\min} = 9$. 2044. $x = y = 2$ бўл-
 ганда $z_{\min} = 0$. 2045. $x = 0$ ва $y = 0$ бўлганда $z_{\min} = 0$. 2046. $x = 2$,
 $y = 4$ бўлганда $z_{\min} = 0$. 2047. $x = y = \pm 1$ бўлганда $z_{\max} = 1$;
 $x = -y = \pm 1$ бўлганда $z_{\min} = -1$. 2048. $V = 8$. 2049. 1) $4x - y^2 = 0$
 бажарилганда $d = \frac{x - y + 4}{\sqrt{2}}$ ёки $z = x - y + 4$ нинг минимумини
 топиш керак. Изланган нуқта $(1; 2)$; 2) $2ab$. 2050. $R = \sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}}$.
 2051. Интеграл чизикларнинг тенгламалари: 1) $y = \frac{x^3}{3}$; 2) $y = x^3$;
 3) $y = -\frac{x^3}{3}$. 2053. $xy' = 2y$. 2054. 1) $y^2 - x^2 = 2xyy'$; 2) $x^2 + y =$
 $= xy'$. 2057. $y = Cx$, $y = -2x$. 2058. $xy = C$, $xy = -8$. 2059. $x^2 +$
 $+ y^2 = C^2$, $x^2 + y^2 = 20$. 2060. $y = Ce^x$, $y = 4e^{x+2}$. 2061. $y = Ce^x$.

2062. $x + y = \ln C(x + 1) (y + 1)$. 2063. $r = Ce^{\frac{1}{r}} + a$. 2064. $s^2 = \frac{t^2 - 1 + Ct}{t}$. 2065. $y = Ce^{\sqrt{x}}$. $y = e^{\sqrt{x-2}}$. 2066. $y = \frac{C \sin^2 x - 1}{2}$;

$y = 2 \sin^2 x - \frac{1}{2}$. 2067. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = C$; $y = -x$. 2068. Умумий интеграллар: 1) $y = C(x^2 - 4)$; 2) $y = C \cos x$. Биринчи тенгламанинг барча интеграл чизиқлари Ox ўқни $x = \pm 2$ да кесди, иккинчисининг интеграл чизиқлари эса $x = (2n - 1) \frac{\pi}{2}$ да кесди (масхус

нуқталар). 2069. $y = \frac{x^3}{3}$. 2070. $\int_0^x y dx = a \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx$, бундан

$y = a \sqrt{1 + y'^2}$, $y' = \pm \sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1}$; $y = a \operatorname{ch} u$ десак, y вақтда $a \operatorname{sh} u \cdot u' = \pm \operatorname{sh} u$. Бундан: 1) $\operatorname{sh} u = 0$, $\operatorname{ch} u = 1$, $y = a$; 2) $a du = \pm dx$, $au = \pm (x + c)$, $y = a \operatorname{ch} u = a \operatorname{ch} \frac{x + c}{a}$; $x = 0$ бўл-

ганда $y = a$ ва $C = 0$. Шундай қилиб, ёки $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ — занжир чизиқ, ёки $y = a -$ тўғри чизиқ. 2071. $y^2 = ax$. 2072. $y^2 = 4(x + 2)$. 2073. 40 мин. Ечили. t секунддан кейин жисмининг температураси T бўлсин; $\frac{dT}{dt} = -k(T - 20^\circ)$, бунда k — ҳозирча номаълум пропорционаллик коэффициенти; $\ln(T - 20^\circ) = -kt + C$; $t = 0$ бўлганда $T = 100^\circ$, шунинг учун $C = \ln 80^\circ$, $kt = \ln \frac{80^\circ}{T - 20^\circ}$; бунга

$T_1 = 25^\circ$ ва $T_2 = 60^\circ$ ларни қўйиб, ҳадма-ҳад бўлиш натижасида k йўқотилади: $\frac{kt}{k \cdot 10} = \frac{\ln 16}{\ln 2}$, $t = 40$. 2074. $\sum X_i = -H + T \cos \alpha = 0$,

$\sum Y_i = -px + T \sin \alpha = 0$; бундан $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{px}{H}$, $y = \frac{p}{2H} x^2 + C$ (парабола). 2075. Уринимнинг тенгласи. $V - y = y'(X - x)$ $Y = 0$ деб, уринимнинг Ox ўқ билан кесишган A нуқтасини топамиз: $X_A = x - \frac{y}{y'}$. Шартга асосан $X_A = 2x$; $x = -\frac{y}{y'}$; бу дифференциал тенгламани ечиб, изланган эгри чизиқни топамиз: $xy = -a^2$ (гипербола). 2076. $x^2 + 2y^2 = c^2$. 2077. $y^2 - x^2 = C$.

2078. $2x^2 + 3y^2 = 3a^2$. 2079. $y = Cx^4$. 2080. $y = Ce^{\frac{1}{x^3}}$. 2081. $2y = \frac{Cx^2}{(1+x)^2} - 1$. 2082. $y = C(x + \sqrt{x^2 + a^2})$. 2083. $y = \frac{C - x}{1 + Cx}$. 2084. $r = C \cos \varphi$, $r = -2 \cos \varphi$. 2085. $\sqrt{y} = x \ln x - x + C$, $\sqrt{y} = x \ln x - x + 1$. 2086. $y = \frac{C \sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}}$, $y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}}$.

2087. $xy = -1$. 2088. $y = ae^{\frac{x}{a}}$. 2089. $y = \frac{2x}{1-x}$. 2090. $x^2 y = C$.

2091. Радиус-вектор $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$, норма кесмаси $MN = \frac{y}{\cos \alpha} = y \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = y \sqrt{1 + y'^2}$. Изланган чизиқ $x^2 + y^2 = C^2$ (айлана) ёки $x^2 - y^2 = C$ (гипербола). 2092. $y = Cx^2$.
2093. $y - x = Ce^{\frac{x}{y-x}}$. 2094. $x^2 - y^2 = Cx$. 2095. $s^2 = 2t^2 \ln \frac{C}{t}$.
2096. $y = Cx^3 - x^2$. 2097. $y = \frac{C - e^{-x^2}}{2x^2}$. 2098. $y = \frac{C - \cos 2x}{2 \cos x}$.
2099. $y = \frac{1}{x \ln Cx}$. 2100. $y^2 = \frac{e^{x^2}}{2x + C}$. 2101. $\sin \frac{y}{x} + \ln x = C$.
2102. $y = \frac{x}{C - \ln x}$. 2103. $y = \ln x + \frac{C}{x}$. 2104. $y^3 = \frac{3}{2x} + \frac{C}{x^2}$.
2105. $x = \frac{x^2 - 1}{2}$. 2106. $s = Ct^2 + \frac{1}{t}$; $s = 2t^2 + \frac{1}{t}$. 2107. $y = xe^{Cx}$; $y = xe^{-\frac{x}{2}}$. 2108. $(x - y)^2 = Gy$. 2109. $x^2 + y^2 = 2Cy$. 2110. $i = \frac{kl}{R} + \frac{kl}{R} \left(e^{-\frac{R}{L}t} - 1 \right)$. 2111. $Y - y = y'(X - x)$, уринма тенгламасида $X = 0$ деб $V_0 = -ON = y - xy'$, $ON = xy' - y = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ ни топамиз. Бундан $y = \frac{x^2 - C^2}{2C}$.
- Кўзгу айланиш параболоиди бўлиши керак. 2112. $y^2 = Cxe^{-\frac{y}{x}}$.
2113. $y = \frac{\ln C(x + \sqrt{a^2 + x^2})}{\sqrt{a^2 + x^2}}$. 2114. $x > 0$ бўлганда $\sqrt{\frac{y}{x}} = \ln \frac{C}{x}$, $x < 0$ бўлганда $\sqrt{\frac{y}{x}} = \ln Cx$. 2115. $y = \frac{x-1}{3} + \frac{C}{\sqrt{2x+1}}$. 2116. $y = 1 + \frac{\ln C \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\cos x}$. 2117. $s = t^3 (\ln t - 1) + Ct^2$.
2118. $y^2 = \frac{1}{1 + Ce^{x^2}}$. 2119. $y = 2(\sin x - 1) + Ce^{-\sin x}$. 2120. $y = \frac{2x}{1 - Cx^2}$; $y = \frac{2x}{1 - 3x^2}$. 2121. $y^3 = x + Ce^{-x}$; $y^3 = x - 2e^{1-x}$.
2122. $y = \frac{1}{3\sqrt{1-x^2-1}}$. 2123. $(x-a)^2 + y^2 = a^2$. 2124. $y = \frac{\ln Cx}{x}$. 2125. $y^3 = x(Cy - 1)$. 2126. $xy = \frac{y^4}{4} + C$. 2127. $\frac{x}{y} + \frac{y^2}{2} = C$. 2128. $y = \cos x + \frac{C}{\sin x}$. 2129. $s = \frac{t}{C + t - t \ln t}$.
2130. $x^2 y^2 + 2 \ln x = C$. 2131. $s = \frac{Ct - 1}{t^2}$. 2132. $y = x^2 + Cx$.
2133. $\sin y = x + \frac{C}{x}$. 2134. $y = \frac{x}{C + 2e^{-\frac{x}{2}}}$. 2135. $4x^2 + y^2 = Cx$.

$$2136. x^2 e^y - y = C. \quad 2137. y + x e^{-y} = C. \quad 2138. x^2 \cos^2 y + y = C.$$

$$2139. \mu = \frac{1}{x^2}; \quad x + \frac{y}{x} = C. \quad 2140. \ln \mu = \ln \cos y; \quad x^2 \sin y +$$

$$+ \frac{1}{2} \cos 2y = C. \quad 2141. \mu = e^{-2x}; \quad y^2 = (C - 2x) e^{2x}. \quad 2142. \mu =$$

$$= \frac{1}{\sin y}; \quad \frac{x}{\sin y} + x^3 = C. \quad 2143. x^3 + 2xy - 3y = C. \quad 2144. x^3 y -$$

$$- 2x^2 y^2 + 3y^4 = C. \quad 2145. \frac{x^2 \cos 2y}{2} + x = C. \quad 2146. \mu = \frac{1}{y}; \quad xy -$$

$$- \ln y = 0. \quad 2147. \mu = \frac{1}{x^2}; \quad y^2 = Cx^3 + x^2. \quad 2148. \mu = e^{-y}; \quad e^{-y} \cos x =$$

$$= C + x. \quad 2149. \ln \mu = -\ln x; \quad \mu = \frac{1}{x}; \quad x \sin y + y \ln x = C.$$

$$2150. y = (C \pm x)^2. \quad M(1, 4) \text{ нуктадан } y = (1+x)^2 \text{ ва } y = (3-x)^2$$

$$\text{чизиклар ўтади.} \quad 2151. y = \sin(C \pm x). \quad M\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ нуктадан}$$

$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ ва } y = \sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) \text{ чизиклар ўтади.} \quad 2152. y =$$

$$= Cx^2 + \frac{1}{C}; \quad \text{максус интеграллар } y = \pm 2x. \quad 2153. 1) y = x + C$$

$$\text{ва } x^2 + y^2 = C^2; \quad 2) x \left(\sqrt{1 + \frac{y}{x}} \pm 1 \right)^2 = C \quad \text{ёки } (y - C)^2 = 4Cx.$$

Махсус интеграллар $x = 0$ ва $y = -x$. Параболаларнинг жойланиш соҳалари: $x > 0$ бўлганда $y \geq -x$, $x < 0$ бўлганда $y < -x$. Параболалар Oy ўққа ва $y = -x$ чизикқа уринади. 2154. 1) $y = 1 +$

$$+ \frac{(x-C)^2}{4}; \quad \text{максус интеграл } y = 1; \quad 2) x = 2p - \frac{1}{p^2}. \quad y = p^2 - \frac{2}{p} +$$

$$+ C. \quad 2155. 1) y = (C + \sqrt{x+1})^2; \quad \text{максус интеграл } y = 0; \quad 2) x =$$

$$= Ct^2 - 2t^3; \quad y = 2Ct - 3t^2, \quad \text{бунда } t = \frac{1}{p}; \quad 3) Cy = (x-C)^2, \quad \text{максус}$$

$$\text{интеграллар } y = 0 \text{ ва } y = -4x. \quad 2156. 1) y = Cx - C^2; \quad \text{максус интеграл}$$

$$y = \frac{x^3}{4}; \quad 2) y = Cx - a \sqrt{1+C^2}; \quad \text{максус интеграл } x^2 + y^2 = a^2; \quad 3) y =$$

$$= Cx + \frac{1}{2C^2}; \quad \text{максус интеграл } y = 1, 5x^{\frac{2}{3}}. \quad 2157. y = 1 - \frac{(x+C)^2}{4};$$

$$M\left(1; \frac{3}{4}\right) \text{ дан икки: } y = 1 - \frac{x^2}{4} \text{ ва } y = x - \frac{x^3}{4} \text{ эгри чизик ўтади:}$$

$$2158. 1) x = 2p + \frac{3}{2} p^2 + C; \quad y = p^2 + p^3; \quad 2) x^2 + (y+C)^2 = a^2.$$

$$2159. y = -\frac{x^2}{4} + Cx + C^2; \quad y = -\frac{x^2}{2}. \quad 2160. 1) y = Cx + \frac{1}{C},$$

$$\text{максус интеграл } y^2 = 4x; \quad 2) y = C(x+1) + C^2, \quad y =$$

$$= -\frac{(x+1)^2}{4}. \quad 2161. Y - y = y' (X - x) \text{ уринманинг ўқлардаги}$$

