N. P. RASULOV, I.I. SAFAROV, R.T. MUXITDINOV

OLIY MATEMATIKA

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

BUXORO YUQORI TEXNOLOGIYALAR MUHANDISLIK - TEXNIKA INSTITUTI

N. P. RASULOV, I.I. SAFAROV, R.T. MUXIDDINOV

O L I Y   M A T E M A T I K A

(Iqtisodchi va muhandis-texnologlar uchun)

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi Muvofiqlashtiruvchi Kengashi tomonidan bakalavriatning iqtisod va muhandis-texnolog yo‘nalishlari uchun darslik sifatida tavsiya etilgan

TOSHKENT-2012

N.P. Rasulov , I.I. Safarov I.I., R.T. Muxitdinov "Oliy matematika" (Iqtisodchi va muhandis-texnologlar uchun).

"Oliy matematika (Iqtisodchilar va muhandis-texnologlar uchun)" darsligi oliy o'quv yurtlarning iqtisod va muhandis-texnolog yo'nalishlari bo'yicha bakalavrlar tayyorlash uchun bu fanning tasdiqlangan namunaviy o'quv dasturi asosida yaratilgan.

Kitobda oily matematikaga doir asosiy tushuncha va tasdiqlar yoritilgam bo'lib, ularning iqtisodiy mazmuni va tatbiqlari ko'rsatilgan. Mavzular bo'yicha tayanch iboralar ro'yxati, testlardan namunalar va talabalar mustaqil ishi uchun topshiriqlar ham berilgan. Asosiy tayanch iboralarning izohli lug'ati ham keltirilgan.

M a x s u s m u h a r r i r : O'zbekiston Milliy universiteti dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi ***Zaxirov M.***

T a q r i z c h i l a r : Buxoro Yuqori texnologiyalar muhandislik – texnika instituti professori ***Mo'minov Sh. R.***

Buxoro davlat universiteti kafedra mudiri, fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent ***Axmedov X.X.***

SO‘Z BOSHI

Mamlakatimiz mustaqillikka erishgach, ta’lim tizimini tubdan islohot qilishga katta ahamiyat berildi. 1997 yil 29 avgust kuni O‘zbekiston Respublikasi Oliy Majlisining IX sessiyasida “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi” qabul qilindi va unda ta’lim tizimini zamonaviy talablarga mos keltirish uchun bajarilishi lozim bo‘lgan vazifalar hamda ularni bosqichma–bosqich amalga oshirish belgilab berildi. Milliy dasturdagi eng asosiy vazifalaridan biri –yuksak ma’naviy va axloqiy talablarga javob beruvchi yuqori malakali mutaxassislar tayyorlashdan iboratdir. Bu vazifani amalga oshirishda o‘quv-tarbiya jarayoni uchun o‘quv adabiyotlarining yangi avlodini yaratish, uni yuqori sifatli o‘quv-uslubiy majmualar bilan ta’minlash muhim ahamiyatga ega ekanligi dasturda ta’kidlab o‘tilgan.

Yuqori malakali, raqobatbardosh, zamonaviy talablarga javob bera oladigan iqtisodchi kadrlar tayyorlashda ularga chuqur matematik bilimlar berish va bu bilimlarni iqtisodiy masalalarni yechishga tatbiq eta olishga o‘rgatish katta ahamiyatga ega. Shu sababli iqtisod yo‘nalishlari bo‘yicha ta’lim oluvchi bakalavrlarning o‘quv rejalarida “Oliy matematika” fanini o‘qitish ko‘zda tutilgan. Hozirgi davrda bu fanni o‘qitish alohida ahamiyatga ega bo‘lgani uchun oxirgi yillarda chet ellarda, jumladan Rossiyada bu fan bo‘yicha juda ko‘p o‘quv-uslubiy adabiyotlar yaratilmoqda. Ulardan bir qismi kitobimizning adabiyotlar ro‘yxatida ko‘rsatilgan va bu ro‘yxatni Internet tizimi yordamida ancha kengaytirish mumkin.

Iqtisodchilar uchun “ Oliy matematika” fani bo‘yicha o‘zbek tilidagi dastlabki o‘quv qo‘llanma prof. G‘. Nasritdinov tomonidan 2002 yilda yozilgan (adabiyotlar ro‘yxatiga qarang). Ammo bu kitob juda kam adadda chop etilgan va ulardagi mavzular bu fan bo‘yicha namunaviy dasturni to‘liq qamrab olmagan. Bundan tashqari bu adabiyotlar kiril alifbosida yozilganligi uchun lotin alifbosida saboq olgan bakalavrlar undan foydalanishda muayyan qiyinchiliklarga uchraydilar. Shu sababli lotin alifbosida iqtisodchilar uchun “Oliy matematika” fani bo‘yicha ushbu kitobni yaratishni o‘z oldimizga maqsad qilib qo‘ydik va uni imkonimiz darajasida amalga oshirdik.

Shuni ta’kidlab o‘tish lozimki, ushbu kitob yozilib, nashrga tayyorlanayotgan paytda Sharahmetov Sh. va Naimjonov A. tomonlaridan lotin alifbosida O‘zbekiston Respublikasi Davlat ta’lim standartlari asosida yozilgan «Iqtisodchilar uchun matematika» darsligi bosmadan chiqdi (adabiyotlar ro‘yxatiga qarang) va bu ham biz tanlagan yo‘lni to‘g‘ri ekanligini tasdiqlaydi.

Ushbu kitobni yozishda ko‘p yillar davomida Buxoro oziq-ovqat va engil sanoat texnologiyasi institutida iqtisodchilar uchun “Oliy matematika” fanini o‘qitish tajribasidan va bu fan bo‘yicha mavjud bo‘lgan o‘zbek va rus tilidagi o‘quv adabiyotlaridan ijodiy ravishda foydalanildi. Bu kitobda iqtisodchilar uchun “ Oliy matematika” fanining namunaviy dasturida rejalashtirilgan barcha mavzular o‘z o‘rnini topgan. Bu mavzular iqtisod bo‘yicha bo‘lg‘usi mutaxassislar uchun zarur bo‘lgan matematikaning modellashtirish, to‘plamlar nazariyasi, chiziqli algebra, vektorlar algebrasi, chiziqli fazolar, analitik geometriya, differentsial va integral hisob, ko‘p o‘zgaruvchili funktsiyalar, differentsial tenglamalar, sonli va darajali qatorlar kabi asosiy bo‘limlarini tashkil etadi.

Bu bo‘limlar bo‘yicha nazariy ma’lumotlarni yoritishda ikkita muammoni hal etish lozim bo‘ldi. Bir tomondan, ushbu kitob matematika bo‘yicha o‘quv adabiyoti bo‘lgani uchun undagi mavzularni iloji boricha to‘liq va izchil, yetarli darajadagi matematik qat’iylik va aniqlikda bayon etish talab qilinadi. Ikkinchi tomondan esa bu kitob iqtisod yo‘nalishi bo‘yicha ta’lim olayotgan bakalavrlar uchun mo‘ljallanganligi tufayli undagi ayrim teorema va formulalarni isbotsiz keltirishni, matematika bo‘yicha nazariy ma’lumotlarning iqtisodiy mazmuni va tatbiqlarini kengroq yoritishni taqozo etadi. Shu maqsadda berilayotgan tushuncha va tasdiqlarni ko‘p sonli misollar va chizmalar orqali ham mustahkamlashga harakat qilindi. Yuqorida ko‘rsatilgan muammolarni qanchalik darajada hal eta olganimizni baholash o‘quvchiga havola qilinadi.

Hozirgi davrda talabalarning mustaqil ishiga katta e’tibor berilmoqda va shu sababli ayrim tasdiqlarning isbotlari talabalarga havola etilgan. Bundan tashqari bir qator mavzular kengaytirilgan va nisbatan chuqurroq yoritilgan bo‘lib, o‘qituvchi ulardan talabalarning mustaqil ishini tashkil etish uchun foydalanishi mumkin. Deyarli har bir mavzu oxirida talabalar mustaqil ishi uchun n parametrga bog‘liq topshiriqlar ham keltirilgan.

Har bir mavzu oxirida uning qisqacha mazmunini ifodalovchi xulosalar, unga doir tayanch iboralar va olingan bilimlarni tekshirish uchun savollar ro‘yxati keltirilgan. Bundan tashqari, o‘zbek tilidagi adabiyotlarda «Oliy matematika» kursi bo‘yicha testlar deyarli yoritilmaganligini hisobga olib, har bir mavzu bo‘yicha testlardan namunalar keltirishni joiz deb hisobladik.

Ushbu kitob nihoyasida o‘quvchilarga qulaylik yaratish maqsadida iqtisodchilar uchun “Oliy matematika” fani bo‘yicha bizga ma’lum bo‘lgan adabiyotlar ro‘yxati va asosiy tayanch iboralarning izohli lug‘ati o‘z o‘rnini topgan.

Ushbu kitob qo‘lyozmasini diqqat bilan o‘qib chiqib, uni takomillashtirish bo‘yicha bir qator foydali fikrlarini bildirgan O‘zbekiston Milliy universitetining “Matematik analiz” kafedrasi dotsenti M.Zaxirov va Buxoro Davlat universiteti dotsenti X. Axmedovga o‘zimizning chuqur minnatdorchiligimizni izhor etamiz. Shunigdek bu kitobni yaratishda yordam bergan BuxYuTMTI «Oliy matematika» kafedrasi professor-o‘qituvchilarining ham xizmatlarini ta’kidlab o‘tamiz.

Mualliflar ushbu o‘quv adabiyoti kamchiliklardan xoli degan fikrdan uzoqda bo‘lganligi tufayli uni takomillashtirish bo‘yicha kitobxonlarning taklif va mulohazalarini minnatdorchilik bilan qabul etadilar.

Mualliflar

Matematika faqat matematiklar uchungina emas,
balki hamma fanlar, juda ko‘pchilik mutaxassislar
uchun ham zarur fandir.

O. Fayzullayev

Biz maktabdan boshlab tanishgan, endi esa uni o‘rganishni davom ettirayotgan matematika eng qadimgi fanlardan biri bo‘lib hisoblanadi. “Matematika” atamasi uynon tilidagi “matema” so‘zidan olingan bo‘lib, “bilim, fan” degan ma’noni bildiradi. “ Matematika fani nimani o‘rganadi ? ” degan savolga umumiy javob berish uchun juda ko‘p matematik va faylasuflar harakat qilganlar. XX asrning buyuk matematigi, rus olimi akademik ***A.N.Kolmogorov*** (1903-1987) tomonidan 1954 yilda yozilgan va “Matematika “ deb atalgan maqolada matematika quyidagicha ifodalanadi:

TA’RIF: Matematika haqiqiy olamning miqdoriy munosabatlari va fazoviy formalari haqidagi fandir.

Yuqorida ko‘rsatilgan maqolada A.N.Kolmogorov matematika taraqqiyotini to‘rt davrga ajratadi.

❖ ***Matematikaning shakllanish davri*** eramizdan oldingi VI–V asrgacha davom etdi. Bu davrda insoniyat turli predmetlarni sanashni o‘rgandi va natijada natural son va ular uchun “katta”, “kichik”, “teng” tushunchalari paydo bo‘ldi. Turli ko‘rinishdagi ish qurollarini yasash, dehqonchilikda ekin maydonlari chegarasini o‘tkazish, kulolchilikda har xil idishlar tayyorlash natijasida geometrik shakllar va jismlar tushunchalari shakllana boshlandi.

❖ ***Elementar matematika davri*** eramizdan oldingi V asrdan boshlab, XVII asr boshlarigacha davom etdi. Oldingi davrdagi matematik bilimlar tarqoq, xususiy ko‘rinishdagi natijalardan, qonun–qoidalardan iborat edi. Ularni birlashtirish, umumiy ko‘rinishga keltirish qadimgi Yunon davlatida boshlandi va eramizdan oldingi III asrlarda yunon olimi ***Evklid*** tomonidan uning “***Negizlar***” asarida matematika fanini ilmiy poydevoriga asos solindi.

Ko‘rilayotgan davrning IX–XV asrlarida matematikaning rivojlanishiga O‘rta Osiyo olimlarining hissasi katta bo‘ldi. IX asrda yashab ijod etgan xorazmlik olim ***Muhammad ibn Muso al Xorazmiy*** birinchi bo‘lib o‘zining “Aljabr” asarida algebra faniga asos soldi. Yevropalik olimlar bu kitob orqali kvadrat tenglamalarni yechish usuli bilan tanishdilar. XV asrda buyuk astronom va matematik ***Mirzo Ulug‘bek*** (1394-1449) o‘zining ”Ziji Kuragoniy” nomli asarida 1018 ta yulduzning koordinatalarini nihoyatda katta aniqlik bilan hisoblab berdi.

❖ ***Oliy matematika davri*** XVII asrdan boshlanib, XIX asrgacha davom etdi. Elementar matematikada kattaliklar va geometrik ob’ektlar qo‘zg‘almas, o‘zgarmas miqdorlar kabi qaralar edi. Matematikada endi harakatlanuvchi va o‘zgaruvchi miqdorlarni ko‘rishga to‘g‘ri kela boshladi. Turli masalalarni yechishda ikki o‘zgaruvchi miqdor orasidagi o‘zaro bog‘lanishni o‘rganishga to‘g‘ri keldi va bunday bog‘lanishlar funktsiya tushunchasiga olib keldi. Olmon matematigi ***Leybnits*** 1682–1686 yillarda va ingliz matematigi, mexanigi ***Nyuton*** 1665–1666 yillarda amaliy masalalarni yechishning kuchli matematik quroli boʻlgan differentsial va integral hisobni kashf etdilar.

❖ ***Hozirgi zamon matematikasi davri*** XIX asr boshidan hisoblanadi. Oldingi davrlarda matematika asosan amaliy masalalarni yechish natijasida rivojlangan boʻlsa, endi matematika oʻzining ichki qonuniyatlari boʻyicha ham rivojlana boshladi. Bu rivojlanish oldin topilgan tushunchalarni, natijalarni umumlashtirish, ularni mantiqiy jihatdan tugallanganligiga erishish, oldingi natijalarni hozirgi zamon yutuqlari asosida qayta koʻrib chiqish, tahlil etish kabi yoʻnalishlarda amalga oshadi.

Oʻzbekistonda matematika fanining rivojlanishiga, oʻzbek matematika maktabiga asos solishda akademik ***V.I.Romanovskiy*** (1879–1954) juda katta hissa qoʻshdi. Oʻzbek matematika maktabining ilk qaldirgʻochi akademik ***T.N. Qori-Niyoziy*** (1897–1970) boʻlib hisoblanadi. Dunyoga tanilgan oʻzbek olimlari, akademiklar ***T.A.Sarimsoqov*** (1915–1995), ***S.X. Sirojiddinov*** (1920–1988), ***N.Yu.Sotimov*** (1939–2005), ***T.J.Joʻraev*** (), ***T.A.Azlarov*** () hozirgi zamon matematikasiga salmoqli hissalarini qoʻshdilar. Hozirgi davrda akademiklarimizdan M.S. Saloxitdinov, Sh.O. Alimov, Sh.A. Ayupov, Sh.Q. Farmonov, A.Sa'dullaev va boshqalar matematik fizika tenglamalari, funktsional tahlil, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, matematik tahlil kabi yoʻnalishlar boʻyicha juda katta kashfiyotlar qilib, Oʻzbekistonda matematika rivojlanishini davom ettirmoqdalar.

Hozirgi paytda matematik usullar qoʻllanilmaydigan fan yoki sohani koʻrsatish juda qiyin. Bunga matematikaning quyidagi xususiyatlarini sabab qilib koʻrsatish mumkin.

➢ Matematika biror xulosani keltirib chiqarishda ma'lum bir qoidalardan hech qanday chetlashmaydi, ya'ni u izchillikka egadir.

➢ Matematikada xulosalar aksiomatik asosda keltirib chiqariladi. Bunda poydevor sifatida aksiomalarning ma'lum bir tizimi olinib, matematik tushuncha va natijalar unga asoslangan holda yaratiladi.

➢ Matematika obyektlarning real ma'nosi qanday boʻlishidan qat'iy nazar ularni abstraktlashtirgan, umumlashtirilgan holda qaraydi. Shu sababli olinadigan natijalar ham umumiy xususiyatga ega boʻladi.

Tarixan matematika dastlab astronomiya va mexanika, fizika, elektrotexnika kabi texnik fanlarga tatbiq qilingan boʻlsa, XIX asr boshlarida iqtisodiy masalalar ham matematik usullar yordamida oʻrganila boshlandi. Xalq xoʻjaligini matematika yordamida tadqiqot etish jahonda birinchi marta farang olimi F.Kane tomonidan amalga oshirildi. Uning asari tarixga "Iqtisodiy jadval" nomi bilan kirdi. Bu jadval asosida F.Kane ishlab chiqarishni, mahsulot almashtirish va taqsimlashning juda koʻp xususiyatlarini xalq xoʻjaligi nuqtai nazaridan umumlashtirishga muvaffaq boʻldi. Hisoblash texnikasining paydo boʻlishi bilan matematikaning tatbiqlar doirasi va imkoniyatlari keskin kengaydi. Jumladan, iqtisodiy masalalarni matematiklashtirish tez sur'atlar bilan rivojlanmoqda. Bunga sabab shuki, iqtisodiy jarayonlar juda murakkabdir va shuning uchun ularni aniq usullardan foydalanmasdan turib tahlil qilib boʻlmaydi. Bundan tashqari, iqtisodiy masalalarda koʻpincha sonli parametrlar bilan ish koʻriladi, bu esa matematik usullardan foydalanishga qulaylik yaratadi. Matematik usullar yordamida yuklarni tashishning eng yaxshi variantini topish, mahsulotni eng ratsional yo‘l bilan ishlab chiqarishni aniqlash, butun bir tarmoq rivojlanishining optimal rejasini tuzish kabi juda ko‘p iqtisodiy masalalarni yechish mumkin. Buning natijasida juda katta foydaga erishiladi, ko‘plab mablag' tejab qolinadi. Iqtisodiy masalalarning yechimini topish matematikada bir qator yangi usullarni yaratilishiga sabab bo‘ldi. Buni natijasida chiziqli dasturlash, o‘yinlar nazariyasi, ommaviy xizmat nazariyasi kabi matematikaning yangi yo‘nalishlari vujudga keldi. O‘z navbatida matematika asosida iqtisodiy nazariyaga iqtisodiy jarayonlarni tekshirishning balansli, tarmoqli va boshqa maxsus usullari kirib keldi. Ammo hozirgi kunda ham iqtisodiyotning ayrim masalalari o‘zining matematik yechimini kutmoqda, chunki hozircha iqtisodiyotning ehtiyojlari matematikaning imkoniyatlaridan ortiqroqdir.

Matematikaning amaliy tatbiqlarida model tushunchasi muhim ahamiyatga ega. Inson hamma vaqt biror jarayon, hodisa yoki obyektni o‘rganishda uning u yoki bu ko‘rinishdagi modelidan foydalaniladi. Masalan, Yer uning modeli bo‘lmish globus, turli mashina va qurilmalar ularning maketlari yordamida aks ettirilishi mumkin. Model tushunchasi juda keng va turli ma’nolarga ega. Jumladan unga quyidagicha ta’rif berish mumkin.

TA’RIF: O‘rganilayotgan obyektning ma’lum bir muhim xususiyatlarini ifodalovchi moddiy yoki ideal ko‘rinishdagi qurilma ***model*** deb ataladi.

Moddiy modellarga misol sifatida turli obyektlarning maketlarini, tasvirlarini va turli mexanik, elektron qurilmalarni ko‘rsatish mumkin. Ideal modellarga misol sifatida obyektlarni turli matematik belgi va ifodalar, tushunchalar orqali ifodalashni ko‘rsatish mumkin. Bular ***matematik modellar*** bo‘lib hisoblanadi. Matematik modellarda turli munosabatlar tenglamalar, tengsizliklar va hokazolar orqali ifodalanadi.

Modelda qaralayotgan obyektning faqat o‘rganilayotgan xususiyatlari aks ettiriladi, ya’ni model obyektning barcha jihatlarini ifodalashi shart emas. Modellar bevosita kuzatib bo‘lmaydigan obyekt va jarayonlarni o‘rganishda keng qo‘llaniladi.

O‘rganilayotgan jarayonning modeli tuzilgach, uning yordamida ma’lum bir natijalar olinadi. Agar bu natijalar real natijalar bilan solishtirilganda ular orasida qoniqarli darajada yaqinlik kuzatilmasa, tuzilgan modelni takomillashtirish yoki butunlay boshqa bir modelni tuzishga o‘tiladi.

Iqtisodiy jarayonlar, masalalarni o‘rganish uchun iqtisodiy-matematik modellardan foydalaniladi. Bu modellar iqtisodiy jarayonlarni soddalashtirilgan, formallashtirigan ko‘rinishda ifodalaydi. Masalan, biz kelgusida ishlab chiqarishning talab va taklif modellarini, Leont’evning tarmoqlararo balans modelini, bozor sharoitida muvozanat modelini va boshqalarni ko‘rib chiqamiz.

Berilgan masalani iqtisodiy-matematik modellar yordamida yechishni shartli ravishda quyidagi besh bosqichga ajratish mumkin.

- ✓ Masalani qo‘yilishi, ya’ni tadqiqotning mazmuni va maqsadi aniqlanadi;
- ✓ Masalaning iqtisodiy-matematik modelini yaratish, ya’ni qaralayotgan obyekt yoki jarayonning o‘rganilayotgan belgilarini ajratib olib, ular orasidagi munosabatlarni matematik ifodalanadi;

- ✓ Tuzilgan modelga asoslangan holda izlangan yechimni topish va uni haqiqatga yaqinligini, sifatini tekshirish;
- ✓ Model va undan hosil qilingan yechim haqiqatga yetarli darajada yaqin bo‘lmasa, modelni takomillashtirish yoki yangilash;
- ✓ Olingan yechimni amalga oshirish, hayotga tatbiq etish.

Iqtisodiy-matematik modellar yordamida obyektning muhim tarkibiy qismlarini aniqlash, ayrim ko‘rsatkichlarning optimal qiymatlarini topish, kelgusidagi holatni bashorat etish kabi masalalarni yechish mumkin.

Iqtisodiy-matematik modellarning o‘ziga xos xususiyati shundan iboratki, unda iqtisodiy tajribalar o‘tkazish, turli g‘oyalarni tekshirish real hayotda emas, balkim modellarda amalga oshiriladi. Hozirgi davrda bu modellar elektron hisoblash mashinalari yordamida tahlil etilib, minglab variantlar orasidan eng yaxshisi tanlanadi.

Iqtisodiy-matematik modellar ularning xususiyatlariga qarab bir necha turlarga ajratiladi.

- **Makroiqtisodiy modellar.** Bu modellarda iqtisod bir butunlikda qaralib, yirik moddiy va moliyaviy ko‘rsatkichlar orasidagi bog‘lanishlar ifodalanadi. Masalan, yalpi milliy daromad, ish bilan ta’minlanganlik, muomaladagi pul miqdori kabi omillar makroiqtisodiyot modellari orqali o‘rganiladi.
- **Mikroiqtisodiy modellar.** Bu modellar iqtisodiyotning tarkibiy yoki harakatdagi qismlari uchun, uning shunday bir ma’lum bo‘lagini bozor iqtisodi sharoitidagi o‘rni va holatini o‘rganish uchun qo‘llaniladi.
- **Nazariy modellar.** Iqtisodiyotning umumiy xususiyatlari va tarkibiy qismlari orasidagi bog‘lanishlar to‘g‘risida, oldindan qabul qilingan yoki beriladigan holatlar asosida, xulosalar chiqarish uchun nazariy modellardan foydalaniladi.
- **Amaliyot modellari.** Bu modellar muayyan iqtisodiy obyekt faoliyatida ishtirok etadigan parametrlar orasidagi bog‘lanishlar ko‘rinishini berib, shu bog‘lanishlar yordamida ma’lum bir amaliy yechimlarni qabul qilishni tavsiya etish uchun qo‘llaniladi. Amaliyot modellarining muhim bit ko‘rinishi ekonometrik modellar bo‘lib hisoblanadi. Ekonometrik modellar iqtisodiy o‘zgaruvchilarning miqdoriy qiymatlaridan statistik xulosalar chiqarish uchun foydalaniladi.
- **Muvozanat modellari.** Iqtisodning unga ta’sir etuvchi barcha kuchlarning teng ta’sir etuvchisi noldan iborat bo‘lgan holatida muvozanat modellari ko‘riladi.
- **Statik modellar.** Bunday modellar iqtisodiy obyektning ma’lum bir vaqtdagi yoki davrdagi holatini o‘rganish uchun qo‘llaniladi.
- **Dinamik modellar.** Bu modellardan obyektning iqtisodiy holatini vaqt o‘tishi bilan qanday o‘zgarishini o‘rganishda foydalaniladi.
- **Notasodifiy modellar.** Bunday modellarda iqtisodiy ko‘rsatkichlarni ifodalovchi o‘zgaruvchilar orasida ma’lum bir qat’iy bog‘lanishlar mavjud deb olinadi.
- **Tasodifiy modellar.** Bu modellarda iqtisodiy obyekt faoliyatidagi tasodifiy holatlar hisobga olinadi va ular real hayotga ancha yaqin bo‘ladi. Bunday modellarni qurishda va tekshirishda ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanidan keng foydalaniladi.

Kelgusida turli matematik tushunchalar kiritilayotganda, ular asosida bir nechta iqtisodiy-matematik modellar qaraladi.

Tayanch iboralar

Matematika*Taraqqiyot davrlari*Model *Matematik model * Iqtisodiy-matematik model * Makroiqtisodiy model * Mikroiqtisodiy model *Nazariy model *Amaliyot modeli *Muvozanat modeli*Statik model *Dinamik model *Notasodifiy model * Tasodifiy model .

Takrorlash uchun savollar

1. "Matematika" atamasining ma'nosi nimadan iborat?
2. Matematika fanining predmetini A.N. Kolmogorov qanday ta'riflangan?
3. Matematikaning rivojlanishi nechta va qanday davrlardan iborat ?
4. O'rta Osiyolik qaysi mutafakkirlar matematika rivojlanishiga munosib hissa qo'shganlar ?
5. O'zbek matematiklaridan kimlarni bilasiz?
6. Matematikaning qanday xususiyatlari uning amaliy tatbiqlarini asoslaydi ?

1. Model deganda nima tushuniladi?
2. Modellar qanday ko'rinishlarda bo'ladi?
3. Model tuzish qanday bosqichlardan iborat?
4. Iqtisodiy-matematik modellarning qanday turlarini bilasiz?

Testlardan namunalar

1. Matematika fanining rivojlanishi necha davrdan iborat?
   A) 2; B) 3; C) 4; D) 5; E) 6.

2. Matematikaning rivojlanish davrlari qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?
   A) shakllanish davri; B) elementar matematika davri;
   C) oliy matematika davri; D) hozirgi zamon matematikasi davri;
   E) barcha javoblarda davrlar to'g'ri ko'rsatilgan.

3. Birinchi bo'lib geometriyaning aksiomatik asosini kim yaratdi ?
   A) Arximed ; B) Pifagor ; C) Geron ; D) Sokrat ; E) Evklid .

4. Geometriya fanining aksiomatik poydevori yoritilgan Evklidning asari qanday nomlanadi ?
   A) Asoslar ; B) Postulatlar ; C) Boshlang'ichlar ;
   D) Negizlar ; E) Aksiomalar .

5. Quyidagilardan qaysi biri model bo'lmaydi ?
   A) maket ; B) qurilma ; C) formula ; D) tasvir ;
   E) ko'rsatilganlarni bari model bo'ladi .

I BOB. TO'PLAMLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI

Hozirgi zamon matematikasi tarkibiga
cheksiz to‘plam tushunchasini kirishi
uni tubdan revolyutsionlashtirdi.

Aleksandrov P.S.

§1. TO‘PLAMLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

- ***To‘plamlar va ularga doir tushunchalar.***
- ***To‘plamlar ustida amallar va ularning xossalari.***

1.1. To‘plamlar va ularga doir tushunchalar. To‘plamlar nazariyasi deyarli barcha matematik fanlarnining asosida yotadi. Bu nazariya asoslari 1879–1884 yillarda olmon matematigi ***Georg Kantor*** tomonidan chop etilgan bir qator maqolalarda yoritib berildi. ***To‘plam*** matematikaning poydevorida yotgan boshlang‘ich tushunchalardan biri bo‘lgani uchun u ta’rifsiz qabul etiladi. To‘plam deyilganda biror bir xususiyati bo‘yicha umumiylikga ega bo‘lgan obyektlar majmuasi tushuniladi. Masalan, I kurs talabalari to‘plami, [0,1] kesmadagi nuqtalar to‘plami, natural sonlar to‘plami, firma xodimlari to‘plami, korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar to‘plami va hokazo. Matematikada to‘plamlar A,B,C,D,… kabi bosh harflar bilan belgilanadi. A,B,C,D,… to‘plamlarga kiruvchi obyektlar ularning ***elementlari*** deyiladi va odatda mos ravishda kichik $a,b,c,d,\ldots$ kabi harflar bilan belgilanadi. Bunda «a element A to‘plamga tegishli (tegishli emas)» degan tasdiq $a\in A$ ($a\notin A$) kabi yoziladi.

1-*TA’RIF:* Birorta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam ***bo‘sh to‘plam*** deyiladi va $\varnothing$ kabi belgilanadi.

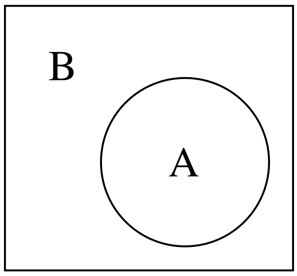
Masalan, { sin$x$ = 2 tenglamaning yechimlari}=$\varnothing$, { perimetri 0 bo‘lgan kvadratlar }=$\varnothing$, { kvadrati manfiy bo‘lgan haqiqiy sonlar }=$\varnothing$.

Algebrada 0 soni qanday vazifani bajarsa, to‘plamlar nazariyasida $\varnothing$ to‘plam shunga o‘xshash vazifani bajaradi.

2-*TA’RIF:* Agar A to‘plamga tegishli har bir a element boshqa bir B to‘plamga ham tegishli bo‘lsa ($a\in A \Rightarrow a\in B$), u holda A to‘plam B ***to‘plamining qismi*** deyiladi va $A\subset B$ (yoki $B\supset A$) kabi belgilanadi.

Quyidagi 1-rasmda B kvadratdagi, A esa uning ichida joylashgan doiradagi nuqtalar to‘plamimni ifodalasa, unda $A\subset B$ bo‘ladi.

1-rasm



Masalan, korxonada ishlab chiqarilayotgan oliy navli mahsulotlar to‘plamini A, barcha mahsulotlar to‘plamini esa B deb olsak , unda $A\subset B$ bo‘ladi.

Ta'rifdan ixtiyoriy A to'plam uchun $A \subset A$ va $\varnothing \subset A$ tasdiqlar o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Shu sababli to'plamlar uchun $\subset$ belgisi sonlar uchun $\leq$ belgiga o'xshash ma'noga egadir.

3-*TA'RIF:* Agarda A va B to'plamlar uchun $A \subset B$ va $B \subset A$ shartlar bir paytda bajarilsa, bu to'plamlar ***teng*** deyiladi va A=B kabi yoziladi.

Masalan, $A=\{-1;1\}$ va $B=\{x^2-1=0$ tenglama ildizlari$\}$,
C= {badiiy asarni yozish uchun ishlatilgan harflar} va D={alfavitdagi harflar} to'plamlari uchun A=B, C=D bo'ladi.

1.2. To'plamlar ustida amallar va ularning xossalari. Algebrada a va b sonlar ustida qo'shish va ko'paytirish amallari kiritilgan bo'lib, ular

$a+b=b+a$ va $ab=ba$ (kommutativlik , ya'ni o'rin almashtirish),

$a+(b+c)=(a+b)+c$ va $a(bc)=(ab)c$ (assotsiativlik, ya'ni guruhlash),

$a(b+c)=ab+ac$ (distributivlik, ya'ni taqsimot)

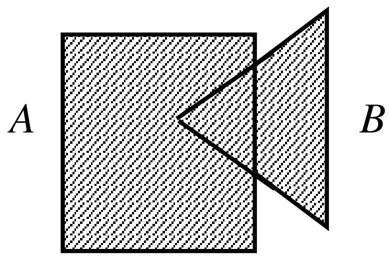
qonunlariga bo'ysunadilar. Bulardan tashqari har qanday a soni uchun $a+0=a$ va $a\cdot 0=0$ tengliklar ham o'rinli bo'ladi.

Endi to'plamlar ustida algebraik amallar kiritamiz.

4-*TA'RIF:* A va B to'plamlarning ***birlashmasi (yig'indisi)*** deb shunday C to'plamga aytiladiki, u A va B to'plamlardan kamida bittasiga tegishli bo'lgan elementlardan tashkil topgan bo'ladi va $A \cup B$ kabi belgilanadi.

Agar A kvadratdagi, B esa uchburchakdagi nuqtalar to'plamidan iborat bo'lsa, unda ularning birlashmasi $A \cup B$ quyidagi 2-rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo'ladi:

2-rasm



Shunday qilib $A \cup B$ to'plam yoki A to'plamga , yoki B to'plamga, yoki A va B to'plamlarning ikkalasiga ham tegishli elementlardan iboratdir.

Masalan, A={1,2,3,4,5} va B={2,4,6,8} bo‘lsa $A\cup B$={1,2,3,4,5,6,8},

C={I navli mahsulotlar} va D={II navli mahsulotlar } bo‘lsa, unda

$C\cup D$={I yoki II navli mahsulotlar} to‘plamni ifodalaydi.

To‘plamlarni birlashtirish amali , sonlarni qo‘shish amali singari,

$$A\cup B = B\cup A \quad \text{(kommutativlik)},$$

$$(A\cup B)\cup C = A\cup (B\cup C) \quad \text{(assosiativlik)}$$

qonunlarga bo‘ysunadi. Bulardan tashqari $A\cup\varnothing=A$ va, sonlardan farqli ravishda, $A\cup A=A$, $B\subset A$ bo‘lsa $A\cup B=A$ tengliklar ham o‘rinli bo‘ladi. Bu tasdiqlarning barchasi to‘plamlar tengligi ta’rifidan foydalanib isbotlanadi. Misol sifatida, oxirgi tenglikni isbotlaymiz:

$$x\in A\cup B \Rightarrow x\in A \text{ yoki } x\in B \Rightarrow x\in A \Rightarrow (A\cup B)\subset A;$$
$$x\in A \Rightarrow x\in A\cup B \Rightarrow A\subset (A\cup B)$$

Demak, $(A\cup B)\subset A$, $A\subset (A\cup B)$ va , ta’rifga asosan, $A\cup B = A$.

Bir nechta $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ to‘plamlarning yig‘indisi

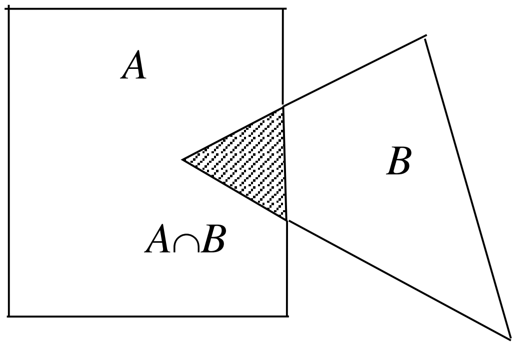
$$A_1\cup A_2\cup A_3\cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

kabi belgilanadi va ulardan kamida bittasiga tegishli bo‘lgan elementlar to‘plami sifatida aniqlanadi.

<u>5 -*TA'RIF:*</u> A va B to'plamlarning ***kesishmasi (ko'paytmasi)*** deb shunday C to'plamga aytiladiki, u A va B to'plamlarning ikkalasiga ham tegishli bo'lgan elementlardan tashkil topgan bo'ladi va A∩B kabi belgilanadi.

Agar A kvadratdagi, B esa uchburchakdagi nuqtalar to'plamini belgilasa, unda ularning A∩B kesishmasi 3-rasmdagi shtrixlangan soha kabi ifodalanadi:

3-rasm



Shunday qilib A∩B to'plam A va B to'plamlarning umumiy elementlaridan tashkil topgan bo'ladi. Shu sababli agar ular umumiy elementlarga ega bo'lmasa, ya'ni kesishmasa, unda A∩B=∅ bo'ladi.

Masalan, A={1,2,3,4,5} va B={2,4,6,8} bo'lsa A∩B={2,4},

C={Tekshirilgan mahsulotlar} va D={Sifatli mahsulotlar} bo'lsa, unda

C∩D={Tekshirishda sifatli deb topilgan mahsulotlar} to'plamni ifodalaydi.

To'plamlarni kesihmasi amali quyidagi qonunlarga bo'ysunadi:

$$A\cap B = B\cap A \quad \text{(kommutativlik)},$$

$$(A\cap B)\cap C = A\cap (B\cap C) \quad \text{(assotsiativlik)},$$

$$A\cap (B\cup C) = (A\cap B)\cup (A\cap C),$$

$$A\cup (B\cap C)=(A\cup B)\cap (A\cup C) \quad \text{(distributivlik)}$$

Shu bilan birga $A\cap A=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$ va $B\subset A$ bo‘lsa $A\cap B=B$ tengliklar ham o‘rinli bo‘ladi. Bu tasdiqlarning o‘rinli ekanligiga yuqorida ko‘rsatilgan usulda ishonch hosil etish mumkin.

Bir nechta $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ to‘plamlarning kesishmasi

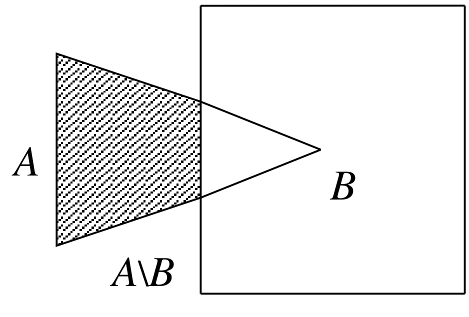
$$A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n=\bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

kabi belgilanadi va barcha A_k ($k=1,2,\cdots,n$) to‘plamlarga tegishli bo‘lgan umumiy elementlardan tuzilgan to‘plam kabi aniqlanadi.

<u>6-TA’RIF:</u> A va B to‘plamlarning ***ayirmasi*** deb A to‘plamga tegishli, ammo B to‘plamga tegishli bo‘lmagan elementlardan tashkil topgan to‘plamga aytiladi va A\B kabi belgilanadi.

Agar A uchburchakdagi, B esa kvadratdagi nuqtalar to‘plamini belgilasa, unda ularning A\B ayirmasi 4-rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo‘ladi :

4-rasm



Masalan, A={1,2,3,4,5} va B={1,3,7,9} bo‘lsa, unda A\B={2,4,5}, B\A={7,9}; C={Korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar}va D={Sifatli mahsulotlar} bo‘lsa, C\D={ Korxonada ishlab chiqarilgan sifatsiz mahsulotlar }.

Demak, A\B to‘plam A to‘plamning B to‘plamga tegishli bo‘lmagan elementlaridan hosil bo‘ladi. To‘plamlar ayirmasi uchun

$$A\backslash A=\varnothing, \quad A\backslash\varnothing=A\,, \quad \varnothing\backslash A=\varnothing$$

va $A\subset B$ bo‘lsa $A\backslash B=\varnothing$ munosabatlar o‘rinlidir.

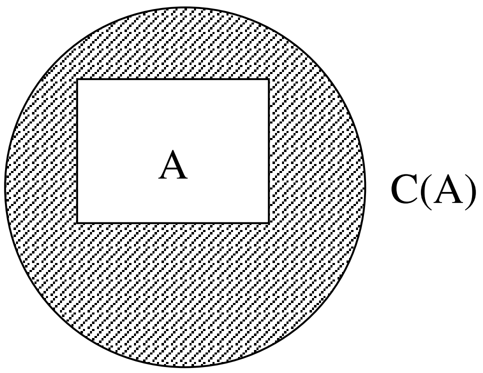
<u>7-TA’RIF:</u> Agar ko‘rilayotgan barcha to‘plamalarni biror Ω to‘plamning qism to‘plamlari kabi qarash mumkin bo‘lsa, unda Ω ***universal to‘plam*** deb ataladi.

Masalan, sonlar bilan bog‘liq barcha to‘plamlar uchun $\Omega=(-\infty, \infty)$, insonlardan iborat to‘plamlar uchun Ω={Barcha odamlar} universal to‘plam bo‘ladi.

<u>8 -TA’RIF:</u> Agar A to‘plam Ω universal to‘plamning qismi bo‘lsa, unda Ω\A to‘plam ***A to‘plamning to‘ldiruvchisi*** deb ataladi va C(A) kabi belgilanadi.

Agar quyidagi chizmada Ω universal to‘plam doiradagi, A to‘plam esa uning ichida joylashgan to‘ri to‘rtburchakdagi nuqtalardan iborat bo‘lsa, uning to‘ldiruvchisi C(A) 5-rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo‘ladi:

5-rasm



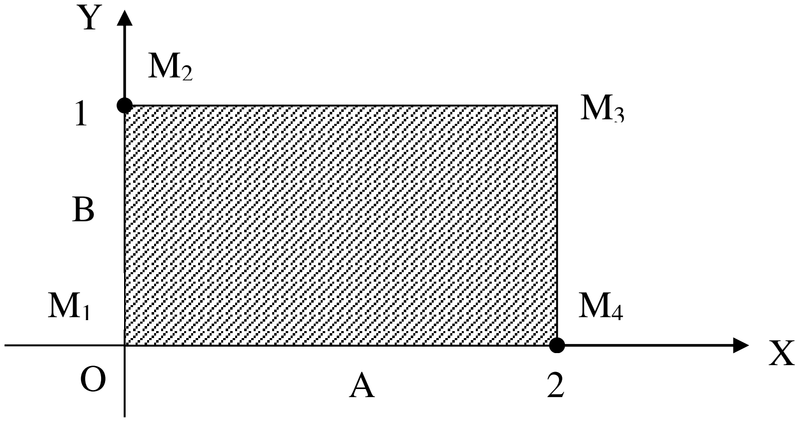
Demak, C(A) to‘plam A to‘plamga kirmaydigan elementlardan tashkil topgan bo‘ladi, ya’ni $x \in A \Rightarrow x \notin C(A), \quad x \notin A \Rightarrow x \in C(A)$.

Masalan, Ω={Barcha korxonalar}, A={Rejani bajargan korxonalar} bo‘lsa, unda C(A)={ Rejani bajarmagan korxonalar} to‘plami bo‘ladi;

Ω={1,2,3, · · ·, n, · · ·}–natural sonlar to‘plami, A={2,4,6, · · · , 2n, · · ·}–juft sonlar to‘plami, B={5,6,7, · · ·, n, · · ·}– 4dan katta natural sonlar to‘plami bo‘lsa, unda C(A)={1,3,5, · · ·, 2n–1, · · ·}– toq sonlar, C(B)={1,2,3,4}–5dan kichik natural sonlar to‘plamlarini ifodalaydi.

<u>9-TA’RIF:</u> A va B to‘plamlarning ***Dekart ko‘paytmasi*** deb A×B kabi belgilanadigan va (x, y) (x∈A, y∈B) ko‘rinishdagi juftliklardan tuzilgan yangi to‘plamga aytiladi.

Masalan, A=[0,2] va B=[0,1] bo‘lsa, A×B to‘plam tekislikdagi (x, y) (x∈A=[0,2], y∈B=[0,1]) nuqtalardan, ya’ni uchlari $M_1(0,0)$, $M_2(0,1)$, $M_3(2,1)$ va $M_4(2,0)$ nuqtalarda joylashgan to‘g‘ri to‘rtburchakdan iborat bo‘ladi (6-rasmga qarang):



6-rasm

Agar C={Tajribali ishchilar} va D={Yosh ishcilar} bo‘lsa, unda C×D tajribali va yosh ishchidan iborat bo‘lgan turli “ustoz-shogird” juftliklaridan iborat to‘plamni ifodalaydi.

Umuman olganda to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi uchun $A\times B\neq B\times A$, ya’ni kommutativlik qonuni bajarilmaydi. Masalan, $A=[0,2]$ va $B=[0,1]$ to‘plamlar uchun $A\times B$ asosining uzunligi 2, balandligi 1 bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakni , $B\times A$ esa asosining uzunligi 1, balandligi 2 bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakni ifodalaydi va bunda $A\times B\neq B\times A$ bo‘ladi.

XULOSA

To‘plam tushunchasi matematikaning boshlang‘ich tushunchalaridan biri bo‘lib hisoblanadi. Hozirgi zamon matematikasining poydevorini to‘plamlar nazariyasi tashkil etadi. To‘plamlar nazariyasining asoschisi Kantor bo‘lib hisoblanadi. To‘plamlar ustida ularning birlashmasi (yig‘indisi), kesihmasi (ko‘paytmasi) va ayirmasi kabi algebraik amallar aniqlanadi. Bu amallar kommutativlik, assotsiativlik va distributivlik kabi asosiy algebraik qonunlarga bo‘ysunadi. Bulardan tashqari to‘plamlar uchun Dekart ko‘paytmasi amali ham kiritilgan

Tayanch iboralar

To‘plam * To‘plam elementi * Bo‘sh to‘plam * To‘plam qismi * To‘plamlar tengligi * To‘plamlar birlashmasi * To‘plamlar kesishmasi * To‘plamlar ayirmasi * Universal to‘plam * To‘plam to‘ldiruvchisi * Dekart ko‘paytma .

Takrorlash uchun savollar

5. To‘plamlar nazariyasining ahamiyati nimadan iborat?
6. To‘plamlar nazariyasiga kim asos solgan?
7. To‘plam deganda nima tushuniladi?
8. To‘plam elementi qanday aniqlanadi?
9. To‘plamlarga misollar keltiring.
10. Qanday to‘plam bo‘sh to‘plam deyiladi?
11. To‘plam qismi qanday ta’riflanadi?
12. Qachon ikkita to‘plam teng deyiladi?
13. To‘plamlar birlashmasi qanday kiritiladi?
14. To‘plamlar birlashmasi amali qanday xossalarga ega?
15. To‘plamlar kesishmasi qanday ta’riflanadi?

16. To‘plamlar kesishmasi amali qanday xossalarga ega?
17. To‘plamlar ayirmasi qanday aniqlanadi?
18. Universal to‘plam nima?
19. To‘plam to‘ldiruvchisi deb nimaga aytiladi?
20. To‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi qanday aniqlanadi?
21. To‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi uchun kommutativlik qonuni o‘rinlimi ?

Testlardan namunalar

1. To‘plamlar nazariyasining asoschisi kim ?
   A) Pifagor ; B) Dekart ; C) Kantor ; D) Ferma ; E) Gauss .

2. Quyidagi to‘plamlardan qaysi biri bo‘sh to‘plam emas?
   A) Kvadrati manfiy bo‘lgan haqiqiy sonlar;
   B) sinx = 2 tenglama yechimlari to‘plami;
   C) Ikkita burchagi o‘tmas bo‘lgan uchburchaklar to‘plami;
   D) Kubi manfiy bo‘lgan sonlar to‘plami;
   E) Ikkiga bo‘linmaydigan juft sonlar to‘plami.

3. Qachon A to‘plam B to‘plamning qismi deyiladi?
   A) Agar A va B bir xil elementlardan tashkil topgan bo‘lsa.
   B) Agar A va B har xil elementlardan tashkil topgan bo‘lsa.
   C) Agar B to‘plamning har bir elementi A to‘plamga tegishli bo‘lsa.
   D) Agar A to‘plamning har bir elementi B to‘plamga tegishli bo‘lsa.
   E) To‘g‘ri javob keltirilmagan.

4. Quyidagi tasdiqlardan qaysi biri noto‘g‘ri?
   A) bo‘sh to‘plam barcha to‘plamlarning to‘plam ostisi bo‘ladi;
   B) har bir to‘plam o‘zining to‘plam ostisi bo‘ladi;
   C) Agar $A\subset B$ va $C\subset A$ bo‘lsa, unda $C\subset B$ bo‘ladi;
   D) Agar $B\subset A$ bo‘lsa, unda $A\cap B=B$ bo‘ladi;
   E) Agar $B\subset A$ bo‘lsa, unda $A\cup B=B$ bo‘ladi;

5. A va B to‘plamlar birlashmasi amali qayerda ifodalangan ?
   A) $A \cup B$; B) $A \cap B$; C) $A \subset B$; D) $A \supset B$; E) $A \setminus B$.

6. Agar $x\in A \cup B$ bo‘lsa, quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o‘rinli emas ?
   A) $x\in A$, $x\notin B$; B) $x\notin A$, $x\in B$; C) $x\notin A$, $x\notin B$;
   D) $x\in A$, $x\in B$; E) barcha tasdiqlar o‘rinli bo‘ladi .

7. To‘plamlar birlashmasi amalining xossasi qayerda noto‘g‘ri ko‘rsatilgan ? (Ω – universal to‘plam, $\varnothing$ – bo‘sh to‘plam)
   A) $A \cup B = B \cup A$; B) $A\cup\varnothing=A$; C) $A \cup A = A$;
   D) $A \cup \Omega = \Omega$. E) Barcha xossalar to‘g‘ri ko‘rsatilgan.

8. A = $[-3;\ 0\ ]$ va B = $(-1;\ 5\ ]$ to‘plamlar birlashmasi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?
   A) $[-3; 5]$; B) $[-3; -1]$; C) $(-1; 0)$; D) $(0; 5]$; E) $[-1; 5]$.

9. A va B to‘plamlar kesishmasi amali qayerda ifodalangan?
   A) $A \cup B$; B) $A \cap B$; C) $A \subset B$; D) $A \supset B$; E) $A \setminus B$.

10. Agar $x \in A \cap B$ bo‘lsa, quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o‘rinli bo‘ladi ?
   A) $x \in A$, $x \notin B$; B) $x \notin A$, $x \in B$; C) $x \notin A$, $x \notin B$;
   D) $x \in A$, $x \in B$; E) barcha tasdiqlar o‘rinli emas .

11. Agar universal to‘plam $\Omega=(-\infty, \infty)$ va $A=(2,5]$ bo‘lsa, C(A) to‘plam qayerda to‘g‘ri ifodalangan ?
   A) $C(A)=[-\infty,2]$; B) $C(A)=(5, \infty]$; C) $C(A)=[0,2] \cup (5, \infty)$;
   D) $C(A)= (-\infty, 2] \cup (5, \infty)$; E) to‘g‘ri javob keltirilmagan .

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Quyidagi A va B to‘plamlar bo‘yicha $A\cup B$, $A\cap B$, A/B va B/A to‘plamlarni toping:

$$A=\{n-3, n-2, n-1, n, n+1\},\ \ B=\{ n-1, n, n+1, n+2, n+3, n+4\}.$$

2. Quyidagi A va B to‘plamlar bo‘yicha $A\cup B$, $A\cap B$, A/B va B/A to‘plamlarni toping:

$$A=[\, n-3, n+1], \qquad B=(\, n-1, n+5)$$

3. Quyidagi A va B to‘plamlarning $A\times B$ va $B\times A$ Dekart ko‘paytmalarini aniqlang:

$$A=\{n-3, n-2, n-1\},\ \ B=\{n, n+1, n+2, n+3\}$$

§2. CHEKLI VA CHEKSIZ TO‘PLAMLAR

- ***Chekli to‘plamlar.***
- ***Cheksiz to‘plamlar.***
- ***Sanoqli to‘plamlar.***
- ***Sanoqsiz to‘plamlar.***

2.1. Chekli to‘plamlar. To‘plamlar nazariyasida barcha to‘plamlar chekli va cheksiz to‘plamlarga ajratiladi. Bu to‘plamlarni ta’riflash uchun quyidagi tushunchalarni kiritamiz.

1-TA’RIF: Agar A va B to‘plamlar berilgan bo‘lib, har bir $a\in A$ elementga biror f qonun-qoida asosida bitta va faqat bitta $b\in B$ element mos qo‘yilgan bo‘lsa ($a\to b$), A to‘plam B to‘plamga ***aks ettirilgan*** deyiladi va $f: A \to B$ kabi ifodalanadi.

Masalan, $f(x)=\sin x$ akslantirishda X=(–∞, ∞) haqiqiy sonlar to‘plami Y=[–1, 1] kesmaga (f : X → Y), $g(x)=x^3$ akslantirishda esa X=(–∞, ∞) to‘plamni o‘ziga (g : X → X) akslantiriladi.

2-TA’RIF: Agar f : X → Y akslantirish berilgan bo‘lsa, Y to‘plamning $y=f(x)$ elementi X to‘plamning x elementining ***tasviri*** **,** x esa y elementning ***asli*** deyiladi.

3-TA’RIF: Agar f : X → Y akslantirishda har bir $y\in$Y tasvirga uning faqat bitta $x\in$X asli mos kelsa (buni $x\Leftrightarrow y$ kabi ifodalaymiz), bu akslantirish X va Y to‘plamlar orasidagi ***o‘zaro bir qiymatli moslik*** deyiladi.

Masalan, $f(x)=\sin x$: X=(–∞, ∞) → Y=[–1, 1] akslantirish o‘zaro bir qiymatli moslik bo‘lmaydi, chunki $y=\sin x,\ y\in[-1,1]$, tenglama X=(–∞, ∞) haqiqiy sonlar to‘plamida cheksiz ko‘p yechimga egadir. $g(x)=x^3$: X → X akslantirish esa o‘zaro bir qiymatli moslikdir, chunki $y=x^3$ tenglama X=(–∞, ∞) haqiqiy sonlar to‘plamida faqat bitta yechimga egadir.

4-TA’RIF: Agar A to‘plamning elementlari bilan natural sonlar to‘plami N ning dastlabki biror m ta elementlari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatib bo‘lsa, unda A ***chekli to‘plam*** deyiladi .

Masalan, A={ Yer yuzidagi barcha odamlar}, B={Kitobdagi varaqlar}, C={Zavoddagi stanoklar}, D={Aksioner jamiyatdagi a’zolar} kabi to‘plamlar chekli bo‘ladi.

Ba’zi hollarda chekli to‘plamdagi elementlar sonini aniq ko‘rsatib bo‘ladi, ba’zi hollarda esa bu sonni aniq ko‘rsatib bo‘lmaydi. Masalan, A={O‘zbekistondagi viloyatlar} to‘plami chekli va uning elementlari soni m(A)=12 deb ko‘rsatish mumkin. Ammo B={Yer yuzidagi barcha daraxtlar} to‘plami ham chekli bo‘lsada, undagi elementlar soni m(B) ni aniq ko‘rsata olmaymiz.

Umumiy holda chekli A to‘plamning elementlar soni m(A)=m bo‘lsa, , bu to‘plamni A=$\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ ko‘rinishda yozish mumkin.

1-TEOREMA: Agarda chekli A va B to‘plamlarning elementlari soni mos ravishda m(A) va m(B) bo‘lsa, unda ularning birlashmasi A∪B va kesishmasi A∩B elementlarining soni o‘zaro

$$m(A\cup B)=m(A)+m(B)-m(A\cap B)$$

tenglik bilan bog‘langan.

Isbot: Faqat A yoki B to‘plamga tegishli elementlar sonini m_A yoki m_B deb belgilaymiz. Faqat A to‘plamga tegishli elementlar undagi barcha elementlar orasidan uning B to‘plamga kiradigan elementlarini chiqarib tashlashdan hosil bo‘ladi va shu sababli m_A=m(A)–m(A∩B) tenglikni yoza olamiz. Xuddi shunday m_B=m(B)–m(A∩B) bo‘ladi. A∪B to‘plamdagi elementlar faqat A to‘plamga, faqat B to‘plamga va ularning ikkalasiga ham, ya’ni A∩B to‘plamga tegishli elementlardan tashkil topadi. Demak

$$m(A\cup B)=m_A+m_B+m(A\cap B)=[m(A)-m(A\cap B)]+[m(B)-m(A\cap B)]+m(A\cap B)=$$
$$=m(A)+m(B)-m(A\cap B).$$

Masala: Korxonada ishlab chiqarilgan 300 dona mahsulot sifati tekshirildi. Bunda mahsulot oliy navli, I navli, II navli yoki sifatsiz bo‘lishi mumkin deb hisoblanadi. Tekshiruv natijalaridan 270 dona mahsulot sifatli va 150 dona mahsulot oliy navli emasligi ma’lum. I va II navli mahsulotlarning umumiy sonini toping.

Yechish: Tekshiruvda sifatli deb topilgan mahsulotlar to‘plamini A, oliy navli bo‘lmagan mahsulotlar to‘plamini B kabi belgilaymiz. Masala shartiga asosan m(A)=270 va m(B)=150 ekanligi ma’lum. To‘plamlar birlashmasi ta’rifiga asosan $A\cup B$ korxonada ishlab chiqarilgan barcha mahsulotlar to‘plamini ifodalaydi shu sababli $m(A\cup B)=300$ bo‘ladi. To‘plamlar kesishmasi ta’rifiga asosan $A\cap B$ tekshiruv natijasida sifatli va oliy navli bo‘lmagan, ya’ni I yoki II navli deb baholangan mahsulotlar to‘plamini ifodalaydi. Unda, yuqorida isbotlangan formuladan foydalanib, masala javobini quyidagicha topamiz:

$$m(A\cup B)=m(A)+m(B)-m(A\cap B) \Rightarrow m(A\cap B)=m(A)+m(B)-m(A\cup B)=$$
$$=270+150-300=120.$$

Demak, I va II navli mahsulotlarning umumiy soni 120 dona ekan.

2.2. Cheksiz to‘plamlar. Endi cheksiz to‘plam tushunchasini kiritamiz va u bilan bog‘liq tasdiqlar bilan tanishamiz.

5-*<u>TA’RIF:</u>* Chekli bo‘lmagan A to‘plam ***cheksiz to‘plam*** deyiladi.

Masalan, natural sonlar to‘plami $N=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$, Q={Ratsional sonlar} , A={ [0;1] kesmadagi nuqtalar}, B={sin$x$=a ($|a|\leq 1$) tenglama ildizlari} va D={Tekislikdagi barcha to‘g‘ri chiziqlar} kabi to‘plamlar cheksiz bo‘ladi.

A va B chekli to‘plamlarni ularning elementlari soni m(A) va m(B) bo‘yicha m(A)>m(B), m(A)=m(B), m(A)<m(B) munosabatlarning biri bilan o‘zaro taqqoslash mumkin. Bunda chekli to‘plamlarni ikki xil usulda taqqoslash mumkin.

<u>1 – u s u l :</u> A iq B to‘plamdagi elementlar soni m(A) va m(B) bevosita sanash orqali topiladi va so‘ngra ular o‘zaro taqqoslanadi.

<u>2 – u s u l :</u> Har bir $a\in$A elementga bitta va faqat bitta $b\in$B elementini mos qo‘yamiz. Agar bu mos qo‘yishda A to‘plamdagi elementlar ortib qolsa (ya’ni bir qancha $a\in$A elementlarga B to‘plamda ularga mos qo‘yiladigan elementlar yetmay qolsa), unda m(A)>m(B) va aksincha, B to‘plamning elementlari ortib qolsa, m(A)<m(B) bo‘ladi. Uchinchi holda A to‘plamda ham, B to‘plamda ham elementlar ortib qolmaydi va bunda m(A)=m(B) bo‘ladi.

Masalan, A={Viloyatdagi firmalar}, B={ Viloyatdagi auditorlar} to‘plamlarni ulardagi firmalar va auditorlar sonini sanamasdan, 2- usulda taqqoslaymiz. Buning uchun har bitta firmaga bittadan auditorni jo‘natamiz. Agar bir qism firmalarga jo‘natish uchun auditorlar yetmay qolsa, unda m(A)>m(B); hamma firmalarga auditorlar jo‘natilib, ularning bir qismi ortib qolgan bo‘lsa, unda m(A)<m(B); hamma firmalarga auditorlar jo‘natilib, boshqa auditor qolmagan bo‘lsa, unda m(A)=m(B) bo‘ladi.

Har qanday chekli A to‘plamning elementlar soni har qanday cheksiz B to‘plamdagi elementlar sonidan kichik ekanligi tushunarli. Endi A va B cheksiz to‘plamlar bo‘lsin. Bu holda ularni elemetlari soni bo‘yicha o‘zaro taqqoslash masalasi paydo bo‘ladi. Bunda A va B cheksiz to‘plamlar bo‘lgani uchun bu masalani 1–usul bilan hal qilib bo‘lmaydi. Ammo 2–usul bilan cheksiz to‘plamlarni o‘zaro taqqoslash mumkin. Buning uchun to‘plamlarning ekvivalentligi tushunchasidan foydalanamiz.

6-*<u>TA’RIF:</u>* Agar A va B to‘plamlar orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatib bo‘lsa, bu to‘plamlar ***ekvivalent*** deyiladi va A~B kabi belgilanadi.

Masalan, A={toq sonlar}, B={juft sonlar} bo‘lsin. Unda A$\ni 2n-1 \Leftrightarrow 2n \in$B, ya’ni $1\Leftrightarrow 2$, $3\Leftrightarrow 4$, $5\Leftrightarrow 6$, · · ·, $2n-1\Leftrightarrow 2n$, · · · ko‘rinishda A va B to‘plam elementlari o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin va shu sababli A~B bo‘ladi. Demak A va B to‘plamlar ekvivalent, ya’ni A~B bo‘lsa, ularni elementlar soni bo‘yicha bir xil deb qarash mumkin.

2-TEOREMA: Agarda A~B, B~C bo‘lsa, unda A~C bo‘ladi**.**

Isbot: A~B bo‘lgani uchun A$\ni a \Leftrightarrow b \in$B va B~C bo‘lgani uchun B$\ni b \Leftrightarrow c \in$C. Unda A$\ni a \Leftrightarrow c \in$C desak, A va C to‘plamlar o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatiladi, ya’ni A~C bo‘ladi.

7-*TA’RIF:* Agar A~B bo‘lsa, ular ***teng quvvatli*** to‘plamlar deb ataladi.

Chekli A va B to‘plamlarning quvvati ulardagi elementlar soni m(A) va m(B) kabi aniqlanadi. Shu sababli chekli A va B to‘plamlar ekvivalent, ya’ni teng quvvatli, bo‘lishi uchun ularning elemetlari soni m(A)=m(B) shartni qanoatlantirishi zarur va yetarlidir.

2.3. Sanoqli to‘plamlar. Cheksiz to‘plamlar ichida eng «kichigi» natural sonlar to‘plami

$$N=\{1,2,3,4,\cdots, n\ ,\cdots\}$$

bo‘lib hisoblanadi.

8-*TA’RIF:* Natural sonlar to‘plami N va unga ekvivalent barcha cheksiz to‘plamlar ***sanoqli to‘plam*** deyiladi.

Agarda A sanoqli to‘plam bo‘lsa, uning elementlarini natural sonlar yordamida belgilab (nomerlab) chiqish mumkin, ya’ni A=$\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$ deb yozish mumkin.

Endi sanoqli to‘plamlarga misollar keltiramiz.

1) Z={butun sonlar}={· · ·, –2,–1,0,1,2, · · ·} sanoqli to‘plam bo‘ladi. Bunga Z$\ni n\Leftrightarrow 2n+1 \in$N, agar $n\geq 0$ bo‘lsa va Z$\ni n\Leftrightarrow 2\,|n|\in$N, agar $n<0$ bo‘lsa, ya’ni nomanfiy butun sonlarga toq natural sonlarni, manfiy butun sonlarga esa juft natural sonlarni mos qo‘yish bilan ishonch hosil qilish mumkin. Bunda N$\subset$Z bo‘lsada N~Z ekanligini ta’kidlab o‘tamiz.

2) A={juft sonlar}={2,4,6,8, · · ·,$2n$, · · ·}~N. Bunga A$\ni 2n \Leftrightarrow n \in$N o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish orqali ishonch hosil etish mumkin.

Sanoqli to‘plamlar quyidagi xossalarga ega bo‘lishini ko‘rsatish mumkin:

I. Har qanday sanoqli to‘plamning qism to‘plami chekli yoki sanoqli bo‘ladi.

II. Sanoqli va chekli to‘plam birlashmasi sanoqli to‘plam bo‘ladi.

III. Chekli yoki sanoqli sondagi sanoqli to‘plamlar birlashmasi sanoqlidir.

IV. Barcha sanoqli to‘plamlar o‘zaro ekvivalent bo‘ladi.

Oxirgi tasdiqdan barcha sanoqli to‘plamlar bir xil quvvatga ega ekanligi kelib chiqadi.

3-TEOREMA: Ratsional sonlar to‘plami Q sanoqli.

Isbot: Q^+ va Q^- orqali mos ravishda musbat va manfiy ratsional sonlar to‘plamini belgilab, Q= $Q^- \cup \{0\} \cup Q^+$ deb yozish mumkin. Bunda $Q^+\ni r \Leftrightarrow -r \in Q^-$ deb, $Q^+ \sim Q^-$ ekanligini ko‘ramiz. Shu sababli, II va III xossalarga asosan, Q^+ to‘plamni sanoqli ekanligini ko‘rsatish kifoya. Har qanday $r \in Q^+$ ratsional sonni r=p/q ko‘rinishda yozish mumkin. Bu yerda p va q – natural sonlar bo‘lib, ularni o‘zaro tub deb hisoblash mumkin. $r=p/q$ sonning balandligi deb $h=|p|+q$ songa aytiladi. Balandligi $h=m\geq 2$ bo‘lgan ratsional sonlar cheklita va ularni balandligi oshib borishi bo‘yicha birin- ketin nomerlab chiqish mumkin. Masalan, balandligi $h=2$ bo‘lgan bitta ratsional sonni $r_1=1/1=1$, $h=3$ bo‘lgan ikkita ratsional sonlarni $r_2=1/2$ va $r_3=2/1=2$, $h=4$ bo‘lgan ratsional sonlarni $r_4=1/3$ va $r_5=3/1=3$ kabi nomerlaymiz. Demak, har bir musbat ratsional sonni r_n, $n\in N$, kabi belgilab chiqish mumkin va shu sababli $Q^+\sim N$ bo‘ladi.

2.4. Sanoqsiz to‘plamlar. Har qanday cheksiz to‘plam sanoqli bo‘lavermaydi.

9-*TA’RIF:* Sanoqli bo‘lmagan cheksiz to‘plam ***sanoqsiz to‘plam*** deb aytiladi. Ushbu teorema sanoqsiz to‘plamlar mavjudligini ko‘rsatadi.

4-TEOREMA: [0,1] kesmaga tegishli barcha nuqtalar (haqiqiy sonlar) to‘plami sanoqsizdir.

Teoremani isbotsiz qabul etamiz.

10-*TA’RIF:* [0,1] kesma va unga ekvivalent barcha to‘plamlar ***kontinuum*** quvvatli deyiladi.

Ixtiyoriy a, b ($b>a$) haqiqiy sonlar uchun $[a, b]\sim[0,1]$, ya’ni ixtiyoriy kesmadagi nuqtalar (haqiqiy sonlar) kontinuum quvvatli sanoqsiz to‘plam bo‘ladi. Bunga $y=a+(b-a)x$ ($y\in[a,b]$, $x\in[0,1]$) o‘zaro bir qiymatli akslantirish orqali ishonch hosil qilish mumkin.

Natija: Ixtiyoriy ikkita $[a,b]$ ва $[c,d]$ kesmalar ekvivalent, ya’ni $[a,b]\sim[c,d]$ bo‘ladi.

Haqiqatan ham, yuqorida ko‘rsatilganga asosan, $[a,b]\sim[0,1]$ va $[c,d]\sim[0,1]$. Bu yerdan, 1-teoremaga asosan, $[a,b]\sim[c,d]$ ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shunday tarzda ixtiyoriy chekli yoki cheksiz oralik $(a,b)\sim[0,1]$, ya’ni kontinuum quvvatli sanoqsiz to‘plam bo‘lishini isbotlash mumkin. Jumladan, barcha haqiqiy sonlar to‘plami $R=(-\infty, \infty)$ kontinuum quvvatli sanoqsiz to‘plam bo‘ladi.

Har qanday chekli to‘plamning quvvati sanoqli to‘plam quvvatidan kichik, o‘z navbatida sanoqli to‘plam quvvati kontinuum quvvatidan kichikdir. Unda quvvati kontinuumdan katta to‘plamni mavjud yoki mavjud emasligini aniqlash masalasi paydo bo‘ladi. Bu masala o‘z yechimini quyidagi teorema orqali topadi.

5-TEOREMA: A to‘plam quvvati m(A) bo‘lsin. U holda A to‘plamning barcha qism to‘plamlaridan iborat B to‘plam quvvati $m(B)>m(A)$ bo‘ladi.

Bu teoremadan quvvati eng katta bo‘lgan cheksiz to‘plam mavjud emasligi kelib chiqadi. Jumladan, quvvati kontinuumdan katta bo‘lgan sanoqsiz to‘plamlar mavjud.

Agar A va B cheksiz to‘plamlar quvvati m(A) va m(B) bo‘lsa, bu yerda yoki $m(A)=m(B)$ yoki $m(A)<m(B)$ yoki $m(A)>m(B)$ munosabatlardan biri o‘rinli bo‘ladi. Bunda $m(A)=m(B)$ tenglik $A\sim B$ ekanligini bildiradi. $m(A)>m(B)$ yozuv A to‘plamning biror qismi B to‘plamga ekvivalent, ammo B to‘plamda A to‘plamga ekvivalent qism yo‘qligini bildiradi.

XULOSA

To‘plamlar ularga tegishli elementlarga qarab chekli va cheksiz to‘plamlarga ajratiladi. Chekli to‘plamlar quvvati ularga tegishli elementlar soni orqali o‘zaro taqqoslanadi. Cheksiz to‘plamlarni taqqoslash uchun ularning ekvivalentligi tushunchasi kiritiladi. Ekvivalent to‘plamlar teng quvvatli hisoblanadi. Natural sonlar to‘plamiga ekvivalent to‘plamlar sanoqli deb ataladi. [0,1] kesmadagi nuqtalar to‘plami sanoqli emas va bunday to‘plamlar sanoqsiz deyiladi. [0,1] kesmaga ekvivalent to‘plamlar kontinium quvvatli deb olinadi. Chekli to‘plamlar uchun ham, cheksiz to‘plamlar uchun ham quvvati eng katta bo‘lgan to‘plam mavjud emas.

Tayanch iboralar

Chekli to‘plam * Cheksiz to‘plam * Aks ettirish * Tasvir * Asl * O‘zaro bir qiymatli moslik * Ekvivalent to‘plamlar * To‘plam quvvati * Sanoqli to‘plam * Sanoqsiz to‘plam * Kontinuum quvvatli to‘plam

Takrorlash uchun savollar

1. Qanday to‘plamlar chekli deyiladi?
2. Chekli to‘plamlarga misollar keltiring.
3. Qachon to‘plam cheksiz deyiladi?
4. Cheksiz to‘plamlarga misollar keltiring.
5. To‘plamlarni aks ettirish nima?
6. O‘zaro bir qiymatli moslik deb nimaga aytiladi?
7. Qachon to‘plamlar ekvivalent deyiladi?
8. Qaysi shartda chekli to‘plamlar ekvivalent bo‘ladi?
9. To‘plam quvvati deganda nima tushuniladi?
10. Sanoqli to‘plam qanday ta’riflanadi?
11. Sanoqli to‘plamlarga misollar keltiring.
12. Sanoqli to‘plamlar qanday xossalarga ega?
13. Sanoqsiz to‘plam qanday ta’riflanadi?
14. Sanoqsiz to‘plamlarga misollar keltiring.
15. Qachon to‘plam kontinuum quvvali deyiladi?
16. Kontinuum quvvali to‘plamlarga misollar keltiring.
17. Eng katta quvvatli cheksiz to‘plam mavjudmi?

Testlardan namunalar

1. Tasdiqni to‘ldiring: Absolyut qiymati 2 dan kichik bo‘lgan ··· sonlar to‘plami cheklidir.

   A) haqiqiy; B) ratsional; C) irratsional; D) butun; E) o‘nli kasr.

2. Quyidagi to‘plamlardan qaysi biri cheksiz to‘plam bo‘ladi?

   A) $ax^2+bx+c=0$ kvadrat tenglama ildizlari to‘plami ;
   B) $ax+b=c$ ($a\neq 0$) chiziqli tenglama ildizlari to‘plami ;
   C) $\sin x=a$ ($|a|\leq 1$) trigonometrik tenglama ildizlari to‘plami ;
   D) $\log_a x=b$ ($a>0$, $a\neq 1$) logarifmik tenglama ildizlari to‘plami ;

E) $a^x = b$ ($a>0$, $a\neq1$) ko‘rsatkichli tenglama ildizlari to‘plami .

3. Quyidagi to‘plamlaridan qaysi biri sanoqli emas?
   A) butun sonlar; B) ratsional sonlar; C) juft sonlar ;
   D) toq sonlar; E) irratsional sonlar.

4. Quyidagi to‘plamlaridan qaysi biri sanoqsiz?
   A) butun sonlar; B) ratsional sonlar ; C) irratsional sonlar ;
   D) toq sonlar ; E) juft sonlar.

5. Quyidagi to‘plamlaridan qaysi biri sanoqli?
   A) (a,b) oraliqdagi haqiqiy sonlar to‘plami; B) ratsional sonlar to‘plami ;
   C) irratsional sonlar to‘plami ; D) haqiqiy sonlar to‘plami ;
   E) musbat sonlar to‘plami.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Ingliz yoki rus tilini biladigan sayohatchilar guruhi n ($n>8$) kishidan iborat. Ingliz tilida gaplasha oladigan sayohatchilar A, rus tilida gaplasha oladigan sayohatchilar to‘plami esa B bo‘lsin. Agar m(A)=n–3 va m(B)=n–5 bo‘lsa, ikkala tilda gaplasha oladigan sayohatchilar sonini toping.

2. A=$[-n+3, n+2]$ kesmadagi har bir x nuqtaga $f: x\rightarrow y=3x+5$ akslantirish bilan y tasvir mos qo‘yilmoqda. Tasvirlar to‘plami B topilsin.

3. $[-n+3, n+2]$ va $[n-3, n+1]$ kesmalar ekvivalentligini ko‘rsatuvchi o‘zaro bir qiymatli akslantirishni toping.

§3. KOMBINATORIKA

- ***Kombinatorika va uning asosiy qoidalari.***
- ***O‘rin almashtirishlar.***
- ***Kombinatsiyalar.***
- ***Nyuton binomi va binomial koeffitsiyentlar.***
- ***O‘rinlashtirishlar.***

3.1. Kombinatorika va uning asosiy qoidalari. Bir qator amaliy masalalarni yechish uchun berilgan to‘plamdan uning qandaydir xossaga ega bo‘lgan elementlarini tanlab olish va ularni ma’lum bir tartibda joylashtirishga to‘g‘ri keladi.

1–TA‘RIF: Biror chekli to‘plam elementlari ichidan ma’lum bir xossaga ega bo‘lgan elementlardan iborat qism to‘plamlarni tanlab olish yoki to‘plam elementlarini ma’lum bir tartibda joylashtirish bilan bog‘liq masalalar ***kombinatorik masalalar*** deyiladi.

Masalan, o‘nta ishchidan to‘rt kishidan iborat brigadalarni necha xil usulda tuzish mumkinligi (ishlab chiqarishni tashkil etish), molekulada atomlar qanday usullarda birlashishi mumkinligi (ximiya), oqsil moddalarda aminokislotalarni qanday tartiblarda joylashtirish mumkinligi (biologiya), turli bloklardan iborat mexanizmda bu bloklarni turli tartiblarda birlashtirish (konstruktorlik), bir necha dala uchastkalarida turli xil ekinlarini almashtirib ekish (agronomiya), davlat budjetini ishlab chiqarish tarmoqlari bo‘yicha taqsimoti (iqtisodiyot) kabilar kombinatorik masalalarga keladi va kombinatorikani inson faoliyatining turli yo‘nalishlarida qo‘llanilishini ko‘rsatadi.

2–TA‘RIF: Kombinatorik masalalar bilan shug‘ullanadigan matematik fan ***kombinatorika*** deyiladi.

Kombinatorikani mustaqil fan sifatida birinchi bo‘lib olmon matematigi G.Leybnits o‘rgangan va 1666 yilda «Kombinatorika san’ati haqida» asarini chop etgan.

Kombinatorikada qo‘shish va ko‘paytirish qoidasi dab ataluvchi ikkita asosiy qoida mavjud.

Qo‘shish qoidasi : Agar biror α tanlovni $m(\alpha)$ usulda, β tanlovni esa $m(\beta)$ usulda amalga oshirish mumkin bo‘lsa va bu yerda α tanlovni ixtiyoriy tanlash usuli β tanlovni ixtiyoriy tanlash usulidan farq qilsa, u holda «α yoki β» tanlovni amalga oshirish usullari soni

$$m(\alpha \text{ ёки } \beta) = m(\alpha) + m(\beta)$$

formula bilan topiladi.

Masala: Korxonada 10 erkak va 8 ayol xodim ishlaydi. Shu korxonadan bitta xodimni necha xil usulda tanlab olish mumkin?

Yechish: α - erkak xodimni tanlash, β - ayol xodimni tanlash bo‘lsin. Unda, shartga ko‘ra, $m(\alpha)=10$, $m(\beta)=8$ bo‘lgani uchun bitta xodimni

$$m(\alpha \text{ yoki } \beta) = m(\alpha) + m(\beta) = 10+8 = 18$$

usulda tanlash mumkin.

Ko‘paytirish qoidasi: Agarda biror α tanlovni $m(\alpha)$ usulda, β tanlovni $m(\beta)$ usulda amalga oshirish mumkin bo‘lsa, u holda «α va β» tanlovni (yoki (α,β) juftlikni) amalga oshirish usullari soni

$$m(\alpha \text{ va } \beta) = m(\alpha) \cdot m(\beta)$$

formula bilan topiladi.

Masalan, qurilishda 10 suvoqchi va 8 buyoqchi ishlasa, ulardan bir suvoqchi va bir buyoqchidan iborat juftlikni $m(\alpha \text{ va } \beta)=10\cdot 8=80$ usulda tanlash mumkin.

Masala: 10 talabadan iborat guruhga ikkita yo‘llanma berildi. Bu yo‘llanmalarni necha xil usulda tarqatish mumkin?

Yechish: α I yo‘llanmani, β esa II yo‘llanmani tarqatishni ifodalasin. Unda $m(\alpha)=10$ va $m(\beta)=9$, chunki bitta talabaga I yo‘llanma berilganda II yo‘llanmaga 9 talaba da’vogar bo‘ladi. Demak, ikkita yo‘llanmani tarqatishlar soni $m(\alpha \text{ va } \beta) = =10\cdot 9=90$ bo‘ladi.

Umumiy holda $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tanlovlarni mos ravishda $m(\alpha_1), m(\alpha_2), \ldots, m(\alpha_n)$ usullarda amalga oshirish mumkin bo‘lsa,

$$m(\alpha_1 \text{ yoki } \alpha_2 \text{ yoki} \ldots \text{yoki } \alpha_n) = m(\alpha_1)+ m(\alpha_2)+\ldots+m(\alpha_n), \quad (1)$$

$$m(\alpha_1 \text{ va } \alpha_2 \text{ va} \ldots \text{ va } \alpha_n) = m(\alpha_1) \cdot m(\alpha_2) \cdot\ldots\cdot m(\alpha_n) \quad (2)$$

formulalar o‘rinli bo‘ladi.

3.2. O‘rin almashtirishlar. Kombinatorik masalalarni yechishda keng qo‘llaniladigan tushunchalar bilan tanishishni boshlaymiz.

3–TA‘RIF: Chekli va n ta elementdan iborat to‘plamning barcha elementlarini faqat joylashish tartibini o‘zgartirib qism to‘plam hosil qilish ***n elementli o‘rin almashtirish*** deb ataladi.

Berilgan n ta elementdan tashkil topadigan o‘rin almashtirishlar soni P_n kabi belgilanadi.

TEOREMA: n ta elementdan o‘rin almashtirishlar soni

$$P_n = n! \qquad (3)$$

formula bilan hisoblanadi.

Bu yerda $n!$ - “en faktorial” deb o‘qiladi va $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ kabi aniqlanadi. Bunda $0! = 1$ deb olinadi. Masalan, $3!=1\cdot2\cdot3=6$, $4!= 1\cdot2\cdot3\cdot4=24$. Faktoriallarni hisoblashda $(n+1)!=n!\cdot(n+1)$ tenglikdan foydalanish qulay. Masalan, $5!=4!\cdot5=120$ bo‘ladi.

Isbot: Bu formulani isbotlash uchun quyidagi tanlovlarni kiritamiz:

α_k={o‘rin almashtirishning k-elementini tanlash}, $k=1,2,3,\ldots\ldots, n$.

O‘rin almashtirishning 1-elementi sifatida to‘plamdagi n ta elementdan ixtiyoriy bittasini olishimiz mumkin va shu sababli $m(\alpha_1)=n$ bo‘ladi. 2-element sifatida to‘plamdagi qolgan $n–1$ ta element orasidan ixtiyoriy bittasini tanlab olishimiz mumkin bo‘lgani uchun $m(\alpha_2)=n–1$. Xuddi shunday tarzda birin-ketin $m(\alpha_3)=n–2$, $m(\alpha_4)=n–3,\ldots$, $m(\alpha_{n-1})=n–(n–2)=2$, $m(\alpha_n)=n–(n–1)=1$ ekanligini topamiz. Unda, ko‘paytirish qoidasini ifodalovchi (2) formulaga asosan,

$P_n= m(\alpha_1 \text{ va } \alpha_2 \text{ va} \ldots \text{ va } \alpha_n) = m(\alpha_1) \cdot m(\alpha_2) \cdot\ldots\cdot m(\alpha_n)=n\cdot(n–1) \cdot \ldots \cdot2\cdot1=n!$.

Masalan, $n = 3$ elementli $\{a,b,c\}$ to‘plamdan hosil bo‘ladigan o‘rin almashtirishlar $\{a,b,c\}$, $\{b,a,c\}$, $\{a,c,b\}$ $\{b ,c,a\}$, $\{c ,b,a\}$, $\{c,a,b\}$ bo‘lib, ularning soni $P_3=6=3!$.

Masala: Nazoratchi korxonada ishlab chiqarilgan 5 ta mahsulot sifatini ketma-ket tekshirishi kerak. Nazoratchi buni nechta usulda amalga oshirishi mumkin?

Yechish: Bu 5 ta mahsulot sifatini ketma-ket tekshirishlar 5 tadan o‘rin almashtirishlardan iboratdir va shu sababli ularning soni $P_5= 5!=120$ bo‘ladi.

3.3. Kombinatsiyalar. Kombinatorik tushunchalardan yana biri kombinatsiya bo‘lib hisoblanadi.

4–TA‘RIF: Chekli n ta elementli to‘plamning k ($k \leq n$) ta elementli va kamida bitta elementi bilan farqlanadigan qism to‘plamini hosil qilish ***n ta elementdan k tadan olingan kombinatsiya*** deyiladi.

Masalan, $\{a, b,c\}$ ko‘rinishdagi n=3 elementli to‘plamdan ikkita elementli kombinatsiyalar $\{a;b\}$, $\{a;c\}$, $\{b;c\}$ bo‘lib, ularning soni 3 tadir. Bu yerda $\{b;a\}=\{a;b\}$, $\{c;a\}=\{a;c\}$, $\{b;c\}=\{c;b\}$ deb hisoblanadi.

Umumiy holda n ta elementdan k tadan olingan kombinatsiyalar soni C_n^k kabi belgilanadi va uning qiymati quyidagi formula orqali hisoblanishini isbotlash mumkin:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (4)$$

Misol uchun beshta odamdan uch kishidan iborat komissiyani

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{120}{6\cdot 2} = 10$$

usulda tuzish mumkin.

Masala: Xodimga haftaning ixtiyoriy ikki kunini dam olish uchun tanlash imkoni berildi. Xodim dam olish kunlarini necha usulda tanlashi mumkin?

Yechish: Hafta kunlarini n=7 elementli {1,2,3, … ,7 } to‘plam singari qarasak, dam olish kunlari {1,2}, {1,3}, {2,4},… kabi juftliklardan iborat bo‘ladi. Bunda $\{i,j\}$ va $\{j,i\}$ bitta variantni ifodalaydi. Demak, dam olish kunlarini tanlash n=7 elementdan k=2 tadan kombinatsiyalarni tashkil etadi va shu sababli ularning soni

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!\cdot(7-2)!} = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{6\cdot 7}{2} = 21`$$

bo‘ladi.

3.4. Nyuton binomi va binomial koeffitsiyentlar. Yuqorida (4) formula orqali kiritilgan C_n^k sonlari yordamida quyidagi tenglikni yozish mumkin:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k \qquad (5)$$

Bu tenglikda n ixtiyoriy natural son bo‘lib, u maktabda o‘rganiladigan $(a+b)^2$ va $(a+b)^3$ qisqa ko‘paytirish formulalarini umumlashtirmasini ifodalaydi va matematikada ***Nyuton binomi*** (binom ikkihad degan ma’noni bildiradi**)**, unga kiruvchi C_n^k sonlari esa ***binomial koeffitsiyentlar*** deb ataladi. Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, keyinchalik (5) formula Nyuton tomonidan ixtiyoriy ratsional daraja uchun umumlashtirildi.

1. Agar (5) Nyuton binomida $a = b = 1$ yoki a=1, b=–1deb olsak, unda

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$$

tengliklar o‘rinlini ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

2. Agar (4) formulada k o‘rniga $n–k$ qo‘yilsa yoki k=0 yoki $k=n$ deb olinsa, unda

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \qquad C_n^0 = C_n^n = 1$$

tengliklar hosil bo‘ladi. Ular kombinatsiyalarni hisoblashni osonlashtiradi.

3.5. O‘rinlashtirishlar. Bir qator kombinatorik masalalar o‘rinlashtirish yordamida yechiladi.

5– TA‘RIF: Chekli va n ta elementdan iborat to‘plamdan bir-biridan yoki elementlari, yoki elementlarining joylashish tartibi bilan farq qiladigan va k ta elementdan iborat qism to‘plamlarni hosil qilish ***n ta elementdan k tadan o‘rinlashtirish*** deb ataladi.

Berilgan n ta elementdan k tadan o‘rinlashtirish soni A_n^k kabi belgilanadi va uning qiymati quyidagi formula bilan hisoblanishini isbotlash mumkin:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (6)$$

formula bilan hisoblanadi.

Masalan, $\{a,b,c\}$ to‘plamdan n=3 ta elementdan k=2 tadan o‘rinlashtirishlar $\{a;b\},\{a;c\},\{b;c\},\{b;a\},\{c;a\},\{c;b\}$ bo‘lib, ularning soni

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6.$$

Masala: Talaba 4 ta fan bo‘yicha qo‘shimcha tayyorlanish uchun ularning har biriga haftaning bir kunini ajratmoqchi bo‘ldi. Talaba hafta kunlarini fanlarga necha usulda taqsimlashi mumkin?

Yechish: Talabani I-IV fanlar uchun haftaning tanlagan kunlariini k=4 ta elementli $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ to‘plam, hafta kunlarini esa n=7 elementdan iborat $H=\{1,2,3, \ldots ,7\}$ to‘plam singari qaraymiz. Bu holda $X \subset H$ bo‘lib, uni hosil etish n=7 ta elementdan k=4 tadan o‘rinlashtirishlarga mos keladi, chunki bunda elementlarning joylashish tartibi ham ahamiyatga ega. Masalan, {2,4,6,7} taqsimotda I fanga dushanba (2), II fanga chorshanba (4), III fanga juma (6) va IV fanga shanba(7) kunlari ajratilgan bo‘ladi. Unda {4,2,6,7}, {6,4,2,7} kabilar turlicha taqsimotlarni ifodalaydi. Demak, talaba fanlarga hafta kunlarini

$$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840`$$

usulda taqsimlashi mumkin.

XULOSA

Chekli to‘plam elementlaridan ma’lum bir qoida asosida qism to‘plamlar hosil qilish bilan bog‘liq masalalar kombinatorik masalalar deyiladi. Bunday masalalar amaliyotda, jumladan iqtisodiyotda ko‘p uchraydi. Matematikaning kombinatorik masalalar bilan shug‘ullanadigan bo‘limi kombinatorika deb ataladi. Kombinatorikaning ikkita asosiy qoidasi bo‘lib, ular qo‘shish va ko‘paytirish qoidalaridan iboratdir. Kombinatorik masalalarni yechish uchun o‘rin almashtirish, kombinatsiya va o‘rinlashtirish kabi tushunchalar kiritiladi. Ikkihadning ixtiyoriy natural darajasini hisoblash formulasi Nyuton binomi, undagi darajalar oldidagi sonlar esa binomial koeffitsiyentlar deb ataladi. Bu tushunchalar matematikaning turli bo‘limlarida keng qo‘llaniladi.

Tayanch iboralar

Kombinatorik masala * Kombinatorika * Qo‘shish qoidasi * Ko‘paytirish qoidasi * O‘rin almashtirish * Kombinatsiya * Nyuton binomi * Binomial koeffitsiyent * O‘rinlashtirish .

Takrorlash uchun savollar

1. Qanday masalalar kombinatorik deyiladi?
2. Kombinatorika fani nima?
3. Kombinatorikaning qo‘shish qoidasi qanday ifodalaydi?
4. Qo‘shish qoidasiga misol keltiring.
5. Kombinatorikada ko‘paytirish qoidasi mazmuni nimadan iborat?
6. Ko‘paytirish qoidasiga misol keltiring.
7. O‘rinlashtirish deb nimaga aytiladi?

8. O‘rinlashtirishlar soni qanday topiladi?
9. Kombinatsiya ta’rifi qanday ifodalanadi ?
10. Kombinatsiyalar soni qanday formula bilan hisoblanadi?
11. Nyuton binomi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
12. Kombinatorik ayniyatlarga misollar keltiring.
13. O‘rin almashtirish qanday ta’riflanadi?
14. O‘rin almashtirishlar soni qanday topiladi?

<u>Testlardan namunalar</u>

1. Qaysi masala kombinatorik bo‘lmaydi?
   A) To‘plam elementlaridan ma’lum sondagi elementli barcha qism to‘plamlar sonini topish;
   B) To‘plam elementlaridan ma’lum sondagi elementlarni tanlab olishlar sonini topish;
   C) To‘plamning ma’lum sondagi bir qism elementlari o‘rnini almashtirishlar sonini topish ;
   D) To‘plamdagi barcha elementlar o‘rnini almashtirishlar sonini topish;
   E) To‘plamning eng katta va eng kichik elementlarini topish.

2. Kim birinchi bo‘lib kombinatorikani mustaqil fan sifatida o‘rgangan?
   A) Dekart; B) Nyuton; C) Kantor; D) Leybnits; E) Paskal.

3. Agarda α tanlovni $n(\alpha)$ usulda, β tanlovni esa $n(\beta)$ usulda amalga oshirish mumkin bo‘lsa, kombinatorikaning qo‘shish qoidasi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?
   A) n (α yoki β)$= n(\alpha) + n(\beta)$; B) n (α va β)$= n(\alpha) + n(\beta)$;
   C) n (α yoki β)$= n(\alpha) + n(\beta) - n$ (α va β);
   D) n (α yoki β)$= n(\alpha) + n(\beta) + n$ (α va β); E) $n(\alpha + \beta) = n(\beta) + n(\alpha)$.

4. Agarda α tanlovni $n(\alpha)$ usulda, β tanlovni esa $n(\beta)$ usulda amalga oshirish mumkin bo‘lsa, kombinatorikaning ko‘paytirish qoidasi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?
   A) n (α yoki β)$= n(\alpha) \cdot n(\beta)$; B) n (α va β)$= n(\alpha) \cdot n(\beta)$;
   C) $n(\alpha \cdot \beta) = n(\alpha) \cdot n(\beta)$; D) n (α va β)$= n(\alpha)en(\beta) - n$ (α yoki β);
   E) n (α va β)$= n(\alpha)en(\beta) + n$ (α yoki β).

5. I o‘quv guruhida 20, II o‘quv guruhida esa 25 talaba o‘qiydi. Kengashga ikkala guruhdan bitta talabani vakil sifatida tanlash kerak. Buni necha usulda amalga oshirish mumkin?
   A) 20 ; B) 25 ; C) 35 ; D) 45 ; E) aniq ko‘rsatib bo‘lmaydi.

6. Mahsulotlar partiyasida 20 ta mahsulot bor. Bu partiyadan ikkita mahsulotni necha usulda tanlab olish mumkin?

A) 20 ; B) 40 ; C) 85 ; D) 240 ; E) 380 .

7. I qutida 8 dona oq , II qutida esa 7 dona qora sharlar bo‘lib, ular nomerlangan. Oq va qora sharlardan iborat juftlikni necha usulda tanlab olish mumkin?
A) 8 ; B) 7 ; C) 15 ; D) 56 ; E) 72 .

8. Berilgan *n* ta elementdan *k* tadan kombinatsiyalar soni C_n^k qaysi formula bilan topiladi?
A) $C_n^k = \frac{n!}{k!(n+k)!}$; B) $C_n^k = \frac{n!}{k!}$; C) $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$;
D) $C_n^k = \frac{k!}{n!(n+k)!}$; E) $C_n^k = \frac{k!}{n!(n-k)!}$.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. $n(n>2)$ ta elementdan $n–3$ tadan kombinatsiyalar va o‘rinlashtirishlar sonini aniqlang.

2. $(2+e^n)^5$ binomning yoyilmasini yozing.

3. $(x–3)^n$ $(n>5)$ binom yoyilmasidagi x^4 daraja oldidagi koeffitsiyentni toping .

II BOB. CHIZIQLI ALGEBRA

Algebra songa taalluqli turli xil masalalarni
yechishni qisqartirish, soddalashtirish va
ayniqsa umumlashtirish bilan shug'ullanadi.
J.L.Bertran

§1. MATRITSALAR VA ULAR USTIDA AMALLAR.

- ***Matritsalar va ularning turlari.***
- ***Matritsalar ustida amallar.***
- ***Matritsalarning iqtisodiy tatbiqlari.***

1.1. Matritsalar va ularning turlari. Matritsa bir qator matematik va iqtisodiy masalalarni yechishda juda ko'p qo'llaniladigan tushuncha bo'lib, uning yordamida bu masalalar va ularning yechimlarini sodda hamda ixcham ko'rinishda ifodalanadi.

1-TA'RIF: m ta satr va n ta ustundan iborat to'g'ri to'rtburchak shaklidagi $m\cdot n$ ta sondan tashkil topgan jadval $m\times n$ tartibli ***matritsa,*** uni tashkil etgan sonlar esa ***matritsaning elementlari*** deb ataladi.

Matritsalar $A,B,C,\ldots$ kabi bosh harflar bilan, ularning i-satr va j-ustunida joylashgan elementlari esa odatda a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} kabi mos kichik harflar bilan belgilanadi. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1.2 \\ 0 & 7.5 & -1 \end{pmatrix}$$

matritsa 2×3 tartibli, ya'ni 2 ta satr va 3 ta ustun ko'rinishidagi 2·3=6 ta sondan tashkil topgan. Uning 1-satr elementlari $a_{11}=1$, $a_{12}=-3$, $a_{13}=1.2$ va 2-satr elementlari $a_{21}=0$, $a_{22}=7.5$, $a_{23}=-1$ sonlardan iborat. Bu matritsaning 1-ustuni $a_{11}=1$ va $a_{21}=0$, 2-ustuni $a_{12}=-3$ va $a_{22}=7,5$, 3-ustuni esa $a_{13}=1.2$ va $a_{23}=-1$ elementlardan tuzilgan.

Agar biror A matritsaning tartibini ko'rsatishga ehtiyoj bo'lsa, u $A_{m\times n}$ ko'rinishda yoziladi va umumiy holda

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

yoki qisqacha $A_{m\times n}=(a_{ij})$ ko'rinishda ifodalanadi.

2-TA'RIF: A_{mxn} matritsada $m = n \neq 1$ bo'lsa, u ***kvadrat matritsa***, $m \neq n$ ($m\neq1$, $n\neq1$) bo'lsa ***to'g'ri burchakli matritsa*** , $m=1$, $n\neq1$ holda ***satr matritsa*** va $m\neq1$, $n=1$ bo'lganda ***ustun matritsa*** deb ataladi.

A_{nxn} kvadrat matritsa qisqacha A_n kabi belgilanadi va n-tartibli kvadrat matritsa deyiladi.

Masalan, xalq xo‘jaligining n ta tarmoqlari orasidagi o‘zaro mahsulot ayirboshlash $A_n = (a_{ij})$ kvadrat matritsa yordamida ifodalanadi. Bunda a_{ij} ($i,j=1,2, \dots , n$ va $i \neq j$) i-tarmoqda ishlab chiqarilgan mahsulotning j-tarmoq uchun mo‘ljallangan miqdorini, a_{ii} ($i=1,2, \dots , n$) esa i-tarmoqning o‘zi ishlab chiqargan mahsulotga ehtiyojini bildiradi.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, $m=1$ va $n=1$ bo‘lganda $A_{1\times 1}$ matritsa bitta sonni ifodalaydi va shu sababli ma’lum bir ma’noda matritsa son tushunchasini umumlashtiradi.

3-TA’RIF: A va B matritsalar bir xil tartibli va ularning mos elementlari o‘zaro teng bo‘lsa, ya’ni $a_{ij} = b_{ij}$ shart bajarilsa, ular ***teng matritsalar*** deyiladi.

A va B matritsalarning tengligi $A=B$ yoki $(a_{ij})= (b_{ij})$ ko‘rinishda belgilanadi. Masalan, ixtiyoriy $a\neq 0$ soni uchun

$$A = \begin{pmatrix} a+a & a-a \\ a:a & a\cdot a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

matritsalar o‘zaro teng, ya’ni $A = B$ bo‘ladi.

4-TA’RIF: $A=\{a_{ij}\}$ matritsada i=j bo‘lgan a_{ii} elementlar ***diagonal elementlar*** deb ataladi.

Masalan, yuqorida ko‘rilgan $A_{2\times 3}$ matritsaning diagonal elementlari $a_{11}=1$ va $a_{22}=7.5$ bo‘ladi.

5-TA’RIF: Diagonal elementlaridan boshqa barcha elementlari nolga teng bo‘lgan ($a_{ij}=0$, $i \neq j$) kvadrat matritsa ***diagonal matritsa*** deyiladi.

Diagonal matritsaning diagonal elementlari nolga ham teng bo‘lishi mumkin. Masalan,

$$A_{2\times 2} = A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad , \quad B_{3\times 3} = B_3 = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

diagonal matritsalar bo‘ladi.

6-TA’RIF: Barcha diagonal elementlari $a_{ii}=1$ bo‘lgan n-tartibli diagonal matritsa n-tartibli birlik matritsa yoki qisqacha ***birlik matritsa*** deyiladi.

Odatda n-tartibli birlik matritsa E_n yoki qisqacha E kabi belgilanadi. Masalan,

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mos ravishda ikkinchi va uchinchi tartibli birlik matritsalardir.

7-TA’RIF: Barcha elementlari nolga teng ($a_{ij}=0$) bo‘lgan ixtiyoriy $m\times n$ tartibli matritsa ***nol matritsa*** deyiladi.

$m\times n$ tartibli nol matritsa $O_{m\times n}$ yoki qisqacha O kabi belgilanadi. Masalan,

$$O_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad O_{3\times 3} = O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ko‘rsatilgan tartibli nol matritsalar bo‘ladi.

1.2. Matritsalar ustida amallar. Endi matritsalar ustida algebraik amallar kiritib, matritsalar algebrasini hosil etamiz.

8-TA’RIF: Ixtiyoriy tartibli $A_{m\times n}=(a_{\mathrm{ij}})$ matritsaning istalgan λ ***songa ko‘paytmasi*** deb $C_{m\times n}=\{\lambda\, a_{ij}\}$ kabi aniqlanadigan matritsaga aytiladi.

Bunda A matritsaning λ songa ko‘paytmasi λA deb belgilanadi. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 0 & 2 & 7\end{pmatrix}\Rightarrow 6A=\begin{pmatrix}6\cdot 5 & 6\cdot 4 & 6\cdot(-1)\\ 6\cdot 0 & 6\cdot 2 & 6\cdot 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30 & 24 & -6\\ 0 & 12 & 42\end{pmatrix}.$$

9-TA’RIF: Bir xil tartibli $A_{m\times n}=(a_{ij})$ va $B_{m\times n}=(b_{ij})$ ***matritsalar yig‘indisi*** deb elementlari $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ kabi aniqlanadigan $C_{m\times n}=(c_{ij})$ matritsaga aytiladi.

Bunda A va B matritsalarning yig‘indisi $A+B$ ko‘rinishda belgilanadi va ularning mos elementlarini qo‘shish orqali hisoblanadi. Masalan,

$$A=A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ 0 & 7 & 2\end{pmatrix},\quad B=B_{2\times 3}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix},$$

matritsalar uchun

$$A+B=\begin{pmatrix}5+1 & 3+0 & -1+1\\ 0+2 & 7+(-3) & 2+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3 & 0\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}.$$

Matritsalarni songa ko‘paytirish va o‘zaro qo‘shish amallari quyidagi qonunlarga bo‘ysunishi bevosita ularning ta’riflaridan kelib chiqadi:

I. $A+B=B+A$ (qo‘shish uchun kommutativlik qonuni);

II. $A+(B+C)=(A+B)+C$ (qo‘shish uchun assotsiativlik qonuni);

III. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$, $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ (distrubutivlik qonuni)

Bundan tashqari yuqoridagi ta’riflar orqali bu amallar ushbu xossalarga ham ega bo‘lishini ko‘rsatish qiyin emas:

$$\mathrm{A}+\mathrm{O}=\mathrm{A},\quad \mathrm{A}+\mathrm{A}=2\mathrm{A},\quad 0\cdot\mathrm{A}=\mathrm{O},\quad \lambda\cdot\mathrm{O}=\mathrm{O}.$$

10-TA’RIF: Bir xil tartibli $A_{m\times n}=(a_{ij})$ va $B_{m\times n}=(b_{ij})$ ***matritsalar ayirmasi*** deb $A_{m\times n}$ va $(-1)\,B_{m\times n}$ matritsalarning yig‘indisiga, ya’ni $A_{m\times n}+(-1)B_{m\times n}$ matritsaga aytiladi.

Bunda A va B matritsalarning ayirmasi $A-B$ ko‘rinishda belgilanadi va ularning mos elementlarini o‘zaro ayirish orqali hisoblanadi. Masalan,

$$A=A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ 0 & 7 & 2\end{pmatrix},\quad B=B_{2\times 3}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix},$$

matritsalar uchun

$$A-B=\begin{pmatrix}5-1 & 3-0 & -1-1\\ 0-2 & 7-(-3) & 2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 3 & -2\\ -2 & 10 & -2\end{pmatrix}.$$

11-TA’RIF: $A_{m\times p}=(a_{ij})$ va $B_{p\times n}=(b_{ij})$ ***matritsalarning ko‘paytmasi*** deb shunday $C_{m\times n}=(c_{ij})$ matritsaga aytiladiki, uning c_{ij} elementlari ushbu

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{\mathrm{p}}a_{ik}b_{kj}\,,\qquad i=1,\,2,\,\cdots,\,m;\quad j=1,\,2,\,\cdots,\,n$$

yig‘indilar kabi aniqlanadi.

Shunday qilib, $A_{m\times p}=(a_{ij})$ va $B_{\mathrm{q}\times n}=(b_{ij})$ matritsalar uchun $p=q$, ya’ni A matritsaning ustunlari soni B matritsaning satrlari soniga teng bo‘lgandagina ularning ko‘paytmasi mavjud bo‘ladi va AB kabi belgilanadi. Bunda $AB=C_{m\times n}=(c_{ij})$ matritsaning satrlar soni m birinchi A ko‘paytuvchi matritsa, ustunlar soni n esa ikkinchi B ko‘paytuvchi matritsa orqali aniqlanadi. Bundan tashqari $AB=C_{m\times n}=(c_{ij})$ ko‘paytma matritsaning c_{ij} elementi A matritsaning i – satr elementlarini B matritsaning j-ustunidagi mos elementlariga ko‘paytirib, hosil bo‘lgan ko‘paytmalarni qo‘shish orqali hisoblanadi. Bu “satrni ustunga ko‘paytirish” qoidasi deb aytiladi. Masalan,

$$A_{3\times 2}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -2\\ 4 & 5\end{pmatrix},\qquad B_{2\times 2}=\begin{pmatrix}6 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

matritsalar uchun $m=3$, $p=q=2$, $n=2$ bo‘lgani uchun ularning ko‘paytirish mumkin va ko‘paytma matritsa $AB=C_{3x2}$ quyidagicha bo‘ladi:

$$C_{3\times 2}=\begin{pmatrix}3\cdot 6+1\cdot 1 & 3\cdot(-4)+1\cdot 2\\ 0\cdot 6+(-2)\cdot 1 & 0\cdot(-4)+(-2)\cdot 2\\ 4\cdot 6+5\cdot 1 & 4\cdot(-4)+5\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & -10\\ -2 & -4\\ 29 & -6\end{pmatrix}.$$

Matritsalar ko‘paytmasi uchun $AB\neq BA$, ya’ni kommutativlik qonuni o‘rinli bo‘lmaydi. Masalan, $A_{m\times q}B_{q\times n}=C_{m\times n}$ ko‘paytma mavjud, ammo $B_{q\times n}A_{m\times q}$ ko‘paytma har doim ham mavjud emas va mavjud bo‘lgan taqdirda, ya’ni $n=m$ holda ham ular teng bo‘lishi shart emas. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

matritsalar uchun $AB\neq BA$, chunki

$$AB=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 7\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 22\\ 8 & 23\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}34 & 33\\ -4 & -5\end{pmatrix}.$$

Matritsalar ko‘paytmasi va yig‘indisi quyidagi qonunlarga bo‘ysunadi hamda ushbu xossalarga ega bo‘ladi:

I. $A(BC)=(AB)C$, $(\lambda A)B=A(\lambda B)$ (ko‘paytirish uchun assotsiativlik qonuni);

II. $A(B+C)=AB+AC$ (ko‘paytirish va qo‘shish amallari
$(A+B)C=AC+BC$ uchun distributivlik qonunlari);

III. $AE=EA=A$, $O\cdot A=O$, $A\cdot O=O$, $0\cdot A=O$.

Bunda E va O mos ravishda tegishli tartibli birlik va nol matritsalarni ifodalaydi.

Matritsa ko‘paytmasi ta’rifidan ko‘rinadiki, har qanday n-tartibli A kvadrat matritsani o‘ziga–o‘zini ko‘paytirish mumkin va natijada yana n-tartibli kvadrat matritsa hosil bo‘ladi.

<u>12-TA’RIF</u>: A kvadrat matritsani o‘zaro m marta (m – birdan katta ixtiyoriy natural son) ko‘paytirish natijasida hosil bo‘lgan kvadrat matritsa A ***matritsaning m-darajasi*** deyiladi.

A matritsaning m- darajasi A^m kabi belgilanadi. Bunda $A^0=E$ va $A^1=A$ deb olinib, A^m daraja ixtiyoriy nomanfiy butun m soni uchun aniqlanadi. Bu holda A^m daraja ta'rifdan uning quyidagi xossalari bevosita kelib chiqadi (m,k-natural sonlar, λ-haqiqiy son):

$$1.\ A^m \cdot A^k = A^{m+k}\ ;\quad 2.\ (A^m)^k = A^{mk}\ ;\quad 3.\ (\lambda A)^m = \lambda^m A^m\ ;$$

$$4.\ E^m = E;\quad 5.\ \mathrm{O}^m = \mathrm{O}.$$

Shunday qilib, har qanday kvadrat matritsa uchun natural darajaga ko'tarish amalini kiritish mumkin ekan. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -5\\ -1 & 14\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}9 & -5\\ -1 & 14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 60\\ 12 & -47\end{pmatrix}.$$

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, 5-xossaning teskarisi o'rinli emas, ya'ni A^m=O tenglikdan har doim ham A=O ekanligi kelib chiqmaydi. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\neq \mathrm{O}\Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\mathrm{O}.$$

Kelgusida matritsani darajaga ko'tarish amalini ixtiyoriy m butun son uchun umumlashtiramiz.

13-TA'RIF: $B=(b_{ij})$ matritsa $A=(a_{ij})$ matritsaning ***transponirlangani*** deyiladi, agar i va j indekslarning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarida $a_{ij}=b_{ji}$ shart bajarilsa.

A matritsaning transponirlangani A^{T} kabi belgilanadi. Agar A matritsa $m\times n$ tartibli bo'lsa, uning transponirlangani A^{T} $n\times m$ tartibli bo'ladi.Masalan,

$$A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}2 & -4 & 1\\ 3 & 0 & -5\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad A^T_{3\times 2}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -4 & 0\\ 1 & -5\end{pmatrix}.$$

Matritsani transponirlanganini topish ***transponirlash amali*** deyiladi va u quyidagi xossalarga ega bo'lishini ko'rsatish mumkin:

1. $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$; 2. $(\lambda A)^{\mathrm{T}}=\lambda A^{\mathrm{T}}$ (λ– ixtiyoriy haqiqiy son);
3. $(A\pm B)^{\mathrm{T}}= A^{\mathrm{T}}\pm B^{\mathrm{T}}$; 4. $(A\cdot B)^{\mathrm{T}}= B^{\mathrm{T}}\cdot A^{\mathrm{T}}$.

14-TA'RIF: Agar A kvadrat matritsa uchun $A^{\mathrm{T}}=A$ bo'lsa, u ***simmetrik matritsa,*** $A^{\mathrm{T}}= -A$ bo'lganda esa ***kososimmetrik matritsa*** deb ataladi.

Ta'rifdan har qanday simmetrik matritsaning elementlari $a_{ij}= a_{ji}$, kososimmetrik matritsaning elementlari esa $a_{ij}=- a_{ji}$ shartni qanoatlantirishi bevosita kelib chiqadi. Bundan kososimmetrik matritsaning barcha diagonal elementlari nolga teng bo'lishi kelib chiqadi.

Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}3 & 6 & 1\\ 6 & 0 & -4\\ 1 & -4 & -2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\ -3 & 0 & -4\\ -2 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

matritsalardan A simmetrik, B kososimmetrik bo'ladi.

1.3. Matritsalarning iqtisodiy tatbiqlari. Ushbu mavzu nihoyasida matritsalarning iqtisodiy ma’nosi va tatbiqlarini ifodalovchi misollar keltiramiz.

1-misol. Xalq xo‘jaligining tarmoqlari o‘rtasida ayrim ishlab chiqarish resurslarining taqsimoti quyidagi jadval orqali berilgan bo‘lsin (umumiy hajmga nisbatan foiz hisobida, raqamlar shartli):

Resurslar	Xalq xo‘jaligi tarmoqlari		
	Sanoat	Qishloq xo‘jaligi	Boshqa tarmoqlar
1.Yoqilg‘i	45	30	25
2. Elektr energiyasi	53	27	20
3. Mehnat resurslari	38	21	41
4. Suv resurslari	40	48	12

Bu jadvalni matritsa yordamida quyidagi qulay ko‘rinishda ifodalash mumkin:

$$A_{4\times 3}=\begin{pmatrix} 45 & 30 & 25 \\ 53 & 27 & 20 \\ 38 & 21 & 41 \\ 40 & 48 & 12 \end{pmatrix}$$

Bu yozuvda A matritsaning har bir elementi aniq iqtisodiy ma’noga ega. Masalan, a_{11}=45 va a_{21}=53 sanoat tarmoqlari yoqilg‘ining 45 foizini va elektr energiyasining 53 foizini iste’mol qilishini ko‘rsatadi; a_{22}=27 qishloq xo‘jaligi elektr energiyasining 27 foizini sarflashini, a_{33}=41 esa mehnat resurslarining 41 foizi boshqa tarmoqlarda band ekanligini ifodalaydi va hokazo.

2-Misol. Korxona M_1,M_2 , M_3 va M_4 kabi belgilangan 4 xil mahsulot ishlab chiqaradi. Bu mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun 3 xil S_1 , S_2 va S_3 xom ashyolardan foydalaniladi. Bunda a_{ij} (i=1,2,3,4; j=1,2,3) orqali M_i mahsulot birligini ishlab chiqarish uchun S_j xom ashyodan qancha birlik sarflanishini belgilab, mahsulotlar birligini ishlab chiqarish uchun xom ashyolar sarfi me’yorini ushbu $A_{4\text{x}3}=(a_{ij})$ matritsa orqali ifodalaymiz:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bunda M_i (i=1,2,3,4) mahsulotlarni ishlab chiqarish rejasini ifodalovchi C satr va S_j (j=1,2,3) xom ashyo birligining bahosini ko‘rsatuvchi B ustun matritsalar quyidagicha bo‘lsin:

$$C=\begin{pmatrix} 90 & 110 & 80 & 100 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Bu holda *CA* matritsalar ko‘paytmasi mavjud va u rejalangan mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun sarflanadigan S_1, S_2 va S_3 xom ashyolar miqdorini ifodalovchi quyidagi *D* satr matritsadan iboratdir:

$$D = C \cdot A = \begin{pmatrix} 90 & 110 & 80 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1210 & 730 & 1150 \end{pmatrix}.$$

Demak biz ishlab chiqarish rejasini bajarishimiz uchun S_1, S_2 va S_3 xom ashyolardan mos ravishda 1210, 730 va 1150 birlik miqdorda ega bo‘lishimiz kerak.

Xom ashyo miqdorini ifodalovchi topilgan *D* matritsani xom ashyo birligi bahosini ko‘rsatuvchi *B* matritsaga ko‘paytmasi *DB* ham mavjud va u bizga zarur miqdordagi xom ashyolarni sotib olish xarajatimizni determinant sondan iborat bo‘ladi:

$$DB = \begin{pmatrix} 1210 & 730 & 1150 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 1210 \cdot 7 + 730 \cdot 4 + 1150 \cdot 5 = 17140.$$

XULOSA

Matritsa – satrlar va ustunlar shaklida joylashtirilgan sonlar jadvali bo‘lib, ma’lum bir ma’noda son tushunchasini umumlashtiradi. Matritsalar matematikaning ham nazariy, ham amaliy (jumladan iqtisodiy mazmunli) masalalarida keng qo‘llaniladi. Matritsalar ustida ularni songa ko‘paytirish, o‘zaro qo‘shish, ayirish va ko‘paytirish kabi algebraik amallar aniqlangan. Bunda hosil bo‘ladigan matritsalar algebrasidagi ko‘paytirish amalining o‘ziga xos xususiyati shundan iboratki, u kommutativlik qonuniga bo‘ysunmaydi. Bu algebrada nol va birlik matritsa 1 va 0 sonlariga o‘xshash xossalarga ega. Matritsalar uchun ko‘rsatilgan algebraik amallardan tashqari transponirlash amali ham aniqlangan.

Tayanch iboralar

Matritsa * Matritsa tartibi * Matritsa elementi * To‘rtburchakli matritsa
* Kvadrat matritsa * Ustun matritsa * Satr matritsa * Teng matritsalar
* Diagonal element * Diagonal matritsa * Birlik matritsa * Nol matritsa
* Matritsalar yig‘indisi * Matritsalar ayirmasi * Matritsalar ko‘paytmasi
* Matritsaning darajasi * Matritsaning transponirlangani * Simmetrik matritsa
* Kososimmetrik matritsa

Takrorlash uchun savollar

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Matritsaning tartibi qanday aniqlanadi?
3. Matritsaning elementi deb nimaga aytiladi?
4. Matritsalar qanday turlarga ajratiladi?

5. Qachon ikkita matritsa teng deyiladi?
6. Matritsaning qanday elementi diagonal deyiladi?
7. Birlik matritsa qanday ta’riflanadi?
8. Qachon matritsa nol matritsa deyiladi?
9. Matritsani songa ko‘paytirish qanday aniqlanadi?
10. Qaysi shartda matritsalarni qo‘shish yoki ayirish mumkin?
11. Matritsalar yig‘indisi yoki ayirmasi qanday topiladi?
12. Matritsalarni qo‘shish amali qanday qonunlarga bo‘ysunadi?
13. Matritsalarni qo‘shish amali qanday xossalarga ega?
14. Qaysi shartda matritsalarni ko‘paytirish mumkin?
15. Ko‘paytma matritsa tartibi qanday topiladi?
16. Matritsalarning ko‘paytmasi qanday aniqlanadi?
17. Matritsalarni ko‘paytirish amali qanday qonunlarga bo‘ysunadi?
18. Matritsalarni ko‘paytirish amali qanday xossalarga ega?
19. Matritsaning natural darajasi qanday aniqlanadi?
20. Matritsani darajaga ko‘tarish amali qanday xossalarga ega?
21. Matritsalarni transponirlash nima?
22. Matritsalarni transponirlash amali qanday xossalarga ega?
23. Qachon matritsa simmetrik deyiladi?
24. Qanday shartda matritsa kososimmetrik deb ataladi?
25. Matritsaning iqtisodiy tatbig‘iga misol keltiring.

Testlardan namunalar

1. Matritsa mazmuni qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?

A) sonlar yig‘indisi; B) sonlar ko‘paytmasi;
C) sonlar to‘plami; D) sonlar jadvali;
E) sonlar birlashmasi.

2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ matritsaning tartibini aniqlang.

A) 2×2; B) 2×3; C) 3×2; D) 3×3; E) 2×3=6.

3. Elementlari a_{ij} bo‘lgan matritsa qachon nol matritsa deyiladi?

A) Barcha a_{ij} elementlarning yig‘indisi nolga teng bo‘lsa;
B) Barcha a_{ij} elementlari nolga teng bo‘lsa;
C) Barcha a_{ij} elementlarning ko‘paytmasi nolga teng bo‘lsa;
D) Biror satridagi barcha a_{ij} elementlar nolga teng bo‘lsa;
E) Biror ustundagi barcha a_{ij} elementlar nolga teng bo‘lsa.

4. Quyidagi matritsalarning qaysi biri nol matritsa bo‘lmaydi?

$A)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\quad B)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\quad C)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};\quad D)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

E) Keltirilgan barcha matritsalar nol matritsa bo‘ladi.

5. Elementlari a_{ij} bo‘lgan kvadrat matritsa qachon birlik matritsa deyiladi?

A) Barcha a_{ij} elementlar birga teng bo‘lsa;
B) $a_{ii}=1$ va $a_{ij}=0$ ($i\neq j$) bo‘lsa;
C) Barcha a_{ii} diagonal elementlar birga teng bo‘lsa;
D) Biror satrdagi barcha a_{ij} elementlar birga teng bo‘lsa;
E) Biror ustundagi barcha a_{ij} elementlar birga teng bo‘lsa.

6. Birlik matritsani ko‘rsating.

A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; E) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Birlik matritsani ko‘rsating.

A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; E) bu yerda birlik matritsa yo‘q .

8. Qaysi shartda A_{mn} va B_{pq} matritsalarni ko‘paytirish mumkin?

A) m=p; B) m=q; C) n=p; D) n=q; E) mq=np.

9. Quyidagi A va B matritsalar ustida qanday amallar bajarish mumkin?

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

A) $A-B$; B) $A\cdot B$; C) $B\cdot A$; D) $B-A$; E) $A+B$.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. A va B matritsalar bo‘yicha $(n+2)$A, $(1-n)$B, A+B, A–B va nA+$(n-3)$B matritsalarni toping:

$$A=\begin{pmatrix} n & 1-n & n+1 \\ 2n+1 & n & 2n-1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2n & n+3 & n-2 \\ n+1 & n-4 & 1-2n \end{pmatrix}.$$

2. Berilgan A va B matritsalar bo‘yicha A·B va B·A matritsalarni toping hamda A·B=B·A yoki A·B≠B·A ekanligini aniqlang :

$$A=\begin{pmatrix} n & n+1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2n & 2n-3 & n+5 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2n & 2n+1 & n \\ n-1 & n & n+1 \end{pmatrix}.$$

§2. DETERMINANTLAR VA ULARNING XOSSALARI

- ***Determinantlar va ularni hisoblash.***
- ***Determinantlarning asosiy xossalari.***

2.1. Determinantlar va ularni hisoblash. Matritsaning bir qator xususiyatlarini ta'riflash va o'rganish uchun uning determinanti tushunchasi kerak bo'ladi.

1-TA'RIF. n - tartibli A kvadrat matritsaning elementlaridan ma'lum bir qoida asosida hosil qilinadigan son ***n – tartibli determinant*** deyiladi.

A kvadrat matritsaning determinanti $|A|$ yoki det$A$ kabi belgilanadi. Ayrim o'quv adabiyotlarida determinant atamasi aniqlovchi deb aytiladi. Umumiy holda n-tartibli determinant quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2-TA'RIF. Berilgan $|A|$ determinantni tashkil etgan a_{ij} (i,j=1,2, … ,n) sonlar ***determinantning elementlari***, gorizontal ko'rinishda joylashgan a_{ij} (j=1,2, … ,n) elementlar ***determinantning i- satri*** (i=1,2, … ,n), vertikal ko'rinishda joylashgan a_{ij} (i=1,2, … ,n) elementlar esa ***determinantning j ustuni*** (j=1,2, … ,n) deyiladi.

Endi I, II va III tartibli determinantlarni hisoblash qoidasini formula ko'rinishida aniq ifodalaymiz.

I tartibli $|A|$ determinant faqat bitta a_{11} sondan iborat bo'lib, uning qiymati shu sonni o'ziga teng, ya'ni $|A|=|a_{11}|= a_{11}$ deb olinadi.

II tartibli determinantning qiymati quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \qquad (1)$$

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 4 \cdot 5 = 18 - 20 = -2, \qquad \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 5 \cdot 10 - 4 \cdot (-2) = 50 + 8 = 58$$

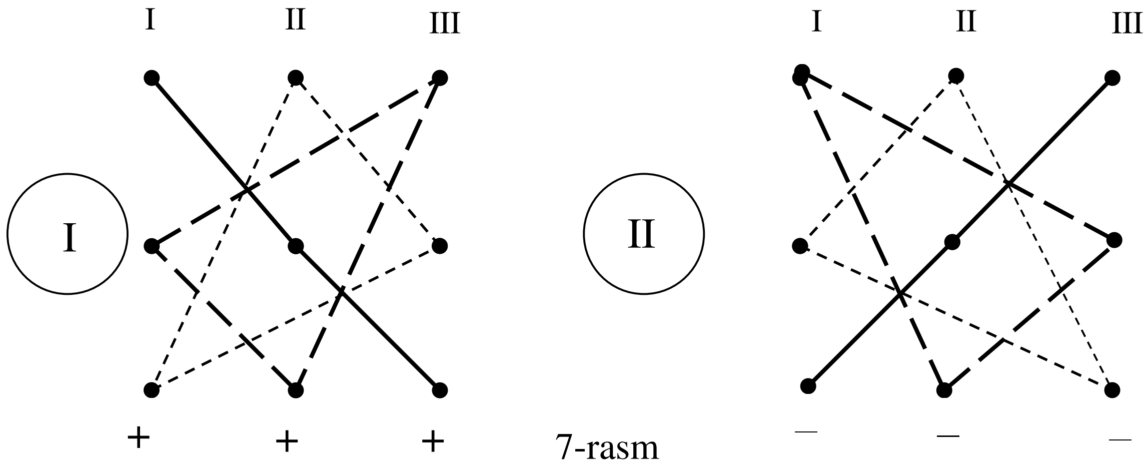
III tartibli determinant esa quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} \qquad (2)$$

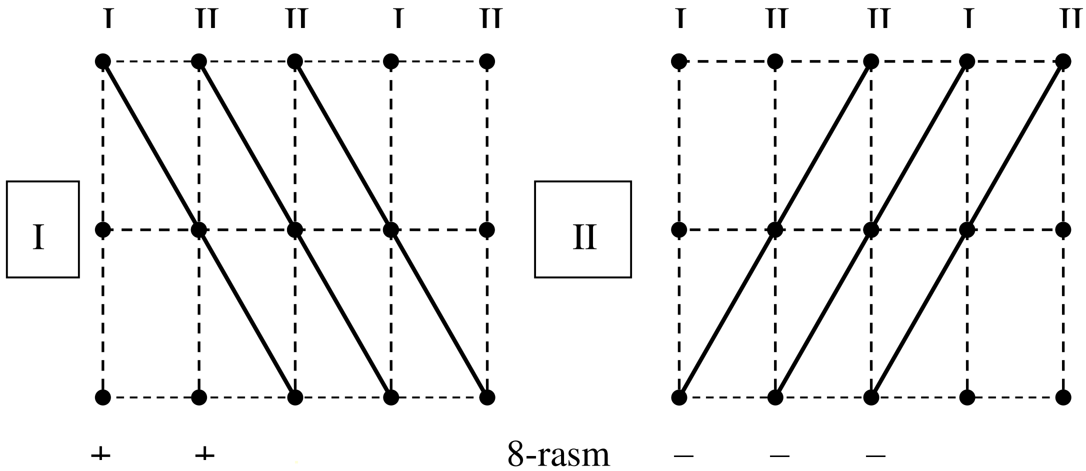
Bu yerda (2) formulani eslab qolish oson emas va shu sababli III tartibli determinantlarni quyidagi usullarda hisoblash mumkin.

❖ **Uchburchaklar usuli.** Bu usulda determinantning elementlari sxematik ko'rinishda nuqtalar singari ifodalanadi (7-rasmga qarang). So'ngra asoslari determinantning diagonallariga parallel bo'lgan uchburchaklar qaraladi. Bu uchburchaklarning uchlarida va diagonallarda joylashgan elementlarning ko‘paytmalari hosil qilinadi. I holda chiziqlar bilan tutashtirilgan elementlarning ko‘paytmalari o‘z ishorasi, II holda esa qarama-qarshi ishora bilan olinadi.



7-rasm

❖ **Sarrius usuli.** Bu usulda determinantning o‘ng tomoniga uning I va II ustunlari takroran yozilib, 3×5 tartibli matritsa hosil qilinadi. Bu matritsaning elementlari sxematik ko‘rinishda nuqtalar singari ifodalanadi (8-rasmga qarang) va chiziqlar bilan tutashtirilgan elementlarning ko‘paytmasi I holda o‘z ishorasi, II holda esa qarama-qarshi ishora bilan olinadi.



8-rasm

III tartibli determinantni hisoblashga doir misol keltiramiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 5\cdot 0 + 6\cdot 4\cdot 3 + 1\cdot(-1)\cdot(-2) -$$

$$-(-2)\cdot 5\cdot 3 - 6\cdot 1\cdot 0 - 4\cdot(-1)\cdot(2) = 112.$$

Determinantlar va matritsalar orasida quyidagi o‘xshashlik va farqlar mavjud:

1) matritsa sonlar jadvalini ifodalaydi. Determinant esa sonlar jadvalidan hosil qilinadigan sonli ifoda bo‘lib, uning qiymati sondan iboratdir;

2) matritsa sonlar jadvalini dumaloq qavslar ichiga olish bilan belgilansa, determinant bu jadvalni vertikal chiziqlar orasiga olish bilan belgilanadi;

3) A matritsa va $|A|$ determinantni tashkil etuvchi sonlar ularning elementlari deyiladi;

4) matritsa va determinanant satrlar va ustunlardan iborat;

5) determinantlarda ustun va satrlar soni teng bo‘lishi kerak, matritsalarda esa bunday bo‘lishi shart emas.

2.2. Determinantlarning asosiy xossalari. Endi ixtiyoriy tartibli determinantlar uchun o‘rinli bo‘lgan xossalar bilan tanishamiz. Aniqlik va soddalik uchun umumiy holda ifodalangan bu xossalarni uchinchi tartibli determinantlar misolida ko‘rsatamiz va isbotlaymiz.

1-xossa. Agar determinantda har bir i-satr (i=1,2,3, $\cdots$,n) i-ustun bilan almashtirilsa, uning qiymati o‘zgarmaydi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu tenglik bevosita III tartibli determinantni (2) hisoblash formulasidan kelib chiqadi.

Demak determinantning satr va ustunlari teng kuchlidir, ya’ni satr (ustun) uchun o‘rinli bo‘lgan tasdiq ustun (satr) uchun ham o‘rinli bo‘ladi. Bundan tashqari bu xossadan matritsani transponirlashda uning determinanti o‘zgarmay qolishi, ya’ni $\det A = \det A^T$ bo‘lishi kelib chiqadi. Shu sababli determinantning keyingi xossalarini faqat satrlar uchun ifodalaymiz.

2-xossa. Determinantda ixtiyoriy ikkita satrlar o‘rni o‘zaro almashtirilsa, determinantning qiymati faqat ishorasini o‘zgartiradi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

Bu tasdiq ham bevosita (2) formuladan kelib chiqadi.

3-xossa. Agar determinantda ikkita satr elementlari bir xil bo‘lsa, uning qiymati nolga teng bo‘ladi.

Isbot: Berilgan determinantning qiymatini Δ , uning bir xil elementli satrlarining o‘rinlarini almashtirishdan hosil bo‘lgan determinantning qiymatini esa Δ' deb belgilaymiz. Unda, 2-xossaga asosan, $\Delta' = -\Delta$ bo‘ladi. Ammo determinantda bir xil elementli satrlarning o‘rinlari almashtirilganligi uchun uning ko‘rinishi o‘zgarmay qoladi va shu sababli $\Delta' = \Delta$ bo‘ladi. . Bu tengliklardan $\Delta = -\Delta$ natijani olamiz va undan $\Delta=0$ ekanligi kelib chiqadi.

Masalan, hozircha biz IV tartibli determinantni hisoblash formulasini bilmasakda, 3-xossaga asosan, birinchi va uchinchi satrlari bir xil bo‘lgan ushbu determinantning qiymatini yozishimiz mumkin:

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 & 6 \\ 8 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

4-xossa. Determinantda biror satr elementlari umumiy λ ko‘paytuvchiga ega bo‘lsa, uni determinant belgisidan tashqariga chiqarib yozish mumkin.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Isbot: III tartibli determinantni (2) hisoblash formulasidagi yig‘indining har bir qo‘shiluvchisida λ umumiy ko‘paytuvchi qatnashadi. Bu λ umumiy ko‘paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarib, 4-xossadagi tasdiqning o‘rinli ekanligiga ishonch hosil etamiz.

5-xossa. Agar determinantda biror satr faqat nollardan iborat bo‘lsa, uning qiymati nolga tang bo‘ladi.

Bu xossaning isboti oldingi xossadan λ=0 bo‘lgan holda kelib chiqadi.

Masalan, quyidagi III tartibli determinantning qiymatini (2) formula bilan hisoblab o‘tirmay, 4-xossaga asosan to‘g‘ridan-to‘g‘ri

$$\begin{vmatrix} 11 & 20 & 401 \\ -8 & 37 & 139 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

deb ta’kidlay olamiz.

6-xossa. Agar determinantning ixtiyoriy ikkita satr elementlari o‘zaro

proporsional bo‘lsa, uning qiymati nolga teng bo‘ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Isbot: 4-xossaga asosan λ proporsionallik koeffitsiyentini determinant belgisi oldiga umumiy ko‘paytuvchi sifatida chiqarish mumkin. Bu holda ikkita satri bir xil bo‘lgan determinant hosil bo‘ladi va uning qiymati, 3-xossaga asosan, nolga teng. Bundan berilgan determinantning ham qiymati nol ekanligi kelib chiqadi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & 8 \\ 3 & 7.5 & -4.5 \end{vmatrix} = 0,$$

chunki bu determinantda I va III satrlar proporsional va proporsionallik koeffitsiyenti λ=1.5 ga teng.

7-xossa. Agar determinantning biror i-satri ikkita qo‘shiluvchi yig‘indisidan iborat, ya’ni $a_{ij}+b_{ij}$ ko‘rinishda bo‘lsa, bu determinantni ikkita determinantlar yig‘indisi ko‘rinishida yozish mumkin. Bunda bu determinantlarning i-satri mos ravishda a_{ij} va b_{ij} elementlardan iborat bo‘lib, qolgan satrlari berilgan determinantniki singari bo‘ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Bu xossaning o‘rinli ekanligiga bevosita (2) formula orqali ishonch hosil qilish mumkin.

8-xossa. Agar $|A|$ determinantning a_{ii} diagonal elementlaridan yuqorida yoki pastda joylashgan barcha elementlari nolga teng bo‘lsa, uning qiymati diagonal elementlar ko‘paytmasiga teng bo‘ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

Isbot: Bu determinantlar uchun ularni (2) hisoblash formulasidagi $a_{11}a_{22}a_{33}$ qo‘shiluvchidan boshqa hamma qo‘shiluvchilari nolga teng bo‘ladi va shuning uchun ularning yig‘indisi, ya’ni determinantning qiymati shu ko‘paytmaga teng bo‘ladi.

Masalan, ushbu IV tartibli determinantni hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & 5 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 5\cdot 2\cdot(-1) = 30.$$

9-xossa. Diagonal matritsaning determinanti uning diagonal elementlari ko‘paytmasiga teng bo‘ladi.

Bu xossa isboti bevosita oldingi xossadan kelib chiqadi. Jumladan har qanday birlik matritsaning determinanti birga tengdir.

Navbatdagi xossani ifodalash uchun ikkita yangi tushuncha kiritamiz.

3-TA'RIF. Ixtiyoriy n-tartibli determinantning a_{ij} (i,j=1,2, … , n) elementining ***minori*** deb bu determinantdan shu element joylashgan i-satr va j-ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan (n–1)-tartibli determinant qiymatiga aytiladi.

Determinantning a_{ij} elementining minori M_{ij} deb belgilanadi va ularning soni n^2 ta bo'ladi. Masalan,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

determinantning II satr elementlarining minorlarini yozamiz va hisoblaymiz:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2.$$

Bunda III tartibli determinantning minorlari II tartibli determinantlar ekanligini yana bir marta ta'kidlab o'tamiz.

4-TA'RIF. Ixtiyoriy n-tartibli determinantning a_{ij} (i,j=1,2, … , n) elementining ***algebraik to'ldiruvchisi*** deb $(-1)^{i+j} M_{ij}$ kabi aniqlanadigan songa aytiladi.

Determinantning a_{ij} (i,j=1,2, … , n) elementining algebraik to'ldiruvchisi A_{ij} kabi belgilanadi va, ta'rifga asosan,

$$A_{ij} = \begin{cases} M_{ij}, & i+j \text{ - juft bo'lsa;} \\ -M_{ij}, & i+j \text{ - toq bo'lsa.} \end{cases}$$

formula bilan hisoblanadi. Masalan, (3) determinantning II satr elementlarining algebraik to'ldiruvchilari quyidagicha bo'ladi:

$$A_{21} = -M_{21} = 1, \quad A_{22} = M_{22} = 1, \quad A_{23} = -M_{23} = 2. \qquad (4)$$

10-xossa (Laplas teoremasi). Determinantning ixtiyoriy bir i-satrida joylashgan a_{ij} (j=1,2, … , n) elementlarini ularning A_{ij} (j=1,2, … , n) algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmalarining yig'indisi shu determinantning qiymatiga teng bo'ladi. bo'lsa

Isbot: Bu xossa III tartibli $|A|$ determinantning birinchi satri uchun quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = |A| \qquad (5)$$

Bu tenglikni isbotlash uchun algebraik to'ldiruvchi ta'rifidan va determinantlarni hisoblashning (1), (2) formulalaridan quyidagicha foydalanamiz:

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} = |A|.$$

Xuddi shunday tarzda determinantning ikkinchi va uchinchi satrlari uchun

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = |A|, \quad a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = |A| \qquad (6)$$

tengliklar o'rinli bo'lishi isbotlanadi

5-*<u>TA'RIF.</u>* Yuqoridagi (5) va (6) tengliklar determinantning ***satrlar bo'yicha yoyilmasi*** deb ataladi.

Shunga o'xshash determinantning ***ustunlar bo'yicha yoyilmasini*** ham quyidagicha yozish mumkin:

$$a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}=|A|, \qquad a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=|A|,$$
$$a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}=|A|. \qquad (7)$$

Masalan, yuqorida keltirilgan (3) determinant qiymatini uning II satrining (4) algebraik to'ldiruvchilari yordamida hisoblaymiz:

$$\Delta=2A_{21}+(-3)A_{22}+7A_{23}=2\cdot1+(-3)\cdot1+7\cdot2=13.$$

Laplas teoremasidan foydalanib yuqori tartibli determinantlarni hisoblash mumkin. Bunda n-tartibli determinantni hisoblash n ta (n–1) - tartibli determinantni (A_{ij} algebraik to'ldiruvchilarni) hisoblash va uning ixtiyoriy satr yoki ustuni bo'yicha yoyilmasidan foydalanishga keltiriladi. Jumladan, I tartibli determinant qiymati $|A|=|a_{11}|=a_{11}$ ekanligidan foydalanib, (1) va (2) formulalarni keltirib chiqarish mumkin. Determinant qiymatini Laplas teoremasi yordamida hisoblash uchun uning ixtiyoriy satr yoki ustun bo'yicha yoyilmasidan foydalanish mumkin. Ammo, amaliy nuqtai nazardan, ko'proq elementlari nolga teng bo'lgan satr yoki ustunni tanlash (agar shundaylar mavjud bo'lsa) maqsadga muvofiqdir. Bu holda nolga teng elementlarning algebraik to'ldiruvchilarini topishga hojat bo'lmaydi va hisoblashlar hajmi ancha kamayadi.

Misol. Ushbu IV tartibli determinantni hisoblang:

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -3 & 4 & 5\\ 1 & 0 & 2 & 10\\ 6 & 7 & 5 & -2\\ 3 & 0 & 9 & 1\end{vmatrix}$$

Yechish: Bu determinantni II ustun bo'yicha yoyilmasidan foydalanib hisoblash qulaydir. Bunga sabab shuki, bu ustunda nol elementlar boshqa satr va ustunlarga qaraganda ko'proq hamda a_{22}=0, a_{42}=0 elementlarning A_{22} , A_{42} algebraik to'ldiruvchilarini hisoblash shart emas.

Dastlab A_{12} va A_{32} algebraik to'ldiruvchilarni hisoblab, A_{12} =–389 va A_{32}=45 ekanligini aniqlaymiz. Endi determinant qiymatini II ustunga Laplas teoremasini tatbiq etib hisoblaymiz:

$$|A|=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}+a_{42}A_{42}=$$
$$=(-3)\cdot(-389)+0\cdot A_{22}+7\cdot45+0\cdot A_{42}=1482.$$

11-xossa. Agar $|A|$ determinantni biror i-satrining algebraik to'ldiruvchilari A_{ij} (j=1,2, … , n) va b_j (j=1,2, … , n) ixtiyoriy sonlar bo'lsa, unda

$$b_1A_{i1}+b_2A_{i2}+b_3A_{i3}+\cdots+b_nA_{in}=|B|$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bunda $|B|$ determinant $|A|$ determinantdan faqat i-satri bilan farq qilib, uning i-satri b_j (j=1,2, … , n) sonlardan tashkil topgan bo'ladi.

Isbot: Bu xossa isbotini III tartibli $|A|$ determinantning , masalan, birinchi satri uchun keltiramiz. Bu holda

$$b_1A_{11}+b_2A_{12}+b_3A_{13}=|B|$$

yig‘indining qo‘shiluvchilari $|A|$ determinantning birinchi satr bo‘yicha yoyilmasini ifodalovchi

$$a_1A_{11}+ a_2A_{12}+ a_3A_{13} =|A|$$

yig‘indi qo‘shiluvchilaridan faqat birinchi ko‘paytuvchilari, ya’ni birinchi satr elementlari bilan farq qiladi. Shu sababli $|A|$, $|B|$ determinantlar bir-biridan faqat birinchi satri bilan farq qiladi va $|B|$ determinantning birinchi satri b_1, b_2 va b_3 sonlardan iborat bo‘ladi.

Masalan, A_{11}, A_{12} va A_{13}

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \\ 9 & 12 & -4 \end{vmatrix}$$

determinantni birinchi satri elementlarining algebraik to‘ldiruvchilari bo‘lsa, unda

$$11A_{11} + 12A_{12} + 13A_{13} = |B| = \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 0 & 7 & 3 \\ 9 & 12 & -4 \end{vmatrix}.$$

12-xossa. Agar $|A|$ determinantni biror i-satrining a_{ij} (j=1,2, … , n) elementlari boshqa bir k-satr ($i \neq k$) mos elementlarining A_{kj} (j=1,2, … , n) algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytirilgan bo‘lsa, bu ko‘paytmalar yig‘indisi nolga teng bo‘ladi.

Isbot: Oldingi xossada $b_j= a_{ij}$ (j=1,2, … , n) deb olsak, unda

$$b_1A_{k1} + b_2A_{k2} + b_3A_{k3} + \cdots + b_nA_{kn} = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3} + \cdots + a_{in}A_{kn} = |B|$$

Bu yerda $|B|$ determinant berilgan $|A|$ determinantning k-satriga i-satrining a_{ij} elementlarini qo‘yish bilan hosil qilinadi. Shu sababli $|B|$ determinantning i-satri va k-satri bir xil bo‘lib, 3-xossaga asosan uning qiymati nolga teng bo‘ladi, ya’ni

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0, \quad i,k = 1,2,\cdots,n; \quad i \neq k. \quad (8)$$

13-xossa. Agar A va B bir xil tartibli kvadrat matritsalar bo‘lsa ularning ko‘paytmasining determinanti har birining determinantlari ko‘paytmasiga teng bo‘ladi, ya’ni $|A{\cdot}B|=|A|{\cdot}|B|$ tenglik o‘rinlidir.

Bu xossani isbotsiz keltiramiz.

Ko‘rib o‘tilgan bu xossalar determinantlarni hisoblash va ularning turli tatbiqlarida qo‘llaniladi.

XULOSA

Kvadrat matritsa elementlaridan ma’lum bir usulda hosil qilinadigan sonli ifoda uning determinanti deyiladi. Bu tushuncha matematikaning turli bo‘limlarida ko‘p qo‘llaniladi va natijalarni ixcham ko‘rinishda ifodalashga imkon beradi. II va III tartibli determinantlarning hisoblash formulalari nisbatan sodda, ammo yuqori tartibli determinantlar uchun ular juda murakkab ko‘rinishga ega. Shu sababli bunday determinantlar ularning algebraik to’ldiruvchilari va Laplas teoremasi yordamida quyi tartibli determinantlarga keltirish orqali hisoblanadi. Bundan tashqari bir qator hollarda determinantlarning qiymatlari ularning xossalaridan foydalanib topilishi mumkin. Birlik matritsa va kvadratik nol matritsalarning determinantlari mos ravishda 1 va 0 qiymatga ega.

Tayanch iboralar

Determinant * Determinantning elementi * Determinantning satri * Determinantning ustuni * Minor * Algebraik to‘ldiruvchi * Laplas teoremasi

Takrorlash uchun savollar

1. Determinant deyilganda nima tushuniladi?
2. II tartibli determinant qanday hisoblanadi?
3. III tartibli determinant uchburchak usulida qanday hisoblanadi?
4. III tartibli determinant Sarrius usulida qanday hisoblanadi?
5. Determinant va matritsa o‘rtasida qanday o‘xshashlik va farqlar bor?
6. Determinantda satr va ustunlar o‘zaro qanday xususiyatga ega?
7. Determinantda ikkita satr yoki ikkita ustun o‘rni almashtirilsa nima bo‘ladi?
8. Qaysi hollarda hisoblamasdan determinantning qiymati nol bo‘lishini aytish mumkin?
9. Determinant elementining minori deb nimaga aytiladi?
10. Determinant elementining algebraik to‘ldiruvchisi qanday aniqlanadi?
11. Determinantlar uchun Laplas teoremasi qanday ifodalanadi?
12. Laplas teoremasining ahamiyati nimadan iborat?
13. Matritsalar ko‘paytmasining determinanti qanday hisoblanishi mumkin?

Testlardan namunalar

1. Quyidagi |A| determinantning a_{12} va a_{32} elementlari yig‘indisini toping:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

A) 5; B) 2; C) 7; D) – 6; E) 6.

2. Quyidagi |A| determinantning diagonal elementlari yig‘indisini toping:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 0 & 9 & 5 \\ -2 & 6 & -10 \end{vmatrix}.$$

A) 14; B) 0; C) 20; D) –6; E) 4.

3. Quyidagi determinantni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

A) 14; B) –26; C) 26; D) –14; E) 0.

4. Ushbu determinantni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

A) 0; B) –12; C) 12; D) 2; E) 3.

5. Quyidagi tenglamani yeching:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A) x=7; B) $x = -1$; C) x=2; D) x=4; E) x=8 .

6. Tenglamani yeching: $\begin{vmatrix} 3 & x+1 \\ x & -21 \end{vmatrix} = 1$

A) x_1=4; x_2=1 ; B) x_1=–2; x_2=3 ; C) x_1=1; x_2=–1 ;
D) tenglama yechimga ega emas; E) tenglama cheksiz ko‘p yechimga ega.

7. Ushbu determinantni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

A) 1; B) 0; C) –2; D) 4; E) 12.

8. Ushbu determinantni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

A) 0; B) 12; C) 10; D) –10; E) –12.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. II tartibli determinantni hisoblang:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2n+1 & n+3 \\ n-2 & 2n+3 \end{vmatrix}.$$

2. III tartibli determinant qiymatini toping:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} n & n+1 & n+2 \\ 2n-1 & n+3 & n-4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Laplas teoremasi yordamida IV tartibli determinantni hisoblang:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} n & n+1 & n+2 & n+3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

§3. TESKARI MATRITSA. MATRITSANING RANGI

- ***Teskari matritsa .***
- ***Matritsaning rangi.***

3.1. Teskari matritsa. Biz matritsalar ustida qo‘shish, ayirish va ko‘paytirish amallarini ko‘rib o‘tgan edik. Matritsalar son tushunchasini umumlashtirishdan hosil qilinganligi haqida ham aytilgan edi. Sonlar uchun qo‘shish, ayirish va ko‘paytirish amallaridan tashqari bo‘lish amali ham mavjud. Bunda ikkita b va a ($a\neq 0$) sonlar bo‘linmasini quyidagi ko‘rinishda ifodalash mumkin:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{a}b = a^{-1}b.$$

Bundan ko‘rinadiki, bo‘lish amalini $a\neq 0$ songa teskari bo‘lgan a^{-1} son yordamida ko‘paytirish amali orqali ifodalash mumkin. Bunda ixtiyoriy $a\neq 0$ va unga teskari a^{-1} sonlar orasida $aa^{-1}=a^{-1}a=1$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. Bu tenglik faqat o‘zaro teskari sonlar uchun o‘rinlidir va shu sababli teskari sonni ta’rifi sifatida qabul qilinishi mumkin. Shu sababli bu tenglikdan berilgan A matritsaga teskari matritsa tushunchasini kiritish uchun foydalaniladi.

<u>1-TA’RIF:</u> Berilgan n- tartibli A kvadrat matritsaga ***teskari matritsa*** deb $AB=BA=E$ (E–n- tartibli birlik matritsa) shartni qanoatlantiruvchi n-tartibli B kvadrat matritsaga aytiladi.

Berilgan A matritsaga teskari matritsa A^{-1} kabi belgilanadi va, ta’rifga asosan, ular uchun $AA^{-1}= A^{-1}A=E$ munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Ma’lumki, ixtiyoriy $a\neq 0$ soni uchun a^{-1} teskari son mavjud va yagonadir. $a=0$ sonining esa teskarisi mavjud emas. Shu sababli matritsalar uchun quyidagi savollar paydo bo‘ladi:

1. Qanday matritsalar uchun ularning teskarisi mavjud?
2. Teskari matritsa yagonami va uni qanday topish mumkin?
3. Qanday matritsalarning teskarisi mavjud emas?

<u>2-TA’RIF:</u> Agar A matritsaning determinanti $|A|=0$ bo‘lsa u ***maxsus matritsa*** , aks holda, ya’ni $|A|\neq 0$ bo‘lsa ***maxsusmas matritsa*** deb ataladi.

Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 4\\ 2 & 5 & -1\\ 1 & 11 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 5 & -1\\ 3 & 6 & 1\end{pmatrix}$$

matritsalardan A maxsus (chunki $|A|=0$), B esa maxsusmas (chunki $|B|=19\neq 0$) matritsa bo‘ladi.

1-TEOREMA: Maxsus A matritsa uchun teskari A^{-1} matritsa mavjud emas.

Isbot: Teskarisini faraz qilamiz, ya’ni teskari A^{-1} matritsa mavjud deymiz. Ta’rifga asosan $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ va, teorema sharti bo‘yicha, $|A|=0$ tengliklar o‘rinlidir. Bu holda, determinantning oldin ko‘rib o‘tilgan 13-xossasiga asosan,

$$|E|=|A^{-1}A|=|A\,A^{-1}|=|A||A^{-1}|=0\cdot|A^{-1}|=0$$

natijani olamiz. Ammo E birlik matritsaning determinanti $|E|=1$ bo‘ladi. Hosil bo‘lgan bu ziddiyat bizning farazimiz noto‘g‘ri ekanligini ko‘rsatadi va maxsus matritsa uchun uning teskarisi mavjud emasligini ifodalaydi.

Berilgan n- tartibli

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

kvadrat matritsa determinantinig A_{ij} algebraik to‘ldiruvchilaridan tuzilgan ushbu

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}$$

matritsani kiritamiz.

3-TA’RIF: $\overline{A}$ berilgan A matritsaga ***birkitilgan matritsa*** deb ataladi.

Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 0 & 5 & -3\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad (1)$$

matritsa determinantining algebraik to‘ldiruvchilari

$A_{11}=5$, $A_{12}=-12$, $A_{13}=-20$, $A_{21}=3$, $A_{22}=-2$, $A_{23}=-12$,
$A_{31}=4$, $A_{32}=6$, $A_{33}=10$

bo‘lgani uchun unga birkitilgan matritsa quyidagicha bo‘ladi:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3 & 4\\ -12 & -2 & 6\\ -20 & -12 & 10\end{pmatrix}.\qquad (2)$$

2-TEOREMA: Agar A maxsusmas matritsa bo‘lsa unga teskari A^{-1} matritsa mavjud va u

$$A^{-1}=\frac{\overline{A}}{|A|}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

formula bilan topiladi.

Isbot: Dastlab

$$A\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

ko‘paytmani topamiz. Determinantlarning 10 va 12-xossalariga asosan

$$a_{i1}A_{1k}+a_{i2}A_{2k}+a_{i3}A_{3k}+\cdots a_{in}A_{nk}=\begin{cases} |A|, & i=k \\ 0, & i\neq k \end{cases}$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Bundan, matritsalar ko‘paytmasining ta’rifiga asosan,

$$A\overline{A}=\begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}$$

tenglikni hosil etamiz. Unda, matritsalarni songa ko‘paytirish amalining ta’rifi va xossalariga asosan,

$$A\frac{1}{|A|}\overline{A}=\frac{1}{|A|}A\overline{A}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=E$$

natijaga kelamiz. Shu tarzda

$$\frac{1}{|A|}\overline{A}A=E$$

tenglik ham o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatish mumkin. Bu yerdan, teskari matritsa ta’rifiga asosan, (3) tenglik o‘rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Misol sifatida yuqorida ko‘rilgan (1) matritsa uchun $|A|=26\neq 0$ ekanligidan va unga birkitilgan (2) matritsadan foydalanib, A^{-1} teskari matritsani topamiz:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\overline{A}=\frac{1}{26}\begin{pmatrix}5 & 3 & 4\\ -12 & -2 & 6\\ -20 & -12 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{26} & \frac{3}{26} & \frac{2}{13}\\ -\frac{6}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{3}{13}\\ -\frac{10}{13} & -\frac{6}{13} & \frac{5}{13}\end{pmatrix}.$$

3-TEOREMA: Maxsusmas A matritsa uchun A^{-1} teskari matritsa yagona ravishda aniqlanadi.

Isbot: Teskarisini faraz qilamiz. C va B matritsalar A matritsaga teskari va $C \neq B$ boʻlsin. Unda, teskari matritsa ta'rifiga asosan,

$$AC=CA=E\,, \qquad AB=BA=E$$

tengliklar oʻrinli boʻladi. Bu tengliklar va birlik matritsa xossasidan foydalanib, quyidagi natijalarni olamiz:

$$C=CE=CAB, \qquad B=BE=EB=CAB.$$

Bu ikkala tenglikning oʻng tomonlarini taqqoslab, $C=B$ natijaga kelamiz. Hosil boʻlgan bu ziddiyat farazimiz notoʻgʻri ekanligini koʻrsatadi va teskari matritsa yagona boʻladi.

Shunday qilib, A maxsusmas matritsa uchun A^{-1} teskari matritsa mavjud va u yagonadir.

Teskari matritsa tushunchasidan foydalanib bir xil tartibli A va B kvadrat matritsalarning boʻlinmasini $A^{-1}B$ ($|A|\neq 0$) koʻrinishda kiritish mumkin. Shuningdek A^{-1} teskari matritsani m marta oʻzaro koʻpaytirib, hosil boʻlgan matritsani A maxsusmas matritsaning $-m$- darajasi deb olishimiz va A^{-m} (m-ixtiyoriy natural son) kabi belgilashimiz mumkin. Bundan A^k daraja (A-maxsusmas matritsa) ixtiyoriy k butun son uchun (§1 ga qarang) aniqlangan boʻladi.

Teskari matritsalar quyidagi xossalarga ega:

1-xossa. $E^{-1}=E$.

Isbot: Bu xossa (3) teskari matritsani topish formulasidan bevosita kelib chiqadi.

2-xossa. $(A^{-1})^{-1}=A$.

Isbot: Bu xossa bevosita teskari matritsaning ta'rifidan, ya'ni $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ tenglikdan kelib chiqadi.

3-xossa. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

Isbot: Teskari matritsa ta'rifi va matritsalar koʻpaytmasining assosiativlik xossasiga asosan quyidagi tengliklarni olamiz:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E\,,$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}EB=B^{-1}B=E.$$

Bu tengliklardan AB va $B^{-1}A^{-1}$ oʻzaro teskari matritsalar ekanligi koʻrinadi.

4-xossa. $(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}$.

Isbot: Matritsalarni transponirlash amalining $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ va $E^{\mathrm{T}}=E$ xossalaridan foydalanib ushbu tengliklarga ega boʻlamiz:

$$A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{-1}A)^{\mathrm{T}}=E^{\mathrm{T}}=E, \quad (A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=(AA^{-1})^{\mathrm{T}}=E^{\mathrm{T}}=E.$$

Bu tengliklardan, teskari matritsa ta'rifiga asosan, $(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}$ ekanligi kelib chiqadi.

5-xossa. $|A^{-1}|=1/|A|=|A|^{-1}$.

Isbot: Matritsalar ko‘paytmasining determinanti uchun $|AB|=|A||B|$ formula va $|E|=1$ tenglik hamda teskari son ta’rifidan foydalanib, ushbu natijaga kelamiz:

$$\left|A^{-1}\right|\cdot|A|=\left|A^{-1}A\right|=|E|=1\Rightarrow\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}=|A|^{-1}.$$

3.2. Matritsaning rangi. Endi kelgusida kerak bo‘ladigan matritsa rangi tushunchasini kiritamiz. Dastlab oldin kvadrat matritsalar uchun aniqlangan minor tushunchasini ixtiyoriy to‘rtburchakli matritsa uchun umumlashtiramiz.

4-TA’RIF: Har qanday $A_{m\times n}$ matritsaning ixtiyoriy ravishda tanlangan k ta ($k\leq\min(m,n)$) satr va ustunlarining kesishmasida joylashgan elementlaridan tuzilgan k-tartibli determinant bu matritsaning ***k-tartibli minori*** deyiladi.

Masalan,

$$A_{4\times3}=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix}$$

matritsaning har bir elementi uning I tartibli ,

$$\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}-2 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 5\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\end{vmatrix}$$

kabi determinantlar II tartibli,

$$\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 5\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}3 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 5\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 5\end{vmatrix}$$

determinantlar esa berilgan matritsaning III tartibli minorlariga misol bo‘ladi.

5-TA’RIF: Berilgan A ***matritsaning rangi*** deb uning noldan farqli minorining eng katta tartibiga aytiladi.

Matritsaning rangi r(A) kabi belgilanadi va uni quyidagicha topish mumkin. Agar matritsaning barcha elementlari nolga teng, ya’ni u nol matritsa bo‘lsa, uning rangi r(A)=0 bo‘ladi. Matritsaning noldan farqli elementi mavjud bo‘lsa, uning rangi r(A)≥1 bo‘ladi. Bu noldan farqli elementni o‘z ichiga olgan barcha II tartibli minorlarni hisoblaymiz. Agar barcha II tartibli minorlar nolga teng bo‘lsa, unda r(A)=1 bo‘ladi. Aks holda r(A) ≥2 bo‘ladi va noldan farqli biror II tartibli minorni o‘z ichiga olgan barcha III tartibli minorlarni qaraymiz. Ularning hammasi nolga teng bo‘lsa r(A)=2, aks holda r(A) ≥2 bo‘ladi. Bu jarayonni shunday tarzda davom ettiramiz. Natijada, biror qadamda noldan farqli k-tartibli minorni o‘z ichiga oluvchi barcha (k+1)-tartibli minorlar nolga teng bo‘lgan holga kelamiz va bundan matritsaning rangi r(A)=k ekanligini topamiz.

Masalan,

$$A_{4\times 3}=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix}$$

matritsaning rangini aniqlaymiz. Bu matritsaning noldan farqli elementi mavjud va shu sababli r(A) ≥1. Endi noldan farqli ixtiyoriy bir, masalan a_{11}= –2 elementni, o‘z ichiga olgan va noldan farqli bo‘lgan II tartibli minor mavjud yoki yo‘qligini aniqlaymiz:

$$\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-2-9=-11\neq 0\,.$$

Demak, r(A) ≥2 bo‘ladi. Bu noldan farqli II tartibli minorni o‘z ichiga olgan ikkita III tartibli minorlarni qaraymiz:

$$\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\,,\qquad \begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 5\end{vmatrix}=0\,.$$

Bu yerdan ko‘rilayotgan matritsaning rangi r(A)=2 ekanligi kelib chiqadi.

Shuni ta’kidlab o‘tish lozimki, n-tartibli maxsusmas A matritsaning rangi r(A)=n bo‘ladi.

<u>6-TA’RIF:</u> Agar A matritsaning rangi r(A)=k bo‘lsa, uning noldan farqli ixtiyoriy bir k-tartibli minori ***bazis minor*** deb ataladi.

Masalan, yuqoridagi rangi r(A)=2 bo‘lgan $A_{4\times 3}$ matritsa uchun bazis minor sifatida ushbu II tartibli minorni olish mumkin:

$$M_2=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}.$$

XULOSA

Matritsalar algebrasida teskari matritsa tushunchasi teskari songa o‘xshash ko‘rinishda aniqlanadi. Bunda faqat determinanti noldan farqli bo‘lgan matritsalar uchun teskari matritsa mavjud bo‘ladi va yagona ravishda aniqlanadi. Teskari matritsani topish algoritmida algebraik to‘ldiruvchilarni hisoblash va transponirlash amalidan foydalaniladi. Matritsalarning tatbiqlarida uning rangi va bazis minorlari tushunchalari muhim ahamiyatga egadir.

<u>Tayanch iboralar</u>

Teskari matritsa * Maxsus matritsa * Maxsusmas matritsa * Birkitilgan matritsa * Matritsaning k-tartibli minori * Matritsa rangi * Bazis minor.

<u>Takrorlash uchun savollar</u>

1. Teskari matritsa qanday ta’riflanadi?
2. Qachon matritsa maxsus deb ataladi?

3. Qanday matritsa maxsusmas deyiladi?
4. Qaysi shartda teskari matritsa mavjud bo‘ladi?
5. Teskari matritsa yagonami ?
6. Birkitilgan matritsa deb nimaga aytiladi?
7. Teskari matritsa qanday topiladi?
8. Teskari matritsa qanday xossalarga ega?
9. Matritsaning *k*-tartibli minori qanday ta’riflanadi?
10. Matritsaning rangi deb nimaga aytiladi?
11. Matritsaning rangi qanday topiladi?
12. Bazis minor nima?

Testlardan namunalar

1. A va unga teskari A^{-1} matritsalar ko‘paytmasi uchun qaysi tasdiq o‘rinli?
   A) AA^{-1} faqat nollardan iborat matritsa bo‘ladi;
   B) AA^{-1} faqat birlardan iborat matritsa bo‘ladi;
   C) AA^{-1} diagonal elementlari 0, qolgan barcha elementlari 1 bo‘lgan matritsa bo‘ladi.
   D) AA^{-1} diagonal elementlari 1, qolgan barcha elementlari 0 bo‘lgan matritsa bo‘ladi.
   E) AA^{-1} ixtiyoriy kvadrat matritsa bo‘ladi.

2. Qaysi shartda A matritsa maxsus deyiladi ?
   A) $|A|<0$; B) $|A|>0$; C) $|A|\neq 0$; D) $|A|=0$; E) $|A|\leq 0$;

3. Qaysi shartda A matritsa maxsusmas deyiladi ?
   A) $|A|<0$; B) $|A|>0$; C) $|A|\neq 0$; D) $|A|=0$; E) $|A|\leq 0$;

4. Quyidagi matritsalardan qaysi biri maxsusmas?
   A) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; D) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; E) $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

5. Quyidagi matritsalardan qaysi biri maxsus?
   A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; D) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; E) $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$;

6. A va unga teskari A^{-1} matritsalar uchun quyidagi tengliklardan qaysi biri o‘rinli emas (E– birlik matritsa, O– nol matritsa)?
   A) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A$; B) $A \cdot A^{-1} = E$; C) $A^{-1} \cdot A = E$;
   D) $A A^{-1} - A^{-1} A = O$; E) $A - A^{-1} = O$.

7. Agar A kvadrat matritsaning determinanti Δ bo‘lsa, qaysi shartda A^{-1} teskari matritsa mavjud bo‘lmaydi?
   A) $\Delta=0$ B) $\Delta<0$ C) $\Delta>0$ D) $\Delta\neq 0$ E) Δ ixtiyoriy qiymatli.

8. $A_{m\times n}$ matritsaning rangi nimaga teng?
A) satrlar soni m ga; B) ustunlar soni n ga;
C) noldan farqli minorlar soniga; D) barcha elementlar soni mn ga.
E) noldan farqli minorlarning eng katta tartibiga;

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Berilgan A matritsa uchun teskari matritsa A^{-1} mavjudligini aniqlang. Agar teskari matritsa A^{-1} mavjud bo‘lsa, uni toping va $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$ tenglik o‘rinli bo‘lishini tekshiring:

$$A=\begin{pmatrix} n+1 & n & n-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2n & 2n-1 & 2n+1 \end{pmatrix}.$$

2. Berilgan $B_{3\times4}$ matritsaning rangini aniqlang:

$$B_{3\times4}=\begin{pmatrix} n & n+1 & n+2 & 4n+7 \\ n-2 & n-1 & n & 4n-1 \\ n+2 & n+3 & n+4 & 4n+15 \end{pmatrix}.$$

§4. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI.

- ***Chiziqli tenglamalar sistemasi va ularning yechimi.***
- ***Matritsalar usuli.***
- ***Kramer (determinantlar) usuli.***
- ***Gauss (noma’lumlarni yo‘qotish) usuli.***
- ***n noma’lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi.***
- ***Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi.***
- ***Chiziqli tenglamalar sistemasining iqtisodiy tatbiqlari.***
- ***Leont’evning tarmoqlararo balans modeli.***

4.1. Chiziqli tenglamalar sistemasi va ularning yechimi. Ko‘pgina amaliy, jumladan iqtisodiy, masalalar chiziqli tenglamalar sistemasi tushunchasiga olib keladi.

1-TA’RIF: *n* noma’lumli *m* ta ***chiziqli tenglamalar sistemasi*** deb quyidagi ko‘rinishdagi sistemaga aytiladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+a_{k3}x_3+\cdots+a_{kn}x_n=b_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Bu yerda a_{ij} va b_i (i=1,2, …, m; j=1,2, …, n) –berilgan va ixtiyoriy o'zgarmas sonlar bo'lib, a_{ij} sonlari (1) sistemaning ***koeffitsiyentlari***, b_i esa ***ozod hadlari*** deyiladi. Bu sistemada x_j (j=1, 2, … , n) noma'lumlar bo'lib, ularning qiymatlarini topish talab etiladi.

Yig'indi belgisi yordamida (1) sistemani qisqacha quyidagicha yozish mumkin:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\ , \quad i = 1, 2, \cdots, m\,. \qquad (2)$$

Endi (1) yoki (2) chiziqli tenglamalar sistemasining a_{ij} koeffitsiyentlaridan tuzilgan to'rtburchakli A matritsani , x_j noma'lumlar va b_i ozod hadlardan hosil qilingan X va B ustun matritsalarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Unda, matritsalarni ko'paytirish amalidan foydalanib, (1) sistemani ixcham va qulay bo'lgan quyidagi matritsaviy ko'rinishda yozish mumkin:

$$AX=B\,. \qquad (4)$$

<u>2-TA'RIF:</u> (1) yoki (2) chiziqli tenglamalar sistemaning ***yechimi*** deb shunday $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2$, …, $x_n=\alpha_n$ sonlarga aytiladiki, ular tenglamalar sistemasiga qo'yilganda har bir tenglama qanoatlantiriladi, ya'ni to'gri tenglikka aylanadi.

Sistemaning yechimlari

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}^T$$

ustun matritsa ko'rinishda yozilsa, u (4) matritsaviy tenglamani to'gri tenglikka aylantiradi. Bunda n-ta sondan tuzilgan X ustun matritsa sistemaning bitta yechimi bo'lib hisoblanadi.

Masalan,

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -6 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 32 \end{cases} \qquad (5)$$

n=3 noma'lumli m=2 ta tenglamalar sistemasi uchun x_1=1, x_2= –2 va x_3=5 yoki

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}^T$$

ustun matritsani tashkil etgan sonlar yechim bo'ladi. Haqiqatan ham bu sonlarni berilgan (5) sistema tenglamalariga qo'ysak,

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3\cdot 1 + 2\cdot(-2) - 5 \equiv -6 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 2\cdot 1 - 5\cdot(-2) + 4\cdot 5 \equiv 32 \end{cases}$$

to'gri tengliklarga ega bo'lamiz.

Sistemaning yechimini mavjudligini tekshirish va, yechim mavjud bo'lgan taqdirda, uni topish ***sistemani yechish*** deb ataladi.Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda uch hol bo'lishi mumkin.

1-hol. Sistema yechimga ega va bu yechim yagona. Masalan,

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = -14 \\ 2x_1 - 3x_2 = 19 \end{cases}$$

sistema uchun x_1=2 va x_2= –5 yagona yechim bo‘ladi.

2-hol. Sistema yechimga ega va bu yechim bittadan ortiq. Masalan, yuqoridagi (5) sistema uchun ko‘rsatilgan yechimdan tashqari x_1= –5, x_2=26 va x_3=43 ham yechim bo‘lishini bevosita tekshirish mumkin.

3-hol. Sistema yechimga ega emas. Masalan,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

sistema yechimga ega emas, chunki yig‘indisi bir paytning o‘zida ham 1, ham 0 bo‘ladigan sonlar mavjud emas.

<u>3-TA’RIF:</u> Agar chiziqli tenglamalar sistemasi hech bo‘lmaganda bitta yechimga ega bo‘lsa, u holda bu sistema ***birgalikda*** deyiladi; agar yechimga ega bo‘lmasa sistema ***birgalikda emas*** deyiladi. Birgalikdagi tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo‘lsa, u ***aniq*** deyiladi; bittadan ortiq yechimga ega bo‘lsa, u ***aniqmas*** tenglamalar sistemasi deyiladi.

Berilgan (1) tenglamalar sistemasini birgalikda yoki birgalikda emasligini aniqlash uchun uning koeffitsiyentlaridan tuzilgan (3) $m \times n$ tartibli A matritsaga B ozod hadlar ustunini birlashtirishdan hosil bo‘lgan $m\times(n+1)$ tartibli

$$A^b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad (6)$$

matritsani qaraymiz .

<u>4-TA’RIF:</u> A^b matritsa A matritsaning ***kengaytirilgani*** deb ataladi.

<u>KRONEKER-KAPELLI TEOREMASI:</u> (1) chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo‘lishi uchun uning matritsasi A va kengaytirilgan matritsa A^b ranglari o‘zaro teng, ya’ni r(A)=r(A^b)=r shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Bu teoremani isbotsiz qabul etamiz.

Birgalikda bo‘lgan chiziqli tenglamalar sistemasi uchun quyidagi tasdiqlar o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatish mumkin:

1. Agar birgalikdagi (1) sistema matritsasining rangi r(A) va unga kiruvchi noma’lumlar soni n o‘zaro teng, ya’ni r(A)=n bo‘lsa, unda bu sistema yagona yechimga ega, ya’ni aniq bo‘ladi.
2. Agar birgalikdagi (1) sistema matritsasining rangi r(A)<n bo‘lsa, bu sistema cheksiz ko‘p yechimga ega , ya’ni aniqmas bo‘ladi.

Kroniker-Kapelli teoremasi va yuqorida keltirilgan tasdiqlar (1) sistema yechimini mavjud yoki mavjud emasligi, ularning soni haqida xulosa chiqarishga imkon beradi, ammo sistemaning yechimini topish yo‘lini ko‘rsatmaydi. Shu sababli endi chiziqli tenglamalar sistemasini yechish masalasiga o‘tamiz.

Dastlab (1) sistemada $m=n$, ya'ni noma'lumlar va tenglamalar soni o'zaro teng hamda r(A)=n bo'lgan holni ko'ramiz. Bu shartlarda ko'rilayotgan sistema yagona yechimga ega bo'lib, uni yechishning turli usullari mavjud.

4.2. Matritsalar usuli. Bu usulda sistemaning matritsaviy ko'rinishda yozilgan (4) ifodasidan foydalaniladi. Bunda r(A)=n shartdan sistemaning n – tartibli A kvadrat matritsasi maxsusmas ekanligi kelib chiqadi, chunki matritsa rangi ta'rifiga asosan $\Delta=|A|\neq 0$ bo'ladi. Bu holda A matritsaga teskari matritsa A^{-1} mavjud va (4) matritsaviy tenglamaning ikkala tomonini unga chap tomondan ko'paytirish mumkin. Natijada, teskari matritsa ta'rifi va birlik matritsa xossasidan foydalanib, ushbu formulani hosil etamiz:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B. \qquad (7)$$

(4) matritsaviy ko'rinishdagi n noma'lumli chiziqli n ta tenglamalar sistemasi yechimini ifodalovchi (7) formula bir noma'lumli $ax=b$ ($a\neq 0$) chiziqli tenglamaning yechimini determinant $x=b/a=a^{-1}b$ formulaga o'xshash ekanligini ta'kidlab o'tamiz.

Misol: Ushbu tenglamalar sistemasini matritsa usulida yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

Yechish: Dastlab sistemaning A matritsasini yozib, uning determinantini hisoblaymiz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 43 \neq 0 .$$

Demak A matritsa maxsusmas, unga teskari matritsa mavjud va uni §3 dagi (3) formulaga asosan topamiz:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{43}\begin{pmatrix} 16 & 17 & -10 \\ -17 & -10 & 16 \\ 10 & -16 & 17 \end{pmatrix}.$$

Endi (7) formula bo'yicha noma'lumlardan tuzilgan X ustun matritsani aniqlaymiz:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{43}\begin{pmatrix} 16 & 17 & -10 \\ -17 & -10 & 16 \\ 10 & -16 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{43}\begin{pmatrix} 43 \\ -86 \\ 129 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Demak, sistemaning yagona yechimi $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$ bo'ladi.

Shunday qilib matritsalar usuli har qanday n noma'lumli n ta tenglamali aniq sistema yechimini oddiy va ixcham ko'rinishdagi (7) formula bilan ifodalash imkonini beradi. Bu formula nazariy tadqiqotlar uchun qulaydir, ammo n oshib borishi bilan uning amaliy tatbig'i murakkablashib boradi. Bunga sabab shuki, bu holda A^{-1} teskari matritsani topish uchun yuqori tartibli determinantlarni hisoblashga to'g'ri keladi.

4.3. Kramer (determinantlar) usuli. Matritsaviy ko‘rinishda (7) formula bilan ifodalanuvchi (1) sistema ($m=n$) yechimini teskari matritsa formulasidan foydalanib quyidagicha yozamiz:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=A^{-1}B=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{i1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{i2} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1k} & A_{2k} & \cdots & A_{ik} & \cdots & A_{nk} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{in} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1} \\ b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_nA_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_1A_{1k}+b_2A_{2k}+\cdots+b_nA_{nk} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\cdots+b_nA_{nn} \end{pmatrix}.$$

Bu yerdan sistemaning x_k (k=1, 2, …, n) yechimi uchun ushbu formulalar kelib chiqadi:

$$x_k=\frac{1}{\Delta}(b_1A_{1k}+b_2A_{2k}+\cdots+b_nA_{nk})=\frac{1}{\Delta}\Delta_k=\frac{\Delta_k}{\Delta},\ \ k=1,2,\cdots,n\,. \quad (8)$$

Bunda determinantning 11-xossasidan foydalanib, k=1, 2, …, n, uchun ushbu

$$b_1A_{1k}+b_2A_{2k}+\cdots+b_nA_{nk}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k-1} & b_2 & a_{2k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik-1} & b_i & a_{ik+1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\equiv\Delta_k$$

tengliklar o‘rinli bo‘lishidan foydalandik. (8) formulalarda (1) sistemaning a_{ij} koeffitsiyentlaridan tuzilgan

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

determinant sistemaning ***asosiy determinanti*,** uning k-ustunini ozod hadlar ustuni B bilan almashtirishdan hosil bo‘lgan Δ_k (k=1, 2, …, n) determinantlar esa ***yordamchi determinantlar*** deyiladi.

<u>5-TA’RIF:</u> (1) chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini asosiy va yordamchi determinantlar orqali ifodalovchi (8) tengliklar ***Kramer formulalari*** deb ataladi.

Kramer usulining afzalligi shundan iboratki, u orqali sistemaning ma’lum bir noma’lumlarini ham (masalan, faqat x_1 va x_2 noma’lumlarni) topish mumkin. Ammo bu usul ham n katta bo‘lganda yuqori tartibli determinantlarni hisoblashni taqozo etadi va shu sababli uni amalda qo‘llash katta qiyinchiliklar bilan bog‘liq.

Kramer formulalarini n=2 hol uchun yozamiz. Bunda (1) chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

asosiy va yordamchi determinantlar

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

va Kramer formulalari

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Shunga o‘xshash n=3 bo‘lganda sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases},$$

asosiy va yordamchi determinantlar

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

va Kramer formulalari

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Misol: Ushbu uch noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Yechish: Asosiy va yordamchi determinantlarni hosil etamiz va hisoblaymiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=18, \qquad \Delta_1=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&3&1\\0&1&-2\end{vmatrix}=-5,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&1&3\\2&0&1\\2&0&-2\end{vmatrix}=-1, \qquad \Delta_3=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&3&0\\2&1&0\end{vmatrix}=7 .$$

Kramer formulalariga asosan sistema yechimini topamiz:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-\frac{5}{18}, \quad x_{21}=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-\frac{1}{18}, \quad x_3=\frac{\Delta_{31}}{\Delta}=\frac{7}{18}.$$

Shuni yana bir marta ta’kidlab o‘tamizki, (1) sistema $n=m$ holda yagona yechimga ega, ya’ni birgalikda va aniq bo‘lishi uchun uning asosiy determinanti $\Delta\neq 0$ bo‘lishi kerak va bunda yechim matritsalar usulida (7), Kramer usulida esa (8) formulalar bilan topiladi.

Ko‘rsatish mumkinki, agar $n=m$ holda (1) sistemaning asosiy determinanti $\Delta=0$ bo‘lsa, unda quyidagi ikki hol bo‘ladi:

1) Barcha yordamchi determinantlar $\Delta_k=0$ ($k=1, 2, \ldots, n$) bo‘lsa, unda (1) sistema cheksiz ko‘p yechimga ega, ya'ni birgalikda va aniqmas bo‘ladi.

2) Agar yordamchi Δ_k ($k=1, 2, \ldots, n$) determinantlardan kamida bittasi noldan farqli bo‘lsa , unda (1) sistema yechimga ega emas, ya’ni birgalikda bo‘lmaydi.

Masalan,

$$\begin{cases}3x_1-5x_2=4\\6x_1-10x_2=8\end{cases}, \quad \begin{cases}3x_1-5x_2=4\\6x_1-10x_2=12\end{cases}$$

sistemalarning birinchisi uchun $\Delta=\Delta_1=\Delta_2=0$ va u $x_1=c$, $x_2=(3c-4)/5$ ko‘rinishdagi cheksiz ko‘p yechimga ega. Ikkinchi sistema uchun esa $\Delta=0$, ammo $\Delta_1=20\neq 0$ bo‘lgani uchun u yechimga ega emas. Haqiqatan ham sistemaning II tenglamasidan $3x_1-5x_2=6$ ekanligi kelib chiqadi va u sistemaning I tenglamasiga ziddir.

4.4. Gauss (noma’lumlarni yo‘qotish) usuli. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar yoki Kramer usulida yechishda bevosita berilgan (1) sistemaning o‘zi bilan ish ko‘riladi. Endi qaralayotgan Gauss usulida esa berilgan (1) sistema boshqa bir sistemaga keltiriladi shu sababli bizga quyidagi tushuncha kerak bo‘ladi.

6-TA’RIF: Agar ikkita chiziqli tenglamalar sistemalarining yechimlar to‘plami o‘zaro teng bo‘lsa, ular ***ekvivalent (teng kuchli) sistemalar*** deyiladi.

Masalan,

$$\begin{cases}4x_1-3x_2=-23\\x_1+2x_2=8\end{cases}, \quad \begin{cases}2x_1+x_2=1\\x_1+x_2=3\end{cases}$$

sistemalar ekvivalent , chunki ular bir xil $x_1=-2$, $x_2=5$ yechimga ega.

1-TEOREMA: Agar (1) sistemaning ikkita tenglamalari o‘rni o‘zaro almashtirilsa yoki ulardan biri ixtiyoriy λ songa ko‘paytirilib boshqa bir tenglamasiga qo‘shilsa, natijada berilgan sistemaga ekvivalent sistema hosil bo‘ladi.

Masalan,

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -3 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

sistemaning ikkinchi va uchinchi tenglamalarini o‘rnini almashtirish va hosil bo‘lgan sistemaning birinchi tenglamasini λ= –2 songa ko‘paytirib, uchinchi tenglamasiga qo‘shish natijasida hosil bo‘lgan quyidagi sistema berilgan sistemaga ekvivalent bo‘ladi:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ -11x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases}$$

Haqiqatan ham bu sistemalarni Kramer yoki matritsalar usulida yechib, ularning ikkalasini ham bir xil

$$x_1 = -\frac{11}{63}, \quad x_2 = \frac{25}{63}, \quad x_3 = -\frac{10}{63}$$

yechimga ega ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

Endi birgalikda va aniq bo‘lgan quyidagi n noma’lumli n ta chiziqli tenlamalar sistemasini Gauss usulida yechishga o‘tamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \cdots a_{kn}x_n = b_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (9)$$

1- qadam. (9) sistemada $a_{11}\neq 0$ deb olish mumkin, chunki bu shart bajarilmagan bo‘lsa , (9) sistemadagi tenglamalar o‘rnini almashtirish orqali unga erishish mumkin. Sistemaning 1-tenglamasini ikkala tomonini $-a_{k1}/\ a_{11}$ songa ko‘paytirib, uning k-tenglamasiga (k=2, 3, …, n) qo‘shamiz. Natijada hosil bo‘ladigan ekvivalent sistemaning k-tenglamasida noma’lum x_1 qatnashmaydi va u quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad a_{k2}^{(1)}x_2 + a_{k3}^{(1)}x_3 + \cdots a_{kn}^{(1)}x_n = b_k^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \cdots a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases} \qquad (9^{(1)})$$

2- qadam. Hosil bo‘lgan ($9^{(1)}$) sistemada yuqoridagi singari yana $a_{22}^{(1)} \neq 0$ deb olish mumkin. Bu sistemaning 2-tenglamasini ikkala tomonini $-a_{k2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ songa ko‘paytirib, uning k-tenglamasiga (k=3,4, …, n) qo‘shamiz. Natijada hosil bo‘ladigan ekvivalent sistemaning k-tenglamasida noma’lum x_2 qatnashmaydi va u quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \qquad\qquad a_{43}^{(2)}x_3 + \cdots a_{4n}^{(2)}x_n = b_4^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad a_{n3}^{(2)}x_3 + \cdots a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases} \qquad (9^{(2)})$$

***n*-qadam.** Yuqoridagi jarayonni ketma-ket n–1 marta takrorlab, quyidagi ko‘rinishdagi ekvivalent sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \qquad\qquad\quad a_{44}^{(3)}x_4 + \cdots a_{4n}^{(3)}x_n = b_4^{(3)} \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases} \qquad (9^{(n-1)})$$

Bu ***Gauss usulining to‘g‘ri yo‘li*** , uning natijasida hosil bo‘lgan ($9^{(n-1)}$) sistema ***uchburchakli*** deyiladi.