кесмалари: $X_A = x - \frac{y}{y'}$, $Y_B = y - xy'$. Шартга кўра $\frac{X_A \cdot Y_B}{2} =$
 $= 2a^2$; $(y - xy')^2 = -4a^2 y'$, $y = xy' \pm \sqrt{-4a^2 y'}$ — бу эса Клеро
 тенгласидир. $y = -Cx + 2a\sqrt{C}$ оиланинг ихтиёрий тўғри чизиги
 ва шунингдек $xy = a^2$ махсус интеграл билан аниқланган эгри чизик
 масаланинг ечими бўлади. 2162. Парабола $(y - x - a)^2 = 4ax$. 2163.
 1) $y = 3\ln x + 2x^2 - 6x + 6$; 2) $y = -1 \cos 2x$; 3) $y = C_1 x + \operatorname{arctg} x -$
 $-\ln \sqrt{1+x^2} + C_2$. 2164. $y = \frac{1}{x} + C_1 \ln x + C_2$. 2165. $y^2 = C_1 x + C_2$.
 2166. $y = C_1 \sin x - x - \frac{1}{2} \sin 2x + C_2$. 2167. $y^3 + C_1 y + C_2 = 3x$.
 2168. $y = C_1 x (\ln x - 1) + C_2$. 2169. $\operatorname{ctg} y = C_2 - C_1 x$. 2170. 1) $y =$
 $= e^x (x - 1) + C_1 x^2 + C_2$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{C_1}} + C_2$ ($C_1 > 0$
 бўлганда). $\frac{1}{2\sqrt{-C_1}} \left| \frac{x - \sqrt{-C_1}}{x + \sqrt{-C_1}} \right| + C_2$ ($C_1 < 0$ бўлганда),
 $C_2 - \frac{1}{x}$ ($C_1 = 0$ бўлганда). 2171. $y'' = \frac{P}{EI} (l - x)$. $x = 0$ бўлганда
 $y = 0$ ва $y' = 0$, $y = \frac{P}{2EI} \left(lx^2 - \frac{x^3}{3} \right)$ — эгилиш эгри чизигининг
 тенгласи. 2172. $C_1 y = \frac{(C_1 x + C_2)^2}{4} + 1$. 2173. $y = a \operatorname{ch} \frac{(x-b)}{a} =$
 $= \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x-b}{a}} + e^{\frac{x-b}{a}} \right)$. 2174. $y = \frac{x^3}{6}$. 2175. $y = C_1 x + C_2 - \ln \cos x$;
 хусусий интеграл $y = \ln (\cos x)$. 2176. $y = \frac{x^3}{12} - \frac{x}{4} +$
 $+ C_1 \operatorname{arctg} x + C_2$. 2177. $C_1 y^2 = 1 + (C_1 x + C_2)^2$. 2178. $y = (C_1 x + C_2)^2$.
 2179. $s = -\frac{t^2}{4} + C_1 \ln t + C_2$. 2180. $4(C_1 y - 1) = (C_1 x + C_2)^2$.
 2181. $y = C_2 - C_1 \cos x - x$. 2182. 2177 га қар. 2183. $y = -\ln \cos x$.
 2184. $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$. 2185. $y = (C_1 + C_2 x) e^{2x}$. 2186. $y =$
 $= e^{2x} (A \cos 3x + B \sin 3x)$. 2187. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} = A \operatorname{ch} 2x +$
 $+ B \operatorname{sh} 2x$. 2188. $y = A \cos 2x + B \sin 2x = a \sin (2x + \varphi)$. 2189. $y =$
 $= C_1 + C_2 e^{-4x}$. 2190. $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$. 2191. $\rho = A \cos \frac{\varphi}{2} +$
 $+ B \sin \frac{\varphi}{2}$. 2192. $s = e^{-t} (A \cos t + B \sin t)$; $s = e^{-t} (\cos t + 2 \sin t)$.
 2193. $y = C_1 e^x + (C_2 + C_3 x) e^{2x}$. 2194. $y = C_1 \operatorname{ch} 2x + C_2 \operatorname{sh} 2x +$
 $+ C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$. 2195. $y = C_1 e^{2x} + e^{-x} (C_2 \cos x \sqrt{3} +$
 $+ C_3 \sin x \sqrt{3})$. 2196. $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{-ax}$. 2197. $y =$
 $= A \sin x \operatorname{sh} x + B \sin x \operatorname{ch} x + C \cos x \operatorname{sh} x + D \cos x \operatorname{ch} x$. 2198. $y =$
 $= A \operatorname{ch} x + B \operatorname{sh} x + C \cos \frac{x}{2} + D \sin \frac{x}{2}$. 2199. Мувоzanат ҳолатидан
 узоқлашибди $x = a \sin \sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0)$; давр $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. 2200. $x =$

$$= a \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t; \text{ давр } T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}. \quad 2201. \quad x = ae^{-kt} \sin(\omega t + \varphi).$$

буида, $\omega = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{k^2}{4}}$. 2202. $y = C_1 e^{-2x} = C_2 e^{-x}$. 2203. $y = (C_1 x + C_2) e^{ax}$. 2204. $y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$. 2205. $x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}$. 2206. $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$. 2207. $s = C_1 + C_2 e^{-at}$. 2208. $x = e^{-t} (A \cos t \sqrt{2} + B \sin t \sqrt{2})$. 2209. $y = C_1 e^{-x} + (C_2 x + C_3) e^{2x}$. 2210. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$. 2211. $y = (C_1 + C_2 x) \cos 2x + (C_3 + C_4 x) \sin 2x$. 2212. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$.

2214. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - 2x^3 - 3x$. 2215. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 0,25 \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right)$. 2216. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + e^x$.

2217. $y = C_1 + C_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x$. 2218. $y = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x^2 - 8x + 7$. 2219. $y = C_1 e^{2x} + (C_2 - x) e^x$. 2220. $x = A \sin k(t - t_0) - t \cos kt$. 2221. $y = C_1 e^{x \sqrt{2}} + C_2 e^{-x \sqrt{2}} - (x - 2) e^{-x}$. 2222. $y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{x^3}{6}$. 2223. $y = \frac{1}{2} e^{-x} + x e^{-2x} + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$. 2224. $x = e^{-kt} (C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) + \sin kt - 2 \cos kt$. 2225. $y = C_1 + C_2 x + (C_3 + x) e^{-x} + x^3 - 3x^2$. 2226. $y = C_1 e^{3x} + \left(C_2 - \frac{x}{4} \right) e^{-3x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$. 2227. $x = C_1 + C_2 \cos t + C_3 \sin t + t^2 - 6t$. 2228. $y = \left(C_1 + \frac{x}{12} \right) e^{-2x} + (C_2 \cos x \sqrt{3} + C_3 \sin x \sqrt{3}) e^x$. 2229. 1) $x = \left(C_1 + C_2 t + \frac{t^2}{2} \right) e^{-2t}$; 2) $x = A \cos \frac{t}{a} + B \sin \frac{t}{a} + \frac{1}{a}$. 2230. Бизнинг мисолимизда $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x$, $w = 2$; $A = -\frac{x}{2} + C_1$; $B = \frac{1}{4} \ln \sin 2x + C_2$ ва $y = \left(C_1 - \frac{x}{2} \right) \cos 2x + \left(C_2 + \frac{1}{4} \ln \sin 2x \right) \sin 2x$. 2231. $y = [(C_1 + \ln \cos x) \cos x + (C_2 + x) \sin x] e^{2x}$. 22. 2. $y = (C_1 - \ln x + C_2 x) e^x$.

2233. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$. 2234. 1) $y = C_1 + C_2 e^{-x} - (1 + e^{-x}) \ln(1 + e^x) + x$; 2) $y = e^{-2x} \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2x} \right)$.

2235. $x = a(e^{-t} + t - 1)$. 2236. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - 3(x^2 + x + 1,5)$. 2237. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{6} (5 \cos 3x - \sin 3x)$. 2238. $y = (C_1 x + C_2) e^{-x} + \frac{1}{4} e^x$. 2239. $y = e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{3x}{2} + C_2 \sin \frac{3x}{2} \right) -$

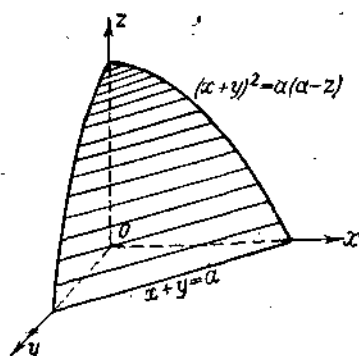
$-6 \cos 2x + 8 \sin 2x$. 2240. $y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-\frac{x}{2}} - x^3$. 2241. $y = C_1 e^x + \left(C_2 - \frac{x}{2}\right) e^{-x}$. 2242. $s = e^{-t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t) + (t-1)^2$.
 2243. 1) $y = e^{mx} (C_1 + C_2 x) + \frac{\cos mx}{2m^2}$; 2) $y = C_1 e^{\frac{2x}{n}} + C_2 e^{-\frac{2x}{n}} - \frac{2}{n}$.
 2244. $y = A \cos x + B \sin x + C \cos 2x + D \sin 2x - \frac{1}{2} x \cos x$.
 2245. $y = \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \frac{x^3}{6}\right) e^x$. 2246. $y = \left(\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{3x^2}{4} + C_1 + C_2 x\right) e^{-2x}$. 2247. 1) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{2 \cos x}$;
 2) $y = (C_1 - \ln |\sin x| \cos 2x + \left(C_2 - x - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x\right) \sin 2x$.
 2248. $y = \left(C_1 + \sqrt{4-x^2} + x \arcsin \frac{x}{2} + C_2 x\right) e^x$.
 2249. $y = \frac{C - (x+2) e^{-x}}{x+1}$. 2250. $y = 1 + C \cos x$. 2251. $y = x(1 + C \sqrt{1-x^2})$, чизикли. 2252. $y = C \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$. 2253. $s = \frac{e^t + C}{t^2}$. 2254. $\sqrt{y} = Cx^2 - 1$. 2255. $2Cy^2 = x(C^2 x^2 - 1)$.
 2256. $y = x \ln x - 2x + C_1 \ln x + C_2$. 2257. $y(C_2 - C_1 x) = 1$.
 2258. $y = C_1 e^{mx} \left(C_2 - \frac{x}{2m}\right) e^{-mx}$. 2259. $y = \ln x + \frac{C}{\ln x}$.
 2260. $y = x e^{\frac{C}{x}-1}$. 2261. $y^2 = \frac{1}{x + C e^x}$. 2262. $y = (C_1 + C_2 x) e^x + C_3 + \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x$. 2263. $C_1 y = 1 + C_2 e^{C_1 x}$. 2264. $s = C_1 e^{2t} + e^{-t} (C_2 + C_3 t) - \frac{\sin t}{2}$. 2265. 1) $s = (t^2 + C) \operatorname{tg} \frac{t}{2}$;
 2) $y^2 = Cx^2 - 1$. 2266. 1) $y = \frac{\sin x + C \cos x}{x}$; 2) $y = e^{-x} \left(C_1 + \frac{x}{3}\right) + C_2 e^{\frac{x}{2}} \cos \frac{x \sqrt{3}}{2} + C_3 e^{-x} \sin \frac{x \sqrt{3}}{2}$. 2267. 1) $y = (C_1 - \ln \sqrt{1+e^{2x}}) e^x + (C_2 + \arcsin \operatorname{tg} e^x) e^{2x}$; 2) $y = C_1 e^{\sqrt{cx}} + C_2 e^{-\sqrt{cx}}$ ва $y = C_1 x + C_2$. 2268. $\frac{a^2 d^2 x}{g dt^2} + 1000 x = 0$,
 $x = A \cos \frac{10 \sqrt{10g}}{a} t + B \sin \frac{10 \sqrt{10g}}{a} t$, давр $T = \frac{\pi a}{5 \sqrt{10g}}$.
 2269. $\frac{dT}{dr} = -\frac{R}{4\pi r^2}$; $T = \frac{k}{8\pi r} + C$; k ва C катталикларни
 $20^\circ = \frac{k}{8\pi \cdot 2a} + C$ ва $100^\circ = \frac{k}{8\pi \cdot a} + C$ шартлардан топамиз; $T =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{160^\circ \alpha}{r} - 60^\circ = 40^\circ. \quad 2270. \quad 1) \quad y = C_1 x + C_2 x^{-1} + C_3 x^3; \quad 2) \quad y = \\
&= \frac{C_1}{x} + C_2 x^2; \quad 3) \quad y = C_1 x^n + C_2 x^{-(n+1)}. \quad 2271. \quad 1) \quad y = x^{-2} (C_1 + \\
&+ C_2 \ln x); \quad 2) \quad y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x). \quad 2272. \quad 1) \quad y = \frac{5x^2}{3} + \\
&+ C_1 x^{-1} + C_2; \quad 2) \quad y = C_1 x^3 + \frac{C^2}{x^2} - 2 \ln x + \frac{1}{3}. \quad 2273. \quad 1) \quad y = C_1 x + \\
&+ C_2 x^2 - 4x \ln x; \quad 2) \quad y = \frac{C_1 + C_2 \ln x + \ln^3 x}{x}. \quad 2274. \quad 1) \quad y = \left(\frac{x^3}{6} + \right. \\
&+ C_1 x + C_2 \left. \right) x^2; \quad 2) \quad y = \frac{x}{2} + C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x). \quad 2275. \quad x = \\
&= C_1 e^t + C_2 e^{-3t}, \quad y = -\frac{dx}{dt} = C_1 e^t - 3C_2 e^{-3x}. \quad 2276. \quad x = e^t + C_1 + \\
&+ C_2 e^{-2t}, \quad y = e^t + C_1 - C_2 e^{-2t}. \quad 2277. \quad x = 2e^{-t} + C_1 e^t + C_2 e^{-2t}, \quad y = \\
&= 3e^{-t} + 3C_2 e^t + 2C_2 e^{-2t}. \quad 2278. \quad x = e^t + C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} + C_3 \cos(t + \\
&+ \varphi). \quad 2279. \quad x = e^{-2t} (1 - 2t). \quad 2280. \quad x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + t \operatorname{ch} t. \\
2281. \quad 1) \quad u = \varphi(x) + \psi(y); \quad 2) \quad u = y \varphi(x) + \psi(x); \quad 3) \quad u = x \varphi(y) + \psi(x); \\
4) \quad u = ax^2 \ln y + bxy + \varphi(x) + \psi(y). \quad 2282. \quad z = y^3(x + y - 1). \\
2283. \quad A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = E \quad \text{тенгламани каноник кўриниш-} \\
\text{га келтириш учун } A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0 \quad \text{характеристик тенг-} \\
\text{ламани ечиш керак: унинг иккита } \varphi(x, y) = \xi \text{ ва } \psi(x, y) = \eta \text{ интег-} \\
\text{ралида } \xi \text{ ва } \eta \text{ ларни янги ўзгарувчилар деб, берилган тенгламани} \\
\text{шу янги ўзгарувчиларга алмаштириш керак (1941 ва 1942- масала-} \\
\text{ларга қаранг). Бизнинг мисолимизда } dx^2 + 4dx dy + 3dy^2 = 0 \text{ тенг-} \\
\text{ламани ечиш керак, бундан } dy + dx = 0, \quad dy + 3dx = 0, \quad y + x = \xi, \\
y + 3x = \eta \text{ тенгламанинг янги ўзгарувчилардаги кўриниши } \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \\
\text{Бундан } u = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(y + x) + \psi(y + 3x). \\
2284. \quad \text{Характеристик тенглама } x^2 dy^2 - 2xy dx dy + y^2 dx^2 = 0 \quad \text{ёки} \\
(xdy - ydx)^2 = 0 \quad \text{ёки } d\left(\frac{y}{x}\right) = 0; \quad \text{бундан } \frac{y}{x} = \xi, \quad y = \eta. \\
\text{Ечимлар тенг бўлгани учун } \eta \text{ деб } y \text{ ни оламыз. Шундай қилиб,} \\
\text{характеристикалар } \frac{y}{x} = \xi \text{ ва } y = \eta. \text{ Тенглама } \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0 \quad \text{кўринишга} \\
\text{келади (1944 ва 1945- масалага қаранг); } u = \eta \varphi(\xi) + (\psi) \quad \text{ёки} \\
u = y \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right). \quad 2285. \quad u = y \varphi(y + 2x) + \psi(y + 2x). \\
2286. \quad u = xy + \sin y \cos x. \quad 2287. \quad (1944- масалага қар.) \quad u = y \ln x + \\
+ 2y + 1. \quad 2288. \quad u = \sqrt{xt} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) + \psi(xt); \quad \text{хусусий} \quad \text{ечим} \\
u = \frac{x^2(1+t^3)}{t}. \quad 2289. \quad u = e^{-x} \varphi(x-t) + \psi(x); \quad \text{хусусий} \quad \text{ечим}
\end{aligned}$$