Endi ($9^{(n-1)}$) sistemaning oxirgi tenglamasidan x_n noma’lumning qiymati topamiz. So‘ngra x_n qiymati ($9^{(n-1)}$) yoki ($9^{(n-2)}$) sistemaning oxirgidan oldingi tenglamasiga qo‘yib, undan x_{n-1} noma’lumning qiymati aniqlaymiz. Shunday tarzda davom etib, birin-ketin x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, …, x_2, x_1 noma’lumlar qiymatlarini topamiz. Bu jarayon ***Gauss usulining teskari yo‘li*** deyiladi.

Gauss usulining matritsalar va Kramer usullaridan afzalliklari quyidagilardan iborat:

- Bu usul yuqori tartibli determinantlarni hisoblashni talab etmaydi va faqat arifmetik amallar orqali bajariladi;
- Bu usulni deyarli yuqorida ko‘rsatilgan ko‘rinishda amalga oshirib, ixtiyoriy chiziqli tenglamalar sistemasini, jumladan noaniq sistemalarni ham yechish mumkin;
- Bu usul sodda hisoblash algoritmiga ega bo‘lib, uni kompyuterda amalga oshirish oson.

Misol: Ushbu sistemani Gauss usulida yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

Yechish: Bu sistemadan noma'lumlarni birin-ketin yo'qotamiz.

1-qadam. Sistemaning ikkinchi va uchinchi tenglamalardan x_1 noma'lumni yo'qotamiz. Kasr sonlarga kelmaslik va bu orqali hisoblashlarni soddalashtirish maqsadida buni quyidagicha amalga oshiramiz. Dastlab 1-tenglamani ikkala tomonini –3 soniga, 2-tenglamani esa 2 soniga ko'paytirib, ularni o'zaro qo'shamiz. So'ngra 1-tenglamani ikkala tomonini –2 soniga ko'paytirib, hosil bo'lgan tenglamani 3-tenglamaga qo'shamiz. Natijada quyidagi ekvivalent sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 17x_2 - 16x_3 = -82 \\ 8x_2 - 5x_3 = -31 \end{cases}.$$

2-qadam. Oldingi qadamda hosil qilingan sistemaning 2-tenglamasini –8 soniga, 3-tenglamasini 17 soniga ko'paytirib o'zaro qo'shamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 17x_2 - 16x_3 = -82 \\ 43x_3 = 129 \end{cases}$$

Dastlab bu uchburchakli sistemaning 3- tenglamasidan $x_3=3$ ekanligini topamiz. So'ngra bu natijani sistemaning 2- tenglamasiga qo'yib, undan $x_2 = -2$ ekanligini aniqlaymiz. Yakuniy qadamda $x_2 = -2$ va $x_3 = 3$ natijalarni sistemaning 1-tenglamasiga qo'yib, undan $x_1 =1$ ekanligini topamiz. Demak berilgan sistemaning yagona yechimi $x_1 =1$, $x_2 = -2$ va $x_3 =3$ ekan.

4.5. n noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi. Endi (1) sistemani $m\neq n$ holda yechish masalasi ustida to'xtalib o'tamiz. Bunda doimo $m\leq n$, ya'ni tenglamalar soni noma'lumlar sonidan katta emas deb hisoblashimiz mumkin. Agar $m>n$ bo'lsa, unda noma'lumlarni yo'qotish usulidan quyidagicha foydalanib, $m\leq n$ holga kelamiz. 1-qadamda sistemaning ikkinchi va undan keyingi barcha tenglamalaridan x_1 noma'lumni yo'qotib, ularda faqat x_2, x_3, …, x_n noma'lumlar qatnashishiga erishamiz. 2-qadamda sistemaning uchinchi va undan keyingi barcha tenglamalaridan x_2 noma'lumni yo'qotib, ularda faqat x_3, x_4, …, x_n noma'lumlar qatnashishiga erishamiz. Bu jarayonni davom ettirib, $(n-1)$-qadamda n-tenglama va undan keyingi tenglamalarda faqat bitta x_n noma'lum qolishiga erishamiz. Navbatdagi qadamda n- tenglamadan foydalanib, $(n+1)$-tenglama va undan keyingi barcha tenglamalardan oxirgi x_n noma'lumni yo'qotamiz. Natijada bu tenglamalar o'rnida $0=b_k$ ($k=n+1$, $n+2$, …, m) ko'rinishidagi ifodalar paydo bo'ladi. Agar (1) sistema birgalikda, ya'ni yechimga ega bo'lsa, unda hamma b_k sonlar nollardan iborat bo'ladi va aksincha. Agar b_k sonlardan kamida bittasi noldan farqli bo'lsa, unda (1) sistema birgalikda emas, ya'ni yechimga ega bo'lmaydi. Ikkala holda ham sistemada qolgan tenglamalar soni n ga teng yoki undan kichik bo‘ladi, chunki qolgan tenglamalar orasida ham $0=b_k$ ko‘rinishdagi ifodalar bo‘lishi mumkin.

Misol sifatida m=4, n=3 bo‘lgan ushbu sistemani qaraymiz:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 10x_1 - 3x_2 \quad = 11 \\ 7x_1 - x_2 - x_3 = 6 \end{cases}.$$

Bu sistemaning 1-tenglamasidan foydalanib keyingi tenglamalaridan x_1 noma’lumni yo‘qotamiz:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 11x_2 - 10x_3 = -17 \\ 11x_2 - 10x_3 = -17 \\ 11x_2 - 10x_3 = -17 \end{cases}.$$

Hosil bo‘lgan sistemaning 2-tenglamasidan foydalanib keyingi tenglamalaridan x_2 noma’lumni yo‘qotamiz:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 11x_2 - 10x_3 = -17 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Demak berilgan sistema m=2, n=3 ($m<n$) bo‘lgan ushbu sistemaga ekvivalent ekan:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 11x_2 - 10x_3 = -17 \end{cases}.$$

Shunday qilib (1) sistemada $m \le n$ bo‘lsin. Bu sistema yechimga ega, ya’ni (3) va (6) matritsalarning ranglari teng va r(A)=r(A^b)=r bo‘lsin. Bunda r$\le m$ bo‘ladi. Agar r=m=n bo‘lsa, unda sistemaning asosiy determinanti $\Delta=|A|\neq 0$ bo‘ladi, ya’ni oldin ko‘rib o‘tilgan holga kelamiz va sistema yechimini matritsalar, Kramer yoki Gauss usullaridan birining yordamida topamiz.

Endi (1) sistema matritsasining rangi r(A)=r<n bo‘lgan holni ko‘ramiz (har doim r$\le m$ bo‘lishini eslatib o‘tamiz). Bunga oldin qaralmagan m=n, ammo $\Delta=|A|=0$ bo‘lgan hol ham kiradi. Bu holda matritsaning biror r-tartibli M bazis minorini (§3, 6-ta’rif) qaraymiz. (1) sistemaning koeffitsiyentlari shu bazis minorga kirgan r ta tenglamalarini qoldirib, qolgan m–r ta tenglamasini o‘chirib tashlaymiz. Bunga sabab shuki, bu m–r ta tenglamani qoldirilgan r ta tenglamalardan hosil qilish mumkin, ya’ni ular noma’lumlar to‘g‘risida yangi ma’lumot bermaydi. Qoldirilgan r ta tenglamalarni (1) sistemaning dastlabki r ta tenglamasi deb qarash mumkin (aks

holda sistemadagi tenglamalar o‘rnini almashtirish orqali bunga erishib bo‘ladi). Bu holda (1) sistemaga ekvivalent bo‘lgan ushbu sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r + a_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kr}x_r + a_{kr+1}x_{r+1} + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

Bu sistemaning tenglamalaridagi koeffitsiyentlari bazis minorga kirgan noma’lumli (ularni $x_1, x_2, \ldots, x_r$ deb olishimiz mumkin) qo‘shiluvchilarni o‘z joyida qoldirib, boshqa $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ noma’lumli qo‘shiluvchilarni tenglamalarni o‘ng tomoniga o‘tkazib, quyidagi sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - (a_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 - (a_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{2n}x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kr}x_r = b_k - (a_{kr+1}x_{r+1} + \cdots + a_{kn}x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r == b_m - (a_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n) \end{cases} \qquad (10)$$

(10) sistemadagi $x_1, x_2, \ldots, x_r$ noma’lumlar ***asosiy o‘zgaruvchilar***, qolgan n–r ta $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ noma’lumlar esa ***erkli o‘zgaruvchilar*** deb ataladi. Erkli o‘zgaruvchilarga ixtiyoriy bir $x_{r+1}=C_1$, $x_{r+2}=C_2$, …, $x_n=C_{n-r}$ qiymatlarni beramiz. Unda (10) $x_1, x_2, \ldots, x_r$ asosiy o‘zgaruvchilarga nisbatan r noma’lumli r ta chiziqli tenglamalar sistemasini ifodalaydi. Bu sistemaning asosiy determinanti M bazis minordan iborat bo‘lib, noldan farqlidir. Unda (10) sistema yagona yechimga ega bo‘lib, uni matritsalar yoki Kramer yoki Gauss usulida topish mumkin. Demak asosiy $x_1, x_2, \ldots, x_r$ o‘zgaruvchilarning qiymatlari $x_{r+1}=C_1$, $x_{r+2}=C_2$, …, $x_n=C_{n-r}$ erkli o‘zgaruvchilar qiymatlariga bog‘liq holda aniqlanadi, ya’ni

$$x_1 = x_1(C_1, C_2, \cdots, C_{n-r}), x_2 = x_2(C_1, C_2, \cdots, C_{n-r}), \cdots, x_r = x_r(C_1, C_2, \cdots, C_{n-r})$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Unda (1) yoki unga ekvivalent (10) sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lib, ular

$$X = (x_1 = x_1(C_1, C_2, \cdots, C_{n-r}) \quad \cdots \quad x_r = x_r(C_1, C_2, \cdots, C_{n-r}) \quad C_1 \quad \cdots \quad C_{n-r})^T$$

ustun matritsani tashkil etadi va sistemaning ***umumiy yechimi*** deyiladi. Bunda $C_1=0$, $C_2=0$, …, $C_{n-r}=0$ holga mos keladigan X ***bazis yechim*** deb ataladi.

Misol №1: Ushbu sistemani yeching:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 6 \\ 7x_1 + 12x_2 - 11x_3 = 9 \end{cases}$$

Yechish: Bu sistemada $m=n=3$ va uning asosiy determinanti

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 7 & 12 & -11 \end{vmatrix} = 0.$$

Bu sistema matritsasining rangi r(A)=2 bo‘lib, bazis minor sifatida, masalan, ushbu II tartibli minorni olish mumkin:

$$M = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -11 \neq 0 \quad .$$

Bu minorga sistemaning dastlabki ikkita tenglamalarini koeffitsiyentlari kirgan va shu sababli ularni qoldirib, 3-tenglamani o‘chirib tashlaymiz hamda x_3 erkli o‘zgaruvchini tenglamani o‘ng tomoniga o‘tkazamiz:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = x_3 + 7 \\ x_1 - 3x_2 = -4x_3 + 6 \end{cases}.$$

Oxirgi sistemada $x_3=C$ deb va Kramer usulidan foydalanib, berilgan sistemaning umumiy yechimini topamiz:

$$x_1 = -\frac{1}{11}(5C - 33), \quad x_2 = \frac{1}{11}(13C - 11), \quad x_3 = C.$$

Topilgan umumiy yechimda C=0 deb

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 0$$

bazis yechimga ega bo‘lamiz.

Misol №2: Ushbu sistemani tekshiring va uning umumiy hamda bazis yechimni toping:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

Yechish: Bu sistemada m=3 va n=4, ya’ni $m<n$. Bu sistemaning matritsasi va uning kengaytirilganini qaraymiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bu matritsalarning rangi r(A)= r(A^b)= r=2 ekanligini tekshirib ko‘rish mumkin. Demak bu sistema birgalikda va uning rangi noma’lumlar sonidan kichik, ya’ni r=2<4 bo‘lgani uchun bu sistema cheksiz ko‘p yechimga egadir. Bu sistemaning x_1 va x_2 noma’lumlari oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan determinant noldan farqli va shu sababli uni bazis minor, x_1 va x_2 noma’lumlarni esa asosiy o‘zgaruvchilar deb olish mumkin. Bundan tashqari sistema matritsasining rangi r=2 bo‘lgani uchun uning bir tenglamasini, masalan uchinchisini, o‘chirib tashlash mumkin. Asosiy o‘zgaruvchilarni hosil qilingan tenglamalar sistemasining chap tomonida qoldirib, qolgan x_3 va x_4 erkli o‘zgaruvchilarni tenglamalarning o‘ng tomoniga o‘tkazamiz:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+3x_4=-6 \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2=2x_3-3x_4-6 \\ 2x_1-x_2=-x_3+x_4+5 \end{cases}$$

Bu sistemada erkli o‘zgaruvchilarga ixtiyoriy $x_3=C_1$ va $x_4=C_2$ qiymatlar beramiz va uning umumiy yechimini Kramer usulida topamiz:

$$x_1=\frac{1}{5}(4-C_2)\,,\quad x_2=\frac{1}{5}(5C_1-7C_2-17)\,,\quad x_3=C_1\,,\quad x_4=C_2\ .$$

Bu yerda $C_1=0$, $C_2=0$ deb ushbu bazis yechimni hosil etamiz:

$$x_1=\frac{4}{5}\,,\quad x_2=-\frac{17}{5}\,,\quad x_3=0\,,\quad x_4=0\ .$$

Misol №3: Ushbu sistemani tekshiring:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+3x_4=-6 \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=5 \\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4=3 \end{cases}$$

Yechish: Bu sistemada m=3 va n=4, ya’ni $m<n$. Bu sistemaning matritsasi va uning kengaytirilganini qaraymiz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},\quad A^b=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bunda A matritsalarning rangi r(A)=2, kengaytirilgan matritsa rangi esa r(A^b)=3 bo‘ladi. Haqiqatan ham uning ushbu III tartibli minori

$$M=\begin{vmatrix} -2 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-14\neq 0\,.$$

Bundan r(A)≠r(A^b) ekanligini ko‘ramiz va shu sababli, Kroniker-Kapelli teoremasiga asosan, bu sistema birgalikda emas, ya’ni uning yechimi mavjud emas.

4.6. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi. Endi (1) n noma’lumli m ta tenglamalar sistemasining maxsus bir holini alohida ko‘rib o‘tamiz.

7-TA’RIF: Agar (1) chiziqli tenglamalar sistemaning o‘ng tomonidagi barcha ozod hadlar nolga teng bo‘lsa, u holda bu sistema ***bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi*** deyiladi.

Demak, n noma’lumli m ta bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \cdots + a_{kn}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi hamma vaqt birgalikdadir, chunki u hech bo‘lmaganda bitta $x_1=0, x_2=0, \ldots, x_n=0$ yechimga ega.

8-TA’RIF: (11) bir jinsli sistemaning yechimi faqat nollardan iborat bo‘lsa, u ***trivial yechim*** **,** aks holda, ya’ni sistemaning yechimi ichida kamida bitta noldan farqli son mavjud bo‘lsa, u ***notrivial yechim*** deb ataladi.

Kroniker-Kapelli teoremasidan quyidagi tasdiq bevosita kelib chiqadi.

2-TEOREMA: Agar (11) bir jinsli sistema determinantining rangi $r(A)=n$ bo‘lsa, bu sistema faqat trivial yechimga ega bo‘ladi. Bu sistema notrivial yechimga ega bo‘lishi uchun $r(A)=r<min(m,n)$ shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Masalan,

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 0 \\ x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 10x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

bir jinsli sistemalardan birinchisi faqat trivial yechimga ega (chunki $r(A)=2=n$), ikkinchisi uchun esa notrivial yechimlar ham mavjud (chunki $r(A)=2<n=3$).

2-teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi:

NATIJA: Bir jinsli (11) sistema $m=n$ holda notrivial yechimga ega bo‘lishi uchun uning asosiy determinanti $\Delta=0$ bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Agar (11) bir jinsli sistemaning notrivial yechimi mavjud bo‘lsa, u yuqorida ko‘rsatilgan asosiy va erkli o‘zgaruvchilarni tanlab olish orqali topiladi.

Misol №4: Ushbu bir jinsli sistemani tekshiring va uning notrivial yechimi mavjud bo‘lsa, bu yechimni toping:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Yechish: Bu sistema matritsasining rangi $r(A)=2 <n=4$. Demak uning notrivial yechimi mavjud. Asosiy o‘zgaruvchilar sifatida x_1 va x_2 , erkli o‘zgaruvchilar sifatida x_3 va x_4 noma’lumlarni tanlashimiz hamda sistemaning uchinchi tenglamasini o‘chirib tashlashimiz mumkin (Misol №2 yechimiga qarang) va natijada berilgan sistemaga ekvivalent bo‘lgan ushbu sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2x_3 - 3x_4 \\ 2x_1 - x_2 = -x_3 + x_4 \end{cases}.$$

Bu sistemada erkli o‘zgaruvchilarga ixtiyoriy $x_3=C_1$ va $x_4=C_2$ qiymatlar berib, x_1 va x_2 asosiy o‘zgaruvchilarni Kramer usulida topamiz:

$$x_1=-\frac{1}{5}C_2\,,\quad x_2=-\frac{1}{5}(5C_1-7C_2)\quad .$$

Demak, berilgan bir jinsli sistema cheksiz ko‘p notrivial yechimga ega va ular quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$x_1=-\frac{1}{5}C_2\,,\quad x_2=-\frac{1}{5}(5C_1-7C_2)\,,\quad x_3=C_1\,,\quad x_4=C_2\quad .$$

Bu yerda $C_1=C_2=0$ desak, trivial yechimga, qolgan hollarda esa notrivial yechimlarga ega bo‘lamiz. Masalan, $C_1=5$, $C_2=-10$ bo‘lganda sistemaning ushbu notrivial yechimi kelib chiqadi:

$$x_1=-1\,,\quad x_2=19\,,\quad x_3=5\,,\quad x_4=-10\ .$$

Bir jinsli (11) sistemaning $x_1=\kappa_1, x_2=\kappa_2, \ldots, x_n=\kappa_n$ yechimini $X=(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\ldots,\kappa_n)$ satr matritsa ko‘rinishda belgilaymiz. Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasining yechimlari quyidagi xossalarga ega bo‘lishini tekshirib ko‘rish mumkin:

1-xossa. Agar $X=(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\ldots,\kappa_n)$ bir jinsli (11) sistemasining yechimi bo‘lsa, u holda ixtiyoriy λ soni uchun

$$\lambda X=\lambda(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\ldots,\kappa_n)=(\lambda\kappa_1, \lambda\kappa_2, \lambda\kappa_3,\ldots, \lambda\kappa_n)$$

ham shu sistemaning yechimi bo‘ladi.

2-xossa. Agar $X_1=(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\ldots,\kappa_n)$ va $X_2=(l_1,l_2,l_3,\ldots,l_n)$ bir jinsli (11) sistemaning yechimlari bo‘lsa, u holda ixtiyoriy C_1 va C_2 sonlar uchun

$$X= C_1X_1+ C_2X_2 = (C_1\kappa_1+C_2l_1, C_1\kappa_2+C_2l_2,\ldots, C_1\kappa_n+C_2l_n)$$

ham (11) sistemaning yechimi bo‘ladi. Bunda $C_1X_1+ C_2X_2$ algebraik yig‘indi X_1 va X_2 yechimlarning ***chiziqli kombinatsiyasi*** deyiladi.

9-TA’RIF: (11) sistemaning qandaydir X_1, X_2, …, $X_к$ yechimlari ***chiziqli bog‘liqmas*** deyiladi, agarda

$$C_1X_1+C_2 X_2+ \ldots+C_к X_к=O$$

tenglik faqat va faqat $C_1=C_2=\ldots=C_к=0$ bo‘lganda bajarilsa. Aks holda bu yechimlar ***chiziqli bog‘liq*** deyiladi. Bu yerda $O=(0,0, \ldots,0)=O_{1\times n}$ –nol satr matritsani ifodalaydi.

Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi yechimlarining har qanday chiziqli kombinatsiyasi yana shu sistemaning yechimi bo‘lishi yuqoridagi xossalardan kelib chiqadi. Shuning uchun shunday chiziqli bog‘liq bo‘lmagan yechimlarni topish kerakki, ular orqali sistemaning barcha qolgan yechimlari chiziqli ifodalansin.

10-TA’RIF: Agar (11) bir jinsli tenglamalar sistemaning har qanday X yechimini qandaydir chiziqli bog‘liq bo‘lmagan X_1, X_2, …, $X_к$ yechimlarning chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida ifodalab bo‘lsa, unda X_1, X_2, …, $X_к$ ***fundamental yechimlar sistemasi*** deyiladi.

3-TEOREMA: Agar (11) chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasining matritsaning rangi $r(A)<n$ bo‘lsa, bu sistemaning har qanday fundamental yechimlar sistemasi n–r ta X_1, X_2, …, X_{n-r} yechimdan iborat bo‘ladi va umumiy yechim X ularning

$$X= C_1 X_1+C_2 X_2+ \ldots+C_{n-r} X_{n-r}$$

chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida bo‘ladi. Bu yerda C_1, C_2, …, C_{n-r} –ixtiyoriy o‘zgarmas sonlardan iboratdir.

Endi n noma'lumli m та chiziqli tenglamadan iborat bir jinsli bo'lmagan (1) va unga mos keluvchi bir jinsli (11) sistemalarning yechimlari orasidagi bog'lanishlarni ko'rib chiqamiz. Buning uchun ularning $AX=B$ va $AX=O$ matritsaviy yozuvlaridan foydalanamiz.

4-TEOREMA: Agar X_1 va X_2 bir jinsli bo'lmagan sistemaning ixtiyoriy ikkita yechimi bo'lsa, unda $X= X_1 - X_2$ bir jinsli sistemaning yechimi bo'ladi.

Isbot: Matritsalarning xossalari va $AX_1=B$, $AX_2=B$ tengliklarga asosan

$$AX=A(X_1 - X_2)= AX_1 - A X_2=B-B=O.$$

5-TEOREMA: Agar X_1 va X_0 mos ravishda bir jinsli bo'lmagan (1) va bir jinsli (11) sistemalarning yechimlari bo'lsa, unda $X= X_1 \pm X_0$ bir jinsli bo'lmagan (1) sistemaning yechimi bo'ladi.

Isbot: Matritsalarning xossalari va $AX_1=B$, $AX_0=O$ tengliklarga asosan

$$AX=A(X_1 \pm X_0)= AX_1 \pm A X_0=B-O=B.$$

Bu teoremalardan ko'rinadiki, bir jinsli bo'lmagan (1) sistemaning umumiy X yechimini topish uchun uning birorta xususiy X_1 yechimi bilan tegishli bir jinsli sistemaning umumiy X_0 yechimini bilish kifoya. Bu holda $X=X_1+X_0$ tenglik o'rinli bo'ladi. Keyinchalik bu tasdiq boshqa tur tenglamalar uchun ham o'rinli bo'lishini ko'ramiz.

4.7. Chiziqli tenglamalar sistemasining iqtisodiy tatbiqlari. **C**hiziqli tenglamalar sistemasi iqtisodiy masalalarni yechishda juda keng qo'llanishini aytib o'tgan edik. Masalan, xom ashyolardan foydalanishni eng katta foyda beradigan yo'lini topish, transportda yuk tashishni tashkil etishda eng kamk xarajatga erishish, chorvachilikda mollar ozuqasi ratsionini oqilona tuzish va hokazo. Bunday masalalarni o'rganish va yechish natijasida "Chiziqli dasturlash" deb ataladigan matematikaning yangi bir yo'nalishi yaratildi va unda chiziqli tenglamalar sistemasi ko'p ishlatiladi. Bunga misol sifatida ikkita masalani ko'ramiz.

1-masala. Qandolat firmasida holva, pecheniye va vafli ishlab chiqariladi. Bu mahsulotlarni tayyorlash uchun xom ashyo sifatida un, shakar va margarin yog'i ishlatiladi. Bir birlik mahsulot ishlab chiqarish uchun sarflanadigan xom ashyo normasi va sex omboridagi xom ashyolarning zaxirasi bo'yicha ma'lumotlar quyidagi jadvalda berilgan:

Xom ashyo turi	Bir birlik konditer mahsulotini tayyorlash uchun sarflanadigan xom ashyo normasi			Ombordagi xom ashyolar zaxirasi
	Holva	Pecheniye	Vafli	
Un	2	5	2	2350
Shakar	7	3	5	2750
Margarin	1	2	3	1400

Bu ma'lumotlar asosida xom ashyodan to'liq foydalanish maqsadida har bir konditer mahsulotining ishlab chiqarish hajmini toping.

Yechish: Holva, pecheniye va vaflining ishlab chiqarish hajmlarini mos ravishda x_1, x_2 va x_3 deb belgilaymiz. Jadvaldagi ma'lumotlar asosida uchala mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflanadigan har bir xom ashyo miqdorini topamiz va uni ombordagi zaxirasi bilan tenglashtiramiz. Natijada quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2350 \\ 7x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2750 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1400 \end{cases}$$

Bu chiziqli tenglamalar sistemasini yuqorida ko‘rib o‘tilgan usullardan biri yordamida yechib, x_1=100, x_2=350 va x_3=200 ekanligini topamiz. Demak, qandolat firmasida 200 birlik holva, 350 birlik pecheniye va 200 birlik vafli ishlab chiqarilsa xom ashyo to‘liq sarflanadi.

2-masala. Buxoro va Kogon paxta zavodlari Qorako‘l va G‘ijduvon to‘qimachilik korxonalariga momiq (paxta tolasi) yetkazib beradi. Buxoro va Kogon paxta zavodlari oy davomida mos ravishda 400 va 250 birlik momiq ishlab chiqaradi. Qorako‘l va G‘ijduvon to‘qimachilik korxonalari oy davomida mos ravishda 300 va 350 birlik momiq ishlatadi. Har bir paxta zavodidan har bir to‘qimachilik korxonasiga bir birlik momiqni yetkazishning transport xarajatlari pul birligida quyidagi jadvalda ko‘rsatilgan:

Paxta zavodi	Bir birlik momiqni transportda tashish xarajatlari (pul birligida)	
	G‘ijduvon to‘qimachilik korxonasi	Qorako‘l to‘qimachilik korxonasi
Buxoro	10	15
Kogon	8	20

Transport xarajatlari uchun 7500 pul birligi ajratilgan. Paxta zavodlaridan momiqni to‘qimachilik korxonalariga transportda tashishning oqilona rejasini toping.

Yechish: Buxoro va Kogon paxta zavodlaridan G‘ijduvon hamda Qorako‘l to‘qimachilik korxonalariga yetkaziladigan momiq hajmini mos ravishda x_1 va x_2 hamda x_3 va x_4 noma’lumlar kabi belgilaymiz. Bu holda, masala shartlariga asosan, izlanayotgan noma’lumlar uchun quyidagi tenglamalarni yozishimiz mumkin:

x_1+ x_3=400 (Buxoro paxta zavodi ishlab chiqargan momiq miqdori),
x_2+ x_4=250 (Kogon paxta zavodi ishlab chiqargan momiq miqdori),
x_1+ x_2=350 (G‘ijduvon to‘qimachilik korxonasi ishlatgan momiq miqdori),
x_3+ x_4=300 (Qorako‘l to‘qimachilik korxonasi ishlatgan momiq miqdori),
10x_1+8x_3 (G‘ijduvon to‘qimachilik korxonasiga momiq tashish xarajatlari),
15x_2+20x_4 (Qorako‘l to‘qimachilik korxonasiga momiq tashish xarajatlari),
10x_1+15x_2+8x_3+20x_4=7500 (umumiy transport xarajatlari).

Bu yerdan ushbu chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 400 \\ x_2 + x_4 = 250 \\ x_1 + x_2 = 350 \\ x_3 + x_4 = 300 \\ 15x_1 + 20x_2 + 8x_3 + 25x_4 = 7500 \end{cases}$$

Bu n=4 ta noma'lumli m=5 ta chiziqli tenglamadan iborat sistema bo'lib, uning matritsasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 15 & 20 & 8 & 25 \end{pmatrix}.$$

Bu matritsaning 2–4-satrlaridan tashkil topgan IV tartibli minorini Laplas teoremasi yordamida birinchi satr bo'yicha yoyib hisoblaymiz:

$$M_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 15 & 20 & 8 & 25 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 15 & 8 & 25 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 15 & 20 & 8 \end{vmatrix} = -17 - (-5) = -12 \neq 0.$$

Demak, r(A)=4=n va shu sababli bu sistema yagona yechimga ega. Gauss usulidan foydalanib sistemaning yechimi x_1=150, x_2 =200, x_3 =250 va x_4 =50 ekanligini topamiz. Bu yechimning iqtisodiy ma'nosini ifodalaymiz.

Buxoro paxta zavodi o'zi ishlab chiqargan 400 birlik momiqni x_1=150 birligini G'ijduvon, x_3 =250 birligini Qorako'l to'qimachilik korxonasiga jo'natadi.

Kogon paxta zavodi o'zi ishlab chiqargan 250 birlik momiqni x_2=200 birligini G'ijduvon, x_4 =50 birligini Qorako'l to'qimachilik korxonasiga jo'natadi.

Shunday va faqat shunday taqsimotda transport xarajatlari rejalashtirilgan 7500 pul birligini tashkil etadi.

4.8. Leont'evning tarmoqlararo balans modeli. Chiziqli tenglamalar sistemasini iqtisodiyotdagi nazariy tatbig'iga misol sifatida ko'p tarmoqli xalq xo'jaligining balans tahlilini ko'ramiz. Bu masalaning mohiyati quyidagicha. Xalq xo'jaligi n ta tarmoqdan iborat bo'lib, ularning har biri ishlab chiqaradigan mahsulot hajmini shunday rejalashtirish kerakki, bu mahsulotga bo'lgan barcha ehtiyoj to'liq qanoatlantirilsin. Bunda har bir tarmoq bir tomondan mahsulot ishlab chiqaruvchi, ikkinchi tomondan esa o'zi va boshqa tarmoqlar ishlab chiqargan mahsulot iste'molchisi sifatida qatnashadi.

Tarmoqlar orasidagi bunday munosabatlarning matematik modeli rus millatli amerikalik iqtisodchi olim V.Leont'ev (1905-1999 y.) tomonidan ishlab chiqilgan va bu yo'nalishdagi ishlari uchun u 1973 yilda Nobel mukofotiga sazovor bo'lgan.

V.Leont'evning tarmoqlararo balans modelining eng oddiy holini ko'rib chiqamiz. Xalq xo'jaligi n ta tarmoqdan iborat deб, x_i orqali i- tarmoqning

(i=1,2,…,n) bir yilda ishlab chiqargan yalpi mahsuloti hajmini, x_{ij} (i,j=1,2,…,n) orqali i- tarmoqda ishlab chiqarilgan yalpi mahsulotning j- tarmoq ehtiyojini qoplash uchun sarflanadigan hajmini va y_i orqali i-tarmoq mahsulotining ishlab chiqarishdan tashqari iste'mol (eksport, zaxira va hokazo) uchun sarflanadigan hajmini belgilaymiz. Bu ma'lumotlar asosida tarmoqlararo balans modeli quyidagicha tuziladi.

Ixtiyoriy i-tarmoqda ishlab chiqarilgan yalpi mahsulot hajmi x_i shu tarmoq mahsulotlarini n ta tarmoqlarda sarflangan x_{ij} hajmlari bilan shu tarmoqning ishlab chiqarishdan tashqari iste'molga sarflagan mahsulot hajmi y_i yig'indisiga teng bo'ladi, ya'ni

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i\,, \quad i, j = 1,2,...,n. \tag{12}$$

(12) tenglamalar ***balans munosabatlari*** deyiladi. Bu tenglamalarga kiruvchi barcha kattaliklar narx ko'rsatkichlarida ifodalangan deb olamiz. Albatta yuqorida kiritilgan va mahsulot hajmlarini ifodalovchi x_{ij} hamda x_i ko'rsatkichlar orasida o'zaro bog'lanishlar mavjud. Odatda j- mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflanadigan i-mahsulot hajmi x_{ij} shu j-mahsulotni ishlab chiqarish hajmiga bog'liq deb qaraladi, ya'ni ular orasidagi bog'lanishlar qandaydir $x_{ij}=f_{ij}(x_j)$ (i,j=1,2,…,n) ko'rinishida deb olinadi. Bu holda (12) balans munosabatlari

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x_j) + y_i\,, \quad i, j = 1,2,...,n. \tag{13}$$

ko'rinishga keladi. Eng sodda holda $f_{ij}(x_j)$ chiziqli bog'lanish, ya'ni $x_{ij} = a_{ij}x_j$ deb olinadi. Bunda a_{ij} (i,j=1,2,3,….,n) proporsionallik koeffitsiyentlari va ma'nosiga ko'ra $a_{ij} \geq 0$ bo'ladi. Bu koeffitsiyentlar j- tarmoqning bir birlik mahsulotini ishlab chiqarish uchun i-tarmoq mahsulotini sarflanadigan miqdorini ifodalaydi va ***bevosita sarflar koeffitsiyentlari*** deb ataladi. Bu holda (13) balans munosabatlari quyidagicha yoziladi:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i \;\; (i=1,2,\dots,n) \tag{14}$$

Ma'lum bir davr uchun a_{ij} (i,j=1,2,3,….,n) bevosita sarflar koeffitsiyentlarini o'zgarmas sonlar deb qarash mumkin. Unda (14) chiziqli tenglamalar sistemasidan iborat bo'ladi. Bu sistema ***tarmoqlararo balansning chiziqli yoki Leont'ev modeli*** deyiladi. Quyidagi matritsalarni kiritamiz:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Bunda X – ***yalpi ishlab chiqarish ustun matritsasi***, Y – ***yakuniy mahsulot ustun matritsasi***, A – ***bevosita sarflar matritsasi yoki texnologik matritsa*** deb ataladi. Bu matritsalarning elementlari iqtisodiy ma'nolariga asosan $a_{ij} \geq 0$, $x_i \geq 0$, $y_i \geq 0$ shartlarni qanoatlantirishi kerak. Bu holda (14) sistemani matritsaviy ko'rinishda

$$X=AX+Y \tag{15}$$

kabi ifodalanish mumkin. Tarmoqlararo balans masalasida bevosita sarflar matritsasi A ma'lum deb olinadi va Y yakuniy mahsulotni rejalashtirilgan hajmda ishlab chiqarishni ta'minlovchi yalpi ishlab chiqarish ustun matritsasi X ni topish qaraladi. Buning uchun (15) matritsaviy tenglamadan X quyidagicha topiladi:

$$X=AX+Y \Rightarrow X-AX=Y \Rightarrow (E-A)X=Y \Rightarrow X=(E-A)^{-1}Y. \qquad (16)$$

Bu yerda $E-A$ xosmas matritsa, ya'ni uning determinanti $|E-A|\neq 0$ deb olinadi.Unda $S=(E-A)^{-1}$ matritsa mavjud bo'ladi va u ***to'liq sarf matritsasi*** deyiladi. Bu matritsa s_{ij} elementlarining iqtisodiy mazmuni shundan iboratki, ular j-tarmoqda bir birlik yakuniy mahsulot ishlab chiqarish uchun i-tarmoqda yalpi ishlab chiqarish qancha bo'lishini ifodalaydi.

Kelgusida barcha elementlari nomanfiy sonlardan iborat bo'lgan C matritsani $C\geq O$ deb ifodalaymiz. Masalaning iqtisodiy mazmunidan (15) tenglamada $A\geq O$, $Y\geq O$ va $X\geq O$ bo'lishi kerak.

11-TA'RIF: Agar $A\geq O$ va ixtiyoriy $Y\geq O$ ustun matritsa uchun (15) tenglama $X\geq O$ ustun matritsadan iborat yechimga ega bo'lsa, unda A ***samarali matritsa***, Leont'ev modeli esa ***samarali model*** deb ataladi.

Matritsaning samaradorligi tarmoqlararo balans masalasini yechish uchun zarur va shu sababli quyidagi isbotsiz keltiriladigan teorema juda katta ahamiyatga ega.

TEOREMA: Agar $A\geq O$ matritsaning barcha ustunlari bo'yicha elementlar yig'indilarining maksimumi birdan katta bo'lmasa va kamida bitta ustun uchun bu yig'indi birdan kichik bo'lsa, A matritsa samarador bo'ladi.

Ko'rib o'tilgan nazariy ma'lumotlarni ushbu masalani yechishga tatbiq etamiz.

Masala: Xalq xo'jaligining ikkita tarmoqlari uchun hisobot davrida balansni bajarilishi bo'yicha ma'lumotlar shartli pul birligida quyidagi jadval ko'rinishida berilgan:

TARMOQ	ISTE'MOL		Yakuniy mahsulot	Yalpi mahsulot
	Oziq-ovqat sanoati	Qishloq xo'jaligi		
Oziq-ovqat sanoati	150	200	300	600
Qishloq xo'jaligi	300	100	120	500

Oziq-ovqat sanoati va qishloq xo'jaligi yakuniy mahsulotlarining hajmlari mos ravishda 40% va 1,5 marta oshishi uchun ularni har birining yalpi mahsuloti hajmlari qanday bo'lishi kerakligini toping.

Yechish: Oziq-ovqat sanoati mahsulotlarini o'ziga va qishloq xo'jaligiga taqsimoti $x_{11}=150$ va $x_{12}=200$, qishloq xo'jaligi mahsulotlarini oziq-ovqat sanoatida va o'zida ishlatilishi $x_{21}=300$ va $x_{22}=100$ ko'rsatkichlar orqali ifodalangan.Bu tarmoqlar bo'yicha yalpi mahsulot mos ravishda $x_1=600$ va $x_2=500$. Bu ma'lumotlar asosida bevosita sarflar koeffitsiyentlarini

$$a_{ij}=\frac{x_{ij}}{x_j}$$

formula orqali topamiz:

$$a_{11}=\frac{x_{11}}{x_1}=\frac{150}{600}=0{,}25; \qquad a_{12}=\frac{x_{12}}{x_2}=\frac{200}{500}=0{,}4;$$

$$a_{21}=\frac{x_{21}}{x_1}=\frac{300}{600}=0{,}5; \qquad a_{22}=\frac{x_{22}}{x_2}=\frac{100}{500}=0{,}2.$$

Demak , texnologik matritsa quyidagi ko‘rinishda ekan:

$$A=\begin{pmatrix}0{,}25 & 0{,}4\\ 0{,}5 & 0{,}2\end{pmatrix}.$$

Bu matritsaning barcha elementlari musbat,ya’ni A>O va ustun elementlari yig‘indisi

$$a_{11}+a_{21}=0{,}25+0{,}5=0{,}75<1, \qquad a_{12}+a_{22}=0{,}4+0{,}2=0{,}6<1.$$

Demak, A texnologik matritsa samarali ekan. Endi, teskari matritsani topish formulasidan foydalanib (§3, 3-formulaga qarang), S to‘liq sarf matritsasini topamiz:

$$E-A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}25 & 0{,}4\\ 0{,}5 & 0{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}75 & -0{,}6\\ -0{,}5 & 0{,}8\end{pmatrix}; \quad |E-A|=\begin{vmatrix}0{,}75 & -0{,}6\\ -0{,}5 & 0{,}8\end{vmatrix}=0{,}3;$$

$$S=(E-A)^{-1}=\frac{1}{|E-A|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\frac{1}{0{,}3}\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}6\\ 0{,}5 & 0{,}75\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{3} & 2\\ \frac{5}{3} & \frac{5}{2}\end{pmatrix}.$$

Masala shartiga ko‘ra oziq-ovqat sanoati yakuniy mahsuloti hajmi 40% o‘sishi kerak, ya’ni y_1=300·1,4=420 , qishloq xo‘jaligi yakuniy mahsuloti esa 1,5 marta ko‘payishi, ya’ni y_2=120·1,5=180 bo‘lisi kerak. Unda izlangan yalpi ishlab chiqarish ustun matritsasini (16) formula orqali topamiz:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=X=SY=(E-A)^{-1}Y=\begin{pmatrix}\frac{8}{3} & 2\\ \frac{5}{3} & \frac{5}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}420\\ 180\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1480\\ 1150\end{pmatrix}.$$

Demak, masalada qo‘yilgan rejani amalga oshirish uchun oziq-ovqat sanoati va qishloq xo‘jaligi yalpi mahsulot hajmini mos ravishda 1480 va 1150 shartli birlikka yetkazish kerak bo‘ladi.

XULOSA

Chiziqli tenglamalar sistemasi matematikaning iqtisodiy masalalarni yechishda eng ko‘p qo‘llaniladigan tushunchalaridan biri bo‘lib hisoblanadi. Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi mavjud va yagona, mavjud va cheksiz ko‘p hamda mavjud bo‘lmasligi mumkin. Chiziqli tenglamalar sistemasini umumiy holda yechish usullari ishlab chiqilgan. Bunda oldin ko‘rib o‘tilgan matritsa va determinantlar tushunchalari muhim ahamiyatga ega bo‘ladi. Sistema yechimining mavjudligi yoki mavjud emasligi, yagona yoki cheksiz ko‘pligi matritsalarning rangi yordamida aniqlanadi. Shuningdek bu yerda bir jinsli tenglamalar sistemasi va uning notrivial yechimi mavjudligi masalalari ham qaralgan.

Chiziqli tenglamalar sistemasining iqtisodiy tatbig‘iga misol sifatida Leont’evning tarmoqlararo balans modelini ko‘rsatish mumkin.

Tayanch iboralar

* Chiziqli tenglamalar sistemasi * Sistema koeffitsiyentlari * Sistema ozod hadlari* Sistema yechimi * Birgalikda bo‘lgan sistema * Birgalikda bo‘lmagan sistema* Aniq sistema * Aniqmas sistema * Kengaytirilgan matritsa *Kroniker-Kapelli teoremasi * Matritsalar usuli * Kramer usuli * Asosiy determinant * Yordamchi determinantlar *Kramer formulalari * Ekvivalent sistemalar * Gauss usuli* Gauss usulining to‘g‘ri yo‘li * Gauss usulining teskari yo‘li * Asosiy o‘zgaruvchilar * Erkli o‘zgaruvchilar * Umumiy yechim * Bazis yechim * Bir jinsli sistema * Trivial yechim * Notrivial yechim * Chiziqli bog‘liqmas yechimlar * Chiziqli bog‘liq yechimlar * Fundamental yechimlar * Balans munosabatlari * Tarmoqlararo balansning Leont’ev modeli * Samarali matritsa

Takrorlash uchun savollar

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
2. Sistemaning koeffitsiyentlari, noma’lumlari va ozod hadlari deb nimaga aytiladi?
3. Sistemaning yechimlari qanday ta’riflanadi?
4. Qachon sistema birgalikda yoki birgalikda emas deyiladi?
5. Qachon sistema aniq va qachon aniqmas deyiladi?
6. Kroniker-Kapelli teoremasi nimani ifodalaydi?
7. Qaysi shartda chiziqli tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega?
8. Qaysi shartda chiziqli tenglamalar sistemasi cheksiz ko‘p yechimga ega?
9. Chiziqli tenglamalar sistemasi matritsa ko‘rinishda qanday yoziladi?
10. Sistema matritsa usulida qanday yechiladi?
11. Matritsalar usulining qanday qulayliklari va kamchiliklari bor?
12. Sistemani Kramer usulida yechishning mohiyati nimadan iborat?
13. Sistemaning asosiy determinanti deb nimaga aytiladi?
14. Sistemaning yordamchi determinantlari qanday hosil qilinadi?
15. Sistema yechimi uchun Kramer formulalari qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
16. Qachon tenglamalar sistemasi ekvivalent deyiladi?
17. Gauss usulining mohiyati nimadan iborat?
18. Gauss usulining to‘g‘ri yolida nimaga erishiladi?
19. Gauss usulining teskari yolida nimaga erishiladi?
20. Sistemaning asosiy o‘zgaruvchilari deb nimaga aytiladi?
21. Sistemaning erkli o‘zgaruvchilari deb nimaga aytiladi?
22. Qanday yechim bazis yechim deb ataladi?
23. Qachon chiziqli sistema bir jinsli deyiladi?
24. Trivial va notrivial yechimlar qanday ta’riflanadi?
25. Qaysi shartda bir jinsli sistema notrivial yechimga ega ?
26. Bir jinsli sistema yechimlari qanday xossalarga ega?
27. Fundamental yechimlar sistemasi qanday ta’riflanadi?
28. Fundamental yechimlar soni qanday topiladi?

29.Chiziqli tenglamalar sistemasining qanday iqtisodiy tatbiqlarini bilasiz?
30.Tarmoqlararo balans munosabatlari qanday aniqlanadi?
31.Leont’ev modeli nimani ifodalaydi?
32. Qanday matritsa samarali deyiladi?
33.Qaysi shartda matritsa samarali bo‘ladi?

Testlardan namunalar

1. Quyidagi sistemalardan qaysi biri chiziqli tenglamalar sistemasini ifodalaydi?

A) $\begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 = b_1 \\ a_{21}x_1^2 + a_{22}x_2^2 = b_2 \end{cases}$; B) $\begin{cases} \dfrac{a_{11}}{x_1} + \dfrac{a_{12}}{x_2} = b_1 \\ \dfrac{a_{21}}{x_1} + \dfrac{a_{22}}{x_2} = b_2 \end{cases}$; C) $\begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$;

D) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1^2 + a_{22}x_2^2 = b_2 \end{cases}$; E) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$;

2. Ushbu chiziqli tenglamalar sistemasi koeffitsiyentlarining yig‘indisini toping:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

A) 10 ; B) 0; C) 5 ; D) 15; E) to‘g‘ri javob yo‘q.

3. Ta’rifni to‘ldiring: α, β va γ sonlarga uch noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi deyiladi, agarda ular sistemaning …… tenglamalarini ayniyatga aylantirsa.
A) birinchi; B) ikkinchi; C) birorta; D) kamida bitta; E) uchala.

4. Qachon chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda deb ataladi?
A) yechimga ega bo‘lmasa; B) kamida bitta yechimga ega bo‘lsa;
C) yagona yechimga ega bo‘lsa; D) cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lsa;
E) keltirilgan barcha hollarda.

5. Tenglamalar sistemasini yeching va $x_1^2 + x_2^2$ ifodaning qiymatini aniqlang:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases}$$

A) 5; B) 1; C) 4; D) 2; E) 3.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Ushbu ikki noma’lumli tenglamalar sistemasini matritsalar usulida yeching:

$$\begin{cases} nx_1 + (n+1)x_2 = n+2 \\ (n-1)x_1 + (n+3)x_2 = n-2 \end{cases}.$$

2. Ushbu uch noma’lumli tenglamalar sistemasini Kramer (determinantlar) usulida yeching:

$$\begin{cases} nx_1 + (n+1)x_2 + (n+2)x_3 = 1 \\ (n-2)x_1 + (n-1)x_2 + nx_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = n \end{cases}.$$

3. Ushbu to‘rt noma’lumli tenglamalar sistemasini Gauss (noma’lumlarni yo‘qotish) usulida yeching:

$$\begin{cases} nx_1 + (n-1)x_2 + (n+2)x_3 + (2-n)x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 = n \\ (n+3)x_1 + (n-2)x_2 + nx_3 + (1-2n)x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 = n+1 \end{cases}.$$

III BOB. VEKTORLAR ALGEBRASI VA FAZOLARI

XVII–XVIII asr matematiklarining
geometrik masalalarga bog‘liq ishlarida
sonlar hisobiga o‘xshash va koordinatalar
sistemasi bilan bog‘liq geometrik hisobga
ehtiyoj paydo bo‘ldi. Bu ehtiyoj g‘oyalari
XVIII asr oxirida Karno tomonidan kiritilgan
vektorial algebra orqali qondirildi.
V.G. Petrova

§1. VEKTORLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR.

- ***Vektorlar va ular bilan bog‘liq tushunchalar.***
- ***Vektorlar ustida amallar.***
- ***Vektorlarning koordinatalari.***

1.1. Vektorlar va ular bilan bog‘liq tushunchalar. Hayotda uchraydigan harorat, bajarilgan ish, ish haqi, jismning massasi, ishlab chiqarish hajmi, tovarning narxi, partiyadagi mahsulotlar soni kabi kattaliklar ularni ifodalovchi sonli qiymatlar orqali to‘liq aniqlanadi.

1-TA’RIF: Sonli qiymatlari bilan to‘liq aniqlanadigan kattaliklar ***skalyarlar*** deb ataladi.

“Skalyar” atamasi lotin tilidagi “scala” so‘zidan olingan bo‘lib, “pog‘ona” degan ma’noni ifodalaydi. Skalyarlar $a, b, c, \ldots$ kabi harflar bilan belgilanadi.

Kuch, kuch momenti, tezlik, tezlanish, bosim, siljish, elektr maydonining kuchlanishi, oqim kabi kattaliklarni aniqlash uchun ularning sonli qiymatlaridan tashqari yo‘nalishlarini ham ko‘rsatish zarurdir.

2-TA’RIF: Ham sonli qiymati, ham yo‘nalishi bilan aniqlanadigan kattaliklar ***vektorlar*** deyiladi.

“Vektor” lotincha ”vehere” so‘zidan olingan va “yo‘llovchi” ma’nosiga ega. Vektorlar $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \cdots$ yoki $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots$ kabi belgilanadi.

3-TA’RIF: Har qanday $\boldsymbol{a}$ vektorning sonli qiymati uning ***moduli*** yoki ***uzunligi*** deb ataladi va $|\boldsymbol{a}|$ kabi belgilanadi.

Geometrik nuqtai-nazardan vektorlar yo‘naltirilgan kesmalar singari qaraladi. Boshi A va oxiri B nuqtada bo‘lgan yo‘naltirilgan kesma bilan aniqlanadigan vektor $\overrightarrow{AB}$ kabi belgilanadi. Bunda A nuqta ***vektorning boshi***, B nuqta esa ***vektorning uchi*** deyiladi. Bu yerda AB kesma uzunligi vektor modulini ifodalaydi, ya’ni $|AB|=|\overrightarrow{AB}|$ bo‘ladi.

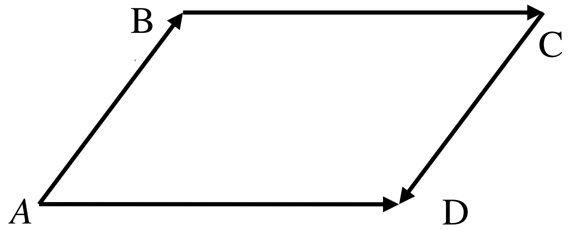
4-TA’RIF: Boshi va uchi bitta nuqtadan iborat bo‘lgan vektor ***nol vektor*** deyiladi.

Nol vektor $\mathbf{0}$ kabi belgilanib, uning moduli $|\mathbf{0}|=0$ bo‘ladi. Nol vektorning yo‘nalishi to‘g‘risida so‘z yuritib bo‘lmaydi.

5-TA'RIF: Bir to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda joylashgan vektorlar ***kollinear vektorlar*** deb ataladi.

Kelgusida ***a*** va ***b*** vektorlarning kollinear ekanligini ***a***||***b*** kabi belgilaymiz.

Masalan, *ABCD* parallelogramm bo'lsa (9-rasmga qarang), unda



9-rasm

$\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$ va $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, ammo $\overrightarrow{AD}$ va $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ va $\overrightarrow{CD}$ vektorlar kolllinear bo'lmaydi.

Izoh. Nol vektor **0** har qanday ***a*** vektorga kollinear deb hisoblanadi.

6-TA'RIF: Quyidagi uchta shartlar bajarilganda ***a*** va ***b*** ***teng vektorlar*** deyiladi:

1. ***a***||***b*** , ya'ni bu vektorlar kollinear;
2. |***a***|=|***b***|, ya'ni bu vektorlar bir xil uzunlikka ega;
3. ***a*** va ***b*** vektorlar bir xil yo'nalishga ega.

Agar ***a*** va ***b*** teng vektorlar bo'lsa, ***a=b*** deb yoziladi. Masalan, yuqoridagi *ABCD* parallelogrammda $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ bo'ladi. Bu yerdan vektorlarni parallel ko'chirish mumkinligi kelib chiqadi.

7-TA'RIF: Bitta yoki parallel tekisliklarda joylashgan uch va undan ortiq vektorlar ***komplanar*** deyiladi.

Masalan, uchburchakning turli tomonlarida joylashgan vektorlar komplanar bo'ladi.

1.2. Vektorlar ustida amallar. Endi vektorlar ustida arifmetik amallar kiritamiz.

8-TA'RIF: ***a*** vektorni λ songa (skalyarga) ko'paytmasi deb quyidagi uchta shart bilan aniqlanadigan yangi bir ***c*** vektorga aytiladi:

1. |***c***|= |λ||***a***|, ya'ni ***a*** vektorning uzunligi $|\lambda|$ marta o'zgaradi;
2. ***c*** || ***a***, ya'ni bu vektorlar kollinear;
3. λ>0 bo'lsa ***c*** va ***a*** bir xil yo'nalgan, λ<0 bo'lsa ***c*** va ***a*** qarama-qarshi yo'nalgan.

a vektorni λ songa ko'paytmasi λ***a*** kabi belgilanadi. Masalan, *ABCD* trapetsiya bo'lib, uning *AD* va *BC* asoslarining uzunliklari |*AD*|=8 va |*BC*|=4 bo'lsa, unda $\overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{BC}$ va $\overrightarrow{AD} = -2\,\overrightarrow{CB}$ tengliklar o'rinli bo'ladi.

Vektorlarni songa ko'paytirish amali quyidagi xossalarga ega:

1. λ(β***a***)=β(λ***a***) 2. (λ±β)***a***=λ ***a*** ±β ***a*** 3. 0· ***a***=**0**.

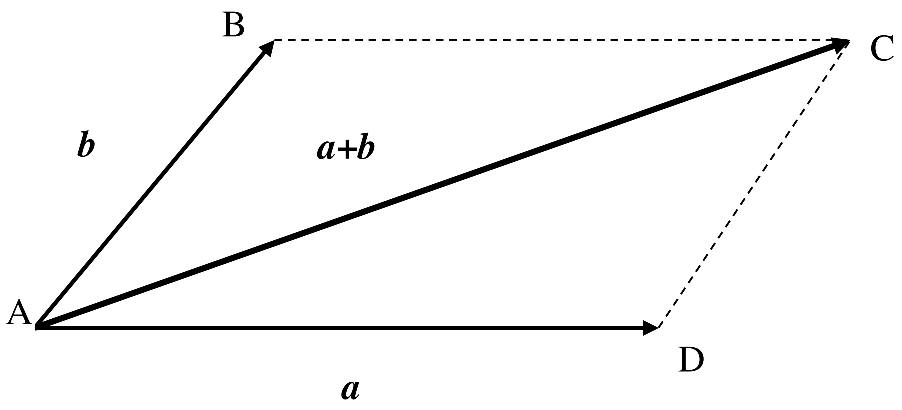
Bu yerda λ va β ixtiyoriy sonlarni, ***a*** esa ixtiyoriy vektorni ifodalaydi.

9-TA'RIF: (–1)***a*** vektor ***a*** vektorga ***qarama-qarshi vektor*** deyiladi va – ***a*** kabi belgilanadi.

Masalan, yuqorida ko'rilgan $ABCD$ parallellogramda $\overrightarrow{AD}$ va $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{CD}$ qarama-qarshi vektorlar, ya'ni $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$ bo'ladi.

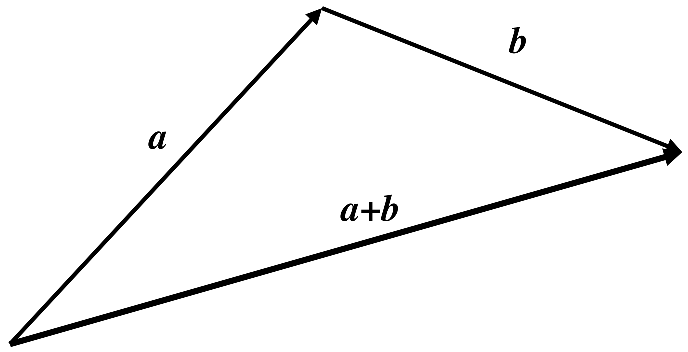
Endi ikkita $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarni qo'shish amalini kiritamiz. Buning uchun parallel ko'chirish orqali ularning boshlarini bitta A nuqtaga keltiramiz. Unda bu vektorlarni $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AD}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}$ kabi belgilab, $ABCD$ parallelogrammni hosil qilamiz (10-rasm).

<u>10-TA'RIF:</u> $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ ***vektorlarning yig'indisi*** deb $ABCD$ parallelogrammning A uchidan chiquvchi diagonalidan hosil qilingan $\overrightarrow{AC}$ vektorga aytiladi va $\boldsymbol{a+b}$ kabi belgilanadi.



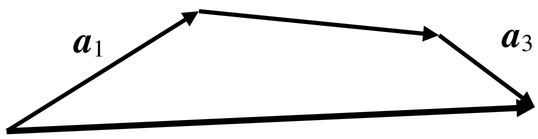
10-rasm

Vektorlar yig'indisining bu usulda aniqlash ***parallelogramm qoidasi*** deyiladi va unga moddiy nuqtaga qo'yilgan ikkita kuchning teng ta'sir etuvchisini topish asos qilib olingan. Bu yig'indini ***uchburchak qoidasi*** deb ataladigan quyidagi usulda ham topish mumkin. Bunda dastlab parallel ko'chirish orqali $\boldsymbol{b}$ vektorning boshi $\boldsymbol{a}$ vektorning uchi ustiga keltiriladi (11-rasm). So'ngra $\boldsymbol{a}$ boshidan chiqib, $\boldsymbol{b}$ uchida tugaydigan vektor hosil qilinadi va u $\boldsymbol{a+b}$ yig'indini ifodalaydi.



11-rasm

Bir nechta $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ ($n\geq3$) vektorlarning yig'indisi parallelogramm qoidasini bir necha marta ketma-ket qo'llash yoki ***ko'pburchak qoidasi*** deb ataladigan ushbu usulda topiladi. Bu usulda parallel ko'chirish orqali $\boldsymbol{a}_1$ uchiga $\boldsymbol{a}_2$ boshi, $\boldsymbol{a}_2$ uchiga $\boldsymbol{a}_3$ boshi va hokazo $\boldsymbol{a}_{n-1}$ uchiga $\boldsymbol{a}_n$ boshi keltirib qo'yiladi. Hosil bo'lgan siniq chiziqning boshi ($\boldsymbol{a}_1$ vektor boshi) bilan oxiri ($\boldsymbol{a}_n$ vektor uchi) tutashtirilib, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\ldots+\boldsymbol{a}_n$ yig'indi vektor topiladi. Masalan, uchta $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ va $\boldsymbol{a}_3$ vektorlarning $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$ yig'indisini topish quyidagi 12-rasmda ko'rsatilgan:



$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$

12-rasm

Agar $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ va $\boldsymbol{a}_3$ bir tekislikda joylashmagan vektorlar bo'lsa, ko'pburchak qoidasi bilan topilgan $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$ yig'indi qo'shiluvchi vektorlarni parallel ko'chirish orqali umumiy bir 0 boshga keltirib hosil qilinadigan parallelepipedning 0 uchidan chiquvchi diagonali kabi ham topilishi mumkin. Bu ***parallelepiped qoidasi*** deb ataladi.

Vektorlarni qo'shish amali quyidagi xossalarga ega:

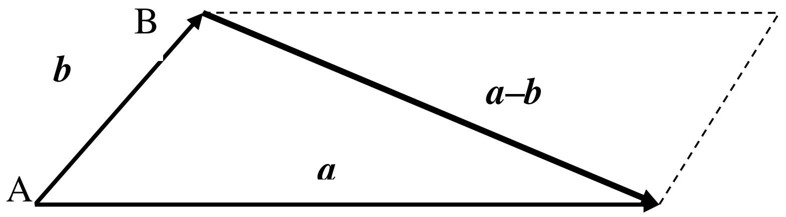
1. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ — kommutativlik (o'rin almashtirish) qonuni;

2. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ — assotsiativlik (guruhlash) qonuni;

3. $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$; **4.** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$.

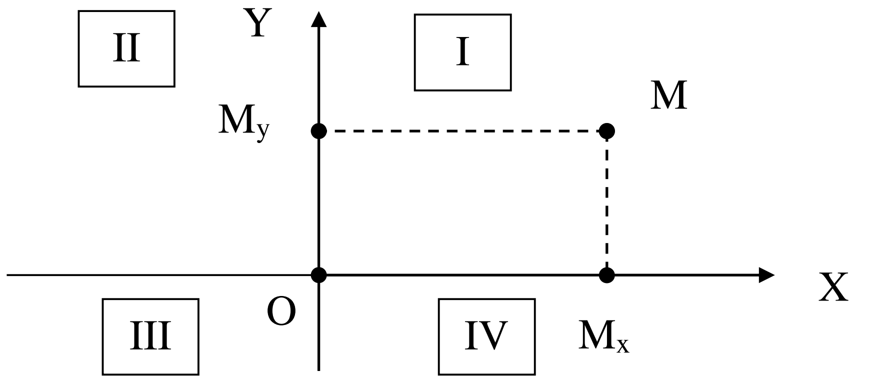
11-TA'RIF: ***a*** va ***b*** ***vektorlarning ayirmasi*** deb ***a*** va ***–b*** vektorlarning yig'indisiga aytamiz.

a va ***b*** vektorlarning ayirmasi ***a–b*** kabi belgilanadi bu vektorlardan hosil qilingan *ABCD* parallelogrammning B uchidan chiquvchi $\overrightarrow{BD}$ diagonalidan iborat bo'ladi (13-rasmga qarang).



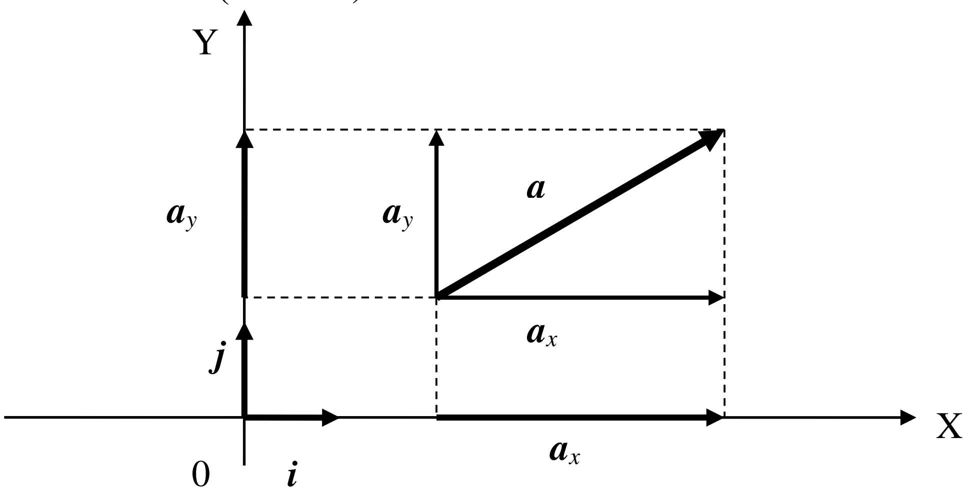
13-rasm

1.3. Vektorlarning koordinatalari. Dastlab tekislikdagi vektorlarning koordinatalari tushunchasini kiritamiz. Buning uchun tekislikda o'zaro perpendikulyar bo'lgan va O nuqtada kesishuvchi OX(abssissalar o'qi) va OY (ordinatalar o'qi) o'qlaridan tuzilgan XOY Dekart koordinatalar sistemasini olamiz. Bu sistemada tekislikdagi har bir M nuqta o'zining OX va OY o'qlardagi proyeksiyalari bo'lmish M_x va M_y nuqtalar orqali (14-rasmga qarang) quyidagicha aniqlanadi. M_x va M_y nuqtalardan O koordinata boshigacha bo'lgan $|OM_x|$ va $|OM_y|$ masofalar orqali M ***nuqtaning koordinatalari*** deb ataladigan $x=\pm|OM_x|$ (abssissa) va $y=\pm|OM_y|$ (ordinata) sonlar aniqlanadi. Bunda (x,y) koordinatalarning ishoralari I–IV choraklarda mos ravishda (+,+), (–,+), (–,–) va (+,–) kabi olinadi. Shunday qilib, tekislikdagi har bir M nuqta o‘zining koordinatalari bo‘lmish (x,y) sonlar juftligi orqali bir qiymatli aniqlanadi va bu hol M(x,y) kabi yoziladi.



14-rasm

Xuddi shunday tarzda tekislikdagi har bir ***a*** vektorni sonlar juftligi orqali ifodalash mumkin. Buning uchun mos ravishda OX va OY koordinata o‘qlarida joylashgan, musbat yo‘nalishga ega va uzunliklari birga teng bo‘lgan ***i*** va ***j*** vektorlarni kiritamiz (15-rasm).



15-rasm

Kiritilgan ***i*** va ***j*** vektorlar ***ort vektorlar*** yoki qisqacha ***ortlar*** deb ataladi. Endi berilgan ***a*** vektorni yo‘naltirilgan kesma sifatida qarab, uning OX va OY o‘qdagi proyeksiyalarini qaraymiz. Bu proyeksiyalar ham yo‘naltirilgan kesmalar bo‘lib, ular ***a*** vektorning OX va OY o‘qdagi ***proyeksiyalari*** deb ataladi va $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$ kabi belgilanadi. Koordinatalar o‘qlarida joylashgan $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$ vektorlar mos ravishda shu o‘qlardagi ***i***, ***j*** ortlarga kollinear bo‘ladi va shu sababli $\boldsymbol{a}_x=\pm|\boldsymbol{a}_x|\boldsymbol{i}$ hamda $\boldsymbol{a}_y=\pm|\boldsymbol{a}_y|\boldsymbol{j}$ deb yozish mumkin. Bunda proyeksiyalar va ortlar bir xil yo’nalishda bo‘lsa +, qarama-qarshi bo‘lsa – ishorasi olinadi. Unda vektorlarni qo‘shish ta’rifiga asosan quyidagi tengliklarni yoza olamiz:

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y=(\pm|\boldsymbol{a}_x|)\boldsymbol{i}+(\pm|\boldsymbol{a}_y|)\boldsymbol{j}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}\,. \qquad (1)$$

<u>12-TA’RIF:</u> (1) tenglik ***a*** vektorning ortlar bo‘yicha ***yoyilmasi***, x va y sonlari esa uning ***koordinatalari*** deb ataladi .

Koordinatalari x va y , ya'ni (1) yoyilmaga ega bo'lgan $\boldsymbol{a}$ vektor qisqacha $\boldsymbol{a}=(x,y)$ kabi ifodalanadi. Masalan, yoyilmasi $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$ bo'lgan vektorning koordinatalari $x=2$, $y=-3$ bo'ladi va $\boldsymbol{a}=(2,-3)$ deb yoziladi. Nol vektor uchun yoyilma $\mathbf{0} = 0\cdot\boldsymbol{i}+0\cdot\boldsymbol{j}=(0,0)$, ya'ni uning koordinatalari $x=0$, $y=0$ bo'ladi.

Shunday qilib tekislikdagi ixtiyoriy $\boldsymbol{a}$ vektor o'zining x va y koordinatalari, ya'ni (x,y) sonlar juftligi bilan (1) tenglik orqali to'liq aniqlanadi.

Xuddi shunday tarzda fazodagi nuqta va vektorlar uchun koordinatalar tushunchasi kiritiladi. Buning uchun fazoda o'zaro perpendikulyar bo'lgan va O nuqtada kesishuvchi OX, OY va OZ (applikatalar) o'qlarini kiritamiz. Bunda fazodagi har bir M nuqta o'zining OX, OY va OZ o'qlaridagi proyeksiyalari M_x , M_y va M_z orqali tekislikda qaralgani singari x, y va z koordinatalari bilan bir qiymatli aniqlanadi va bu M(x, y, z) kabi ifodalanadi.

Vektorlarning koordinatalarini aniqlash uchun oldin kiritilgan $\boldsymbol{i}$ va $\boldsymbol{j}$ ortlarga qo'shimcha ravishda OZ koordinata o'qida joylashgan $\boldsymbol{k}$ ort vektorni kiritamiz. Unda, fazodagi vektorlarni qo'shishning parallelepiped qoidasidan foydalanib,

$$\boldsymbol{a}= \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y+ \boldsymbol{a}_z = (\pm|\boldsymbol{a}_x|)\boldsymbol{i} +(\pm|\boldsymbol{a}_y|)\boldsymbol{j}+(\pm|\boldsymbol{a}_z|)\boldsymbol{k} =x\boldsymbol{i} +y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \qquad (2)$$

yoyilmani hosil etamiz. Bu yerda x, y, z sonlar uchligi fazodagi $\boldsymbol{a}$ vektorning koordinatalari bo'lib, $\boldsymbol{a}=(x, y, z)$ deb yoziladi.

Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning tengligi va ular ustidagi qo ‘shish, ayirish, songa ko'paytirish amallarining natijalari oson aniqlanadi. Bularni fazodagi vektorlar uchun ifodalaymiz. Tekisikdagi vektorlar uchun tegishli natijalar $z=0$ holda kelib chiqadi.

1-TEOREMA: $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1, z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2, z_2)$ vektorlar teng bo'lishi uchun ularning mos koordinatalari teng, ya'ni $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, $z_1=z_2$ bo'lishi zarur va yetarli.

Teoremaning isboti (2) yoyilmadan kelib chiqadi va o'quvchiga havola etiladi.

2-TEOREMA: $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1, z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2, z_2)$ vektorlarning yig'indisi yoki ayirmasining koordinatalari qo'shiluvchilarning mos koordinatalari yig'indisi yoki ayirmasiga teng bo'ladi, ya'ni

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1,y_1, z_1)\pm(x_2,y_2, z_2)= (x_1\pm x_2, y_1\pm y_2, z_1\pm z_2). \qquad (3)$$

Isbot: Vektorlarning (2) yoyilmasi va ularni o'zaro qo'shish, songa ko'paytirish amallarining xossalariga asosan

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1,y_1, z_1)\pm(x_2,y_2, z_2)=(x_1 \boldsymbol{i} +y_1\boldsymbol{j}+z_1 \boldsymbol{k})\pm (x_2 \boldsymbol{i} +y_2\boldsymbol{j}+z_2 \boldsymbol{k})=$$
$$=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k}$$

tenglikni olamiz va undan (3) formula o'rinli ekanligini ko'ramiz.

Masalan, $\boldsymbol{a}=(4,-2,1)$ va $\boldsymbol{b}=(5,9,0)$ vektorlar uchun

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4+5,-2+9,1+0)=(9,7,1) , \qquad \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(4-5,-2-9,1-0)=(-1, -11,1).$$

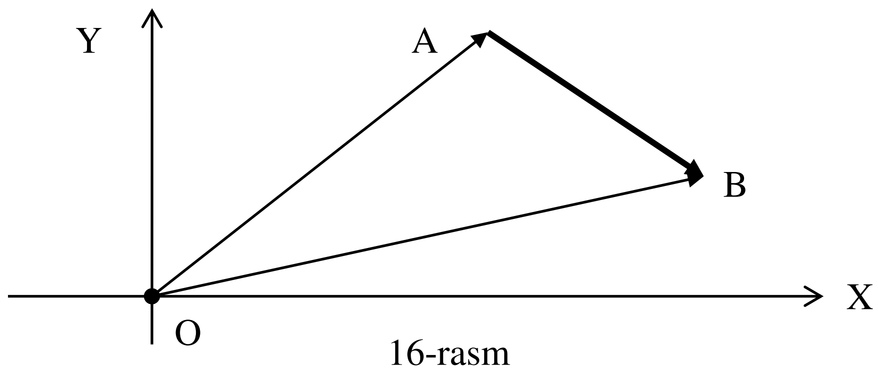
3-TEOREMA: Har qanday $\boldsymbol{a}=(x, y, z)$ vektorning ixtiyoriy λ songa ko'paytmasining koordinatalari uning har bir koordinatasini λ songa ko'paytirishdan hosil bo'ladi, ya'ni $\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\cdot(x, y, z)= (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

Teoremaning isbotini o'quvchilarga mustaqil ish sifatida havola etamiz. Masalan, $\boldsymbol{a}=(3, -4, 1)$ va $\lambda=6$ bo'lsa, $6\boldsymbol{a}=6(3, -4, 1)=(18, -24, 6)$ bo'ladi.

Bu natijalardan foydalanib ushbu masalalarni yechamiz.

Masala № 1: Boshi A(x_1, y_1, z_1) va uchi B(x_2, y_2, z_2) nuqtada joylashgan $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalarini toping.

Yechish: Berilgan vektorning A boshi va B uchini koordinatalar boshi O bilan tutashtirib $\overrightarrow{OA}$ va $\overrightarrow{OB}$ vektorlarni hosil etamiz (16-rasmga qarang).



16-rasm

Bunda $\overrightarrow{OA}=(x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{OB}=(x_2, y_2, z_2)$ bo‘ladi va vektorlarning ayirmasi ta’rifi hamda 2-teoremaga asosan quyidagi natijani olamiz:

$$\overrightarrow{AB}=(x, y, z)=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2, y_2, z_2)-(x_1, y_1, z_1)=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)\ . \quad (4)$$

Demak, vektorning koordinatalarini topish uchun uchining koordinatalaridan boshini koordinatalarini ayirish kerak. Masalan, boshi A(5,–4, 2) va uchi B(7, 1, 0) nuqtalarda joylashgan vektorning koordinatalari quyidagicha bo‘ladi:

$$x=x_2-x_1=7-5=2,\ y=y_2-y_1=1-(-4)=5,\ z=z_2-z_1=0-2=-2.$$

Masala № 2: Uchlari $A(x_1, y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalarda joylashgan AB kesmani berilgan λ (λ>0) nisbatda bo‘luvchi $C(x_0, y_0, z_0)$ nuqtaning koordinatalarini toping.

Yechish: Oldingi masalaga asosan

$$\overrightarrow{AC}=(x_0-x_1,\ y_0-y_1,\ z_0-z_1), \quad \overrightarrow{CB}=(x_2-x_0, y_2-y_0,\ z_2-z_0)$$

deb yozishimiz mumkin. Masala sharti, vektorni songa ko‘paytirish ta’rifi va 3-teoremaga asosan ushbu tengliklar o‘rinli bo‘ladi:

$$|\overrightarrow{AC}|=\lambda|\overrightarrow{CB}| \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AC}=\lambda\,\overrightarrow{CB} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (x_0-x_1,\ y_0-y_1,\ z_0-z_1)=\lambda(x_2-x_0, y_2-y_0,\ z_2-z_0)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_0-x_1,\ y_0-y_1,\ z_0-z_1)=(\lambda x_2-\lambda x_0, \lambda y_2-\lambda y_0, \lambda z_2-\lambda z_0).$$

Bu yerdan, 1-teoremaga asosan, izlanayotgan x_0 koordinata ushbu tenglamadan topiladi:

$$x_0-x_1=\lambda(x_2-x_0)\Rightarrow(1+\lambda)x_0=\lambda x_2+x_1\Rightarrow x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\ .$$

Xuddi shunday tarzdagi mulohazalar orqali izlangan nuqtaning koordinatalari

$$x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z_0=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \qquad (5)$$

formulalar bilan topilishini aniqlaymiz.

Masalan, uchlari A(2,–3, 1) va B(16, 11, 15) nuqtalarda joylashgan AB kesmani λ=2:5 nisbatda bo‘luvchi nuqtaning koordinatalari (5) formulaga asosan quyidagicha bo‘ladi:

$$x_0 = \frac{2 + \frac{2}{5} \cdot 16}{1 + \frac{2}{5}} = 6, \quad y_0 = \frac{-3 + \frac{2}{5} \cdot 11}{1 + \frac{2}{5}} = 1, \quad z_0 = \frac{1 + \frac{2}{5} \cdot 15}{1 + \frac{2}{5}} = 7$$

Xususiy, λ=1 bo‘lgan, holda AB kesmaning o‘rta nuqtasi koordinatalari uchun ushbu formulaga ega bo‘lamiz:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (6)$$

Masalan, uchlari A(4,–1, 5) va B(2, 11, –13) nuqtalarda joylashgan AB kesmaning o‘rta nuqtasining koordinatalari (6) formulaga asosan quyidagicha bo‘ladi:

$$x_0=(4+2)/2=3, \quad y_0=(-1+11)/2=5, \quad z_0=(5+(-13))/2=-4 .$$

XULOSA

Amaliyotdan kelib chiqqan holda matematikada skalyar va vektor tushunchalari kiritiladi. Bunda skalyar faqat son qiymati bilan, vektor esa ham sonli qiymati, ham yo‘nalishi bilan aniqlanadi. Vektorlar ustida ularni songa ko‘paytirish, o‘zaro qo‘shish va ayirish amallari kiritilib, vektorlar algebrasi hosil qilinadi. Dekart koordinatalar sistemasida vektorlar o‘zlarining koordinatalari bilan ifodalanadi. Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida amallar ularning koordinatalari orqali oson amalga oshiriladi. Vektorlar algebrasi yordamida bir qator matematik masalalar oson hal etiladi.

Tayanch iboralar

Skalyar * Vektor * Vektorning moduli * Vektorning geometrik talqini * Vektorning boshi * Vektorning uchi * Nol vektor * Kollinear vektorlar * Vektorlarning tengligi * Komplanar vektorlar*Vektorni songa ko‘paytmasi * Qarama-qarshi vektorlar* Vektorlarni qo‘shish * Parallelogramm qoidasi * Uchburchak qoidasi*Ko‘pburchak qoidasi *Parallelepiped qoidasi * Vektorlarni ayirish * Ort vektorlar*Vektorning o‘qdagi proyeksiyasi *Vektorning yoyilmasi * Vektorning koordinatlari

Takrorlash uchun savollar

1. Qanday kattaliklar skalyarlar deyiladi?
2. Skalyarlarga qanday misollar bilasiz?
3. Qanday kattaliklar vektorlar deb ataladi?
4. Vektorlarga qanday misollar bilasiz?
5. Vektorlarning geometrik ma’nosi nimadan iborat?
6. Vektorning moduli deb nimaga aytiladi?

7. Qanday vektor nol vektor deyiladi?
8. Qanday vektorlar kollinear deyiladi?
9. Qachon vektorlar teng deb hisoblanadi?
10. Vektorni songa ko‘paytmasi qanday aniqlanadi?
11. Vektorni songa ko‘paytmasi qanday xossalarga ega?
12. Vektorlar yig‘indisi qanday aniqlanadi?
13. Vektorlar yig‘indisi qanday xossalarga ega?
14. Ort vektorlar deb qanday vektorlarga tushuniladi?
15. Vektorning ortlar bo‘yicha yoyilmasi qanday aniqlanadi?
16. Vektorning koordinatalari qanday topiladi?
17. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning tenglik sharti nimadan iborat?
18. Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida arifmetik amallar qanday bajariladi?
19. Vektorning koordinatalari uning boshi va uchi bo‘yicha qanday topiladi?
20. Kesmani berilgan nisbatda bo‘luvchi nuqtaning koordinatalari qanday topiladi?
21. Kesma o‘rta nuqtasining koordinatalari qanday topiladi?

Testlardan namunalar

1. Skalyar deb nimaga aytiladi?

A) Faqat yo‘nalishi bilan aniqlanadigan kattalikka skalyar deb aytiladi.
B) Faqat son qiymati bilan aniqlanadigan kattalikka skalyar deb aytiladi.
C) Ham son qiymati, ham yo‘nalishi bilan aniqlanadigan kattalikka skalyar deb aytiladi.
D) Yo‘nalgan kesmaga skalyar deb aytiladi.
E) Har qanday kattalik skalyar deyiladi.

2. Vektor kattalik deb nimaga aytiladi?

A) Faqat yo‘nalishi bilan aniqlanadigan kattalikka vektor deb aytiladi.
B) Faqat son qiymati bilan aniqlanadigan kattalikka vektor deb aytiladi.
C) Ham son qiymati, ham yo‘nalishi bilan aniqlanadigan kattalikka vektor deb aytiladi.
D) Har qanday kesmaga vektor deb aytiladi.
E) Har qanday kattalik vektor deyiladi.

3. Quyidagi kattaliiklardan qaysi biri vektor bo‘ladi ?

A) sirt yuzasi; B) jism hajmi; C) kesma uzunligi;
D) kuch; E) Birorta ham kattalik vektor bo‘lmaydi.

4. Qachon vektorlar kollinear deb aytiladi ?

A) Bir xil yo‘nalgan vektorlar kollinear deb aytiladi.
B) Har qanday ***a*** va ***b*** vektorlar kollinear vektorlar deb aytiladi.
C) Bir xil yo‘nalgan va uzunliklari teng bo‘lgan vektorlar kollinear deb aytiladi.
D) Bitta to‘g‘ri chiziqda yoki parallel to‘g‘ri chiziqlarda yotuvchi ***a*** va ***b*** vektorlarga kollinear vektor deb aytiladi.

E) Bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi ***a*** va ***b*** vektorlarga kollinear vektor deb aytiladi.

5. Qachon vektorlar teng deb aytiladi ?

A) Bir xil yo‘nalgan vektorlar teng deb aytiladi.
B) Bir xil uzunlikli ***a*** va ***b*** vektorlarga teng vektorlar deb aytiladi.
C) Bir xil yo‘nalgan va uzunliklari teng bo‘lgan vektorlar teng deb aytiladi.
D) ***a*** va ***b*** vektorlar kollinear, bir xil yo‘nalgan va uzunliklari teng bo‘lsa, ular teng vektorlar deb aytiladi.
E) Kollinear va bir xil yo‘nalgan vektorlar teng deb aytiladi.

6. Ta’rifni to‘ldiring: Uchta vektor komplanar deyiladi, agar ular ··· joylashgan bo‘lsa.

A) bitta to‘g‘ri chiziqda ; B) bitta tekislik yoki parallel tekisliklarda ;
C) parallel to‘g‘ri chiziqlarda ; D) o‘zaro perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlarda ;
E) o‘zaro perpendikulyar tekisliklarda.

7. Fazodagi ort vektorlar qanday aniqlanadi?

A) OX, OY, OZ koordinata o‘qlarida joylashgan, musbat yo‘nalishda ega va uzunliklari birga teng bo‘lgan vektorlar;
B) Uzunliklari birga teng bo‘lgan uchta vektor;
C) O‘zaro perpendikulyar bo‘lgan uchta vektor;
D) O‘zaro kollinear bo‘lgan uchta birlik vektor;
E) Uchta komplanar birlik vektorlar.

8. ***a***=(2, –5) vektorning $\bar{i}$ va $\bar{j}$ ortlar bo‘yicha yoyilmasi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan ?

A) ***a***=2***i***–5***j*** ; B) ***a***= –5***i***+2***j*** ; C) ***a***= –2***i***+5***j*** ; D) ***a***=5***i***–2***j*** ; E) ***a***=2***i***+5***j*** .

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Boshi A(n, 2n+3, 5–2n), uchi esa B(2n+3, 2n–1, n) nuqtada joylashgan ***a*** vektorning koordinatalarini toping.
2. Berilgan ***a***=(n–2, n+3, n–1) va ***b***=(n, n–4, n+2) vektorlar bo‘yicha ***na, a+b, a–b*** va 3***a+nb*** vektorlarni toping.
3. Boshi A(n–2, n+3, n) va uchi B(n+1, n–3, n–1) nuqtada joylashgan vektorning koordinatalarini toping.
4. Uchlari A(n–2, n+3, n) va B(n+1, n–3, n–1) nuqtalarda joylashgan AB kesmani λ=(n–1): (n+2) nisbatda bo‘luvchi C(x,y,z) nuqta koordinatalarini aniqlang.

§2. VEKTORLARNING SKALYAR KO‘PAYTMASI, UNING XOSSALARI VA TATBIQLARI.

- ***Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi va uning xossalari.***

- ***Skalyar ko'paytmaning koordinatalardagi ifodasi.***
- ***Skalyar ko'paytmaning tatbiqlari.***

2.1. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi va uning xossalari. Biz vektorlarni songa ko'paytirish, qo'shish va ayirish amallarini ko'rib o'tdik. Endi vektorlarni o'zaro ko'paytirish masalasiga o'tamiz. Buning uchun dastlab fizikadan kuch bajargan ishni hisoblash formulasini eslaymiz. Biror moddiy nuqtaga $\boldsymbol{f}$ kuch vektori ta'sir etib, uni $\boldsymbol{s}$ vektor bo'yicha harakatlantirgan bo'lsin. Bunda kuch va harakat vektorlari orasidagi burchak φ bo'lsa, unda moddiy nuqtani ko'chirishda bajarilgan ish $A=|\boldsymbol{f}|\cdot|\boldsymbol{s}|\cdot\cos\varphi$ formula bilan hisoblanadi. Bu formulada $|\boldsymbol{f}|$ – kuch kattaligini, $|\boldsymbol{s}|$ – bosib o'tilgan masofani ifodalaydi.

<u>1-ТАЪРИФ:</u> Ikkita $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning ***skalyar ko'paytmasi*** deb ularning modullari bilan ular orasidagi burchak kosinusining ko'paytmalariga aytiladi.

$\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$**,** $\boldsymbol{ab}$ yoki $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ kabi belgilanadi va , ta'rifga asosan,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi \qquad (1)$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda φ orqali $(0\leq\varphi\leq\pi)$ $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar orasidagi burchak belgilangan bo'lib, u $\boldsymbol{a}$ vektordan $\boldsymbol{b}$ vektorgacha eng qisqa burilish burchagi kabi aniqlanadi. Ikki vektorni (1) ko'rinishda ko'paytirish natijasida son, ya'ni skalyar kattalik hosil bo'ladi va shu sababli $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb ataladi.

Skalyar ko'paytma ta'rifi bo'yicha yuqorida ko'rib o'tilgan ish formulasini $A=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{s}$ deb yozish mumkin. Demak, kuch va harakat lektorlarining skalyar ko'paytmasi bajarilgan ishni ifodalaydi va bu skalyar ko'paytmani mexanik ma'nosi bo'ladi.

Skalyar ko'paytmaning ta'rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$, ya'ni skalyar ko'paytma uchun kommutativlik qonuni bajariladi. Haqiqatan ham, skalyar ko'paytma ta'rifini ifodalovchi (1) formulaga asosan

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} =|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi=|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\varphi=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}.$$

2. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$, ya'ni vektorni o'ziga - o'zining skalyar ko'paytmasi (bu ba'zan vektorning skalyar kvadrati deyiladi va $\boldsymbol{a}^2$ kabi belgilanadi) uning moduli kvadratiga teng. Bu xossa ham skalyar ko'paytma ta'rifini ifodalovchi (1) formuladan bevosita kelib chiqadi:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2 .$$

3. Ixtiyoriy λ soni uchun $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b})= \lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

Dastlab $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b})$ tenglikni o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. (1) formulaga asosan

$$(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})= |\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi = |\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi = |\boldsymbol{a}|\cdot|\lambda|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi = |\boldsymbol{a}||\lambda\boldsymbol{b}|\cos\varphi= (\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}).$$

Endi $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})= \lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ tenglikni to'g'riligini ko'rsatamiz. Agar $\lambda\geq 0$ bo'lsa

$$(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})= |\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi =\lambda\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi= \lambda (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

Agar $\lambda<0$ bo'lsa, $\lambda\boldsymbol{a}$ vektor $\boldsymbol{a}$ vektorga qarama-qarshi yo'nalgan va shu sababli $\lambda\boldsymbol{a}$ bilan $\boldsymbol{b}$ vektor orasidagi burchak $\pi-\varphi$ bo'ladi. Bu holda $\cos(\pi-\varphi)= -\cos\varphi$ va $\lambda = -|\lambda|$ bo'lgani uchun

$$(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})= |\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\pi-\varphi) =-|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi= \lambda\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi= \lambda (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

Jumladan $\lambda=0$ holda har qanday $\boldsymbol{a}$ vektor uchun $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}=0$ natijani olamiz.

4. $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}$, ya'ni vektorlarning skalyar ko'paytmasi uchun distributivlik qonuni bajariladi.

Bu xossani isbotsiz qabul etamiz.

2-TA'RIF: Agar $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar orasidagi burchak $\varphi=90^0$ bo'lsa, ular ***ortogonal vektorlar*** deyiladi.

Kelgusida $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning orthogonalligini $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ kabi belgilaymiz. Masalan, oldin kiritilgan $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ va $\boldsymbol{k}$ ort vektorlar o'zaro ortogonal, ya'ni $\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{k}$ va $\boldsymbol{j}\perp\boldsymbol{k}$ bo'ladi.

TEOREMA: Noldan farqli $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar ortogonal bo'lishi uchun ularning skalyar ko'paytmasi $\boldsymbol{ab}=0$ bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot: Dastlab teorema shartini zaruriyligini ko'rsatamiz:

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \Rightarrow \varphi=90^0 \Rightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos 90^0=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot 0=0;$$

Endi teorema shartini yetarli ekanligini ko'rsatamiz:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi=0\ ,\ |\boldsymbol{a}|\neq 0\ ,\ |\boldsymbol{b}|\neq 0 \Rightarrow \cos\varphi=0 \Rightarrow \varphi=90^0 \Rightarrow \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\ .$$

2.2. Skalyar ko'paytmaning koordinatalardagi ifodasi. Oldingi mavzuda koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida songa ko'paytirish, qo'shish va ayirish amallari oson bajarilishini ko'rib o'tgan edik. Endi bu masalani vektorlarning skalyar ko'paytmasi uchun qaraymiz. Tekislikda koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini topamiz. Skalyar ko'paytmaning 2-xossasi va yuqoridagi teoremadan ortlar uchun ushbu tengliklar o'rinli ekanligini ko'ramiz:

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=|\boldsymbol{i}|^2=1,\quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=|\boldsymbol{j}|^2=1,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=0\ .$$

Endi $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$ vektorlarning yoyilmasi hamda skalyar ko'paytmaning 3 va 4 - xossalaridan foydalanamiz:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})=x_1x_2\,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+x_1y_2\,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+y_1x_2\,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+y_1y_2\,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=$$
$$=x_1x_2\cdot 1+x_1y_2\cdot 0+y_1x_2\cdot 0+y_1y_2\cdot 1=x_1x_2+y_1y_2.$$

Demak

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1y_2+y_1y_2 \qquad (2)$$

ya'ni vektorlarning skalyar ko'paytmasi ularning mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng bo'ladi.

Masalan, $\boldsymbol{a}=(3,6)$ va $\boldsymbol{b}=(5,-2)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1y_2+y_1y_2=3\cdot 5+6\cdot(-2)=15-12=3.$$

Xuddi shunday tarzda fazodagi $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi uchun

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \qquad (3)$$

formula o'rinli bo'lishini ko'rsatish mumkin.

2.3. Skalyar ko'paytmaning tatbiqlari. Endi skalyar ko'paytmaning tatbiqlari sifatida quyidagi masalalarni ko'ramiz.

1-masala. Fazoda koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(x, y, z)$ vektorning modulini toping.

Yechish. Skalyar ko'paytmaning 2- xossasiga va (3) formulaga asosan

$$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=xx+yy+zz=x^2+y^2+z^2 \Rightarrow |\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ . \qquad (4)$$

Masalan, $\boldsymbol{a}=(3,4,12)$ vektorning moduli

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13.$$

(4) formulada z=0 deb tekislikda koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(x, y)$ vektorning moduli

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

formula bilan hisoblanishini ko‘ramiz.

2-masala. Fazodagi koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ vektorlar orasidagi φ burchakni toping.

Yechish. Skalyar ko‘paytma ta’rifi (1), (3) va (4) formulalarga asosan

$$cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (5)$$

Masalan, $\boldsymbol{a}$=(1,0,1) va $\boldsymbol{b}$=(0,1,1) vektorlar orasidagi φ burchak uchun

$$cos\varphi = \frac{1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$$

natijani olamiz va undan $\varphi=60^0$ ekanligini topamiz.

(5) formulada z_1=0, z_2=0 deb tekislikda koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$ vektorlar orasidagi φ burchak

$$cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

formula bilan topilishini ko‘ramiz.

3-masala. $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ vektorlarning ortogonallik shartini toping.

Yechish. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ bo‘lgani uchun ular orasidagi burchak $\varphi=90^0$ bo‘ladi va shu sababli cosφ=0. Unda (5) formuladan

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 = 0 \qquad (6)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu ikki vektorning ortogonallik shartidir.

Masalan, $\boldsymbol{a}$=(3,–2,1) va $\boldsymbol{b}$=(5,7, –1) vektorlar ortogonaldir, chunki

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 = 3\cdot 5+(-2)\cdot 7+1\cdot(-1) = 15-14-1=0.$$

(6) formulada z_1=0, z_2=0 deb tekislikda koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$ vektorlarning ortogonallik shartini topamiz:

$$x_1x_2+y_1y_2= 0$$

4-masala. Fazodagi A(x_1,y_1, z_1) va B(x_2, y_2, z_2) nuqtalar orasidagi d masofani toping.

Yechish. Bu nuqtalarni kesma bilan tutashtirib, boshi A(x_1,y_1,z_1) nuqtada va uchi B(x_2, y_2, z_2) nuqtada bo‘lgan $\boldsymbol{a}$ vektorni hosil qilamiz. Ma’lumki, bu vektorning koordinatalari uning uchi bilan boshi koordinatalari ayirmasiga teng bo‘ladi, ya’ni $\boldsymbol{a}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$. Unda $d=|\boldsymbol{a}|$ va, (4) formulaga asosan,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (7)$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Masalan, A(5, –3,1) va B(8,1,13) nuqtalar orasidagi masofa

$$d = \sqrt{(8-5)^2 + (1-(-3))^2 + (13-1)^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

bo‘ladi.

(7) formulada $z_1=0$, $z_2=0$ deb tekislikda koordinatalari bilan berilgan $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalar orasidagi d masofa uchun

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

formula o‘rinli bo‘lishini ko‘ramiz.

5-masala. Korxona ishlab chiqarayotgan mahsulotlar tannarxi (z_i) va hajmi (q_i) bo‘yicha ma’lumotlar quyidagi jadvalda keltirilgan:

Iqtisodiy ko‘rsatgich	I mahsulot	II mahsulot	III mahsulot
Mahsulot tannarxi (z_i), so‘m	350	500	250
Mahsulot hajmi (q_i), dona	500	700	1200

Mahsulotlarni ishlab chiqarish xarajatlarini toping.

Yechish. Ishlab chiqarilgan mahsulotlarning tannarx vektorini $\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,z_3)$, hajm vektorini $\boldsymbol{q}=(q_1,q_2,q_3)$ deb belgilasak, unda ishlab chiqarish xarajatlari

$$z_1q_1+z_2q_2+z_3q_3=\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{q}\ ,$$

ya’ni $\boldsymbol{z}$ va $\boldsymbol{q}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasiga teng bo‘ladi. Bizning masalada

$$\boldsymbol{q}=(500,\ 700,\ 1200),\qquad \boldsymbol{z}=(350,\ 500,\ 250),$$

$$\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{q}=z_1q_1+z_2q_2+z_3q_3=350\cdot 500+500\cdot 700+250\cdot 1200=825000.$$

Demak ko‘rsatilgan mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun korxona 825 ming so‘m xarajat qilgan.

XULOSA

Vektorlarning skalyar ko‘paytma tushunchasi kuch bajargan ish qiymatini hisoblash masalasidan kelib chiqadi. Skalyar ko‘paytma kommutativlik va distributivlik qonunlariga bo‘ysunadi. Skalyar ko‘paytmani vektorlarning koordinatalari yordamida hisoblash juda qulay. Skalyar ko‘paytma yordamida vektorlarning modulini topish, ular orasidagi burchakni aniqlash, ikki vektorning ortogonallik shartini ifodalash kabi masalalar oson yechiladi. Skalyar ko‘paytma iqtisodiy masalalarni yechishda ham keng qo‘llaniladi.

Tayanch iboralar

* Skalyar ko‘paytma * Skalyar ko‘paytmaning mexanik ma’nosi * Ortogonal vektorlar * Vektorlarning ortogonallik sharti .

Takrorlash uchun savollar

1. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi qanday aniqlanadi?
2. Vektorlar skalyar ko‘paytmasining mexanik ma’nosi nimadan iborat?
3. Skalyar ko‘paytma qanday xossalarga ega?
4. Qanday vektorlar ortogonal vektorlar deyiladi?
5. Vektorlar ortogonalligining zaruriy va yetarli sharti nimadan iborat?
6. Skalyar ko‘paytma vektorlarning koordinatalari orqali qanday ifodalanadi?

7. Ikki vektor orasidagi burchak qanday topiladi?
8. Ikki vektorning ortogonallik sharti koordinatalarda qanday ifodalanadi?
9. Ikki nuqta orasidagi masofa qanday topiladi ?

Testlardan namunalar

1. $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi qayerda to‘g‘ri ifodalangan ?
   A) $\boldsymbol{a\cdot b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$; B) $\boldsymbol{a\cdot b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi$; C) $\boldsymbol{a\cdot b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\varphi$;
   D) $\boldsymbol{a\cdot b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\,\mathrm{tg}\varphi$; E) $\boldsymbol{a\cdot b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\,\mathrm{ctg}\varphi$.

2. Qaysi holda $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi $|\boldsymbol{a\cdot b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$ sartni qanoatlantiradi ?
   A) $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ bir xil uzunlikka ega bo‘lsa; B) $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ ort vektorlar bo‘lsa;
   C) $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ orthogonal bo‘lsa; D) $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ kollinear bo‘lsa;
   E) hech qaysi $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar uchun bu shart bajarilmaydi.

3. $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasining xossasi qayerda noto‘g‘ri ifodalangan ?
   A) $\boldsymbol{a\cdot b}=\boldsymbol{b\cdot a}$; B) $\boldsymbol{a\cdot a}=|\boldsymbol{a}|^2$; C) $\boldsymbol{a\cdot(b+c)}=\boldsymbol{a\cdot b}+\boldsymbol{a\cdot c}$;
   D) $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$; E) Barcha xossalar to‘g‘ri.

4. $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ ort vektorlarning skalyar ko‘paytmalari boyicha quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o‘rinli emas ?
   A) $\boldsymbol{i\cdot i}=1$, $\boldsymbol{i\cdot j}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{i\cdot k}=\boldsymbol{0}$; B) $\boldsymbol{j\cdot j}=1$, $\boldsymbol{j\cdot i}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{j\cdot k}=\boldsymbol{0}$; C) $\boldsymbol{k\cdot k}=1$, $\boldsymbol{k\cdot i}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{k\cdot j}=\boldsymbol{0}$;
   D) $\boldsymbol{j}\cdot(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j})=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})=\boldsymbol{0}$;
   E) $\boldsymbol{j}\cdot(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j})=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{i})=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=\boldsymbol{0}$;

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Berilgan $\boldsymbol{a}=(n,\ n+1,\ n-2)$ va $\boldsymbol{b}=(n+2,\ n,\ n-1)$ vektorlar orasidagi φ burchakning kosinusini toping.

2. λ parametrning qanday qiymatida $\boldsymbol{a}=(\lambda n,\ n-2,\ n+1)$ va $\boldsymbol{b}=(n-3,\ \lambda n,\ n-1)$ vektorlar orthogonal bo‘lishini aniqlang.

3. Fazodagi $A(n+2,\ n+4,\ n-3)$ va $B(2n+1,\ n+1,\ 2n-1)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

§3. VEKTORIAL KO‘PAYTMA, UNING XOSSALARI VA TATBIQLARI

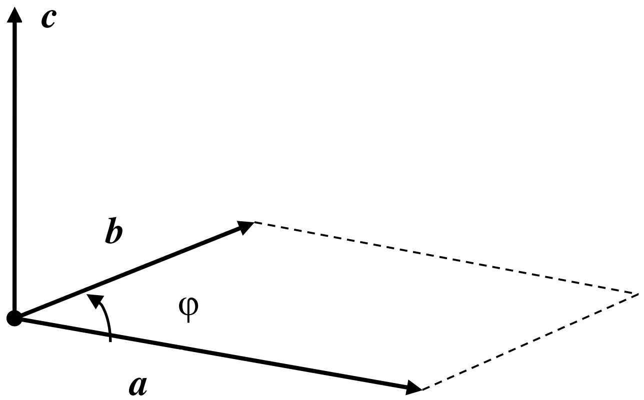
- ***Vektorial ko‘paytma va uning xossalari.***

- ***Vektorial ko'paytmaning koordinatalardagi ifodasi.***
- ***Vektorial ko'paytmaning tatbiqlari.***

3.1. Vektorial ko'paytma va uning xossalari. Ikkita ***a*** va ***b*** vektorlarning skalyar ko'paytmasi natijasida son hosil bo'lishini ko'rib o'tdik. Endi bu vektorlarning shunday ko'paytmasini aniqlaymizki, natijada yana vektor hosil bo'lsin.

1-TA'RIF: Fazodagi ***a*** va ***b*** vektorlarning ***vektorial ko'paytmasi*** deb, quyidagi uchta shart bilan aniqlanuvchi yangi ***c*** vektorga (17-rasmga qarang) aytiladi:

1. ***c*** vektorning moduli ***a*** va ***b*** vektorlarga qurilgan parallelogramm yuziga teng bo'lib, $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi$ formula bilan aniqlanadi. Bunda φ berilgan ***a*** va ***b*** vektorlar orasidagi burchakni ifodalaydi.
2. ***c*** vektor ***a*** va ***b*** vektorlar yotgan tekislikka perpendikulyar, ya'ni $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$ bo'ladi .
3. ***c*** vektor shunday yo'nalganki, uning uchidan qaraganda ***a*** vektordan ***b*** vektorga eng qisqa burilish soat mili harakatiga teskari bo'ladi.



17-rasm

a va ***b*** vektorlarning vektorial ko'paytmasi $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ yoki $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ kabi belgilanadi.

Vektorial ko'paytma ta'rifi fizikadan kuch tushunchasi bilan bog'liq masaladan kelib chiqqan. Agar radius vektori ***r*** bo'lgan moddiy A nuqtaga ***f*** kuch ta'sir etayotgan bo'lsa, unda $\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{r}$ vektorial ko'paytma ***f*** kuchni A nuqtaga nisbatan momentini ifodalaydi.

Vektorial ko'paytma xossalari bilan tanishamiz.

1. Vektorial ko'paytmada ko'paytuvchilar o'rni almashsa, natijada faqat ishora o'zgaradi, ya'ni

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}.$$

Bu tasdiq vektorial ko'paytma ta'rifining 3-shartidan bevosita kelib chiqadi. Demak, vektorial ko'paytma uchun kommutativlik qonuni bajarilmaydi.

2. Vektorial ko'paytmada o'zgarmas λ ko'paytuvchini tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni

$$[\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b}]=\lambda[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}].$$

Jumladan, λ=0 holda har qanday ***a*** vektor uchun $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{0}]=[\boldsymbol{0},\boldsymbol{a}]=\boldsymbol{0}$ ekanligini ko'ramiz.

3. Vektorial ko'paytma uchun taqsimot qonuni o'rinli, ya'ni

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}.$$

4. Agar ***a*** va ***b*** kollinear vektorlar bo‘lsa, ularning vektorial ko‘paytmasi $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ bo‘ladi. Aksincha noldan farqli ***a*** va ***b*** vektorlar uchun $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ bo‘lsa, bu vektorlar kollinear bo‘ladi.

Isbot: 1) ***a*** va ***b*** kollinear vektorlar bo‘lsin. Bu holda ular orasidagi burchak $\varphi=0$ yoki $\varphi=\pi$ va shu sababli $\sin\varphi=0$ bo‘ladi. Unda vektorial ko‘paytma ta’rifining 1-shartiga asosan

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\varphi=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot 0=0 \Rightarrow \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ va $|\boldsymbol{a}|\neq 0$, $|\boldsymbol{b}|\neq 0$ bo‘lsin. Unda

$$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\varphi=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0 \Rightarrow \sin\varphi=0 \Rightarrow \varphi=0 \text{ yoki } \varphi=\pi.$$

Bundan ***a*** va ***b*** kollinear vektorlar ekanligi kelib chiqadi.

Natija: Ixtiyoriy ***a*** vektor uchun $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ bo‘ladi.

Misol: $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ ko‘paytmani soddalashtiring.

Yechish: Vektorial ko‘paytmaning ko‘rib o‘tilgan xossalariga asosan

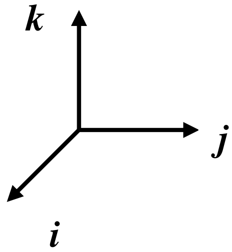
$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-4\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-2\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=2\cdot\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+4\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-2\cdot\boldsymbol{0}=5\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$

3.2. Vektorial ko‘paytmaning koordinatalardagi ifodasi. Endi fazoda koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlarning vektorial ko‘paytmasini topish masalasi bilan shug‘ullanamiz. Dastlab ***i***, ***j*** va ***k*** ortlarning vektorial ko‘paytmalarini hisoblaymiz. Vektorial ko‘paytmaning 4-xossasidan kelib chiqqan natijaga asosan

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}.$$

Vektorial ko‘paytma va ortlar ta’riflaridan (18-rasm) quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}.$$



18-rasm

Yuqoridagi natijalarni 18-rasmdan topish uchun vektorial ko‘paytmadagi ikkinchi ko‘paytuvchidan soat miliga teskari yo‘nalishda burilib, vektorial ko‘paytmani topamiz. Masalan, $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}$ ko‘paytmani topish uchun ***j*** ortdan soat miliga teskari yo‘nalishda burilib, ***k*** ort vektorga kelamiz.

Vektorial ko‘paytmaning 1- xossasiga binoan

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$$

tengliklarni olamiz. Bu natijalarni yuqoridagi rasmda soat mili bo‘yicha burilib topishimiz mumkin.

Yuqoridagi ortlar uchun tengliklar va vektorial ko‘paytma xossalaridan foydalanib ushbu natijaga kelamiz:

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\times(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})=x_1x_2\,\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+x_1y_2\,\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+x_1z_2\,\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+$

$+y_1x_2\,\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+y_1y_2\,\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+y_1z_2\,\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+z_1x_2\,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+z_1y_2\,\boldsymbol{k}\times c\boldsymbol{j}+z_1z_2\,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=$

$=x_1y_2\,\boldsymbol{k}-x_1z_2\,\boldsymbol{j}-y_1x_2\,\boldsymbol{k}+y_1z_2\,\boldsymbol{i}+z_1x_2\,\boldsymbol{j}-z_1y_2\,\boldsymbol{i}=$

$=(y_1z_2 - z_1y_2)\boldsymbol{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\boldsymbol{j}+(x_1y_2 - y_1x_2)\boldsymbol{k}=(y_1z_2 - z_1y_2,\ z_1x_2-x_1z_2,\ x_1y_2 - y_1x_2).$

Demak, $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlarning vektorial ko‘paytmasi $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(x, y, z)$ koordinatalari

$$x=y_1z_2 - z_1y_2, \quad y = z_1x_2-x_1z_2, \quad z=x_1y_2 - y_1x_2$$

formulalar bilan topiladi. Ammo bu formulalarni esda saqlab qolish oson emas. Shu sababli bu natijalarni qulayroq ko‘rinishda yozish maqsadida koordinatalar uchun topilgan natijalarni ikkinchi tartibli determinantlar orqali ifodalaymiz:

$$x = y_1z_2 - z_1y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \qquad y = z_1x_2 - x_1z_2 = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix};$$
$$z = x_1y_2 - y_1x_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}; \tag{1}$$

Laplas teoremasidan foydalanib, ushbu uchinchi tartibli determinantga kelamiz:

$$\boldsymbol{a}\times \boldsymbol{b} = x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathrm{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathrm{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\mathrm{k} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Demak, $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlarning vektorial ko‘paytmasini determinant orqali

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \tag{2}$$

formula bilan topish mumkin.

Misol: $\boldsymbol{a}=(2; 3; -1)$ va $\boldsymbol{b}=(3; -1; -4)$ vektorlarning vektorial ko‘paytmasini toping.

Yechish: (2) formulaga asosan

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -13\boldsymbol{i}+ 5\boldsymbol{j}-11\boldsymbol{k}= (-13, 5, -11). \tag{3}$$

3.3. Vektorial ko‘paytmaning tatbiqlari. Endi vektorial ko‘paytmaning tatbiqlari sifatida quyidagi masalalarni yechamiz.

1-masala. $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ vektorlardan hosil qilingan parallelogramm yuzini toping.

Yechish: Vektorial ko‘paytma ta’rifining 1-sharti va (1) formulaga asosan parallelogramm yuzi S quyidagicha topiladi:

$$S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2} \tag{4}$$

Misol: $\boldsymbol{a}=(2; 3; -1)$ va $\boldsymbol{b}=(3; -1; -4)$ vektorlarga yasalgan parallelogramm yuzasini toping.

Yechish: Bunda (3) tenglikdan $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}= -13\boldsymbol{i}+ 5\boldsymbol{j}-11\boldsymbol{k}= (-13, 5, -11)$ ekanligi ma’lum. Shu sababli (4) formulaga asosan

$$S=\sqrt{(-13)^2+5^2+(-11)^2}=\sqrt{169+25+121}=\sqrt{315}=3\sqrt{35}$$

Natija. ***a*** va ***b*** vektorlardan yasalgan uchburchakning yuzi

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\,|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2} \qquad (5)$$

formula bilan topiladi.

2-masala. $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ vektorlarning kollinearlik shartini toping.

Yechish: Oldin ko‘rilgan vektorial ko‘paytmaning 4-xossasiga asosan $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlar kollinear bo‘lishi uchun ularning vektorial ko‘paytmasi $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ bo‘lishi kerak. Unda (1) formuladan quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$x=y_1z_2-z_1y_2=0;\quad y=z_1x_2-x_1z_2=0;\quad z=x_1y_2-y_1x_2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2};\ \frac{x_1}{x_2}=\frac{z_1}{z_2};\ \frac{y_1}{y_2}=\frac{x_1}{x_2}\quad\Rightarrow\quad \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

Demak, $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlar kollinear bo‘lishi uchun

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2} \qquad (6)$$

shart bajarilishi, ya’ni ularning mos koordinatalari proporsional bo‘lishi kerak.

Misol: $\boldsymbol{a}=(m,3,2)$ va $\boldsymbol{b}=(4,6,n)$ vektorlar m va n parametrlarning qanday qiymatlarida kollinear bo‘lishini aniqlang.

Yechish: (6) kollinearlik shartiga asosan

$$\frac{m}{4}=\frac{3}{6}=\frac{2}{n}\Rightarrow m=2, n=4.$$

XULOSA

Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi natijasida son hosil bo‘ladi. Ammo fizika, mexanikaning bir qator masalalarida ikkita vektorning shunday ko‘paytmasini kiritishga to‘g‘ri keladiki, ko‘paytmada vektor hosil bo‘lishi kerak. Shu sababli vektorlarning vektorial ko‘paytmasi tushunchasi kiritilgan. Bu ko‘paytma uchun kommutattivlik qonuni bajarilmasada, distributivlik qonuni o‘z kuchini saqlab qoladi. Vektorial ko‘paytma koordinatalar orqali III tartibli determinant yordamida algebraik usulda ham topilishi mumkin. Vektorial ko‘paytma orqali vektorlarning kollinearlik sharti oddiy ko‘rinishda ifodalanadi.

Tayanch iboralar

* Vektorial ko‘paytma * Vektorial ko‘paytmaning mexanik ma’nosi
* Vektorial ko‘paytmaning xossalari * Vektorial ko‘paytmaning koordinatalardagi ifodasi *Vektorlarning kollinearlik sharti

Takrorlash uchun savollar

1. Vektorial ko‘paytma qanday ta’riflanadi?
2. Vektorial ko‘paytmaning mexanik ma’nosi nimadan iborat?
3. Vektorial ko‘paytma qanday xossalarga ega?
4. Ortlarning vektorial ko‘paytmasi qanday topiladi?
5. Vektorial ko‘paytma koordinatalarda qanday ifodalanadi?
6. Ikkita vektordan hosil qilingan parallelogramm va uchburchak yuzalari qanday topiladi?
7. Vektorlarning kollinearlik sharti nimadan iborat?

Testlardan namunalar

1. Agar $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ bo‘lsa, quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o‘rinli emas ?
   A) $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi$ (φ– $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar orasidagi burchak);
   B) $\mathbf{c}\perp\boldsymbol{a}$; C) $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$**;** D) $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar bir tekislikda yotadi;
   E) Barcha tasdiqlar o‘rinli.

2. Qanday $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning skalyar va vektorial ko‘paytmalari o‘zaro teng bo‘ladi ?

A) Bu vektorlar teng bo‘lsa; B) Bu vektorlar kollinear bo‘lsa;
C) Bu vektorlar ortogonal bo‘lsa; D) Bu vektorlar qarama-qarshi bo‘lsa;
E) Bunday vektorlar mavjud emas.

3. Qaysi shartda $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar uchun $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ tenglik o‘rinli ?

A) Bu vektorlar teng bo‘lsa; B) Bu vektorlar kollinear bo‘lsa;
C) Bu vektorlar ortogonal bo‘lsa; D) Bu vektorlar qarama-qarshi bo‘lsa;
E) Bunday vektorlar mavjud emas.

4. Agar $|\boldsymbol{a}|=4$, $|\boldsymbol{b}|=5$ va $\varphi=30^0$ bo‘lsa, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=?$
   A) 20 ; B) 10 ; C) $10\sqrt{3}$; D) 41 ; E) 0.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Berilgan $\boldsymbol{a}=(n-3,\ n+1,\ 2n-1)$ va $\boldsymbol{b}=(n+2,\ n,\ n-1)$ vektorlardan tuzilgan parallelogramm yuzasini toping.
2. $\boldsymbol{a}=(\lambda n, n-2, n+1)$ va $\boldsymbol{b}=(n-3, \mu n, n-1)$ vektorlar λ va μ parametrlarning qanday qiymatlarida kollinear bo‘lishini aniqlang.

§4. VEKTORLARNING ARALASH KO‘PAYTMASI, UNING XOSSALARI VA TATBIQLARI

- ***Vektorlarning aralash ko‘paytmasi va uning xossalari.***
- ***Aralash ko‘paytmaning koordinatalardagi ifodasi.***
- ***Aralash ko‘paytmaning tatbiqlari.***

4.1. Vektorlarning aralash ko'paytmasi va uning xossalari. Uchta ***a*, *b*, *c*** vektorlarni o'zaro ko'paytirish masalasini ko'raylik. Agar ***a*** ва ***b*** vektorlarni skalyar ko'paytirib, natijada hosil bo'lgan sonni ***c*** vektorga ko'paytirsak, u holda ***c*** vektorga kollinear vektor hosil bo'ladi. Agarda birinchi ikkita vektorni vektorial ko'paytirib, natijada hosil bo'lgan vektorni uchinchi ***c*** vektorga yana vektorial ko'paytirsak, unda yangi bir ***d*** vektor hosil qilamiz. Bundan tashqari uchta vektorni quyidagi usulda ham ko'paytirish mumkin.

1-TA'RIF: ***a*, *b*, *c*** vektorlarning ***aralash ko'paytmasi*** deb dastlabki ikkita vektorlarning ***a×b*** vektorial ko'paytmani uchinchi ***c*** vektorga skalyar ko'paytmasi kabi aniqlanadigan songa aytiladi.

a*, *b*, *c vektorlarning aralash ko'paytmasi ***abc*** kabi belgilanadi va , ta'rifga asosan, ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$\boldsymbol{abc} = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} \qquad (1)$$

Bu yerda ham vektorial, ham skalyar ko'paytma qatnashgani uchun (1) aralash ko'paytma deb atalgan.

Aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosini ko'rib o'taylik. Buning uchun komplanar bo'lmagan ***a*, *b*, *c*** vektorlarni qaraylik. Ma'lumki, ***a×b*** uzunligi ***a*** va ***b*** vektorlardan tuzilgan parallelogrammning yuzasiga teng va parallelogramm tekisligiga perpendikulyar yo'nalgan vektordan iborat bo'ladi. Agar ***a×b*** vektorga ***c*** vektorni proyeksiyalasak, u holda shu proyeksiya parallelogramm tekisligiga perpendikulyar bo'lib, uning moduli ***a*, *b*, *c*** vektorlarga qurilgan parallelepiped balandligi H qiymatini ifodalaydi. Unda bu parallelopiped hajmi uchun

$$V=S_{asos}\cdot H= |(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{abc}| \qquad (2)$$

formulaga ega bo'lamiz. Shunday qilib, ***abc*** aralash ko'paytmaning absolut qiymati ***a*, *b*, *c*** vektorlarga qurilgan parallelepiped hajmini ifodalar ekan.

Endi aralash ko'paytmaning xossalarini ko'rib o'tamiz:

❖ Aralash ko'paytmada vektorial va skalyar ko'paytma amallari o'rnini almashtirish mumkin, ya'ni

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) .$$

Shu sababli aralash ko'paytmada amallarni ko'rsatmasdan, qisqacha ***abc*** kabi yozish mumkin.

❖ Aralash ko'paytmada ko'paytuvchilar o'rnini soat miliga teskari yo'nalish bo'yicha doiraviy ravishda almashtirilsa, uning qiymati o'zgarmasdan qoladi, ya'ni

$$\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{cab} = \boldsymbol{bca} = \boldsymbol{abc}.$$

Bunga aralash ko'paytmaning aylanma xossasi deb aytiladi.

❖ Aralash ko'paytmada yonma – yon turgan vektorlarning o'rni almashtirilsa, uning ishorasi qarama-qarshisiga o'zgaradi, ya'ni

$$\boldsymbol{abc} = -\,\boldsymbol{bac} = \boldsymbol{bca} = -\,\boldsymbol{cba}.$$

Skalyar (vektorial) ko'paytmani qaysi hollarda nolga (nol vektorga) teng bo'lishini tahlil qilgan edik. Bu savolni endi aralash ko'paytma uchun ko'rib chiqaylik. Aralash ko'paytma quyidagi hollarda nolga teng bo'ladi:

1) ko'paytuvchi vektorlardan kamida bittasi nol vektor;
2) ko'paytuvchi vektorlardan kamida ikkitasi kollinear;
3) ko'paytuvchi vektorlar komplanar bo'lsa.

Birinchi holda aralash ko‘paytmaning nol bo‘lishi o‘z–o‘zidan kelib chiqadi. Ikkinchi holda, ya’ni ikkita vektor kollinear bo‘lsa, unda ularning vektorial ko‘paytmasi nol va shu sababli aralash ko‘paytma ham nolga teng bo‘ladi. Uchinchi holda $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ va $\boldsymbol{c}$ vektorlar perpendikulyar bo‘ladi va shu tufayli ularning skalyar ko‘paytmasi, ya’ni aralash ko‘paytma nolga teng bo‘ladi.

Natijada quyidagi tasdiqni olamiz:

TEOREMA. Noldan farqli uchta vektorning komplanar bo‘lishi uchun ularning aralash ko‘paytmasi nolga teng bo‘lishi zarur va yetarlidir.

4.2. Aralash ko‘paytmaning koordinatalardagi ifodasi. Endi koordinatalari bilan berilgan uchta $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ va $\boldsymbol{c}=(x_3, y_3, z_3)$ vektorlarning aralash ko‘paytmasini hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz. Vektorial ko‘paytmani hisoblash formulasidagi determinantni Laplas teoremasiga asosan birinchi satr bo‘yicha yoyilmasini qaraymiz:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathrm{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathrm{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\mathrm{k}=\mathrm{Xi}+\mathrm{Yj}+\mathrm{Zk}.$$

Skalyar ko‘paytmani hisoblash formulasi va yuqoridagi tenglikka hamda determinantning satr bo‘yicha yoyilmasiga asosan

$$\boldsymbol{abc}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\mathrm{X}x_3+\mathrm{B}\,y_3+\mathrm{C}\,z_3=\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (3)$$

Demak, $\boldsymbol{abc}$ aralash ko‘paytma birinchi, ikkinchi va uchinchi satrlari mos ravishda $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ va $\boldsymbol{c}$ vektorlarning koordinatalaridan tuzilgan III tartibli determinant kabi hisoblanadi.

Masalan, $\boldsymbol{a}=(3,1,-2)$, $\boldsymbol{b}=(4,0,1)$, $\boldsymbol{c}=(0,2,-1)$ vektorlarning aralash ko‘paytmasini (3) formula bo‘yicha topamiz:

$$\boldsymbol{abc}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-18.$$

4.3. Aralash ko‘paytmaning tatbiqlari. Aralash ko‘paytmaning tatbiqlari sifatida quyidagi masalalarni qaraymiz.

1-masala: Koordinatalari bilan berilgan uchta $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ va $\boldsymbol{c}=(x_3, y_3, z_3)$ vektorlarning komplanarlik shartini toping.

Yechish: Yuqorida ko‘rib o‘tilgan teorema va (3) formulaga asosan bu vektorlarning komplanar bo‘lishi uchun

$$\boldsymbol{abc}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0 \quad (4)$$

shart bajarilishi zarur va yetarli.

Misol: $\boldsymbol{a}=(m,-12,-2)$, $\boldsymbol{b}=(0,m,1)$ va $\boldsymbol{c}=(1,2,3)$ vektorlar m parametrning qanday qiymatlarida komplanar bo‘lishini toping .

Yechish: Komplanarlikning kordinatalardagi (4) shartiga asosan

$$\boldsymbol{abc}=\begin{vmatrix} m & -12 & -2 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 3m^2-12+2m-2m=0 \Rightarrow m^2=4 \Rightarrow m=\pm 2.$$

2-masala: Koordinatalari bilan berilgan uchta $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ va $\boldsymbol{c}=(x_3, y_3, z_3)$ vektorlardan yasalgan parallelepipedning V hajmini toping.

Yechish: Aralash ko‘paytmaning geometrik ma’nosini ifodalovchi (2) tenglik va (3) formulaga asosan

$$V=|\boldsymbol{abc}|=\pm\,\boldsymbol{abc}=\pm\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Misol: $\boldsymbol{a}=(3,-1,2)$, $\boldsymbol{b}=(0,3,1)$ va $\boldsymbol{c}=(1,2,3)$ vektorlardan yasalgan parallelepipedning V hajmini toping.

Yechish: (5) formulaga binoan

$$V=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=14.$$

3-masala: Koordinatalari bilan berilgan uchta $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ va $\boldsymbol{c}=(x_3, y_3, z_3)$ vektorlardan tuzilgan piramidaning V hajmini toping.

Yechish: Berilgan $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ va $\boldsymbol{c}$ vektorlardan tuzilgan piramidaning asosidagi $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar hosil qilgan uchburchak yuzasini S, balandligini h va hajmini V deb olsak, $V=Sh/3$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Shu vektorlardan tuzilgan parallelepiped asosining yuzasi 2S, balandligi esa h bo‘ladi. Bu parallelepiped hajmini V_0 deb olsak, $V_0=2Sh=|\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}|$ bo‘ladi.

Bu holda piramida hajmi

$$V=V_0/6=|\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}|/6=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad (6)$$

formula bilan hisoblanadi.

4-masala: Fazodagi to‘rtta $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ va $M_4(x_4, y_4, z_4)$ nuqtalarni bir tekislikda yotish shartini toping.

Yechish: M_1, M_2, M_3 va M_4 nuqtalar bir tekislikda yotishi uchun

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1), \quad \overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_4}=(x_4-x_1, y_4-y_1, z_4-z_1)$$

vektorlarni komplanar bo‘lishi zarur va yetarli. Shu sababli, (4) formulaga asosan,bu to‘rtta nuqtani bir tekislikda yotishi uchun

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

5-masala: $M_1(1,m,\ -1)$**,** $M_2=(0,1,2m+1)$, $M_3=(-1,m,1)$ va $M_4=(2,1,3)$ nuqtalar m parametrning qanday qiymatlarida bir tekislikda joylashgan boʻlishini toping.

Yechish: (7) shartdan foydalanib, ushbu natijani olamiz:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1-m & 2(m+1) \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1-m & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4(1-m)(2-m) = 0 \Rightarrow m_1 = 1, m_2 = 2.$$

Demak, $m=1$ yoki $m=2$ boʻlganda yuqoridagi toʻrtta nuqta bir tekislikda yotadi va ular

$$M_1(1,1,-1),\ M_2=(0,1,3),\ M_3=(-1,1,1),\ M_4=(2,1,3)$$

yoki

$$M_1(1,2,-1),\ M_2=(0,1,5),\ M_3=(-1,2,1),\ M_4=(2,1,3)$$

koʻrinishda boʻladi.

XULOSA

Skalyar va vektortal koʻpaytmalar ikkita vektor uchun aniqlanadi. Uchta vektorning koʻpaytmasi tushunchasini kiritish uchun ularning dastlabki ikkitasi vektorial koʻpaytirilib, hosil boʻlgan natija bilan uchinchisi skalyar koʻpaytiriladi. Natijada hosil boʻlgan son uch vektorning aralash koʻpaytmasi deyiladi. Aralash koʻpaytma qiymati uchala vektorlarning koordinatalaridan hosil qilingan III tartibli determinantni hisoblash orqali topilishi mumkin. Aralash koʻpaytma yordamida vektorlarning komplanarlik shartini aniqlash, qirralari berilgan uchta vektordan iborat parallelepipedning hajmini hisoblash, toʻrtta nuqtani bir tekislikda yotishini aniqlash kabi masalalar oson yechiladi.

Tayanch iboralar

* Aralash koʻpaytma * Aralash koʻpaytmaning geometrik ma'nosi * Aralash koʻpaytmaning xossalari * Aralash koʻpaytmaning koordinatalardagi ifodasi
* Uch vektorning komplanarlik sharti

Takrorlash uchun savollar

1. Vektorlarning aralash koʻpaytmasi qanday aniqlanadi ?
2. Aralash koʻpaytmaning geometrik ma'nosi nimadan iborat ?
3. Aralash koʻpaytma natijasida qanaqa kattalik hosil boʻladi ?
4. Aralash koʻpaytma qanday xossalarga ega?
5. Qanday vektorlar komplanar deyiladi ?
6. Uchta vektor komplanarligining zaruriy va yetarli sharti nimadan iborat ?
7. Aralash koʻpaytma koordinatalar orqali qanday topiladi?
8. Uchta komplanar boʻlmagan vektordan hosil qilingan parallelepiped hajmi qaysi formula bilan topiladi?

9. Uchta komplanar bo‘lmagan vektorga yasalgan piramida (tetraedr) hajmi qaysi formula bilan hisoblanadi ?
10. Uchta vektorning komplanarlik sharti koordinatalar orqali qanday ifodalanadi ?
11. Fazodagi to‘rtta nuqta qaysi shartda bir tekislikda yotadi?

Testlardan namunalar

1. Qachon $|\boldsymbol{abc}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|$ tenglik o‘rinli bo‘ladi ?
A) Agar ***a***, ***b*** va ***c*** vektorlar o‘zaro perpendikulyar bo‘lsa;
B) Agar $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$ shart bajarilsa; C) Agar ***a***, ***b*** va ***c*** kollinear bo‘lsa;
D) Agar ***a***, ***b*** va ***c*** vektorlar komplanar bo‘lsa; E) Agar ***a***=***b***=***c*** bo‘lsa.

2. $X=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$ aralash ko‘paytma ifodasini soddalashtiring.
A) $X=\boldsymbol{abc}$; B) $X=2\boldsymbol{abc}$; C) $X=3\boldsymbol{abc}$; D) $X=4\boldsymbol{abc}$;
E) To‘g‘ri javob ko‘rsatilmagan.

3. Agar λ va μ ixtiyoriy sonlar bo‘lsa, $X=\boldsymbol{ab}(\boldsymbol{c}+\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$ aralash ko‘paytma ifodasini soddalashtiring.
A) $X=\boldsymbol{abc}$; B) $X=\lambda\boldsymbol{abc}$; C) $X=\mu\boldsymbol{abc}$; D) $X=(\lambda+\mu)\boldsymbol{abc}$;
E) To‘g‘ri javob ko‘rsatilmagan.

4. Koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,0,4)$ va $\boldsymbol{c}=(5,-2,0)$ vektorlarning aralash ko‘paytmasi ***abc*** hisoblansin.
A) 0 ; B) 23 ; C) –46 ; D) –23 ; E) 1 .

5. m parametrning qanday qiymatlarida $\boldsymbol{a}=(2,0,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,-1,m)$ va $\boldsymbol{c}=(-1,3m,1)$ vektorlar komplanar bo‘ladi ?
A) 1 va –0,5 ; B) 1 va –1 ; C) 0,5 va 1 ; D) 0,5 va –1 ; B) –0,5 va 0,5 .

Mustaqil ish topshiriqlari

1. $\boldsymbol{a}=(n, 2n+1, 1-n)$, $\boldsymbol{b}=(n+1, n-1, 2n)$ va $\boldsymbol{c}=(n-1, 3n, 1)$ vektorlarning aralash ko‘paytmasini hisoblang.

2. Berilgan $\boldsymbol{a}=(n, 2n+1, 1-n)$, $\boldsymbol{b}=(n+1, n-1, \lambda)$ va $\boldsymbol{c}=(n-1, 3n, 1)$ vektorlar λ parametrning qanday qiymatida komplanar bo‘ladi ?

3. $\boldsymbol{a}=(n+2, 2n, 1-2n)$, $\boldsymbol{b}=(n, 2n-1, 0)$ va $\boldsymbol{c}=(n-1, 3n, 1)$ vektorlar orqali hosil qilingan parallelepiped hajmini hisoblang.

§5. VEKTOR VA CHIZIQLI FAZOLAR

- ***Vektor fazolar.***
- ***Chiziqli fazolar.***

5.1. Vektor fazolar. Oldin biz tekislik va fazoda vektor tushunchasini kiritib, bu vektorlar to‘plamida vektorlarni qo‘shish, ayirish, songa ko‘paytirish, ularni o‘zaro skalyar, vektorial va aralash ko‘paytirish amallarini kiritgan edik. Bunda vektorlarni tekislikda $x=x_1$, $y=x_2$ koordinatalari orqali tartiblashtirilgan (x_1, x_2) haqiqiy sonlar juftligi, fazoda esa $x=x_1$, $y=x_2$, $z=x_3$ koordinatalari orqali tartiblashtirilgan (x_1, x_2, x_3) haqiqiy sonlar uchligi kabi aniqlash mumkin. Ammo turli masalalarni qarashda to‘rt va undan ortiq sonlar bilan aniqlanadigan obyektlar ham uchraydi. Masalan, fazoda sharni joylanishini ko‘rsatish uchun uning markazini koordinatalari x_1, x_2 va x_3 bilan bir qatorda x_4=R radiusini bilishimiz kerak. Ishlab chiqarilayotgan mahsulot haqida ma’lumotga ega bo‘lish uchun uning tannarxini (x_1), hajmini (x_2), narxini (x_3), unga ehtiyojni (x_4), uni sotishdan olingan foydani (x_5) va hokazo iqtisodiy ko‘rsatkichlarni bilishimiz kerak. Shu sababli matematikada vektor tushunchasi quyidagicha umumlashtiriladi.

1-TA’RIF: Tartiblashgan n ta haqiqiy sonlardan tashkil topgan $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ko‘rinishdagi ifodaga ***n o‘lchovli vektor*** deyiladi. Bu yerda x_i (i=1,2,…,n) sonlari $\boldsymbol{x}$ vektorning ***komponentalari*** deb ataladi.

Masalan, n noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasining har bir yechimi, har qanday n-tartibli ko‘phadning koeffitsiyentlari, $m\times n$ tartibli matritsaning har bir satr elementlari n o‘lchovli vektorlar bo‘ladi. Iqtisodiyotda ham n o‘lchovli vektor tushunchasi keng qo‘llaniladi. Masalan, n xil mahsulotlarning bir birligini islab chiqarish uchun sarflanadigan elektr energiyasi miqdorlari $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, tannarxlari $\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$, narxlari esa $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ kabi n o‘lchovli vektorlar ko‘rinishida ifodalanishi mumkin.

Kelgusida vektorlar deyilganda n o‘lchovli vektorlarni tushunamiz.

2-TA’RIF2: Agar $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ va $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ vektorlarning mos komponentalari teng, ya’ni

$$x_1=y_1,\ x_2=y_2,\ \ldots,\ x_n=y_n$$

shart bajarilsa, ular **teng *vektorlar*** deyiladi.

Ikkita $\boldsymbol{x}$ va $\boldsymbol{y}$ vektorlarning tengligi $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ kabi belgilanadi.

3-TA’RIF: Barcha komponentalari nolga teng bo‘lgan vektor ***nol vektor*** deyiladi.

Nol vektor **0** kabi belgilanadi va **0**=(0,0, …, 0) ko‘rinishda bo‘ladi.

Endi ko‘p o‘lchovli vektorlar ustida algebraik amallar kiritamiz.

4-TA’RIF: Ikkita $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ va $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ vektorlarning ***yig‘indisi*** deb shunday $\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ vektorga aytiladiki, uning komponentalari $\boldsymbol{x}$ va $\boldsymbol{y}$ vektorlarning mos komponentalarini qo‘shishdan hosil bo‘ladi, ya’ni

$$z_1=x_1+y_1,\ z_2=x_2+y_2,\ \ldots,\ z_n=x_n+y_n\ .$$

Ikkita $\boldsymbol{x}$ va $\boldsymbol{y}$ vektorlarning yig‘indisi $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ kabi belgilanadi. Vektorlarni qo‘shish amali quyidagi xossalarga ega bo‘lishini ko‘rish qiyin emas:

1. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ – kommutativlik qonuni;
2. $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$ – assotsiativlik qonuni;
3. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.

5-TA’RIF: $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ vektorni λ ***songa ko‘paytmasi*** deb shunday $\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ vektorga aytiladiki, uning komponentalari $\boldsymbol{x}$ vektorning barcha komponentalarini λ songa ko‘paytirishdan hosil bo‘ladi, ya’ni

$$z_1=\lambda x_1,\ z_2=\lambda x_2,\ \ldots,\ z_n=\lambda x_n\ .$$

Biror $\boldsymbol{x}$ vektorni λ songa ko‘paytmasi $\lambda\boldsymbol{x}$ kabi belgilanadi. Bu amal quyidagi xossalarga ega bo‘ladi:

1. $\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}$, $(\lambda\pm\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\pm\mu\boldsymbol{y}$;
2. $\lambda(\mu\boldsymbol{x})=(\lambda\mu)\boldsymbol{y}$;
3. $1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$, $0\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, $\lambda\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$.

<u>6-TA’RIF:</u> Har qanday $\boldsymbol{x}$ vektor uchun $(-1)\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}$ unga ***qarama-qarshi vektor*** deyiladi.

Qarama-qarshi vektorlar uchun doimo $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

<u>7-TA’RIF:</u> Ikkita $\boldsymbol{x}$ va $\boldsymbol{y}$ vektorlarning ***ayirmasi*** deb $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{y})$ vektorga aytiladi. Vektorlar ayirmasi $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ kabi belgilanadi. Agar $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ va $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ bo‘lsa, unda $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=(x_1-y_1, x_2-y_2, \ldots, x_n-y_n)$ bo‘ladi.

Masalan, $\boldsymbol{x}=(3,-2,5,7,-4)$ va $\mathbf{y}=(0,7,9,-1,2)$ besh o‘lchovli vektorlar berilgan bo‘lsa, unda

$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(3,-2,5,7,-4)+(0,7,9,-1,2)=(3+0,-2+7,5+9,7+(-1),-4+2)=(3,5,14,6,-2)$,

$5\boldsymbol{x}=5(3,-2,5,7,-4)=(5\cdot3, 5\cdot(-2), 5\cdot5, 5\cdot7, 5\cdot(-4))=(15,-10,25,35,-20)$,

$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=(3,-2,5,7,-4)-(0,7,9,-1,2)=(3,-9,-4,8,-6)$.

<u>8-TA’RIF:</u> Vektorlar to‘plami va unda aniqlangan vektorlarni o‘zaro qo‘shish hamda songa ko‘paytirish amallardan iborat sistema ***vektor fazo*** deb ataladi.

5.2. Chiziqli fazolar. Biz kiritgan vektor fazolar matematikada chiziqli fazolar deb ataladigan tushunchaning xususiy bir holi bo‘lib hisoblanadi. Qandaydir elementlardan (ularni vektorlar deb ataymiz) tashkil topgan **L** to‘plamda “+” kabi belgilanadigan biror binar “qo‘shish” amali kiritilgan , ya’ni ixtiyoriy ikkita $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{L}$ elementlarga uchinchi bir $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in\mathbf{L}$ element mos qo‘yilgan bo‘lsin. Bundan tashqari **L** to‘plamda songa “ko‘paytirish” amali “×” ham aniqlangan, ya’ni ixtiyoriy λ soni va $\boldsymbol{x}\in\mathbf{L}$ elementga $(\lambda\times\boldsymbol{x})\in\mathbf{L}$ element mos qoyilgan bo‘lsin. Bu amallar uchun quyidagi xossalar (aksiomalar) o‘rinli bo‘lsin:

1. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ — kommutativlik qonuni ;
2. $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$ — “qo‘shish” uchun assotsiativlik qonuni ;
3. Nol deb ataluvchi shunday **0** element mavjudki, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}$;
4. Distributivlik qonunlari:
   $(\lambda+\mu)\times\boldsymbol{x}=(\lambda\times\boldsymbol{x})+(\mu\times\boldsymbol{x})$, $\lambda\times(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(\lambda\times\boldsymbol{x})+(\lambda\times\boldsymbol{y})$;
5. $(\lambda\mu)\times\boldsymbol{x}=\lambda(\mu\times\boldsymbol{x})$ — “ko‘paytirish” uchun assotsiativlik qonuni ;
6. $1\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.

<u>9-TA’RIF:</u> **L** to‘plamda “qo‘shish” va ”songa ko‘paytirish” amallari aniqlangan bo‘lib, bu amallar 1 – 6 shartlarni qanoatlantirsa, unda **L** ***chiziqli fazo*** deb ataladi.

Masalan, $m\times n$ tartibli matritsalar, darajasi n dan katta bo‘lmagan ko‘phadlar, bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining yechimlari, $[a,b]$ kesmada aniqlangan funktsiyalar toplamlari ularda aniqlangan qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari bilan birgalikda chiziqli fazolar bo‘ladi.

Endi chiziqli fazolarga doir asosiy tushuncha va tasdiqlarni keltiramiz. Ular vektor fazolar uchun ham o‘rinli bo‘lishini ta’kidlab o‘tamiz. Bunda, qulaylik uchun, chiziqli fazodagi $\lambda\times\boldsymbol{x}$ “ko‘paytirish” amalini vektor fazodagi singari $\lambda\boldsymbol{x}$ kabi ifodalaymiz.

10-TA’RIF: Chiziqli fazoning $\boldsymbol{a}$ vektori shu fazoning $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m$ vektorlarining ***chiziqli kombinatsiyasi*** deyiladi, agarda qandaydir $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ sonlarda quyidagi tenglik bajarilsa:

$$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\,\boldsymbol{a}_2+\ldots+\lambda_m\,\boldsymbol{a}_m \qquad (1)$$

Masalan, $\boldsymbol{a}=(18,1,13)$ vektor $\boldsymbol{a}_1=(3,-1,2)$ va $\boldsymbol{a}_2=(4,1,3)$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi bo‘ladi. Haqiqatan ham $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$ deb olsak,

$$\lambda_1\,\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\,\boldsymbol{a}_2=2(3,-1,2)+3(4,1,3)=(6+12,\ -2+3,4+9)=(18,1,13)=\boldsymbol{a}.$$

11-TA’RIF: Chiziqli fazoning $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m$ vektorlari uchun kamida bittasi noldan farqli bo‘lgan qandaydir $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ sonlarida

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\,\boldsymbol{a}_2+\ldots+\lambda_m\,\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0} \qquad (2)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, unda bu vektorlar ***chiziqli bog‘liq*** deyiladi. Aks holda,ya’ni (2) tenglik faqat $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m=0$ bo‘lganda bajarilsa, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m$ vektorlar ***chiziqli bog‘liqmas (erkli)*** deyiladi.

Agar $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m$ vektorlar chiziqli bog‘liq bo‘lsa, u holda ularning har bittasi qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida ifodalanadi va aksincha, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m$ vektorlardan birortasi qolganlari orqali chiziqli ifodalansa, u holda ular chiziqli bog‘liq bo‘ladi.

Masalan, $\boldsymbol{a}_1=(1,0,0,0)$, $\boldsymbol{a}_2=(0,1,0,0)$, $\boldsymbol{a}_3=(0,0,1,0)$, $\boldsymbol{a}_4=(0,0,0,1)$ vektorlar chiziqli bog‘liqmas (erkli); $\mathbf{c}_1=(3,0,0,0)$, $\mathbf{c}_2=(0,0,1,0)$, $\mathbf{c}_3=(6,0,-7,0)$ vektorlar esa chiziqli bog'liq , chunki $2\mathbf{c}_1-7\mathbf{c}_2+\mathbf{c}_3=\mathbf{0}$ bo‘ladi.

12-TA’RIF: Chiziqli fazo ***n o‘lchovli*** deyiladi, agar unda n ta chiziqli bog‘liqmas vektorlar mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $(n+1)$ta vektor chiziqli bog‘liq bo‘lsa.

Masalan, n o‘lchovli vektorlardan iborat vektor (chiziqli) fazo, darajasi $(n-1)$ dan katta bo‘lmagan $\mathrm{P}_{n-1}(x)$ ko‘phadlardan tashkil topgan chiziqli fazo n o‘lchovli bo‘ladi. Haqiqatan ham vektorlar fazosining ushbu n ta vektorlari

$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,\ldots,0)$, $\boldsymbol{e}_2=(0,1,0,\ldots,0)$, $\boldsymbol{e}_3=(0,0,1,\ldots,0)$, … , $\boldsymbol{e}_n=(0,0,0,\ldots,1)$

chiziqli bog‘liq bo‘lmasdan, ixtiyoriy $(n+1)$-elementi $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ uchun

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3+\ldots+x_n\boldsymbol{e}_n$$

tenglik o‘rinli. Demak bu vektor fazoda har qanday $(n+1)$ ta vektor chiziqli bog‘liqdir.

Shunga o‘xshash darajasi $n-1$dan katta bo‘lmagan ko‘phadlar chiziqli fazosida n ta $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^{n-2}, x^{n-1}$ vektorlar chiziqli bog‘liqmas bo‘lib, barcha $\mathrm{P}_m(x)$ ko‘phadlar $(0\leq m\leq n-1)$ ularning chiziqli kombinatsiyasi sifatida ifodalanadi.

$[a,b]$ kesmada aniqlangan funksiyalar chiziqli fazosi chekli o‘lchovli bo‘lmaydi, chunki undagi $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^{n-1}, x^n, \cdots$ vektorlarning cheksiz ketma-ketligi chiziqli bog‘liqmasdir.

13-TA’RIF: n o‘lchovli chiziqli fazoning ixtiyoriy n ta chiziqli bog‘liqmas vektorlari to‘plami shu fazoning ***bazisi*** deyiladi.

Masalan, to‘rt o‘lchovli vektor fazoda yuqorida ko‘rib o‘tilgan

$$\boldsymbol{a}_1=(1,0,0,0),\ \boldsymbol{a}_2=(0,1,0,0),\ \boldsymbol{a}_3=(0,0,1,0),\ \boldsymbol{a}_4=(0,0,0,1)$$

vektorlar bazisni tashkil etadi.

1-TEOREMA: Chiziqli fazoning har bir $\boldsymbol{x}$ vektorini shu fazoning bazis vektorlarining chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida yagona ravishda ifodalash mumkin.

Isbot: Faraz qilaylik $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ va $\boldsymbol{x}$ vektorlar n o‘lchovli vektor fazoning ixtiyoriy bir bazisi va ixtiyoriy bir vektori bo‘lsin. Unda, ixtiyoriy $(n+1)$ta vektorlar chiziqli bog‘liq ekanligidan, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ va $\boldsymbol{x}$ vektorlar birgalikda chiziqli bog‘liq bo‘lishi kelib chiqadi. Bu holda bir vaqtning o‘zida barchasi nolga teng bo‘lmagan $(n+1)$ta shunday $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, λ sonlar mavjudki,

$$\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n+\lambda\boldsymbol{x}=\mathbf{0} \qquad (3)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu tenglikda $\lambda\neq0$ bo‘ladi. Haqiqatan ham, agar $\lambda=0$ bo‘lsa, u holda (3) tenglikdan $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ vektorlar chiziqli bog‘liq ekanligi, ya’ni ular bazis tashkil etmasligi kelib chiqadi. Demak $\lambda\neq0$ bo‘lib, (3) tenglikdan

$$\boldsymbol{x}=-\frac{\lambda_1}{\lambda}\boldsymbol{e}_1-\frac{\lambda_2}{\lambda}\boldsymbol{e}_2-\cdots-\frac{\lambda_n}{\lambda}\boldsymbol{e}_n=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+x_n\boldsymbol{e}_n \quad (x_i=\lambda_i/\lambda,\ i=1,2,\ldots,n) \qquad (4)$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bu yerdan $\boldsymbol{x}$ vektor $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ bazis orqali chiziqli ifodalanishi kelib chiqadi. Endi $\boldsymbol{x}$ vektor $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ bazis orqali (4) ko‘rinishda yagona ravishda ifodalanishini ko‘rsatamiz. Teskarisini faraz qilamiz , ya’ni (4) tenglikdan tashqari

$$\boldsymbol{x}=y_1\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+y_n\boldsymbol{e}_n$$

tenglik ham o‘rinli deb olamiz. Bu tengliklarni hadma-had ayirib,

$$(x_1-y_1)\boldsymbol{e}_1+(x_2-y_2)\boldsymbol{e}_2+\ldots+(x_n-y_n)\boldsymbol{e}_n=\mathbf{0}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikdan ($\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ bazis bo‘lgani uchun)

$$x_1-y_1=0,\ x_2-y_2=0,\ \ldots,\ x_n-y_n=0 \Rightarrow x_1=y_1,\ x_2=y_2,\ \ldots,\ x_n=y_n$$

natijaga kelamiz. Demak, $\boldsymbol{x}$ uchun (4) chiziqli kombinatsiya yagona ravishda aniqlandi. Teorema isbot bo‘ldi.

(4) ifoda $\boldsymbol{x}$ vektorni $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ bazisdagi ***yoyilmasi***, undagi $x_1,x_2,\ldots,x_n$ koeffitsiyentlar $\boldsymbol{x}$ vektorning shu bazisga nisbatan ***koordinatlari*** deb ataladi. Demak, har qanday vektor biror bazisdagi koordinatalari orqali bir qiymatli aniqlanadi. Har qanday bazisda $\mathbf{0}$ vektorning koordinatalari bir xil va faqat nollardan iborat bo‘ladi. Ammo noldan farqli $\boldsymbol{x}$ vektorning koordinatalari har xil bazisda har xil bo‘ladi. Masalan, to‘rt o‘lchovli vektor fazoda $\boldsymbol{x}$ vektor

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,0),\ \boldsymbol{e}_2=(0,1,0,0),\ \boldsymbol{e}_3=(0,0,0,1),\ \boldsymbol{e}_4=(0,0,0,1)$$

bazisda $\boldsymbol{x}=(2,0,-3,1)$ koordinatarlga ega bo‘lsa,

$$\boldsymbol{e}_1=(1,1,0,0),\ \boldsymbol{e}_2=(0,1,1,0),\ \boldsymbol{e}_3=(0,0,1,1),\ \boldsymbol{e}_4=(0,1,0,1)$$

bazisda (tekshirib ko‘ring) uning koordinatalari $\boldsymbol{x}=(2,-3,0,1)$ bo‘lishini ko‘rsatish qiyin emas.

2-TEOREMA: Agar qandaydir $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ vektorlar sistemasi chiziqli fazoning chiziqli bog‘liqmas vektorlari bo‘lib, bu fazoning ixtiyoriy $\boldsymbol{x}$ vektori ular orqali chiziqli ifodalansa, unda bu fazo n o‘lchovli va $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ vektorlar uning bazisi bo‘ladi.

Isbot: Teoremani isbot etish uchun bu vektor fazodagi ixtiyoriy m ta $(m>n)$ $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ vektorlarni olamiz. Teorema shartiga asosan ularning har biri $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ vektorlar orqali chiziqli ifodalanadi:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \cdots + a_{1n}e_n \\ x_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{2n}e_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m = a_{m1}e_1 + a_{m2}e_2 + \cdots + a_{mn}e_n \end{cases} \qquad (5)$$

Hosil qilingan (5) sistemaning A=(a_{ij}) (i=1,2,…,m; j=1,2,…,n) matritsasini qaraymiz. Bu matritsani rangi r(A)≤min(m;n)=n bo‘ladi. Bundan A matritsaning n tadan ko‘p bo‘lmagan chiziqli erkli satrlari mavjud ekanligi kelib chiqadi. Unda, $m>n$ bo‘lgani uchun, A matritsaning m ta satri chiziqli bog‘liqdir va shu sababli $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$,…,$\boldsymbol{x}_m$ vektorlar ham chiziqli bog‘liq bo‘ladi. Bundan fazoning n o‘lchovli va $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$ uning bazisi ekanligi kelib chiqadi.

XULOSA

Tekislikdagi va fazodagi vektorlarni ularning koordinatalari orqali sonlar juftligi yoki uchligi deb ham qarash mumkin. Shu sababli bu tushunchani umumlashtirib, tartiblashtirilgan n ta sonlardan iborat ifodani n-o‘lchovli vektor deb ataladi. Bu vektorlar ustida songa ko‘paytirish, ularni o‘zaro qo‘shish va ayirish amallari koordinatalar orqali aniqlanadi. Vektorlar va ular ustida aniqlangan algebraik amallar birgalikda vektorlar fazosini hosil etadi. Vektorlar fazosi o‘z navbatida chiziqli fazolarning xususiy bir holi bo‘lib hisoblanadi. Chiziqli fazolarda algebraik amallar abstrakt ko‘rinishda aniqlanib, ularga bir qator tabiiy shartlar qo‘yiladi. Chiziqli fazo elementlari ham vektorlar deb yuritiladi. Bu fazolar chekli o‘lchovli, cheksiz o‘lchovli ham bo‘lishi mumkin. Vektorlar fazosi iqtisodiyotda ko‘p omillar bilan bog‘liq masalalarni qarashda qo‘llaniladi.

Tayanch iboralar

* *n* o‘lchovli vektor * Vektorlar tengligi * Nol vektor * Vektorlar yig‘indisi * Vektorni songa ko‘paytmasi * Qarama-qarshi vektor * Vektorlarni ayirish * Vektor fazo * Chiziqli fazo *Chiziqli kombinatsiya *Chiziqli bog‘liq vektorlar * Chiziqli bog‘liqmas vektorlar * Chiziqli fazo o‘lchovi * Bazis * Vektorning bazisdagi yoyilmasi * Vektorning koordinatalari

Takrorlash uchun savollar

1. Ko‘p o‘lchovli vektor qanday aniqlanadi?
2. Qachon ikkita vektor teng deb ataladi?
3. Nol vektor deb nimaga aytiladi ?
4. Vektorlar yig‘indisi qanday aniqlanadi?
5. Vektorlarni qo‘shish amali qanday xossalarga ega ?
6. Vektorni songa ko‘paytmasi qanday kiritiladi?
7. Vektorni songa ko‘paytmasi qanday xossalarga ega ?
8. Vektor fazo deb nimaga aytiladi?

9. Chiziqli fazo qanday ta’riflanadi ?
10. Vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi nima ?
11. Qachon vektorlar chiziqli bog‘liq deyiladi?
12. Qachon vektorlar chiziqli bog‘liqmas, ya’ni erkli deyiladi?
13. Chiziqli fazoning o‘lchovi qanday aniqlanadi?
14. Chiziqli fazoning bazisi deb nimaga aytiladi?
15. Chiziqli fazodagi vektorlarning koordinatalari deb nimaga aytiladi ?

Testlardan namunalar

1. Vektor fazoda vektorlar ustida qaysi amal aniqlangan ?
   A) ko‘paytirish ; B) darajaga oshirish ; C) qo‘shish ;
   D) bo‘lish ; E) teskarisini topish ;

2. Vektor fazoda vektorlar ustida qaysi amalni bajarib bo‘lmaydi ?
   A) qo‘shish ; B) songa ko‘paytirish ; C) ayirish ;
   D) ko‘paytirish ; E) songa bo‘lish .

3. Vektor fazoda qo‘shish amali qaysi xossaga ega emas ?
   A) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$; B) $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$; C) $\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}$;
   D) $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$; E) barcha xossalarga ega.
4. Vektor fazoda songa ko‘paytirish amali qaysi xossaga ega emas ?
   A) $\lambda(\mu\boldsymbol{x})=(\lambda\mu)\boldsymbol{x}$; B) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x}$; C) $0\cdot\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$;
   D) $1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$; E) $(\lambda:\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}:\mu\boldsymbol{x}$.
5. Agar $\boldsymbol{y}=(3,-2,1,4)$ va $3\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(6,4,1,13)$ bo‘lsa, $\boldsymbol{x}$ vektorni toping .
   A) $\boldsymbol{x}=(1, -3, 1, 0)$; B) $\boldsymbol{x}=(1, 2, 0, 3)$; C) $\boldsymbol{x}=(1, 0, -3, 1)$;
   D) $\boldsymbol{x}=(2, 1, 1, 0)$; E) $\boldsymbol{x}=(1, 1, -2, 3)$.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. $\boldsymbol{x}=(n, n+4, n-1)$ vektorni $\boldsymbol{e}_1=(1, 1, 0)$, $\boldsymbol{e}_2=(1, 0, 1)$ va $\boldsymbol{e}_3=(0, 1, 1)$ bazisdagi yoyilmasini toping .

2. $\boldsymbol{x}_1=(2n, n+3, n-1)$, $\boldsymbol{x}_2=(n, 2n-13, 4n)$ va $\boldsymbol{x}_3=(2n, 13-5n, -13n-3)$ vektorlar chiziqli bog‘liq ekanligini ko‘rsating va bu bog‘lanishni toping.

3. $\boldsymbol{e}_1=(n, n-1, 2n)$, $\boldsymbol{e}_2=(n+1, 0, n+2)$ va $\boldsymbol{e}_3=(1, n, n-3)$ vektorlar bazis tashkil etishini ko‘rsating.

§6. CHIZIQLI OPERATORLAR

- ***Chiziqli operatorlar va ular bilan bog‘liq tushunchalar.***
- ***Xalqaro savdo modeli.***

6.1. Chiziqli operatorlar va ular bilan bog‘liq tushunchalar. Chiziqli algebraning asosiy tushunchalaridan biri chiziqli operator tushunchasi bo‘lib hisoblanadi. Bu tushunchani ta’riflash uchun n o‘lchovli R^n va m o‘lchovli R^m ikkita vektor fazolarni qaraymiz.

1-TA’RIF: Agar R^n fazoning har bir $\boldsymbol{x}$ vektoriga R^m fazoning yagona $\boldsymbol{y}$ vektori biror qonun yoki qoida asosida mos qo‘yilgan bo‘lsa, u holda R^n fazoni R^m fazoga akslantiruvchi ***operator*** berilgan deyiladi va u $A(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ kabi belgilanadi.

Masalan, R^3 fazodagi har bir $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$ vektorga (nuqtaga) R^2 tekislikdagi $\boldsymbol{y}=(x_1, x_2)$ vektorni (nuqtani) mos qo‘yamiz. Bu mos qo‘yishlik $A(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ operator orqali ifodalanadi. Bu operatorning geometrik ma’nosi shundan iboratki , XYZ koordinatalar sistemasi kiritilgan fazodagi har bir (x, y, z) nuqtaga uning XOY koordinata tekisligidagi (x, y) proyeksiyasi mos qo‘yiladi.

2-TA’RIF: $\boldsymbol{y}=A(\boldsymbol{x})$ operatorda $\boldsymbol{y}$ vektor $\boldsymbol{x}$ vektorning ***tasviri***, $\boldsymbol{x}$ vektor esa $\boldsymbol{y}$ vektorning ***aks tasviri*** deyiladi.

Yuqoridagi misolda fazodagi nuqtaning tekislikdagi (x, y) proyeksiyasi tasvir, fazodagi (x, y, z) nuqtaning o‘zi esa aks tasvir bo‘ladi.

3-TA’RIF: Berilgan $A(\boldsymbol{x})$ operator ***chiziqli*** deyiladi, agar ixtiyoriy $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}\in R^n$ vektorlar va ixtiyoriy λ son uchun quyidagi munosabatlar o‘rinli bo‘lsa:

1. $A(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=A(\boldsymbol{x}_1)+A(\boldsymbol{x}_2)$ – operatorning additivlik xossasi;
2. $A(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda A(\boldsymbol{x})$ – operatorning birjinslilik xossasi.

Agar R^n va R^m fazolar ustma-ust tushsa, ya’ni $m=n$ bo‘lsa, u holda $A(\boldsymbol{x})$ operator R^n fazoni o‘zini-o‘ziga akslantiradi va kelgusida biz mana shunday operatorlarni qarash bilan chegaralanamiz.

R^n fazoda biror $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2,\ldots, \boldsymbol{e}_n$ bazis vektorlarni tanlab, ixtiyoriy $\boldsymbol{x}\in R^n$ vektorni bu bazis orqali $\boldsymbol{x}=x_1\,\boldsymbol{e}_1 + x_2\,\boldsymbol{e}_2 +\ldots+ x_n\,\boldsymbol{e}_n$ ko‘rinishda ifodalanishi va $A(\boldsymbol{x})$ operatorning chiziqlilik xossalarini hisobga olib,

$$A(\boldsymbol{x})=x_1A(\boldsymbol{e}_1)+x_2A(\boldsymbol{e}_2)+\ldots+x_nA(\boldsymbol{e}_n) \qquad (1)$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bu tenglikdagi har bir $A(\boldsymbol{e}_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ yana R^n fazoning vektori bo‘lganligi uchun ularni $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2,\ldots, \boldsymbol{e}_n$ bazis orqali yoyish mumkin. Faraz qilaylik

$$A(\boldsymbol{e}_i)=a_{1i}\,\boldsymbol{e}_1+a_{2i}\,\boldsymbol{e}_2+\ldots+a_{ni}\,\boldsymbol{e}_n\,, \quad i=1,2,\ldots,n \qquad (2)$$

bo‘lsin.Unda, (1) va(2) tengliklarga asosan,

$$A(\boldsymbol{x})=x_1(a_{11}\,\boldsymbol{e}_1+a_{21}\,\boldsymbol{e}_2+\ldots+a_{n1}\,\boldsymbol{e}_n)+x_2(a_{12}\,\boldsymbol{e}_1+a_{22}\,\boldsymbol{e}_2+\ldots+a_{n2}\boldsymbol{e}_n)+\cdots$$
$$+x_n(a_{1n}\,\boldsymbol{e}_1++a_{2n}\,\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_{nn}\,\boldsymbol{e}_n)=(a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+\ldots+a_{1n}\,x_n)\,\boldsymbol{e}_1+$$
$$+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n)\,\boldsymbol{e}_2+\cdots+(a_{n1}\,x_1+a_{n2}\,x_2+\ldots+a_{nn}x_n)\,\boldsymbol{e}_n\,. \qquad (3)$$

Ikkinchi tomondan $\boldsymbol{y}=A(\boldsymbol{x})$ vektor ham xuddi shu $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2,\ldots, \boldsymbol{e}_n$ bazisda o‘z koordinatalariga ega bo‘lib, uni

$$\boldsymbol{y}=A(\boldsymbol{x})=y_1\,\boldsymbol{e}_1+y_2\,\boldsymbol{e}_2+\ldots+y_n\,\boldsymbol{e}_n \qquad (4)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Har qanday vektorni bazis orqali yagona usulda ifodalanishini hisobga olib, (3) va (4) tengliklardan ushbu tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \qquad (5)$$

<u>4-TA'RIF:</u> (5) chiziqli tenglamalar sistemaning a_{ij} koeffitsiyentlaridan tuzilgan $A=(a_{ij})$ $(i,j=1,2,\dots,n)$ matritsa chiziqli A($\boldsymbol{x}$) operatorning $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2,\dots$, $\boldsymbol{e}_n$ bazisdagi ***matritsasi***, A matritsaning rangi r esa A($\boldsymbol{x}$) ***operatorning rangi*** deyiladi.

Shunday qilib, har bir chiziqli A($\boldsymbol{x}$) operatorga berilgan bazisda biror A kvadrat matritsa to'g'ri keladi va aksincha, har qanday n- tartibli kvadrat A matritsaga n- o'lchovli fazoning biror chiziqli A($\boldsymbol{x}$) operatori to'g'ri keladi.

Berilgan A($\boldsymbol{x}$) chiziqli operatorda $\boldsymbol{x}$ vektor bilan uning tasviri $\boldsymbol{y}$=A($\boldsymbol{x}$) o'rtasidagi bog'lanish matritsalar orqali $Y=A\cdot X$ ko'rinishda ifodalanadi. Bu yerda A– chiziqli operator matritsasi bo'lib, $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$ va $Y=(y_1,y_2,\dots,y_n)^T$ ustun matritsalar $\boldsymbol{x}$ va $\boldsymbol{y}$ vektorlarning koordinatalaridan hosil qilinadi.

Masala : R^3 fazoda A chiziqli operator biror $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ bazisda

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

matritsa orqali berilgan bo'lsin. $\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{e}_1-5\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$ vektorning $\boldsymbol{y}$=A($\boldsymbol{x}$) tasviri topilsin.

Yechish: $Y=A\cdot X$ tenglik va matritsalarni ko'paytirish ta'rifiga asosan

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Demak, $\boldsymbol{y}=31\boldsymbol{e}_1+6\boldsymbol{e}_2-13\boldsymbol{e}_3$.

Endi chiziqli operatorlar ustida amallar kiritamiz.

<u>5-TA'RIF:</u> A($\boldsymbol{x}$) va B($\boldsymbol{x}$) chiziqli operatorlarning ***yig'indisi*** deb A($\boldsymbol{x}$)+B($\boldsymbol{x}$) tenglik bilan aniqlanadigan yangi bir operatorga aytiladi.

A($\boldsymbol{x}$) va B($\boldsymbol{x}$) chiziqli operatorlar yig'indisi (A+B)($\boldsymbol{x}$) kabi belgilanadi.

<u>6-TA'RIF:</u> A($\boldsymbol{x}$) chiziqli operatorni ***λ songa ko'paytmasi*** deb λ(A($\boldsymbol{x}$)) tenglik bilan aniqlanadigan operatorga aytiladi.

A($\boldsymbol{x}$) chiziqli operatorni λ songa ko'paytmasi λA($\boldsymbol{x}$) kabi belgilanadi.

<u>7-TA'RIF:</u> A($\boldsymbol{x}$) va B($\boldsymbol{x}$) chiziqli operatorlarning ***ko'paytmasi*** deb A(B(x)) tenglik bilan aniqlanadigan operatorga aytiladi.

A($\boldsymbol{x}$) va B($\boldsymbol{x}$) chiziqli operatorlarning ***ko'paytmasi*** (AB)($\boldsymbol{x}$) kabi belgilanadi.

Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, kiritilgan (A+B)($\boldsymbol{x}$), λA($\boldsymbol{x}$) va (AB)($\boldsymbol{x}$) operatorlar ham additivlik va birjinslilik xossalariga bo'ysunadi va shu sababli ular ham chiziqli operatorlar bo'ladi. Masalan,

$$(AB)(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=A(B(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2))= A(B(\boldsymbol{x}_1)+A(B(\boldsymbol{x}_2))= (AB)(\boldsymbol{x}_1)+(AB)(\boldsymbol{x}_2).$$

Bundan tashqari (A+B)($\boldsymbol{x}$), λA($\boldsymbol{x}$) va (AB)($\boldsymbol{x}$) operatorlarning matritsalari mos ravishda $A+B$, λA va AB bo'ladi.

8-TA'RIF: ***Nol operator*** deb 0(***x***) kabi belgilanadigan va R^n fazoning barcha ***x*** vektorlarini **0** vektorga o'tkazadigan, ya'ni 0(***x***)=**0** tenglikni qanoatlantiradigan operatorga aytiladi.

9-TA'RIF: ***Birlik operator*** deb E(***x***) kabi belgilanadigan hamda R^n fazoning barcha ***x*** vektorlarini o'zini-o'ziga o'tkazadigan, ya'ni E(***x***)=***x*** tenglikni qanoatlantiradigan operatorga aytiladi.

0(***x***) va E(***x***) chiziqli operatorlar bo'lishini ko'rish qiyin emas.
Ixtiyoriy chiziqli A(***x***) operator R^n fazoning **0** vektorini uni o'ziga o'tkazadi, ya'ni A(**0**)=**0** bo'ladi. Haqiqatan ham A(**0**)=***y*** deb olsak, unda chiziqli operatorning additivlik xossasiga asosan ***y***=A(**0**)= A(**0+0**)=2A(**0**)=2***y*** natijani olamiz va undan ***y***=A(**0**)=**0** ekanligini ko'ramiz.

10-TA'RIF: Biror ***x***≠**0** vektor A chiziqli operatorning ***xos vektori*** deyiladi, agarda biror λ sonida

$$A(\boldsymbol{x})=\lambda \boldsymbol{x} \qquad (6)$$

shart bajarilsa. Bu holda λ soni A operatorning ***x*** xos vektoriga mos keladigan ***xos qiymati*** deyiladi.

Bu ta'rifdan kelib chidadiki, chiziqli A(***x***) operator o'zining ***x*** xos vektorini unga kolleniar vektorga akslantiradi, ya'ni λ songa ko'paytiradi. (6) tenglikni matritsalar yordamida quyidagicha yozish mumkin:

$$A\cdot X=\lambda X \qquad (7)$$

yoki

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases}.$$

Bundan

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

birjinsli chiziqli tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Bu sistema noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun sistemaning determinanti

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

shartni qanoatlantirishi zarur va yetarlidir. Bu tenglikning chap tomoni λ ga nisbatan n - darajali ko'phad bo'lib, bu ko'phad A(***x***) operatorning yoki A matritsaning ***xarakteristik ko'phadi***, (9) tenglama esa ularning ***xarakteristik tenglamasi*** deyiladi.

Misol: Ushbu matritsa bilan berilgan A(***x***) chiziqli operatorning xos qiymatlari va xos vektorlari topilsin:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 9 & 1\end{pmatrix}.$$

Yechish: Dastlab operatorning xarakteristik tenglamasini yozamiz:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 4\\ 9 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow \lambda^2-2\lambda-35=0.$$

Bu tenglamani yechib, A(***x***) chiziqli operatorning xos qiymatlari $\lambda_1=-5$ va $\lambda_2=7$ ekanligini topamiz. Bu xos qiymatlarga mos keluvchi xos vektorlar

$(A-\lambda_1 E)x^{(1)}=0$ ва $(A-\lambda_2 E)x^{(2)}=0$

tenglamalardan topiladi, ya'ni,

$$\begin{pmatrix}6 & 4\\ 9 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^{(1)}\\ x_2^{(1)}\end{pmatrix}=0 \text{ va } \begin{pmatrix}-6 & 4\\ 9 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^{(2)}\\ x_2^{(2)}\end{pmatrix}=0 \Rightarrow x^{(1)}=\begin{pmatrix}c_1\\ -1{,}5c_1\end{pmatrix},\ x^{(2)}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}c_2\\ c_2\end{pmatrix}.$$

Bu yerda c_1 va c_2 ixtiyoriy haqiqiy sonlardir.

6.2. Xalqaro savdo modeli. Ko'rib o'tilgan tushunchalarni iqtisodiyotga tatbig'i sifatida ***xalqaro savdoning chiziqli modelini*** ko'rib o'tamiz. Milliy daromadlari $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bo'lgan n ta $S_1, S_2, \ldots, S_n$ mamlakatlarni qaraymiz. Bu yerda S_j ($j=1,2,\ldots,n$) mamlakat milliy daromadining S_i ($i=1,2,\ldots,n$) mamlakat mahsulotlarini sotib olishga sarflanadigan ulushini a_{ij} kabi belgilaymiz. Har bir mamlakatning milliy daromadi o'zida ishlab chiqarilgan mahsulotlarni sotib olishga va boshqa mamlakat mahsulotlarini import etishga to'liq sarflanadi deb hisoblaymiz. Bu shart matematik ko'rinishda

$$a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{nj}=1,\quad j=1,2,\cdots,n, \tag{10}$$

kabi ifodalanadi. Unda $A=(a_{ij})$, $i,j=1,2,\ldots,n$, matritsa barcha mamlakatlar orasidagi o'zaro savdo-sotiqni ifodalaydi va shu sababli ***savdoning tarkibiy matritsasi*** deb ataladi. Bu matritsaning har bir ustunidagi elementlar yig'indisi, (10) tengliklarga asosan, birga teng bo'ladi.

Bu belgilashlarda har bir S_i, $i=1,2,\ldots,n$, mamlakatning ichki va tashqi savdodan hosil qilgan tushumi p_i quyidagicha aniqlanadi:

$$p_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots\ldots a_{in}x_n. \tag{11}$$

Mamlakatlar orasidagi o'zaro savdo muvozanatlashgan bo'lishi uchun har bir S_i mamlakat bu savdodan zarar ko'rmasligi, ya'ni uning savdodan hosil qilgan p_i tushumi x_i milliy daromadidan kichik bo'lmasligi kerak. Bu shartlardan, (11) tengliklarni hisobga olib, quyidagi tengsizliklar sistemasiga kelamiz:

$$p_i\geq x_i \Rightarrow a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots\ldots a_{in}x_n\geq x_i,\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{12}$$

Bu tengsizliklarni hadma-had qo'shib va (10) tengliklardan foydalanib, ushbu natijalarni olamiz:

$$(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots\ldots a_{1n}x_n)+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots\ldots a_{2n}x_n)+\cdots$$
$$\cdots+(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots\ldots a_{in}x_n)\geq x_1+x_2+\cdots+x_n \Rightarrow$$
$$(a_{11}+a_{21}+\ldots\ldots a_{n1})x_1+(a_{12}+a_{22}+\ldots\ldots a_{n2})x_2+\cdots+(a_{1n}+a_{2i}+\ldots\ldots a_{nn})x_n\geq$$
$$\geq x_1+x_2+\cdots+x_n \Rightarrow x_1+x_2+\cdots+x_n\geq x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

Oxirgi natijadan ko‘rinadiki, (12) qat’iymas tengsizliklarning har birida faqat tenglik belgisi bo‘lishi mumkin, ya’ni

$$a_{i1}x_1+ a_{i2}x_2+\dots\dots\ a_{in}x_n = x_i\,, \qquad i=1,2,\ \dots\ ,n. \qquad (13)$$

Agar $X=(x_1, x_2, \dots , x_n)^T$ orqali barcha mamlakatlarning milliy daromadlari ustun vektorini belgilasak, unda (13) tengliklarni matritsa ko‘rinishida $AX=X$ kabi yozish mumkin. Demak, mamlakatlar orasidagi savdo tarkibiy matritsasi A ma’lum bo‘lsa, muvozanatlashgan savdoga erishish uchun mamlakatlarning x_i (i=1,2, …, n) milliy daromadlarining hajmi qanday bo‘lishi kerakliligi (13) tenglamalar sistemasidan yoki A matritsaning λ=1 xos soniga mos keluvchi xos vektori kabi topiladi.

Masala : Uchta mamlakat orasidagi savdoning tarkibiy matritsasi quyidagi ko‘rinishda ekanligi ma’lum:

$$A=\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Agar bu mamlakatlarning umumiy daromadlari hajmi 580 shartli pul birligiga teng bo‘lsa, muvozanatlashgan savdoni amalga oshirish uchun har bir mamlakatning milliy daromadi qancha bo‘lishi kerakligini toping.

Yechish: AX=X tenglamani (A–E)X=0 ko‘rinishda yozib, ushbu bir jinsli uch noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasiga kelamiz va uning yechimlarini Gauss usulida topamiz:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} \frac{2}{5}-1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2}-1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3}-1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ \frac{2}{5}c \\ \frac{3}{2}c \end{pmatrix}$$

Demak, bu uch mamlakatning milliy daromadlari vektori $\boldsymbol{x}=(c,2c/5,3c/2)$ bo‘lganda, ya’ni ularning nisbati 1:2/5:3/2 yoki 10:4:15 bo‘lganda ular orasidagi o‘zaro savdo muvozanatlashgan bo‘ladi. Buning uchun mamlakatlarning milliy daromadlari mos ravishda

$$x_1=10\cdot\frac{580}{29}=200\,,\quad x_2=4\cdot\frac{580}{29}=80\,,\quad x_3=15\cdot\frac{580}{29}=300$$

shartli pul birligi hajmida bo‘lishi kerak.

XULOSA

Operator deyilganda R^n fazoning har bir $\boldsymbol{x}$ vektoriga R^m fazoning yagona bir $\boldsymbol{y}$ vektorini mos qo‘yish ko‘zda tutiladi. Bunda operator $\boldsymbol{y}$ =A($\boldsymbol{x}$) kabi ifodalanadi va $\boldsymbol{y}$–tasvir, $\boldsymbol{x}$–aks tasvir deyiladi. Additivlik va bir jinslilik xossalariga ega operator chiziqli deb ataladi. Chiziqli operator biror matritsa bilan beriladi. Operatorlar ustida songa ko‘paytirish, qo‘shish va o‘zaro ko‘paytirish amallari aniqlanib, operatorlar algebrasi hosil etiladi. Bu algebrada nol va birlik operatorlar tushunchalari mavjuddir. $A(\boldsymbol{x})=\lambda\boldsymbol{x}$ tenglikni qanoatlantiruvchi $\boldsymbol{x}$ – operatorning xususiy vektori, λ – xususiy soni deyiladi. Operatorning iqtisodiy tatbig‘iga misol sifatida xalqaro savdo modelini ko‘rsatish mumkin.

Tayanch iboralar

* Operator * Tasvir * Aks tasvir * Chiziqli operator * Operatorning matritsasi * Nol operator * Birlik operator * Operatorning xususiy soni * Operatorning xususiy vektori *Operatorning xarakteristik tenglamasi * Xalqaro savdo modeli

Takrorlash uchun savollar

1. Operator deb nimaga aytiladi?
2. Tasvir va aks tasvir nima?
3. Qachon operator chiziqli deyiladi?
4. Operatorning matritsasi qanday aniqlanadi?
5. Operatorlarning yig‘indisi qanday aniqlanadi?
6. Operatorni songa ko‘paytmasi qanday aniqlanadi?
7. Operatorlarning ko‘paytmasi qanday aniqlanadi?
8. Nol operator deb nimaga aytiladi?
9. Birlik operator deb nimaga aytiladi?
10. Operatorning xususiy vektori va soni qanday aniqlanadi?
11. Operatorning xarakteristik tenglamasi qanday aniqlanadi?
12. Xalqaro savdo modeli qanday tuziladi?

Testlardan namunalar

1. $A(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ operator R^n vektor fazoni R^m vektor fazoga akslantiradi. Bunda fazo o‘lchamlari n va m orasida qanday munosabat o‘rinli bo‘lmaydi ?
   A) $n>m$; B) $n=m$; C) $n<m$; D) $n\neq m$;
   E) ko‘rsatilgan barcha munosabatlar o‘rinli bo‘la oladi .

2. $A(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ operator yozuvida $\boldsymbol{x}$ nima deb ataladi ?
   A) tasvir ; B) original ; C) aks tasvir ;
   D) boshlang‘ich vektor ; E) natijaviy vektor.

3. $A(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ operator yozuvida $\boldsymbol{y}$ nima deb ataladi ?
   A) tasvir ; B) original ; C) aks tasvir ;

D) boshlang‘ich vektor ; E) natijaviy vektor.

4. Agar A($\boldsymbol{x}$) chiziqli operator bo‘lsa, quyidagi tengliklardan qaysi biri o‘rinli bo‘lmaydi ?
A) A($\boldsymbol{x}_1$+ $\boldsymbol{x}_2$)= A($\boldsymbol{x}_1$)+A($\boldsymbol{x}_2$) ; B) A($\lambda\boldsymbol{x}$)= λ A($\boldsymbol{x}$) ; C) A($\mathbf{0}$)= $\mathbf{0}$;
D) A($\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_2$)= A($\boldsymbol{x}_1$)·A($\boldsymbol{x}_2$) ; E) A($\boldsymbol{x}_1$– $\boldsymbol{x}_2$)= A($\boldsymbol{x}_1$)–A($\boldsymbol{x}_2$) .

5. A($\boldsymbol{x}$)=$\boldsymbol{y}$ operator yozuvida $\boldsymbol{x}$=(x_1, x_2) va $\boldsymbol{y}$=(x_1, x_2, α) (α–o‘zgarmas son) bo‘lsa, bu operator chiziqli bo‘lishi uchun α qanday shartni qanoatlantirishi kerak ?
A) α=1 ; B) α<1 ; C) α>1 ; D) α≠1 ; E) α=0 .

6. A($\boldsymbol{x}$)=$\boldsymbol{y}$ operator yozuvida $\boldsymbol{x}$=(x_1, x_2) va $\boldsymbol{y}$=(3x_1–2x_2, x_1+4x_2) bo‘lsa, bu operatorning A matritsasini toping.
A) $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; B) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}$; C) $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$;
D) $A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$; E) $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

7. Ushbu A matritsaga ega bo‘lgan A($\boldsymbol{x}$) operatorning xususiy sonlari topilsin:
$$A=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$
A) {3, 1} ; B) {–4, –2} ; C) {–5, 1} ; D) {4, –1} ; B) {5, –1} .

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Ushbu A matritsaga ega bo‘lgan A($\boldsymbol{x}$)=$\boldsymbol{y}$ operator uchun $\boldsymbol{x}$ =(n, –2, n+3) vektorning tasvirini toping:
$$A=\begin{pmatrix}n & n-1 & 2n+1\\ -1 & 2 & 0\\ n+1 & -1 & n\end{pmatrix}.$$
2. Ushbu A matritsaga ega bo‘lgan A($\boldsymbol{x}$)=$\boldsymbol{y}$ operator uchun $\boldsymbol{y}$ =(2n, n–2, n+1) vektorning aks tasvirini toping:
$$A=\begin{pmatrix}n & n-1 & 2n+1\\ -1 & 2 & 0\\ n+1 & -1 & n\end{pmatrix}.$$

§7. KVADRATIK FORMALAR

Turli nazariy va amaliy mazmunli masalalarni yechishda n o‘lchovli $\boldsymbol{x}$=(x_1,x_2,…,x_n) vektorning x_i , i=1,2, … , n, komponentalaridan tuzilgan
$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \tag{1}$$

ko‘rinishdagi yig‘indilarni qarashga to‘g‘ri keladi.

1-TA’RIF: (1) yig‘indi x_i , i=1,2, … , n, komponentalardan tuzilgan ***kvadratik forma*** deb ataladi. Unda a_{ij} (i,j=1,2, …, n) haqiqiy sonlar bo‘lib, kvadratik formaning ***koeffitsiyentlari*** , ulardan hosil etilgan n-tartibli A=(a_{ij}) kvadrat matritsa ***kvadratik formaning matritsasi*** deyiladi.

(1) kvadratik formada $x_ix_j = x_jx_i$ bo‘lgani uchun ular oldidagi koeffitsiyentlar uchun ham $a_{ij} = a_{ji}$ tenglik o‘rinli deb olinadi va shu sababli A=(a_{ij}) simmetrik matritsa (II bob, §1ga qarang) bo‘lib, uning uchun A=A^T tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bunda A^T berilgan A matritsaning transponirlanganligini ifodalaydi.