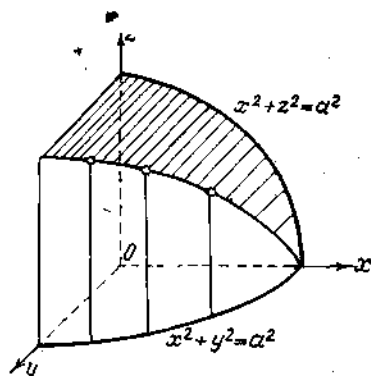
- $u = (x-t) e^{-t} - x$, 2290. Хусусий ечим $u = xat + \frac{1}{3} a^3 t^3$.
 2291. $u = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(z) dz$.
 2292. $6 - 4 \ln 2 \approx 3,28$. 2293. 1) $10^2 / 3$ кв. бир.; 2) 4 кв. бир.
 2294. $20 \frac{5}{6}$. 2295. $\frac{9a^2}{2}$. 2296. $\frac{1}{2} - \frac{1}{e}$. 2297. 1) $\int_0^a dx \int_0^x dy =$
 $= \int_0^a dy \int_y^a dx = \frac{a^2}{2}$; 2) $\int_0^a dy \int_{a-y}^a dx = \int_0^a dx \int_{a-x}^a dy = a^2 \left(\frac{\pi-2}{4} \right)$;
 3) $\frac{\pi a^2}{4}$. 2298. 1) $\int_0^1 dx \int_x^{2-x} dy = \int_0^1 dy \int_0^y dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} dx = 1 \frac{1}{6}$;
 2) $\int_{-2}^0 dy \int_{y^2-4}^0 dx = \int_{-4}^0 dx \int_{-\sqrt{4+x}}^0 dy = \frac{16}{3}$. 2299. $\left(\frac{\pi}{4} + 2 \right) a^2$.
 2300. Кичик сегмент юзи: $\left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \right) a^2 \approx 2,457 a^2$.
 2301. $\frac{3a^2}{2} \ln 2$. 2302. $\frac{868}{15} a^2$. 2303. $\frac{3}{8} \pi a^2$. 2304. 4,5. 2305. $\frac{a^2}{6}$.
 2306. $\sqrt{2} - 1$. 2307. $\frac{9}{2} a^2$. 2308. $8\pi + 9\sqrt{3}$. 2309. $\left(2 - \frac{\pi}{4} \right) a^2$.
 2310. $7 \ln 2$. 2311. 1) $\int_a^b dx \int_a^x dy = \int_a^b dy \int_y^b dx = \frac{(b-a)^2}{2}$;
 2) $\int_0^a dy \int_{\sqrt{ay}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} dx = \int_0^a dx \int_0^{\frac{x^2}{a}} dy + \int_a^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2a^2-x^2}} dy = \frac{a^2(3\pi-2)}{12}$;
 3) $\int_0^4 dx \int_{2\sqrt{x}}^{8-x} dy = \int_0^4 dy \int_0^{\frac{y^2}{4}} dx + \int_4^8 dy \int_0^{8-y} dx = \frac{40}{3}$. 2312. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8} \right)$.
 2313. (3; 4,8). 2314. $\left(\frac{2a}{5}, \frac{a}{2} \right)$. 2315. $\left(0; \frac{4a}{3\pi} \right)$. 2316. $\left(0; \frac{256a}{315\pi} \right)$.
 2318. $\frac{17a^4}{96}$. 2319. $\frac{a^4}{4}$. 2320. $\frac{a^4}{6}$. 2321. $\frac{\pi a^4}{8}$. 2322. $\frac{\pi a^4}{2}$;
 2323. $\frac{88a^4}{105}$. 2324. $\left(\frac{3a}{5}, \frac{3a}{8} \right)$. 2325. $\left(0; \frac{4b}{3\pi} \right)$. 2326. $\frac{a^4}{30}$.

$$2327. 3. \quad 2328. \frac{ab(a^2+b^2)}{12}. \quad 2329. 47,5 \quad 2330. \frac{35\pi a^4}{16}.$$

2331. $42\frac{2}{3}$. 2332. $\frac{79}{60}a^3$. 2333. $z=h$ текислик билан ҳосил бўлган кесимлар $x+y=\pm\sqrt{a(a-h)}$ — параллел тўғри чизиқлардир, яъни сирт цилиндрик сирт (63-чизма). Изланган ҳажм $V=$



63-чизма.



64-чизма.

$$= 2 \int_0^a dx \int_0^{a-x} z dy = \frac{a^3}{2}. \quad 2334. \frac{16}{3}a^3 \text{ (64-чизма)}. \quad 2335. (323\text{-бет},$$

$$50\text{-чизмага қаралсин}) \frac{8}{9}a^3. \quad 2336. \frac{a^3}{3}. \quad 2337. \frac{\pi^3}{12}a^3. \quad 2338. 3\pi a^3.$$

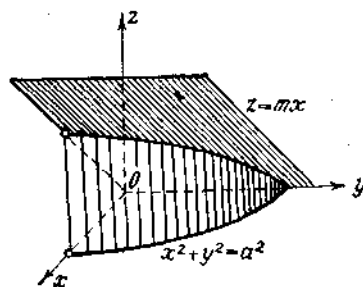
$$2339. V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} m \cos \varphi d\varphi \int_0^a r^2 dr = \frac{4ma^3}{3} \text{ (65-чизма)}. \quad 2340. \frac{\pi a^3}{2}.$$

$$2341. 4\pi \sqrt{3}a^3. \quad 2342. \frac{4a^3}{9}(3\pi - 4) \text{ (66-чизма)}. \quad 2343. \pi^2 a^2 \text{ (62-чизма)}.$$

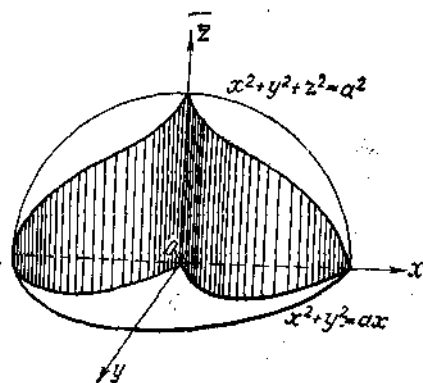
$$2344. \frac{16\sqrt{2}}{15}a^3. \quad 2345. \frac{\pi abc}{2}. \quad 2346. \pi abc \left(1 - \frac{1}{e}\right). \quad 2347. \frac{4\pi a^3}{35}.$$

$$2348. \frac{8}{15}a^3. \quad 2349. V = 2 \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 z dy = \frac{88}{105} \text{ (67-чизма)}. \quad 2350. V =$$

$$= 4 \int_0^{3a} dx \int_{\sqrt{ax}}^{2\sqrt{ax}} \sqrt{4ax - y^2} dy = 3a^3(4\pi - 3\sqrt{3}) \text{ (68-чизма)}.$$

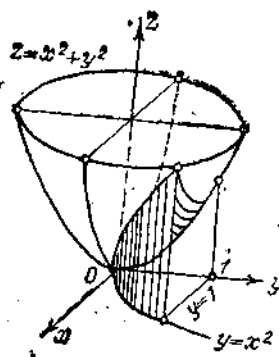


65-чизма.

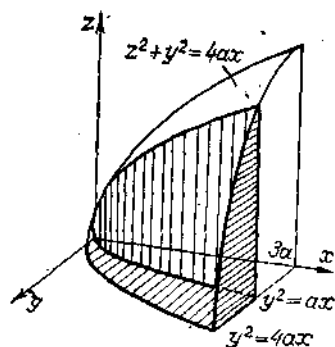


66-чизма.

$$2351. V = 8 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} dy = \frac{16 ab^2}{3}.$$



67-чизма.



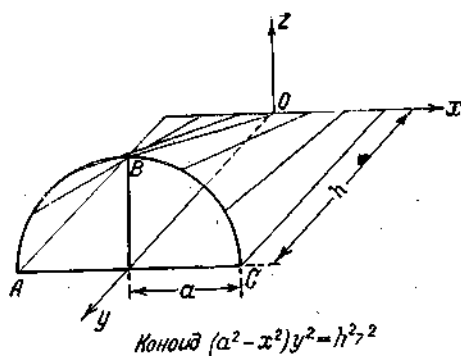
68-чизма.

$$2352. V = 4 \int_0^a dx \int_0^h \frac{y}{h} \sqrt{a^2 - x^2} dy = \frac{\pi a^2 h}{2} \text{ канонд асосининг юзи-}$$

ни баландликнинг ярмига кўлайтирилганига тенг (69-чизма).

$$2353. \frac{128}{105} a^3. \quad 2354. 18\pi. \quad 2355. 2\pi a^3. \quad 2356. 8\pi \ln 2 \quad (49\text{-чизмага}$$

$$\text{қаранг}). \quad 2357. \frac{3}{16} \pi a^3. \quad 2358. \frac{5\pi a^3}{16}. \quad 2359. \frac{4\pi abc}{3}. \quad 2360. 13.$$



69-чизма.

2361. $\frac{8\sqrt{2}}{3}a^2$. 2362. $2\pi a^2$. 2363. $\frac{2\pi a^2}{3}(2\sqrt{2}-1)$. 2364. $2\pi r^2\sqrt{2}$.
 2365. $8a^2$. 2366. $4a^2(\pi-2)$. 2367. $\frac{14}{3}\pi a^2$. 2368. $\sigma =$
 $= \iint_{(S)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z} dx dy = \frac{\pi\beta}{180} R^2 \sin \alpha$; $\beta = 60^\circ$ ва $\alpha = 30^\circ$ бўл-
 ганда $\sigma = \frac{\pi R^2}{6}$. 2369. $\frac{\pi a^3}{12}$ (кесим радиуси $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$). 2370. $\frac{2\pi a^3}{3} \times$
 $\times (2 - \sqrt{2})$. 2372. $\int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{a-x-y} z dz = \frac{a^4}{24}$. 2373. $\left(\frac{a}{4}; \frac{a}{4}; \frac{a}{4}\right)$.
 2374. $\left(0, 0; \frac{a}{3}\right)$. 2375. $\frac{a^5}{4}$. 2376. $\frac{\pi a^5}{\sqrt{2}}$. 2377. 1) $\frac{\pi a^3}{3}$; 2) $\frac{\pi a^3}{60}$.
 2378. $\frac{\pi a^3}{6}(8\sqrt{2}-7)$. 2379. $\frac{32}{3}\pi$. 2380. $\frac{\pi a^3}{6}$. 2381. $\frac{\pi h^4}{4}$. 2382. $\frac{a^4}{12}$.
 2383. $\left(0; 0; \frac{3a}{8}\right)$. 2384. $\frac{32\sqrt{2}a^5}{135}$. 2385. $\frac{a^3}{360}$. 2386. $6k\pi a^2$, бунда
 k — пропорционалик коэффициент.

2387. $\int (x+y) dx = \begin{cases} 4 \text{ } OA \text{ тўғри чизик бўйича,} \\ \frac{10}{3} OA \text{ эй бўйича,} \\ 2 \text{ } OBA \text{ синик чизик бўйича.} \end{cases}$

2388. 1) 8; 2) 4. 2389. Икки ҳолда ҳам $\int (x dy + y dx) = 8$, чунки

бунда $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. 2390. 1) $1,5a^2$; 2) a^2 . 2391. $8a^2$. 2392. πa^2 .

2393. $\frac{\pi \tan \alpha}{4}$. 2394. 0. 2396. 1) $\frac{5\pi}{6}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$2397. \quad \frac{2a^3}{3}. \quad 2398. \quad \pi ab. \quad 2399. \quad \frac{8}{15}. \quad 2400. \quad \frac{3}{2}a^2.$$

$$2401. \quad X = 0, \quad Y = \frac{2kmM}{\pi a^2}. \quad 2402. \quad Y = \frac{kmM}{a^2\sqrt{2}}.$$

$$2403. \quad Y = \frac{kmM}{a^2}. \quad 2404. \quad 1) -16; 2) -\frac{52}{3}; 3) -12. \quad 2405. \quad 1) \frac{3a^2}{2};$$

$$2) \frac{a^2}{2}. \quad 3) \frac{11a^2}{6}. \quad 2408. \quad \frac{3}{8}\pi a^2. \quad 2409. \quad \frac{4}{3}. \quad 2410. \quad \frac{a^3}{2}.$$

$$2411. \quad \frac{\pi a^4}{48}. \quad 2412. \quad \text{Формуланнинг ҳар бир қисми } 4\pi a^3 \text{ га тенг.}$$

$$2413. \quad \text{Формуланнинг ҳар бир қисми } \frac{a^4}{3} \left(\frac{4}{5} + \frac{\pi}{16} \right) \text{ га тенг.}$$

$$2419. \quad \text{Формуланнинг ҳар бир қисми } \frac{12}{5}\pi a^3 \text{ га тенг.} \quad 2421. \quad 0,15 a^5.$$

$$2422. \quad \text{Бажарилмайди.} \quad 2423. \quad \text{Бажарилади.} \quad 2424. \quad \text{Бажарилади.} \quad 2425. \quad \text{Қа-}$$

$$\text{тор узоқлашади.} \quad 2426. \quad \text{Узоқлашади.} \quad 2427. \quad \int_1^{\infty} \frac{xdx}{(x+1)^3} = \frac{3}{8} \text{ бўлгани}$$

$$\text{учун қатор яқинлашади.} \quad 2428. \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} \text{ бўлгани учун қатор}$$

$$\text{яқинлашади.} \quad 2429. \quad \int_1^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \infty \text{ бўлгани учун қатор узоқлашади.}$$

$$2430. \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{(2x+1)^2-1} = \left[\frac{1}{4} \ln \frac{x}{x+1} \right]_1^{\infty} = \frac{1}{4} \ln 2 \text{ бўлгани учун яқин-}$$

$$\text{лашади.} \quad 2431. \quad \text{Яқинлашади.} \quad 2432. \quad \text{Яқинлашади.} \quad 2433. \quad \text{Яқинлашади.}$$

$$2434. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1 \text{ бўлгани учун яқинлашади.} \quad 2435. \quad \text{Узоқла-}$$

$$\text{шади.} \quad 2436. \quad \text{Узоқлашади.} \quad 2437. \quad \text{Яқинлашади.} \quad 2438. \quad \text{Узоқлашади.}$$

$$2439. \quad \text{Яқинлашади.} \quad 2440. \quad \text{Узоқлашади.} \quad 2442. \quad 1. \quad 2443. \quad \frac{1}{3}. \quad 2444. \quad \text{Яқин-}$$

$$\text{лашади, лекин абсолют эмас.} \quad 2445. \quad \text{Абсолют яқинлашади.} \quad 2446. \quad \text{Яқинлашади, лекин абсолют эмас.} \quad 2447. \quad \text{Абсолют яқинлашади.} \quad 2448.$$

$$\text{Биринчи марта ҳадларнинг ўрнини алмаштириб қаторни } \left(1 - \frac{1}{2}\right) -$$

$$- \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \dots \text{ кўринишда ёзамиз. Қавс-}$$

$$\text{лар ичидаги амалларни бажарсак, ҳадлари берилган қатор ҳадлари-}$$

$$\text{дан икки марта кичик бўлган қатор ҳосил қиламиз. Ҳадларнинг ўрнини иккинчи хил алмаштиргандан сўнг ҳадларнинг } n\text{-умалиги-}$$

$$\text{ни қуйидагича ёзамиз: } \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{4n-3} = \frac{1}{4n-2} +$$

$+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}$, $n=1, 2, 3, \dots$ бўлганда биринчи тўртта ҳад, йиғиндиси S бўлган берилган қаторни, охириги иккита ҳад эса — йиғиндиси $\frac{1}{2} S$ бўлган қаторни ҳосил қилади. 2449. Яқин-

лашади. 2450. Узоқлашади, чунки $\int_1^{\infty} \frac{dx}{100x-99} = \infty$. 251. Яқин-

лашади, чунки $\int_1^{\infty} \frac{x dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{8}$. 2452. Узоқлашади, чунки $\int_1^{\infty} \frac{2x-1}{x^2} dx =$

$= \infty$. 2453. Яқинлашади. 2454. Яқинлашади, чунки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n+1}{u_n} =$

$= \frac{1}{2} < 1$. 2455. Яқинлашади, чунки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n+1}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20n+21}{3(20n+1)} =$

$= \frac{1}{3} < 1$. 2456. Яқинлашади. 2457. Яқинлашади, лекин абсолют эмас.

2458. Абсолют яқинлашади. 2459. $a > 1$ бўлганда абсолют яқинлашади, $a = 1$ бўлганда яқинлашади, лекин абсолют эмас, $a < 1$ бўлганда узоқлашади. 2460. $\frac{1}{2}$. 2461. $\frac{1}{4}$. 2462. $x < 1$ бўлганда қатор-

нинг йиғиндиси $S(x) = \frac{1}{1-x}$, қолдиғи эса $R_n = S - S_n = \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

$\left[0, \frac{1}{2}\right]$ кесмада $n-1 > \frac{\lg 1000}{\lg 2}$; $n \geq 11$ бўлганда $|R_n| < \frac{1}{2^{n-1}} < 0,001$. 2463. Қаторнинг йиғиндиси

$S = \frac{x}{1-(1-x)} = \begin{cases} 1, 0 < x < 1 & \text{бўлганда,} \\ 0, x = 0 & \text{бўлганда} \end{cases}$
ва қолдиғи $R_n = \begin{cases} (1-x)^n, 0 < x < 1 & \text{бўлганда,} \\ 0, x = 0 & \text{бўлганда.} \end{cases}$

$x < 1 - \frac{n}{\sqrt{0,9}}$ да ҳар қандай n учун қолдиқ R_n , масалан, $0,9$ дан катта бўлади, яъни $[0,1]$ сегментда қаторнинг яқинлашиши текис эмас.

Лекин $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ сегментда у текис яқинлашади, чунки бу кесмадан

олинган ҳар қандай x учун $n > \frac{-\lg \varepsilon}{\lg 2}$ бўлганда $|R_n| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ бў-

лади; жумладан, $n \geq 7$ бўлганда $|R_n| < 0,01$. 2464. Ишораси алма-

шинувчи қаторнинг қолдиқ ҳади модуль бўйича биринчи ташланган ҳаддан кичик. Шунинг учун $[0,1]$ сегментда $n+1 \geq 10$ ёки $n \geq 9$ бўл-

ганда $|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} < \frac{1}{n+1} < 0,1$. 2465. Қаторнинг йиғиндиси

$S = \begin{cases} 1+x^2, x > 0 & \text{бўлганда} \\ 0, x = 0 & \text{бўлганда} \end{cases}$ ва қолдиғи

$R_n = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^{n+1}}, x > 0 & \text{бўлганда} \\ 0, x = 0 & \text{бўлганда.} \end{cases}$

Ҳар қандай n учун $x^3 < \sqrt[n-1]{10} - 1$ бўлганда қолдиқ R_n , масалан, $0,1$ дан катта бўлади, яъни $x \geq 0$ бўлганда, қатор нотекис яқинлашади. Аммо, $x \geq 1$ бўлганда у текис яқинлашади, чунки у ҳолда $n - 1 > \frac{-\lg 8}{\lg 2}$ бўлганда ҳар қандай $x \geq 1$ учун

$$|R_n| < \frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon \text{ бўлади; жумладан, } n \geq 11 \text{ бўлганда } |R_n| < 0,001.$$

2466. Ҳар қандай манфиймас x учун берилган қатор ҳадлари яқинлашувчи сонлар қатори $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$ нинг ҳадларидан кичик (ёки тенг). Демак, барча $x \geq 0$ лар учун қатор текис яқинлашади, $R_n(x)$ эса сонлар қатори қолдигидан кичик, яъни ҳар қандай $x \geq 0$ учун $3^{n-1} > 50$ ёки $n \geq 5$ бўлганда $R_n(x) <$

$$< \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} < 0,01. \quad 2467. \text{ Ҳар қандай } x \text{ учун } n \geq 100 \text{ бўлганда}$$

$$|R_n(x)| < \frac{1}{n^2} < 0,0001. \quad 2468. \quad u_n = \frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n}.$$

$$\text{Шунинг учун } S_n = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n}; \text{ ҳар қандай } x \neq 0 \text{ учун } S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{x}.$$

$$\text{Чунончи, } x > 0 \text{ учун } n \geq 10 \text{ бўлганда } R_n(x) = \frac{1}{x+n} < \frac{1}{n} < 0,1.$$

2469. Манфий бўлмаган ҳар қандай x учун қаторнинг ҳадлари яқинлашувчи сонлар қатори $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ нинг ҳадларидан кичик (ёки тенг). Шу сабабли ҳар қандай $x \geq 0$ учун қатор текис

$$\text{яқинлашади, } 2^{n-1} > 100 \text{ ёки } n \geq 8 \text{ бўлганда } R_n(x) < \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} < 0,01. \quad 2470. \quad -3 < x < 3. \quad 2471. \quad -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}.$$

$$2472. \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad 2473. \text{ Барча сонлар ўқида абсолют яқинлашади.}$$

$$2474. \quad -1 < x < 1. \quad 2475. \quad -\frac{\sqrt{2}}{3} < x < \frac{\sqrt{2}}{3}. \quad 2476. \quad 1) R =$$

$$= 0; \quad 2) R = c. \quad 2477. \quad -5 < x < 3. \quad 2478. \quad 1 < x < 2. \quad 2479. \quad \frac{1}{(1-x)^2},$$

$$|x| < 1 \text{ бўлганда. } 2480. \quad \arctg x, |x| < 1 \text{ бўлганда. } 2481. \quad \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$|x| < 1 \text{ бўлганда. } 2482. \quad (1+x)^m. \quad 2483. \quad -\frac{\sqrt{5}}{2} < x < \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$2484. \quad -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}. \quad 2485. \quad -0,1 < x < 0,1. \quad 2486. \quad -1 < x < 1.$$