Masalan,

$$f(x_1,x_2) = 5x_1^2 + 3x_1x_2 + 3x_2x_1 - 4x_2^2 = 5x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_2^2$$

kvadratik forma va uning matritsasi quyidagicha bo‘ladi:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

2-TA’RIF: Agar A=(a_{ij}) matritsaning rangi r bo‘lsa, bu son (1) ***kvadratik formaning rangi*** deyiladi. R=n, ya’ni detA≠0 holda kvadratik forma ***maxsusmas*** deb ataladi.

Matritsalarni ko‘paytirish va transponirlash amallaridan foydalanib (1) kvadratik formani qisqacha

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^TAX \tag{2}$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bunda X orqali x_i , i=1,2, … , n, komponentalardan tuzilgan ustun matritsa belgilangan.

Kvadratik formadagi x_i , i=1,2, … , n, komponentalar ustida

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} y_k , \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{3}$$

chiziqli almashtirma bajarilib, yangi y_k , k=1,2, … , n, komponentalarga o‘tilgan bo‘lsin. Bu chiziqli almashtirma matritsasini C=(c_{ik}) va y_k , k=1,2, … , n, komponentalardan tuzilgan ustun matritsani Y kabi belgilaymiz.Bu holda (3) chiziqli almashtirmani X=CY ko‘rinishda ifodalash mumkin. Kvadratik formaning (2) matritsaviy ko‘rinishdagi yozuvidan va transponirlash amalining xossasidan (II bob, §1) foydalanib,

$$X^TAX=(CY)^TA(CY)=Y^TC^TACY= Y^TBY \tag{4}$$

natijani olamiz. Bu yerda B=C^{T}AC belgilash kiritilgan va B matritsa simmetrik bo‘ladi. Haqiqatan ham, transponirlash amali xossalaridan va A^T=A ekanligidan,

$$B^T=(C^TAC)^T= C^TA^T (C^T)^T= C^TAC=B$$

tenglik kelib chiqadi va u B matritsaning simmetrikligini ko‘rsatadi. Unda (4) tenglikni (2) bilan taqqoslab, quyidagi teorema o‘rinli ekanligini ko‘ramiz:

1-TEOREMA: Matritsasi A bo‘lgan (1) kvadratik forma ustida C matritsali (3) chiziqli almashtirma bajarilsa, unda yangi y_k komponentlardan tuzilgan va matritsasi C^{T}AC bo‘lgan kvadratik forma hosil bo‘ladi.

Masalan, $f(x_1,x_2) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2$ kvadratik formada

$$x_1=2y_1+ y_2 , \; x_2=4y_1-3y_2$$

chiziqli almashtirma bajarilganda hosil bo'ladigan yangi kvadratik formani topamiz. Bunda

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

ekanligidan

$$B=C^T AC=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 36 & -22 \\ -22 & 44 \end{pmatrix}$$

natijani olamiz. Demak,

$$f(x_1,x_2)=5x_1^2-4x_1x_2+3x_2^2=5(2y_1+y_2)^2-4(2y_1+y_2)(4y_1-3y_2)+$$
$$+3(4y_1-3y_2)^2=36y_1^2-44y_1y_2+44y_2^2=g(y_1,y_2)\ .$$

Agar (3) chiziqli almashtirma maxsusmas, ya'ni det$C\neq0$ bo'lsa, unda A va C^TAC matritsalarning ranglari o'zaro teng bo'lishini ko'rsatish mumkin. Demak, maxsusmas chiziqli almashtirma bajarilganda kvadratik formaning rangi o'zgarmay qoladi.

3-TA'RIF: Agar kvadratik formada faqat x_i , i=1,2, … , n, komponentalarning kvadratlari qatnashgan, ya'ni

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2 \qquad (5)$$

ko'rinishda bo'lsa, (5) ***kanonik*** ko'rinishdagi kvadratik forma deyiladi.

Kanonik ko'rinishdagi kvadratik forma uchun $i\neq j$ holda a_{ij}=0, ya'ni uning A matritsasi diagonal matritsadan iborat bo'ladi.

2-TEOREMA: Har qanday (1) kvadratik formani biror maxsusmas (3) chiziqli almashtirma yordamida kanonik, ya'ni

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(y_1,y_2,\cdots,y_n)=b_1y_1^2+b_2y_2^2+\cdots+b_ny_n^2 \qquad (6)$$

ko'rinishga keltirish mumkin. Bunda ayrim b_i koeffitsiyentlar nolga teng bo'lishi mumkin va noldan farqli koeffitsiyentlar soni kvadratik formaning r rangiga teng bo'ladi.

Bu teoremani isbotsiz qabul etib, uni ushbu misolda ko'rsatamiz:

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_3x_1 \qquad (7)$$

kvadratik formada

$$x_1=0.5y_1+0.5y_2+3y_3\ ,\ x_2=0.5y_1-0.5y_2-y_3\ ,\ x_3=y_3 \qquad (8)$$

chiziqli almashtirma bajaramiz. Bu yerda

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \det A=-6\neq0, \quad C=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 3 \\ 0.5 & -0.5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \det C=-0.5\neq0$$

bo'lgani uchun (7) kvadratik formaning rangi r=3 va (8) chiziqli almashtirma maxsusmas bo'ladi. Demak, (7) kvadratik formaning kanonik ko'rinishida y_1, y_2 va y_3 kvadratlari qatnashishi kerak. Haqiqatan ham bu yerda

$$B=C^TAC=\begin{pmatrix}0.5 & 0.5 & 0\\ 0.5 & -0.5 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -3\\ 1 & -3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.5 & 0.5 & 3\\ 0.5 & -0.5 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5 & 0 & 0\\ 0 & -0.5 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

bo‘lgani uchun (7) kvadratik formaning kanonik ko‘rinishi quyidagicha ekanligini ko‘ramiz:

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_3x_1=0.5y_1^2-0.5y_2^2+6y_3^2=g(y_1,y_2,y_3). \quad (9)$$

Kvadratik formaning topilgan (9) kanonik ko‘rinishi yagona bo‘lmasdan, uni turli chiziqli almashtirmalar yordamida turli kanonik ko‘rinishlarga keltirish mumkin.

Masalan, ko‘rib o‘tilgan (7) kvadratik formani

$$x_1=y_1+3y_2+2y_3\,,\ x_2=y_1-y_2-2y_3\,,\ x_3=y_2$$

chiziqli almashtirma orqali (9) ko‘rinishdan farqli bo‘lgan

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_3x_1=2y_1^2+6y_2^2-8y_3^2=h(y_1,y_2,y_3) \quad (10)$$

kanonik ko‘rinishga keltirilishini ko‘rsatish mumkin. (7) kvadratik formaning (9) va (10) kanonik ko‘rinishlari turlicha bo‘lsada, ulardagi musbat va manfiy koeffitsiyentli hadlar soni bir xil, ya’ni mos ravishda ikki va bittadandir. Bu tasodifiy bo‘lmasdan, quyidagi isbotsiz qabul qilinadigan teorema orqali ifodalanadigan ***inersiya qonuni*** o‘rinli bo‘ladi.

3-TEOREMA: Kvadratik formaning turli maxsusmas chiziqli almashtirmalar orqali hosil qilingan barcha kanonik ko‘rinishlaridagi musbat va manfiy ishorali hadlar soni bir xil bo‘ladi.

Endi kvadratik formalarning muhim bir xususiy holini ko‘rib o‘tamiz.

4-TA’RIF: $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ kvadratik forma barcha $(x_1, x_2, ..., x_n)\neq(0,0, ..., 0)$ nuqtalarda $f(x_1, x_2, ..., x_n)>0$ ($f(x_1, x_2, ..., x_n)<0$) qiymatlar qabul etsa, u musbat (manfiy) aniqlangan deb ataladi.

Masalan,

$$f(x_1,x_2)=3x_1^2\pm4x_1x_2+2x_2^2=2(x_1^2\pm2x_1x_2+x_2^2)+x_1^2=2(x_1\pm x_2)^2+x_1^2>0 \quad (11)$$

musbat aniqlangan,

$$g(x_1,x_2)=-x_1^2\pm2x_1x_2-2x_2^2=-(x_1\mp x_2)^2-x_2^2<0 \quad (12)$$

esa manfiy aniqlangan kvadratik formalardir.

Berilgan kvadratik formani musbat yoki manfiy aniqlanganligini tekshirish uchun uni kanonik ko‘rinishiga murojaat etish mumkin. Agar uning kanonik ko‘rinishida barcha kvadratlar musbat (manfiy) koeffitsiyentlar bilan qatnashgan bo‘lsa, u musbat (manfiy) aniqlangan bo‘ladi. Ammo bu savolga ingliz matematigi D. Silvestr (1814–1897 y.) tomonidan isbotlangan ushbu teorema yordamida bevosita javob berish mumkin. Buning uchun oldin bir tushunchani kiritamiz.

5-TA’RIF: A=(a_{ij}) , i, j=1,2, ..., n, matritsaning $n-k$, $n-k+1$, ..., n-satr va ustunlarini tashlab yuborishdan hosil bo‘lgan Δ_k , k=1,2, ..., n, minorlar ***bosh minorlar*** deyiladi.

Ta’rifga asosan bosh minorlar

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, k = 1,2,\cdots,n$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

4-TEOREMA: $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ kvadratik forma musbat aniqlangan bo‘lishi uchun uning A matritsasining barcha bosh minorlari musbat bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Bu teoremani ham isbotsiz qabul etib, uning tasdig‘ini yuqoridagi (11) kvadratik forma uchun tekshiramiz. Bunda

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \pm 2 \\ \pm 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = 3 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & \pm 2 \\ \pm 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \mp 4 > 0$$

ekanligidan (11) kvadratik formaning musbat aniqlanganligiga yana bir marta ishonch hosil etamiz.

5-TEOREMA: $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ kvadratik forma manfiy aniqlangan bo‘lishi uchun uning bosh minorlari uchun $(-1)^k\ \Delta_k>0$, $k=1,2, \ldots, n$, shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Masalan, yuqorida ko‘rilgan (12) kvadratik forma uchun

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \pm 1 \\ \pm 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = -1 < 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & \pm 1 \\ \pm 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \mp 1 > 0$$

ekanligidan, 5-teoremaga asosan, uni manfiy aniqlanganligi kelib chiqadi.

XULOSA

R^n fazodagi $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, ..., x_n)$ vektorning komponentalaridan hosil qilingan

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

ko‘rinishdagi yig‘indilar kvadratik forma deyiladi. Bunda a_{ij} haqiqiy sonlar bo‘lib, ular kvadratik formaning koeffitsiyentlari deb ataladi va $a_{ij}=a_{ji}$ shartni qanoatlantiradi. Bu koeffitsiyentlardan tuzilgan A simmetrik matritsa kvadratik formaning matritsasi, uning rangi esa kvadratik forma rangi deyiladi. Kvadratik formada chiziqli almashtirma bajarilsa, yana kvadratik forma hosil bo‘ladi. Har qanday kvadratik formani maxsusmas chiziqli almashtirma yordamida faqat komponentalarning kvadratlari qatnashgan holga keltirish mumkin va u kvadratik formaning kanonik ko‘rinishi deb ataladi. Kvadratik formaning kanonik ko‘rinishi uchun inersiya qonuni o‘rinli bo‘ladi.

Komponentalarning kamida bittasi noldan farqli bo‘lganda har doim musbat (manfiy) qiymat qabul etadigan kvadratik forma musbat (manfiy) aniqlangan deyiladi. Kvadratik formani musbat aniqlanganligini Silvestr teoremasi yordamida aniqlash mumkin.

Tayanch iboralar

* Kvadratik forma * Kvadratik formaning matritsasi * Kvadratik formaning rangi * Kvadratik formaning kanonik ko'rinishi * Musbat aniqlangan kvadratik forma * Manfiy aniqlangan kvadratik forma * Silvestr teoremasi

Takrorlash uchun savollar

1. Kvadratik forma deb nimaga aytiladi?
2. Kvadratik formaning matritsasi qanday aniqlanadi?
3. Kvadratik formaning rangi deganda nima tushuniladi?
4. Kvadratik formada chiziqli almashtirma bajarilsa nima hosil bo'ladi?
5. Qachon kvadratik forma kanonik ko'rinishda deb ataladi?
6. Inersiya qonunida nima tasdiqlanadi ?
7. Qachon kvadratik forma musbat (manfiy) aniqlangan deyiladi?
8. Silvestr teoremasining mazmuni nimadan iborat ?

Testlardan namunalar

1. Quyidagi ifodalardan qaysi biri kvadratik forma bo'lmaydi?
   A) $x_1x_2+3x_1x_3-2x_3x_2$; B) $3x_1^2+x_2^2-2x_3^2$; C) $x_1^2+2x_1x_2x_3+5x_3^2$;
   D) $(2x_1-3x_2)(3x_2+4x_3)$; E) $(x_1-x_2+2x_3)^2$.

2. Quyidagi kvadratik formalardan qaysi biri kanonik ko'rinishda?
   A) $(x_1-2x_2)^2+(2x_2+x_3)^2$; B) $x_1^2+3x_2^2-2x_3^2$; C) $(x_1+2x_2-3x_3)^2$;
   D) $x_1x_2+x_1x_3+x_3x_2$; E) barcha kvadratik formalar kanonik ko'rinishda.

3. Quyidagi kvadratik formalardan qaysi biri musbat aniqlangan?
   A) $3x_1^2+4x_1x_2+x_2^2$; B) $2x_1x_2+3x_1x_3+x_3x_2$; C) $x_1^2+3x_2^2-2x_3^2$;
   D) $x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2+x_3^2$; E) $x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2-6x_3x_2+2x_3^2$.

4. Quyidagi kvadratik formalardan qaysi biri manfiy aniqlangan?
   A) $-3x_1^2+4x_1x_2-2x_2^2$; B) $2x_1x_2+3x_1x_3+x_3x_2$; C) $x_1^2+3x_2^2-2x_3^2$;
   D) $x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2+x_3^2$; E) $x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2-6x_3x_2+2x_3^2$.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. $f(x_1,x_2)=x_1^2+2nx_1x_2-(n+1)x_2^2$ kvadratik formaning matritsasi va rangini aniqlang.

2. $f(x_1,x_2)=nx_1^2+2(n-3)x_1x_2+(n+1)x_2^2$ kvadratik formani musbat yoki manfiy aniqlanganligini toping.

IV BOB. TEKISLIKDA ANALITIK GEOMETRIYA

Analitik geometriyaning usullari asoslangan
g‘oyalar juda ham sodda bo‘lishiga qaramasdan,
bu usullar shunchalik quvvatliki, qadimgi yunon
geometrlarini ham o‘ylantirib qo‘yadigan masalalarni
hozirgi davrdagi o‘n yetti yoshli bolalar ham
bu usullarni qo‘llab bir zumda yechib tashlaydilar.
E.T. Bell.

§1. TO‘GRI CHIZIQ VA UNING TENGLAMALARI

- ***Tekislikda analitik geometriya predmeti va asosiy masalalari.***
- ***Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi.***
- ***Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi.***
- ***Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi.***
- ***Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi.***
- ***Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi.***
- ***Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi.***

1.1. Tekislikda analitik geometriya predmeti va asosiy masalalari. Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan bo‘lsin. Bu holda tekislikdagi har bir M nuqta uning ***koordinatalari*** deb ataladigan (x,y) sonlar juftligi bilan to‘liq aniqlanishi va M(x,y) kabi yozilishi oldin (III bob, §2) aytib o‘tilgan edi. Tekislikdagi har bir geometrik obyektni (chiziq, geometrik figura va boshqalar) nuqtalar to‘plami kabi qarash mumkin. Bunda M nuqta biror chiziqqa tegishli bo‘lishi uchun ma’lum bir shartni qanoatlantirishi kerak. Bu shart matematik ko‘rinishda M nuqtaning koordinatalari orqali biror

$$F(x,y)=0 \qquad (*)$$

tenglama bilan ifodalanadi deb hisoblaymiz.

1-TA‘RIF: Agar (*) tenglamani faqat tekislikdagi biror L chiziqqa tegishli M(x,y) nuqtalarning koordinatalari qanoatlantirsa, u shu ***chiziq tenglamasi*** deb ataladi.

Agarda $M_0(x_0,y_0)$ nuqta uchun $F(x_0,y_0) = 0$ shart bajarilsa (tenglama qanoatlantirilsa), M_0 nuqta shu tenglama bilan aniqlanadigan chiziqqa tegishli, aks holda esa tegishli bo‘lmaydi. Shunday qilib tekislikdagi chiziq o‘zining tenglamasi bilan to‘liq aniqlanadi. Ammo har qanday tenglama ham biror chiziqni ifodalashi shart emas. Masalan, $x^2+ y^4=0$ tenglamani faqat bitta O(0,0) nuqta koordinatalari qanoatlantiradi va shu sababli bu tenglama chiziqni ifodalamaydi. Shuningdek, $x^2+y^2+1=0$ tenglamani tekislikdagi birorta ham nuqtaning koordinatalari qanoatlantirmaydi va u bo‘sh to‘plamni ifodalaydi.

2-TA‘RIF: Tekislikdagi chiziqlarni ularning tenglamalari orqali o‘rganuvchi matematik fan ***analitik geometriya*** deb ataladi.

Analitik geometriya asoschisi bo‘lib farang matematigi va faylasufi Rene Dekart hisoblanadi. U kiritgan koordinatalar sistemasi orqali geometrik tushuncha bo‘lgan M nuqta va algebraik tushuncha bo‘lgan sonlar juftligi (x,y) orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatildi. Bu bilan matematikaning ikkita bo‘limi bo‘lmish algebra va geometriya orasida bog‘lanish hosil etildi. Natijada tekislikdagi bir qator geometrik masalalarni algebraik va aksincha, bir qator algebraik masalalarni geometrik usullar bilan oson yechilishiga erishildi.

Tekislikdagi analitik geometriyada asosan ikkita masala qaraladi:

- Berilgan chiziqning tenglamasini topish va bu tenglama asosida uni analitik o‘rganish.
- Berilgan tenglamaga mos keluvchi chiziqni aniqlash.

Masala: Markazi $M(a,b)$ nuqtada joylashgan R radiusli aylana tenglamasini toping.

Yechish: $N(x,y)$ shu aylanada joylashgan ixtiyoriy nuqta bo‘lsin. Bizga maktabdan tanish bo‘lgan aylana ta’rifiga asosan u $|MN|=R$ shartni qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plamidan (geometrik o‘rnidan) iborat. Unda ikki nuqta orasidagi masofa (III bob,§2, (7)) formulasiga ko‘ra aylananing ushbu tenglamasini hosil etamiz:

$$|MN| = R \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \ . \qquad (1)$$

Masalan, markazi M(2,3) nuqtada joylashgan va radiusi R=5 bo‘lgan aylana $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$ tenglamaga ega bo‘ladi. Bu yerdan N(5,7) nuqta shu aylanaga tegishli ekanligi kelib chiqadi, chunki $(5-2)^2 + (7-3)^2 = 25$. K(2,6) nuqta aylanada yotmaydi, chunki uning koordinatalari aylananing tenglamasini qanoatlantirmaydi:

$$(2-2)^2 + (6-3)^2 = 9 \neq 25.$$

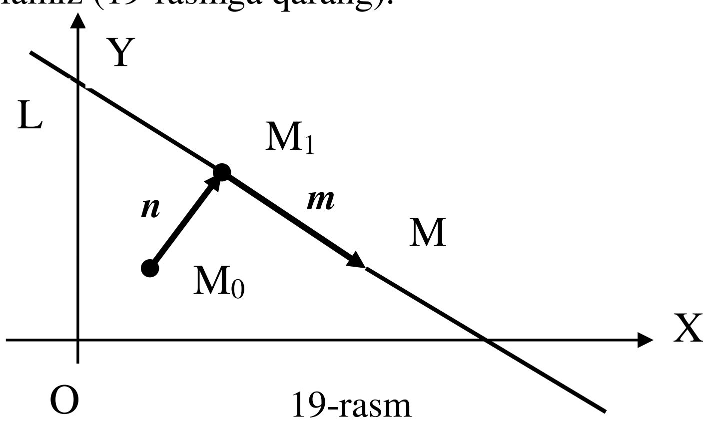
1.2. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi. To‘g‘ri chiziq geometriyaning boshlang‘ich tushunchalaridan biri bo‘lib, u ta’rifsiz qabul etiladi.

TEOREMA: Tekislikdagi har qanday *L* to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$$Ax+By+C=0 \ , \ A^2+B^2 \neq 0 \qquad (2)$$

ko‘rinishda, ya’ni I tartibli tenglamadan iborat bo‘ladi. Aksincha, har qanday I tartibli (2) tenglama tekislikda biror to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi.

Isbot: Dastlab teoremaning birinchi qismini o‘rinli ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun tekislikning berilgan *L* to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lmagan ixtiyoriy bir M_0 nuqtasini olamiz (19-rasmga qarang).



19-rasm

Bu nuqtadan L to‘g‘ri chiziqqa perpendikular o‘tkazamiz va ularning kesishish nuqtasini $M_1(x_1,y_1)$ deb belgilaymiz. Boshi M_0 , uchi esa M_1 nuqtada bo‘lgan $\boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{0}$ vektorni kiritamiz va uning koordinatalarini A va B, ya’ni $\boldsymbol{n}=(A,B)$ deb olamiz. Endi L to‘g‘ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy bir $M(x,y)$ nuqtani olamiz va boshi $M_1(x_1,y_1)$, uchi esa $M(x,y)$ nuqtada joylashgan $\boldsymbol{m}=(x-x_1,\ y-y_1)$ vektorni qaraymiz. Bunda $M(x,y)$ nuqta L to‘g‘ri chiziqda yotsa va faqat su holda $\boldsymbol{n}$ va $\boldsymbol{m}$ vektorlar ortogonal bo‘ladi. Vektorlarning ortogonallik shartini koordinatalardagi ifodasidan (III bob,§2) foydalanib, quyidagi natijalarni olamiz:

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}=A(x-x_1)+B(y-y_1)=0 \Rightarrow Ax+By+(-Ax_1-By_1)=0 \Rightarrow Ax+By+C=0.$$

Bunda $\boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{0}$ ekanligidan $|\boldsymbol{n}|^2=A^2+B^2\neq 0$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Endi teoremaning ikkinchi qismini isbotlaymiz, ya’ni (2) tenglama to‘g‘ri chiziqni ifodalashini ko‘rsatamiz. Buning uchun (2) tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$Ax+By+C= Ax+B(y+C/B)=0 \Rightarrow A(x-0)+B(y-(-C/B))=0 \Rightarrow A(x-x_1)+B(y-y_1)=0.$$

Bunda $x_1=0$, $y_1=-C/B$ belgilash kiritildi. Agar $\boldsymbol{n}=(A,B)$ va $\boldsymbol{m}=(x-x_1,\ y-y_1)$ vektorlarni qarasak, oxirgi tenglikdan $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}=0$, ya’ni bu vektorlar orthogonal ekanligi kelib chiqadi. $\boldsymbol{n}=(A,B)$ vektorga orthogonal bo‘lgan barcha $\boldsymbol{m}=(x-x_1,\ y-y_1)$ vektorlarning $M(x,y)$ uchlari bir to‘g‘ri chiziqda yotadi. Demak, (2) tenglama $M_1(0, -C/B)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\boldsymbol{n}=(A,B)$ vektorga nisbatan perpendikular joylashgan to‘g‘ri chiziqni ifodalar ekan.

3-TA‘RIF: (2) tenglama tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning ***umumiy tenglamasi*** deb ataladi. Unda A va B ***koeffitsiyentlar***, C esa ***ozod had*** deyiladi.

Teorema isbotidan ko‘rinadiki, (2) tenglama orqali aniqlanadigan $\boldsymbol{n}=(A,B)\neq\boldsymbol{0}$ vektor bu tenglama ifodalaydigan L to‘g‘ri chiziqqa nisbatan perpendikular bo‘ladi va uning ***normal vektori*** deb ataladi.

Masalan, $3x+4y-8=0$ tenglama $M_1(0,2)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\boldsymbol{n}=(3,4)$ vektorga perpendikular bo‘lgan to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi.

Shunday qilib, biz har qanday to‘g‘ri chiziq tenglamasi (2) ko‘rinishda bo‘lishini (analitik geometriyaning I asosiy masalasi) aniqladik va aksincha, har qanday (2) tenglama biror to‘g‘ri chiziqni ifodalashini (analitik geometriyaning II asosiy masalasi) isbotladik.

Endi tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning (2) umumiy tenglamasini ayrim xususiy hollarini tahlil etib, xulosalar chiqaramiz.

1) Ozod had C=0 bo‘lsin. Bunda (2) tenglama $Ax+By=0$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu tenglamani O(0,0) nuqta qanoatlantiradi. Demak, $Ax+By=0$ ko‘rinishdagi tenglamalar koordinatalar boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlarni ifodalaydi.

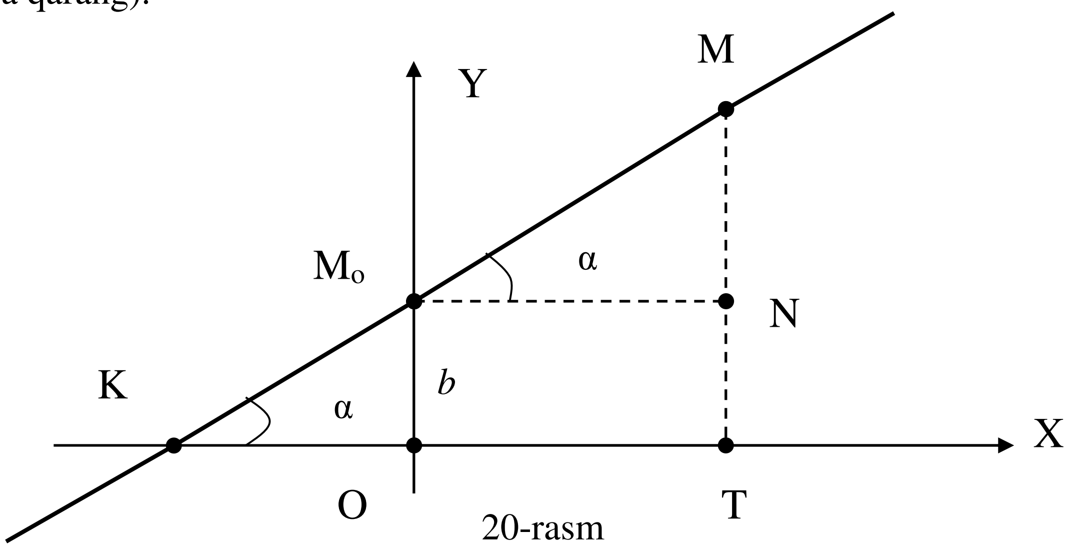
2) A=0, ya’ni L to‘g‘ri chiziq tenglamasi $By+C=0$ ko‘rinishda bo‘lsin. Bu holda uning normal vektori $\boldsymbol{n}=(0,B)\perp OX$. Ammo $\boldsymbol{n}=(0,B)\perp L$ bo‘lgani uchun bu holda L to‘g‘ri chiziq OX koordinata o‘qiga parallel ($L \parallel OX$) yoki $L\perp OY$ bo‘ladi.

3) B=0 holni ko‘ramiz. Bunda tenglama $Ax+C=0$ ko‘rinishda bo‘lib, $\boldsymbol{n}=(A,0)\perp OY$. Demak, $L \parallel OY$ yoki $L\perp OX$ bo‘ladi.

4) C=0 va B=0 bo‘lsin. Bunda tenglama $Ax=0$ yoki, $A\neq 0$ bo‘lgani uchun ($A^2+B^2\neq 0$ shartga asosan), $x=0$ tenglamaga kelamiz. Bu tenglama OX koordinata o‘qi joylashgan to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi.

5) C=0 va A=0 holda y=0 tenglamaga kelamiz. Bu tenglama OY koordinata o‘qi joylashgan to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi.

1.3. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi. Berilgan L to‘g‘ri chiziq OX o‘qi bilan α burchak ($\alpha \neq 90^0$) tashkil etishi (ya’ni OX o‘qini soat miliga teskari yo‘nalishda α burchakka burilsa, u L to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladi) va OY o‘qidagi $M_0(0,b)$ nuqtadan o‘tishi ma’lum bo‘lsin (20-rasmga qarang).



20-rasm

Bu to‘g‘ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy M(x,y) nuqtaning koordinatalari qanday tenglamani qanoatlantirishini aniqlaymiz. Chizmadan

$$OM_0=TN=b,\ OT=M_0N=x,\ TM=y,\ \angle M_0KO = \angle MM_0N = \alpha$$

ekanligini ko‘ramiz. Bu yerda ΔM_0MN to‘g‘ri burchakli uchburchak bo‘lib, undan ushbu natijani olamiz:

$$\frac{MN}{M_0N} = tg\alpha \Rightarrow \frac{TM - TN}{M_0N} = tg\alpha \Rightarrow \frac{y-b}{x} = tg\alpha \Rightarrow y - b = x \cdot tg\alpha \Rightarrow y = x \cdot tg\alpha + b.$$

Oxirgi tenglikda $tg\alpha=k$ belgilash kiritib, berilgan shartlarda L to‘g‘ri chiziq tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lishini topamiz:

$$y=kx+b \qquad (3)$$

<u>4-TA‘RIF:</u> (3) tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning ***burchak koeffitsiyentli tenglamasi*** deyiladi. Unda $k= tg\alpha$ to‘g‘ri chiziqning ***burchak koeffitsiyenti***, b esa ***boshlang‘ich ordinatasi*** deb ataladi.

Izoh: Agar $L \perp OX$ bo‘lsa , unda $\alpha=90^0$ va $k= tg\alpha$ ma’noga ega bo‘lmaydi. Bu holda L vertikal to‘g‘ri chiziq tenglamasi $x=a$ ko‘rinishda bo‘ladi.

Agar L to‘g‘ri chiziq umumiy tenglamasi Ax+By+C=0 (B≠0) bilan berilgan bo‘lsa, uning burchak koeffitsiyentli tenglamasiga quyidagicha o‘tiladi:

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow By = -Ax - C \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x + (-\frac{C}{B}) \Rightarrow k = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}.$$

Masalan, umumiy tenglamasi 4x–6y+3=0 bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini topamiz:

$$4x - 6y + 3 = 0 \Rightarrow 6y = 4x + 3 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{1}{2}.$$

1.4. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi. Koordinata boshidan o‘tmaydigan L to‘g‘ri chiziq OX va OY koordinata o‘qlarini mos ravishda $M_1(a,0)$ va $M_2(0,b)$ nuqtalarda kesib o‘tishi ma’lum bo‘lsin. Bu holda L tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘lishini topamiz.

Bu to‘g‘ri chiziq tenglamasini topish uchun $M_1(a,0)$ va $M_2(0,b)$ nuqtalar unda yotishidan foydalanamiz. Bu nuqtalarning koordinatalarini L to‘g‘ri chiziqning $Ax+By+C=0$ umumiy tenglamasini qanoatlantiradi, ya’ni

$$\begin{cases} Aa+B\cdot 0+C=0 \\ A\cdot 0+Bb+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{C}{a} \\ B=-\dfrac{C}{b} \end{cases}$$

Bu yerda $C\neq 0$, chunki L to‘g‘ri chiziq koordinata boshidan o‘tmaydi. Shu sababli umumiy tenglamadan quyidagi natijani olamiz:

$$Ax+By+C=0 \Rightarrow -\frac{C}{a}x+(-\frac{C}{b})y+C=0 \Rightarrow -C(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1)=0 \Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0.$$

Demak, L to‘g‘ri chiziqning izlangan tenglamasi

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (4)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bunda $|a|$ va $|b|$ qaralayotgan L to‘g‘ri chiziqni mos ravishda OX va OY koordinata o‘qlaridan ajratgan kesma uzunliklarini ifodalaydi. Shu sababli quyidagi ta’rif kiritiladi.

5-TA‘RIF: (4) to‘g‘ri chiziqning ***kesmalardagi tenglamasi*** deyiladi.

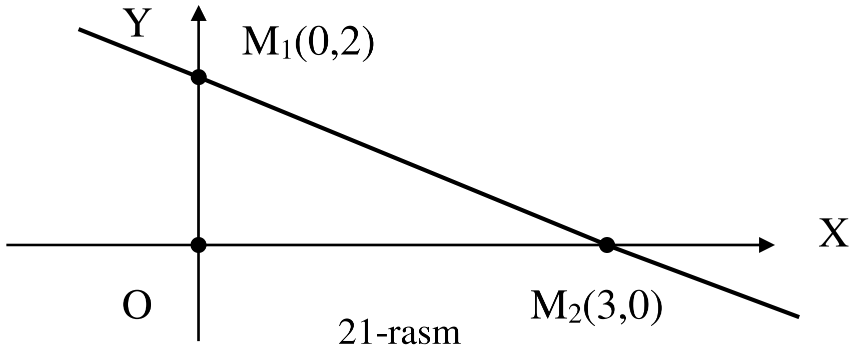
Agar koordinata boshidan o‘tmaydigan L to‘g‘ri chiziq $Ax+By+C=0$ ($A\neq 0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$) umumiy tenglamasi bilan berilgan bo‘lsa, uning kesmalardagi tenglamasiga o‘tish uchun umumiy tenglamani ($-C$) soniga bo‘linadi:

$$Ax+By+C=0 \Rightarrow -\frac{A}{C}x+(-\frac{B}{C})y-1=0 \Rightarrow \frac{x}{(-C/A)}+\frac{y}{(-C/B)}=1\ .$$

Masalan, umumiy tenglamasi $2x+3y-6=0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning kesmalardagi tenglamasini topamiz:

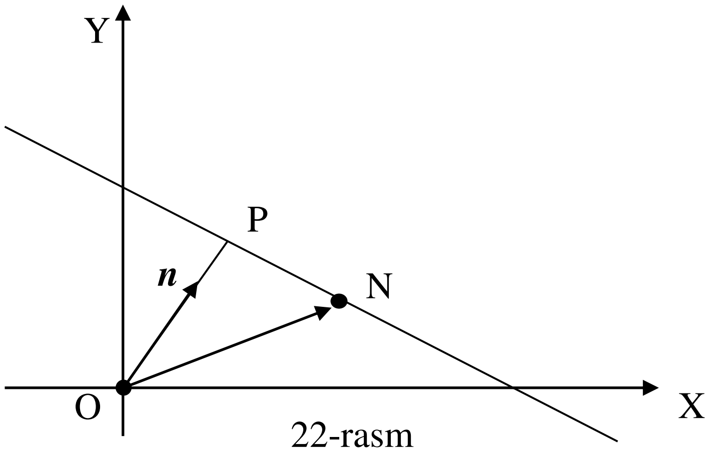
$$2x+3y-6=0 \Rightarrow \frac{2}{6}x+\frac{3}{6}y-1=0 \Rightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1.$$

Demak, bu to‘g‘ri chiziq OX va OY o‘qlarni $M_1(3,0)$ va $M_2(0,2)$ nuqtalarda kesib o‘tadi. Bundan foydalanib L to‘g‘ri chiziqni quyidagicha osonlik bilan yasash mumkin (21-rasmga qarang):



21-rasm

1.5. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi. Berilgan L to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘lgan $\boldsymbol{n}$ birlik vektor va koordinata boshidan bu to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa $|0P|=p$ ma’lum bo‘lsin (22-rasm). Bu ma’lumotlar asosida L to‘g‘ri chiziq tenglamasini topamiz. Agar $\boldsymbol{n}$ birlik vektor OX koordinata o‘qi bilan $\angle POX=\alpha$ burchak tashkil etgan bo‘lsa, uning koordinatalari cos α va sinα bo‘ladi, ya’ni $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha, \sin\alpha)$ deb yozish mumkin. N(x,y) berilgan to‘g‘ri chiziqdagi ixtiyoriy bir nuqta va $\boldsymbol{r}=(x,y)$ uning radius-vektori bo‘lsin. $\boldsymbol{r}$ va **n** vektorlar orasidagi burchak $\angle PON=\varphi$ deb olamiz.



22-rasm

$\boldsymbol{r}$ va $\boldsymbol{n}$ vektorlarning $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}$ skalyar ko‘paytmasini ikki usulda hisoblaymiz. Skalyar ko‘paytmani koordinatalar orqali hisoblash formulasiga asosan

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r} = x\cos\alpha + y\sin\alpha \ ;$$

Skalyar ko‘paytmaning ta’rifiga asosan va Δ PON da $\cos\varphi=|OP|/|ON|$ ekanligidan foydalanib, ushbu tenglikni hosil qilamiz:

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{r}|\cos\varphi = 1\cdot|\boldsymbol{r}|\cdot\cos\varphi=|ON|\cdot|OP|/|ON| = |OP| = p.$$

$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}$ skalyar ko‘paytmasi uchun bu ikki ifodani tenglashtirib, berilgan L to‘g‘ri chiziqdagi barcha N(x,y) nuqtalarning koordinatalari

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \Rightarrow x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (5)$$

tenglamani qanoatlantirishini ko‘ramiz.

6-TA‘RIF: (5) tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning ***normal tenglamasi*** deyiladi.

Agar L to‘g‘ri chiziq Ax+By+C=0 umumiy tenglamasi bilan berilgan bo‘lsa, uning normal tenglamasiga o‘tish masalasini ko‘ramiz. Bu va (5) tenglama bitta to‘g‘ri chiziqni ifodalagani uchun ularning mos koeffitsiyentlari proporsional bo‘ladi. Agar noma’lum proporsionallik koeffitsiyentini μ deb belgilasak, unda

$$\mu A=\cos\alpha, \quad \mu B=\sin\alpha, \quad \mu C= -p$$

tengliklarga ega bo‘lamiz. Dastlabki ikki tenglikdan

$$(\mu A)^2+(\mu B)^2=\mu^2(A^2+ B^2)= \cos^2\alpha+ \sin^2\alpha=1 \Rightarrow \mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

natijaga kelamiz. Yuqoridagi uchinchi tenglikdan $\mu C= -p<0$ ekanligini ko‘ramiz. Demak, μ ishorasi C ozod had ishorasiga qarama-qarshi qilib olinishi kerak. Bunda μ ***normallashtiruvchi ko‘paytuvchi*** deyiladi. Natijada

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = \frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (6)$$

tenglik orqali umumiy tenglamadan normal tenglamaga o‘tish mumkinligini ko‘ramiz.

Masalan, umumiy tenglamasi $3x+4y-15=0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$3x+4y-15=0 \Rightarrow \frac{3x+4y-15}{\sqrt{3^2+4^2}}=0 \Rightarrow \frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-3=0.$$

1.6. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi. Tekislikdagi L to‘g‘ri chiziqning biror $M_0(x_0,y_0)$ nuqtasi va unga parallel $\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{i}+n\boldsymbol{j}=(m,n)\neq\boldsymbol{0}$ vektor berilgan bo‘lsin. Bu holda berilgan M_0 nuqta va $\boldsymbol{a}$ vektor L to‘g‘ri chiziqni to‘liq aniqlaydi. Shu sababli $\boldsymbol{a}$ to‘g‘ri chiziqning ***yo‘naltiruvchi vektori***, M_0 esa uning ***boshlang‘ich nuqtasi*** deyiladi. Bu ma’lumotlar asosida L to‘g‘ri chiziq tenglamasini aniqlaymiz. Buning uchun berilgan L to‘g‘ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtani olamiz. Bu nuqtani boshlang‘ich M_0 nuqta bilan tutashtirib, $\boldsymbol{x}=(x-x_0,\ y-y_0)$ vektorni hosil qilamiz. Shartga asosan $\boldsymbol{x}$ va $\boldsymbol{a}$ vektorlar kollinear bo‘ladi. Vektorlarning kollinearlik shartiga asosan (IV bob, §3, (5) formulaga qarang) ularning mos koordinatalari proporsionaldir:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \qquad (7)$$

Izoh: Agar L to‘g‘ri chiziqning $\boldsymbol{a}=(m,n)$ yo‘naltiruvchi vektorida $m=0$ (L-gorizontal to‘g‘ri chiziq) yoki $n=0$ (L-vertikal to‘g‘ri chiziq) bo‘lsa , unda (7) tenglamadagi tegishli kasrlarning suratlari nol deb olinadi va L to‘g‘ri chiziqning tenglamasi $y=y_0$ yoki $x=x_0$ ko‘rinishda yoziladi.

<u>7-TA‘RIF:</u> (7) tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning ***kanonik tenglamasi*** deyiladi. “Kanonik” so‘zi sodda, ixcham degan ma’noni ifodalaydi. Agar L to‘g‘ri chiziq umumiy $Ax+By+C=0$ tenglamasi bilan berilgan bo‘lsa, yo‘naltiruvchi vektor sifatida $\boldsymbol{a}=(B,-A)$ vektorni, boshlang‘ich $M_0(x_0,y_0)$ nuqta sifatida esa koordinatalari $Ax_0+By_0=-C$ shartni qanoatlantiruvhchi ixtiyoriy bir nuqtani olish mumkin. Masalan, $x_0=0$, $y_0=-C/B$ yoki $x_0=-C/A$, $y_0=0$ deb olish mumkin.

Izoh: Agar L to‘g‘ri chiziq OX yoki OY o‘qiga perpendikular, ya’ni to‘g‘ri chiziq $\boldsymbol{i}$ yoki $\boldsymbol{j}$ vektorga perpendikular bo‘lsa, unda $n=0$ yoki $m=0$ bo‘ladi. Bu holda (7) tenglamadagi tegishli kasrning surati nolga teng deb olinadi va L to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi mos ravishda $x=x_0$ yoki $y=y_0$ ko‘rinishda bo‘ladi.

1.7. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi. To‘g‘ri chiziqning (7) kanonik tenglamasidagi kasrlarning qiymatlari $M(x,y)$ nuqta to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakat etganda o‘zgarib boradi va ixtiyoriy haqiqiy t soniga teng bo‘la oladi. Shu sababli bu tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{y-y_0}{m}=\frac{x-x_0}{n}=t \Rightarrow \begin{cases} y-y_0=mt \\ x-x_0=nt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=y_0+mt \\ x=x_0+nt \end{cases},\ t\in(-\infty,\infty). \quad (8)$$

<u>8-TA‘RIF:</u> (8) sistemada t – ***parametr***, sistemaning o‘zi esa tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning ***parametrik tenglamasi*** deyiladi.

Agar to‘g‘ri chiziq umumiy $Ax+By+C=0$ ($A\neq0$, $B\neq0$) tenglamasi bilan berilgan bo‘lsa, uning parametrik tenglamasiga o‘tish uchun $x=t$ deb olamiz. Bundan to‘g‘ri chiziqning quyidagi parametrik tenglamasiga kelamiz:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -\dfrac{A}{B}t - \dfrac{C}{B} \end{cases}.$$

Izoh: Agar umumiy tenglamada A=0 yoki B=0 bo‘lsa, (8) parametrik tenglama

$$\begin{cases} x = t \\ y = -\dfrac{C}{B} \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{C}{A} \\ y = t \end{cases}$$

ko‘rinishda yoziladi.

To‘g‘ri chiziqqa doir har xil masalalarni yechishda uning u yoki bu ko‘rinishdagi tenglamasi qulay bo‘lishi mumkin va bunga biz kelgusida ishonch hosil etamiz.

XUYLOSA

Tekislikdagi analitik geometriyada chiziqlarning xususiyatlari ularning tenglamalari orqali algebraik usulda o‘rganiladi. Eng sodda va eng ko‘p uchraydigan chiziq–to‘g‘ri chiziqdir. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqlarning umumiy, burchak koeffitsiyentli, kesmalardagi, normal, kanonik va parametrik tenglamalarini ko‘rish mumkin. Bu tenglamalardan kelgusida to‘g‘ri chiziqqa doir turli masalalarni yechishda foydalaniladi.

Tayanch iboralar

* Geometrik obyekt tenglamasi * Analitik geometriya predmeti * Analitik geometriyaning ikkita asosiy masalasi * Aylana tenglamasi * To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi * Burchak koeffitsiyentli tenglama * Kesmalardagi tenglama * Normal tenglama * Kanonik tenglama * Parametrik tenglama.

Takrorlash uchun savollar

10. Geometrik obyekt tenglamasi deb nimaga aytiladi?
11. Analitik geometriya predmeti nimadan iborat?
12. Analitik geometriyaning ikkita asosiy masalasi qanday ifodalanadi?
13. Aylana tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
14. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
15. To‘g‘ri chiziqning normal vektori qanday aniqlanadi?
16. Umumiy tenglamaning ayrim xususiy hollarini tahlil eting.
17. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti deb nimaga aytiladi?
18. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
19. Umumiy tenglamadan burchak koeffitsiyentli tenglamaga qanday o‘tiladi?
20. To‘g‘ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
21. Qanday to‘g‘ri chiziqlar uchun ularning kesmalardagi tenglamasi mavjud bo‘ladi?
22. Umumiy tenglamadan kesmalardagi tenglamaga qanday o‘tiladi?
23. To‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

24. Umumiy tenglamadan normal tenglamaga qanday o‘tiladi?
25. Qanday vektor berilgan to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori deyiladi?
26. To‘g‘ri chiziqning boshlang‘ich nuqtasi deb nimaga aytiladi?
27. To‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
28. Umumiy tenglamadan kanonik tenglamaga qanday o‘tiladi?
29. To‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
30. Umumiy tenglamadan parametrik tenglamaga qanday o‘tiladi?

Testlardan namunalar

1. Analitik geometriyada chiziq nima asosida o‘rganiladi?
   A) tenglama; B) chizma; C) proyeksiya; D) ta’rif ; E) To‘g‘ri javob yo‘q.

2. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning umumiy Ax+By+C=0 tenglamasidagi A va B koeffitsiyentlar qanday shartni qanoatlantirishi kerak ?
   A) $A\cdot B>0$; B) $A+B=0$; C) $A-B<0$; D) $A^2+B^2\neq 0$; E) $A^2-B^2\neq 0$.

3. Tasdiqni yakunlang: Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning umumiy Ax+By+C=0 tenglamasi bo‘yicha tuzilgan ***n***=(A,B) vektor bu to‘g‘ri chiziqqa ⋯ .
   A) parallel bo‘ladi; B) tegishli bo‘ladi ; C) perpendikular bo‘ladi ; D) perpendikular bo‘lmaydi; E) og‘ma bo‘ladi .

4. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning umumiy $3x+5y+2=0$ tenglamasi bo‘yicha uning ***n*** =(A,B) normal vektorini toping.
   A) ***n*** =(5,2); B) ***n*** =(3,5); C) ***n*** =(3,2); D) ***n*** =(2,5); E) ***n*** =(5,3).

5. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini ko‘rsating.
   A) $y = kx + b$; B) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$; C) $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$;
   D) $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$; E) $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziq $(n+2)x+(n+3)y+(2n-1)=0$ umumiy tenglamasi bilan berilgan. Quyidagilarni aniqlang:

a) to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini;
b) to‘g‘ri chiziqning kesmalardagi tenglamasini;
c) to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasini;
d) to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasini;
e) to‘g‘ri chiziqni koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalarini;

§2. TO‘GRI CHIZIQLARGA DOIR AYRIM MASALALAR

- ***To‘g‘ri chiziqlarga doir masalalar.***
- ***To‘g‘ri chiziq tenglamalarining iqtisodiy tatbiqlari.***

2.1. To‘g‘ri chiziqlarga doir masalalar. Bu yerda biz to‘g‘ri chiziqlarga doir tez-tez uchrab turadigan ayrim masalalar va ularning yechimlari bilan tanishib chiqamiz.

1-masala: Berilgan $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar tenglamasini toping.

Yechish: Izlangan L to‘g‘ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentli $y=kx+b$ tenglamasidan foydalanamiz. Berilgan $M_0(x_0,y_0)$ nuqta L to‘g‘ri chiziqda yotgani uchun uning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiradi, ya’ni $y_0=kx_0+b$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu tenglikni oldingi tenglamadan hadma-had ayirib, masala javobini quyidagi ko‘rinishda topamiz:

$$y-y_0=k(x-x_0). \qquad (1)$$

Bunda burchak koeffitsiyenti k bir qiymatli aniqlanmaydi va uning qiymatini ixtiyoriy ravishda tanlash mumkin. Buning sababi shundan iboratki, berilgan $M_0(x_0,y_0)$ nuqta orqali cheksiz ko‘p to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin. (1) berilgan nuqtadan o‘tuvchi ***to‘g‘ri chiziqlar dastasi*** tenglamasi deyiladi. Masalan, $M_0(5,-3)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasi tenglamasi

$$y+3=k(x-5) \Rightarrow y=kx-(5k+3)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Agar $k=2$ desak, $M_0(5,-3)$ nuqtadan o‘tuvchi aniq bir to‘g‘ri chiziq tenglamasi $y=2x-13$ hosil bo‘ladi.

2-masala: Berilgan ikkita $M_1(x_1,y_1)$ va $M_2(x_2,y_2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini toping.

Yechish: Berilgan nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini topish uchun $M_1(x_1,y_1)$ nuqtani boshlang‘ich nuqta, ularni tutashtirishdan hosil bo‘lgan $\boldsymbol{a}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$ vektorni esa yo‘naltiruvchi vektor deb olish mumkin. Shu sababli izlangan to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (2)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

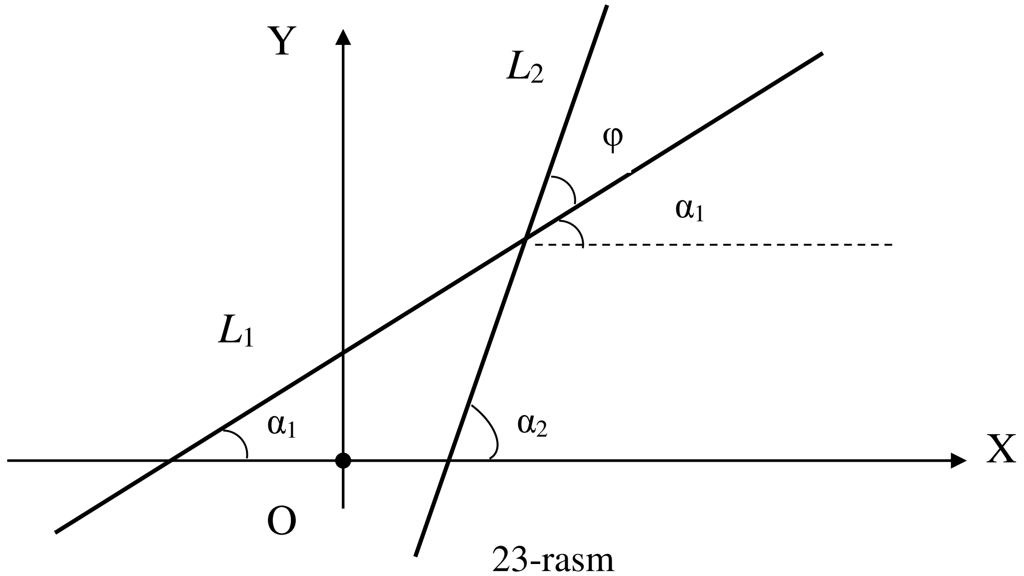
Masalan, $M_1(2,1)$ va $M_2(-3,0)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{x-2}{-3-2}=\frac{y-1}{0-1} \Rightarrow -(x-2)=-5(y-1) \Rightarrow x-5y+3=0\,.$$

<u>TA‘RIF:</u> L_1 va L_2 ***to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak*** deb ularning birinchisini soat miliga teskari yo‘nalishda aylantirib ikkinchisi bilan astma-ust tushirish uchun kerak bo‘ladigan burilish burchagiga aytiladi.

3-masala: Berilgan ikkita L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar orasidagi φ burchakni toping.

Yechish: ***I hol.*** L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar o‘zlarining burchak koeffitsyentli tenglamalari $y=k_1x+b_1$ va $y=k_2x+b_2$ bilan berilgan bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqlarning OX o‘qi bilan hosil qilgan burchaklarini mos ravishda α_1 va α_2 kabi belgilaymiz (23-rasmga qarang).



23-rasm

Chizmadan ko‘rinadiki izlanayotgan burchak $\varphi=\alpha_2-\alpha_1$ bo‘ladi va shu sababli uning tangensini quyidagicha topish mumkin:

$$tg\varphi = tg(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1+tg\alpha_2\cdot tg\alpha_1}.$$

Bunda $tg\alpha_1=k_1$ va $tg\alpha_2=k_2$ ekanligini hisobga olib va $\varphi\neq 90^0$ shartda izlangan burchak uchun

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2\cdot k_1} \qquad (3)$$

formulaga ega bo‘lamiz.

II hol. L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar o‘zlarining $A_1x+B_1y+C_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2=0$ umumiy tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin. Bu tenglamalardan L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlarning $\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1)$ va $\boldsymbol{n}_2=(A_2, B_2)$ normal vektorlarini topamiz. Unda izlangan φ burchak normal vektorlar orasidagi burchak bilan teng bo‘ladi va, vektorlar orasidagi burchak formulasiga asosan ,

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \qquad (4)$$

formula bilan topiladi.

Misol sifatida umumiy tenglamalari $5x-y+7=0$ va $3x+2y-1=0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni (4) formulaga asosan topamiz:

$$\cos\varphi=\frac{5\cdot 3+(-1)\cdot 2}{\sqrt{5^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{13}{\sqrt{26\cdot 13}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\varphi=45^0.$$

4-masala: Berilgan ikkita L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlarning parallellik va perpendikularlik shartlarini toping.

Yechish: ***I hol.*** L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar o‘zlarining burchak koeffitsiyentli tenglamalari $y=k_1x+b_1$ va $y=k_2x+b_2$ bilan berilgan bo‘lsin.

Agar L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lsa, y holda

$$\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha_1 = \mathrm{tg}\,\alpha_2 \Rightarrow k_1 = k_2.$$

Aksincha, agar $k_1 = k_2$ bo‘lsa, u holda (3) formuladan $tg\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$, ya’ni L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziq parallel bo‘ladi. Shunday qilib, burchak koeffitsiyentli tenglamalari bilan berilgan ikki to‘g‘ri chiziqning parallel bo‘lishining zaruriy va yetarli sharti

$$k_1 = k_2 \qquad (5)$$

bo‘ladi.

Agar L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar perpendikular bo‘lsa, unda $\varphi=90^0$ bo‘ladi. Yuqoridagi (3) formuladan

$$ctg\varphi = \frac{1 + k_2 \cdot k_1}{k_2 - k_1}$$

ekanligini ko‘ramiz. $\varphi=90^0$ holda $ctg\varphi=0$ bo‘ladi va shu sababli uning formulasidagi kasrning surati nolga teng bo‘lishi kerak:

$$1+k_1k_2=0 \Rightarrow k_1k_2=-1. \qquad (6)$$

Aksincha, agar (6) shart bajarilsa, unda $ctg\varphi=0$ bo‘ladi va $\varphi=90^0$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, (6) ikkita to‘g‘ri chiziqning perpendikularligining zaruriy va yetarli shartini ifodalaydi.

II hol. L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar o‘zlarining $A_1x+B_1y+C_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2=0$ umumiy tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin. Bu holda L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar parallel yoki perpendikular bo‘lishi uchun ularning $\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1)$ va $\boldsymbol{n}_2=(A_2, B_2)$ normal vektorlari mos ravishda kollinear yoki orthogonal bo‘lishi zarur va yetarlidir. Unda vektorlarning kollinearlik yoki ortogonallik shartlaridan foydalanib, masala javobini hosil etamiz:

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0, \qquad (7)$$

$$L_1 \| L_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \qquad (8)$$

Misol sifatida burchak koeffitsiyentli tenglamalari

$$y = -3x + 5, \quad y = \frac{1}{3}x - 1$$

bilan berilgan to‘g‘ri chiziqlarni qaraymiz. Bu yerda $k_1=-3$ va $k_2=1/3$ bo‘lgani uchun $k_1k_2=-1$. Demak, (6) shart bajarilmoqda va shu sababli L_1 va L_2 o‘zaro perpendikular joylashgan.

<u>Masala:</u> $M_0(-3,-1)$ nuqta orqali o‘tuvchi va umumiy tenglamasi $2x+y-3=0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqqa perpendikular to‘g‘ri chiziqning tenglamasi topilsin.

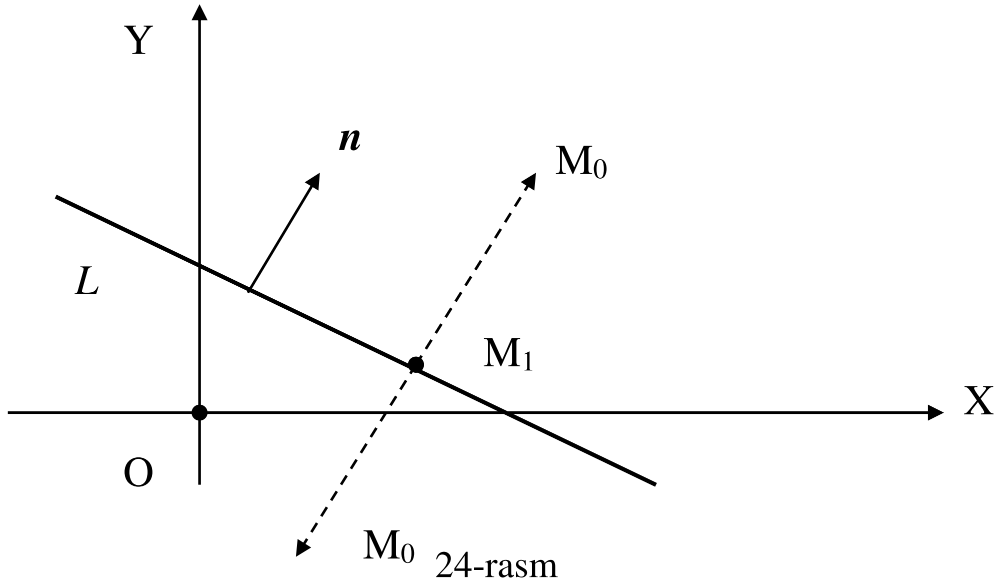
Yechish: Izlanayotgan to‘g‘ri chiziq $M_0(-3,-1)$ nuqta orqali o‘tadi va shu sababli (1) formulaga asosan uning tenglamasi $y+1=k_2(x+3)$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu tenglamadagi k_2 burchak koeffitsiyentini (6) perpendikularlik shartidan topamiz. Berilgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti $k_1=-1/2$ ekanligidan $k_2=-1/k_1=2$ bo‘lishi kelib chiqadi. Unda izlanayotgan to‘g‘ri chiziqning tenglamasi

$$y+1=k_2(x+3) \Rightarrow y+1=2(x+3) \Rightarrow y=2x+5$$

ekanligini topamiz.

5-masala: Berilgan $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadan berilgan L to‘g‘ri chiziq‘gacha bo‘lgan d masofani toping.

Yechish: L to‘g‘ri chiziq umumiy tenglamasi $Ax+By+C=0$ bilan berilgan bo‘lsin. Berilgan $M_0(x_0,y_0)$ nuqta bu L to‘g‘ri chiziqda yotmaydi deb olamiz, chunki aks holda $d=0$ bo‘lishi ravshan. $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadan L to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan perpendikular asosini $M_1(x_1,y_1)$ deb belgilaymiz (24-rasmga qarang).



24-rasm

Berilgan L to‘g‘ri chiziqning $\boldsymbol{n}=(A,B)$ normal va uchi M_1, boshi esa M_0 nuqtada joylashgan $\boldsymbol{d}=(x_0-x_1,\ y_0-y_1)$ vektorlarni qaraymiz. Bu vektorlar kollinear va ularning yo‘nalishlari bir xil yoki qarama-qarshi bo‘lishi mumkin.

Dastlab $\boldsymbol{n}=(A,B)$ va $\boldsymbol{d}=(x_0-x_1,\ y_0-y_1)$ vektorlar bir xil yo‘nalgan holni ko‘ramiz. Bu holda ular orasidagi burchak $\varphi=0$ bo‘ladi. Unda $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{d}$ skalyar ko‘paytmani ta’rifi va koordinatalardagi ifodasiga asosan ushbu tenglikni hosil etamiz:

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{d}=|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{d}|\cdot\cos\varphi=|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{d}|\cdot\cos 0=|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{d}|=d\cdot\sqrt{A^2+B^2}=A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1).$$

$M_1(x_1,y_1)$ nuqta L to‘g‘ri chiziqda yotganligi uchun

$$Ax_1+By_1+C=0 \Rightarrow C=-(Ax_1+By_1)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Shuning uchun

$$A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)=Ax_0+By_0-(Ax_1+By_1)=Ax_0+By_0+C$$

deb yozish mumkin. Unda yuqoridagi $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{d}$ skalyar ko‘paytma ifodasidan

$$d=\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

formulaga ega bo‘lamiz.

Agar $\boldsymbol{n}=(A,B)$ va $\boldsymbol{d}=(x_0-x_1,\ y_0-y_1)$ vektorlar qarama-qarshi yo‘nalgan bo‘lsa, ular orasidagi burchak $\varphi=180^0$ va bu holda $\cos\varphi=\cos 180^0=-1$ bo‘ladi. Yuqoridagi mulohazalarni takrorlab, bu holda

$$d=\frac{-(Ax_0+By_0+C)}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

natijaga erishamiz. Bu ikkala holni birlashtirib

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (9)$$

umumiy formulani hosil etamiz.

Izoh: Masala yechimidan kelib chidadiki, agar $Ax_0+By_0+C>0$ bo'lsa $M_0(x_0,y_0)$ nuqta umumiy tenglamasi $Ax+By+C=0$ bo'lgan L to'g'ri chiziqdan yuqorida va aksincha, $Ax_0+By_0+C<0$ bo'lsa, L to'g'ri chiziqdan pastda joylashgan bo'ladi. $Ax_0+By_0+C=0$ holda esa $M_0(x_0,y_0)$ nuqta L to'g'ri chiziqda yotishi tushunarlidir.

<u>Masala:</u> $M_0(-3,-1)$ nuqtadan umumiy tenglamasi $4x+3y-1=0$ bo'lgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan D masofani toping va ular o'zaro qanday joylashganini aniqlang.

Yechish: (9) formulaga asosan

$$d=\frac{|4\cdot(-3)+3\cdot(-1)-4|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|-19|}{5}=3{,}8\,.$$

Bunda

$$Ax_0+By_0+C=4\cdot(-3)+3\cdot(-1)-4=-19<0$$

bo'lgani uchun $M_0(-3,-1)$ nuqta L to'g'ri chiziqdan pastda joylashganligini ko'ramiz.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, bu masala L to'g'ri chiziq normal tenglamasi

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$$

bilan berilganda juda oddiy yechiladi, chunki bu holda (9) formulani (V bob,§1, (6) formulaga qarang)

$$d=|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p| \qquad (10)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Demak, $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadan normal tenglamasi bilan berilgan to'g'ri chiziqqacha masofani topish uchun bu nuqta koordinatalarini normal tenglamaga qo'yish va hosil bo'lgan sonni absolut qiymatini olish kifoyadir.

6-masala: Berilgan L_1 va L_2 to'g'ri chiziqlarning $M_0(x_0,y_0)$ kesishish nuqtasini toping.

Yechish: Bu to'g'ri chiziqlarning

$$A_1x+B_1y+C_1=0\ (L_1),\quad A_2x+B_2y+C_2=0\ (L_2)$$

umumiy tenglamalarini qaraymiz. $M_0(x_0,y_0)$ kesishish nuqtasi ham L_1 va ham L_2 to'g'ri chiziqlarga tegishli bo'lgani uchun uning koordinatalari yuqoridagi ikkala umumiy tenglamalarni qanoatlantiradi. Demak, $M_0(x_0,y_0)$ kesishish nuqtasining koordinatalari ushbu chiziqli tenglamalar sistemasidan topiladi:

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1x+B_1y=-C_1\\A_2x+B_2y=-C_2\end{cases}. \qquad (11)$$

Agar (11) sistemada

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$$

shart bajarilsa, u yagona (x_0,y_0) yechimga ega bo'ladi va L_1, L_2 to'g'ri chiziqlar faqat bitta $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada kesishadi.

Agar (11) sistemada

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

shart bajarilsa, u cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi va L_1, L_2 to‘g‘ri chiziqlar ham cheksiz ko‘p nuqtalarda kesishadi, ya’ni ular ustma-ust tushadi.

Agar (11) sistemada

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$$

shart bajarilsa, u yechimga ega bo‘lmaydi va L_1 , L_2 to‘g‘ri chiziqlar birorta ham nuqtada kesishmaydi, ya’ni ular parallel joylashgan bo‘ladi.

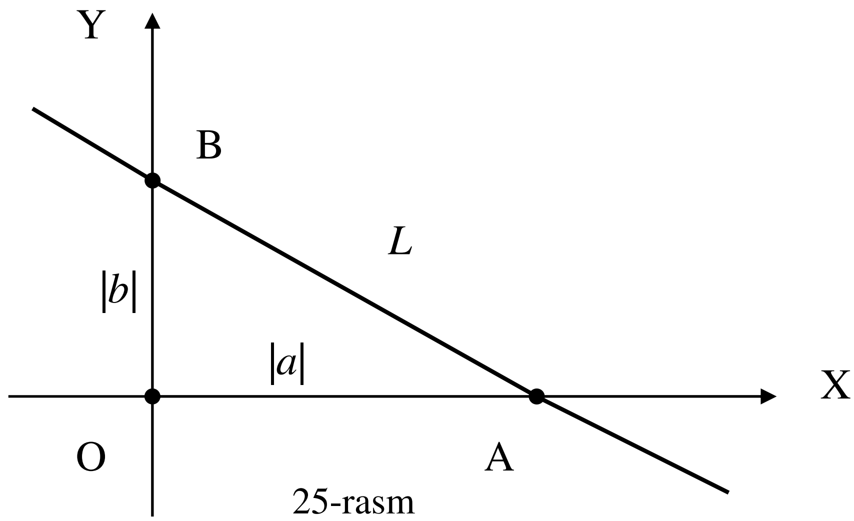
Misol sifatida umumiy tenglamalari $2x+y-1=0$ va $x+2y+1=0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlarning $M_0(x_0,y_0)$kesishish nuqtasini topamiz. Bu holda (11) sistema va uning yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases}2x+y-1=0\\ x+2y+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+y=1\\ x+2y=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}.$$

Demak, bu to‘g‘ri chiziqlar $M_0(1,-1)$ nuqtada kesishadi.

7-masala: Koordinata boshidan o‘tmaydigan L to‘g‘ri chiziq va OX, OY koordinata o‘qlari bilan chegaralangan uchburchakning S yuzasini toping.

Yechish: Berilgan L to‘g‘ri chiziqning kesmalardagi $(x/a)+(y/b)=1$ tenglamasini qaraymiz (25-rasmga qarang).



25-rasm

Chizmadan ko‘rinadiki, izlanayotgan S yuza to‘g‘ri burchakli ΔAOB yuzasidan iborat. Bu uchburchakning katetlari uzunliklari L to‘g‘ri chiziqning kesmalardagi tenglamasidan $|AO|=|a|$ va $|BO|=|b|$ kabi topiladi. Demak, izlangan yuza

$$S=\frac{1}{2}|AO|\cdot|BO|=\frac{1}{2}|a|\cdot|b|=\frac{|ab|}{2} \qquad (12)$$

formula bilan topiladi.

<u>**Masala:**</u> Umumiy tenglamasi $3x-8y+24=0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziq va koordinata o‘qlari bilan chegaralangan uchburchak yuzasini toping.

***Yechish*:** Dastlab bu to‘g‘ri chiziqning kesmalardagi tenglamasini topamiz:

$$3x-8y+24=0\Rightarrow\frac{3x-8y+24}{-24}=0\Rightarrow\frac{x}{-8}+\frac{y}{3}=1.$$

Demak, $a=-8$, $b=3$ va (12) formulaga asosan

$$S=\frac{|-8\cdot 3|}{2}=12 \text{ kv.birlik.}$$

2.2. To‘g‘ri chiziq tenglamalarining iqtisodiy tatbiqlari. Iqtisodiy jarayonlarni o‘rganishda to‘g‘ri chiziq tenglamalari keng qo‘llaniladi. Masalan, ishlab chiqarilayotgan mahsulot hajmi y va uning bir birligi narxi x orasidagi bog‘lanish eng sodda holda $y=k_1x+b_1$ chiziqli tenglama bilan ifodalanadi va u ***taklif funksiyasi*** deb ataladi. Bunda mahsulot narxi x ning o‘sishi ishlab chiqaruvchini mahsulot hajmi y ni oshirishga undaydi va shu sababli taklif funksiyasida burchak koeffitsiyenti $k_1>0$ bo‘ladi. Shuningdek sotuvga chiqarilgan mahsulot bir birligining narxi x va uni sotilgan hajmi y orasidagi bog‘lanishni ham $y=k_2x+b_2$ ko‘rinishda ifodalash mumkin va u ***talab funksiyasi*** deb ataladi. Bunda x narxni oshishi natijasida sotilgan mahsulot hajmi y kamayadi va shu sababli talab funksiyasida burchak koeffitsiyent $k_2<0$ bo‘ladi. Talab va taklif o‘zaro teng bo‘ladigan narx qiymati x_0 ***muvozanat narxi*** deyiladi va u ikkita to‘g‘ri chiziqni kesishish nuqtasi sifatida

$$\begin{cases} y=k_1x+b_1 \\ y=k_2x+b_2 \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasidan topiladi.

To‘g‘ri chiziq tenglamalarining iqtisodiy tatbig‘iga doir yana bir masalani ko‘ramiz.

8-masala: Mahsulotni ishlab chiqarish xarajatlari y va mahsulot hajmi x o‘zaro chiziqli bog‘langan. Bu mahsulotni ishlab chiqarishning ikkita T_1 va T_2 texnologik jarayonlari mavjud bo‘lib, ularda x va y orasidagi bog‘lanish mos ravishda $y=k_1x+b_1$ va $y=k_2x+b_2$ chiziqli tenglamalar bilan ifodalanadi. Bunda $k_1 > k_2$, ammo $b_1< b_2$ ekanligi ma’lum. Mahsulot hajmiga qarab qaysi texnologik jarayonni qabul etganda xarajatlar kichik bo‘lishini aniqlang.

Yechish: Dastlab mahsulot hajmi x qanday bo‘lganda bu ikkala texnologik jarayon xarajatlari y bir xil bo‘lishini, ya’ni muvozanat nuqtasini topamiz;

$$k_1x+b_1=k_2x+b_2 \Rightarrow (k_1-k_2)x=b_2-b_1 \Rightarrow x=\frac{b_2-b_1}{k_1-k_2}=x_0.$$

Bu holda ikkala texnologik jarayonda ham mahsulot ishlab chiqarish xarajatlari quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$y_0=k_1x_0+b_1=k_2x_0+b_2=k_1\frac{b_2-b_1}{k_1-k_2}+b_1=\frac{k_1b_2-k_2b_1}{k_1-k_2}.$$

Bunda $k_1 > k_2$ bo‘lgani uchun $x>x_0$ bo‘lganda $k_1x+b_1 >k_2x+b_2$ va aksincha, $x<x_0$ bo‘lganda $k_1x+b_1<k_2x+b_2$ bo‘ladi.

Demak, rejalashtirilayotgan mahsulot hajmi $x>x_0$ bo‘lsa, ishlab chiqarishga T_2 texnologik jarayonni, $x<x_0$ bo‘lganda esa T_1 texnologik jarayonni qo‘llash xarajatlar nuqtai-nazaridan maqsadga muvofiqdir.

Masalan, T_1 uchun $y=1{,}8x+30$, T_2 uchun $y=1{,}6x+50$ bo‘lsin. Unda muvozanat nuqtasi

$$x_0 = \frac{50-30}{1{,}8-1{,}6} = 100, \quad y_0 = \frac{1{,}8\cdot 50 - 1{,}6\cdot 30}{1{,}8-1{,}6} = 210.$$

Demak, mahsulot hajmi 100 birlikka teng bo‘lganda ikkala texnologik jarayondan ixtiyoriy birini tanlab olish mumkin va bunda xarajatlar 210 birlikni tashkil etadi. Agar mahsulot hajmi 100 birlikdan kichik bo‘lsa T_2 , 100 birlikdan katta bo‘lsa T_1 texnologik jarayondan foydalanish ma’qul.

XULOSA

Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning turli tenglamalaridan foydalanib ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchakni, ularning parallellik va perpendikularlik shartlarini, nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofani topish kabi geometrik masalalar osonlik bilan o‘z yechimini topadi. To‘g‘ri chiziq tenglamalarining iqtisodiy tatbig‘iga misol sifatida talab va taklif funksiyalari chiziqli bo‘lganda ularning muvozanat narxini topish masalasini ko‘rsatish mumkin.

Tayanch iboralar

* To‘g‘ri chiziqlar dastasi * Ikkita nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq * Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak * Parallellik sharti * Perpendikularlik sharti * Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa * Ikki to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtasi * Uchburchak yuzasi

Takrorlash uchun savollar

1. To‘g‘ri chiziqlar dastasi tenglamasi deb nimaga aytiladi ?
2. Berilgan ikkita nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi ?
3. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak qanday aniqlanadi?
4. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak qanday topiladi?
5. To‘g‘ri chiziqlarning perpendikularlik sharti nimadan iborat?
6. To‘g‘ri chiziqlarning parallellik sharti nimadan iborat ?
7. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa qanday topiladi?
8. Ikki to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtasi qanday aniqlanadi?
9. To‘g‘ri chiziq va koordinata o‘qlari bilan chegaralangan uchburchak yuzasini topish formulasini yozing.

Testlardan namunalar

1. Qaysi tenglama M(x_0,y_0) nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasini ifodalamaydi ?

A) $y - y_0 = k\,(x - x_0)$; B) $\frac{y-y_0}{x-x_0} = k$; C) $\frac{x-x_0}{y-y_0} = k$;

D) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$; E) $y + y_0 = k\,(x + x_0)$.

2. Qaysi tenglama M(–3;1) va N(0;7) nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi?

A) $y + 1 = 2(x - 3)$; B) $y - 1 = 2(x + 3)$; C) $2x - y + 7 = 0$;
D) $y = 2x + 7$; E) $4x - 2y + 14 = 0$.

3. Ikki $y=k_1x+b_1$ va $y=k_2x+b_2$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi α burchak tangensi formulasini ko‘rsating.

A) $tg\alpha = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$; B) $tg\alpha = \dfrac{k_1 + k_2}{1 - k_1k_2}$;

C) $tg\alpha = \dfrac{k_1 \cdot k_2}{1 + k_1k_2}$; D) $tg\alpha = \dfrac{k_1 - k_2}{1 - k_1k_2}$; E) $tg\alpha = \dfrac{1 + k_1k_2}{k_2 - k_1}$.

4. $y=2x-3$ va $y = -3x + 5$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

A) 90^0; B) 60^0; C) 45^0; D) 30^0; E) 120^0.

5. $y=k_1x+b_1$ va $y=k_2x+b_2$ to‘g‘ri chiziqlarning parallellik shartini ko‘rsating.

A) $k_1 \cdot k_2 = -1$; B) $k_1+k_2=0$; C) $k_1 \cdot k_2=1$;
D) $k_1-k_2=0$; E) To‘g‘ri javob keltirilmagan.

6. $3x+\alpha y+5=0$ va $\alpha x+12y-1=0$ to‘g‘ri chiziqlar α parametrning qanday qiymatlarida parallel bo‘ladi ?

A) ±3; B) ±4; C) ±5; D) ±6; E) ±7.

7. $A_1x+B_1y+C_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2=0$ to‘g‘ri chiziqlarning perpendikularlik shartini ko‘rsating.

A) $A_1B_1+A_2B_2=0$; B) $A_1A_2+B_1B_2=0$; C) $A_1B_1-A_2B_2=0$;
D) $A_1A_2-B_1b_2=0$; E) $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

8. OY o‘qidan 3 birlik kesma ajratuvchi va OX o‘qi bilan 60^0 burchak tashkil qiluvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini toping.

A) $y = kx + b$; B) $y = \dfrac{1}{2}x + 3$; C) $y = x - 3$;

D) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x + 3$; E) $y = \sqrt{3}x + 3$.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Uchburchakning uchlari $A(n, n+1)$, $B(n-2, n+3)$ va $C(n+2, n-4)$ nuqtalarda joylashgan. Quyidagilarni aniqlang:

a) uchburchak tomonlarining umumiy tenglamalarini;
b) A burchakning kosinusini;
c) B uchdan o‘tkazilgan mediana uzunligini;
d) C uchdan tushirilgan balandlik uzunligini;
e) Balandliklarning kesishish nuqtasini;
f) Uchburchak yuzasini.

§3. IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLAR. AYLANA VA ELLIPS

- ***II tartibli tenglama va chiziqlar.***
- ***Aylana va uning tenglamalari.***
- ***Ellips va uning kanonik tenglamasi.***
- ***Ellipsning xarakteristikalari.***

3.1. II tartibli tenglama va chiziqlar. Bu bobning boshida har qanday I tartibli Ax+By+C=0 tenglama tekislikda biror to‘g‘ri chiziqni aniqlashini va aksincha, tekislikdagi har qanday to‘g‘ri chiziq I tartibli tenglamaga ega bo‘lishini ko‘rib chiqqan edik.

Endi tekislikda II tartibli tenglamalarni qaraymiz. Bu tenglamalarning umumiy ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}xy+\mathrm{C}y^2+2\mathrm{D}x+2\mathrm{E}y+\mathrm{F}=0 \qquad (1)$$

Bunda (1) tenglamadagi A, B, C koeffitsiyentlardan kamida bittasi noldan farqli, ya’ni $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2\neq 0$ shart bajarilishi kerak. Aks holda (1) tenglama I tartibli tenglamaga aylanadi.

1-TA’RIF: Tenglamasi (1) ko‘rinishda bo‘lgan tekislikdagi chiziqlar ***II tartibli chiziqlar*** deb ataladi.

Biz quyida bunday chiziqlarning turlari bilan tanishib chiqamiz. Hozircha esa (1) tenglama har doim ham biror egri chiziqni ifodalashi shart emasligini misollar orqali ko‘rsatamiz.

1-misol. (1) tenglamadan A=1, C=–1,B=D=E=F=0 holda hosil bo‘ladigan II tartibli $x^2–y^2=0$ tenglama ikkita I tartibli $y=\pm x$ tenglamalarga ajraladi va ikkita to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi.

2-misol. A=C=F=1, D=–1, B=E=0 holda (1) tenglama

$$x^2+y^2–2x+1=0 \Rightarrow (x–1)^2+y^2=0$$

ko‘rinishga keladi va uni faqat bitta M(1,0) nuqta qanoatlantiradi.

3-misol. A=C=F=1, D=B=E=0 holda (1) tenglama $x^2+y^2+1=0$ ko‘rinishga keladi va uni birorta ham nuqta qanoatlantirmaydi, ya’ni bu tenglama bo‘sh to‘plamni ifodalaydi.

3.2. Aylana va uning tenglamalari. Bizga maktabdan tanish bo‘lgan aylana ta’rifini eslaymiz.

2-TA’RIF: Berilgan M(a,b) nuqtadan bir xil R masofada joylashgan tekislikdagi nuqtalar to‘plami (geometrik o‘rni) ***aylana*** deb ataladi. Bunda M(a,b) nuqta aylananing ***markazi,*** R soni esa aylananing ***radiusi*** deyiladi.

Markazi M(a,b) nuqtada va radiusi R bo‘lgan aylananing tenglamasi

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (2)$$

ko‘rinishda bo‘lishini oldin ko’rib o‘tgan edik. (2) aylananing ***normal tenglamasi*** deb ataladi va undan aylana II tartibli egri chiziq ekanligi ko‘rinadi. Agar aylana markazi O(0,0) koordinata boshida joylashgan bo‘lsa, uning tenglamasi

$$x^2+y^2=R^2$$

ko‘rinishda bo‘ladi va u aylananing ***kanonik tenglamasi*** deyiladi.

Endi umumiy holdagi II tartibli (1) tenglama qaysi shartda aylanani ifodalashini aniqlaymiz. Qisqa ko‘paytirish formulalardan foydalanib (2) tenglamani

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0 \qquad (3)$$

ko‘rinishga keltiramiz. Bu yerdan aylananing (3) tenglamasi (1) umumiy tenglamadan

$$A=C=1,\ B=0,\ D=-2a,\ E=-2b;\ \ F=a^2+b^2-R^2$$

bo‘lgan holda kelib chiqishini ko‘ramiz..

Endi qanday holda (1) umumiy tenglama aylanani ifodalashini aniqlaymiz. (3) tenglamadan ko‘rinadiki birinchi navbatda B=0 va A=C bo‘lishi kerak. Bu holda $A^2+B^2+C^2\neq 0$ shartdan $A=C\neq 0$ ekanligi kelib chiqadi va (1) tenglama ushbu

$$Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (4)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu tenglamani (2) ko‘rinishga keltirish uchun uni $A\neq 0$ soniga bo‘lamiz va to‘liq kvadratlarni ajratamiz:

$$Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0 \Rightarrow x^2+y^2+2\frac{D}{A}x+2\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+\frac{D}{A})^2+(y+\frac{E}{A})^2+\frac{AF-D^2-E^2}{A^2}=0\Rightarrow$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\frac{D^2+E^2-AF}{A^2}. \qquad (5)$$

Bunda a=–D/A va b=–E/A belgilash kiritilgan. Bu yerda $\Delta=D^2+E^2-AF$ ishorasiga qarab uch hol bo‘lishi mumkin.

I hol: $\Delta<0$. Bu holda (5) tenglama bo‘sh to‘plamni (mavhum aylanani) ifodalaydi, chunki uning chap tomoni doimo nomanfiydir.

II hol: $\Delta=0$. Bu holda (5) tenglama faqat bitta $M(a,b)$ nuqtani (markazi shu nuqtada va radiusi R=0 bo‘lgan aylanani) ifodalaydi.

III hol: $\Delta>0$. Bunda $\Delta=R^2$ deb belgilash mumkin va (5) tenglama (2) ko‘rinishni oladi, ya’ni aylanani ifodalaydi.

Demak, (4) ko‘rinishdagi II tartibli tenglamada $D^2+E^2-AF=\Delta>0$ shart bajarilsa, u $M(a,b)$ markazining koordinatalari a=–D/A va b=–E/A, radiusi esa

$$R=\frac{\sqrt{D^2+E^2-AF}}{|A|}$$

bo‘lgan aylanani ifodalaydi va (4) ***aylananing umumiy tenglamasi*** deb aytiladi.

Masalan, $x^2+y^2-2x+6y-15=0$ tenglamani qaraymiz. Bu tenglamada

$$A=C=1,\ D=-1,\ E=3,\ F=-15,\ D^2+E^2-AF=1+9-(-15)=25>0.$$

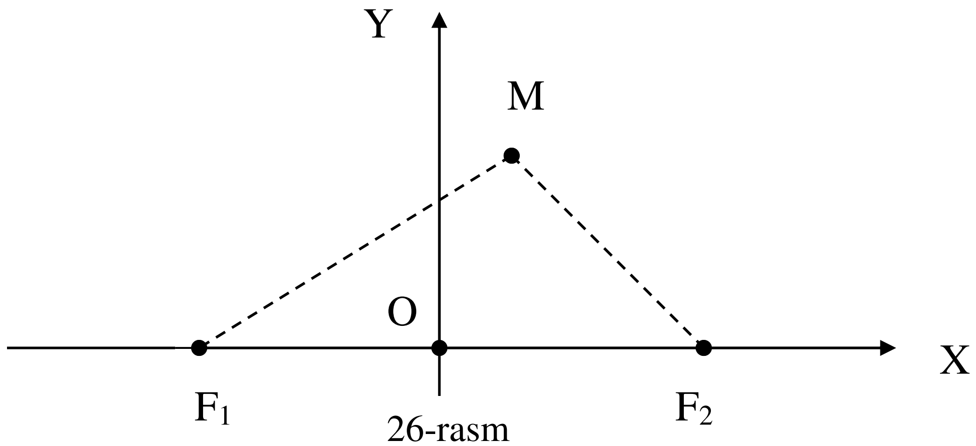
Demak, bu tenglama markazi M(1, –3) va radiusi R=5 bo‘lgan aylanani ifodalaydi. Haqiqatan ham

$$x^2+y^2-2x+6y-15=0 \Rightarrow (x-1)^2-1+(y+3)^2-9-15=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=25=5^2.$$

3.3. Ellips va uning kanonik tenglamasi. Dastlab ellips ta’rifini keltiramiz**.**

3-TA’RIF: Berilgan ikkita F_1 va F_2 nuqtalargacha masofalarining yig‘indisi o‘zgarmas songa teng bo‘lgan tekislikdagi nuqtalarining geometrik o‘rni ***ellips*** deb ataladi. Bunda F_1 va F_2 nuqtalar ellipsning ***fokuslari*** deyiladi.

Ta'rif bo'yicha ellips tenglamasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun F_1 va F_2 fokuslar orasidagi masofani $2c$, ellipsning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasidan fokuslarigacha bo'lgan masofalar yig'indisini $|MF_1|+|MF_2|=2a$ deb belgilaymiz. XOY Dekart koordinatalar sistemasini quyidagicha kiritamiz. OX o'qini F_1 va F_2 fokuslar orqali, OY o'qini esa fokuslar o'rtasidan o'tkazamiz (26-rasmga qarang). Bunda F_1 va F_2 fokuslar koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik joylashadi va, belgilashimizga asosan $|F_1F_2|=2c$ bo'lgani uchun, $|OF_1|=|OF_2|=c$ bo'ladi. Shu sababli bu fokuslar $F_1(-c,0)$ va $F_2(c,0)$ koordinatalarga ega bo'ladi.



26-rasm

Bu holda, ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga asosan,

$$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2+y^2}\ , \quad |MF_2| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

va, ellips ta'rifiga asosan,

$$|MF_1| + |MF_2| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a\,.$$

Bu tenglikni quyidagicha soddalashtiramiz:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,]^2 = [2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 4xc = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow (a^2 - xc)^2 = [a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^4 - 2a^2xc + (xc)^2 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2 \Rightarrow$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \qquad (6)$$

Yuqoridagi chizmadagi F_1MF_2 uchburchakdan uchburchak tengsizligiga asosan

$$|MF_1|+|MF_2|>|F_1F_2| \Rightarrow 2a>2c>0 \Rightarrow a^2-c^2>0$$

Ekanligini ko'ramiz. Shu sababli $a^2-c^2=b^2$ deb belgilab olish mumkin. Bu belgilashda (6) tenglama $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ ko'rinishga keladi. Bu tenglamani a^2b^2 ifodaga bo'lib, ushbu tenglamaga kelamiz:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b^2 = a^2 - c^2) \qquad (7)$$

<u>4-TA'RIF:</u> (7) tenglama ellipsning ***kanonik tenglamasi*** deyiladi.

Ellips kanonik tenglamasini tahlil etib, uning xususiyatlarini aniqlaymiz.

✓ Kanonik (7) tenglamada ellipsga tegishli har bir M(x,y) nuqtaning koordinatalari kvadrati bilan qatnashmoqda. Shu sababli $M_1(-x,y)$, $M_2(-x,-y)$ va $M_3(x,-y)$ nuqtalarning koordinatalari ham (7) kanonik tenglamani qanoatlantiradi, ya'ni bu nuqtalar ham ellipsga tegishli bo'ladi. Bundan OX va OY koordinata o'qlari ellips uchun simmetriya o'qlari bo'lishi kelib chiqadi.

✓ (7) tenglamaga x=0 yoki y=0 qiymatlarni qo'yib va bunda hosil bo'ladigan tenglamalarni yechib, mos ravishda ellipsning OX yoki OY koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topamiz:

$$x=0\Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow y^2=b^2\Rightarrow y=\pm b\,;\quad y=0\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1\Rightarrow x^2=a^2\Rightarrow x=\pm a.$$

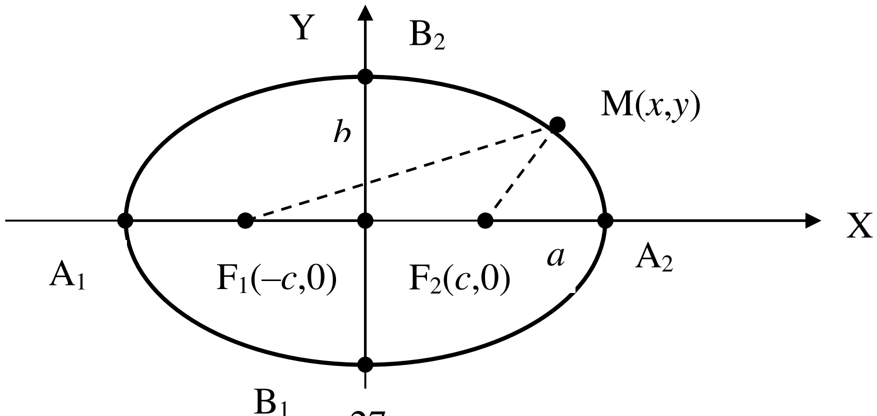
Demak, ellips OX o'qini $A_1(-a,0)$ va $A_2(a,0)$, OY o'qini esa $B_1(0,-b)$ va $B_2(0,b)$ nuqtalarda kesib o'tadi. Bu nuqtalar ellipsning ***uchlari*** deyiladi. Ellips uchlari orasidagi $A_1A_2=2a$ va $B_1B_2=2b$ kesmalar mos ravishda ellipsning ***katta o'qi*** va ***kichik o'qi***, $OA_1=OA_2=a$ va $OB_1=OB_2=b$ esa uning ***katta yarim o'qi*** va ***kichik yarim o'qi*** deyiladi.

✓ (7) kanonik tenglamadan ellipsga tegishli ixtiyoriy M(x,y) nuqtaning koordinatalari

$$\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2}\le 1\Rightarrow x^2\le a^2\Rightarrow |x|\le a,\qquad \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}\le 1\Rightarrow y^2\le b^2\Rightarrow |y|\le b$$

tengsizliklarni qanoatlantirishini ko'ramiz. Demak, ellips OX o'qi bo'yicha $x=\pm a$ vertikal, OY o'qi bo'yicha esa $y=\pm b$ gorizontal to'g'ri chiziqlar orasida joylashgan chegaralangan egri chiziqdan iborat bo'ladi.