2487. $-1 \leq x < 3$. 2488. $-1 \leq x < 0$. 2489. $\frac{1-x^3}{(1+x^2)^2}$, $|x| < 1$ бўлганда. 2490. $-\ln(1-x)$, $-1 \leq x < 1$ бўлганда. 2491. $\frac{1-2x}{(1+x)^2}$, $|x| < 1$ бўлганда. 2492. 1) $\cos(x-\alpha) = \sin \alpha \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) + \cos \alpha \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right)$; $|R_n(x)| = \frac{x^n}{n!} \cos \left(0x - \alpha + n \frac{\pi}{2} \right)$; 2) $\sin^2 x = \frac{2 \cdot x^2}{2!} - \frac{2^3 x^4}{4!} + \frac{2^5 x^6}{6!} - \dots$; 3) $xe^x = x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots$; 4) $\sin \left(mx + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{m^2 x^2}{2!} + \frac{m^4 x^4}{4!} - \dots \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{mx}{1!} - \frac{m^3 x^3}{3!} + \frac{m^5 x^5}{5!} - \dots \right)$. 2493. $\ln(1+e^{kx}) = \ln 2 + \frac{kx}{2} + \frac{k^2 x^2}{2! 2^2} - \frac{k^3 x^3}{4! 2^3} + \dots$. 2497. 1) $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \right]$; 2) $\ln(2-3x+x^2) = \ln(1-x)(2-x) = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} (1+2^{-n}) \frac{x^n}{n}$; 3) $\ln(1-x+x^2) = \ln \frac{1+x^3}{1+x} = - \left[x - \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{2x^6}{6} + \dots \right] = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n x^n}{3} \frac{x^n}{n}$. 2498. $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. 2499. $e^{\frac{x}{a}} = e \left[1 + \frac{x-a}{1!a} + \frac{(x-a)^2}{2!a^2} + \frac{(x-a)^3}{3!a^3} + \dots \right]$. $R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!a^n} e^{1+0 \left(\frac{x}{a} - 1 \right)}$. 2500. $x^3 - 3x = -2 + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$. 2501. $x^4 = 1 - 4(x+1) + 6(x+1)^2 - 4(x+1)^3 + (x+1)^4$. 2502. $\frac{1}{x} = - \frac{1}{2 \left(1 - \frac{x+2}{2} \right)} = - \frac{1}{2} \left[1 + \frac{x+2}{2} + \frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(x+2)^3}{8} + \dots \right]$, $-4 < x < 0$ бўлганда. 2503. 1) $\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{2}{2}} \left[1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2} \right)}{1! 2} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2}{2! 2^2} + \dots \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2} \right)^{n-1}}{(n-1)! 2^{n-1}} \cos \frac{(2n-1)\pi}{4}$; бунда 0! шартли 1 га тенг деб қабул қилинган (188- бетдаги 1760- масалага берилган кўрсатмага қар.)

$$2) \sin 3x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x + \pi)^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

$$2504. \sqrt[3]{x} = -\sqrt[3]{1-(x+1)} = -1 + \frac{x+1}{3 \cdot 1!} + \frac{2(x+1)^2}{3^2 \cdot 2!} + \frac{2 \cdot 5(x+1)^3}{3^3 \cdot 3!} + \dots =$$

$$= -1 + \frac{x+1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}{3^{n+1} (n+1)!} (x+1)^{n+1}, \quad -2 < x < 0 \text{ бълганда}$$

$$2505. 1) 2^x = 1 + \frac{x \ln 2}{1!} + \frac{x^2 \ln^2 2}{2!} \dots; |R_n| = \frac{x^n \ln^n 2}{n!} 2^{6x},$$

$$2 \cos \left(mx + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[1 - \frac{mx}{1!} - \frac{m^2 x^2}{2!} + \dots \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(mx)^{n-1}}{(n-1)!} \cos(2n-1) \frac{\pi}{4} \quad (0! = 1 \text{ деб}). \quad 2506. x^4 - 4x^2 =$$

$$= (x+2)^4 - 8(x+2)^3 + 20(x+2)^2 - 16(x+2). \quad 2507. \cos^2 x =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{3} \left[\frac{x - \frac{\pi}{3}}{1!} - \frac{2^2 \left(x - \frac{\pi}{3} \right)^2}{3!} + \frac{2^4 \left(x - \frac{\pi}{3} \right)^3}{5!} - \dots \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{2 \left(x - \frac{\pi}{3} \right)^2}{2!} - \frac{2^3 \left(x - \frac{\pi}{3} \right)^3}{4!} + \frac{2^5 \left(x - \frac{\pi}{3} \right)^4}{6!} - \dots \right].$$

$$2508. \sin \frac{\pi x}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n (x-1)^n}{3^n n!} \sin \left(\frac{\pi}{3} + n \frac{\pi}{2} \right) \quad (0! = 1 \text{ деб}).$$

$$2509. \sqrt{x} = 2 \left[1 + \frac{x-4}{2^3 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 3 (x-4)^2}{2^6 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 (x-4)^3}{2^9 \cdot 3!} + \dots \right].$$

$$2511. \arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots \quad 2512. \sqrt{0.992} =$$

$$= \sqrt{1-0.008} \approx 1 - 0.004 = 0.996; \sqrt{90} = \sqrt{81+9} = 9 \sqrt{1+\frac{1}{9}} \approx$$

$$\approx 9 \left(1 + \frac{1}{18} \right) = 9.5. \quad 2513. \sqrt[3]{0.991} = \sqrt[3]{1-0.009} \approx 0.997; \sqrt[3]{130} =$$

$$= \sqrt[3]{125+5} = 5 \sqrt[3]{1+\frac{1}{25}} \approx 5 \left(1 + \frac{1}{75} \right) = 5 \frac{1}{15}. \quad 2515. \operatorname{arctg} x =$$

$$= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad 2517. \pi = 2\sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{9 \cdot 3^4} \right) = 1.814 \quad \sqrt{3} \approx 3.142. \quad 2519. 1) \int \frac{\sin x}{x} dx = C + x - \frac{x^3}{3!3} +$$

$$+ \frac{x^5}{5!5} - \dots; 2) \int \frac{e^x}{x} dx = C + \ln x + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!2} + \frac{x^3}{3!3} + \dots$$

$$2520 \quad \Phi(x) = \int_0^x e^{-x^2} dx = x - \frac{x^3}{113} + \frac{x^5}{215} - \frac{x^7}{317} + \dots; \quad \Phi\left(\frac{1}{3}\right) \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3^3} \approx 0,419 \text{ бундаги хато } \frac{1}{2430} \text{ дан кичик.}$$

$$2521. \quad \Phi(x) = \int_0^x \sqrt{1+x^2} dx = x + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3^2 \cdot 21} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 31} \cdot \frac{x^7}{7} - \dots;$$

$$\Phi\left(\frac{1}{5}\right) \approx \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 5^3} \approx 0,2008, \quad \frac{1}{3^2 \cdot 5^6} < 0,0001 \text{ дан кичик хато бн-лан. } 2522. \text{ Тенгламани } n \text{ марта дифференциаллаб, } x=0 \text{ деб олinsa, } y_0^{(n+2)} = n(n-1)y_0^{(n-2)} \text{ тенглама ҳосил бўлади. Бундан } y_0'' = y_0'''' = 0, y_0^{IV} = 2 \cdot 1, y_0^V = 3 \cdot 2, y_0^{VI} = 0 \text{ ва ҳоказо. Бу қиймаглари } y =$$

$$= y_0 + \frac{y_0'}{1!}x + \frac{y_0''}{2!}x^2 + \dots, \text{ Маклорен формуласига қўйиб, } y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{3 \cdot 4} + \frac{x^4}{4 \cdot 5} + \frac{x^6}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} + \dots \text{ ни ҳосил қиламиз.}$$

$$2523. \quad y = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{6} - \dots \quad 2524. \text{ Ечим «нолинчи тар-}$$

$$\text{тибл Бессель функцияси» бўлади: } I_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots; \quad 2525. \quad \sqrt{1,005} \approx 1,0025; \quad \sqrt[3]{1,0012} \approx 1,0004;$$

$$\sqrt{0,993} \approx 0,9965; \quad \sqrt[3]{0,997} \approx 0,999; \quad \sqrt{110} = \sqrt{100+10} \approx 10\left(1 + \frac{1}{20}\right) = 10,5; \quad \sqrt[3]{70} \approx 4\left(1 + \frac{1}{32}\right) = 4,125; \quad \sqrt[5]{40} \approx 2\left(1 + \frac{1}{20}\right) =$$

$$= 2,1. \quad 2527. \quad \pi = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 21 \cdot 5 \cdot 2^5} + \dots\right) \approx 3\left(1 + 0,0417 + 0,0047\right) \approx 3,14. \quad 2528. \quad \pi = 2\left[1 - \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^4} - \frac{1}{7 \cdot 2^6} + \dots\right] + \frac{4}{3}\left[1 - \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^4} - \frac{1}{7 \cdot 3^6} + \dots\right] = \frac{10}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1}{4^n} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{9^n \cdot 3}\right). \quad 2532. \quad z = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt =$$

$$= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} dt = 2\pi a \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{2^2} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot \frac{\varepsilon^6}{5} - \dots\right], \text{ бунда } \varepsilon - \text{ эллипсининг эксцентриситети, } a -$$

унинг катта ярим ўқи (1624- масалага ва унинг жавобига қаралсин).

$$2533. \int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx = \left[x + \frac{x^4}{2 \cdot 4} - \frac{x^7}{2^2 \cdot 21 \cdot 7} + \dots \right]_0^{0,5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \times$$

$$\times \frac{1}{2^4} - \dots \approx \frac{65}{128} \approx 0,508, \frac{1}{7 \cdot 2^{10}} \text{ дан кичик хато билан } 2534. \Phi(x) =$$

$$= x - \frac{1}{2!} \frac{x^5}{4^2 \cdot 5} + \frac{1}{4!} \frac{x^9}{4^4 \cdot 9} - \dots; \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5 \cdot 2^{10}} + \dots \approx 0,499805 <$$

$$< \frac{1}{27 \cdot 2^{20}} \text{ дан кичик хато билан. } 2535. y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{3^2 \cdot 7} + \frac{2 \cdot x^{11}}{3^3 \cdot 7 \cdot 11} + \dots$$

$$2536. \text{ Тенгламани } n \text{ марта дифференциаллаб, } x=0 \text{ деб олинса, } y_0^{(n=2)} = -ny_0^{(n-1)} \text{ ни ҳосил қиламиз, бундан } y_5 = 1, y_0 = 0, y_0'' = 0$$

$$y_0''' = -1, y_0^{IV} = y_0^V = 0, y_0^{VI} = 1 \cdot 4, \dots, y = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{1 \cdot 4 \cdot x^6}{6!} -$$

$$- \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot x^9}{9!} + \dots \quad 2537. x = \int_0^s \cos \frac{s^2}{2C} ds = s \left[1 - \frac{s^4}{2! (2C)^2 \cdot 5} + \dots \right],$$

$$y = \int_0^s \sin \frac{s^2}{2C} ds = \frac{s^3}{2C} \left[\frac{1}{3} - \frac{s^4}{3! (2C)^2 \cdot 7} + \dots \right], \text{ бундаги ўзгармас}$$

$C = R \cdot L$, R — доиравий эгри чизик радиуси ва L — қўчма эгри чизик узунлиги. Эгри чизик *клотоида* дейилади

$$(257\text{- бегдаги, } 92\text{-қизмага қаранг.}) \quad 2538. F(x+h, y+l) =$$

$$= x^2 + xy + y^2 + h(2x+y) + l(2y+x) + h^2 + hl + l^2. \quad 2539. x^3 +$$

$$+ 2xy^2 = 9 + 11(x-1) + 8(y-2) + 3(x-1)^2 + 8(x-1)(y-2) +$$

$$+ 2(y-2)^2 + (x-1)^3 + 2(x-1)(y-2)^2. \quad 2540. \ln(x-y) = x - (y+1) - \frac{x^2}{2} +$$

$$+ x(y+1) - \frac{(y+1)^2}{2} + R_3, \text{ бунда } R_3 = \frac{(x-y-1)^3}{3[6x+1-\theta(y+1)]^3} \cdot$$

$$2541. \sin(mx+ny) = mx + ny - \frac{(mx+ny)^3}{3!} + \frac{(mx+ny)^4}{4!} \times$$

$$\times \sin \theta(mx+ny). \quad 2543. dx = 0,1; dy = -0,2; \Delta z = (2x-y)dx +$$

$$+ (2y-x)dy + dx^2 - dx dy + dy^2 = -0,63. \quad 2544. \Delta z =$$

$$= -(a dx - b dy) \sin(ax - by) - \frac{1}{2!} (a dx - b dy)^2 \cos(ax - by) + R_3,$$

$$\text{бунда } R_3 = \frac{1}{3!} (a dx - b dy)^3 \sin[a(x+\theta dx) - b(y+\theta dy)].$$

$$2545. x^2 y = -1 - 2(x-1) + (y+1) - (x-1)^2 + (x-1)(y+1).$$

$$2546. \arctg \frac{y}{x} = y - (x-1)y + \dots \quad 2547. y^x = 1 + 2(y-1) + (x-2) \times$$

$$\times (y-1) + \frac{(y-1)^2}{2} + \dots; \quad 1,1^{2,1} \approx 1 + 2 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,1 + \frac{0,1^2}{2} =$$

$$= 1,215. \quad 2548. dx = -0,01, dy = 0,02; \Delta z = 2yx dx +$$

$$+ (x^2 - 2y) dy + y dx^2 + x dx dy - dy^2 + \frac{1}{3} dx^2 dy \approx -0,1407.$$

$$\begin{aligned}
2549. \quad & \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}. \quad 2550. \quad \frac{\pi}{2} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}. \\
2551. \quad & \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}. \quad 2552. \quad \frac{3\pi}{4} - \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \right. \\
& \left. + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right] + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right]. \\
2553. \quad & \frac{4}{\pi} \left[\sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{l} + \dots \right]. \\
2554. \quad & \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \left[\frac{\cos \pi x}{l^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + \dots \right]. \quad 2555. \quad \frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi^2} \left[\cos \frac{\pi x}{l} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{l} + \dots \right] + \frac{l}{\pi} \left[\sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right]. \\
2556. \quad & 1) \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2} \left[\cos \frac{\pi x}{2} - \frac{2}{2^2} \cos \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{2} - \right. \\
& \left. - \frac{2}{6^2} \cos \frac{6\pi x}{2} + \dots \right]; \quad 2) \frac{2}{\pi} \left[\sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} + \dots \right] + \\
& + \frac{4}{\pi^2} \left[\sin \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi x}{2} - \dots \right]. \\
2557. \quad & u = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\frac{n^2 \pi^2 x^2}{l^2}}. \\
2558. \quad & u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n+1}{2l} \pi x \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x, \text{ бунда} \\
a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{2n+1}{2l} \pi \xi d\xi. \quad 2559. \quad & u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{an^2 n^2 t}{l^2}, \\
\text{бунда } b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi. \quad 2560. \quad & f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda} \sin \lambda x d\lambda. \\
2561. \quad & f(x) = \frac{2\beta}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{\beta^2 + \lambda^2} d\lambda. \\
2562. \quad & f(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1 - \cos \lambda) \sin \lambda}{\lambda^2} \sin \lambda x d\lambda. \\
2563. \quad & \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right]. \\
2564. \quad & |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right].
\end{aligned}$$

$$2565. \frac{4}{\pi} \left[\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \dots \right].$$

$$2566. \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \left[\frac{\cos \frac{\pi x}{l}}{1^2} + \frac{\cos \frac{3\pi x}{l}}{3^2} + \dots \right].$$

$$2567. \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2} \left[\frac{\cos \pi x}{1^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + \dots \right] - \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin \pi x}{1} + \frac{\sin 2\pi x}{2} + \dots \right].$$

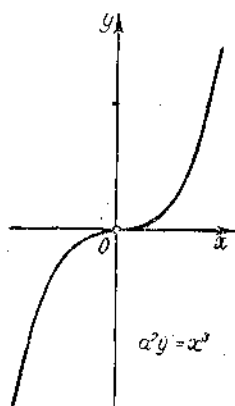
$$2568. \operatorname{sh} l \left[\frac{1}{l} - 2l \left(\frac{\cos \frac{\pi x}{l}}{\pi^2 + l^2} - \frac{\cos \frac{2\pi x}{l}}{2^2\pi^2 + l^2} + \dots \right) + 2\pi \left(\frac{l \cdot \sin \frac{\pi x}{l}}{\pi^2 + l^2} - \frac{2 \sin \frac{2\pi x}{l}}{2^2\pi^2 + l^2} + \dots \right) \right].$$

$$2569. u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{2n+1}{2} l \sin \frac{2n+1}{2} x.$$

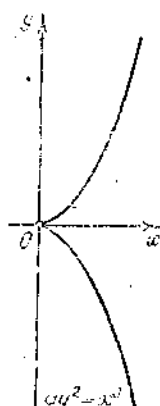
$$\text{бунда } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi) \sin \frac{2n+1}{2} \xi d\xi. \quad 2570. f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda \cos \lambda x}{\lambda} d\lambda.$$

ИЛОВАЛАР

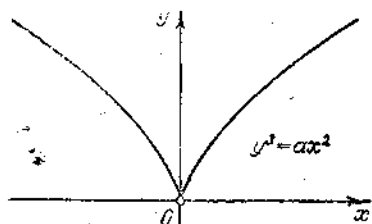
1. КЎП УЧРАЙДИГАН БАЪЗИ ЭГРИ ЧИЗИҚЛАР



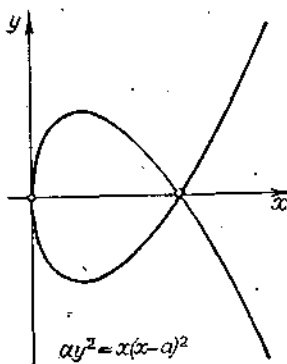
70- чизма. Кубик
парабола.



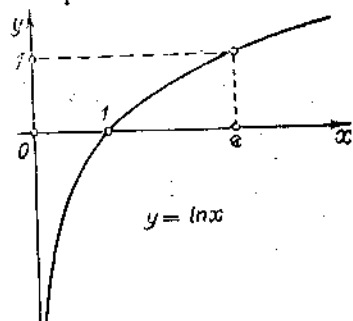
71- чизма. Ярим кубик
парабола.



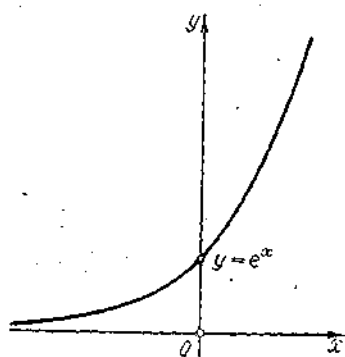
72- чизма. Ярим кубик парабола.



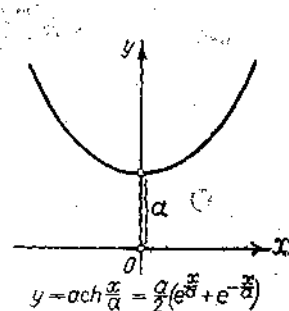
73- чизма. Илмоқли парабола.



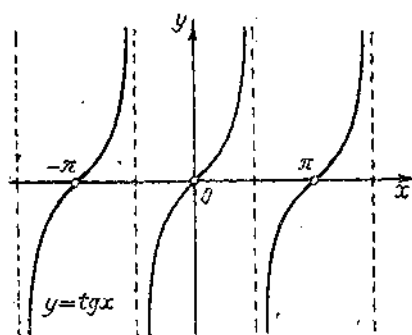
74- чизма. Логарифмика.



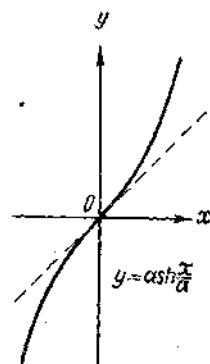
75- чизма. Логарифмика.



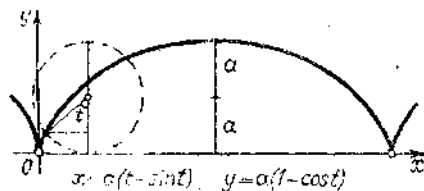
77- чизма. Занжир чизиқ.



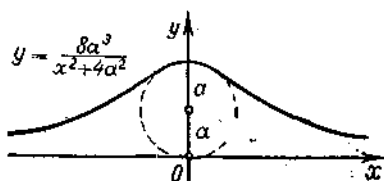
76- чизма. Тангенсоида.



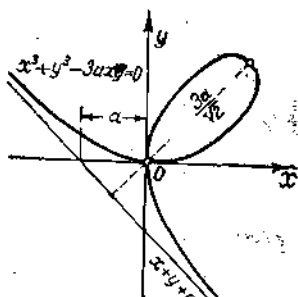
78- чизма. Гиперболик синуснинг графиги.



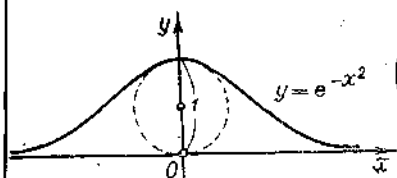
79- чизма. Циклоида.



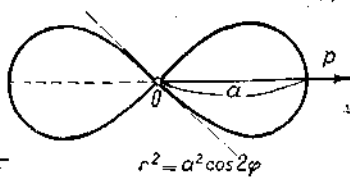
80- чизма. Локон (зулф).



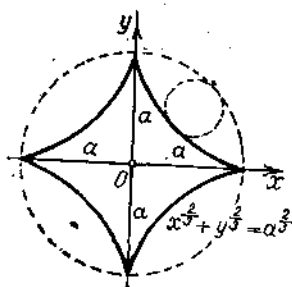
83- чизма. Декарт япроғи.



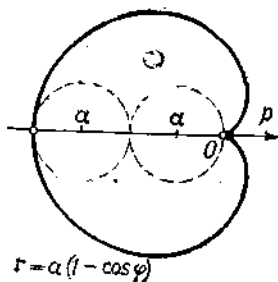
81- чизма. «Эхтимоллик» чизиги.



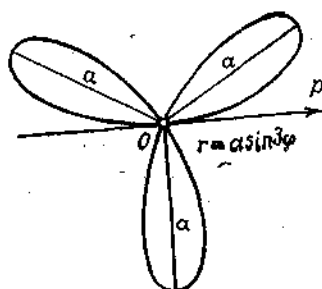
84- чизма. Бернулли лем-
нискатаси.



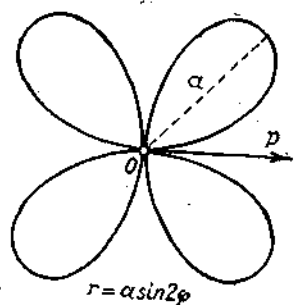
82- чизма. Астроида.



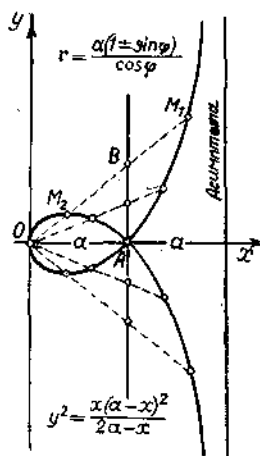
85- чизма, Кардиоида.



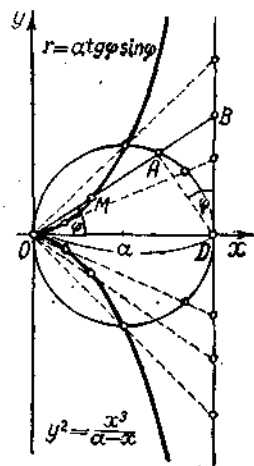
86- чизма. Уч япроқли гул.



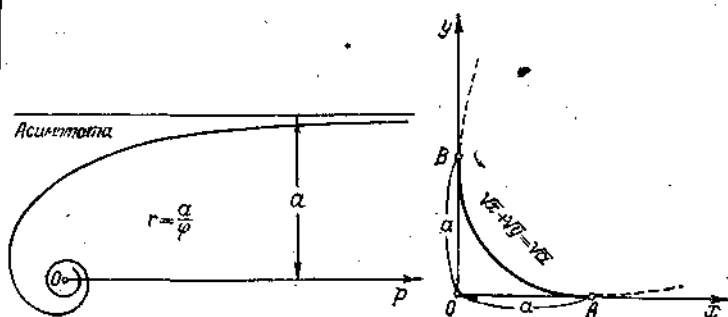
87- чизма. Тўрт япроқли гул.



88- чизма. Строфоида.

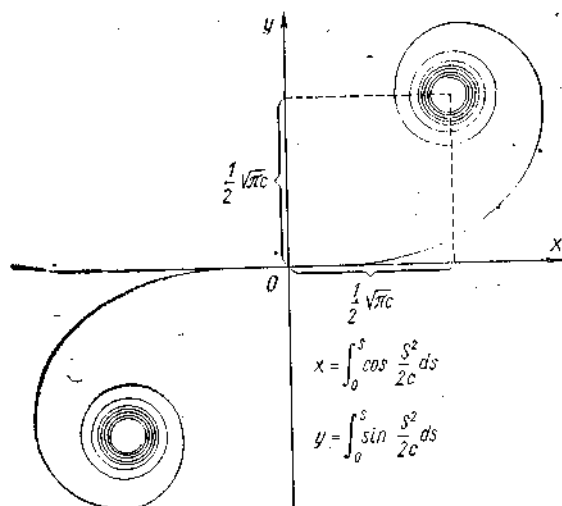


89- чизма. Циссоида.



90- чизма. Гиперболик спираль.

91- чизма. xOy бурчак ичига
чирилган парабола ёни.



92- чизма. Клотоида.