✓ Koordinata o'qlari ellips uchun simmetriya o'qlari bo'lgani uchun uning grafigini faqat birinchi chorakda aniqlash kifoya. Bu yerda $x\ge 0$ va $y\ge 0$ bo'lgani uchun (7) tenglamadan unga teng kuchli bo'lgan $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ tenglamaga kelamiz. Bunda $x\in[0;a]$ bo'lib, x o'zgaruvchining qiymati 0 dan a ga qarab oshib borganda, y o'zgaruvchining qiymati b dan boshlab nolgacha kamayib boradi. Bu ma'lumot asosida dastlab ellips grafigini I chorakdagi qismini chizamiz, so'ngra uni simmetriya asosida II, III va IV choraklarga davom ettirib, ellips grafigini quyidagi 27-rasmdagidek bo'lishini topamiz:



27-rasm

3.4. Ellipsning xarakteristikalari. Endi ellipsning ayrim xususiyatlarini ifodalovchi tushunchalar bilan tanishamiz.

<u>5-TA’RIF:</u> Ellipsning fokuslari orasidagi $2c$ masofani uning katta o‘qi uzunligi $2a$ ga nisbati ellipsning ***ekssentrisiteti*** deb ataladi.

Ellipsning ekssentrisiteti ε kabi belgilanadi va ta’rifga hamda (7) kanonik tenglamaga asosan

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\,. \tag{8}$$

Bu formuladan $0\leq\varepsilon<1$ ekanligi kelib chiqadi. Agar $\varepsilon=0$ bo‘lsa, (8) formuladan $a=b$ ekanligini ko‘ramiz. Bu holda $a=b=R$ deb olsak, (7) kanonik tenglama $x^2+y^2=R^2$ ko‘rinishga keladi, ya’ni aylana tenglamasini ifodalaydi. Demak aylana ekssentrisiteti $\varepsilon=0$ bo‘lgan ellipsdan iborat, ya'ni ellipsning xususiy bir holi ekan. Shunday qilib ellipsning ekssentrisiteti ε qiymati bo‘yicha uning shakli haqida xulosa chiqarish mumkin. Bunda ε qiymati qanchalik nolga yaqin bo‘lsa, ellipsning shakli shunchalik “dumaloqroq” ; ε qanchalik birga yaqin bo‘lsa, ellipsning shakli shunchalik “cho‘zinchoqroq” bo‘ladi.

<u>6-TA’RIF:</u> Ellipsning ixtiyoriy M(x,y) nuqtasidan uning F_1 va F_2 fokuslarigacha bo‘lgan $|MF_1|=r_1$ va $|MF_2|=r_2$ masofalar shu nuqtaning ***fokal radiuslari*** deyiladi.

Ellips ta’rifiga asosan $r_1+r_2=2a$ bo‘ladi. Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga asosan

$$r_1=|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,,\quad r_2=|MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ .$$

Fokal radiuslarning bu ifodalarini kvadratga oshirib, so‘ngra hosil bo‘lgan ifodalarni hadma-had ayirib hamda $r_1+r_2=2a$ ekanligini eslab , r_1 va r_2 uchun ushbu tenglamalar sistemasiga kelamiz:

$$\begin{cases} r_1^2-r_2^2=4cx \\ r_1+r_2=2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (r_1+r_2)(r_1-r_2)=4cx \\ r_1+r_2=2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1-r_2=\dfrac{2cx}{a} \\ r_1+r_2=2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1-r_2=2\varepsilon x \\ r_1+r_2=2a \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasini yechib, fokal radiuslar uchun quyidagi formulalarni olamiz:

$$r_1=a+\varepsilon x \quad r_2=a-\varepsilon x \tag{9}$$

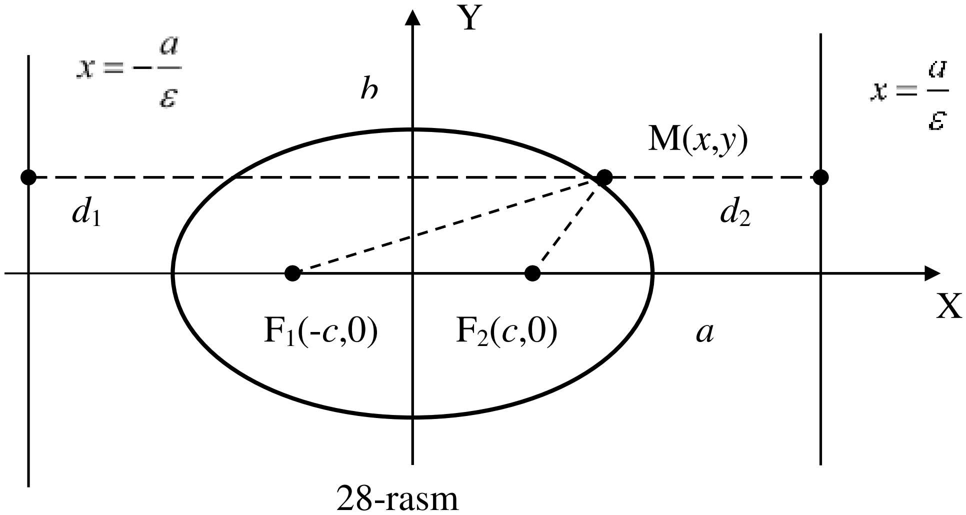
<u>7-TA’RIF:</u> Tenglamasi $x=\pm\, a/\varepsilon$ bo‘lgan vertikal to‘g‘ri chiziqlar ellipsning ***direktrisalari*** deyiladi.

Ellipsning ixtiyoriy M(x,y) nuqtasidan uning $x=-a/\varepsilon$ va $x=a/\varepsilon$ direktrisalarigacha masofalarni mos ravishda d_1 va d_2 deb belgilaymiz. Quyidagi chizmadan ko‘rinadiki $d_1=(a/\varepsilon)+x$ va $d_2=(a/\varepsilon)-x$. Bu tengliklar va (9) formulaga asosan quyidagi natijani olamiz:

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{a+\varepsilon x}{\dfrac{a}{\varepsilon}+x}=\varepsilon\frac{\dfrac{a}{\varepsilon}+x}{\dfrac{a}{\varepsilon}+x}=\varepsilon,\quad \frac{r_2}{d_2}=\frac{a-\varepsilon x}{\dfrac{a}{\varepsilon}-x}=\varepsilon\frac{\dfrac{a}{\varepsilon}-x}{\dfrac{a}{\varepsilon}-x}=\varepsilon\Rightarrow\quad \frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon. \tag{10}$$

Shunday qilib ellipsning ixtiyoriy nuqtasidan uning OY o‘qiga nisbatan bir tomonda joylashgan fokusi va direktrisasigacha bo‘lgan masofalar nisbati o‘zgarmas son bo‘lib, doimo ε ekssentrisitetiga teng bo‘ladi.

Ellips va uning xarakteristikalari quyidagi 28-rasmda ko‘rsatilgan.



28-rasm

Misol: $x^2+4y^2=4$ tenglama ellipsni ifodalashini ko‘rsating va uning barcha xarakteristikalarini toping.

Yechish: Dastlab berilgan tenglamani ikkala tomonini 4 soniga bo‘lamiz:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1.$$

Bu yerdan berilgan tenglama yarim o‘qlari a=2 va b=1 bo‘lgan ellipsni ifodalashini ko‘ramiz. Unda $c^2=a^2-b^2=3$ bo‘lgani uchun qaralayotgan ellipsning fokuslari $F_1(-\sqrt{3},0)$ va $F_2(\sqrt{3},0)$ nuqtalarda joylashganligini ko‘ramiz. Bu natijalardan foydalanib, ellipsning ekssentrisiteti va direktrisalarini topamiz:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Ellipsga tegishli M(x,y) nuqtaning fokal radiuslari

$$r_1=a+\varepsilon x=2+\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ r_2=a+\varepsilon x=2+\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

formulalar bilan topiladi.

XULOSA

Tekislikda I tartibli tenglamalar faqat va faqat to‘g‘ri chiziqlarni ifodalashini ko‘rib o‘tgan edik. Ammo tekislikda II tartibli tenglamalarga turli chiziqlar mos keladi va ular II tartibli chiziqlar deyiladi. Ulardan biri ellips bo‘lib hisoblanadi. Ellipsning grafigini qisilgan aylana kabi tasavvur etish mumkin. Ellipsning o‘ziga xos xususiyati shundan iboratki, uning ixtiyoriy nuqtasidan fokuslar deb ataluvchi ikkita nuqtalargacha bo‘lgan masofalar yig‘indisi o‘zgarmas sondir. Ellipslar amaliyotda ko‘p uchraydi va keng qo‘llaniladi. Masalan, planetalar Quyosh atrofida ellips bo‘yicha aylanadi. Ellipsning xususiyatlari uning kanonik tenglamasi bo‘yicha o‘rganiladi. Bunda uning ekssentrisitet, direktrisa va fokal radiuslar kabi xarakteristikalaridan foydalaniladi. Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, bizga maktabdan tanish bo‘lgan aylana ellipsning xususiy bir holidir.

Tayanch iboralar

* Ikki o‘zgaruvchili II tartibli tenglamalar * Tekislikdagi II tartibli chiziqlar * Aylana * Aylana markazi * Aylana radiusi * Aylananing normal tenglamasi * Aylananing kanonik tenglamasi * Aylananing umumiy tenglamasi * Ellips * Ellipsning fokuslari * Ellipsning kanonik tenglamasi * Ellipsning uchlari * Ellips o‘qlari * Fokal radiuslar * Ellips ekssentrisiteti * Ellips direktrisalari.

Takrorlash uchun savollar

1. Ikkinchi darajali tenglamaning umumiy ko‘rinishi qanday bo‘ladi?
2. Aylana qanday ta’riflanadi?
3. Aylananing normal tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
4. Aylananing kanonik tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
5. Aylananing umumiy tenglamasini yozing va u bo‘yicha aylana markazi hamda radiusi qanday topilishini ko‘rsating.
6. Ellips qanday ta’riflanadi?
7. Ellipsning kanonik tenglamasini yozing va undagi parametrlar ma’nosini ko‘rsating.
8. Ellipsning ekssentrisiteti qanday aniqlanadi va u nimani ifodalaydi?
9. Ellipsning fokal radiuslari deb nimaga aytiladi va ular qanday topiladi?
10. Ellips direktrisalari deb nimaga aytiladi?

Testlardan namunalar

1. Markazi M(a,b) nuqtada va radiusi R bo‘lgan aylana tenglamasini ko‘rsating.
   A) $(x+a)^2+(y+b)^2=R^2$; B) $(x+b)^2+(y+a)^2=R^2$; C) $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$;
   D) $(x-b)^2+(y-a)^2=R^2$; E) $(x-a)^3+(y-b)^3=R^3$.

2. Umumiy ko‘rinishdagi II tartibli

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

   tenglama aylanani ifodalashi uchun B koeffitsient qanday shartni qanoatlantirishi kerak ?
   A) B>0; B) B<0; C) B≠0; D) B=0; E) B≥0 .

3. Aylananing umumiy tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi ?
   A) $Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0$; B) $Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$;
   C) $Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey=0$; D) $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$;
   E) $Ax^2+Ay^2+F=0$.

4. Umumiy tenglamasi $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ bo‘lgan aylananing radiusini toping.
   A) 2; B) 3; C) 4; D) 5; E) 6.

5. Umumiy tenglamasi $x^2+y^2-6x-4y-3=0$ bo‘lgan aylananing $M_0(x_0,y_0)$ markazini toping.

A) $M_0(-2,-3)$; B) $M_0(2,3)$; C) $M_0(-3,-2)$; D) $M_0(3,2)$; E) $M_0(-3,2)$.

6. II tartibli $x^2+y^2-4x+2y+F=0$ tenglama aylanani ifodalashi uchun ozod had F qanday shartni qanoatlantirishi kerak ?
   A) F=5; B) F<5; C) F>5; D) F≠5; E) |F|=5.

7. Ta`rifni to‘ldiring: Berilgan ikkita nuqtalargacha masofalar … o‘zgarmas son bo‘lgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o‘rni ellips deyiladi.
   A) ayirmasi; B) ko‘paytmasi; C) yig‘indisi;
   D) bo‘linmasi; E) kvadratlarining yig‘indisi.

8. Yarim o‘qlari a va b bo‘lgan ellipsning kanonik tenglamasi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan ?
   A) $a^2x^2+b^2y^2=1$; B) $a^2x^2-b^2y^2=1$; C) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;
   D) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; E) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

9. Yarim o‘qlari a=5 va b=4 bo‘lgan ellipsning fokuslari F(±C, 0) nuqtalarda joylashgan bo‘lsa , C qiymatini toping.
   A) 5; B) 4; C) 3; D) 2; E) 1.

10. Ellipsning ekssentrisiteti ε qanday shartni qanoatlantiradi ?
   A) ε>0; B) ε<0 ; C) ε≠0 ; D) ε=0; E) 0<ε<1.

11. Ekssentrisitetning qanday qiymatida ellips aylanaga o‘tadi ?
   A) ε>0; B) ε<0; C) ε≠0; D) ε=0; E) ε=1.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Ushbu II tartibli tenglama aylanani ifodalashini ko‘rsating:

$$x^2+y^2+2(n+1)x+2(n-1)y-2n=0.$$

Bu aylananing normal tenglamasi, M(a,b) markazi va R radiusini toping.

2. Kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{(n+2)^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ bo‘lgan ellips uchun quyidagilarni aniqlang:

a) ellips uchlarining koordinatalarini *b*) fokuslar koordinatalarini;
c) fokuslar orasidagi masofani; *d*) direktrisa tenglamalarini;
e) ekssentrisitet qiymatini ; *f*) fokal radiuslar tenglamalarini.

Bu ma’lumotlar asosida ellips va uning direktrisalarining grafigini chizing.

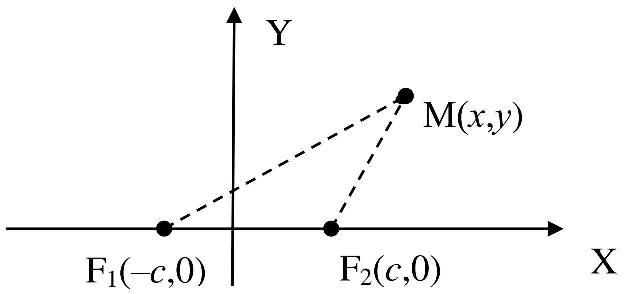
§4. GIPERBOLA VA PARABOLA. II TARTIBLI UMUMIY TENGLAMANING TAHLILI

- ***Giperbola va uning kanonik tenglamasi.***
- ***Giperbolaning xarakteristikalari.***
- ***Parabola, uning kanonik tenglamasi va xarakteristikalari.***
- ***Dekart koordinatalar sistemasini almashtirish.***
- ***II tartibli tenglamalarning umumiy holdagi tahlili.***

4.1. Giperbola va uning kanonik tenglamasi. Biz II tartibli chiziqlardan birini, ya'ni ellips va uning xususiy holi bo'lmish aylanani ko'rib chiqdik va ularning xossalarini o'rgandik. Bu yerda biz II tartibli chiziqlar bilan tanishishni davom ettirib, ulardan yana ikkitasini qaraymiz.

1-TA'RIF: Tekislikdagi ikkita F_1 va F_2 nuqtalargacha masofalarining ayirmasining absolut qiymati o'zgarmas $2a$ soniga teng bo'lgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o'rni ***giperbola*** deb ataladi. Bunda F_1 va F_2 nuqtalar ***fokuslar*** deyiladi.

Giperbola tenglamasini tuzish uchun fokuslar orasidagi masofani $|F_1F_2|=2c$ deb olamiz Dekart koordinatalar sistemasini xuddi ellips holida ko'rilgan singari olamiz (29-rasmga qarang). Unda fokuslar koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'lib, ular koordinatalari orqali $F_1(-c,0)$ va $F_2(c,0)$ ko'rinishda ifodalanadi. Giperboladagi ixtiyoriy bir $M(x,y)$ nuqtani olamiz.



29-rasm

Giperbola ta'rifga asosan $|MF_2| - |MF_1| = \pm 2a$ bo'ladi. Bu tenglikni koordinatalar orqali ifodalab va ellips tenglamasini keltirib chiqarish uchun qilingan soddalashtirishlarni takrorlab, quyidagi tenglamani hosil etamiz:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Bu natija oldin ko'rilgan ellips tenglamasiga o'xshaydi, ammo bu yerda $a^2-c^2<0$ bo'ladi. Haqiqatan ham chizmadagi F_1MF_2 uchburchakdan uchburchak tengsizligiga asosan

$$\big|\,|MF_2| - |MF_1|\,\big| < |F_1F_2| \Rightarrow 2a<2c \Rightarrow a<c \Rightarrow a^2-c^2<0.$$

Shu sababli $a^2 - c^2 = -b^2$ deb belgilash mumkin va oxirgi tenglamani $a^2(a^2-c^2)$ songa bo'lib,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b^2 = c^2 - a^2) \qquad (1)$$

tenglamani hosil qilamiz.

2-TA'RIF: (1) tenglama giperbolaning ***kanonik tenglamasi*** deyiladi.

Giperbolaning kanonik tenglamasini tahlil etish orqali uning xususiyatlarini aniqlaymiz.

❖ Giperbolaning (1) kanonik tenglamasida x va y koordinatalar juft darajada qatnashadi. Demak, $M(x,y)$ giperbolada yotgan nuqta bo‘lsa, unda ushbu $M_1(-x,y)$, $M_2(-x,-y)$ va $M_3(x,-y)$ nuqtalar ham giperbolaga tegishli bo‘ladi, ya’ni giperbola OX va OY koordinata o‘qlariga nisbatan simmetrikdir.

❖ Giperbolaning OX va OY koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalarini topamiz.

$$y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x^2=a^2 \Rightarrow x=\pm a.$$

Bu yerdan giperbola OX o‘qini ikkita $A_1(-a,0)$ va $A_2(a,0)$ nuqtalarda kesib o‘tishini ko‘ramiz. Bu nuqtalar giperbolaning ***uchlari*** , ular orasidagi $|A_1A_2|=2a$ masofa giperbolaning ***haqiqiy o‘qi*** deyiladi.

Agar $x=0$ desak, u holda (1) tenglamadan $y^2=-b^2 \Rightarrow y\in\varnothing$ natijaga kelamiz. Bundan giperbola OY o‘qi bilan kesishmasligi kelib chiqadi. Shu sababli (1) kanonik tenglama orqali aniqlanadigan $B_1(0,-b)$ va $B_2(0,b)$ nuqtalar giperbolaning ***mavhum uchlari***, ular orasidagi $|B_1B_2|=2b$ masofa esa giperbolaning ***mavhum o‘qi*** deb ataladi. Mos ravishda a va b sonlariga giperbolaning ***yarim haqiqiy*** va ***yarim mavhum o‘qlari*** deyiladi. Giperbolaning o‘qlari kesishadigan nuqta uning ***markazi*** deb yuritiladi.

❖ Giperbolaning (1) kanonik tenglamasidan yana quyidagi natijalarni olamiz:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y^2}{b^2}\geq 1 \Rightarrow |x|\geq a \Rightarrow x\in(-\infty,-a]\cup[a,\infty);$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1\geq 0 \Rightarrow |y|\geq 0 \Rightarrow y\in(-\infty,\infty).$$

Bu yerdan giperbola $x=-a$ va $x=a$ tenglamali vertikal to‘g‘ri chiziqlardan mos ravishda chap va o‘ng tomonda joylashgan ikkita bo‘lakdan iborat chegaralanmagan chiziq ekanligini ko‘ramiz. Bu bo‘laklar giperbolaning ***tarmoqlari*** deb ataladi.

❖ Giperbola tenglamasini quyidagi ko‘rinishda qaraymiz:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1 \Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}.$$

Bu tenglamadan ikkita xulosa kelib chiqadi. Birinchidan, $|x|$ o‘zining eng kichik qiymati a dan boshlab cheksiz oshib borsa, unda $|y|$ qiymatlari 0 dan boshlab cheksiz oshib boradi. Ikkinchidan, $|x|$ oshib borgan sari

$$\frac{a^2}{x^2}\approx 0 \Rightarrow \sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\approx 1 \Rightarrow y\approx\pm\frac{b}{a}x.$$

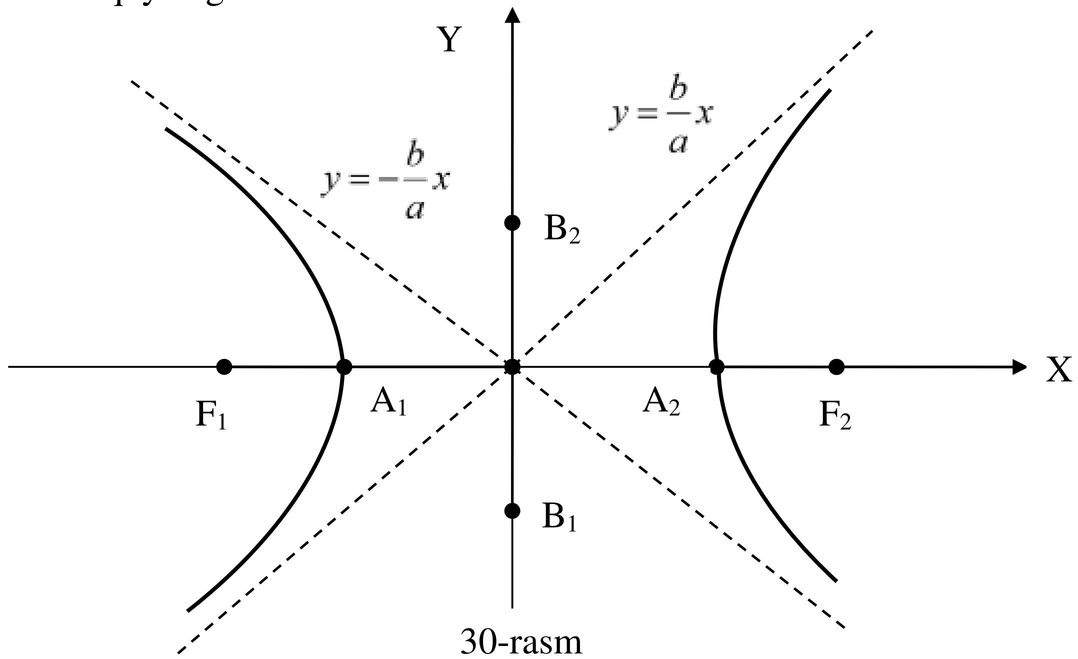
Demak, $|x|$ oshib borgan sari giperbolaning shoxlari tobora

$$y=\pm\frac{b}{a}x \qquad (2)$$

tenglamaga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlarga yaqinlashib boradi. Bu to‘g‘ri chiziqlar giperbolaning ***asimptotalari*** deb ataladi.

Izoh: Asimptota tushunchasining aniq ta’rifi keyinchalik VIII bobning, §5, IV qismida beriladi.

Bu ma’lumotlar asosida giperbola shaklini dastlab koordinatalar tekisligining I choragida ($x\geq0$, $y\geq0$), so‘ngra esa uning simmetrikligidan foydalanib, qolgan choraklarda aniqlaymiz. Natijada giperbolani va uning ikkita asimptotasini ifodalovchi quyidagi 30-rasmni hosil etamiz:



30-rasm

4.2. Giperbolaning xarakteristikalari. Endi giperbolaning xususiyatlarini ifodalovchi ayrim xarakteristikalar bilan tanishamiz.

3-TA’RIF: Giperbolani fokuslari orasidagi $2c$ masofani uning haqiqiy o‘qi uzunligi $2a$ ga nisbati giperbolaning ***ekssentrisiteti*** deyiladi.

Giperbolaning ekssentrisiteti ε kabi belgilanadi va uning ta’rifi hamda (1) kanonik tenglamaga asosan quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}\,. \qquad (3)$$

Bu formuladan ko‘rinadiki, giperbolaning ekssentrisiteti $\varepsilon>1$ bo‘ladi va uning tarmoqlarini shaklini aniqlashtiradi. Agar ε qiymati birga qanchalik yaqin bo‘lsa, giperbolaning tarmoqlari OX o‘qiga qarab shunchalik siqiq, ε qiymati oshib borgan sari esa shunchalik yoyiq bo‘ladi.

4-TA’RIF: Giperbolaning $M(x,y)$ nuqtasidan uning F_1 va F_2 fokuslarigacha bo‘lgan masofalar shu nuqtaning ***fokal radiuslari*** deyiladi.

Bu fokal radiuslar $r_1=|MF_1|$ va $r_2=|MF_2|$ kabi belgilanadi. Ellipsning fokal radiuslarini topish uchun bajarilgan ishlarni takrorlab, giperbolaning fokal radiuslari uchun ushbu formulalarni hosil etamiz:

$$r_1=\pm(a+\varepsilon x), \qquad r_2=\pm(a-\varepsilon x) \qquad (4)$$

Bunda giperbolaning O koordinata boshidan o‘ng tomonda joylashgan tarmog‘i uchun “+”, chap tomondagi tarmog‘i uchun esa “–” ishorasi olinadi.

5-TA'RIF: Tenglamalari $x=\pm a/\varepsilon$ bo'lgan ikkita l_1 va l_2 vertikal to'g'ri chiziqlar ***g***iperbolaning ***direktrisalari*** deb ataladi.

Giperbolada ektsentrisitet $\varepsilon>1$ bo'lgani uchun $a/\varepsilon<a$. Demak, giperbolaning direktrisalari uning O markaz bilan A_1 va A_2 uchlari orasida joylashgan bo'ladi.

TEOREMA: Giperboladagi ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtaning r_1 va r_2 fokal radiuslarining shu nuqtadan mos l_1 va l_2 direktrisalarigacha bo'lgan d_1 va d_2 masofalarga nisbati o'zgarmas bo'lib, bu nisbat ektsentrisitetga teng bo'ladi, ya'ni

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{d_1}{d_2}=\varepsilon \ .$$

Teoremani isboti ellips uchun ko'rilgan usulda amalga oshiriladi va o'quvchiga havola qilinadi.

Endi (1) kanonik tenglamada $a=b$ bo'lgan holni alohida ko'rib chiqamiz.Bu holda giperbola ***teng yonli*** deyiladi. Teng yonli giperbolaning asimptotalari qi$\pm x$ tenglama bilan aniqlanib, koordinata burchaklarining bissektrisalaridan iborat va o'zaro perpendikular bo'ladi. Bu asimptotalarni OX^* va OY^* koordinata o'qlari sifatida olsak, unda bu yangi koordinatalar sistemasida giperbolaning tenglamasi bizga maktabdan tanish bo'lgan $x^*\cdot y^*=k \Rightarrow y^*=k/x^*$ $(k\neq 0)$ ko'rinishga keladi. Bunda $k>0$ bo'lsa giperbola tarmoqlari koordinata tekisligining I va III choraklarida, $k<0$ holda esa II va IV choraklarda joylashgan bo'ladi.

Iqtisodiy masalalarni qarashda ***kasr – chiziqli*** deb ataladigan va

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \quad (c\neq 0, bc-ad\neq 0) \qquad (5)$$

ko'rinishda bo'lgan tenglama ko'p uchraydi. Masalan, iqtisodchi olim Tornkvist odamlarning daromadlari x va turli tovarlarga bo'lgan talablari y orasidagi bog'lanishning matematik modelini kasr – chiziqli tenglama ko'rinishda qarash kerakligini asoslab bergan (VI bob, §3 ga qarang). Bu model x daromad oshib borishi bilan y talab ham dastlab oshib borishi, ammo borgan sari bu o'sish sekinlashib, ma'lum bir chegaradan ortiq bo'la olmasligini akslantiradi.

Agar ko'rsatilgan kasr – chiziqli tenglamada yangi

$$x^*=x+\frac{d}{c},\ y^*=y-\frac{a}{c}$$

koordinatalarga o'tsak va $k=(bc-ad)/c^2$ belgilash kiritsak, unda (5) $y^*=k/x^*$ ko'rinishga kelishini tekshirib ko'rish mumkin. Demak, (5) kasr – chiziqli tenglama teng yonli giperbolani ifodalaydi. Bu teng yonli giperbolaning asimptotalari $x=-d/c$ vertikal va $y=a/c$ gorizontal to'g'ri chiziqlardan iborat, markazi esa $M(-d/c, a/c)$ nuqtada joylashgan bo'ladi.

Misol: Quyidagi kanonik tenglamasi bilan berilgan giperbolaning barcha xarakteristikalarini toping:

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Bu giperbolaning abssissasi $x=8$, ordinatasi $y>0$ bo'lgan M nuqtasining fokal radiuslarini aniqlang.

Yechish: Berilgan tenglamani (1) kanonik tenglama bilan taqqoslab, giperbolaning haqiqiy va mavhum yarim o‘qlari a=4, b=3 ekanligini ko‘ramiz. Bu holda $c^2=a^2+b^2$ =16+9=25 => c=5 bo‘lgani uchun giperbolaning fokuslari $F_1(–5,0)$ va $F_2(5,0)$ nuqtalarda joylashganligini aniqlaymiz. Berilgan giperbolaning asimptotalari

$$y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{3}{4}x = \pm 0{,}75x,$$

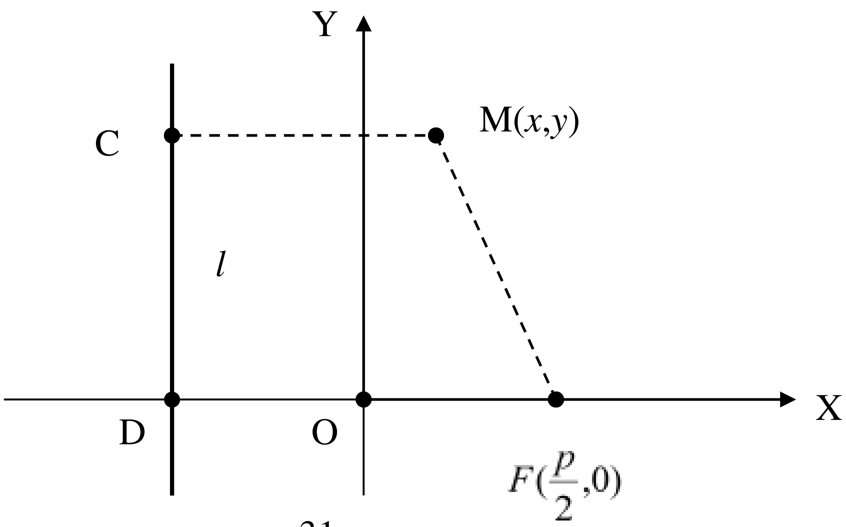
ekssentrisiteti $\varepsilon = c/a$=5/4=1,25, direktrisalarining tenglamasi esa $x=\pm a/\varepsilon$ =±4/1,25=±3,2 bo‘ladi. Endi giperbolaning berilgan M(8,y) nuqtasining fokal radiuslarini topamiz. Bu nuqta giperbolaning o‘ng shoxida joylashgan va shu sababli (4) formulani “+” ishora bilan qaraymiz:

$$r_1=a+\varepsilon x=4+1{,}25\cdot 8=14, \qquad r_2= -a+\varepsilon x=-4+1{,}25\cdot 8=6.$$

4.3. Parabola, uning kanonik tenglamasi va xarakteristikalari. Bizga parabola maktabdan ma’lum bo‘lib, u $y=ax^2+bx+c$ kvadratik funksiyaning grafigi singari qaralgan edi. Endi bu tushunchaga ma’lum bir xossaga ega II tartibli chiziq singari yondashamiz.

6-TA’RIF: Berilgan F nuqta va l to‘g‘ri chiziqqacha masofalari o‘zaro teng bo‘lgan tekislikdagi nuqtalarining geometrik o‘rni ***parabola*** deb aytiladi. Bunda F nuqta ***fokus***, l to‘g‘ri chiziq esa ***direktrisa*** deyiladi.

Parabola tenglamasini topish uchun OX koordinata o‘qini F fokusdan o‘tuvchi va l direktrisaga perpendikular qilib, OY o‘qini esa F va l o‘rtasidan o‘tkazamiz. Fokusdan direktrisagacha bo‘lgan masofani |FD|=p>0 deb belgilaymiz. Unda fokusning koordinatalari F(p/2,0), direktrisa tenglamasi esa $x=-p/2$ bo‘ladi. Parabolaga tegishli ixtiyoriy M(x,y) nuqtani olamiz va uning l direktrisadagi proyeksiyasini C deb belgilaymiz (31-rasmga qarang).



31-rasm

Parabola ta’rifiga ko‘ra |MC|=|MF|. Bu tenglikni koordinatalar orqali ifodalab va uni soddalashtirib, ushbu natijani olamiz:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right| \Rightarrow \left(\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}\right)^2=\left|x+\frac{p}{2}\right|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-xp+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+xp+\frac{p^2}{4} \Rightarrow y^2=2px$$

Demak, ko'rilayotgan parabola

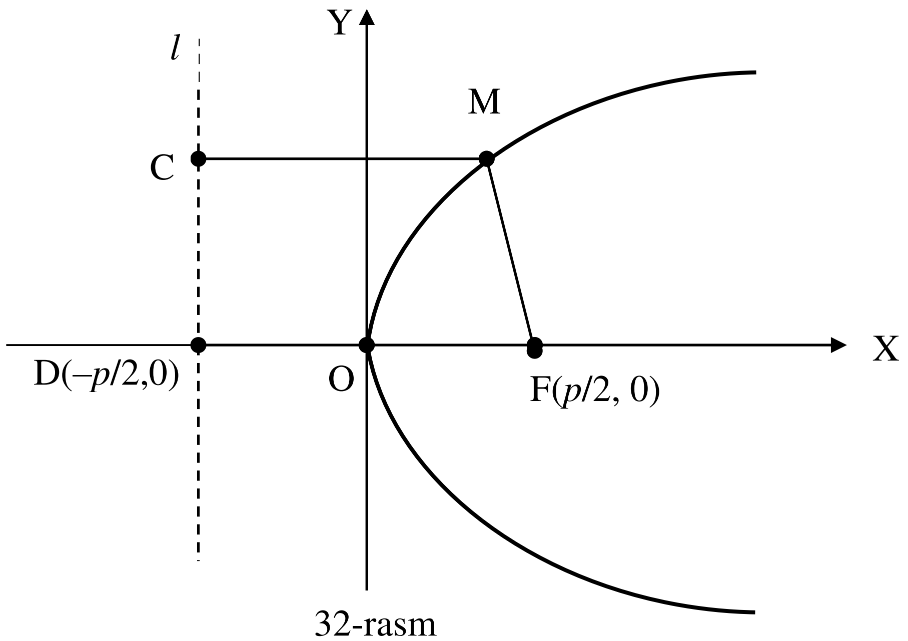
$$y^2=2px \qquad (6)$$

tenglama bilan ifodalanadi.

7-TA'RIF: (6) tenglama parabolaning ***kanonik tenglamasi***, p ($p>0$) esa uning ***parametri*** deyiladi.

Parabolaning kanonik tenglamasini tahlil etamiz.

- $y^2 \geq 0$, $p>0$ => $x \geq 0$. Demak, parabola O koordinata boshidan o'ng tomonda joylashgan.
- Bunda O(0,0) koordinata boshi (6) tenglamani qanoatlantiradi va shu sababli parabolada yotadi. O nuqta parabolaning ***uchi*** deb ataladi.
- (6) tenglamada y kvadrati bilan qatnashgani uchun M(x,y) parabolaga tegishli nuqta bo'lsa, unda N(x,–y) nuqta (6) tenglamani qanoatlantiradi, ya'ni parabolaga tegishli bo'ladi. Bundan bizning parabola OX o'qiga nisbatan simmetrik ekanligi kelib chiqadi.
- Agar (6) kanonik tenglamada x o'zining 0 qiymatidan boshlab o'sib borsa, unda $|y|$ ham 0 qiymatdan boshlab o'sib boradi. Demak, parabola chegaralanmagan chiziq ekan.
- Bu ma'lumotlar asosida dastlab parabola shaklini I chorakda ($x \geq 0$, $y \geq 0$) aniqlab, so'ngra OX o'qiga simmetrik tarzda davom ettiramiz. Natijada parabola quyidagi ko'rinishda ekanligini aniqlaymiz (32-rasmga qarang):



32-rasm

Parabolaning ixtiyoriy M nuqtasidan l direktirisagacha bo'lgan masofani $|MC|=d$, F fokusigacha bo'lgan masofani $|MF|=r$ (fokal radius) deb belgilaymiz. Unda parabola ta'rifga asosan $r=d=x+p/2$ bo'ladi. Ellips va giperbolani qaraganimizda ularning ekssentrisiteti uchun $\varepsilon=r/d$ tenglik o‘rinli bo‘lishini ko‘rgan edik. Bu tenglikni ε ekssentrisitetning ta’rifi sifatida olsak, unda parabola uchun $\varepsilon=r/d=1$ bo‘ladi.

Demak, ε ekssentrisitet qiymatiga qarab II tartibli chiziqning ko‘rinishini aniqlash mumkin ekan. Agar $\varepsilon=0$ bo‘lsa – aylana, $0<\varepsilon<1$ bo‘lsa – ellips, $\varepsilon=1$ bo‘lsa – parabola va $\varepsilon>1$ bo‘lsa – giperbolaga ega bo‘lamiz.

Misol: OX o‘qi parabolaning simmetriya o‘qi bo‘lib, uning uchi koordinatalar boshida yotadi. Parabola uchidan fokusigacha bo‘lgan masofa 4 birlikka teng. Parabola va uning direktrisasi tenglamasini toping.

Yechish: Dastlab, masala shartiga asosan, parabolaning p parametrini topamiz:

$$|OF|=4 \Rightarrow p/2=4 \Rightarrow p=8.$$

Unda, (5) formulaga asosan, parabola tenglamasini topamiz:

$$y^2=2px \Rightarrow y^2=2\cdot 8x=16x.$$

Bu yerdan direktrisa tenglamasi $x=-p/2 \Rightarrow x=-4$ ekanligini ko‘ramiz.

Shuni ta’kidlab otish kerakki, $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ kvadrat uchhadning grafigi uchi koordinatalari

$$x_0=-\frac{b}{2a}, \quad y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

bo‘lgan $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada, simmetriya o‘qi esa OY o‘qiga parallel va $x=-b/2a$ tenglamaga ega bo‘lgan vertikal to‘g‘ri chiziqdan tashkil topgan paraboladan iboratdir. Agar $a>0$ bo‘lsa, parabola yuqoriga, $a<0$ bo‘lsa, pastga yo‘nalgan bo‘ladi.

Parabolaning iqtisodiy tatbig‘iga doir bir misol keltiramiz. Ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi x, uning bir birligining narxi P va ishlab chiqarish xarajatlari Z bo‘lsa, bu ko‘rsatkichlar $P=ax+b$ $(a<0)$ va $Z=cx+d$ $(c>0)$ ko‘rinishda chiziqli bog‘langan deb olish mumkin. Unda bu mahsulotni sotishdan olingan tushum T va foyda F bilan mahsulot hajmi x orasidagi bog‘lanish

$$T=Px=ax^2+bx, \quad F=T-Z=ax^2+bx-(cx+d)=ax^2+(b-c)x-d$$

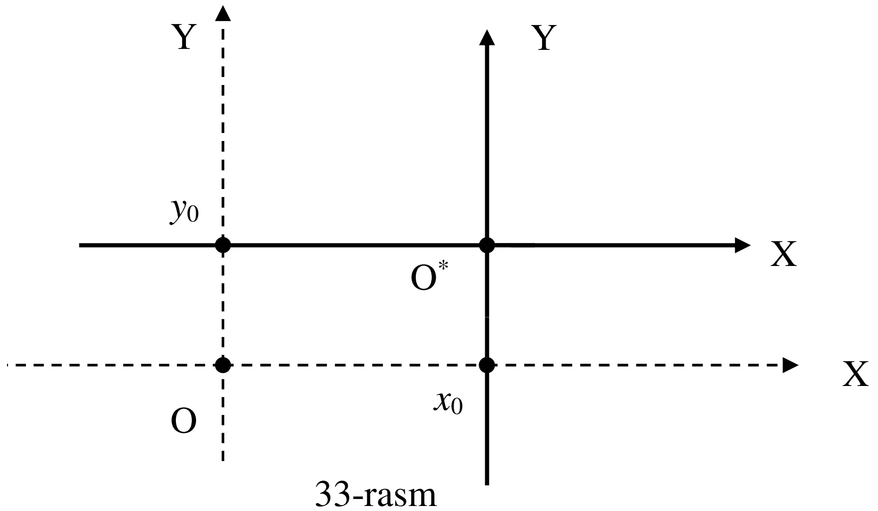
ko‘rinishdagi kvadrat uchhadlar, ya’ni parabolalar orqali ifodalanadi.

4.4. Dekart koordinatalar sistemasini almashtirish. Ko‘p hollarda berilgan masala yechimini soddalashtirish, chiziq tenglamasini ixcham va qulay ko‘rinishda yozish uchun berilgan XOY Dekart koordinatalar sistemasidan boshqa bir $X^*O^*Y^*$ Dekart koordinatalar sistemasiga o‘tishga to‘g‘ri keladi. Bunda uch hol bo‘lishi mumkin.

I hol. Koordinatalar sistemasini parallel ko‘chirish. Berilgan XOY koordinatalar sistemasining boshi O(0,0) biror $O^*(x_0, y_0)$ nuqtaga parallel ko‘chiriladi. Bunda OX va OY o‘qlarning yo‘nalishi va holati o‘zgarmay qoladi va shu sababli bu yangi hosil bo‘lgan sistemani XO^*Y kabi belgilaymiz (quyidagi 33-rasmga qarang).

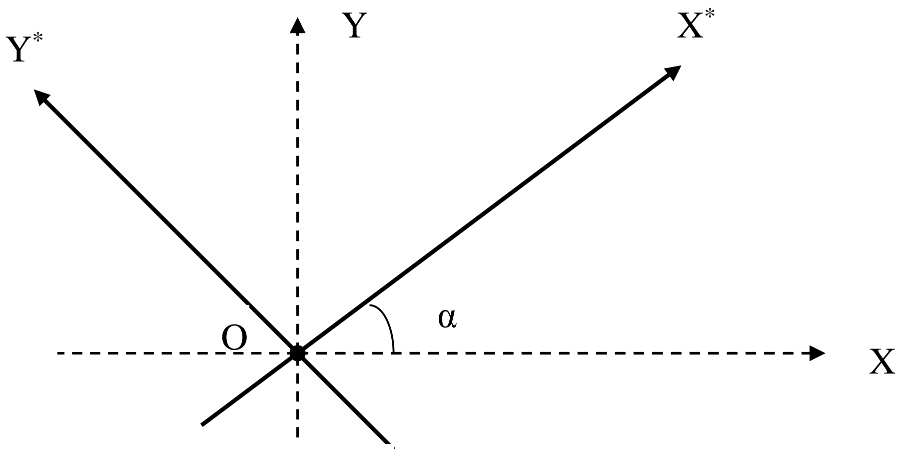
Bunda eski XOY sistemadagi x va y koordinatalar bilan yangi XO^*Y sistemadagi x^* va y^* koordinatalar orasidagi bog‘lanish quyidagi formulalar bilan ifodalanadi:

$$\begin{cases} x=x^*+x_0 \\ y=y^*+y_0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x^*=x-x_0 \\ y^*=y-y_0 \end{cases}. \qquad (7)$$



33-rasm

II hol. Koordinatalar sistemasini burish. XOY koordinatalar sistemasining boshi O(0,0) o‘zgartirilmasdan, OX va OY o‘qlar bir xil α burchakka buriladi. Bunda hosil bo‘ladigan yangi sistemani X^*OY^* deb belgilaymiz (34-rasmga qarang).



34-rasm

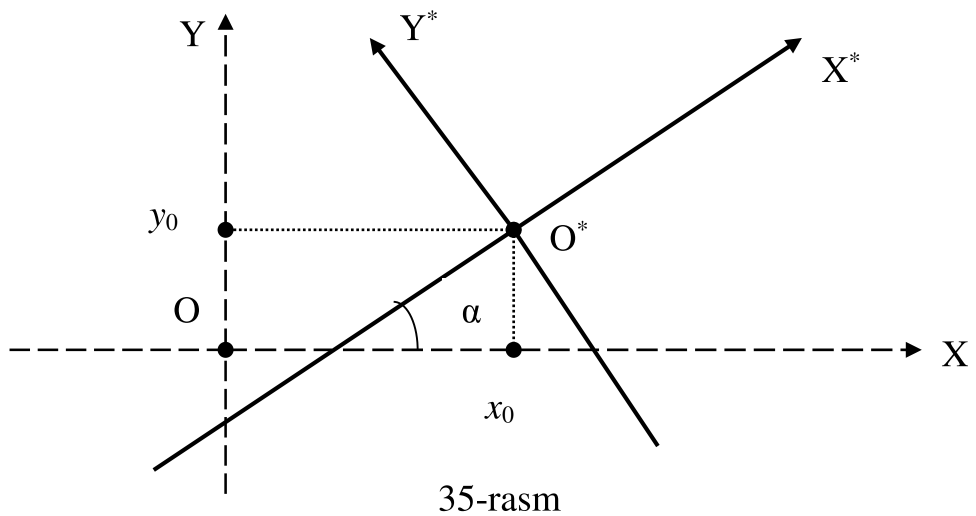
Bunda eski XOY sistemadagi x va y koordinatalar bilan yangi X^*OY^* sistemadagi x^* va y^* koordinatalar orasidagi bog‘lanish quyidagi formulalar bilan ifodalanadi:

$$\begin{cases} x = x^*\cos\alpha - y^*\sin\alpha \\ y = x^*\sin\alpha + y^*\cos\alpha \end{cases}, \qquad \begin{cases} x^* = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y^* = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}. \tag{8}$$

III hol. Koordinatalar sistemasini parallel ko‘chirish va burish. Dastlab berilgan XOY koordinatalar sistemasining boshi O(0,0) biror $O^*(x_0,\ y_0)$ nuqtaga parallel ko‘chiriladi. So‘ngra hosil bo‘lgan XO^*Y sistemaning o‘qlarini bir xil α burchakka buramiz. Natijada yangi hosil bo‘lgan sistemada ham koordinata boshi, ham o‘qlar o‘zgaradi (quyidagi 35-rasmga qarang) va shu sababli uni $X^*O^*Y^*$ kabi belgilaymiz.

Bunda eski XOY sistemadagi x va y koordinatalar bilan yangi $X^*O^*Y^*$ sistemadagi x^* va y^* koordinatalar orasidagi bog‘lanish quyidagi formulalar bilan ifodalanadi:

$$\begin{cases} x = x^*\cos\alpha - y^*\sin\alpha + x_0 \\ y = x^*\sin\alpha + y^*\cos\alpha + y_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^* = (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha \\ y^* = -(x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha \end{cases}. \tag{9}$$



35-rasm

4.5. II tartibli tenglamalarning umumiy holdagi tahlili. Biz tekislikdagi II tartibli tenglama umumiy holda XOY Dekart koordinatalar sistemasida

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \quad A^2+B^2+C^2\neq 0, \qquad (10)$$

ko‘rinishda bo‘lishini ko‘rgan edik. Ko‘rsatish mumkinki, koordinatalar boshini O(0,0) nuqtadan boshqa biror nuqtaga parallel ko‘chirish yoki OX, OY o‘qlarini biror α burchakka burish yoki parallel ko‘chirish va burish orqali yangi (qulaylik uchun uni ham XOY deb belgilaymiz) koordinatalar sistemasiga o‘tsak, (10) quyidagi tenglamalardan biriga keladi.

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Bu holda (10) tenglama ellipsni ifodalaydi;
2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$. Bu holda (10) tenglamani birorta ham nuqta qanoatlantirmaydi, ya’ni u bo‘sh to‘plamni (mavhum ellipsni) ifodalaydi;
3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$. Bu holda (10) tenglamani faqat O(0,0) nuqta qanoatlantiradi va u ikkita mavhum kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlarni ifodalaydi;
4. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$. Bu holda (10) tenglama kesishuvchi bir juft $y=\pm(b/a)x$ to‘g‘ri chiziqlarni ifodalaydi;
5. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Bu holda (10) tenglama giperbolani ifodalaydi;
6. $\frac{x^2}{a^2}=1\Rightarrow x^2=a^2\Rightarrow x=\pm a$. Bu holda (10) tenglama bir juft vertikal to‘g‘ri chiziqlarni ifodalaydi;

7. $\frac{x^2}{a^2}=-1 \Rightarrow x^2=-a^2$. Bu holda (10) tenglamani birorta ham nuqta qanoatlantirmaydi, ya’ni u bo‘sh to‘plamni (bir juft mavhum vertikal to‘g‘ri chiziqlarni) ifodalaydi;
8. $x^2=0 \Rightarrow x=0$. Bu holda (10) tenglama bir juft ustma-ust tushgan vertikal to‘g‘ri chiziqlarni ifodalaydi;
9. $\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y^2=b^2 \Rightarrow y=\pm b$. Bu holda (10) tenglama bir juft gorizontal to‘g‘ri chiziqlarni ifodalaydi;
10. $\frac{y^2}{b^2}=-1 \Rightarrow y^2=-b^2$. Bu holda (10) tenglamani birorta ham nuqta qanoatlantirmaydi, ya’ni u bo‘sh to‘plamni (bir juft mavhum gorizontal to‘g‘ri chiziqlarni) ifodalaydi;
11. $y^2=0 \Rightarrow y=0$. Bu holda (10) tenglama bir juft ustma-ust tushgan gorizontal to‘g‘ri chiziqlarni ifodalaydi;
12. $y^2=2px$. Bu holda (10) tenglama parabolani ifodalaydi.

Umumiy (10) tenglamadagi bosh A,B va C koeffitsiyentlardan tuzilgan va ***xarakteristik determinant*** deb ataladigan ushbu II tartibli determinantni qaraymiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2$$

Agar (10) tenglamada Δ>0 bo‘lsa, u ***elliptik turdagi tenglama*** deyiladi va yuqorida ko‘rib o‘tilgan 1–3 kanonik tenglamalardan biriga keltiriladi.

Agar (10) tenglamada Δ <0 bo‘lsa, u ***giperbolik turdagi tenglama*** deyiladi va yuqorida ko‘rib o‘tilgan 4–5 kanonik tenglamalardan biriga keltiriladi.

Agar (10) tenglamada Δ =0 bo‘lsa, u ***parabolik turdagi tenglama*** deyiladi va yuqorida ko‘rib o‘tilgan 6–12 kanonik tenglamalardan biriga keltiriladi.

Xulosa qilib shuni aytish mumkinki, tekislikdagi II tartibli (10) umumiy tenglama bilan aniqlanadigan II tartibli egri chiziqlar faqat ellips (xususiy holda aylana), giperbola va paraboladan iborat ekan. Bu chiziqlar qadimgi yunon matematiklariga ma’lum bo‘lib, ***konik kesimlar*** deb atalgan. Bunga sabab shuki, aylanma konusni turli tekisliklar bilan kesganda, kesimda aynan mana shu chiziqlar hosil bo‘ladi.

Misol: Ushbu II tartibli tenglamalar bilan berilgan chiziqlar ko‘rinishini aniqlang:

1) $36x^2+36y^2-36x-24y-23=0$; 2) $16x^2+25y^2-32x+50y-359=0$.

Yechish: 1) Tenglamani quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$$36x^2+36y^2-36x-24y-23=0 \Rightarrow 36(x^2-x)+36(y^2-\frac{2}{3}y)-23=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36(x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})-9+36(y^2-2\cdot\frac{1}{3}y+\frac{1}{9})-4-23=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+36\left(y-\frac{1}{3}\right)^2-36=0\Rightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[x^*=x-\frac{1}{2},\quad y^*=y-\frac{1}{3}\right]\Rightarrow(x^*)^2+(y^*)^2=1^2.$$

Demak, bu tenglama markazi M(1/2, 1/3) nuqtada joylashgan va radiusi R=1 bo‘lgan aylanani ifodalaydi.

2) Bu tenglamani ham ko‘rinishini o‘zgartiramiz:

$$16x^2+25y^2-32x+50y-359=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16(x^2-2x+1)-16+25(y^2+2y+1)-25-359=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16(x-1)^2+25(y+1)^2=400\Rightarrow\left\lfloor x^*=x-1,\quad y^*=y+1\right\rfloor\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16(x^*)^2+25(y^*)^2=400\Rightarrow\frac{16(x^*)^2}{400}+\frac{25(y^*)^2}{400}=1\Rightarrow\frac{(x^*)^2}{25}+\frac{(y^*)^2}{16}=1.$$

Demak, bu tenglama markazi M(1,–1) nuqtada joylashgan va yarim o‘qlari a=5, b=4 bo‘lgan ellipsni ifodalaydi.

XULOSA

Giperbola II tartibli chiziqlardan biri bo‘lib, fokuslar deb ataluvchi ikkita nuqtalargacha masofalar ayirmasining moduli o‘zgarmas bo‘lgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o‘rni kabi aniqlanadi. Giperbola grafigi, ellips grafigidan farqli ravishda, chegaralanmagan chiziq bo‘lib, ikkita tarmoqdan iboratdir. II tartibli chiziqlar ichida faqat giperbola uchun asimptota mavjud. Giperbolaning iqtisodiy tatbig‘iga misol sifatida aholining daromadi va turli tovarlarga talabi orasidagi bog‘lanishni o‘rganish masalasini ko‘rsatish mumkin.

Parabola ham II tartibli chiziqdir. U direktrisa deb ataluvchi to‘g‘ri chiziq va fokus deb ataluvchi nuqtadan teng uzoqlikda joylashgan nuqtalardan tashkil topadi. Parabola grafigi ham chegaralanmagan egri chiziqdan iborat. Yerdan boshqa planetalarga uchirilgan kosmik raketalar trayektoriyasining bir qismi giperbola va parabola ko‘rinishida bo‘ladi. Parabolalar projektor, antennalar kabi texnik qurilmalarda o‘z tatbig‘ini topadi.

Tayanch iboralar

Giperbola * Fokus * Giperbolaning kanonik tenglamasi* Giperbolaning uchlari * Giperbolaning o‘qlari * Giperbolaning markazi * Asimptotalar * Ekssentrisitet * Direktrisa * Fokal radius * Teng yonli giperbola * Kasr – chiziqli tenglama * Tornkvist modeli * Parabola * Parabolaning kanonik tenglamasi *Parallel ko‘chirish * Burish * Koordinatalar sistemasini almashtirish * Elliptik tenglama * Parabolik tenglama * Giperbolik tenglama * Konik kesimlar.

Takrorlash uchun savollar

1. Giperbola qanday ta’riflanadi?
2. Giperbolaning kanonik tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
3. Giperbola kanonik tenglamasidagi parametrlar nimani ifodalaydi?

4. Giperbola ekssentrisiteti deb nimaga aytiladi?
5. Giperbola ekssentrisiteti qanday qiymatlar qabul qila oladi?
6. Giperbolaning fokal radiuslari deb nimaga aytiladi?
7. Giperbolaning fokal radiuslari kanonik tenglamadan qanday topiladi?
8. Giperbola direktrisalari qanday xossaga ega?
9. Giperbolaning asimptotasi kanonik tenglamadan qanday topiladi?
10. Qachon giperbola teng yonli deyiladi?
11. Kasr – chiziqli tenglama nima va u qanday chiziqni ifodalaydi?
12. Tornkvist modeli nima va u qanday tenglama bilan ifodalanadi?
13. Parabola qanday ta’riflanadi?
14. Parabolaning kanonik tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
15. Parabolaning ekssentrisiteti nimaga teng?
16. Parabola kanonik tenglamasidan fokus va direktrisa qanday topiladi?
17. Paraboladagi nuqtaning fokal radiusi qanday hisoblanadi?
18. Koordinatalar sistemasini parallel ko‘chirish mazmuni nimadan iborat?
19. Koordinatalar sistemasini burish deb nimaga aytiladi?
20. Koordinatalar sistemasini almashtirish nimani anglatadi?
21. Ikkinchi tartibli tenglama qachon elliptik turda deyiladi?
22. Ikkinchi tartibli tenglama qachon giperbolik turda deyiladi?
23. Ikkinchi tartibli tenglama qachon parabolik turda deyiladi?

Testlardan namunalar

1. Ta’rifni to‘ldiring: Berilgan ikkita nuqtalargacha masofalari … o‘zgarmas son bo‘lgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o‘rni giperbola deyiladi.

A) ayirmasining moduli; B) ko‘paytmasi; C) yig‘indisi;
D) bo‘linmasi; E) kvadratlarining yig‘indisi.

2. Yarim o‘qlari a va b bo‘lgan giperbolaning kanonik tenglamasi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan ?

A) $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$; B) $a^2x^2 - b^2y^2 = 1$; C) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;
D) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; E) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

3. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ giperbolaning asimptotalari tenglamasini ko‘rsating.

A) $y=\pm abx$; B) $y=\pm\frac{a}{b}x$; C) $y=\pm\frac{b}{a}x$;
D) $y = (a \pm b)\,x$; E) To‘g‘ri javob keltirilmagan.

4. Agar $x^2-4y^2=4$ giperbolaga tegishli nuqtaning ordinatasi 0 ga teng bo‘lsa, uning abssissasini toping.

A) $y=1$; B) $x=1$; C) $x=2$; D) $x=\pm 2$; E) $x=\pm 1$.

5. Quyidagi II tartibli tenglama qanday chiziqni ifodalaydi ?

$$16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$$

A) aylana; B) ellips; C) giperbola; D) parabola; E) to‘g‘ri chiziq.

6. Quyidagi II tartibli tenglama qanday chiziqni ifodalaydi ?

$$16x^2-9y^2-64x-18y-89=0$$

A) aylana; B) ellips; C) giperbola; D) parabola; E) to‘g‘ri chiziq.

7. Parabolaning ekssentrisiteti ε qanday shartni qanoatlantiradi ?

A) $\varepsilon>1$; B) $\varepsilon<1$; C) $\varepsilon\neq 1$; D) $\varepsilon=1$; E) $0<\varepsilon<1$.

8. Agar parabola $y^2=8x$ tenglama bilan berilgan bo‘lsa, uning direktrisasi tenglamasini toping.

A) $x=-8$; B) $x=8$; C) $x=4$; D) $x=2$; E) $x=-2$.

9. II tartibli $16x^2-9y^2-64x-18y-89=0$ tenglama qanday chiziqni ifodalaydi ?

A) aylana; B) ellips; C) giperbola; D) parabola; E) to‘g‘ri chiziq.

10. II tartibli $2y^2-x-12y+14=0$ tenglama qanday chiziqni ifodalaydi ?

A) aylana; B) ellips; C) giperbola; D) parabola; E) to‘g‘ri chiziq.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{(n+3)^2}-\frac{y^2}{(n+1)^2}=1$ bo‘lgan giperbola uchun quyidagilarni aniqlang:

a) giperbola uchlarining koordinatalarini *b*) fokuslar koordinatalarini;

c) fokuslar orasidagi masofani; *d*) direktrisa tenglamalarini;

e) ekssentrisitet qiymatini ; *f*) fokal radiuslar tenglamalarini;

g) asimptota tenglamalarini .

Bu ma’lumotlar asosida giperbola, uning asimptota va direktrisalarining grafigini chizing.

2. Kanonik tenglamasi $y^2=2(n+3)x$ bo‘lgan parabola fokusining koordinatalari, direktrisa va fokal radius tenglamasi aniqlansin. Bu ma’lumotlar asosida parabolaning grafigini chizing.

V BOB. FAZODA ANALITIK GEOMETRIYA

Dekart qadimgi matematiklar uchun butunlay notanish bo‘lgan algebra va uning hisoblash usullarini geometriyaga kiritish orqali uni tubdan o‘zgartirdi.

Krilov A.N.

§1. TEKISLIK VA UNING TENGLAMALARI

- ***Fazoda analitik geometriya predmeti va asosiy masalalari.***
- ***Tekislik va uning umumiy tenglamasi.***
- ***Tekislikning kesmalardagi tenglamasi.***
- ***Tekislikning normal tenglamasi.***

1.1. Fazoda analitik geometriya predmeti va asosiy masalalari. Fazoda Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan bo‘lsin. Bu holda undagi har bir M nuqta uning ***koordinatalari*** deb ataladigan (x, y, z) sonlar uchligi bilan to‘liq aniqlanishi va $M(x, y, z)$ kabi yozilishi oldin (III bob, §2) aytib o‘tilgan edi. Fazodagi sirt va chiziqlarni $M(x, y, z)$ nuqtalar to‘plami kabi qarash mumkin. Fazoda biror S sirt va

$$F(x, y, z)=0 \qquad (*)$$

tenglama berilgan bo‘lsin.

<u>1-TA‘RIF:</u> Agar (*) tenglamani faqat S sirtga tegishli $M(x, y, z)$ nuqtalarning koordinatalari qanoatlantirsa, u bu sirtning ***tenglamasi*** deb ataladi.

Agarda $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqta uchun $F(x_0,y_0,z_0)=0$ shart bajarilsa (tenglama qanoatlantirilsa), M_0 nuqta shu tenglama bilan aniqlanadigan S sirtga tegishli, aks holda esa tegishli bo‘lmaydi. Shunday qilib sirt o‘zining tenglamasi bilan to‘liq aniqlanadi. Ammo har qanday tenglama ham biror sirtni ifodalashi shart emas. Masalan, $x^2+ y^4+z^6=0$ tenglamani faqat bitta O(0,0,0) nuqta koordinatalari qanoatlantiradi va shu sababli bu tenglama sirtni ifodalamaydi. Shuningdek, $x^2+y^2+z^2+1=0$ tenglamani fazodagi birorta ham nuqtaning koordinatalari qanoatlantirmaydi va u bo‘sh to‘plamni ifodalaydi.

Fazodagi chiziqlarni tenglamalari $F_1(x, y, z)=0$ va $F_2(x, y, z)=0$ bo‘lgan S_1 va S_2 sirtlarning kesishish chizig‘i singari qarash mumkin. Bu holda chiziqdagi barcha $M(x, y, z)$ nuqtalarning koordinatalari

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases} \qquad (**)$$

tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi.

<u>2-TA‘RIF:</u> Agar (**) tenglamalar sistemasini faqat fazodagi L chiziqning $M(x, y, z)$ nuqtalarning koordinatalari qanoatlantirsa, u bu chiziqning ***tenglamasi*** deb ataladi.

<u>3-TA‘RIF:</u> Fazodagi sirt va chiziqlarni ularning tenglamalari orqali o‘rganuvchi matematik fan ***analitik geometriya*** deb ataladi.

Fazodagi analitik geometriyada asosan ikkita masala qaraladi:

1. Berilgan sirtn yoki chiziqning tenglamasini topish va uni analitik o‘rganish.
2. Berilgan tenglamaga mos keluvchi sirtn yoki chiziqni aniqlash.

Masala: Markazi $M(a,b,c)$ nuqtada joylashgan R radiusli sfera tenglamasini toping.

Yechish: $N(x,y,z)$ shu sferaga tegishli ixtiyoriy bir nuqta bo‘lsin. Sfera $|MN|=R$ shartni qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plamidan (geometrik o‘rnidan) iboratdir. Unda ikki nuqta orasidagi masofa (III bob,§2, (7)) formulasiga ko‘ra sferaning ushbu tenglamasini hosil etamiz:

$$|MN| = R \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R \Rightarrow$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Masalan, markazi M(2,3,–1) va radiusi R=5 bo‘lgan sfera tenglamasi

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 25$$

tenglamaga ega bo‘ladi. Bu yerdan N(5,7,–1) nuqta shu sferaga tegishli ekanligi kelib chiqadi, chunki

$$(5-2)^2 + (7-3)^2 + (1-1)^2 = 25.$$

K(2,6,3) nuqta bu sferada yotmaydi, chunki uning koordinatalari sferaning tenglamasini qanoatlantirmaydi:

$$(2-2)^2 + (6-3)^2 + (3-1)^2 = 13 \neq 25.$$

Tenglamalari $x^2 + y^2 + (z+4)^2 = 20$ va $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ bo‘lgan sferalarning kesishish chizig‘i L

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z+4)^2 = 20 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi. Bu sistemadagi tenglamalarni ayirib, $z=0$ ekanligini topamiz. Bu yerdan L chiziq XOY koordinata tekisligida joylashgan va tenglamasi $x^2 + y^2 = 4$ bo‘lgan aylanadan iborat ekanligini ko‘ramiz.

1.2. Tekislik va uning umumiy tenglamasi. Tekislik geometriyaning boshlang‘ich tushunchalariga kiradi va shu sababli ta’rifsiz qabul etiladi.

TEOREMA: 1) Fazodagi har qanday tekislikning tenglamasi uch o‘zgaruvchili chiziqli tenglamadan iborat, ya’ni

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (1)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bunda $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ shart bajarilishi kerak.

2) Har qanday (1) chiziqli tenglama fazoda biror tekislikni aniqlaydi.

Isbot: 1) Faraz qilaylik fazoda qandaydir P tekislik berilgan bo‘lsin. Bu tekislikka tegishli biror $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqta va P tekislikka perpendikular joylashgan biror $\boldsymbol{n}$=(A,B,C) vektor ma’lum bo‘lsin. Berilgan P tekislikda yotuvchi ixtiyoriy $M(x,y,z)$ nuqtani olib, boshi va uchi M_0 va M nuqtalarda joylashgan $\boldsymbol{a}=(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$ vektorni qaraymiz. Bu vektor bilan $\boldsymbol{n}$ vektor o‘zaro ortogonal bo‘ladi va shu sababli ularning skalyar ko‘paytmasi nolga tengdir. Bu skalyar ko‘paytmani qaralayotgan vektorlarning koordinatalari orqali ifodalaymiz:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Rightarrow Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0 \Rightarrow$$

$$Ax+By+Cz+D=0,\quad D=-(Ax_0+By_0+Cz_0).$$

Demak, haqiqatan ham tekislik tenglamasi (1) ko‘rinishdagi chiziqli tenglamadan iborat ekan.

2) Berilgan (1) tenglamani qanoatlantiruvchi birorta $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtani olamiz. Masalan, agar $A\neq0$ bo‘lsa, $M_0(-D/A,0,0)$ yoki, agar $B\neq0$ bo‘lsa, $M_0(0,-D/B,0)$ yoki, agar $C\neq0$ bo‘lsa, $M_0(0,0,-D/C)$ deb olish mumkin.

Bu holda $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ tenglik o‘rinli bo‘ladi va uni (1) tenglamadan hadma-had ayirib $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglik $\boldsymbol{n}$=(A,B,C) va $\boldsymbol{a}=(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$ vektorlarning ortogonalligini ifodalaydi. Bu shartni qanoatlantiruvchi **a** vektorlarning uchlarini ifodalovchi $M(x,y,z)$ nuqtalar to'plami $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o'tuvchi va **n**=(A,B,C) vektorga nisbatan perpendikulyar joylashgan tekislikdan iborat bo'ladi. Demak, (1) tenglama haqiqatan ham tekislikni ifodalar ekan. Teorema to'liq isbot bo'ldi.

3-TA'RIF: (1) tenglama tekislikning ***umumiy tenglamasi*** deb ataladi. Berilgan P tekislikka perpendikulyar bo'lgan har qanday vektor bu tekislikning ***normal vektori*** yoki qisqacha ***normali*** deb ataladi.

Oldingi teoremani isbotlash jarayonidan (1) umumiy tenglamasi bilan berilgan tekislik uchun **n**=(A,B,C) normal vektor bo'lishi kelib chiqadi. Bu natija kelgusida juda ko'p qo'llaniladi.

Endi P tekislikning (1) umumiy tenglamasini ayrim xususiy hollarda tahlil etamiz.

1. $D=0 \Rightarrow Ax+By+Cz=0 \Rightarrow 0(0,0,0) \in P$, ya'ni P tekislik koordinatalar boshidan o'tadi.
2. $A=0 \Rightarrow By+Cz+D=0 \Rightarrow \boldsymbol{n}=(0,B,C)\perp OX \Rightarrow P \parallel OX$, ya'ni P tekislik OX o'qiga parallel bo'ladi.
3. $B=0 \Rightarrow Ax+Cz+D=0 \Rightarrow \boldsymbol{n}=(A,0,C)\perp OY \Rightarrow P \parallel OY$.
4. $C=0 \Rightarrow Ax+By+D=0 \Rightarrow \boldsymbol{n}=(A,B,0)\perp OZ \Rightarrow P \parallel OZ$.
5. $A=0$, $D=0 \Rightarrow By+Cz=0 \Rightarrow 0(0,0,0) \in P$, $P \parallel OX \Rightarrow OX \subset P$, ya'ni P tekislik OX o'qidan o'tadi.
6. $B=0$, $D=0 \Rightarrow Ax+Cz=0 \Rightarrow 0(0,0,0) \in P$, $P \parallel OY \Rightarrow OY \subset P$.
7. $C=0$, $D=0 \Rightarrow Ax+By=0 \Rightarrow 0(0,0,0) \in P$, $P \parallel OZ \Rightarrow OZ \subset P$.
8. $A=0$, $B=0 \Rightarrow Cz+D=0 \Rightarrow z=-D/C \Rightarrow P \parallel OX$, $P \parallel OY \Rightarrow P \parallel XOY$, ya'ni P tekislik XOY tekisligiga parallel bo'ladi.
9. $A=0$, $C=0 \Rightarrow By+D=0 \Rightarrow y=-D/B \Rightarrow P \parallel OX$, $P \parallel OZ \Rightarrow P \parallel XOZ$.
10. $B=0$, $C=0 \Rightarrow Ax+D=0 \Rightarrow x=-D/A \Rightarrow P \parallel OY$, $P \parallel OZ \Rightarrow P \parallel YOZ$.
11. $A=0$, $B=0$, $D=0 \Rightarrow Cz=0 \Rightarrow z=0 \Rightarrow P=XOY$.
12. $A=0$, $C=0$, $D=0 \Rightarrow By=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow P=XOZ$.
13. $B=0$, $C=0$, $D=0 \Rightarrow Ax=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow P=YOZ$.

1.3. Tekislikning kesmalardagi tenglamasi. Fazoda koordinatalar boshidan o'tmaydigan hamda OX, OY va OZ koordinata o'qlarini mos ravishda $M_1(a,0,0)$, $M_2(0,b,0)$ va $M_3(0,0,c)$ nuqtalarda kesib o'tuvchi P tekislik tenglamasini tuzamiz. Buning uchun tekislikning umumiy $Ax+By+Cz+D=0$ $(D\neq 0)$ tenglamasidan foydalanamiz. Bu yerdagi noma'lum A, B va C koeffitsientlarni quyidagi mulohazalardan topamiz:

$$M_1(a,0,0) \in P \Rightarrow Aa+D=0 \Rightarrow A=-D/a;$$
$$M_2(0,b,0) \in P \Rightarrow Bb+D=0 \Rightarrow B=-D/b;$$
$$M_3(0,0,c) \in P \Rightarrow Cc+D=0 \Rightarrow C=-D/c.$$

A,B va C koeffitsientlar uchun topilgan bu ifodalarni umumiy tenglamaga qo'yib va $D\neq 0$ ekanligini hisobga olib, ushbu natijani hosil etamiz:

$$Ax+By+Cz+D=0\Rightarrow -\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -D\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1\right)=0\Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0\Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (2)$$

Demak, yuqorida berilgan ma’lumotlar asosida, tekislik tenglamasini (2) ko‘rinishda yozish mumkin. Bunda $|a|$, $|b|$ va $|c|$ qaralayotgan *P* tekislikni OX, OY va OZ koordinata o‘qlaridan ajratgan kesmalarini ifodalaydi va shu sababli quyidagi ta’rif kiritiladi.

4-TA‘RIF: (2) tenglama tekislikning ***kesmalardagi tenglamasi*** deyiladi.

Agar koordinata boshidan o‘tmaydigan tekislik (1) umumiy tenglamasi bilan berilgan bo‘lsa (A,B,C,D≠0), uning kesmalardagi tenglamasiga o‘tish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$Ax+By+Cz+D=0\Rightarrow -D\left(\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}-1\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-D/A}+\frac{y}{-D/B}+\frac{z}{-D/C}=1\Rightarrow a=-\frac{D}{A}, b=-\frac{D}{B}, c=-\frac{D}{C}.$$

Demak, umumiy tenglamadan kesmalardagi tenglamaga o‘tish uchun uni ozod hadining qarama-qarshisiga bo‘lish kerak.

Masala: Umumiy $3x–4y+z–5=0$ tenglamasi bilan berilgan tekislikning kesmalardagi tenglamasini toping.

Yechish: Umumiy tenglamani –D=5 soniga bo‘lib, (2) tenglamada

$$a=-\frac{D}{A}=\frac{5}{3}, \quad b=-\frac{D}{B}=-\frac{5}{4}, \quad c=-\frac{D}{C}=+\frac{5}{1}=5$$

ekanligini topamiz. Bundan berilgan tekislikning kesmalardagi tenglamasi

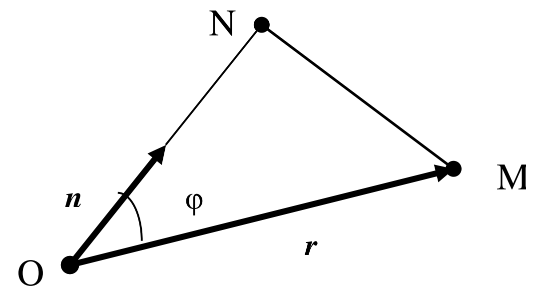
$$\frac{x}{5/3}+\frac{y}{-5/4}+\frac{z}{5}=1$$

ekanligi kelib chiqadi.

1.4. Tekislikning normal tenglamasi. Berilgan *P* tekislikka O koordinata boshidan o‘tkazilgan perpendikularning asosini N deb belgilaymiz. Bu perpendikular uzunligi |ON|=*p* (ya’ni koordinata boshidan *P* tekislikkacha bo‘lgan masofa) va uning OX,OY,OZ koordinata o‘qlari bilan mos ravishda hosil etgan α, β, γ burchaklar ma’lum deb olamiz. Tekislikning ON perpendikularda joylashgan va O nuqtadan N nuqtaga qarab yo‘nalgan normal birlik vektorini ***n*** deb belgilaymiz. Bunda uning koordinatalari ***n***=(cosα, cosβ, cosγ) bo‘ladi. *P* tekislikda yotuvchi ixtiyoriy M(x,y,z) nuqtani olsak, uning radius vektori ***OM=r***=(x,y,z) bo‘ladi. Endi ***n·r*** skalyar ko‘paytmani ikki usulda hisoblaymiz. Agar bu vektorlar orasidagi burchakni φ deb olsak, unda skalyar ko‘paytmaning ta’rifiga asosan (quyidagi 36-rasmga qarang)

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{r}|\cdot\cos\varphi=1\cdot|\boldsymbol{r}|\cdot\cos\varphi=|\boldsymbol{r}|\cdot(|ON|/|\boldsymbol{r}|)=|ON|=p$$

tenglikka ega bo‘lamiz.



36-rasm

Ikkinchi tomondan, skalyar ko‘paytmaning koordinatalardagi ifodasiga asosan,

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r} = x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma$$

tenglikni hosil etamiz. Bu yerdan ko‘rinadiki P tekislikdagi har bir M(x,y,z) nuqtaning koordinatalari

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p \Rightarrow x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \qquad (3)$$

tenglamani qanoatlantiradi va aksincha, (3) tenglamani qanoatlantiruvchi har bir M(x,y,z) nuqta P tekislikka tegishli bo‘ladi.

5-TA‘RIF: (3) tenglama tekislikning ***normal tenglamasi*** deyiladi.

Endi (1) umumiy tenglamasi bilan berilgan tekislikning normal tenglamasini topish masalasini ko‘ramiz. Buning uchun dastlab quyidagi lemmani isbotlaymiz.

LEMMA: Agar ikkita $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ tenglamalar bitta P tekislikni ifodalasa, unda ularning mos koeffitsiyentlari va ozod hadlari proporsional bo‘ladi , ya’ni

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Bu tenglamalardan $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ va $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ normal vektorlarni hosil etamiz. Ularning ikkalasi ham P tekislikka perpendikular va shu sababli kollinear vektorlar bo‘ladilar. Unda, vektorlarning kollinearlik shartiga asosan,

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\mu$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Bunda μ proporsionallik koeffitsiyentini ifodalaydi. Bu holda

$$A_1=\mu A_2,\quad B_1=\mu B_2,\quad C_1=\mu C_2$$

bo‘lgani uchun, yuqoridagi tenglamalardan ikkinchisini μ soniga ko‘paytirib va birinchisidan hadma-had ayirib

$$D_1-\mu D_2=0 \Rightarrow \frac{D_1}{D_2}=\mu$$

ekanligini ko‘ramiz. Bu nisbatni yuqoridagi nisbatlar bilan solishtirib, lemmadagi tasdiqni to‘g‘riligiga ishonch hosil etamiz.

Bu lemmaga asosan P tekislikning (1) umumiy va (3) normal tenglamalaridan

$$A=\mu\cos\alpha,\quad B=\mu\cos\beta,\quad C=\mu\cos\gamma,\quad D=-\mu\cdot p$$

tengliklarga ega bo‘lamiz. Bunda yo‘naltiruvchi kosinuslar xossasidan foydalanib, μ proporsionallik koeffitsiyentini topamiz:

$$A^2+B^2+C^2=\mu^2\cos^2\alpha+\mu^2\cos^2\beta+\mu^2\cos^2\gamma=$$
$$=\mu^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=\mu^2\cdot 1=\mu^2 \Rightarrow \mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Bu yerdan

$$\cos\alpha=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad \cos\beta=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$
$$\cos\gamma=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad p=\mp\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

ekanligini topamiz. Bunda μ ***normallashtiruvchi ko'paytuvchi*** deb ataladi va uning ishorasi p=(–D/ μ)≥0 shartdan aniqlanib, D ozod had ishorasiga qarama-qarshi qilib olinadi.

Shunday qilib tekislikning (1) umumiy tenglamasidan (3) normal tenglamasiga o'tish uchun uni

$$M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

soniga ko'paytirish kerak.

Masala: Tekislikning $2x–y+2z–5=0$ umumiy tenglamasidan normal tenglamasiga o'ting.

Yechish: Normallashtiruvchi μ ko'paytuvchini topamiz va berilgan umumiy tenglamani unga ko'paytirib, normal tenglamani topamiz:

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{1}{3}\Rightarrow \frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z-\frac{5}{3}=0.$$

Bunda ozod had D=–5<0 bo'lgani uchun μ ishorasi musbat qilib olindi va normal tenglamada

$$\cos\alpha=\frac{2}{3},\quad \cos\beta=-\frac{1}{3},\quad \cos\gamma=\frac{2}{3},\quad p=\frac{5}{3}$$

bo'ladi.

XULOSA

Fazodagi analitik geometriya sirt va chiziqlarni ularning tenglamalari orqali algebraik usullarda o'rganadi. Bunda asosan ikkita masala qaraladi:

1) berilgan tenglama fazoda qanday obyektni ifodalashini aniqlash;
2) berilgan geometrik obyekt tenglamasini topish.

Fazodagi eng sodda sirt bo'lmish tekislik I tartibli tenglama bilan ifodalanadi va aksincha, har qanday I tartibli tenglama fazoda biror sirtni aniqlaydi. Tekisliklarning xususiyatlarini ularning umumiy, kesmalardagi va normal tenglamalari yordamida o'rganish mumkin. Kerak bo'lganda bu tenglamalarning biridan ikkinchisiga o'tib bo'ladi.

Tayanch iboralar

* Fazodagi nuqta koordinatalari * Fazodagi geometrik obyekt tenglamasi * Fazodagi analitik geometriya predmeti * Fazodagi analitik geometriyaning asosiy masalalari * Tekislikning umumiy tenglamasi * Tekislikning normal vektori * Tekislikning kesmalardagi tenglamasi * Tekislikning normal tenglamasi * Normallashtiruvchi ko‘paytuvchi

Takrorlash uchun savollar

1. Tekislikning umumiy tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
2. Tekislikning normal vektori deb nimaga aytiladi?
3. Tekislikning umumiy tenglamasidan uning normal vektori qanday topiladi?
4. Tekislikning kesmalardagi tenglamasini yozing va undagi parametrlar ma’nosini ko‘rsating.
5. Tekislikning umumiy tenglamasidan uning kesmalardagi tenglamasiga qanday o‘tish mumkin?
6. Tekislikning normal tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
7. Tekislikning normal tenglamasidagi parametrlar qanday ma’noga ega?
8. Tekislikning umumiy tenglamasidan normal tenglamasiga qanday o‘tiladi?

Testlardan namunalar

1. Tekislikning umumiy tenglamasini ko‘rsating.
   A) $Ax+By+Cz+D=0$; B) $x/A+y/B+z/C+D=0$;
   C) $Ax+By-Cz=0$; D) $A/x+B/y+C/z+D=0$; E) $Ax+By+Cz=0$.
2. $3x+4y+7z-81=0$ tenglama bilan berilgan tekislik normalini aniqlang.
   A) $\boldsymbol{n}=(3;4;-81)$; B) $\boldsymbol{n}=(3;-4;-81)$; C) $\boldsymbol{n}=(4;7;-81)$;
   D) $\boldsymbol{n}=(-3;-4;81)$; E) $\boldsymbol{n}=(3;4;7)$.
3. Tasdiqni yakunlang: Tekislikning umumiy $Ax+By+Cz+D=0$ $(D\neq 0)$ tenglamasidan kesmalardagi tenglamasiga o‘tish uchun umumiy tenglama ··· bo‘linadi .
   A) $-A$ koeffitsiyentga ; B) $-B$ koeffitsiyentga ; C) $-C$ koeffitsiyentga ;
   D) $-D$ ozod hadga ; E) ABC ko‘paytmaga .

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Ushbu II tartibli tenglama fazoda sferani ifodalashini ko‘rsating:

$$x^2+y^2+z-2(n+1)x+2(n-1)y-4nz+5n^2+2=0.$$

Bu sferaning markazi M(a,b,c) va radiusi R aniqlansin.

2. Tekislik $(n+1)x+(2n-1)y+(n+3)z-5=0$ umumiy tenglamasi bilan berilgan. Quyidagilarni aniqlang:

a) tekislikning normal vektorini; *b*) tekislikning kesmalardagi tenglamasini;
c) tekislikning koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalarini ;

d) tekislikning normal tenglamasini .

§2. TEKISLIKKA DOIR ASOSIY MASALALAR

Tekislikning ko‘rib o‘tilgan tenglamalaridan foydalanib, unga doir juda ko‘p geometrik masalalarning yechimlarini algebraik usullarda oson topish mumkin. Bunga misol sifatida tekisliklarga doir bir qator masalalarni ko‘rib chiqamiz.

1-masala: Berilgan $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi barcha tekisliklar tenglamasini toping.

Yechish: Izlanayotgan tekisliklarning umumiy tenglamasi

$$Ax+By+Cz+D=0$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Masala shartiga asosan $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqta bu tekisliklarda yotadi va shuning uchun uning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiradi, ya’ni

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Hosil bo‘lgan bu tenglikni yuqoridagi umumiy tenglamadan ayirib,

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (1)$$

tenglamaga ega bo‘lamiz. Bu berilgan $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi tekisliklar tenglamasini ifodalaydi. Undagi A, B va C koeffitsiyentlarga turli qiymatlar berib, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi turli tekisliklarni hosil qilamiz.

Masalan, $M_0(3,-4,1)$ nuqtadan o‘tuvchi tekisliklar tenglamasi

$$A(x-3)+B(y+4)+C(z-1)=0 \Rightarrow Ax+By+Cz+(-3A+4B-C)=0$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

2-masala: Fazodagi bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan uchta $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ va $M_3(x_3,y_3,z_3)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini toping.

Yechish: Izlanayotgan tekislikka tegishli va yuqorida berilgan uchta nuqtalardan farqli bo‘lgan ixtiyoriy bir $M(x,y,z)$ nuqtani olamiz. Bu nuqtalar orqali

$$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=\vec{r}_1,\quad \overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)=\vec{r}_2,$$

$$\overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)=\vec{r}_3$$

vektorlarni hosil etamiz. Bu vektorlarning uchalasi ham biz izlayotgan tekislikda yotadi, ya’ni komplanar bo‘ladi. Shu sababli, vektorlarning komplanarlik shartiga asosan, ularning aralash ko‘paytmasi nolga teng bo‘ladi. Bu aralash ko‘paytmani vektorlarning koordinatalari orqali ifodalab,

$$\vec{r}_1\vec{r}_2\vec{r}_3=\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (2)$$

tenglamani olamiz. (2) berilgan uchta nuqtadan o‘tuvchi tekislikning tenglamasini ifodalaydi.

Misol sifatida berilgan uchta $M_1(1,2,3)$, $M_2(-1,0,0)$ va $M_3(3,0,1)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini topamiz:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-4(x-1)+6(y-2)-4(z-3)-4(z-3)+4(y-2)+6(x-1)=0\Rightarrow$$

$$2(x-1)+10(y-2)-8(z-3)=0 \Rightarrow (x-1)+5(y-2)-4(z-3)=0\Rightarrow x+5y-4z+1=0.$$

3-masala: Fazodagi ikkita P_1 va P_2 tekislik orasidagi ikki yoqli α burchakni toping.

Yechish: P_1 va P_2 tekislikliklarning

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

umumiy tenglamalariga murojaat etamiz. Bu tenglamalardan P_1 va P_2 tekislikliklarning $\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$ va $\boldsymbol{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$ normal vektorlarini olamiz. Bu holda P_1 va P_2 tekislikliklar orasidagi ikki yoqli α burchak ularning $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ va $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ normal vektorlari orasidagi burchakka teng bo‘ladi. Unda, fazodagi ikki vektor orasidagi burchak formulasiga asosan, ko‘rilayotgan masala javobi

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \tag{3}$$

formula bilan beriladi.

Masalan, umumiy tenglamalari $x+2y+2z+7=0$ va $16x+12y-15z-1=0$ bo‘lgan tekisliklar orasidagi ikki yoqli α burchakni topamiz:

$$\cos\alpha = \frac{1\cdot16 + 2\cdot12 + 2\cdot(-15)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{16^2+12^2+(-15)^2}} = \frac{10}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{625}} = \frac{2}{15} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{2}{15}.$$

4-masala: Fazodagi ikkita P_1 va P_2 tekisliklarning parallellik va perpendikularlik shartlarini aniqlang.

Yechish: Dastlab P_1 va P_2 tekislikliklarning

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

umumiy tenglamalaridan $\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$ va $\boldsymbol{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$ normal vektorlarini topamiz.

Agar yuqorida keltirilgan P_1 va P_2 tekisliklar perpendikular bo‘lsa, u holda ularning $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ va $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ normal vektorlari ham o‘zaro ortogonal bo‘ladi. Unda, fazodagi ikkita vektorning ortogonallik shartiga asosan,

$$\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2 = 0 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \tag{4}$$

natijani olamiz. Bu berilgan tekisliklarning perpendikularlik shartini ifodalaydi.

Xuddi shunday ravishda P_1 va P_2 tekisliklarning parallellik sharti ularning normal vektorlarining kolleniarlik shartidan kelib chiqadi va

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \tag{5}$$

ko‘rinishda ifodalanadi.

Masalan, umumiy tenglamalari $6x+3y-2z+7=0$ va $x+2y+6z-1=0$ bo‘lgan P_1 va P_2 tekisliklar uchun

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 6\cdot1+3\cdot2+(-2)\cdot6=0$$

bo‘lgani uchun ular perpendikulardir.

$4x+2y-4z+5=0$ va $2x+y+2z-1=0$ tenglamalar bilan berilgan P_1 va P_2 tekisliklar esa paralleldir, chunki

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{4}{2}=2,\quad \frac{B_1}{B_2}=\frac{2}{1}=2,\quad \frac{C_1}{C_2}=\frac{-4}{-2}=2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

5-masala: Berilgan P_0 tekislikka parallel va berilgan $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi tuzilsin.

Yechish: Berilgan P_0 tekislikning umumiy tenglamasi

$$A_0x + B_0y + C_0z + D_0 =0$$

bo‘lsin. (1) natijaga asosan $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi ixtiyoriy P tekislik tenglamasi

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) =0$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bu tenglamadagi A,B va C koeffitsiyentlarni P_0 va P tekisliklarning parallellik shartidan, ya’ni (5) nisbatlar tengligidan topiladi. Bunda $A=A_0$, $B=B_0$ va $C=C_0$ deb olsak, (5) nisbatlar birga teng bo‘ladi va shu sababli izlanayotgan tekislik tenglamasi

$$A_0(x-x_0)+B_0(y-y_0)+C_0(z-z_0) =0 \qquad (6)$$

ekanligini topamiz.

6-masala: Berilgan uchta P_1, P_2 va P_3 tekisliklarning kesishish nuqtasini toping.

Yechish: Bu tekisliklarning kesishish nuqtasi $M(x, y, z)$ ularning uchalasiga ham tegishli bo‘lgani uchun, uning x, y va z koordinatalari P_1, P_2 va P_3 tekisliklarning umumiy tenglamalarini bir paytni o‘zida qanoatlantiradi. Demak, bu nuqta koordinatalari berilgan tekisliklarning umumiy tenglamalaridan hosil qilingan ushbu sistemani yechish orqali topiladi:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=-D_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z=-D_2 \\ A_3x+B_3y+C_3z=-D_3 \end{cases} \qquad (7)$$

Bunda uch hol bo‘lishi mumkin.

I hol. Sistema koeffitsiyentlari proporsional emas. Bu holda (7) sistema yagona yechimga ega va P_1, P_2 , P_3 tekisliklar mana shu bitta nuqtada kesishadi.

II hol. Sistema koeffitsiyentlari k proporsionallik koeffitsiyenti bilan proporsional, ammo ozod hadlar nisbatlarining kamida bittasi bu k sonidan farqli. Bu holda (7) sistema yechimga ega emas va P_1, P_2 , P_3 tekisliklar kesishmaydi, ya'ni ular o‘zaro parallel bo‘ladi.

III hol. Sistema koeffitsiyentlari va ozod hadlari o‘zaro proporsional. Bu holda (7) sistema cheksiz ko‘p yechimga ega va P_1, P_2 , P_3 tekisliklar cheksiz ko‘p nuqtalarda kesishadi, ya'ni ular ustma-ust joylashgan bo‘ladi.

7-masala: Berilgan $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan P tekislikkacha bo‘lgan d masofani toping.