II. ЖАДВАЛЛАР

1. Тригонометрик функциялар

α°	$\sin \alpha$	$\lg \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\cos \alpha$	α°	α радиан	$\sin \alpha$	$\lg \alpha$
0	0,0000	0,0000	—	1,000	90	0	0	0,000
1	0,0175	0,0175	57,3	1,000	89	5,73	0,1	0,100
2	0,0349	0,0349	28,6	0,999	88	11,5	0,2	0,199
3	0,0523	0,0524	19,1	0,999	87	17,2	0,3	0,296
4	0,0697	0,0699	14,3	0,998	86	22,9	0,4	0,389
5	0,0872	0,0875	11,4	0,996	85	28,7	0,5	0,480
6	0,1045	0,1051	9,51	0,995	84	34,4	0,6	0,564
7	0,1219	0,1228	8,11	0,993	83	40,1	0,7	0,644
8	0,139	0,141	7,11	0,990	82	45,0	$\frac{\pi}{4}$	0,707
9	0,156	0,158	6,31	0,998	81	45,8	0,8	0,717
10	0,174	0,176	5,67	0,985	80	51,6	0,9	0,784
11	0,191	0,194	5,145	0,982	79	57,3	1,0	0,842
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78	63,0	1,1	0,891
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77	68,8	1,2	0,932
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76	74,5	1,3	0,964
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75	80,2	1,4	0,985
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74	86,0	1,5	0,998
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73	90,0	$\frac{\pi}{2}$	1,000
18	0,309	0,325	3,078	0,951	72	91,7	1,6	0,999
19	0,326	0,344	2,904	0,946	71	97,4	1,7	0,992
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70	103,1	1,8	0,974
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69	108,9	1,9	0,946
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68	114,6	2,0	0,909
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67	120,3	2,1	0,863
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66	126,1	2,2	0,808
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65	131,8	2,3	0,745
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64	135,0	$\frac{3\pi}{4}$	0,707
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63	137,5	2,4	0,676
28	0,469	0,522	1,881	0,883	62	143,2	2,5	0,599
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61	149,0	2,6	0,515
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60	154,7	2,7	0,428
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59	160,4	2,8	0,336
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58	166,1	2,9	0,240
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57	171,9	3,0	0,141
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56			
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55			
	$\cos \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\lg \alpha$	$\sin \alpha$	α°			

α°	$\sin \alpha$	$\lg \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\cos \alpha$	α°
36	588	727	376	809	54
37	601	754	327	799	53
38	616	781	280	788	52
39	629	810	235	777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
	$\cos \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\lg \alpha$	$\sin \alpha$	α°
$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ $\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$					
α градуслар	1	2	3	4	5
α радианлар	0,017	0,035	0,052	0,070	0,087
	0,105	0,122	0,140	0,157	
1 радиан = $57^\circ 17' 45''$					

Гиперболик функциялар

x	$\text{sh } x$	$\text{ch } x$	x	$\text{sh } x$	$\text{ch } x$
0	0	1			
0,1	0,100	1,005	2,1	4,022	4,289
0,2	0,201	1,020	2,2	4,457	4,568
0,3	0,304	1,045	2,3	4,937	5,037
0,4	0,411	1,081	2,4	5,466	5,557
0,5	0,521	1,128	2,5	6,050	6,132
0,6	0,637	1,185	2,6	6,695	6,769
0,7	0,759	1,255	2,7	7,407	7,474
0,8	0,888	1,337	2,8	8,192	8,253
0,9	1,026	1,433	2,9	9,060	9,115
1,0	1,175	1,543	3,0	10,02	10,07
1,1	1,336	1,669	3,1	11,08	11,12
1,2	1,509	1,811	3,2	12,25	12,29
1,3	1,698	1,971	3,3	13,54	13,58
1,4	1,904	2,151	3,4	14,97	15,00
1,5	2,129	2,352	3,5	16,54	16,57
1,6	2,376	2,578	3,6	18,29	18,32
1,7	2,646	2,828	3,7	20,21	20,24
1,8	2,942	3,107	3,8	22,34	22,36
1,9	3,268	3,418	3,9	24,69	24,71
2,0	3,627	3,762	4,0	27,29	27,31

$x > 4$ бўлганда, 0,1 аниқлик билан $\text{sh } x \approx \text{ch } x \approx \frac{e^x}{2}$ деб ҳисоб-
лаш мумкин.

$$\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

$$e^x = \text{sh } x + \text{ch } x; \quad e^{xi} = i \sin x + \cos x.$$

3. Тескари миқдорлар, квадрат ва куб илдизлар,
логарифмлар, кўрсаткичли функция

x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{100x}$	$\lg x$	$\ln x$	e^x	x
1,0	1,000	1,00	3,16	1,00	2,15	4,64	0,00	0,000	2,72	1,0
1,1	0,909	05	32	03	22	79	041	095	3,00	1,1
1,2	833	10	46	06	29	93	079	192	3,32	1,2
1,3	769	14	61	09	35	5,07	114	252	3,67	1,3
1,4	714	18	74	12	41	19	146	336	4,06	1,4
1,5	0,667	1,23	3,87	1,15	2,47	5,13	176	0,405	4,48	1,5
1,6	625	27	4,00	17	52	43	204	470	4,95	1,6
1,7	588	39	12	19	57	54	230	530	5,47	1,7
1,8	556	34	24	22	62	65	255	588	6,05	1,8
1,9	526	38	36	24	67	75	279	642	6,69	1,9
2,0	0,500	1,41	4,47	1,26	2,71	5,85	301	0,693	7,39	2,0
2,1	476	45	58	28	76	94	322	742	8,17	2,1
2,2	435	48	69	30	80	6,03	342	789	9,03	2,2
2,3	435	52	80	32	84	13	362	833	9,97	2,3
2,4	417	55	90	34	88	21	389	875	11,0	2,4
2,5	0,400	1,58	5,00	1,36	2,92	6,30	398	0,916	12,2	2,5
2,6	385	61	10	38	96	38	415	955	13,5	2,6
2,7	370	64	20	39	3,00	46	431	993	14,9	2,7
2,8	357	67	29	41	04	54	447	1,030	16,4	2,8
2,9	345	70	39	43	07	62	462	065	18,2	2,9
3,0	0,333	1,73	5,48	1,44	3,11	6,69	477	1,099	20,1	3,0
3,1	323	76	57	46	14	77	491	131	22,2	3,1
3,2	313	79	66	47	18	84	505	163	24,5	3,2
3,3	303	81	75	49	21	91	519	194	27,1	3,3
3,4	294	84	83	50	24	98	532	224	30,0	3,4
3,5	0,286	1,87	5,92	1,52	3,27	7,05	544	1,253	33,1	3,5
3,6	278	90	6,00	53	30	11	556	281	36,6	3,6
3,7	270	92	08	55	32	18	568	308	40,4	3,7
3,8	263	95	16	56	36	24	580	335	44,7	3,8
3,9	256	98	25	57	39	31	591	361	49,4	3,9
4,0	0,250	2,00	6,33	1,59	3,42	7,37	602	1,386	54,6	4,0
4,1	244	03	40	60	45	43	613	411	60,3	4,1
4,2	238	05	48	61	48	49	623	435	66,7	4,2
4,3	233	07	56	63	50	55	634	458	73,7	4,3
4,4	227	10	63	64	53	61	644	482	81,5	4,4
4,5	0,222	2,12	6,71	1,65	3,56	7,66	653	1,504	90,0	4,5
4,6	217	15	78	66	58	72	663	526	99,5	4,6
4,7	213	17	86	68	61	78	672	548	110	4,7
4,8	208	19	93	69	63	83	681	569	121	4,8
4,9	204	21	7,00	70	66	88	690	589	134	4,9

Давоми

x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	$\lg x$	$\ln x$	e^x	x
5,0	0,200	2,24	7,07	1,71	3,68	7,94	699	1,609	148	5,0
5,1	196	26	14	72	71	99	708	629	164	5,1
5,2	192	28	21	73	73	8,04	716	649	181	5,2
5,3	189	30	28	74	76	09	724	668	200	5,3
5,4	185	32	35	75	78	14	732	686	221	5,4
5,5	0,182	2,35	7,42	1,77	3,80	8,19	740	1,705	244	5,5
5,6	179	37	48	78	83	24	748	723	270	5,6
5,7	175	39	55	79	85	29	756	740	299	5,7
5,8	172	41	62	80	87	34	763	758	330	5,8
5,9	170	43	68	81	89	39	771	775	365	5,9
6,0	0,167	2,45	7,75	1,82	3,92	8,43	778	1,792	403	6,0
6,1	164	47	81	83	94	48	785	808	446	6,1
6,2	161	49	87	84	96	53	792	825	493	6,2
6,3	159	51	94	85	98	57	799	841	545	6,3
6,4	156	53	1,00	86	1,00	62	806	856	602	6,4
6,5	0,154	2,55	8,06	1,87	4,02	8,66	813	1,872	665	6,5
6,6	152	57	12	83	04	71	820	887	735	6,6
6,7	149	59	19	89	06	75	826	902	812	6,7
6,8	147	61	25	90	08	79	833	918	898	6,8
6,9	145	63	31	90	10	84	839	932	992	6,9
7,0	0,143	2,65	8,37	1,91	4,12	8,88	845	1,916	1097	7,0
7,1	141	67	43	92	14	92	851	968	1212	7,1
7,2	139	68	49	93	16	96	857	974	1339	7,2
7,3	137	70	54	94	18	9,09	863	982	1480	7,3
7,4	135	72	60	95	20	05	869	2,001	1636	7,4
7,5	0,133	2,74	8,66	1,96	4,22	9,09	875	2,015	1808	7,5
7,6	132	76	72	97	24	13	881	028	1998	7,6
7,7	130	78	78	98	25	17	887	041	2208	7,7
7,8	128	79	83	98	26	21	892	954	2440	7,8
7,9	127	81	89	99	29	24	898	067	2697	7,9
8,0	0,125	2,83	8,94	2,00	4,31	9,28	903	2,079	2981	8,0
8,1	124	85	9,00	01	33	32	909	092	3294	8,1
8,2	122	86	06	02	34	36	914	104	3641	8,2
8,3	121	88	11	03	36	40	919	116	4024	8,3
8,4	119	90	17	03	38	44	924	128	4447	8,4
8,5	0,118	2,92	9,22	2,04	4,40	0,47	929	2,140	4914	8,5
8,6	116	93	27	05	41	51	935	152	5432	8,6
8,7	115	95	33	06	43	55	940	163	6003	8,7
8,8	114	97	38	07	45	58	945	175	6694	8,8
8,9	112	98	43	07	47	62	949	186	7332	8,9

Давоми

x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	$\lg x$	$\ln x$	e^x	x
9,0	0,111	8,00	9,49	2,08	4,48	9,66	954	2,197	8193	9,0
9,1	110	02	54	09	50	69	959	208	8955	9,1
9,2	109	03	59	10	51	73	964	219	9897	9,2
9,3	108	05	64	10	53	76	969	230	10938	9,3
9,4	106	07	69	11	55	80	973	241	12088	9,4
9,5	0,105	3,08	9,75	2,12	4,56	9,83	978	2,251	13360	9,5
9,6	104	10	80	13	58	87	982	263	14765	9,6
9,7	103	11	84	13	60	90	987	272	16318	9,7
9,8	102	13	90	14	61	93	991	282	18034	9,8
9,9	101	15	95	15	63	97	996	293	19930	9,9
10,0	0,100	3,16	10,00	2,15	4,64	10,00	000	2,303	22026	10,0

$\lg x$ графасида ўнли логарифмларнинг мантиссалари берилган.
 10 дан катта ёки 1 дан кичик сонларнинг натурал логарифмларини топиш учун

$\ln(x \cdot 10^k) = \ln x + k \ln 10$

формуладан фойдаланиш керак
 Қуйидагиларни эслатиб ўтайлик:

$\ln 10 = 2,303;$ $\ln 10^2 = 4,605;$
 $\lg x = 0,4343 \ln x;$ $\ln x = 2,303 \lg x$

Илдизларни тақрибий ҳисоблаш формуллари:

1) $|x| < 1$ бўлганда, $\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n} + \frac{1-n}{2n^2} x^2.$

2) $\left| \frac{b}{a} \right| < 1$ бўлганда, $\sqrt[n]{a^n + b} \approx a \left(1 + \frac{b}{na^n} + \frac{1-n}{2n^2} \cdot \frac{b^2}{a^{2n}} \right).$

МУНДАРИЖА

	Бет
Учинчи нашрига сўз боши	3
1 боб. Текисликдаги аналитик геометрия	5
1- §. Тўғри чизиқдаги ва текисликдаги нуқтанинг координаталари. Икки нуқта орасидаги масофа	5
2- §. Кесмани берилган нисбатда бўлиш. Учбурчак ва кўпбурчакнинг юзи	7
3- §. Нуқталарнинг геометрик ўрни сифатидаги чизиқнинг тенгламаси	9
4- §. Тўғри чизиқнинг: 1) бурчак коэффициентли тенгламаси; 2) умумий тенгламаси; 3) кесмалар бўйича тенгламаси	11
5- §. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Берилган нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси. Берилган икки тўғри чизиқнинг кесилган нуқтаси	14
6- §. Тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси. Нуқтадан тўғри чизиққа бўлган масофа. Биссектрисалар тенгламалари. Берилган икки тўғри чизиқнинг кесилган нуқтасидан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси	17
7- §. Тўғри чизиққа доир аралаш масалалар	19
8- §. Айлана	21
9- §. Эллипс	24
10- §. Гипербола	26
11- §. Парабола	29
12- §. Иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг директрисалари, диаметрлари ва уларга ўтказилган уринималар	33
13- §. Декарт координаталарини алмаштириш. $y = ax^2 + bx + c$ ва $x = ay^2 + by + c$ параболалар. $xy = k$ гипербола	36
14- §. Иккинчи тартибли эгри чизиқларга доир аралаш масалалар	40
15- §. Иккинчи тартибли эгри чизиқнинг умумий тенгламаси	43
16- §. Кутб координаталари	47
17- §. Учинчи тартибли ва юқори тартибли алгебраик эгри чизиқлар	51
18- §. Трансцендент эгри чизиқлар	54
II боб. Векторлар алгебраси	55
1- §. Векторларни қўйиш. Векторни скалярга кўпайтириш	55
2- §. Фазода нуқтанинг ҳамда векторнинг тўғри бурчакли координаталари	58
3- §. Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси	60
4- §. Икки векторнинг вектор кўпайтмаси	64
5- §. Уч векторнинг аралаш кўпайтмаси	66

III боб. Фазодаги аналитик геометрия	68
1-§. Текислиكنинг тенгламаси	68
2-§. Текисликка доир асосий масалалар	70
3-§. Тўғри чизик тенгламалари	72
4-§. Тўғри чизик ва текислик	75
5-§. Сферик ва цилиндрлик сиртлар	78
6-§. Кonus сиртлар ва айланish сиртлари	80
7-§. Эллипсоид, гиперболоидлар ва параболоидлар	82
IV боб. Олий алгебра	86
1-§. Детерминантлар	86
2-§. Чизикли тенгламаларнинг системалари	89
3-§. Комплекс сонлар	92
4-§. Юқори даражали тенгламалар. Тенгламаларнинг теоретик ечилиш	95
V боб. Анализга кириш	99
1-§. Ўзгарувчи функциялар	99
2-§. Сонлар кетма-кетлиги. Чексиз кичик ва чексиз катта ўзгарувчи	102
3-§. Функцияларнинг limiti. $\frac{0}{0}$ ва $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқлаш	102
4-§. $\sin \alpha$ нисбатининг $\alpha \rightarrow 0$ даги limiti	109
5-§. $\alpha \rightarrow \infty$ ва $0, \infty$ кўринишдаги аниқлашлар	110
6-§. Limitларни ҳисоблашда доир аравалаш мисоллари	111
7-§. Чексиз кичикларни таққослаш	112
8-§. Функциянинг узлуksизлиги	113
9-§. Асимптоталар	116
10-§. e sonи	118
VI боб. Ҳосила ва дифференциал	119
1-§. Алгебраик ва тригонометрик функцияларни ҳосилалари	119
2-§. Мураккаб функциянинг ҳосиласи	121
3-§. Текис эгри чизикқа ўтказилган уринма ва нормаль	122
4-§. Дифференциалланмайдиган узлуksиз функциялар	124
5-§. Кўрсаткичли ва логарифмик функцияларнинг ҳосилалари	126
6-§. Тескари тригонометрик функцияларнинг ҳосилалари	128
7-§. Гиперболик функцияларнинг ҳосилалари	128
8-§. Дифференциаллашга доир аралаш мисоллар ва масалалар	129
9-§. Юқори тартибли ҳосилалар	130
10-§. Ошкормас функциянинг ҳосиласи	133
11-§. Функциянинг дифференциали	134
12-§. Эгри чизикнинг параметрик тенгламалари	136
VII боб. Ҳосиланинг татбиқлари	139
1-§. Тезлик ва тезланиш	139
2-§. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремадар	140
3-§. Аниқмасликларни очиш. Лопитал қондаси	144
4-§. Функциянинг ўсиши ва камайиши. Максимум ва минимум	146
5-§. Микдорларнинг энг катта ва энг кичик қийматларига доир масалалар	149

6-§. Эгри чизик қавариклигининг йўналиши ва бурилиш нуқталари. Эгри чизикларни яшаш	153
VIII боб. Аниқмас интеграл	155
1-§. Аниқмас интеграл. Ёйиш усули билан интеграллаш	155
2-§. Ўрнига қўйиш усули билан ва бевосита интеграллаш	157
3-§. $\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}}$ кўринишдаги ва уларга келтириладиган интеграллар	159
4-§. Бўлаклаб интеграллаш	161
5-§. Тригонометрик функцияларни интеграллаш	162
6-§. Рационал алгебраик функцияларни интеграллаш	164
7-§. Баъзи бир иррационал алгебраик функцияларни интеграллаш	166
8-§. Баъзи бир трансцендент функцияларни интеграллаш	168
9-§. Гиперболик функцияларни интеграллаш. Гиперболик ўрнига қўйишлар	170
10-§. Интеграллашга доир ағраш мисоллар	171
IX боб. Аниқ интеграл	173
1-§. Аниқ интегрални ҳисоблаш	173
2-§. Юзларни ҳисоблаш	176
3-§. Айланиш жисмининг ҳажми	179
4-§. Текис эгри чизик ёйининг узунлиги	180
5-§. Айланиш жисми сиртининг юзи	182
6-§. Физика масалалари	183
7-§. Хосмас интеграллар	185
8-§. Функциянинг ўрта қиймати	189
9-§. Трапециялар формуласи ва Симпсон формуласи	190
X боб. Текис ва фазовий эгри чизикнинг эгрилиги	193
1-§. Текис эгри чизикнинг эгрилиги. Эгрилик маркази ва радиуси. Эволюта	193
2-§. Фазодаги эгри чизик ёйининг узунлиги	195
3-§. Вектор функциянинг скаляр бўйича ҳосиласи ва унинг механик ҳамда геометрик маъноси. Эгри чизикнинг табиий учёқлиги	195
4-§. Фазодаги эгри чизикнинг эгрилиги ва бурилиши	199
XI боб. Хусусий ҳосилалар, тўла дифференциаллар ва уларнинг табиқи	201
1-§. Икки аргументли функциялар ва уларнинг геометрик тасвири	201
2-§. Биринчи тартибли хусусий ҳосилалар	204
3-§. Биринчи тартибли тўлиқ дифференциал	205
4-§. Мураккаб функцияларнинг ҳосилалари	207
5-§. Ошқормас функцияларнинг ҳосилалари	208
6-§. Юқори тартибли хусусий ҳосилалар ва тўлиқ дифференциаллар	210
7-§. Тўлиқ дифференциалларни интеграллаш	214
8-§. Текис эгри чизикнинг махсус нуқталари	215
9-§. Текис эгри чизиклар силасининг ўрамаси	216
10-§. Сиртга ўтказилган ўрнима текислик ва нормал	217

11-§. Скаляр майдон, Юксакликлар чизиклари ва сиртлари. Берилган йўналиш бўйича ҳосила. Градиент	219
12-§. Икки ўзгарувчилик функциянинг экстремуми	221
XII боб. Дифференциал тенгламалар	224
1-§. Дифференциал тенглама ҳақида тушунча	224
2-§. Ўзгарувчилари ажраладиган 1-тартибли дифференциал тенглама. Ортогонал траекториялар	225
3-§. 1-тартибли: 1) бир жинсли; 2) чизикли дифференциал тенгламалар 3) Бернулли дифференциал тенгласи	228
4-§. Кўпайтма ва бўлимининг дифференциалларини ўз ичига олган дифференциал тенгламалар	230
5-§. Тўлиқ дифференциалли 1-тартибли дифференциал тенгламалар. Интегралловчи кўпайтувчи	231
6-§. Ҳосиллага нисбатан ечилмаган 1-тартибли дифференциал тенгламалар. Лягранж ва Клеро тенгламалари	232
7-§. Тартибини пасайтириш мумкин бўлган юқори тартибли дифференциал тенгламалар	234
8-§. Ўзгармас коэффициентли бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар	235
9-§. Ўзгармас коэффициентли бир жинсли бўлмаган чизикли дифференциал тенгламалар	237
10-§. Ҳар хил типдаги дифференциал тенгламаларга мисоллар	239
11-§. Эйлернинг чизикли дифференциал тенгласи $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} xy' + a_n y = f(x)$	240
12-§. Ўзгармас коэффициентли чизикли дифференциал тенгламалар системалари	241
13-§. Икки тартибли хусусий ҳосилали чизикли дифференциал тенгламалар (характеристикалар методи)	241
XIII боб. Икки ўлчовли, уч ўлчовли ва эгри чизикли интеграллар	243
1-§. Икки ўлчовли интеграл билан юзларни ҳисоблаш	243
2-§. Массаси текис тақсимланган юзининг (зичлиги $\mu = 1$ бўлганда) оғирлик маркази ва инерция моменти	245
3-§. Икки ўлчовли интеграл билан ҳажми ҳисоблаш	246
4-§. Эгри сиртларнинг юзлари	248
5-§. Уч ўлчовли интеграл ва унинг татбиқи	249
6-§. Эгри чизикли интеграл. Грин формуласи	251
7-§. Сирт бўйича олинган интеграллар ва Остроградский ва Стокс формуллари	254
XIV боб. Қаторлар	258
1-§. Сонли қаторлар	258
2-§. Функционал қаторнинг текис яқинлашгани	261
3-§. Даражали қаторлар	263
4-§. Тейлор ва Маклорен қаторлари	265
5-§. Қаторларнинг тақрибий ҳисоблашларга татбиқи	267
6-§. Икки ўзгарувчилик функция учун Тейлор қатори	270
7-§. Фурье қатори. Фурье интеграли	271
Жавоблар	276
Иловалар	353

На узбекском языке

ВАСИЛИЙ ПАВЛОВИЧ МИНОРСКИЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие для высших технических учебных заведений

Третье издание соответствует 11-ому изданию изд-ва «Наука», М., 1971

Издательство «Ўқитувчи»—Ташкент—1977

Таржимон *М. Холиқов*

Техредактор *Т. Скиба*

Редакторлар: *Н. Аҳмаджонов, Р. Каримов*

Корректор *Д. Саъдуллаева*

Единый редактор *Е. Соин*

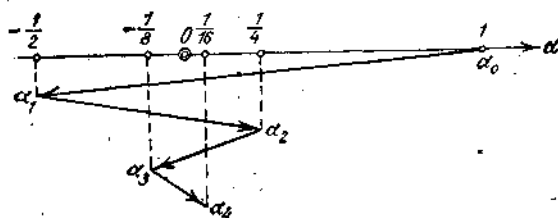
Теринга берилди 18/VI-1976 й. Босишга рухсат этилди 8/XI-1976 й. Қозғоз № 3.
84 X 108 1/32. Физ. б. л. 11,5 Шартли. б. л. 19, 32. Нашр. л. 20, 11. Тиражи 20 000.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент. Навоий кўчаси, 30. Шартнома № 103 — 76.
Баҳоси 56 т. Муқоваси 10 т.

ЎзССР Министрлар Советининг нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари Давлат комитетининг Тошкент полиграфия комбинати. Навоий кўчаси, 30
1976 й. Зак. № 876.

Ташполиграфкомбинат Государственного Комитета Совета Министров УзССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли. Ташкент, Навоий, 30.

666. 2, 15; 0, 524; -2, 66. 667. 1) 1, 305; 2) 4 ва 0, 310; 3) -0, 682 i;
 4) $x_1 = 1, 494$, $x_2 = -0, 798$ (x_1 ни $x = \sqrt[4]{2x+2}$ формулага асосан,
 x^2 сса $x = \frac{x^4 + 3x - 2}{5}$ формулага асосан топилсин). 668. 1) -6,
 $-1 \pm i\sqrt{2}$; 2) -1; 2; 2. 669. 1) $\Delta = \frac{1225}{4} > 0$, $u_1 = 3$, $v_1 = -2$, $z_1 = 1$,
 $z_{2,3} = \frac{-1 \pm 5i\sqrt{3}}{2}$; 2) $\Delta = -4 < 0$, $\varphi = 45^\circ$, $z_1 = 2\sqrt{2} \cos 15^\circ =$
 $= -1 + \sqrt{3}$, $z_2 = -2$, $z_3 = 1 - \sqrt{3}$; 3) $\Delta = 0$, $z_1 = -2$, $z_{2,3} = 1$;
 4) $x = z - 2$ деб, $z^3 - 3z + 2 = 0$ ни ҳосил қиламиз; $\Delta = 0$; $z_1 = -2$;
 $z_2 = z_3 = 1$; $x_1 = -4$, $x_2 = x_3 = -1$. 670. 1, 76 ва -2, 15. 672. 1) 1, 67-
 2) 3, 07. 672. 1, 67. 675. $0 \leq x < 1$. 681. $x_1 = 0$. $x_2 = 4$.
 683. 1) $x < -2$; 2) $-3 \leq x \leq 3$; 3) $0 \leq x < 4$. 684. 1) $-4 \leq x < 0$;
 2) $-1 \leq x < 3$. 685. 1) $x > 0$; 2) $x < 4$. 686. 1) $2k\pi \leq x < (2k+1)\pi$;
 2) $-4 \leq x < +4$. 687. 1) $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(-1) = 3$, $f(2) = 3$,
 $f(a+1) = a^2 + a + 1$. 688. 1) $b+a$; 2) $2ah$. 689. $\frac{b+a}{b^2+ab+a^2}$.
 690. $F(4; 3) = 19$, $F(3; 4) = -25$. 691. 1) жуфт; 2) тоқ;
 3) жуфт, 4) тоқ; 5) тоқ; 6) жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас.
 692. $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$. 693. $\log_a x$. 694. a^x .
 696. $2 < x \leq 3$. 700. 1) $|x| \leq 2$; 2) $-1 \leq x \leq 3$; 3) $-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq$
 $< x < \frac{\pi}{4} + k\pi$, 4) $|x| \geq 2$. 701. 2) $6x^2 + 2k^2$; 3) $4(2-a)$. 702. $\alpha =$
 $= \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ўзгарувчининг ўзгариши 39- чизмада график тасвирланган.



39- чизма.

- $n > \frac{3}{\lg 2}$ ёки $n > \frac{3}{0,3} = 10$ бўлганда $|\alpha| < 0,001$ бўлади;
 $n > \frac{\lg \frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2}$ бўлганда $|\alpha| < \varepsilon$ бўлади. 703. $x = 2; \frac{2}{3}; 1; \frac{1}{5}; \frac{6}{7}; 1; \frac{1}{9} \dots \rightarrow 1$
 $n > 50$ бўлганда $|x-1| < 0,01$ ё, $n > \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}$ бўлганда $|x-1| < \varepsilon$ бўлади.
 704. $x = 4; 3,1; 3,01; \dots \rightarrow 3+0$; $x = 2; 2,9; 2,99; \dots \rightarrow 3-0$.