Yechish: P tekislik normal tenglamasi $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ orqali berilgan bo‘lsin. Bu holda izlangan d masofa

$$d=| x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0 \cos\gamma-p | \qquad (8)$$

formula bilan hisoblanishini ko‘rsatish mumkin.

Agar *P* tekislik umumiy tenglamasi $Ax+By+Cz+D=0$ bilan berilgan bo‘lsa, oldin undan $\mu=\pm1/(A^2+B^2+C^2)$ normallashtiruvchi ko‘paytuvchi yordamida normal tenglamaga o‘tamiz va so‘ngra (9) formuladan foydalanamiz. Natijada

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (9)$$

formulani hosil etamiz.

Masalan, $M_0(1,2,3)$ nuqtadan $2x–2y+z–3=0$ umumiy tenglama bilan ifodalanuvchi tekislikkacha bo‘lgan *d* masofani topamiz:

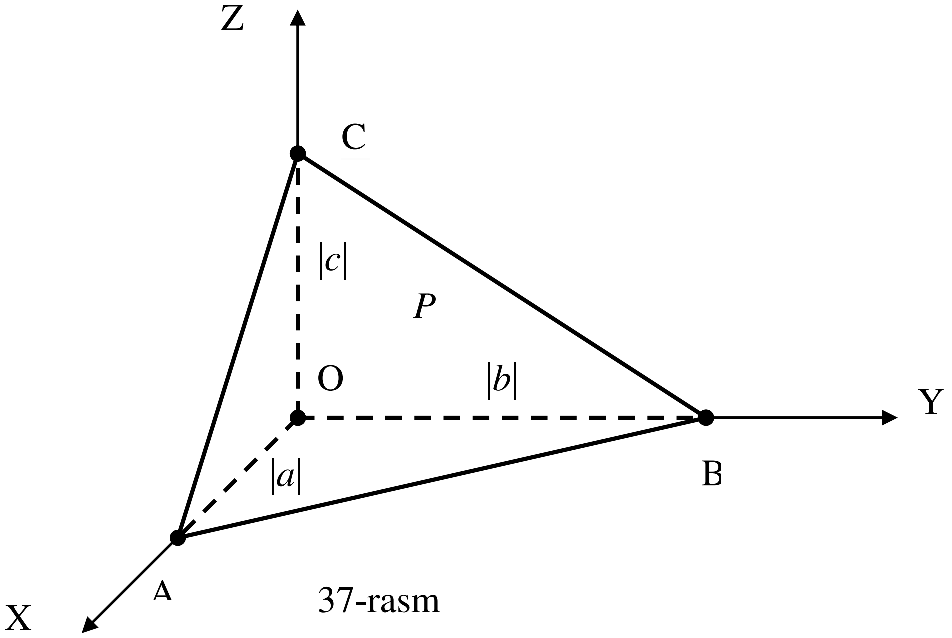
$$d=\frac{|2\cdot1+(-2)\cdot2+1\cdot3+(-3)|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{2}{3}.$$

8-masala: Koordinata boshidan o‘tmaydigan *P* tekislik va koordinata tekisliklari bilan chegaralangan uchburchakli piramidaning V hajmini toping.

Yechish: Berilgan *P* tekislikning ushbu

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

kesmalardagi tenglamasiga murojaat etamiz. Unda *P* tekislik va koordinata tekisliklari qirralari $|OA|=|a|$, $|OB|=|b|$ va $|OC|=|c|$ o‘zaro perpendikular bo‘lgan piramidani hosil etadi(37-rasmga qarang).



37-rasm

Bu yerdan, piramidaning hajmi formulasiga asosan, masala javobini quyidagi ko‘rinishda ekanligini aniqlaymiz:

$$V=\frac{1}{3}hS_{asos}=\frac{1}{3}\cdot|OC|\cdot\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{3}|c|\cdot\frac{1}{2}\cdot|a|\cdot|b|=\frac{1}{6}|abc|. \qquad (10)$$

10-masala: Berilgan $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\boldsymbol{a}_1=(x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{a}_2=(x_2, y_2, z_2)$ vektorlarga parallel bo‘lgan *P* tekislik tenglamasini aniqlang.

Yechish: (1) formulaga asosan berilgan $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi tekisliklar tenglamasi

$$A(x–x_0)+B(y–y_0)+C(z–z_0)=0 \qquad (11)$$

bo‘lishidan foydalanamiz. Bunda noma’lum $\boldsymbol{n}$=(A,B,C) normal vektor sifatida berilgan vektorlarning $\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2$ vektorial ko‘paytmasini olish mumkin. Agar (12) tenglama bo‘yicha $\boldsymbol{r}=(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$ o‘zgaruvchi vektorni tuzsak, unda bu tenglamani $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2)\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{r}=0$ ko‘rinishda aralash ko‘paytma orqali ifodalash mumkin. Bu yerdan, aralash ko‘paytmani koordinatalardagi ifodasidan (III bob, §4, (3) formula) foydalanib, masala javobini quyidagi ko‘rinishda topamiz:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=0 \quad . \qquad (12)$$

Bu natijalardan kelgusida foydalanamiz.

XULOSA

Tekisliklar tenglamalaridan foydalanib, ular uchun bir qator masalalarni vektorlar algebrasidan foydalanib algebraik usulda yechish mumkin. Jumladan uchta nuqtadan o‘tuvchi tekislikni topish, ikkita tekislik orasidagi burchakni aniqlash, nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofani hisoblash, ma’lum bir xususiyatga ega bo‘lgan tekislik tenglamasini keltirib chiqarish kabi masalalarni qarash mumkin.

Tayanch iboralar

Berilgan nuqtadan o‘tuvchi tekisliklar * Berilgan uchta nuqtadan o‘tuvchi tekislik * Ikki tekislik orasidagi burchak * parallellik sharti * perpendikularlik sharti
* Nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa * Uchta tekislikning kesishish nuqtasi

Takrorlash uchun savollar

1. Berilgan nuqtadan o‘tuvchi tekisliklar tenglamasini yozing.
2. Berilgan uchta nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi qanday topiladi?
3. Ikki tekislik orasidagi burchak qanday topiladi?
4. Ikki tekislikning perpendikularlik sharti nimadan iborat?
5. Ikki tekislikning parallellik sharti nimadan iborat?
6. Uchta tekislikning kesishish nuqtasi qanday topiladi?
7. Nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa qanday topiladi?
8. Berilgan tekislik va koordinata tekisliklari bilan chegaralangan piramida hajmini hisoblash formulasini yozing.

Testlardan namunalar

1. Berilgan $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\boldsymbol{n}$=(A,B,C) vektorga perpendikular tekislik tenglamasini ko‘rsating.

A) $\dfrac{A}{x-x_0}+\dfrac{B}{y-y_0}+\dfrac{C}{z-z_0}=0$; B) $Ax_0+By_0+Cz_0=0$;

C) $\dfrac{x-x_0}{A}=\dfrac{y-y_0}{B}=\dfrac{z-z_0}{C}$; D) $x_0^2+y_0^2+z_0^2=A^2+B^2+C^2$;

E) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

2. $3x+4y-2\sqrt{6}z+14=0$ tekislikdan koordinata boshigacha bo‘lgan masofani toping.

A) 14; B) 7; C) 2; D) 1; E) 0.

3. Ushbu $4x+3y-5z-8=0$ va $4x+3y-5z-12=0$ parallel tekisliklar orasidagi masofani toping.

A) 4 ; B) 20 ; C) $\dfrac{1}{2}$; D) $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$; E) $2\sqrt{2}$.

4. $x+y-z-1=0$ va $2x-2y-2z+1=0$ tekisliklar orasidagi burchak kosinusini toping.

A) 0; B) 1; C) 1/2; D) 1/3; E) 1/4.

5. $x+y-18=0$ va $y+z-72=0$ tenglamalar bilan berilgan tekisliklar orasidagi burchak topilsin.

A) 30^0 ; B) $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; C) $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{5}$; D) $arctg\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; E) 60^0 .

6. $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ tekisliklarning parallellik sharti qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan ?

A) $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$; B) $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$; C) $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$;

D) $\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$; E) $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$.

7. $kx-2y+5z+10=0$ va $6x-(1+k)y+10z-2=0$ tekisliklar k parametrning qanday qiymatida parallel bo‘ladi ?

A) 3; B) – 3; C) 2; D) –2; E) 0.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. ABCD tetraedrning uchlari

A(n, n+2, n–4), B(n+2, n–1, n+1), C(2n, n, 2n–1), D(2n+3, 2n, n)

nuqtalarda joylashgan. Bu tetraedr uchun quyidagilarni aniqlang:

a) ABC tomonining umumiy tenglamasini;
b) ABD tomonining normal tenglamasini;
c) ABC va ABD tomonlari orasidagi burchakni;
d) D uchidan tushirilgan balandligining uzunligini;
e) D uchidan o‘tuvchi va ABC tomoniga parallel tekislik tenglamasini.

§3. FAZODAGI TO‘GRI CHIZIQ TENGLAMALARI

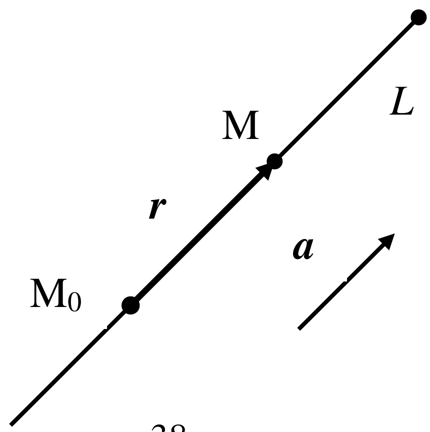
- ***Fazodagi to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi.***
- ***Fazodagi to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi.***
- ***Fazodagi to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi.***

3.1. Fazodagi to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi. Fazodagi L to‘g‘ri chiziq tenglamasini topish uchun unga parallel bo‘lgan biror $\boldsymbol{a}=(m, n, p)$ vektor shu to‘g‘ri chiziqda yotuvchi biror $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta ma’lum deb olamiz. Bunda $\boldsymbol{a}$ berilgan L to‘g‘ri chiziqning ***yo‘naltiruvchi vektori***, M_0 esa ***boshlang‘ich nuqtasi*** deyiladi.

$M(x, y, z)$ berilgan L to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy bir nuqtasi bo‘lsin. Bu va M_0 nuqtalarni tutashtirib,

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,\, y-y_0,\, z-z_0)$$

vektorni hosil qilamiz (38-rasmga qarang).



38-rasm

Agar $M(x, y, z)$ nuqta berilgan L to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lsa va faqat shu holda $\boldsymbol{r}$ bilan $\boldsymbol{a}$ yo‘naltiruvchi vektor kollinear bo‘ladi. Bundan va vektorlarning kollinearlik shartidan (III bob, §3, (6) formulaga qarang) foydalanib, L to‘g‘ri chiziqni ifodalovchi

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad (1)$$

tenglamaga ega bo‘lamiz.

<u>1-TA’RIF:</u> (1) fazodagi to‘g‘ri chiziqning ***kanonik tenglamasi*** deyiladi.

To‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasidagi kasrlarning maxrajlaridagi m,n va p sonlari yo‘naltiruvchi $\boldsymbol{a}$ vektorning koordinatalari, suratlardagi x_0,y_0 va z_0 sonlari esa boshlang‘ich M_0 nuqtaning koordinatalari ekanligini ta’kidlab o‘tamiz.

Izoh. Agar $\boldsymbol{a}=(m, n, p)$ yo‘naltiruvchi vektorning biror koordinatasi 0 bo‘lsa, (1) kanonik tenglamadagi tegishli kasrning surati ham 0 deb olinadi. Masalan, n=0 bo‘lsa, unda L to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$$y-y_0=0, \qquad \frac{x-x_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu holda $\boldsymbol{a}=(m,0,p)$ yo‘naltiruvchi vektor OY koordinata o‘qiga perpendikular joylashgani uchun L to‘g‘ri chiziq ham OY o‘qiga perpendikular bo‘ladi.

3.2. Fazodagi to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi. Fazodagi to‘g‘ri chiziqning (1) kanonik tenglamasidagi o‘zaro teng bo‘lgan kasrlarning qiymatlarini t deb belgilaymiz. Bunda t parametr deb ataladi va ixtiyoriy haqiqiy qiymatni qabul eta oladi. Bu holda fazodagi to‘g‘ri chiziq tenglamasini quyidagi ko‘rinishga keltiriladi:

$$\frac{x-x_0}{m}=t,\ \frac{y-y_0}{n}=t,\ \frac{z-z_0}{p}=t \Rightarrow x-x_0=mt,\ y-y_0=nt,\ z-z_0=pt \Rightarrow$$

$$x=x_0+mt,\quad y=y_0+nt,\quad z=z_0+pt,\quad t\in(-\infty,\infty). \qquad (2)$$

2-TA’RIF: (2) fazodagi to‘g‘ri chiziqning ***parametrik tenglamasi*** deyiladi.

Masalan, kanonik tenglamasi

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{-2}$$

bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi

$$x=5+3t,\quad y=-1+4t,\quad z=-2t$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Agar fazodagi to‘g‘ri chiziq (2) parametrik tenglamasi bilan berilgan bo‘lsa, uning kanonik tenglamasiga o‘tish uchun har bir tenglamadan t parametr ifodasini topib, bu ifodalarni tenglashtirish kerak. Masalan, to‘g‘ri chiziq

$$x=-4+5t,\quad y=6-3t,\quad z=-1-2t$$

parametrik tenglamasi bilan berilgan bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini topamiz:

$$x=-4+5t,\ y=6-3t,\ z=-1-2t \Rightarrow 5t=x+4,\ -3t=y-6,\ -2t=z+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{x+4}{5},\ t=\frac{y-6}{-3},\ t=\frac{z+1}{-2} \Rightarrow \frac{x+4}{5}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z+1}{-2}.$$

3.3. Fazodagi to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi. Fazodagi har qanday L to‘g‘ri chiziqni o‘zaro parallel bo‘lmagan qandaydir ikkita P_1 va P_2 tekisliklarning kesishish chizig‘i singari qarash mumkin. Bu P_1 va P_2 tekisliklar mos ravishda $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ umumiy tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin. Bu holda ularning kesishishidan hosil bo‘lgan L to‘g‘ri chiziqqa tegishli M(x, y, z) nuqtalar ham P_1, ham P_2 tekisliklarda yotadi va shu sababli ularning koordinatalari

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (3)$$

chiziqli tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi.

3-TA’RIF: (3) sistema fazodagi to‘g‘ri chiziqning ***umumiy tenglamasi*** deyiladi.

Agar fazodagi L to‘g‘ri chiziq (1) kanonik tenglamasi orqali berilgan va, masalan, $p\neq 0$ bo‘lsa, uning umumiy tenglamasiga quyidagicha o‘tish mumkin:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{p} \\ \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} px - mz + mz_0 - px_0 = 0 \\ py - nz + nz_0 - py_0 = 0 \end{cases}. \quad (4)$$

Hosil qilingan (4) sistema berilgan L to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi bo‘ladi, chunki bu sistema (3) ko‘rinishda bo‘lib, undan

$A_1=p$, $B_1=0$, $C_1=-m$, $D_1=mz_0-px_0$ va $A_1=0$, $B_1=p$, $C_1=-n$, $D_2=nz_0-py_0$

holda kelib chiqadi. Bunda L to‘g‘ri chiziq birinchisi OY, ikkinchisi esa OX o‘qiga parallel bo‘lgan tekisliklarning kesishishidan hosil qilinadi.

Izoh. Fazodagi berilgan L to‘g‘ri chiziqning (3) umumiy tenglamasini cheksiz ko‘p ko‘rinishda yozish mumkin. Bunga sabab shuki, bu L to‘g‘ri chiziq orqali cheksiz ko‘p tekislik o‘tkazish mumkin va ulardan ixtiyoriy ikkitasini tanlab olib, (3) umumiy tenglamaga kelib bo‘ladi. Yuqorida kanonik tenglamadan umumiy tenglamaga o‘tishda shu tekisliklar ichidan biri OY, ikkinchisi esa OX o‘qiga parallel bo‘lganlari olindi.

Masalan, kanonik tenglamasi

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-4}{6}$$

bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamalaridan birini topamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{z-4}{6} \\ \dfrac{y+1}{-5} = \dfrac{z-4}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x-3) = z-4 \\ 6(y+1) = -5(z-4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - z - 5 = 0 \\ 6y + 5z - 14 = 0 \end{cases}.$$

Endi aksincha, ya’ni fazodagi to‘g‘ri chiziq (3) umumiy tenglamasi bilan berilgan bo‘lsin. Bu holda (3) sistemada biror o‘zgaruvchini, masalan z o‘zgaruvchini, erkli deb olamiz va

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -(C_1z + D_1) \\ A_2x + B_2y = -(C_2z + D_2) \end{cases} \quad (5)$$

chiziqli tenglamalar sistemasini hosil etamiz. Bu sistemani yechib,

$$x = x_0 + mz,\ \ y = y_0 + nz, \quad z = z \Rightarrow \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z}{1}$$

ko‘rinishdagi kanonik tenglamaga kelamiz.

Misol sifatida umumiy tenglamasi

$$\begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ 3x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamalaridan birini topamiz:

$$\begin{cases} 2x + y = z - 1 \\ 3x - y = 3 - 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = 2 - z \\ 5y = 7z - 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{5}z + \dfrac{2}{5} \\ y = \dfrac{7}{5}z - \dfrac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{x-0{,}4}{-0{,}2} \\ z = \dfrac{y+2{,}2}{1{,}4} \end{cases} \Rightarrow \frac{x-0{,}4}{-0{,}2} = \frac{y+2{,}2}{1{,}4} = \frac{z}{1}.$$

Umumiy tenglamasi (3) bilan berilgan L to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini boshqa usulda ham topish mumkin. Buning uchun (3) sistemadagi biror o‘zgaruvchiga aniq bir qiymat beriladi. Masalan, $z=z_0$ deb olinib, (5) sistemadan $x=x_0$ va $y=y_0$ topiladi. Bu holda $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtani L to‘g‘ri chiziqning boshlang‘ich nuqtasi sifatida olish mumkin. Endi (3) sistemaga kiruvchi tekisliklarni P_1 va P_2 deb olsak, $\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$ va $\boldsymbol{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$ ularning normal vektorlari bo‘ladi. Bu vektorlar mos ravishda P_1 va P_2 tekisliklarga perpendikular, L esa ularning kesishish chizig‘i ekanligidan , $\boldsymbol{n}_1$ va $\boldsymbol{n}_2$ normallarning ikkalasi ham L to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘ladi. Unda $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$ vektorial ko‘paytma L to‘g‘ri chiziqqa parallel vektorni ifodalaydi va shu sababli uning yo‘naltiruvchi vektori sifatida olinishi mumkin. Bu vektorning m,n, va p koordinatalari vektorial ko‘paytmaning ushbu formulasidan (III bob, §3, (2) formulaga qarang) topiladi:

$$\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}. \qquad (7)$$

Masalan, yuqorida ko‘rilgan (6) umumiy tenglamada z=2 deb olamiz va quyidagi sistemani hosil etib, uni yechamiz:

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x-y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}.$$

Demak, $M_0(0,1,2)$ nuqtani L uchun boshlang‘ich deb olish mumkin. Endi (7) formuladan $\boldsymbol{a}=(m,n,p)$ yo‘naltiruvchi vektorni topamiz:

$$\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}=(1,-7,-5).$$

Demak, (6) umumiy tenglamasi bilan berilgan to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasining yana bir ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-7}=\frac{z-2}{-5}.$$

XULOSA

Fazodagi to‘g‘ri chiziq o‘zining yo‘naltiruvchi vektori va boshlang‘ich nuqtasi bilan to‘liq aniqlanadi. Bu ma’lumotlar asosida to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi topiladi. Fazodagi to‘g‘ri chiziq kanonik tenglamadan tashqari parametrik va umumiy tenglamasi orqali ham berilishi mumkin. Kerak bo‘lganda bu tenglamalarning biridan ikkinchisiga o‘tib bo‘ladi.

Tayanch iboralar

* Yo‘naltiruvchi vektor * Boshlang‘ich nuqta * Kanonik tenglama * Parametrik tenglama * Umumiy tenglama .

Takrorlash uchun savollar

1. Fazodagi to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori deb nimaga aytiladi?
2. Fazodagi to‘g‘ri chiziqning boshlang‘ich nuqtasi deb nimaga aytiladi?
3. Fazodagi to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini yozing.
4. Fazodagi to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
5. Fazodagi to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasidan uning kanonik tenglamasiga qanday o‘tiladi?
6. Fazodagi to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
7. Fazodagi to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasidan uning yo‘naltiruvchi vektorini qanday aniqlash mumkin?
8. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasidan uning kanonik va parametrik tenglamasiga qanday o‘tiladi?
9. Fazodagi to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasidan uning umumiy tenglamasiga qanday o‘tish mumkin?

Testlardan namunalar

1. $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\boldsymbol{a}=(m,n,p)$ vektorga parallel to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini ko‘rsating.

   A) $\frac{x-m}{x_0}=\frac{y-n}{y_0}=\frac{z-p}{z_0}$; B) $m(x-x_0)+n(y-y_0)+p(z-z_0)=0$;

   C) $m(x-x_0)=n(y-y_0)=p(z-z_0)$; D) $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$;

   E) To‘g‘ri javob keltirilmagan.

2. Kanonik tenglamasi $\frac{x}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ ko‘rinishda bo‘lgan L to‘g‘ri chiziq qanday xususiyatga ega ?

A) L to‘g‘ri chiziq YOZ koordinata tekisligiga parallel joylashgan;
B) L to‘g‘ri chiziq YOZ koordinata tekisligiga perpendikular joylashgan;
C) L to‘g‘ri chiziq YOZ koordinata tekisligini kesib o‘tadi;
D) L to‘g‘ri chiziq YOZ koordinata tekisligini kesib o‘tmaydi;
E) To‘g‘ri javob keltirilmagan.

3. Fazodagi L to‘g‘ri chiziqning $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ kanonik tenglamasida m=0 bo‘lsa, L qanday xususiyatga ega bo‘ladi ?

A) L to‘g‘ri chiziq OX koordinata o‘qiga parallel joylashgan;
B) L to‘g‘ri chiziq OX koordinata o‘qiga perpendikular joylashgan;
C) L to‘g‘ri chiziq OX koordinata o‘qini kesib o‘tadi;
D) L to‘g‘ri chiziq OX koordinata o‘qini kesib o‘tmaydi;
E) To‘g‘ri javob keltirilmagan.

4. Kanonik tenglamasi $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z}{-3}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektorining koordinatalarini toping.

A) (–3, 1, 0); B) (3, –1, 0); C) (2,5, –3) ; D) (–2, –5, 3) ;
E) to‘g‘ri javob keltirilmagan .

5. Kanonik tenglamasi $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z}{-3}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori modulini toping.

A) $\sqrt{10}$; B) $2\sqrt{5}$; C) 4; D) 2; E) $\sqrt{38}$.

6. Kanonik tenglamasi $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z}{-3}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning boshlang‘ich nuqtasining koordinatalarini toping.

A) (–3, 1, 0); B) (3, –1, 0); C) (2,5, –3) ; D) (–2, –5, 3) ;
E) to‘g‘ri javob keltirilmagan .

7. Umumiy tenglamasi

$$\begin{cases} 2x+3y+5z-7=0 \\ x-y+2z+5=0 \end{cases}$$

bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasini toping.

A) $x=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}t,\quad y=\frac{4}{5}-\frac{7}{5}t,\quad z=t$ B) $x=-\frac{8}{5}-\frac{11}{5}t,\quad y=\frac{17}{5}-\frac{1}{5}t,\quad z=t$

C) $x=\frac{17}{3}+\frac{2}{3}t,\quad y=-\frac{8}{3}+\frac{7}{3}t,\quad z=t$ D) $x=\frac{6}{5}-\frac{4}{5}t,\quad y=\frac{7}{3}-\frac{41}{3}t,\quad z=t$

E) $x=5+2t,\quad y=4-7t,\quad z=t$

<u>Mustaqil ish topshiriqlari</u>

1. Fazodagi to‘g‘ri chiziq quyidagi kanonik tenglamasi bilan berilgan:

$$\frac{x-5}{n+2}=\frac{y+3}{n+4}=\frac{z}{n+1}.$$

Bu to‘g‘ri chiziq uchun quyidagilarni aniqlang:

b) yo‘naltiruvchi vektorini ;
c) parametrik tenglamasini;
d) biror umumiy tenglamasini .

§4. FAZODAGI TO‘G‘RI CHIZIQLARGA DOIR MASALALAR.

Bu paragrafda fazodagi to‘g‘ri chiziqlarga doir bir qator masalalarni ularning tenglamalari yordamida, ya’ni analitik usulda yechish ko‘rib chiqiladi.

1-masala: Fazoda berilgan $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi barcha to‘g‘ri chiziqlar tenglamasini toping.

Yechish: Berilgan $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtani boshlang‘ich deb qaraymiz. Unda bu masala javobi

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad (1)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bunda m, n va p uchalasi bir paytda nolga teng bo‘lmagan ixtiyoriy sonlardir. (1) fazodagi $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi ***to‘g‘ri chiziqlar dastasining*** tenglamasi deyiladi.

2-masala: Fazoda berilgan ikkita $M_1(x_1,y_1,z_1)$ va $M_2(x_2,y_2,z_2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini toping.

Yechish: Izlanayotgan to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzish uchun uning biror boshlang‘ich nuqtasi va yo‘naltiruvchi vektorining koordinatalarini bilish kifoyadir. Boshlang‘ich nuqta sifatida berilgan nuqtalardan istalgan birini, masalan $M_1(x_1,y_1,z_1)$ nuqtani olamiz. Yo‘naltiruvchi vektor sifatida esa bu to‘g‘ri chiziqda yotuvchi

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\, y_2-y_1,\, z_2-z_1)$$

vektorni tanlaymiz. Bundan berilgan ikkita $M_1(x_1,y_1,z_1)$ va $M_2(x_2,y_2,z_2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (2)$$

ko‘rinishda bo‘lishi kelib chiqadi.

Masalan, $M_1(5,-1,2)$ va $M_2(-3,6,4)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{x-5}{-3-5}=\frac{y+1}{6+1}=\frac{z-2}{4-2}\Rightarrow\frac{x-5}{-8}=\frac{y+1}{7}=\frac{z-2}{2}$$

3-masala: Fazoda berilgan ikkita L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar orasidagi φ burchakni toping.

Yechish: Fazoda berilgan ikkita L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlarning kanonik tenglamalarini olamiz:

$$L_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1};\quad L_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}. \qquad (3)$$

Bu holda L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar orasidagi φ burchakni topish masalasi ularning $\boldsymbol{a}_1=(m_1, n_1, p_1)$ va $\boldsymbol{a}_2=(m_2, n_2, p_2)$ yo‘naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakni topish masalasiga keltiriladi. Unda ikkita vektor orasidagi burchak formulasiga asosan (III bob,§2, (5) formula) masala javobi

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \qquad (4)$$

ko‘rinishda ekanligini aniqlaymiz.

Masalan, kanonik tenglamalari

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1}, \qquad \frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}$$

bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar orasidagi φ burchakni topamiz:

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 2+(-4)(-2)+1\cdot(-1)}{\sqrt{1+16+1}\sqrt{4+4+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\varphi=45^0.$$

4-masala: Fazoda berilgan ikkita L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlarning perpendikularlik va parallellik shartini toping.

Yechish: Agar L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar perpendikular bo‘lsa, u holda φ=0 va (4) formulada cosφ=0 bo‘ladi. Bundan esa ikki to‘g‘ri chiziqning perpendikularlik sharti quyidagicha ekanligi kelib chiqadi:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0 \qquad (5)$$

Agar L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lsa, u holda ularning yo‘naltiruvchi vektorlari $\boldsymbol{a}_1=(m_1, n_1, p_1)$ va $\boldsymbol{a}_2=(m_2, n_2, p_2)$ o‘zaro kollinear bo‘ladi. Bundan, ikki vektorning kollinearlik shartiga asosan (III bob, §3, (6) formula), ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik sharti kelib chiqadi:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \qquad (6)$$

Masalan, kanonik tenglamalari

$$L_1:\frac{x-1}{-3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-4}{4}; \quad L_2:\frac{x-5}{6}=\frac{y}{5}=\frac{z+7}{2}$$

bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar perpendikular, chunki

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=(-3)\cdot 6+2\cdot 5+4\cdot 2=0,$$

ya’ni (5) shart bajariladi.

Kanonik tenglamalari

$$L_1:\frac{x-1}{-6}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-4}{8}; \quad L_2:\frac{x-5}{-3}=\frac{y}{2}=\frac{z+7}{4}$$

bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar esa parallel, chunki

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{-6}{-3}=2, \quad \frac{n_1}{n_2}=\frac{4}{2}=2, \quad \frac{p_1}{p_2}=\frac{8}{4}=2\Rightarrow \quad \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}=2,$$

ya’ni (6) shart bajariladi.

5-masala: Fazoda berilgan ikkita L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlarni bir tekislikda yotish shartini toping.

Yechish: Berilgan L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlarining (3) kanonik tenglamalariga murojaat etamiz. Bu tenglamalardan ularning $\boldsymbol{a}_1=(m_1, n_1, p_1)$ va $\boldsymbol{a}_2=(m_2, n_2, p_2)$ yo‘naltiruvchi vektorlarini hamda $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M_2(x_2, y_2, z_2)$ boshlang‘ich nuqtalarini topamiz. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M_2(x_2, y_2, z_2)$ boshlang‘ich nuqtalarni mos ravishda vektorning boshi va uchi deb qarab, $\boldsymbol{r}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ vektorni hosil qilamiz. Bu holda L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar bir P tekislikda yotishi uchun ularning yo‘naltiruvchi vektorlari $\boldsymbol{a}_1=(m_1, n_1, p_1)$, $\boldsymbol{a}_2=(m_2, n_2, p_2)$ va $\boldsymbol{r}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$

vektor ham shu P tekislikda yotishi zarur va yetarli ekanligini ko‘rish qiyin emas. Unda uch vektorning komplanarlik shartiga asosan (III bob, §4, (4) formula)

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

natijani olamiz. Bu ikkita L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlarni bir tekislikda yotish shartini ifodalaydi.

Masalan, kanonik tenglamalari

$$L_1:\ \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{1}; \qquad L_2:\ \frac{x+2}{5} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+2}{7}$$

bo‘lgan to‘g‘ri chizilar bir tekislikda yotadi, chunki

$$\begin{vmatrix} -2-(-3) & 5-1 & -2-0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 16 + 20 + 30 - 4 - 48 = 0,$$

ya’ni (7) shart bajariladi.

6-masala: Fazoda berilgan M(a,b,c) nuqtadan o‘tuvchi va berilgan L to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini toping.

Yechish: Berilgan L to‘g‘ri chiziq kanonik tenglamasini qaraymiz:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}.$$

Unda izlanayotgan to‘g‘ri chiziqning boshlang‘ich nuqtasi sifatida M(a,b,c) nuqtani, yo‘naltiruvchi vektori sifatida berilgan L to‘g‘ri chiziqning $\boldsymbol{a}$=(m, n, p) yo‘naltiruvchi vektorini olish mumkin. Bu holda izlangan tenglama

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p} \qquad (8)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

XULOSA

Fazodagi to‘g‘ri chiziq tenglamalari va vektorial algebradan foydalanib to‘g‘ri chiziqlarga doir bir qator masalalarni algebraik usulda yechish mumkin. Masalan, ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchakni topish, to‘g‘ri chiziqlarning parallellik va perpendikularlik shartlarini aniqlash, ayqash to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofani hisoblash, berilgan xususiyatlarga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini keltirib chiqarish kabi masalalar shular jumlasiga kiradi.

Tayanch iboralar

* To‘g‘ri chiziqlar dastasi * Ikkita nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi
* To‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak * parallellik sharti * perpendikularlik sharti
* Ikki to‘g‘ri chiziqni bir tekislikda yotish sharti

Takrorlash uchun savollar

1. Fazodagi berilgan nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi ?

2. Fazodagi berilgan ikkita nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi ?

3. Fazodagi ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak qanday topiladi?

4. Fazodagi ikki to‘g‘ri chiziqning perpendikularlik sharti nimadan iborat?

5. Fazodagi ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik sharti nimadan iborat?

6. Qaysi shartda fazodagi ikki to‘g‘ri chiziq bir tekislikda yotadi ?

Testlardan namunalar

1. $M_1(x_1,y_1,z_1)$ va $M_2(x_2,y_2,z_2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini toping.

A) $\frac{x-x_2}{x_2-x_1}=\frac{y-y_2}{y_2-y_1}=\frac{z-z_2}{z_2-z_1}$; B) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$;

C) $\frac{x-x_2}{y-y_1}=\frac{y-y_2}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{y-y_1}$; D) Ax+By+Cz+D=0; E) Ax=By=Cz=D.

2. Ushbu $M_1(3,-1,4)$ va $M_2(1,1,2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini toping.

A) $\frac{x-3}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-4}{4}$; B) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-0}{4}$; C) $\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{1`}=\frac{z-4}{2}$;

D) $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{4}$**;** E) $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-4}{-2}$.

3. Kanonik tenglamalari $\frac{x-1}{\alpha}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+4}{\sqrt{2}}$, $\frac{x+2}{2}=\frac{y+13}{\alpha}=\frac{z-6}{\sqrt{2}}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar α parametrning qanday qiymatida o‘zaro perpendikular bo‘ladi ?

A) ± 1; B) 1; C) -1; D) 2; E) -2 .

4. Kanonik tenglamalari $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$, $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

A) 0^0; B) 30^0; C) 45^0; D) 60^0; E) 90^0.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. ABCD tetraedrning uchlari

A(n, n+2, n–4), B(n+2, n–1, n+1), C(2n, n, 2n–1), D(2n+3, 2n, n)

nuqtalarda joylashgan. Bu tetraedr uchun quyidagilarni aniqlang:

a) AB qirraning kanonik tenglamasi; *b*) AD qirraning parametrik tenglamasi;

c) AB va AD orasidagi burchak; *d*)AB va DC orasidagi masofa;

e)D uchidan o‘tib, AB qirrasiga parallel to‘g‘ri chiziq tenglamasi.

§5. FAZODAGI TO‘G‘RI CHIZIQ VA TEKISLIKKA DOIR ARALASH MASALALAR

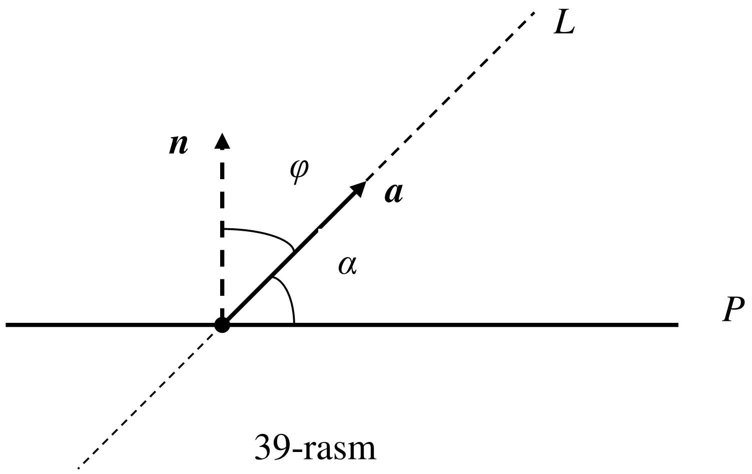
Bu paragrafda fazodagi to‘g‘ri chiziq va tekislik bilan bog‘liq ayrim masalalar qaraladi. Bu masalalarda ham to‘g‘ri chiziq, ham tekislik qatnashgani uchun ular ***aralash masalalar*** deyiladi.

1-masala: Fazoda berilgan *L* to‘g‘ri chiziq bilan *P* tekislik orasidagi α burchakni toping.

Yechish: Masalani yechish uchun *L* to‘g‘ri chiziqning

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

kanonik va *P* tekislikning A*x*+B*y*+C*z*+D=0 umumiy tenglamasiga murojaat etamiz. Bu tenglamalardan *L* to‘g‘ri chiziqning ***a*=**(*m*,*n*,*p*) yo‘naltiruvchi va *P* tekislikning ***n*=**(A,B,C) normal vektorlarini aniqlaymiz. Bu vektorlar orasidagi burchakni φ deb olsak, unda quyidagi 39-rasmdan izlanayotgan burchak $\alpha=90^0-\varphi$ bo‘lishini ko‘ramiz:



39-rasm

Bu holda $\sin\alpha=\sin(90^0-\varphi)=\cos\varphi$ va, ikki vektor orasidagi burchak formulasiga asosan (III bob,§2, (5)) , ushbu natijani olamiz:

$$\sin\alpha=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\quad. \qquad (1)$$

Masalan, kanonik tenglamasi

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{\sqrt{2}}=\frac{z-1}{1}$$

bo‘lgan *L* to‘g‘ri chiziq va umumiy tenglamasi

$$x+y\sqrt{2}-z+1=0$$

bo‘lgan *P* tekislik orasidagi burchak

$$\sin\alpha=\frac{1\cdot1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+1\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+(-1)^2}}=\frac{2}{2\cdot2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=\arcsin\frac{1}{2}=30^0.$$

2-masala: Fazoda berilgan L to‘g‘ri chiziq bilan P tekislikning perpendikularlik va parallellik shartini toping.

Yechish: Berilgan L to‘g‘ri chiziqning kanonik va P tekislikning umumiy tenglamalaridan ularning ***a***=(m,n,p) yo‘naltiruvchi va ***n***=(A,B,C) normal vektorlarini aniqlaymiz.

I. Berilgan L to‘g‘ri chiziq va P tekislik o‘zaro parallel bo‘lsin. U holda L to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori ***a***=(m,n,p) va P tekislik normali ***n***=(A,B,C) o‘zaro perpendikular (ortogonal) bo‘ladilar. Bundan, ikki vektorning ortogonallik shartiga asosan (III bob,§2,(6) formula),

$$\mathrm{A}m + \mathrm{B}n + \mathrm{C}p = 0 \qquad (2)$$

tenglikka kelamiz. (2) L to‘g‘ri chiziq va P tekislikning parallellik shartini ifodalaydi. Bu natijaga (1) formulada α=0 deb ham erishish mumkin.

II. Endi berilgan L to‘g‘ri chiziq va P tekislik o‘zaro perpendikular bo‘lsin.Bu holda ***a***=(m,n,p) va ***n***=(A,B,C) vektorlar kollinear (parallel) bo‘ladi. Unda, ikki vektorning kollinearlik shartiga asosan (III bob,§3,(6) formula)

$$\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C} \qquad (3)$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. (3) L to‘g‘ri chiziq va P tekislikning perpendikularlik shartini ifodalaydi.

1-misol: L to‘g‘ri chiziqning

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{n} = \frac{z+3}{-2}$$

kanonik tenglamasidagi n parametr qanday qiymat qabul etganda u umumiy tenglamasi $x-3y+6z+7=0$ bo‘lgan tekislikka parallel bo‘ladi ?

Yechish: To‘g‘ri chiziq va tekislikning (2) parallellik shartidan foydalanamiz:

$$3\cdot 1+(-3)n+(-2)\cdot 6=0 \Rightarrow n=-3.$$

2-misol: L to‘g‘ri chiziqning

$$\frac{x-2}{m} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$$

kanonik tenglamasidagi n va P tekislikning $3x-2y+\mathrm{C}z+1=0$ umumiy tenglamasidagi C parametrlarning qanday qiymatida ular o‘zaro perpendikular bo‘ladilar ?

Yechish: To‘g‘ri chiziq va tekislikning (3) perpendikularlik shartidan foydalanamiz:

$$\frac{m}{3} = \frac{4}{-2} = \frac{-3}{C} \Rightarrow m = -6, \quad C = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

3-masala: Berilgan L to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi barcha tekisliklar tenglamasini toping.

Yechish: Berilgan L to‘g‘ri chiziqning

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

umumiy tenglamasini olamiz. Bu tenglama bo‘yicha

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (4)$$

tenglamalarni hosil etamiz. Bunda λ va μ ixtiyoriy haqiqiy sonlar bo‘lib, ularning har bir qiymatida (4) biror tekislikni ifodalaydi. Bu tenglamalarni *L* to‘g‘ri chiziqqa tegishli har bir M(*x*,*y*,z*)* nuqta qanoatlantiradi. Demak, (4) *L* to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi tekisliklarni ifodalaydi. Bunda λ=1 va μ=0 yoki λ=0 va μ=1 deb olsak, *L* to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasidagi mos ravishda birinchi yoki ikkinchi tekislik tenglamasi kelib chiqadi.

1-TA‘RIF: (4) berilgan *L* to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi ***tekisliklar dastasi tenglamasi*** deb ataladi.

4-masala: Berilgan *L* to‘g‘ri chiziqni *P* tekislik bilan kesishish nuqtasini toping.

Yechish: Berilgan *L* to‘g‘ri chiziqning

$$x = x_0 + mt,\ \ y = y_0 + nt,\ \ z = z_0 + pt$$

parametrik , *P* tekislikning esa A*x*+B*y*+C*z*+D=0 umumiy tenglamasini olamiz. Ularning kesishish nuqtasi ham to‘g‘ri chiziq, ham tekislik tenglamalarini qanoatlantiradi va shu sababli quyidagi sistemani yozishimiz mumkin:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

Bu sistemadan ushbu tenglamani hosil etamiz:

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0 \Rightarrow$$

$$(Am + Bn + Cp)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0. \qquad (5)$$

Bu yerda uch hol bo‘lishi mumkin.

1) A*m*+B*n*+C*p*≠0. Bu holda (5) tenglama yagona

$$t_0 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$$

ildizga ega bo‘ladi. Uning qiymatini *L* to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasiga qo‘yib, yagona kesishish nuqtasining koordinatalarini topamiz.

2) A*m*+B*n*+C*p*=0 va Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. Bu holda (5) tenglama cheksiz ko‘p ildizga ega bo‘lib, *L* to‘g‘ri chiziq tekislikda yotadi va uning har bir nuqtasi *P* bilan kesishish nuqtasi bo‘ladi.

3) A*m*+B*n*+C*p*=0 va Ax_0+By_0+Cz_0+D≠0. Bu holda (5) tenglama yechimga ega emas, ya’ni *L* to‘g‘ri chiziq *P* tekislikka parallel bo‘lib, ular kesishishmaydi.

Misol sifatida $x=1+t$, $y=-1-2t$, $z=6t$ to‘g‘ri chiziq bilan $2x+3y+z-1=0$ tekislikning kesishish nuqtasini topamiz. Bu holda (5) tenglamadan quyidagi natijani olamiz:

$$[2\cdot1+3\cdot(-2)+1\cdot6]\cdot t+[2\cdot1+3\cdot(-1)+1\cdot0-1]=0 \Rightarrow t_0=1 \Rightarrow$$

$$x_0=1+1=2,\ \ y_0=-1-2=-3,\ \ z_0=6.$$

Demak, berilgan to‘g‘ri chiziq va tekislik $M_0(2, -3,6)$ nuqtada kesishadi.

5-masala: Berilgan $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi va L_1 hamda L_2 to‘g‘ri chiziqlarga parallel joylashgan *P* tekislik tenglamasini toping.

Yechish: Berilgan $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi barcha tekisliklar tenglamasi $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ ko‘rinishda bo‘lishi bizga ma’lum. Bu yerdan izlanayotgan P tekislik tenglamasini topish uchun $\boldsymbol{n}$=(A,B,C) normal vektorni aniqlash kifoya. Buning uchun berilgan L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlarning kanonik tenglamalarini olamiz:

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}; \quad L_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}. \qquad (6)$$

Bu tenglamalardan L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlarning $\boldsymbol{a}_1=(m_1, n_1, p_1)$ va $\boldsymbol{a}_2=(m_2, n_2, p_2)$ yo‘naltiruvchi vektorlarini topamiz. Masala shartiga asosan bu vektorlar izlanayotgan P tekislikka parallel bo‘ladi. Unda ularning vektorial ko‘paytmasi $\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2$ bu tekislikka perpendikular joylashgan bo‘ladi va shu sababli normal vektor $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2$ deb olish mumkin. Bu holda $\boldsymbol{r}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ vektorni kiritib,skalyar va aralash ko‘paytma ta’riflari hamda ularning koordinatalardagi ifodasini eslab, masala javobiga quyidagicha erishamiz:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Rightarrow \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}=0 \Rightarrow \boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{r}=0 \Rightarrow \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{r}=0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (7)$$

XULOSA

Fazodagi to‘g‘ri chiziq va tekislik tenglamalaridan foydalanib, ular orasidagi munosabatlarga doir turli masalalarni analitik usulda yechish mumkin. Bularga misol sifatida to‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchakni hisoblash, ularning parallellik va perpendikularlik shartlarini aniqlash, kesishish nuqtasini topish, berilgan to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi tekisliklar dastasi tenglamasini keltirib chiqarish kabi masalalarni ko‘rsatib bo‘ladi.

Tayanch iboralar

* To‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak * To‘g‘ri chiziq va tekislikning parallellik sharti * To‘g‘ri chiziq va tekislikning perpendikularlik sharti
* Tekisliklar dastasi * To‘g‘ri chiziq va tekislikning kesishish nuqtasi

Takrorlash uchun savollar

1. Qanday mazmunli masalalar aralash deb ataladi?
2. To‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak qanday topiladi?
3. To‘g‘ri chiziq va tekislikning parallellik sharti qanday ifodalanadi ?
4. To‘g‘ri chiziq va tekislikning perpendikularlik sharti nimadan iborat?
5. Tekisliklar dastasi deb nimaga aytiladi ?
6. Berilgan to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi tekisliklar dastasi tenglamasini yozing.
7. To‘g‘ri chiziq va tekislikning kesishish nuqtasi qanday topiladi?
8. Qaysi shartda to‘g‘ri chiziq va tekislik bitta nuqtada kesishadi?
9. Qaysi shartda to‘g‘ri chiziq va tekislik kesishmaydi?
10. Berilgan nuqtadan o‘tuvchi va ko‘rsatilgan ikkita to‘g‘ri chiziqqa parallel

tekislik tenglamasi qanday topiladi ?

Testlardan namunalar

1. Kanonik tenglamasi $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+3}{\sqrt{2}}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziq va umumiy tenglamasi $x+y+z\sqrt{2}-4=0$ bo‘lgan tekislik orasidagi φ burchakni toping.

A) 0^0; B) 30^0; C) 45^0; D) 60^0; E) 90^0.

2. Kanonik tenglamasi $\frac{x-2}{m}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziq va umumiy tenglamasi 3*x*−2*y*+C*z*+1=0 bo‘lgan tekislik *m* va C parametrlarning qanday qiymatida o‘zaro perpendikular bo‘ladi ?

A) *m*=3, C=−1; B) *m*=−3, C=1 ; C) *m*=3, C=1 ;
D) *m*=−6, C=1,5 ; E) *m*=2,5, C=4.

3. Kanonik tenglamasi $\frac{x-3}{2}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+2}{-2}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziq va umumiy tenglamasi A*x*+B*y*+3*z*−5=0 bo‘lgan tekislik A va B parametrlarning qanday qiymatida o‘zaro perpendikular bo‘ladi ?

A) A=3, B=−1; B) A=−3, B=4,5 ; C) A=2,5, B=1,5 ;
D) A=−6, B=1,5 ; E) A=2,5, B=4.

4. Kanonik tenglamasi $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziq va umumiy tenglamasi A*x*+B*y*+C*z*+D=0 bo‘lgan tekislikning parallellik shartini ko‘rsating.

A) $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$; B) $A^2+B^2+C^2=m^2+n^2+p^2$; C) A*m*+B*n*+C*p*=0 ;
D) A=*m*, B=*n*, C=*p* ; E) A*m*+B*n*+C*p*≠0.

5. Kanonik tenglamasi $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{n}=\frac{z+3}{-2}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziq va umumiy tenglamasi *x*−3*y*+6*z*+2=0 bo‘lgan tekislik *n* parametrning qanday qiymatida o‘zaro parallel bo‘ladi ?

A) 0; B) 1 ; C) ±1 ; D) −3 ; E) 2.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. ABCD tetraedrning uchlari

A(*n*, *n*+2, *n*–4), B(*n*+2, *n*–1, *n*+1), C(2*n*, *n*, 2*n*–1), D(2*n*+3, 2*n*, *n*)

nuqtalarda joylashgan. Bu tetraedr uchun quyidagilarni aniqlang:

a) ABC tomoni bilan BD qirrasi orasidagi burchakni;

b) D uchidan o‘tkazilgan balandlik tenglamasini;
c) D uchidan o‘tkazilgan balandlik asosining koordinatalarini.

VI BOB. MATEMATIK ANALIZGA KIRISH

Matematik analiz haqli ravishda matematik
fanlar ichida birinchisi bo‘lib hisoblanadi.
Appel P.E.

§1. SONLI TO‘PLAMLAR. SONNING ABSOLUT QIYMATI

- ***Sonli to‘plamlar va ularning turlari.***
- ***Sonning absolut qiymati va uning xossalari.***

1.1. Sonli to‘plamlar va ularning turlari. I bobda biz to‘plam tushunchasi haqida so‘z yuritgan edik. Unda asosan to‘plam elementlari ixtiyoriy ko‘rinishda bo‘lgan umumiy hol qaralgan edi. Bizga kelgusida to‘plamlarning xususiy, ammo juda muhim bir holi kerak bo‘ladi.

1-TA‘RIF: Elementlari sonlardan iborat to‘plam ***sonli to‘plam*** deb ataladi. Eng asosiy sonli to‘plamlarni eslatib o‘tamiz.

❖ ***Natural sonlar to‘plami.*** Bu to‘plam $1,2,3, \cdots ,n, \cdots$ natural sonlardan iborat bo‘lib, N kabi belgilanadi.

❖ ***Butun sonlar to‘plami.*** Bu to‘plam $\cdots , -3,-2, -1,0,1,2,3, \cdots$ butun sonlardan tashkil topgan va Z deb belgilanadi.

❖ ***Ratsional sonlar to‘plami.*** Bu to‘plam m/n ($m\in Z$, $n\in N$) ko‘rinishdagi ratsional sonlardan tuzilgan va Q kabi belgilanadi.

❖ ***Irratsional sonlar to‘plami.*** Bu to‘plam m/n ($m\in Z$, $n\in N$) ko‘rinishda ifodalab bo‘lmaydigan sonlarni o‘z ichiga oladi va I kabi belgilanadi. Bunday sonlar mavjud va I bo‘sh to‘plam emas ekanligini ko‘rsatamiz. Masalan, $\sqrt{2}$ irratsional son ekanligini isbotlaymiz. Teskarisini faraz qilamiz, ya’ni $\sqrt{2}$ ratsional son deb olamiz. Bu holda uni $\sqrt{2}=m/n$ ko‘rinishda ifodalab bo‘ladi. Bunda m butun va n natural sonlarni o‘zaro tub, ya’ni umumiy ko‘paytuvchilarga ega emas deb olish mumkin.Agar bunday ko‘paytuvchilar mavjud bo‘lsa, ularni o‘zaro qisqartirish orqali ko‘rilayotgan holga keltirish mumkin. Yuqoridagi tenglikni kvadratga oshirib, $m^2 =2n^2$ tenglikni hosil etamiz. Undan m juft son ekanligi va shu sababli uni $m=2k$ ko‘rinishda yozish mumkinligi kelib chiqadi. Bu yerdan esa

$$m^2 =2n^2 \Rightarrow (2k)^2=2n^2 \Rightarrow n^2=2k^2 \Rightarrow n=2r,$$

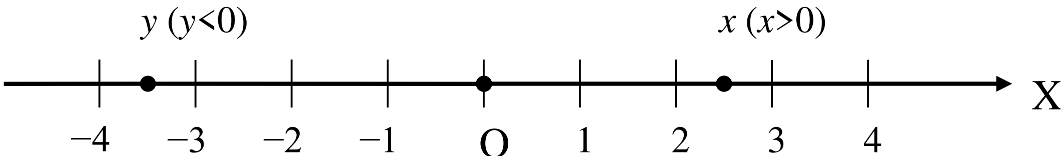
ya’ni n ham juft son ekanligi kelib chiqadi. U holda m va n sonlari 2 sonidan iborat umumiy ko‘paytuvchiga ega ekanligi kelib chiqadi. Bu esa biz qilgan farazga ziddir. Demak, bizning faraz noto‘g‘ri va $\sqrt{2}$ ratsional son emas.

❖ ***Haqiqiy sonlar to‘plami.*** Bu to‘plam ratsional va irratsional sonlardan tashkil topgan bo‘lib, R kabi belgilanadi. Bundan R ratsional va irratsional sonlar to‘plamlarining birlashmasidan iborat, ya’ni $R=Q \cup I$ ekanligi kelib chiqadi.

Bu sonli to‘plamlar kengayib borish tartibida berildi, ya’ni bu yerda $N\subset Z\subset Q\subset R$, $I\subset R$ munosabatlar o‘rinli bo‘ladi. Kelgusida son deyilganda haqiqiy sonlarni ko‘zda tutamiz.

Haqiqiy sonlar to‘plamini geometrik ko‘rinishda ifodalash uchun ***haqiqiy sonlar o‘qi*** yoki qisqacha ***sonlar o‘qi*** tushunchasi kiritiladi. Buning uchun biror L to‘g‘ri chiziq tanlanib, quyidagi ishlar bajariladi:

- ✓ Bu to‘g‘ri chiziqda musbat yo‘nalish tanlanadi va u strelka orqali ifodalanadi. Odatda chapdan o‘ng tomonga bo‘lgan yo‘nalish musbat deb qabul etiladi.
- ✓ Bu to‘g‘ri chiziqda ixtiyoriy bir nuqta tanlanib, u ***sonlar o‘qining boshi*** deb ataladi va O kabi belgilanadi;
- ✓ Bu to‘g‘ri chiziqda bir birlikni ifodalovchi masshtab kiritiladi.
- ✓ Har bir musbat x soniga O nuqtadan o‘ng tomonda x masofada joylashgan nuqtani, har bir manfiy y soniga O nuqtadan chap tomonda $(-y)$ masofada joylashgan nuqtani, 0 soniga esa O sonlar o‘qi boshini mos qo‘yamiz (40-rasmga qarang).



40-rasm

Bu tarzda hosil qilingan sonlar o‘qida har bir x soniga faqat bitta nuqta (uni ham x deb belgilaymiz) mos keladi va aksincha, undagi har bir nuqtaga faqat bitta son mos keladi. Natijada, sonlar o‘qi yordamida, algebraik tushuncha bo‘lgan son va geometrik tushuncha bo‘lgan nuqta orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatildi. Shu sababli kerak bo‘lgan paytlarda “x soni” o‘rniga “x nuqta” deb aytiladi.

Chekli a va b $(a<b)$ sonlari uchun $a<x<b$ qo‘sh tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x sonlar to‘plamini ***interval yoki oraliq*** deb ataymiz va uni (a,b) kabi belgilaymiz. $a\leq x\leq b$ qo‘sh tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x sonlar to‘plami ***segment yoki kesma*** deyiladi va $[a,b]$ kabi belgilanadi. $a<x\leq b$ yoki $a\leq x<b$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x sonlar to‘plami ***yarim interval yoki yarim oraliqlar*** deb ataladi va mos ravishda $(a,b]$ yoki $[a,b)$ ko‘rinishda ifodalanadi. Bunda a va b sonlari (a,b) oraliq yoki $[a,b]$ kesma yoki $(a,b]$, $[a,b)$ yarim oraliqlarning mos ravishda ***chap va o‘ng chegaralari*** (umuman olganda- ***chegaralari***), $d=b-a$ soni esa ularning ***uzunligi*** deyiladi. Masalan, $(-2,6)$ oraliq, $[-2,6]$ kesma, $(-2,6]$ va $[-2,6)$ yarim oraliq chegaralari $a=-2$ va $b=6$, uzunligi esa $d=6-(-2)=8$ bo‘ladi.

Endi a va b chegaralardan birortasi cheksiz (∞ yoki $-\infty$) bo‘lgan hollarni qaraymiz. Bunda $(-\infty,b)$ yoki (a,∞), $(-\infty,b]$ yoki $[a,\infty)$ ***yarim cheksiz oraliqlar***, $(-\infty,\infty)$ esa ***cheksiz oraliq*** deyiladi. Bu sonli to‘plamlarning uzunliklari cheksiz bo‘lishi tushunarlidir.

Chegaralari o‘ziga tegishli bo‘lmagan (a,b) oraliq ***ochiq***, chegaralaridan faqat bittasi o‘ziga tegishli bo‘lgan $[a,b)$, $(a,b]$ yarim oraliqlar ***yarim ochiq***, ikkala chegarasi ham o‘ziga tegishli $[a,b]$ kesma ***yopiq to‘plam*** deyiladi.

2-TA‘RIF: Qaralayotgan c nuqtani o‘z ichiga olgan har qanday (a,b) oraliq $(a<c<b)$ oraliq c ***nuqtaning atrofi*** deb ataladi. Xususan, har qanday $\varepsilon>0$ soni uchun $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ oraliq c ***nuqtaning ε atrofi*** deyiladi.

Masalan, $(1.9, 2.1)$ oraliq $c=2$ nuqtaning $\varepsilon=0.1$ atrofi bo‘ladi.

<u>3-TA'RIF:</u> Berilgan X sonli to'plam uchun shunday M (yoki m) soni mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy $x \in X$ uchun $x \le M$ (yoki $x \ge m$) shart bajarilsa, X ***yuqoridan (quyidan) chegaralangan to'plam*** deyiladi. Agar X ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan ($m \le x \le M$) bo'lsa, u ***chegaralangan to'plam*** deb ataladi.

Masalan, $(-\infty, 2]$ yuqoridan chegaralangan ($x \le 2$), $(-1,\infty)$ quyidan chegaralangan ($x>-1$), $[-3,5)$ chegaralangan ($x \ge -3$, $x<5$) to'plam bo'ladi.

<u>4-TA'RIF:</u> Berilgan X sonli to'plam uchun har qanday $M>0$ soni uchun shunday $x_0 \in X$ element mavjud bo'lsaki, uning uchun $x_0>M$ yoki $-x_0>M$ shart bajarilsa, X ***chegaralanmagan to'plam*** deyiladi.

Masalan, $(-\infty,b)$, (a, ∞), $(-\infty,b]$, $[a, \infty)$ va $(-\infty, \infty)$ chegaralanmagan sonli to'plamlardir.

1.2. Sonning absolut qiymati va uning xossalari. Dastlab bizga maktabdan tanish bo'lgan sonning absolut qiymati ta'rifini eslatib o'tamiz.

<u>5-TA'RIF:</u> Har qanday $x \in R$ sonining ***absolut qiymati*** (***yoki moduli***) deb shu sondan sonlar o'qining O boshigacha bo'lgan masofaga aytiladi.

Berilgan $x \in R$ sonining absolut qiymati $|x|$ kabi belgilanadi va, ta'rifga asosan,

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

formula bilan aniqlanadi. Masalan, $|3|=3$, $|-4|=4$, $|0|=0$ bo'ladi.

<u>TEOREMA:</u> Sonning absolut qiymati quyidagi xossalarga ega:

1. Har qanday $x \in R$ soni uchun $|x| \ge 0$;
2. Har qanday $x \in R$ soni uchun $|x|=|-x|$;
3. $|x|=0$ faqat va faqat $x=0$ bo'lsa;
4. Har qanday $x \in R$ soni uchun $|x| \ge x$ va $x \ge -|x|$;
5. Har qanday $x,y \in R$ sonlari uchun $|xy|=|x|\cdot|y|$;
6. Har qanday $x \in R$ va ,$0 \ne y \in R$ sonlari uchun $|x/y|=|x|/|y|$;
7. Har qanday $x,y \in R$ sonlari uchun $|x+y| \le |x|+|y|$;
8. Har qanday $x,y \in R$ sonlari uchun $|x-y| \ge |x|-|y|$.

Isbot: Dastlabki ikkita xossa bevosita absolut qiymat ta'rifidan kelib chiqadi.

3. Agar $x=0$ bo'lsa unda, ta'rifga asosan, $|x|=0$ bo'ladi. Endi, aksincha, $|x|=0$ bo'lsin. Bu holda 2-xossadan $x=-x \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$ ekanligi kelib chiqadi.

4. (1) formulaga asosan $x \ge 0$ holda $|x|=x$ va $x<0$ holda $|x|=-x>x$ bo'ladi. Bu yerdan umumiy holda $|x| \ge x$ ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shunday tarzda $x \ge -|x|$ tengsizlik o'rinli ekanligi isbotlanadi.

5. Agar $x \ge 0$, $y \ge 0 \Rightarrow xy \ge 0 \Rightarrow$ $|xy|= xy =|x|\cdot|y|$;
$x<0$, $y<0 \Rightarrow xy>0 \Rightarrow$ [(1) formulaga asosan] $|xy|= xy = (-x)(-y)= |x|\cdot|y|$;
$x<0$, $y>0 \Rightarrow xy<0 \Rightarrow$ [(1) formulaga asosan] $|xy|=- xy = (-x)\, y= |x|\cdot|y|$;
$x<0$, $y>0 \Rightarrow xy<0 \Rightarrow$ $|xy|=- xy = (-x)\, y= |x|\cdot|y|$.
Demak, barcha hollarda $|xy|=|x|\cdot|y|$ tenglik o'rinli bo'ladi.

6. Xuddi 5-holdagidek isbotlanadi.

7. Yuqorida ko'rilgan 4-xossaga asosan $-|x| \le x \le |x|$ va $-|y| \le y \le |y|$ qo'sh tengsizliklarni yozish mumkin. Bu tengsizliklarni hadma-had qo'shib, ushbu natijani olamiz:

$$-(|x|+|y|)\leq x+y\leq |x|+|y|.$$

Bu yerda ikki holni koʻramiz. Agar $x+y\geq 0$ boʻlsa, unda $x+y=|x+y|$ boʻlishidan va oldingi qoʻsh tengsizlikning oʻng tomonidan foydalanib, talab etilgan

$$x+y\leq |x|+|y| \Rightarrow |x+y|\leq |x|+|y|$$

natijani hosil qilamiz. Agar $x+y<0$ boʻlsa, unda $-(x+y)=|x+y|$ boʻlishidan va oldingi qoʻsh tengsizlikning chap tomonidan foydalanib, isbotlanishi kerak boʻlgan tengsizlikka quyidagicha erishamiz:

$$-(|x|+|y|)\leq x+y \Rightarrow |x|+|y|\geq -(x+y) \Rightarrow |x|+|y|\geq |x+y| .$$

8. 7-xossadan foydalanib, quyidagi natijalarni olamiz:

$$x=(x-y)+y \Rightarrow |x|=|(x-y)+y|\leq |x-y|+|y| \Rightarrow |x-y|\geq |x|-|y|.$$

Absolut qiymatning bu xossalaridan kelgusida keng foydalaniladi.

XULOSA

Matematik analiz fanida asosan elementlari sonlardan iborat toʻplamlar qaraladi. Bularga natural, butun, ratsional, haqiqiy sonlar toʻplamlarini koʻrsatish mumkin. Algebraik tushuncha boʻlgan haqiqiy son va geometrik tushuncha boʻlgan nuqta orasida oʻzaro bir qiymatli moslik sonlar oʻqi yordamida oʻrnatiladi. Sonlar oʻqida kesma ,chekli va cheksiz oraliq, yarim oraliq kabi sonli toʻplamlar qaraladi. Bu sonli toʻplamlar ochiq yoki yopiq, chegaralangan yoki chegaralanmagan boʻlishi mumkin.

Sonning absolut qiymati (moduli) tushunchasi va uning xossalaridan kelgusida keng foydalaniladi.

Tayanch iboralar

* Sonli toʻplamlar * Natural sonlar toʻplami * Butun sonlar toʻplami * Ratsional sonlar toʻplami * Irratsional sonlar toʻplami * Haqiqiy sonlar toʻplami * Sonlar oʻqi * Oraliq * Kesma * Yarim oraliq * Yarim cheksiz oraliq * Cheksiz oraliq * Ochiq toʻplam * Yarim ochiq toʻplam * Yopiq toʻplam * Nuqta atrofi * Yuqoridan chegaralangan toʻplam * Quyidan chegaralangan toʻplam * Chegaralangan toʻplam * Chegaralanmagan toʻplam * Sonning absolut qiymati

Takrorlash uchun savollar

1. Qanday toʻplamlar sonli deb ataladi?
2. Asosiy sonli toʻplamlarni koʻrsatib oʻting.
3. Qanday sonli toʻplam oraliq deb ataladi?
4. Kesma deb qanday sonli toʻplamga aytiladi?
5. Yarim oraliq deganda nima tushuniladi?
6. Qaysi shartda oraliq yarim cheksiz yoki cheksiz deyiladi?
7. Qachon sonli toʻplam ochiq yoki yopiq deyiladi?
8. Yarim ochiq toʻplam deganda nima tushuniladi?
9. Nuqta atrofi deb nimaga aytiladi?
10. Qachon sonli toʻplam yuqoridan (quyidan) chegaralangan deyiladi?
11. Qanday sonli toʻplam chegaralangan deyiladi?
12. Sonning absolut qiymati deb nimaga aytiladi?

13.Sonning absolut qiymati qanday xossalarga ega?

Testlardan namunalar

1. Ta’rifni to‘ldiring: To‘plam sonli deb ataladi, agar uning elementlari … sonlardan iborat bo‘lsa.
 A) butun ; B) natural ; C) haqiqiy ; D) ratsional ; E) irratsional .

2. Natural, butun, ratsional va haqiqiy sonlar to‘plamlari N, Z, Q va R orasidagi munosabat qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan ?
 A) $N \subset Z \subset Q \subset R$; B) $Z \subset N \subset Q \subset R$; C) $R \subset Q \subset Z \subset N$;
 D) $Q \subset Z \subset N \subset R$; E) $N \subset Z \subset R \subset Q$.

3. Quyidagilardan qaysi biri natural sonlar to‘plamiga tegishli?
 A) cos0 ; B) cos(π/4) ; C) cos(π/2) ; D) cosπ ; E) cos(3π/4).

4. Quyidagi ildizlardan qaysi biri irratsional sonlar to‘plamiga kiradi?
 A) $\sqrt{25}$; B) $\sqrt{2.5}$; C) $\sqrt{0.25}$; D) $\sqrt{1/25}$;
 E) bu ildizlarning birortasi ham irratsional sonlar to‘plamiga kirmaydi.

5. Quyidagi ildizlardan qaysi biri ratsional sonlar to‘plamiga kiradi?
 A) $\sqrt{16.9}$; B) $\sqrt{1.69}$; C) $\sqrt{0.169}$; D) $\sqrt{1690}$;
 E) bu ildizlarning birortasi ham ratsional sonlar to‘plamiga kirmaydi.

6. Sonlar o‘qida quyidagi tushunchalardan qaysi biri qatnashmaydi?
 A) sonlar o‘qining boshi ; B) sonlar o‘qining burilish nuqtasi ;
 C) sonlar o‘qining masshtab birligi ; D) sonlar o‘qining musbat yo‘nalishi;
 E) keltirilgan barcha tushunchalar qatnashadi.

7. Quyidagi sonli to‘plamlardan qaysi biri oraliqni ifodalaydi ?
 A) (a,b) ; B) $[a,b)$; C) $(a,b]$; D) $[a,b]$; E) $\{a,b\}$.

8. Absolut qiymat xossasi qayerda xato ko‘rsatilgan ?
 A) $|x|=|-x|$; B) $|xy|=|x||y|$; C) $|x/y|=|x|/|y|$ $(y\neq 0)$;
 D) $|x+y|=|x|+|y|$; E) Barcha xossalar to‘g‘ri ko‘rsatilgan.

9. Absolut qiymat uchun quyidagi tengsizliklardan qaysi biri o‘rinli emas ?
 A) $|x|\geq 0$; B) $|x-y|\geq|x|-|y|$; C) $|x|\geq x$; D) $|x+y|\leq|x|+|y|$;
 E) Barcha tengsizliklar o‘rinli .

§2. SONLI KETMA-KETLIK VA UNUNG LIMITI

- ***Sonli ketma-ketlik va uning limiti.***

- ***Sonli ketma-ketlik limitini hisoblash qoidalari.***
- ***Sonli ketma-ketlikka doir bir iqtisodiy masala.***

2.1. Sonli ketma-ketlik va uning limiti. Dastlab sonli ketma-ketlik tushunchasini kiritamiz.

1-TA'RIF: Agar har bir $n \in N$ natural songa biror qonun-qoida asosida ma'lum bir $a_n \in R$ haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsa, unda $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ ***sonli ketma-ketlik*** deb ataladi. Bunda a_i ($i \in N$) sonlari ***ketma-ketlikning hadlari*** , a_n esa ***umumiy hadi*** deyiladi.

Sonli ketma-ketliklarga bir nechta misol keltiramiz.

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots, \quad a_n = \frac{1}{n}$;

2) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \cdots, \quad a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$;

3) $-1, 1, -1, 1, \cdots, (-1)^n, \cdots, \quad a_n=(-1)^n$;

4) $3, 3, 3, 3, \cdots, 3, \cdots, \quad a_n=3$;

5) $-1, -4, -9, -16, \cdots, -n^2, \cdots, \quad a_n=-n^2$;

6) $2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots, \quad a_n=2^n$;

7) $1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, \cdots, n^{(-1)^n}, \cdots, \quad a_n = n^{(-1)^n}$;

8) $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \cdots, (-1)^n \cdot n, \cdots, \quad a_n= (-1)^n \cdot n$.

Kelgusida $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ sonli ketma-ketlikni qisqacha ketma-ketlik deb yuritamiz va $\{a_n\}$ kabi belgilaymiz.

2-TA'RIF: Agar shunday M (yoki m) soni mavjud bo'lsaki, $\{a_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlari uchun $a_n \leq M$ (yoki $a_n \geq m$)shart bajarilsa, unda bu ketma-ketlik ***yuqoridan* (*quyidan*) *chegaralangan*** deb ataladi. Ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik ***chegaralangan*** deyiladi.

Masalan, yuqorida keltirilgan 5) ketma-ketlik yuqoridan $M=-1$ soni bilan, 6) va 7) ketma-ketliklar quyidan mos ravishda $m=2$ va $m=0$ soni bilan chegaralangan. 1)―4) ketma-ketliklar esa chegaralangan bo'ladi.

3-TA'RIF: Ixtiyoriy $M>0$ soni uchun $\{a_n\}$ ketma-ketlikning kamida bitta hadi $|a_n|>M$ tengsizlikni qanoatlantirsa, bu ketma-ketlik ***chegaralanmagan*** deyiladi.

Masalan, 5)―8) ketma-ketliklar chegaralanmagan bo'ladi. Bunda 8) quyidan ham, yuqoridan ham chegaralanmagan ketma-ketlik bo'ladi.

Endi oliy matematikaning eng muhim tushunchalaridan biri bo'lgan limit ta'rifini keltiramiz.

4-TA'RIF: Agar $\{a_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lib, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni uchun unga bog'liq shunday N_ε son topilsaki, $n>N_\varepsilon$ shartni qanoatlantiruvchi barcha natural sonlar va biror chekli A haqiqiy son uchun $|a_n - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, bu A soni $\{a_n\}$ ketma-ketlikning ***chekli limiti*** deyiladi.

A soni $\{a_n\}$ ketma-ketlikning chekli limiti ekanligi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \text{yoki} \quad \lim a_n=A \quad \text{yoki} \quad a_n \to A$$

kabi yoziladi. Bu yozuv "$\{a_n\}$ ketma-ketlik A soniga intiladi yoki yaqinlashadi" deb o'qiladi.

Masalan, 1) ketma-ketlik limiti A=0 ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun ixtiyoriy ε>0 sonini olib, limit ta'rifidagi $N_ε$ sonini topishga harakat etamiz:

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} = N_\varepsilon .$$

Demak, 1) ketma-ketlikda ixtiyoriy ε>0 soni uchun $N_ε$=1/ε deb olsak, unda barcha $n>N_ε$ uchun $|a_n–0|=|(1/n)–0|<ε$ bo'ladi va, limit ta'rifga asosan, lim $(1/n)=0$ ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shunday tarzda 2) ketma-ketlik limiti ham 0 bo'lishini ko'rsatish mumkin.

Endi yana $\{a_n\}$ ketma-ketlik limiti ta'rifiga murojaat etamiz. Unda $a_n→A$ bo'lsa, tartib raqami $n>N_ε$ bo'lgan barcha a_n hadlar uchun

$$| a_n –A|< ε \Rightarrow –ε< a_n –A < ε \Rightarrow A–ε< a_n < A+ε \Rightarrow a_n \in(A–ε, A+ε)$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, $\{a_n\}$ ketma-ketlik chekli A limitga ega bo'lsa, unda ixtiyoriy ε>0 soni uchun uning tartib raqami $n>N_ε$ bo'lgan barcha a_n hadlari A nuqtaning ε-atrofiga tegishli va undan tashqarida faqat chekli sondagi hadlar joylashgan bo'ladi. Limit ta'rifining bu ifodasidan foydalanib 3) ketma-ketlik limiti mavjud emasligini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilamiz va 3) ketma-ketlik limiti biror A sonidan iborat deb olamiz. Bu limit nuqtaning (A–0.5, A+0.5) atrofini qaraymiz. Unda bu atrofdan tashqarida 3) ketma-ketlikning chekli sondagi hadlari joylashgan bo'lishi kerak. Ammo A limit nuqtaning bu atrofiga 3) ketma-ketlikning ham 1, ham –1 hadlari bir paytda tegishli bo'la olmaydi. Bunga sabab shuki, olingan (A–0.5, A+0.5) atrof uzunligi 1 bo'lib, –1 va 1 hadlar orasidagi masofa esa 2 ga tengdir. Bu holda, masalan, agar $1\in(A–0.5, A+0.5)$ bo'lsa, unda –1 bu atrofdan tashqarida joylashgan bo'ladi. Bundan esa (A–0.5, A+0.5) atrofdan tashqarida 3) ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari joylashganligi kelib chiqadi. Ammo bu xulosa limit ta'rifiga ziddir. Demak farazimiz noto'g'ri va 3) ketma-ketlik limitga ega emas ekan.

<u>5-TA'RIF:</u> Hamma hadlari bir xil a soniga teng bo'lgan ketma-ketlik ***o'zgarmas ketma-ketlik*** deyiladi.

Har qanday $\{a_n=C\}$ o'zgarmas ketma-ketlik uchun lima_n= lim$C$=C tenglik o'rinli bo'lishi bevosita limit ta'rifidan kelib chiqadi. Masalan, yuqoridagi 4) $\{a_n=3\}$ o'zgarmas ketma-ketlikdir va uning uchun lima_n= lim3=3 bo'ladi.

<u>6-TA'RIF:</u> Ixtiyoriy M>0 soni uchun bu songa bog'liq shunday N_M soni topilsaki, $\{a_n\}$ ketma-ketlik tartib raqami $n>N_M$ shartni qanoatlantiruvchi barcha hadlar uchun $|a_n|>M$ tengsizlik bajarilsa, unda bu ketma-ketlik ***cheksiz limitga*** ega deyiladi.

Berilgan $\{a_n\}$ ketma-ketlikning limiti cheksiz ekanligi lima_n=∞ yoki lima_n=±∞ kabi ifodalanadi. Masalan, 5) ketma-ketlik uchun lima_n=–∞ ekanligini ko'rsatamiz. ixtiyoriy M>0 uchun

$$|a_n| > M \Rightarrow \left|-n^2\right| > M \Rightarrow n^2 > M \Rightarrow n > \sqrt{M} = N_M .$$

Demak, 5) ketma-ketlikda ixtiyoriy M>0 soni uchun $N_M = \sqrt{M}$ deb olsak, unda barcha $n>N_M$ uchun $|a_n|=|–n^2|>M$ bo'ladi va, barcha a_n<0 ekanligidan hamda cheksiz limit ta'rifiga asosan , lim $(-n^2)= -\infty$ ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shundek 6) ketma-ketlik uchun $\lim a_n=\lim 2^n=+\infty$ ekanligini ko'rsatish mumkin. 8) sonli ketma-ketlik ham chegaralanmagan, ammo uning cheksiz limiti aniq bir ishoraga ega emas va shu sababli $\lim a_n=\lim(-1)^n n=\infty$ deb yoziladi.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki cheksiz limitga ega har qanday ketma-ketlik albatta chegaralanmagan bo'ladi. Ammo teskari tasdiq har doim ham o'rinli bo'lmaydi. Masalan, yuqorida keltirilgan 7) ketma-ketlik chegaralanmagan, ammo uning limiti mavjud emas.

7-TA'RIF: Agar $\{a_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lsa, u ***yaqinlashuvchi***, aks holda esa ***uzoqlashuvchi ketma-ketlik*** deyiladi.

Masalan, yuqoridagi 1), 2) va 4) ketma-ketliklar yaqinlashuvchi, 3), 5)–8) ketma-ketliklar esa uzoqlashuvchidir.

1-TEOREMA: Agar $\{a_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, uning limiti yagona bo'ladi.

Isbot: Teskarisini faraz qilamiz va bu ketma-ketlik ikkita $\lim a_n=A$, $\lim a_n=B$ $(A\neq B)$ limitga ega deb olamiz. $|A-B|=\varepsilon$ bo'lsin. Unda, limit ta'rifiga asosan, shunday N_1 va N_2 sonlar mavjudki, $n> N_1$ bo'lganda $|a_n-A|<\varepsilon/2$ va $n>N_2$ bo'lganda $|a_n-B|<\varepsilon/2$ tengsizliklar o'rinlidir. Agar $N=\max\{N_1,N_2\}$ deb olsak, unda $n>N$ bo'lganda oldingi tengsizliklarni ikkalasi ham bajariladi. Bu holda

$$\varepsilon =|A-B|=|A- a_n + a_n -B|\leq|A- a_n| +| a_n -B|<(\varepsilon/2)+(\varepsilon/2)=\varepsilon,$$

ya'ni $\varepsilon <\varepsilon$ ziddiyatga kelamiz. Demak farazimiz noto'g'ri va $A=B$, ya'ni $\{a_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik limiti yagona ravishda aniqlanadi.

Biror $\{a_n\}$ ketma-ketlik limitini hisoblash ikki bosqichdan iborat bo'ladi:

1) bu ketma-ketlikni yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlash;
2) agar ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, uning limitini topish.

8-TA'RIF: Agar ixtiyoriy $n=1,2,3,\cdots$ uchun $a_{n+1}>a_n$ $(a_{n+1}<a_n)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, unda $\{a_n\}$ ketma-ketlik ***monoton o'suvchi (kamayuvchi)*** deyiladi.

Masalan, $\{1-1/n\}$ monoton o'suvchi, $\{1+1/n\}$ esa monoton kamayuvchi ketma-ketlik bo'ladi.

2-TEOREMA: Agar $\{a_n\}$ monoton o'suvchi (kamayuvchi) ketma-ketlik va yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, unda $\{a_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik bo'ladi.

Bu teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

2.2. Sonli ketma-ketlik limitini hisoblash qoidalari. Berilgan $\{a_n\}$ ketma-ketlik limiti mavjudligi ma'lum bo'lsa, uni limit ta'rifi bo'yicha aniqlab bo'lmaydi, chunki bunda limit qiymati ma'lum bo'lishi kerak. Shu sababli turli ketma-ketliklarning limitini topish uchun quyidagi teorema orqali ifodalanadigan ***limit hisoblash qoidalaridan*** foydalaniladi.

3-TEOREMA: Agar $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ketma-ketliklarning ikkalasi ham yaqinlashuvchi va $\lim a_n=A$, $\lim b_n=B$ bo'lsa, unda quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi:

$$\lim(a_n \pm b_n)= \lim a_n \pm \lim b_n=A\pm B; \qquad (1)$$

$$\lim(a_n \cdot b_n)= \lim a_n \cdot \lim b_n=A\cdot B; \qquad (2)$$

$$\lim(a_n / b_n)= \lim a_n / \lim b_n=A/B \quad (\lim b_n=B\neq 0). \qquad (3)$$

Isbot: Faqat (1) tenglikni isbotini keltirish bilan chegaralanamiz. Limit ta'rifiga asosan ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni uchun shunday N_a va N_b sonlari topiladiki, $n>N_a$ va $n>N_b$

bo‘lganda mos ravishda $|a_n - A| < \varepsilon/2$ va $|b_n - B| < \varepsilon/2$ tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. Unda $n > N = \max\{N_a\ ,\ N_b\ \}$ bo‘lganda bu tengsizliklarning ikkalasi ham bajariladi va bundan

$$|(a_n \pm b_n) - (A \pm B| = |(a_n - A) \pm (b_n - B)| < |a_n - A| + |b_n - B| < (\varepsilon/2) + (\varepsilon/2) = \varepsilon$$

natija kelib chiqadi. Bu natijadan, limit ta’rifiga asosan, (1) tenglik kelib chiqadi.

Izohlar: 1. (1)─(3) tengliklar yaqinlashuvchi ketma-ketliklar uchun limit olish va arifmetik amallar bajarilish tartibini o‘zgartirish mumkinligini ko‘rsatadi.

2. Agar $\{a_n = C\}$ o‘zgarmas ketma-ketlik bo‘lsa, bu holda $\lim a_n = C$ ekanligidan foydalanib, (2) tenglikni $\lim Cb_n = C\lim b_n = Cb$ ko‘rinishda yozish mumkin. Demak, o‘zgarmas C ko‘paytuvchini limit belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

(1)─(3) limit hisoblash qoidalari va eng sodda

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} = \begin{cases} 0\,, & \alpha < 0; \\ 1\,, & \alpha = 0 \\ \infty\,, & \alpha > 0 \end{cases} \tag{4}$$

limitdan foydalanib, bir qator ketma-ketliklarning limitini hisoblash mumkin. Bunga misol sifatida

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_k n^k + p_{k-1} n^{k-1} + p_{k-2} n^{k-2} + \cdots + p_1 n + p_0}{q_m n^m + q_{m-1} n^{m-1} + q_{m-2} n^{m-2} + \cdots + q_1 n + q_0} \tag{5}$$

limitni hisoblash masalasini ko‘ramiz. (5) limitni to‘g‘ridan-to‘g‘ri (3) qoida yordamida hisoblab bo‘lmaydi, chunki surat va maxrajdagi ketma-ketliklar yaqinlashuvchi emas.Bu limitni hisoblash uchun uch holni alohida-alohida qaraymiz.

1) $k > m$. Limit ostidagi kasrning suratidan n^k va maxrajidan n^m darajani qavsdan tashqariga chiqaramiz. So‘ngra $k - m = \alpha > 0$ ekanligini hisobga olib va (4) limitdan foydalanib, quyidagi natijaga kelamiz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k (p_k + p_{k-1} n^{-1} + p_{k-2} n^{-2} + \cdots + p_1 n^{1-k} + p_0 n^{-k})}{n^m (q_m + q_{m-1} n^{-1} + q_{m-2} n^{-2} + \cdots + q_1 n^{1-m} + q_0 n^{-m})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{p_k}{q_m} n^{k-m} = \frac{p_k}{q_m} \lim_{n\to\infty} n^{\alpha} (\alpha > 0) = \pm\infty\,.$$

2) $k = m = r$. Bu holda (5) limitdagi kasrning surat va maxrajini n^r darajaga bo‘lib va (1)─(3) limit hisoblash qoidalari hamda (4) limitdan foydalanib, ushbu javobni hosil etamiz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_r(n)}{Q_r(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_r n^r + p_{r-1} n^{r-1} + p_{r-2} n^{r-2} + \cdots + p_1 n + p_0}{q_r n^r + q_{r-1} n^{r-1} + q_{r-2} n^{r-2} + \cdots + q_1 n + q_0} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^r (p_r + p_{r-1} n^{-1} + p_{r-2} n^{-2} + \cdots + p_1 n^{1-r} + p_0 n^{-r})}{n^r (q_r + q_{r-1} n^{-1} + q_{r-2} n^{-2} + \cdots + q_1 n^{1-r} + q_0 n^{-r})} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} (p_r + p_{r-1} n^{-1} + p_{r-2} n^{-2} + \cdots + p_1 n^{1-r} + p_0 n^{-r})}{\lim\limits_{n\to\infty} (q_r + q_{r-1} n^{-1} + q_{r-2} n^{-2} + \cdots + q_1 n^{1-r} + q_0 n^{-r})} = \frac{p_r}{q_r}\,.$$

3) $k<m$. Bunda 1) holdagi singari mulohazalar yuritib,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_k(n)}{Q_m(n)} == \lim_{n\to\infty}\frac{p_k}{q_m}n^{k-m} = \frac{p_k}{q_m}\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\,(\alpha<0) = \frac{p_k}{q_m}\cdot 0 = 0$$

javobga erishamiz.

Misol sifatida ushbu limitni hisoblanishini to‘liq ko‘rsatamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{2n+7} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(4-3n^{-1})}{n(2+7n^{-1})} = \lim_{n\to\infty}\frac{4-3n^{-1}}{2+7n^{-1}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(4-3n^{-1})}{\lim\limits_{n\to\infty}(2+7n^{-1})} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}4-\lim\limits_{n\to\infty}3n^{-1}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}7n^{-1}} = \frac{4-3\lim\limits_{n\to\infty}n^{-1}}{2+7\lim\limits_{n\to\infty}n^{-1}} = \frac{4-3\cdot 0}{2+7\cdot 0} = \frac{4}{2} = 2.$$

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, har qanday $\{a_n\}$ ketma-ketlik limitini hisoblashning umumiy usuli mavjud bo‘lmasdan, (5) limit singari ayrim xususiy hollarda uni hisoblash yo‘lini ko‘rsatish mumkin. Bunga misol sifatida quyidagi ko‘rinishdagi limitni hisoblash usuli bilan tanishtiramiz:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b}) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b})(\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b})}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+a})^2-(\sqrt{n+b})^2}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+a)-(n+b)}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}} =$$

$$= (a-b)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}} = (a-b)\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(a/n)}+\sqrt{1+(b/n)}}\right] =$$

$$= (a-b)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+(a/n)}+\sqrt{1+(b/n)}} = (a-b)\cdot 0\cdot\frac{1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} = 0.$$

Sonli ketma-ketliklar limitlarini hisoblashda quyidagi ***ajoyib limit*** deb ataladigan tenglikdan ham foydalanish mumkin:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \tag{6}$$

Bu natija umumiy hadi $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bo‘lgan sonli ketma-ketlik monoton o‘suvchi va yuqoridan 3 soni bilan chegaralanganligini isbotlash (bu ustida to‘xtalib o‘tirmaymiz) va 2-teoremadan foydalanish orqali keltirib chiqariladi . Bu limitning javobi e=2.718281… irratsional son ekanligi va bu son matematikada juda ko‘p qo‘llanilishini ta’kidlab o‘tamiz. Masalan, natural logarifm ln$x$ asosi mana shu e sonidan iboratdir.

2.3. Sonli ketma-ketlikka doir bir iqtisodiy masala. Sonli ketma-ketlik tushunchasiga keluvchi bir iqtisodiy masalani ko‘ramiz. Bank mijozlardan yillik R foiz to‘lash sharti bilan omonatga jamg‘arma qabul etadi. Bunda R bank foizning o‘nli kasrdagi ifodasini bildiradi. Masalan, bankning foiz qo‘yilmasi 15% bo‘lsa, unda R=0.15 deb olinadi.Bank foizi mijoz omonatiga yil davomida k marta hisoblanishi mumkin. Masalan, k=1 bo‘lsa yilda bir marta, k=4 bo‘lsa har chorakda, k=12 holda har oyda omonatga foiz qo‘yilmasining tegishli bir qismi qo‘shib boriladi. Bunda har bir qo‘shilmada omonat miqdori $i=R/k$ foizga ortadi.

Mijozning bankka qo‘ygan omonatining boshlang‘ich qiymati a_0 bo‘lsin. Bu omonat qiymatini vaqt o‘tishi bilan qanday o‘zgarib borishini aniqlaymiz. Omonatning birinchi qo‘shilmadan keyingi qiymatini a_1 deb belgilasak, u

$$a_1= a_0+ ia_0=(1+i)\, a_0$$

formula bilan aniqlanadi. Omonatning ikkinchi qo‘shilmadan keyingi qiymati

$$a_2 = a_1+ ia_1=(1+i)\, a_1=(1+i)^2\, a_0$$

bo‘ladi. Bu jarayonni davom ettirib, omonatning n-qo‘shilmadan keyingi qiymati

$$a_n =(1+i)^n\, a_0\ ,\ n=1, 2, 3, \cdots, \tag{7}$$

ekanligini aniqlaymiz.

Shunday qilib omonat qiymatining o‘zgarib borishi (7) sonli ketma-ketlik bilan aniqlanib , u birinchi hadi $a_1=(1+i)\, a_0$ va maxraji $q=1+i$ bo‘lgan geometrik progressiyani tashkil etadi. Bu ketma-ketlikning limiti masalasini keyingi paragraflarda ko‘ramiz.

XULOSA

Limit–oliy matematikaning poydevorida yotgan tushunchalardan biri bo‘lib hisoblanadi. Juda ko‘p matematik tushuncha va tasdiqlar limit yordamida aniqlanadi va isbotlanadi. Bu yerda limit tushunchasi sonli ketma-ketlik uchun kiritiladi. Bunda sonli ketma-ketlik yagona limitga ega bo‘ladi. Agar sonli ketma-ketlik limiti mavjud va chekli sondan iborat bo‘lsa, u yaqinlashuvchi, aks holda esa uzoqlashuvchi ketma-ketlik deyiladi. Turli sonli ketma-ketlik limitlarini topishda limit hisoblash qoidalari va ajoyib limitdan foydalaniladi. Sonli ketma-ketlikka iqtisodiy mazmunli misol sifatida bankka qo‘yilgan omonat miqdorini vaqt bo‘yicha o‘zgarishini aniqlash masalasini ko‘rsatish mumkin.

Tayanch iboralar

* Sonli ketma-ketlik * Quyidan chegaralangan ketma-ketlik * Yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik * Chegaralangan ketma-ketlik * Chegaralanmagan ketma-ketlik * Sonli ketma-ketlik limiti * O‘zgarmas ketma-ketlik * Yaqinlashuvchi ketma-ketlik * Uzoqlashuvchi ketma-ketlik * Limitning yagonaligi * Monoton ketma-ketliklar * Limit hisoblash qoidalari * Ajoyib limit

Takrorlash uchun savollar

1. Sonli ketma-ketlik nima?
2. Sonli ketma-ketliklarga misol keltiring.
3. Qachon ketma-ketlik quyidan chegaralangan deyiladi?
4. Qanday ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan deb ataladi?
5. Chegaralangan ketma-ketlik deyilganda nima tushuniladi?
6. Qanday ketma-ketlik chegaralanmagan deb ataladi?
7. Sonli ketma-ketlikning chekli limiti qanday ta’riflanadi?

8. O‘zgarmas ketma-ketlik nima?
9. O‘zgarmas ketma-ketlik limiti nimaga teng?
10. Sonli ketma-ketlikning cheksiz limiti qanday ta’riflanadi?
11. Qanday ketma-ketlik yaqinlashuvchi deyiladi?
12. Qachon ketma-ketlik uzoqlashuvchi deyiladi?
13. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik limiti nechta limitga ega bo‘lishi mumkin?
14. Qachon ketma-ketlik monoton deb ataladi?
15. Monoton ketma-ketlik limiti haqida qanday tasdiq o‘rinli?
16. Limit hisoblashning asosiy qoidalari nimalardan iborat?
17. Umumiy hadi ko‘phadlar nisbatiga teng ketma-ketlik limiti qanday usulda hisoblanadi?
18. Ketma-ketlik limitini hisoblashning umumiy usuli mavjudmi?
19. Ajoyib limit qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
20. Sonli ketma-ketlikning iqtisodiy tatbig‘iga misol keltiring.

Testlardan namunalar

1. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ sonli ketma-ketlikning quyi va yuqori chegaralarini ko‘rsating.

A) $\dfrac{1}{2}, 10$; B) $\dfrac{1}{2}, 1$; C) $\dfrac{1}{2}, 3$; D) 0, 1; E) 1, 2.

2. Qaysi sonli ketma-ketlik chegaralangan ?

A) $\{n^2 + 3\}$; B) $\{(-1)^n \cdot n\}$; C) $\left\{n^{(-1)^n}\right\}$; D) $\left\{\dfrac{n^2-1}{n}\right\}$; E) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{3}\right\}$.

3. Quyidagilarning qaysi biri yaqinlashuvchi ketma-ketlik bo‘ladi ?

$$x_n = \frac{1}{n^2+1}, \quad y_n = \frac{1}{2n^2-1}, \quad z_n = (-1)^n$$

A) x_n; B) x_n, y_n; C) z_n; D) y_n, z_n; E) x_n, z_n.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Quyidagi sonli ketma-ketliklarning limitlarini hisoblang:

$$a)\ \lim_{m\to\infty} \frac{4m^n + 3m^{n-2} + n + 1}{2m^n - 5m^{n-1} + m^{n-3} - 2n + 3};$$

$$b)\ \lim_{m\to\infty} [1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + ... + (-1)^m \frac{1}{n^m}]; \qquad c)\ \lim_{m\to\infty} (1 + \frac{n+1}{m})^{2mn}.$$

§3. FUNKSIYA VA UNGA DOIR TUSHUNCHALAR

• ***Funksiya va u bilan bog‘liq tushunchalar.***

- ***Funksiya grafigi.***
- ***Funksiyani berilish usullari.***
- ***Funksiya ko'rinishlari.***
- ***Murakkab va teskari funksiya.***
- ***Asosiy elementar va elementar funksiyalar.***
- ***Funksiyalarning ayrim iqtisodiy tatbiqlari.***

3.1. Funksiya va u bilan bog'liq tushunchalar. Atrofimizdagi turli jarayonlarni matematik usullarda tadqiqot qilayotganimizda o'zgarmas va o'zgaruvchi miqdorlarga duch kelamiz.

1-TA'RIF: Faqat bitta sonli qiymat qabul qiladigan kattaliklar ***o'zgarmas miqdorlar*** deyiladi.

Masalan, yorug'lik tezligi c, erkin tushish tezlanishi g, aylana uzunligini uning diametriga nisbati π, izotermik jarayonlarda harorat t^0 o'zgarmas miqdorlardir.

2-TA'RIF: Turli sonli qiymatlar qabul qila oladigan kattaliklar ***o'zgaruvchi miqdorlar*** deyiladi.

Masalan, tekis harakatda v tezlik o'zgarmas miqdor bo'lib, vaqt t va bosib o'tilgan masofa s o'zgaruvchi miqdorlardir.

Biror jarayonni o'rganayotganimizda bir nechta o'zgaruvchi miqdorlar o'rtasidagi o'zaro bog'lanishlarga duch kelamiz.

Masalan, tekis harakatda tezlikni v, vaqtni t va bosib o'tilgan masofani s desak, u holda t va s o'zgaruvchilar o'zaro $s=v\cdot t$ ko'rinishda bog'langan bo'ladi. Bunday bog'lanishlarni juda ko'p keltirish mumkin va shu sababli ularni atroflicha o'rganish maqsadida funksiya tushunchasi kiritiladi.

3-TA'RIF: Agarda x o'zgaruvchining biror D sonli to'plamga tegishli har bir qiymatiga ma'lum bir qonun-qoida asosida y o'zgaruvchining biror E to'plamga tegishli yagona bir qiymati mos qo'yilgan bo'lsa, ya'ni $f : D \to E$ bo'lsa, unda y o'zgaruvchi x o'zgaruvchining ***funksiyasi*** deyiladi.

Biror y o'zgaruvchi x o'zgaruvchining funksiyasi ekanligi $y=f(x)$ kabi belgilanadi (f harfi o'rniga F, h, g, φ kabi boshqa harflar ham qo'llanilishi mumkin). Bu yerda x ***erkli o'zgaruvchi yoki argument***, y esa ***erksiz o'zgaruvchi yoki funksiya*** deb ataladi.

Masalan, $y=2x+3$, $y=3x^2+4x-1$, $y=2/x$, $y=5xe^x+6$ funksiyalarga misol bo'ladi.

4-TA'RIF: Berilgan $f : D \to E$ funksiyada D – funksiyaning ***aniqlanish sohasi***, E − ***o'zgarish yoki qiymatlar sohasi*** deyiladi.

$y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi D$\{f\}$, qiymatlar sohasi esa E$\{f\}$ kabi belgilanadi. Masalan**,** $f(x)=\sin\sqrt{x}$ funksiya uchun D$\{f\}=[0,\infty)$, E$\{f\}=[-1,1]$.

Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, oldingi paragrafda ko'rilgan $\{a_n\}$ sonli ketma-ketlikni aniqlanish sohasi D$\{f\}=N-$natural sonlar to'plami, qiymatlar sohasi esa $f(n)= a_n$, $n\in N$, haqiqiy sonlardan iborat funksiya deb qarash mumkin.

Matematik analiz fanida asosan funksiyalar a ular bilan bog'liq bo'lgan tasdiqlar o'rganiladi.

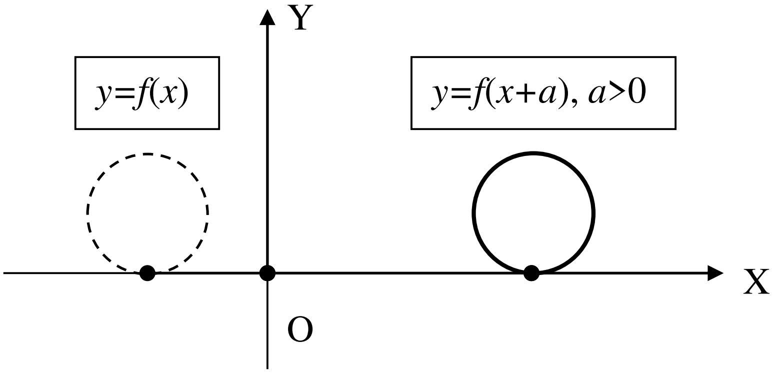
3.2. Funksiya grafigi. Funksiya haqida geometrik tasavvur hosil etish uchun uning grafigi tushunchasi kiritiladi.

5-TA'RIF: XOY koordinata tekislikdagi $(x,y)=(x,f(x))$, $x\in D\{f\}$, koordinatali nuqtalarning geometrik o'rni $y=f(x)$ funksiyaning ***grafigi*** deyiladi.

Masalan, $y=x^2$ funksiya grafigi paraboladan, $y=\cos x$ funksiya grafigi sinusoidadan, $y=2x+5$ funksiya grafigi esa to'g'ri chiziqdan iboratdir.

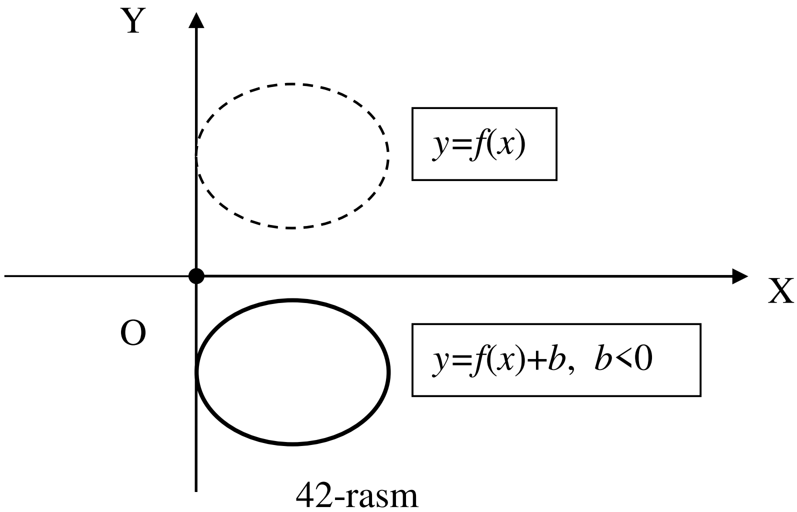
Turli masalalarni yechishda berilgan $y=f(x)$ funksiyaning L grafigini ma'lum bir ko'rinishda o'zgartirishga to'g'ri keladi.

➢ $y=f(x+a)$ funksiyaning grafigi L chiziqni OX o'qi bo'yicha $|a|$ birlik chapga (agar $a>0$ bo'lsa) yoki o'ngga (agar $a<0$ bo'lsa) parallel ko'chirishdan hosil bo'ladi (41-rasmga qarang).



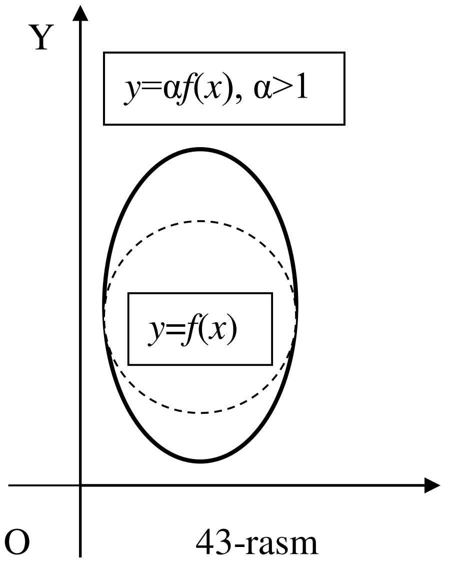
41-rasm

➢ $y=f(x)+b$ funksiyanıng gratıgi L chiziqni OY o'qi bo'yicha $|b|$ birlik yuqoriga (agar $b>0$ bo'lsa) yoki pastga (agar $b<0$ bo'lsa) parallel ko'chirishdan hosil bo'ladi (42-rasmga qarang). .

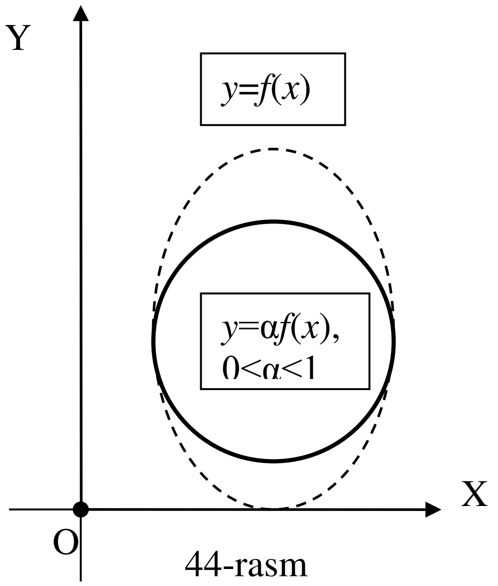


42-rasm

➢ $y=\alpha f(x)$ funksiyaning grafigi L chiziqni OY o'qi bo'yicha α marta cho'zish (agar $\alpha>1$ bo'lsa, 43-rasm) yoki qisish (agar $0<\alpha<1$ bo'lsa, 44-rasm) orqali hosil bo'ladi. Agar $\alpha<0$ bo'lsa, unda L chiziq OX o'qiga nisbatan simmetrik ravishda akslanadi.

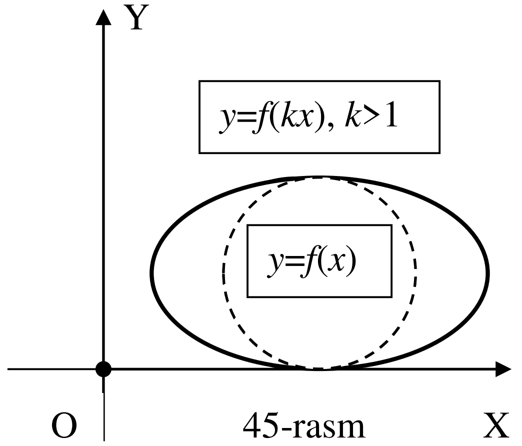


43-rasm

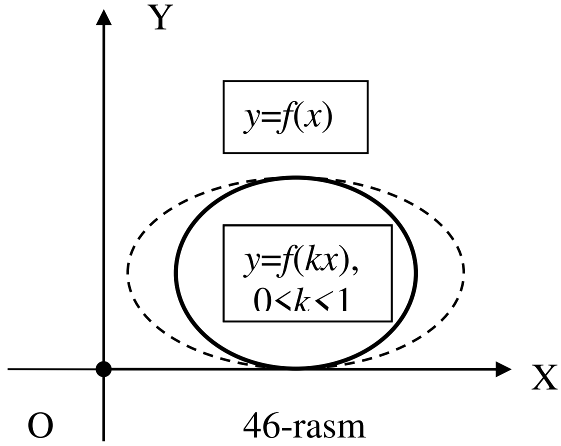


44-rasm

➢ $y=f(kx)$ funksiyaning grafigi L chiziqni OX o‘qi bo‘yicha k marta cho‘zish (agar $k>1$ bo‘lsa, 45-rasm) yoki qisish (agar $0<k<1$ bo‘lsa, 46-rasm) orqali hosil bo‘ladi. Agar $k<0$ bo‘lsa, unda L chiziq OY o‘qiga nisbatan simmetrik ravishda akslanadi.



45-rasm



46-rasm

3.3. Funksiyani berilish usullari. Turli masalalarni qarashda funksiya asosan to‘rt usulda berilishi mumkin.

❖ ***Analitik usul.*** Ko‘p hollarda funksiyalar analitik usulda, ya’ni x argument ustida bajariladigan matematik amallarni formulalar orqali ifodalash orqali beriladi. Masalan, aylana radiusi x va uning yuzasi y orasidagi bog‘lanish funksiyasi $y=\pi x^2$ formula orqali analitik usulda aniqlanadi.

❖ ***Jadval usuli.*** Bu usulda funksiya

x_i	x_1	x_2	x_3	· · ·	x_{n-1}	x_n
$y_i=f(x_i)$	y_1	y_2	y_3	· · ·	y_{n-1}	y_n

ko‘rinishdagi jadval orqali beriladi. Masalan, Bradisning to‘rt xonali matematik jadvallar kitobchasida funksiyalarning qiymatlari shunday ko‘rinishda berilgan. Odatda x argument va y funksiya orasidagi bog‘lanish tajriba yoki kuzatuvlar asosida o‘rganilayotgan bo‘lsa, funksiya qiymatlari jadval ko‘rinishda ifodalanadi.

❖ ***Grafik usul.*** Bunda x argument va y funksiya orasidagi bog‘lanish bu funksiyaning grafigi orqali beriladi. Masalan, yurak faoliyatini ifodalovchi funksiya kardiogramma orqali grafik ko‘rinishda ifodalanadi. Shuningdek bu usuldan tenglamalarni grafik usulda yechishda ham foydalaniladi.

❖ ***Ta’rif usuli.*** Bu usulda funksiya qiymatini aniqlash qonuni uni ta’riflash orqali beriladi. Masalan, ***Dirixle funksiyasi*** deb ataluvchi va [0,1] kesmada aniqlangan D(x) funksiyani analitik, jadval yoki grafik ko‘rinishlarda ifodalab bo‘lmaydi. Bu funksiya qiymatlari ta’rif bo‘yicha quyidagicha aniqlanadi:

$$D(x)=\begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa}; \\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa}. \end{cases}$$

3.4. Funksiya ko‘rinishlari. Funksiyalar u yoki bu xususiyatlariga qarab turli ko‘rinishlarga ajratiladi.

6-TA’RIF: Berilgan $y=f(x)$ funksiya biror $D\subset D\{f\}$ sohaga tegishli ixtiyoriy $x_1, x_2 \in D$ va $x_1<x_2$ nuqtalar uchun $f(x_1)<f(x_2)$ [$f(x_1)\le f(x_2)$] shartni qanoatlantirsa, u shu D sohada ***o‘suvchi (kamaymovchi) funksiya*** deyiladi.

Masalan, $y=x^3$ funksiya $(-\infty;\infty)$ oraliqda, $y=x^2$ funksiya esa aniqlanish sohasining $(0,\infty)$ oralig‘ida o‘suvchi bo‘ladi. ***Ant’ye funksiya*** deb ataladigan $y=[x]$ funksiyaning qiymati argument x qiymatiga eng yaqin va undan katta bo‘lmagan butun son kabi aniqlanadi. Masalan, [1.2]=1, [2.98]=2, [12]=12, [–1.5]=–2. Bu holda $f(x)=[x]$ funksiya uchun $D\{f\}=(-\infty;\infty)$ va $E\{f\}=Z=\{0,\pm1, \pm2,\cdots\}$ bo‘lib, u aniqlanish sohasida kamaymoqchi funksiya bo‘ladi.

7-TA’RIF: Berilgan $y=f(x)$ funksiya biror $D\subset D\{f\}$ sohaga tegishli ixtiyoriy x_1, $x_2\in D$ va $x_1<x_2$ nuqtalar uchun $f(x_1)>f(x_2)$ [$f(x_1)\ge f(x_2)$] shartni qanoatlantirsa , u shu D sohada ***kamayuvchi (o‘smoqchi) funksiya*** deyiladi.

Masalan, $y=-2x$ funksiya $(-\infty;\infty)$ oraliqda, $y=x^2$ funksiya esa aniqlanish sohasining $(-\infty,0)$ oralig‘ida kamayuvchi bo‘ladi. $y=1-[x]$ funksiya esa $(-\infty;\infty)$ oraliqda o‘smoqchi bo‘ladi.

O‘suvchi yoki kamaymoqchi, kamayuvchi yoki o‘smoqchi funksiyalar birgalikda ***monoton funksiyalar*** deyiladi.

8-TA’RIF: Aniqlanish sohasi $D\{f\}$ nol nuqtaga nisbatan simmetrik bo‘lgan $y=f(x)$ funksiya ixtiyoriy $x\in D\{f\}$ uchun $f(-x)=f(x)$ [$f(-x)= -f(x)$] shartni qanoatlantirsa, u ***juft*** [***toq***] ***funksiya*** deyiladi .

Masalan, $f(x)=x^2$ –juft funksiya, $f(x)=x^3$ esa toq funksiya bo‘ladi. Lekin har qanday funksiya juft yoki toq bo‘lishi shart emas. Masalan, $f(x)=x^2-3x+1$ yoki $f(x)=2x-3$ funksiyalar na juft va na toqdir.

Ta’rifdan juft funksiya grafigi OY koordinata o‘qiga, toq funksiya grafigi esa O koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo‘lishi kelib chiqadi.

TEOREMA: Agar $f(x)$ va $g(x)$ juft funksiyalar bo‘lsa, ularning umumiy D aniqlanish sohasida $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ va, $g(x)\neq0$ bo‘lsa, $f(x)/g(x)$ funksiyalar ham juft funksiyalardir. Agar $f(x)$ va $g(x)$ toq funksiyalar bo‘lsa $f(x)\pm g(x)$ toq, $f(x)\cdot g(x)$ va $f(x)/g(x)$ funksiyalar esa juft funksiya bo‘ladi. Agar $f(x)$ juft va $g(x)$ toq funksiya bo‘lsa, ularning ko‘paytmasi va bo‘linmasi toq funksiya bo‘ladi.

Isbot: Misol sifatida faqat bir hol uchun isbotni keltiramiz, chunki boshqa hollar ham xuddi shundek ko‘riladi. Masalan, qaralayotgan $f(x)$ va $g(x)$ juft funksiyalar, ya’ni $f(-x)=f(x)$ va $g(-x)=g(x)$ bo‘lsin. Bu holda $F(x)=f(x)\pm g(x)$ funksiya uchun

$$F(-x)=f(-x)\pm g(-x)=f(x)\pm g(x)=F(x)$$

tenglik o‘rinli va , ta’rifga asosan $F(x)$ juft funksiya bo‘ladi.

Izoh: Agar $f(x)$ aniqlanish sohasi $D\{f\}$ koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo‘lgan ixtiyoriy funksiya bo‘lsa, unda $F(x)=f(x)+f(-x)$ juft, $G(x)=f(x)-f(-x)$ esa toq funksiya bo‘lishini ko‘rish qiyin emas.

<u>9-TA’RIF:</u> Agar $y=f(x)$ funksiya uchun shunday $T>0$ son mavjud bo‘lsaki, $\forall x\in D\{f\}$ uchun $x\pm T\in D\{f\}$ bo‘lib, $f(x\pm T)=f(x)$ shart bajarilsa, u ***davriy funksiya*** deb ataladi. Bu shartni qanoatlantiruvchi eng kichik musbat T soni shu funksiyaning ***davri*** deyiladi.

Masalan, $y=\sin x$ davri $T=2\pi$, $y=\mathrm{tg}x$ esa davri $T=\pi$ bo‘lgan davriy funksiyalardir. $y=\{x\}=x-[x]$ funksiya qiymati argument x qiymatining nomanfiy kasr qismiga teng bo‘ladi. Masalan, $\{1.2\}=0.2$, $\{2.98\}=0.98$, $\{\pm 8\}=0$, $\{-1.7\}=0.3$ (bunda $-1.7=-2+0.3$ deb qaraladi). Bu holda $D\{f\}=(-\infty;\infty)$ va $E\{f\}=[0,1)$ bo‘lib, ixtiyoriy $x\in D\{f\}$ va $n\in N=\{1,2,3.\cdots\}$ uchun $\{x+n\}=\{x\}$ bo‘ladi. Bundan $f(x)=\{x\}$ davri $T=1$ bo‘lgan davriy funksiya ekanligini ko‘rish mumkin. $y=x^2$ yoki $y=e^x$ funksiyalar esa davriymas funksiyalarga misol bo‘ladi.

<u>10-TA’RIF:</u> Berilgan $y=f(x)$ funksiya uchun shunday $M>0$ soni topilsaki, ixtiyoriy $x\in D$ uchun $|f(x)|\leq M$ shart bajarilsa, u D sohada ***chegaralangan funksiya*** deyiladi. Aks holda $y=f(x)$ ***chegaralanmagan funksiya*** deb ataladi.

Masalan, $y=\sin x$ chegaralangan funksiya, chunki barcha x uchun $|\sin x|\leq 1$. $y=2^x$ funksiya $(-\infty,0)$ oraliqda chegaralangan va $2^x\leq 1$, ammo bu funksiya $(0,\infty)$ oraliqda chegaralanmagan, chunki ixtiyoriy $M>0$ katta soni uchun $x>\log_2 M$ bo‘lganda $2^x>M$ bo‘ladi.

<u>11-TA’RIF:</u> Agar $y=f(x)$ funksiya biror D sohaning har bir x nuqtasida o‘zgarmas C soniga teng bo‘lsa, u D sohada ***o‘zgarmas funksiya*** deyiladi.

Masalan, $x\in(-\infty,\infty)$ sohada $f(x)=\sin^2x+\cos^2x=1$, $x\in(-\infty,0)$ sohada $f(x)=x/|x|=-1$ o‘zgarmas funksiya bo‘ladi.

3.5. Murakkab va teskari funksiyalar. Funksiyalar bilan bog‘liq yana ikkita tushunchani kiritamiz.

<u>12-TA’RIF:</u> Agar $z=\varphi(x)$ funksiya $X\to Z$, $y=f(z)$ esa $Z\to Y$ akslantirishni ifodalasa , unda $y=f(\varphi(x))$ funksiya $X\to Y$ akslantirishni ifodalaydi va ***murakkab funksiya*** deb ataladi. Bu yerda φ ***ichki***, f esa ***tashqi funksiya*** deyiladi. $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya f va φ funksiyalarning ***superpozitsiyasi*** deb ham aytiladi.

Masalan, $y=\sin x^2$ murakkab funksiya bo‘lib, unda $\varphi(x)=x^2$ ichki, $f(\varphi)=\sin\varphi$ esa tashqi funksiya bo‘ladi. $y=\sin^2x$ murakkab funksiyada esa $\varphi(x)=\sin x$ ichki, $f(\varphi)=\varphi^2$ tashqi funksiya bo‘ladi.

<u>13-TA’RIF:</u> Aniqlanish sohasi $D\{f\}$ va qiymatlar sohasi $E\{f\}$ bo‘lgan $y=f(x)$ funksiya uchun har bir $y\in E\{f\}$ soniga $f(x)=y$ shartni qanoatlantiradigan yagona $x\in D\{f\}$ sonini mos qo‘yadigan $x=\varphi(y)$ funksiya mavjud bo‘lsa, u berilgan f funksiyaga ***teskari funksiya*** deb ataladi.

Berilgan f funksiyaga teskari funksiya f^{-1} kabi belgilanadi. Bunda f^{-1} faqat belgilash bo‘lib, u $1/f$ degan ma’noni ifodalamasligini ta’kidlab o‘tamiz.

Odatda argument x, funksiya esa y orqali belgilanganligi uchun, $y=f(x)$ funksiyaga teskari $x=\varphi(y)$ funksiya $y=\varphi(x)$ yoki $y=f^{-1}(x)$ ko‘rinishda yoziladi.

Agar $y=f(x)$ funksiya o‘suvchi yoki kamayuvchi bo‘lsa ,unga teskari funksiya $y=f^{-1}(x)$ mavjudligini va uni $f(y)=x$ tenglama yechimi kabi topishimiz mumkinligini isbotlash mumkin. Masalan, $f(x)=3x-1$ bo‘lsa, unda $3y-1=x$ tenglamadan teskari funksiya $f^{-1}(x)=(a+1)/3$ ekanligini aniqlaymiz.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, o‘zaro teskari funksiyalar uchun $D\{f\}=E\{f^{-1}\}$ va $E\{f\}=D\{f^{-1}\}$, $f[f^{-1}(x)]=x$ va $f^{-1}[f(x)]=x$ munosabatlar o‘rinli bo‘ladi. Bundan tashqari ularning grafiklari $y=x$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo‘ladi

3.6. Asosiy elementar va elementar funksiyalar. Maktab matematikasidan bizga ma’lum bo‘lgan quyidagi funksiyalarni eslatib o‘tamiz:

❖ **Darajali *funksiya*.** Bu funksiya $y=x^{\alpha}$ ko‘rinishda bo‘lib, o‘zgarmas daraja ko‘rsatkichi $\alpha \in R$ bo‘ladi. Masalan,

$$y=1=x^0, \quad y=x^2, \quad y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}, \quad y=\frac{1}{x}=x^{-1}$$

darajali funksiyalardir. Darajali funksiyaning xossalari α daraja ko‘rsatkichi qiymatiga bog‘liq bo‘ladi. Masalan, α musbat butun son bo‘lsa, $f(x)=x^{\alpha}$ aniqlanish sohasi $D\{f\}=(-\infty,\infty)$, qiymatlar sohasi esa toq α uchun $E\{f\}=(-\infty,\infty)$, juft α uchun $E\{f\}=[0,\infty)$ bo‘ladi. Agar α manfiy butun son bo‘lsa, $f(x)=x^{\alpha}$ aniqlanish sohasi $D\{f\}=\{x: x\neq 0\}$, qiymatlar sohasi esa $E\{f\}=(-\infty,\infty)$ bo‘ladi. Bundan tashqari α juft son bo‘lsa, $f(x)=x^{\alpha}$ juft, α toq bo‘lsa toq funksiya bo‘ladi.

❖ ***Ko‘rsatkichli funksiya.*** Bu funksiya $y=a^x$ ko‘rinishda va unda daraja asosi $a>0$ va $a\neq 1$ shartni qanoatlantiruvchi o‘zgarmas son bo‘ladi. Masalan, $y=3^x$, $y=(1/10)^x$, $y=e^x$ ko‘rsatkichli funksiyalardir. Bu funksiya uchun $D\{f\}=(-\infty,\infty)$, $E\{f\}=(0,\infty)$ bo‘ladi. Agar $a>1$ bo‘lsa, $f(x)=a^x$ o‘suvchi, $0<a<1$ bo‘lsa kamayuvchi funksiyaga ega bo‘lamiz.

❖ ***Logarifmik funksiya.*** Bu funksiya $y=\log_a x$, $(a>0,\ a\neq 1)$, ko‘rinishda bo‘lib, $y=a^x$ ko‘rsatkichli funksiyaga teskari funksiyani ifodalaydi.

Masalan, $y=\log_2 x$, $y=\log_{0.8} x$, $y=\log_{10}x=\lg x$, $y=\log_e x=\ln x$ logarifmik funksiyalardir. Logarifmik $f(x)=\log_a x$ funksiya uchun $D\{f\}=(0,\infty)$, $E\{f\}=(-\infty,\infty)$ bo‘ladi. Agar logarifm asosi $a>1$ bo‘lsa, $f(x)=\log_a x$ o‘suvchi, $0<a<1$ holda esa kamayuvchi bo‘ladi.

❖ ***Trigonometrik funksiyalar.*** Bular $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}\,x$ va $y=\mathrm{ctg}\,x$ funksiyalardan iborat. Bu yerda $f(x)=\sin x$ va $f(x)=\cos x$ funksiyalar uchun $D\{f\}=(-\infty,\infty)$ va $E\{f\}=[0,1]$ bo‘lib, ular $T=2\pi$ davrli va chegaralangan bo‘ladi. Bunda $f(x)=\sin x$—toq, $f(x)=\cos x$—juft funksiyalardir.

$f(x)=\mathrm{tg}\,x$ va $f(x)=\mathrm{ctg}\,x$ funksiyalarning aniqlanish sohalari mos ravishda $D\{f\}=\{x: x\neq(2k+1)\pi/2,\ k\in Z\}$ va $D\{f\}=\{x: x\neq k\pi,\ k\in Z\}$, qiymatlar sohasi $E\{f\}=(-\infty,\infty)$ bo‘ladi. Bu funksiyalar $T=\pi$ davrli, toq va chegaralanmagan bo‘ladi.

❖ ***Teskari trigonometrik funksiyalar.*** Bularga $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arctg}\,x$, $y=\mathrm{arcctg}\,x$ funksiyalar kiradi.Ular mos trigonometrik funksiyalarga teskari bo‘ladi. $f(x)$=arcsin$x$ va $f(x)$=arccos$x$ uchun D{f}=[–1,1], qiymatlar sohasi esa mos ravishda E{f}=[–π/2, π/2] va E{f}=[0, π] bo‘ladi. $f(x)$=arctg$x$ va $f(x)$=arcctg$x$ uchun D{f}=(−∞,∞), qiymatlar sohasi esa mos ravishda E{f}=(–π/2, π/2) va E{f}=(0, π) bo‘ladi. Bundan tashqari $f(x)$=arcsin$x$ va $f(x)$=arctg$x$ toq funksiyalardir.

14-TA’RIF: 1-5 funksiyalar ***asosiy elementar funksiyalar*** deb ataladi.

Chekli sondagi asosiy elementar funksiyalar ustida chekli sondagi arifmetik va superpozitsiallash amallari orqali hosil qilingan funksiyalar ***elementar funksiyalar*** deyiladi. Masalan , $y=2\ln\sin x+x^2/5$, $y=a^x\ln(x+1)$ elementar funksiya bo‘ladi. $y=\{x\}$ va $y=[x]$ elementar bo‘lmagan funksiyalarga misol bo‘ladi.

3.7. Funksiyalarning ayrim iqtisodiy tatbiqlari. Iqtisodiyotning nazariy va amaliy masalalarini o‘rganishda funksiyalardan keng foydalaniladi. Masalan, ishlab chiqarish funksiyasi (ishlab chiqarish natijalarini turli omillarga bog‘liqligi), xarajatlar funksiyasi (ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi bilan xarajatlar o‘rtasidagi bog‘lanish), talab funksiyasi (mahsulotga talab hajmi va narx, foyda kabi turli omillar orasidagi bog‘lanishlar) kabi funksiyalar iqtisodiyotda ko‘p qo‘llaniladi.

Yana bir misol sifatida aholining daromadi x va uning turli tovarlarga ehtiyoji y orasidagi bog‘lanishlarni o‘rganish uchun shved iqtisodchi olimi Tornkvist tomonidan taklif etilgan quyidagi funksiyalarini qaraymiz:

- $y=\dfrac{a(x-b)}{x-c}$ $(x>b)$, y – inson hayoti uchun I navbatda zarur bo‘lgan oziq-ovqat mahsulotlari, kiyim-kechak kabi tovarlarga ehtiyoj ;
- $y=\dfrac{a(x-d)}{x-c}$ $(x>d>b)$, y – inson hayoti uchun II navbatda zarur bo‘lgan televizor, mebel, kosmetika kabi tovarlarga ehtiyoj ;
- $y=ax\dfrac{x-m}{x-c}$ $(x>m>d>b)$, y–avtomobil, tilla bezaklar,dala hovlisi kabi qimmatbaho buyumlarga ehtiyoj .

Bu funksiyalar quyidagi iqtisodiy qonuniyatlarni ifodalaydi:

- ✓ Daromad x ma’lum bir b, d yoki m qiymatdan oshgandan keyin tegishli tovarlarni xarid etish mumkin ;
- ✓ Daromad x oshib borishi bilan I va II navbatda zarur bo‘lgan tovarlarga ehtiyojni ifodalovchi y funksiya o‘sishi sekinlashibdi ;
- ✓ I va II navbatda zarur bo‘lgan tovarlarga ehtiyojni ifodalovchi y yuqoridan a soni (to‘yinish nuqtasi) bilan chegaralangan, chunki ularning iste’moli cheksiz o‘sishi mumkin emas;
- ✓ Daromad x oshib borishi bilan qimmatbaho buyumlarga ehtiyoj ham o‘sib boradi va yuqoridan chegaralanmagan .

XULOSA

Matematik analiz fanida funksiyalar va ular bilan bog‘liq turli tushuncha hamda tasdiqlar qaraladi. Funksiya deyilganda turli o‘zgaruvchi miqdorlar orasidagi bog‘lanishning matematik ifodasi tushuniladi. Funksiyalar analitik, jadval, grafik va ta’rif usullarida berilishi mumkin. Funksiyalar u yoki bu xususiyatlariga qarab monoton, juft-toq, davriy, chegaralangan va chegaralanmagan kabi ko‘rinishlarda bo‘lishi mumkin. Berilgan funksiyalar orqali murakkab va teskari funksiyalarni aniqlash mumkin. Darajali, ko‘rsatkichli, logarifmik, trigonometrik va teskari trigonometrik funksiyalar asosiy elementar funksiyalar bo‘lib hisoblanadi. Ulardan tuzilgan turli funksiyalar esa elementar funksiyalar deyiladi. Matematikada elementar bo‘lmagan funksiyalar ham qaraladi.

Funksiya tushunchasi iqtisodiy tadqiqotlarda ham keng qo‘llaniladi. Bularga x daromad va y iste’mol orasidagi bog‘lanishni ifodalovchi Tornkvist funksiyalarini misol sifatida ko‘rsatish mumkin. Kelgusida iqtisodiy mazmunli boshqa funksiyalar bilan ham tanishamiz.

Tayanch iboralar

* O‘zgarmas miqdorlar * O‘zgaruvchi miqdorlar * Funksiya * Aniqlanish sohasi * Qiymatlar sohasi * Funksiya grafigi * O‘suvchi (kamaymoqchi) funksiya * Kamayuvchi (o‘smoqchi) funksiya * Monoton funksiyalar * Juft funksiya * Toq funksiya * Davriy funksiya * Chegaralangan funksiya * Chegaralanmagan funksiya * O‘zgarmas funksiya * Murakkab funksiya * Teskari funksiya * Asosiy elementar funksiyalar * Elementar funksiyalar * Tornkvist funksiyalari

Takrorlash uchun savollar

1. Qanday miqdorlar o‘zgarmas deyiladi? Misollar keltiring.
2. Qanday miqdorlar o‘zgaruvchi deyiladi? Misollar keltiring.
3. Funksiya qanday ta’riflanadi?
4. Funksiyaning aniqlanish sohasi deb nimaga aytiladi?
5. Funksiyaning o‘zgarish (qiymatlar) sohasi qanday ta’riflanadi?
6. Funksiya grafigi deb nimaga aytiladi?
7. Funksiya qanday usullarda berilishi mumkin?
8. Qaysi shartda funksiya o‘suvchi (kamaymoqchi) deyiladi?
9. Qanday funksiya kamayuvchi (o‘smoqchi) deb ataladi?
10. Monoton funksiya deganda nima tushuniladi?
11. Qachon funksiya juft (toq) deb ataladi?
12. Davriy funksiya deb qanday funksiyaga aytiladi?
13. Chegaralangan (chegaralanmagan) funksiya ta’tifini keltiring.
14. O‘zgarmas funksiya qanday aniqlanadi?
15. Murakkab funksiya qanday hosil etiladi?
16. Teskari funksiya qanday ta’riflanadi?
17. Qaysi shartda teskari funksiya mavjud bo‘ladi va u qanday topiladi?
18. Qaysi funksiyalar asosiy elementar funksiyalar deyiladi?
19. Elementar funksiyalar deb qanday funksiyalarga aytiladi?
20. Elementar bo‘lmagan funksiyalarga qanday misollar bilasiz?
21. Iqtisodiy mazmunli qanday funksiyalarni bilasiz?
22. Tornkvist funksiyalari qaysi iqtisodiy tushunchalar orasidagi bog‘lanishlarni ifodalaydi?

23. Tornkvist funksiyalari qanday iqtisodiy qonuniyatlarni akslantiradi?

Testlardan namunalar

1. Ta'rifni to'ldiring: $y=f(x)$ funksiya deb x o'zgaruvchining har bir $x \in D$ qiymatiga y o'zgaruvchining …. $y \in E$ qiymatini mos qo'yilishiga aytiladi.
A) bir nechta ; B) kamida bitta; C) faqat bitta ; D) ikkita;
E) kamida ikkita.

2. Ta'rifni to'ldiring: $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi deb x argumentning $y=f(x)$ funksiya ……. bo'ladigan qiymatlar to'plamiga aytiladi.
A) musbat; B) manfiy; C) nol; D) ma'noga ega ; E) cheksiz.

3. $f(x)=\sqrt{2x+1}-\lg x$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.
A) $(-1,+\infty)$; B) $(0,+\infty)$; C) $(2,11)$; D) $(-\infty,+\infty)$; E) $(1,+\infty)$.

4. $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.
A) $[1,+\infty)$; B) $[0,+\infty)$; C) $(-\infty,+\infty)$; D) $(-\infty,1)$; E) $(1,+\infty)$.

5. $f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.
A) $[0,1]$; B) $[1,2]$; C) $(-\infty,+\infty)$; D) $[-1,3]$; E) $[-1,1]$.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. $f(x)=\ln\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping .

2. $f(x)=\sqrt{n^2-x^{2n}}$ funksiyaning qiymatlar sohasini toping.

3. Quyidagi funksiyalarni juft-toqlikka tekshiring:
$f(x)=\sin^n x\cdot\cos nx$, $g(x)=\sin^n x+\cos nx$.

4. $f(x)=\dfrac{x+n}{x-n}$ ($x>n$) funksiyaga teskari $f^{-1}(x)$ funksiyani toping.

5. $f(x)=x^n$, $g(x)=\ln(n+x)$ funksiyalar bo'yicha $y=f(g(x))$ va $y=g(f(x))$ murakkab funksiyalarni yozing.

§4. FUNKSIYA LIMITI VA UNING ASOSIY XOSSALARI

- ***Funksiya limiti .***
- ***Cheksiz kichik miqdorlar va ularning xossalari.***
- ***Cheksiz katta miqdorlar.***
- ***Funksiya limitini hisoblash qoidalari.***
- ***Funksiya limitining mavjudlik shartlari.***
- ***Ajoyib limitlar.***
- ***Funksiya limitining bir iqtisodiy tatbig'i.***

4.1. Funksiya limiti. Biz sonli ketma-ketlik uchun oliy matematikaning poydevorida yotgan asosiy tushunchalaridan biri bo'lgan limit tushunchasini kiritgan edik. Endi bu tushunchani funksiya uchun umumlashtiramiz.

1-TA'RIF: Agarda oldindan berilgan ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun unga bog'liq shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ son topilsaki, $0<|x-a|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $x\in D\{f\}$ va biror A soni uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, A soni $y=f(x)$ ***funksiyaning $x\to a$ bo'lgandagi limiti*** deb ataladi.

Ta'rifdagi tasdiq

$$\lim_{x\to a} f(x)=A$$

ko'rinishda yoziladi. Misol sifatida,

$$\lim_{x\to 3} x^2=9$$

ekanligini ta'rif bo'yicha ko'rsatamiz. Bu yerda $x\to3$ bo'lgani uchun $2<x<4$, ya'ni $|x+3|<7$ deb olishimiz mumkin. Bu holda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun

$$|f(x)-A|=|x^2-9|=|x+3||x-3|<7|x-3|<\varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lishi uchun $|x-3|<\varepsilon/7$, ya'ni $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/7$ deb olish mumkin. Demak, limit ta'rifiga asosan, $\lim\limits_{x\to 3} x^2=9$ tenglik o'rinli bo'ladi.

2-TA'RIF: Agar har qanday katta $N>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(N)>0$ son mavjud bo'lsaki, $0<|x-a|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x\in D\{f\}$ uchun $|f(x)|>N$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, unda $y=f(x)$ funksiya $x\to a$ ($a-$chekli son) bo'lganda ***cheksiz limitga*** ($+\infty$ yoki $-\infty$) ega deyiladi .

Ta'rifdagi tasdiq $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan,

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x^3-8)^2}=+\infty$$

ekanligini ko'rsatish mumkin. Bu yerda $x\to2$ bo'lgani uchun $1<x<3$ deb olishimiz mumkin. Bu holda berilgan $N>0$ soni bo'yicha $\delta=\delta(N)>0$ sonini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\frac{1}{(x^3-8)^2}=\frac{1}{(x-2)^2(x^2+2x+4)^2}>\frac{1}{(x-2)^2(3^2+2\cdot3+4)^2}=$$

$$=\frac{1}{361(x-2)^2}>N\Rightarrow(x-2)^2<\frac{1}{361N}\Rightarrow|x-2|<\frac{1}{19\sqrt{N}}=\delta(N)\quad .$$

Demak, ta'rifga asosan, yuqoridagi limit cheksiz bo'ladi.

<u>3-TA'RIF:</u> Agar har qanday kichik $\varepsilon>0$ soni uchun shunday katta $M=M(\varepsilon)>0$ son mavjud bo'lsaki, $|x|>M$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\in D\{f\}$ va biror chekli A soni uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $y=f(x)$ funksiya $x\to\pm\infty$ bo'lganda ***chekli limitga*** ega deyiladi.

Bu tasdiq $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=A$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$$

ekanligini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ uchun

$$|f(x)-A|=\left|\frac{x+1}{x}-1\right|=\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon\Rightarrow|x|>\frac{1}{\varepsilon}=M(\varepsilon)\,,$$

ya'ni $M(\varepsilon)=\varepsilon^{-1}$ deb olishimiz mumkin. Bu yerdan, ta'rifga asosan, yuqoridagi limit qiymati haqiqatan ham birga teng ekanligi kelib chiqadi.

<u>4-TA'RIF:</u> Agar har qanday katta $N>0$ soni uchun shunday $M=M(N)$ son mavjud bo'lsaki, $|x|>M$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\in D\{f\}$ uchun $|f(x)|>N$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $y=f(x)$ funksiya $x\to\pm\infty$ bo'lganda ***cheksiz limitga*** ega deyiladi,

Ta'rifdagi tasdiq $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan, ta'rifdan foydalanib, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^3=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2=+\infty$ ekanligini ko'rsatish mumkin.

<u>1-TEOREMA:</u> Agar $x\to a$ bo'lganda $y=f(x)$ funksiya limiti mavjud bo'lsa, u holda bu limit yagona bo'ladi.

Isbot: Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $y=f(x)$ funksiya $x\to a$ bo'lganda ikkita A va B limitlarga ega bo'lsin. Unda, limit ta'rifiga ko'ra, har qanday kichik $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$ va $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0$ sonlar topiladiki, $0<|x-a|<\delta_1$ va $0<|x-a|<\delta_2$ shartlarda $|f(x)-A|<\varepsilon/2$ va $|f(x)-B|<\varepsilon/2$ tengsizliklar bajariladi. Agar $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ deb olsak, unda $0<|x-a|<\delta$ bo'lganda yuqoridagi ikkala tengsizlik ham bajariladi va shu sababli, absolut qiymat xossalariga asosan,

$$|A-B|=|A-f(x)+f(x)-B|\le|f(x)-A|+|f(x)-B|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $\varepsilon>0$ ixtiyoriy kichik son bo'lganidan va A, B sonlar x ga bog'liq emasligidan $|A-B|=0$, ya'ni $A=B$ ekanligi kelib chiqadi. Demak funksiya limiti mavjud bo'lsa, u faqat yagona bo'ladi.

Ba'zi hollarda funksiyaning chap va o'ng limiti tushunchalari kerak bo'ladi.

5-TA'RIF: $y=f(x)$ funksiyaning argumenti x qandaydir chekli a soniga faqat chap ($x<a$) yoki o'ng ($x>a$) tomondan yaqinlashib borganda ($x\to a-0$ yoki $x\to a+0$ kabi belgilanadi) funksiya limiti biror A_1 yoki A_2 sonidan iborat bo'lsa, bu sonlar funksiyaning a nuqtadagi ***chap yoki o'ng limiti*** deb ataladi.

$y=f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi chap yoki o'ng limiti

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a-0) \qquad \text{yoki} \qquad \lim_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)$$

kabi belgilanadi. Masalan , ***signum funksiya*** deb ataladigan ushbu

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} 1, x>0 \\ 0, x=0 \\ -1, x<0 \end{cases} \tag{1}$$

funksiya uchun $x=0$ nuqtadagi chap va o'ng limitlar mos ravishda quyidagicha bo'ladi:

$$\operatorname{sgn}(0-0)=\lim_{x\to 0-0}\operatorname{sgn}(x)=\lim_{x\to 0-0}(-1)=-1,$$

$$\operatorname{sgn}(0+0)=\lim_{x\to 0+0}\operatorname{sgn}(x)=\lim_{x\to 0+0}1=1.$$

2-TEOREMA: Biror a nuqtada $y=f(x)$ funksiya $x\to a$ bo'lganda chekli A limitga ega bo'lishi uchun uning shu a nuqtadagi chap va o'ng limitlari o'zaro teng va $f(a-0)=f(a+0)=$A shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Teoremaning isboti bevosita yuqorida ko'rib o'tilgan limit ta'riflaridan kelib chiqadi va o'quvchiga havola etiladi.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, funksiya limiti har doim ham mavjud bo'lavermaydi. Masalan, $y=\operatorname{sgn}(x)$ funksiya $x\to 0$ bo'lganda limitga ega emas, chunki bu holda $\operatorname{sgn}(0-0)=-1$ va $\operatorname{sgn}(0+0)=1$ bo'lib, $\operatorname{sgn}(0-0)\neq \operatorname{sgn}(0+0)$.

4.2. Cheksiz kichik miqdorlar va ularning xossalari. Limitlarga doir turli tasdiqlarni isbotlashda cheksiz kichik miqdor va ularning xossalari muhim ahamiyatga ega.

6-TA'RIF: Agar $\alpha(x)$ funksiya uchun

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0$$

shart bajarilsa, unda bu funksiya $x\to a$ (a–ixtiyoriy chekli yoki cheksiz son) bo'lganda ***cheksiz kichik miqdor*** deb ataladi .

Masalan, $\alpha(x)=x^2$ funksiya $x\to 0$, $\alpha(x)=(x-3)^2$ funksiya $x\to 3$ va $\alpha(x)=x^{-2}$ funksiya $x\to\pm\infty$ bo'lganda cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

3-TEOREMA: Agar $x\to a$ bo'lganda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik miqdorlar bo'lib, $f(x)$ esa ixtiyoriy chegaralangan funksiya bo'lsa, u holda $x\to a$ bo'lganda $\alpha(x)\pm\beta(x)$, $\alpha(x)\cdot\beta(x)$, $f(x)\cdot\alpha(x)$, $C\alpha(x)$ (C=const, ya'ni o'zgarmas son) funksiyalar ham cheksiz kichik miqdorlar bo'ladi.

Isbot: $x\to a$ bo'lganda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik miqdorlar, ya'ni

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0, \quad \lim_{x\to a}\beta(x)=0$$

bo'lgani uchun, limit ta'rifiga asosan, ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ soni uchun shunday $\delta>0$ soni topiladiki, $0<|x-a|<\delta$ shartda $|\alpha(x)|<\varepsilon/2$, $|\beta(x)|<\varepsilon/2$ tengsizliklar bir paytda o‘rinli bo‘ladi. Agar $|f(x)|\le M$ (M– biror chekli son) bo‘lsa, unda $0<|x-a|<\delta$ shartda

$$|\alpha(x)\pm\beta(x)|\le |\alpha(x)|+|\beta(x)| <(\varepsilon/2)+(\varepsilon/2)=\varepsilon,$$

$$|\alpha(x)\cdot\beta(x)|= |\alpha(x)|\cdot|\beta(x)| <(\varepsilon/2)\cdot(\varepsilon/2)=\varepsilon^2/4,$$

$$|f(x)\cdot\alpha\ (x)|= |f(x)|\cdot|\alpha(x)|<|M|\varepsilon/2\ , \qquad |C\alpha(x)|=|C|\cdot|\alpha(x)|<|C|\varepsilon/2$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. Bu tengsizliklar va funksiya limiti ta’rifiga asosan

$$\lim_{x\to a}[\alpha(x)\pm\beta(x)]=0\,,\quad \lim_{x\to a}[\alpha(x)\cdot\beta(x)]=0\,,$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot\alpha(x)]=0\,,\quad \lim_{x\to a}C\alpha(x)=0$$

natijalarni olamiz. Bu yerdan, cheksiz kichik miqdor ta’rifiga asosan, teorema isboti kelib chiqadi.

<u>NATIJA:</u> Chekli sondagi cheksiz kichik miqdorlarning algebraik yig‘indisi, ko‘paytmasi yana cheksiz kichik miqdordan iborat bo‘ladi.

Bu natijaning isboti oldingi teoremani bir necha marta qo‘llash orqali keltirib chiqariladi.

Izoh: Agar $x\to a$ bo‘lganda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik miqdorlar bo‘lsa, unda ularning nisbati $\alpha(x)/\beta(x)$ cheksiz kichik miqdor bo‘lishi shart emas.

Masalan, $x\to 0$ bo‘lganda $\alpha(x)=Ax^n$ va $\beta(x)= Bx^m$ (n,m–natural, A,B– noldan farqli ixtiyoriy haqiqiy sonlar) cheksiz kichik miqdorlar bo‘ladi va

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{Ax^n}{Bx^m}=\lim_{x\to 0}\frac{A}{B}x^{n-m}=\begin{cases} 0\,, & n>m\,;\\ A/B\,, & n=m\,;\\ \pm\infty\,, & n<m\,.\end{cases}$$

Bu yerdan ko‘rinadiki, yuqoridagi misolda $\alpha(x)/\beta(x)$ nisbat faqat $n>m$ bo‘lganda cheksiz kichik miqdor bo‘ladi.

<u>7-TA’RIF:</u> $x\to a$ bo‘lganda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik miqdorlar va

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A$$

bo‘lsin. Bunda $A=0$ bo‘lsa, $\alpha(x)$ $x\to a$ bo‘lganda $\beta(x)$ ga nisbatan ***yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor*** deyiladi va $\alpha(x)=o(\beta(x))$ kabi belgilanadi. Agar $A\neq 0$ va chekli son bo‘lsa, unda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ ***bir xil tartibli cheksiz kichik miqdorlar*** deyiladi va $\alpha(x)=0(\beta(x))$ kabi belgilanadi. Jumladan $A=1$ bo‘lsa $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ ***ekvivalent cheksiz kichik miqdorlar*** deyiladi va $\alpha(x)\sim\beta(x)$ kabi belgilanadi. Agar $A=\pm\infty$ bo‘lsa, $\alpha(x)$ $x\to a$ bo‘lganda $\beta(x)$ ga nisbatan ***quyi tartibli cheksiz kichik miqdor*** deyiladi va $\beta(x)=o(\alpha(x))$ kabi belgilanadi.

4.3. Cheksiz katta miqdorlar. Endi cheksiz katta miqdor tushunchasi va uning xossalari bilan tanishamiz.

<u>8-TA’RIF:</u> Agar $f(x)$ funksiya uchun

$$\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty$$

shart bajarilsa, unda bu funksiya $x\to a$ (a–ixtiyoriy chekli yoki cheksiz son) bo‘lganda ***cheksiz katta miqdor*** deb ataladi .

Masalan, $f(x)=\mathrm{tg}x$ funksiya $x\to\pi/2$, $f(x)=(x-1)^{-3}$ funksiya $x\to 1$ va $f(x)=x^2$ funksiya $x\to\pm\infty$ bo‘lganda cheksiz katta miqdor bo‘ladi.

4-TEOREMA: Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x\to a$ bo‘lganda cheksiz katta miqdorlar bo‘lsa, unda $x\to a$ shartda quyidagi tasdiqlar o‘rinlidir:

1) $|f(x)|+|g(x)|$ va $f(x)\cdot g(x)$ cheksiz katta miqdor bo‘ladi;

2) Agar $\lim\limits_{x\to a} h(x)\neq 0$ bo‘lsa, unda $f(x)\cdot h(x)$ va $f(x)/h(x)$ cheksiz katta miqdor bo‘ladi;

3) Ixtiyoriy C o‘zgarmas soni va chegaralangan $\varphi(x)$ funksiya uchun $Cf(x)$ va $\varphi(x)f(x)$ funksiyalar cheksiz katta miqdor bo‘ladi.

Teoremaning isboti bevosita 8-ta’rifdan kelib chiqadi va uning ustida to‘xtalib o‘tirmaymiz.

Izoh: Yuqoridagi teorema shartlarida $|f(x)|-|g(x)|$ va $f(x)/g(x)$ funksiyalar cheksiz katta miqdor bo‘lishi shart emas. Bu funksiyalar $x\to a$ bo‘lganda mos ravishda $\infty-\infty$ va ∞/∞ ko‘rinishdagi aniqmasliklar deyiladi va ular kelgusida(VIII bob, §6) to‘liqroq ko‘rib chiqiladi.

Cheksiz katta va cheksiz kichik miqdorlar orasidagi bog‘lanish quyidagi teorema orqali ifodalanadi.

5-TEOREMA: Agar $f(x)$ funksiya $x\to a$ bo‘lganda cheksiz katta miqdor bo‘lsa, unda shu holda $1/f(x)$ funksiya cheksiz kichik miqdor bo‘ladi. Aksincha, agar $\alpha(x)$ funksiya $x\to a$ bo‘lganda cheksiz kichik miqdor bo‘lsa, unda shu holda $1/\alpha(x)$ funksiya cheksiz katta miqdor bo‘ladi.

Bu teoremani ham isbotsiz qabul etamiz. Masalan, $f(x)=(x-1)^{-3}$ funksiya $x\to 1$ bo‘lganda cheksiz katta miqdor, $\alpha(x)=1/f(x)=(x-1)^3$ funksiya esa $x\to 1$ bo‘lganda cheksiz kichik miqdor bo‘ladi. Shu sababli kelgusida biz asosan cheksiz kichik miqdorlar bilan ish ko‘ramiz.

4.4. Funksiya limitini hisoblash qoidalari. Funksiya limitini uning ta’rifi bo‘yicha hisoblash har doim ham oson emas. Shu sababli funksiya limiti asosan uni hisoblash qoidalari yordamida topiladi.

LEMMA: $y=f(x)$ funksiya $x\to a$ bo‘lganda chekli A limitga ega bo‘lishi uchun uni $f(x)=A+\alpha(x)$ ko‘rinishda bo‘lishi zarur va yetarli. Bunda $\alpha(x)$ funksiya $x\to a$ bo‘lganda biror cheksiz kichik miqdorni ifodalaydi.

Lemma isboti limit va cheksiz kichik miqdor ta’riflaridan kelib chiqadi.

ASOSIY TEOREMA: Agar $x\to a$ bo‘lganda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar chekli A va B limitlarga ega bo‘lsa, unda

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)=A\pm B\ , \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to a}Cf(x)=C\lim_{x\to a}f(x)=CA \quad (C=\text{const.})\ , \qquad (3)$$

$$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)=A\cdot B \qquad (4)$$

va, agar $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B\neq 0$ bo‘lsa,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{A}{B} \qquad (5)$$

tengliklar o‘rinlidir.

Isbot: Teorema shartlari va lemmaga asosan $f(x)=A+\alpha(x)$, $g(x)=B+\beta(x)$ tengliklarni yoza olamiz. Bu yerda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyalar $x\to a$ bo‘lganda cheksiz kichik miqdorlardir. Bu tengliklardan foydalanib

$$f(x)\pm g(x)=[A+\alpha(x)]\pm[B+\beta(x)]=(A\pm B)+[\alpha(x)\pm\beta(x)]$$

natijani olamiz. Cheksiz kichik miqdorlar xossasiga asosan bu yerda $\gamma(x)=\alpha(x)\pm\beta(x)$ funksiya $x\to a$ bo‘lganda cheksiz kichik miqdor bo‘ladi. Bu holda yuqoridagi tenglikdan va lemmaga asosan

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

tenglik o‘rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Teoremadagi qolgan tengliklar ham shu tarzda isbotlanadi.

Asosiy teoremada keltirilgan limit hisoblash qoidalari va $f(x)=C$ (C-const.) o‘zgarmas funksiyaning limiti shu sonni o‘ziga teng bo‘lishidan foydalanib, murakkabroq limitlarni soddaroq limitlarga keltirish orqali hisoblash mumkin.

Masalan,

$$\lim_{x\to1}x^2e^x=\lim_{x\to1}x^2\cdot\lim_{x\to1}e^x=1\cdot e=e,\quad \lim_{x\to1}(x^2+e^x)=\lim_{x\to1}x^2+\lim_{x\to1}e^x=1+e,$$

$$\lim_{x\to1}\frac{e^x}{x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to1}e^x}{\lim\limits_{x\to1}x^2}=\frac{e}{1}=e,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x}=\lim_{x\to\infty}(2-\frac{3}{x})=\lim_{x\to\infty}2-\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}=2-0=2.$$

4.5. Funksiya limitining mavjudlik shartlari. Yuqorida ko‘rsatilganidek, funksiya har doim ham limitga ega bo‘lavermaydi. Shu sababli funksiya limitini hisoblashdan oldin uning mavjudligini tekshirib ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Oldin bu savolga chap va o‘ng limitlar orqali (2-teoremaga qarang) javob berilgan edi. Endi bu savol bo‘yicha quyidagi teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

6-TEOREMA: Agar $x=a$ nuqtaning biror atrofida $\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)$ qo‘sh tengsizlik o‘rinli bo‘lib, $x\to a$ bo‘lganda $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalarining chekli limitlari mavjud va

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\lim_{x\to a}\Psi(x)=A$$

shart bajarilsa, u holda $x\to a$ bo‘lganda $f(x)$ funksiya uchun ham chekli limit mavjud bo‘lib, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Masalan, barcha $x\neq0$ uchun

$$-\frac{1}{x^2}\le\frac{\sin x}{x^2}\le\frac{1}{x^2},\quad \lim_{x\to\infty}(-\frac{1}{x^2})=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2}=0.$$

7-TEOREMA: Agarda $x=a$ nuqtaning biror atrofida $y=f(x)$ funksiya o‘suvchi (yoki kamayuvchi) bo‘lib, yuqoridan (yoki quyidan) biror M (yoki m) soni bilan chegaralangan bo‘lsa, u holda bu funksiya $x\to a$ bo‘lganda limitga ega va bu limit uchun

$$\lim_{x\to a}f(x)\le M\quad(\text{yoki }\lim_{x\to a}f(x)\ge m)$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladi.

Masalan, $x>1$ bo‘lganda

$$f(x)=\frac{2x^4+3x^2}{x^4}=2+\frac{3}{x^2}$$

funksiya kamayuvchi va quyidan m=2 soni bilan chegaralangan. Bu yerda

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(2+\frac{3}{x^2})=2$$

bo‘lib, teorema tasdig‘i o‘rinlidir.

4.6. Ajoyib limitlar. Turli funksiyalarning limitini hisoblashda quyidagi tengliklardan foydalanish mumkin:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{(I)}, \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=2{,}718281.... \quad \text{(II)},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x}=a \quad \text{(III)}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \quad \text{(IV)},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha \quad \text{(V)}.$$

Bu tengliklar matematikada ***ajoyib limitlar*** deb ataladi va ularning isboti keyinchalik (VII bob,§6) beriladi.

4.7. Funksiya limitining bir iqtisodiy tatbig‘i. Endi funksiya limiti tushunchasini bir iqtisodiy masalani yechish uchun tatbiq etamiz.

Shu bobning §2 da bankka yillik R foiz ustama to‘lash sharti bilan omonatga qo‘yilgan jamg‘armaning boshlang‘ich qiymati a_0 bo‘lsa, ustama n-marta hisoblangandan keyin uning qiymati

$$a_n=(1+i)^n a_0,\ n=1, 2, 3, \cdots$$

formula bilan topilishi ko‘rsatilgan edi. Bunda $i=R/k$ bo‘lib, k–yillik R foiz ustama jamg‘armaga yil davomida necha martada hisoblanishini ifodalaydi.

Endi bank jamg‘armaga R foiz ustamani yil davomida uzluksiz ravishda hisoblab borganda, jamg‘arma qiymati qanday aniqlanishini ko‘rib chiqamiz. Bu holda $k\to\infty$ bo‘ladi va har qanday k uchun $t=n/k$ omonatga jamg‘arma qo‘yilgandan keyin o‘tgan yillar sonini ifodalaydi. Bu holda yuqoridagi a_n uchun formula va (II) ajoyib limit yordamida quyidagi natijani olamiz:

$$a_t=\lim_{k\to\infty}a_n=\lim_{k\to\infty}(1+i)^n a_0=a_0\lim_{k\to\infty}(1+\frac{R}{k})^n=a_0\lim_{k\to\infty}\left\{(1+\frac{R}{k})^{\frac{k}{R}}\right\}^{R\frac{n}{k}}=$$

$$=a_0\left\{\lim_{k\to\infty}(1+\frac{R}{k})^{\frac{k}{R}}\right\}^{Rt}=a_0\left\{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x\right\}^{Rt}=a_0e^{Rt}.$$

Bu yerda $k/R=x$, $k\to\infty\Rightarrow x\to\infty$ ekanligidan foydalanilgan. Demak, jamg‘armaga bankning yillik R foiz ustamasi uzluksiz tarzda hisoblab borilsa, uning t yildan keyingi qiymati $a_t=a_0e^{Rt}$ formula bilan aniqlanadi va ko‘rsatkichli funksiya orqali ifodalanadi.

XULOSA

Matematik analiz fanining asosida yotgan eng muhim tushunchalardan biri funksiya limiti bo‘lib hisoblanadi. Undan biz oldin ko‘rib o‘tgan sonli ketma-ketlik limiti tushunchasi xususiy hol sifatida kelib chiqadi. Funksiya limiti yagona ravishda aniqlanadi. Funksiya uchun chap, o‘ng limit tushunchalari ham kiritiladi va ular orqali limitning mavjudlik sharti ifodalanadi. Funksiya limitini bevosita uning ta’rifi asosida hisoblash har doim ham oson kechmaydi va shu sababli funksiya limitini hisoblash qoidalari ishlab chiqilgan. Bunda cheksiz kichik miqdor tushunchasi va uning xossalari muhim ahamiyatga ega bo‘ladi. Bundan tashqari ayrim funksiyalarning limitini hisoblashda ajoyib limitlardan foydalanish mumkin. Funksiya limiti iqtisodiy tadqiqotlarda ham keng qo‘llaniladi va bunga misol sifatida jamg‘arma haqidagi masalani ko‘rsatish mumkin.

Tayanch iboralar

* Funksiyaning limiti * Limitning yagonaligi * Chap limit * O‘ng limit
* Limitning mavjudlik sharti * Cheksiz kichik miqdor * Cheksiz katta miqdor
* Algebraik yig‘indining limiti * Ko‘paytmaning limiti * Bo‘linmaning limiti
* Ajoyib limitlar * Jamg‘arma haqidagi masala

Takrorlash uchun savollar

1. Funksiyaning chekli limiti qanday ta’riflanadi?
2. Funksiyaning cheksiz limiti qanday ta’riflanadi?
3. Funksiyaning limiti yagonami?
4. Funksiyaning chap (o‘ng) limiti deb nimaga aytiladi?
5. Qanday shartda funksiyaning limiti mavjud bo‘ladi?
6. Limiti mavjud bo‘lmagan funksiyaga misol keltiring.
7. Cheksiz kichik miqdor deb nimaga aytiladi?
8. Cheksiz kichik miqdorlar qanday xossalarga ega?
9. Cheksiz kichik miqdorlarning nisbati to‘g‘risida nima deyish mumkin?
10. Qachon ikkita cheksiz kichik miqdor bir xil tartibli deyiladi?
11. Qaysi shartda ikkita cheksiz kichik miqdor o‘zaro ekvivalent deb ataladi?
12. Qachon funksiya cheksiz katta miqdor deb aytiladi?
13. Cheksiz katta miqdorlar qanday xossalarga ega?
14. Cheksiz katta va cheksiz kichik miqdorlar o‘zaro qanday bog‘langan?
15. Funksiya limiti mavjudligining zaruriy va yetarli sharti nimadan iborat?
16. Algebraik yig‘indining limiti qaysi shartda va qanday formula bilan hisoblanadi?
17. Ko‘paytmaning limiti qaysi shartda va qanday formula bilan hisoblanadi?
18. Bo‘linmaning limiti qaysi shartda va qanday formula bilan hisoblanadi?
19. Funksiya limiti mavjudligining zaruriy shartlari haqidagi qanday teoremalarni bilasiz?
20. Ajoyib limitlarni yoza olasizmi?
21. Limit tushunchasining iqtisodiy tatbig‘iga misol keltiring.

Testlardan namunalar

1. Funksiya limiti ta’rifini to‘ldiring: $y=f(x)$ funksiya $x\to a$ bo‘lganda A soniga teng limitga ega deyiladi, agarda ixtiyoriy kichik $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki , $|x-a| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x uchun … bo‘lsa.

A) $|f(x)+A| < \varepsilon$; B) $||f(x)-A| > \varepsilon$; C) $|f(x)+A| > \varepsilon$;
D) $|f(x)-A| < \varepsilon$; E) $|f(x)-A| = \varepsilon$.

2. $y=2x^2+5x-1$ funksiyaning $x\to 2$ bo‘lgandagi limiti topilsin.
A) 10; B) 12; C) 17; D) 21; E) –1.

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ limitni hisoblang:
A) 0; B) ∞; C) $-\infty$; D) 3; E) –1.

4. Ushbu funksiyaning $x=1$ nuqtadagi chap limitini toping:

$$y=\begin{cases} 3x-1, & x<1; \\ 2x+1, & x\geq 1. \end{cases}$$

A) –2; B) –1; C) 1; D) 2; E) 3.

5. Ushbu funksiyaning $x=0$ nuqtadagi o‘ng limitini toping:

$$y=\begin{cases} 3x^2+2x-1, & x\leq 0; \\ 2x^2+1, & x>0. \end{cases}$$

A) –2; B) –1; C) 1; D) 3; E) ∞.

6. Quyidagi funksiyalardan qaysi biri $x\to 0$ bo‘lganda cheksiz kichik miqdor emas ?
A) $\sin x$; B) x^3 ; C) 2^x-1 ; D) $\cos x$;
E) keltirilgan barcha funksiyalar cheksiz kichik miqdor bo‘ladi.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Quyidagi limitlarni hisoblang:

$$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{nx^{n+1}-1}{n^x+1};\qquad b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{(n+1)x^n-nx+1}{x^n+nx^{n-2}-1};\qquad c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^n+\cos nx-n}{\ln(x+n^x)+1}.$$

2. Quyidagi funksiyaning $x=0$ nuqtadagi chap va o‘ng limitini toping:

$$f(x)=\begin{cases} n-\sin nx, & x<0; \\ n-e^{nx}, & x\geq 0. \end{cases}$$

§5. UZLUKSIZ VA UZLUKLI FUNKSIYALAR

- ***Uzluksiz funksiyalar va ularning xossalari.***
- ***Kesmada uzluksiz funksiyalar uchun asosiy teoremalar.***
- ***Funksiyaning uzilish nuqtalari va ularning turlari.***

5.1. Uzluksiz funksiyalar va ularning xossalari. Bu paragrafda matematik analizning muhim tushunchalaridan biri bo‘lgan uzluksiz funksiya tushunchasi bilan tanishib, unga doir asosiy tasdiqlarni ko‘rib o‘tamiz.

<u>1-TA’RIF:</u> Berilgan $y=f(x)$ funksiya o‘zining aniqlanish sohasiga biror atrofi bilan kiruvchi x_0 nuqtada

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \qquad (1)$$

shartni qanoatlantirsa, bu funksiya x_0 nuqtada ***uzluksiz*** deyiladi.

Masalan, oldingi paragrafda $f(x)=x^2$ funksiya uchun $x\to 3$ holda hisoblangan limit qiymatidan foydalanib,

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3} x^2=9=3^2=f(3)$$

ekanligini ko‘ramiz. Demak, $f(x)=x^2$ funksiya $x=3$ nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Yuqoridagi funksiya uzluksizlik shartini, $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$ ekanligini hisobga olib,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0} x)$$

kabi yozish mumkin. Demak, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lishi uchun funksiya olish va limit olish amallarini o‘rnini almashtirish mumkin bo‘lishi kerak ekan.

Amaliy masalalarda funksiya uzluksizligini orttirma tushunchasi orqali tekshirish qulay. Agar x nuqta x_0 nuqta atrofidan olingan bo‘lsa, $x-x_0$ ayirma ***argument orttirmasi*** deyiladi va Δx kabi belgilanadi. Bu holda $f(x)-f(x_0)$ ayirma ***funksiya orttirmasi*** deyiladi va Δf yoki Δy kabi belgilanadi.

Demak, Δx orttirma argumentning o‘zgarishini, Δf esa funksiya o‘zgarishini ifodalaydi. Agarda $x\to x_0$ bo‘lsa, u holda $\Delta x\to 0$ bo‘ladi. Bundan, $x=x_0+\Delta x$ ekanligidan foydalanib, (1) uzluksizlik shartini

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0) \qquad (2)$$

ko‘rinishida yozish mumkin. Bu shartni o‘z navbatida, $\Delta f=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ ekanligidan foydalanib,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f=0 \qquad (3)$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin. Demak $f(x)$ funksiya uzluksiz bo‘lishi uchun argumentning “kichik” Δx o‘zgarishiga funksiyaning ham “kichik” Δf o‘zgarishi mos kelishi kerak.

Misol sifatida $y=f(x)=x^2$ funksiyaning har qanday x_0 nuqtada uzluksiz ekanligini (3) shart yordamida ko‘rsatamiz:

$$\Delta y=\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=$$

$$=x_0^2+2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x^2)-x_0^2=(2x_0+\Delta x)\Delta x\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\Delta f=0\,.$$

2-TA'RIF: Berilgan $y=f(x)$ funksiya biror (a,b) oraliqning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u shu ***oraliqda uzluksiz funksiya*** deyiladi.

Masalan, yuqorida ko'rsatilganga asosan, $f(x)=x^2$ funksiya ixtiyoriy (a,b) oraliqda uzluksizdir. $y=(1-x^2)^{-1}$ funksiya esa $(-1,1)$ va uning ichida joylashgan ixtiyoriy oraliqda uzluksiz bo'ladi, ammo $x=\pm 1$ nuqtalardan kamida bittasi kirgan sohalarda uzluksiz bo'lmaydi.

Geometrik nuqtai-nazardan biror (a,b) oraliqda uzluksiz funksiyani grafigi shu oraliqda yaxlit bir (uzluksiz) chiziqdan iborat funksiya deb qarash mumkin. Masalan, $y=x^2$ funksiya grafigi ixtiyoriy (a,b) oraliqda uzluksiz bo'lgan paraboladan iborat.

ASOSIY TEOREMA: Barcha asosiy elementar funksiyalar o'zining aniqlanish sohasidagi har bir x_0 nuqtada uzluksizdir.

Bu teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

1-TEOREMA: Agarda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ funksiyalar ham bu nuqtada uzluksiz bo'ladi. Agarda qo'shimcha ravishda $g(x_0)\neq 0$ shart bajarilsa, $f(x)/g(x)$ nisbat ham x_0 nuqtada uzluksizdir.

Isbot: Teoremaning isboti limitlar xossalaridan va uzluksizlikning (1) shartidan kelib chiqadi. Masalan, $h(x)=f(x)\pm g(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligini ko'rsatamiz. Teorema shartiga asosan

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0), \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$$

bo'lgani uchun, algebraik yig'indining limiti formulasiga asosan,

$$\lim_{x\to x_0} h(x)=\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm \lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)\pm g(x_0)=h(x_0).$$

Bu yerdan, ta'rifga asosan, $h(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi. Teoremaning qolgan qismini isboti o'quvchilarga mustaqil ish sifatida tavsiya etiladi.

2-TEOREMA: Agar $y=g(x)$ funksiya x_0 nuqtada, $z=f(y)$ funksiya esa $y_0=g(x_0)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, unda $f(g(x))=F(x)$ murakkab funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Teoremani isboti ustida to'xtalib o'tirmaymiz.

Asosiy teorema va bu ikkala teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija: Barcha elementar funksiyalar o'zlarining aniqlanish sohasidagi har bir x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Bu natijaga ishonch hosil etish uchun elementar funksiyalar ta'rifini eslash kifoyadir.

3-TA'RIF: Berilgan $y=f(x)$ funksiya biror $x=a$ nuqtada aniqlangan bo'lib, bu nuqtada uning o'ng (chap) limiti mavjud va

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)=f(a) \quad (\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a-0)=f(a))$$

shartni qanoatlantirsa, u holda $f(x)$ funksiya a nuqtada ***o'ngdan(chapdan) uzluksiz*** deyiladi.

Masalan,

$$y=f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x\geq 3 \\ 2x-1, & x<3 \end{cases} \tag{4}$$

funksiya $x=3$ nuqtada o'ngdan uzluksiz, chunki

$$\lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3}(2x+1)=7=f(3).$$

Ammo bu funksiya $x=3$ nuqtada chapdan uzluksiz emas, chunki

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3}(2x-1)=5\neq f(3).$$

Aksincha,

$$y=f(x)=\begin{cases} x+1, & x\leq 1 \\ x^2-1, & x>1 \end{cases} \tag{5}$$

funksiya $x=1$ nuqtada chapdan uzluksiz, o'ngdan esa uzluksiz emas.

Oldin ko'rib o'tilgan

$$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0 \end{cases} \tag{6}$$

funksiya $x=0$ nuqtada chapdan ham, o'ngdan ham uzluksiz bo'lmaydi, chunki

sgn(0–0)= $-1\neq 0$=sgn(0), sgn(0+0)= $1\neq 0$=sgn(0).

3-TEOREMA: Berilgan $y=f(x)$ funksiya qaralayotgan $x=a$ nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun bu nuqtada u ham chapdan, ham o'ngdan uzluksiz bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu teorema isboti 1 va 2-ta'riflardan kelib chiqadi.

Izoh: $y=f(x)$ funksiya uchun $x=a$ nuqtada chap va o'ng limitlar mavjud hamda ular o'zaro teng, ya'ni $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$ ekanligidan har doim ham uni bu nuqtada uzluksiz bo'lishi kelib chiqavermaydi. Masalan,

$$y=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases} \tag{7}$$

funksiya uchun, 1-ajoyib limitga asosan,

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1\neq 0=f(0).$$

Demak, bu funksiya $x=0$ nuqtada funksiya chapdan ham, o'ngdan ham uzluklidir.

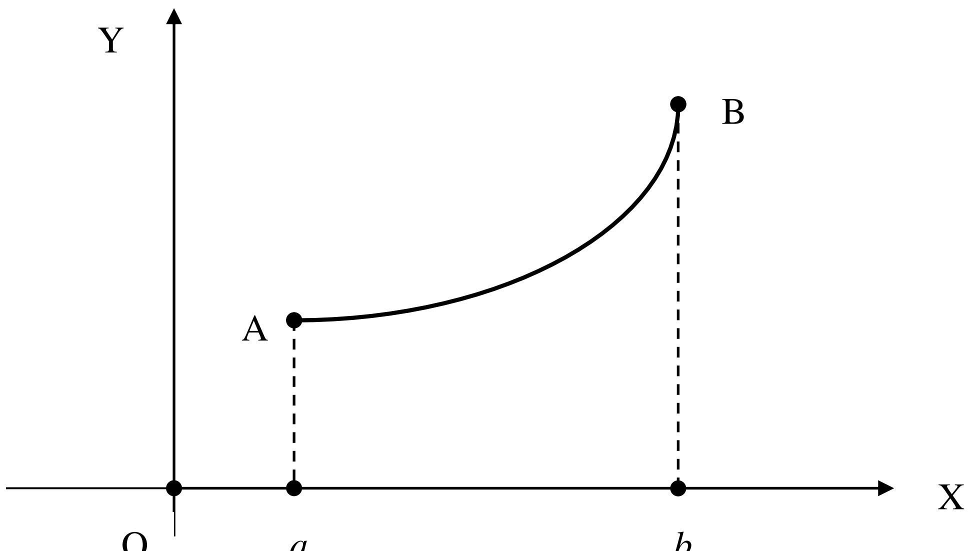
5.2. Kesmada uzluksiz funksiyalar uchun asosiy teoremalar. Dastlab funksiyaning kesmada uzluksizligi tushunchasini kiritamiz.

4-TA'RIF: Berilgan $y=f(x)$ funksiya biror (a,b) oraliqning har bir nuqtasida uzluksiz, $x=a$ ($x=b$) chegaraviy nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz bo'lsa , bu funksiya $[a,b]$ ***kesmada uzluksiz*** deyiladi.

Masalan, $y=\sin x$, $y=x^2$ funksiyalar har qanday $[a,b]$ kesmada uzluksizdir. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, uning grafigini shu kesmaga mos keluvchi qismi yaxlit (uzluksiz) chiziqdan iborat bo'ladi. Uzluksizlikning bu geometrik talqini uzluksiz funksiyalarning quyidagi xossalari va ularning isbotini tasavvur etishga imkon beradi.

4-TEOREMA: Agarda $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, bu kesmada kamida bitta shunday x_1 (yoki x_2) nuqta mavjudki, har qanday $x\in[a,b]$ uchun $f(x_1)\geq f(x)$ (yoki $f(x_2)\leq f(x)$) munosabat o'rinli bo'ladi.

Isbot: Ushbu teoremani funksiya grafigiga asoslangan va shu sababli qat'iymas bo'lgan isbotini keltirish bilan chegaralanamiz. $y=f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmada grafigining OY o'qi bo'ycha eng yuqorida va eng quyida joylashgan nuqtalaridan bittadan vakil olib, ularning abssissasini mos ravishda x_1 va x_2 deb belgilaymiz. 47-rasmda bu nuqtalar A va B, ularning abssissasi $x_1=a$ va $x_2=b$ bo'ladi.



47-rasm

Bu holda ixtiyoriy $x\in[a,b]$ uchun teoremadagi tasdiqlar bajariladi.

Bu teoremadagi $f(x_1)$ yoki $f(x_2)$ berilgan $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ ***kesmadagi eng katta yoki eng kichik qiymati*** deb ataladi va

$$\max_{x\in[a,b]} f(x)=M\,, \qquad \min_{x\in[a,b]} f(x)=m$$

kabi belgilandi.

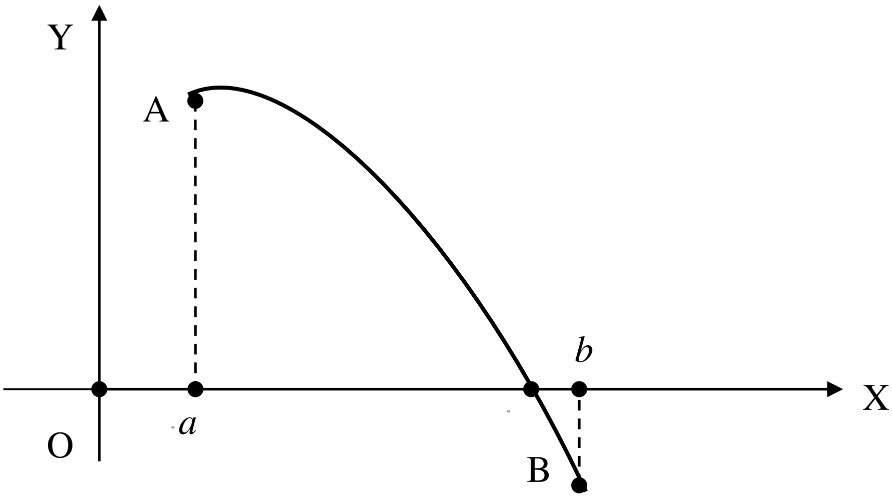
Masalan, $f(x)=x^2$, $x\in[2,4]$ funksiya uchun $x_1=2$, $x_2=4$ bo'ladi, chunki bu kesmada $m=4\leq x^2\leq 16=M$, ya'ni $f(2)\leq f(x)\leq f(4)$ munosabat o'rinli.

Kiritilgan yangi tushunchadan foydalanib, 4-teoremani quyidagicha ifodalash mumkin.

TEOREMA (Veyershtrass): Berilgan $[a,b]$ kesmada uzluksiz $y=f(x)$ funksiya shu kesmada o‘zining eng katta M va eng kichik m qiymatiga erishadi, ya’ni bu kesmada kamida bittadan shunday x_1 va x_2 nuqta mavjudki, $f(x_1)=M$ va $f(x_2)=m$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

5-TEOREMA: Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va uning chegaralarida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, ya’ni $f(a)\cdot f(b)<0$ shart bajarilsa, u holda kamida bitta shunday $c\in(a,b)$ nuqta mavjudki, unda $f(c)=0$ tenglik bajariladi.

Isbot: Masalan, $f(a)>0$, $f(b)<0$ bo‘lsin.Bu holda $y=f(x)$ funksiyaning grafigi $x\in[a,b]$ bo‘lganda AB uzluksiz chiziqdan iborat bo‘lib, uning $x=a$ abssissali A uchi OX koordinata o‘qidan yuqorida, ikkinchi $x=b$ abssissali B uchi esa undan pastda bo‘ladi (48-rasmga qarang).



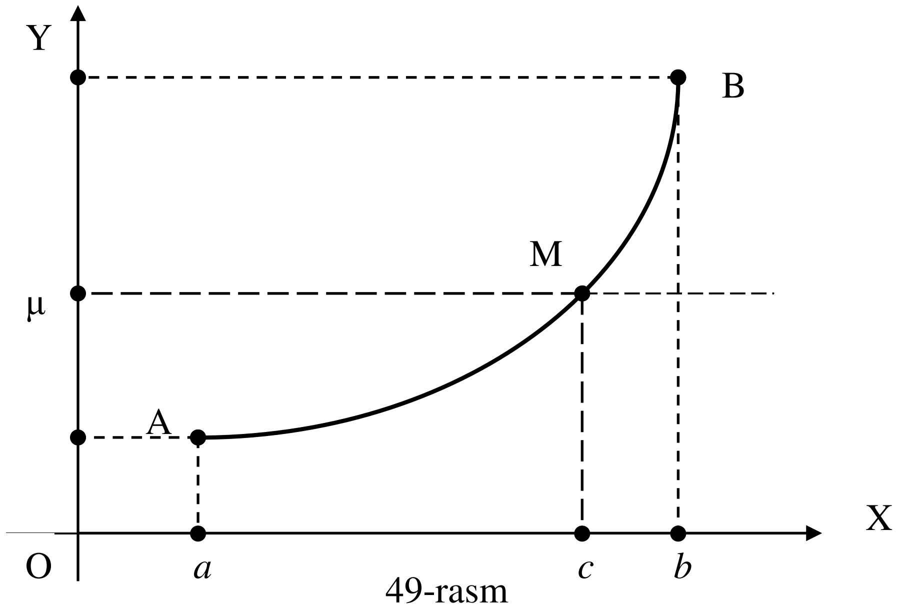
48-rasm

Shu sababli funksiya grafigi OX o‘qini kamida bitta $x=c$ nuqtada kesib o‘tadi va shu nuqtada $f(c)=0$ bo‘ladi.

Bu teorema yordamida $f(x)=0$ ko‘rinishdagi tenglamaning ildizlari yotgan oraliqlarni topish mumkin. Masalan, $x-\cos x=0$ tenglama $(0,\pi)$ oralikda ildizga ega, chunki $f(x)=x-\cos x$ funksiya $[0,\pi]$ kesmada uzluksiz va $f(0)=-1<0$, $f(\pi)=\pi+1>0$. Demak, qandaydir $x_0\in(0,\pi)$ nuqtada $f(x_0)=x_0-\cos x_0=0$ bo‘ladi va x_0 berilgan tenglama ildizini ifodalaydi.

6-TEOREMA: Agarda $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va $f(a)=A$, $f(b)=B$, $A\neq B$ bo‘lsa, har qanday $\mu\in(A,B)$ son uchun kamida bitta shunday $c\in(a,b)$ nuqta topiladiki, unda $f(c)=\mu$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Bu teoremani ham uzluksiz funksiyaning geometrik talqiniga asoslanib isbotlaymiz (49-rasmga qarang).



49-rasm

OY koordinata o‘qida joylashgan va A<μ<B shartni qanoatlantiradigan μ nuqtadan OX o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazsak, bu to‘g‘ri chiziq $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, funksiyaning uzluksiz chiziqdan iborat grafigini hech bo‘lmaganda bitta M nuqtada kesib o‘tadi. Shu nuqtaning abssissasi $x=c$ uchun teoremadagi $f(c)=\mu$ tenglik bajariladi.

Masalan, $f(x)=x^3$, $x\in[1,3]$, funksiya uchun A=1, B=27 va har qanday $\mu\in(1,27)$ uchun $c=\sqrt[3]{\mu}$ deb olsak, $f(c)=c^3=(\sqrt[3]{\mu})^3=\mu$ tenglik bajariladi.

Isbotlangan teoremadan ushbu natija kelib chiqadi.

NATIJA: Agarda $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va bu yerda uning eng katta va eng kichik qiymatlari mos ravishda M va m bo‘lsa, u holda funksiyaning $x\in[a,b]$ bo‘lgandagi qiymatlari $[m, M]$ kesmani to‘liq to‘ldiradi.

Kelgusida ayrim masalalarni qarashda bizga tekis uzluksizlik tushunchasi kerak bo‘ladi.

5-TA’RIF: Berilgan $y=f(x)$ funksiya uchun ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni bo‘yicha shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ soni topilsaki, biror $D\subset D\{f\}$ sohadagi $|x_1-x_2|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtalar uchun $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, unda $y=f(x)$ funksiya D sohada ***tekis uzluksiz*** deb ataladi.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, agar $y=f(x)$ funksiya biror D sohada tekis uzluksiz bo‘lsa, unda bu funksiya D sohaning har bir x_0 nuqtasida albatta uzluksiz bo‘ladi. Haqiqatan ham tekis uzluksizlik ta’rifida $x_2=x_0$ va $x_1=x$ deb olsak, unda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni bo‘yicha shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ soni topiladiki,

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Ammo teskari tasdiq har doim ham o‘rinli emas. Masalan, $f(x)=\sin(1/x)$ funksiya (0,1) oraliqda uzluksiz, lekin uni bu oraliqda tekis uzluksiz emasligini ko‘rsatish mumkin.

6-TEOREMA (Kantor): Agar $y=f(x)$ funksiya biror $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, unda bu funksiya shu kesmada tekis uzluksiz bo‘ladi.

Teoremani isbotsiz qabul etamiz.

Bu teoremadan yuqorida ko'rilgan $f(x)=\sin(1/x)$ funksiya ixtiyoriy [ε, 1] kesmada (ε>0) tekis uzluksiz ekanligi kelib chiqadi, chunki u bu kesmada uzluksiz.

5.3. Funksiyaning uzilish nuqtalari va ularning turlari. Endi funksiyaning uzlukliligi ustida to'xtalib o'tamiz.

6-TA'RIF: $y=f(x)$ funksiya uchun uzluksizlikka qo'yiladigan shartlardan kamida bittasi bajarilmaydigan nuqtalar uning ***uzilish nuqtalari***, funksiyaning o'zi esa bu nuqtalarda ***uzlukli*** deb ataladi.

Ta'rifga asosan, biror $x=a$ nuqtada $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ mavjud va $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq f(a)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ yoki $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ mavjud bo'lmasa, bu nuqta $y=f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi bo'ladi.

Masalan, $f(x)=(1-x^2)^{-2}$ funksiya uchun $x=\pm1$ uning uzilish nuqtasi bo'ladi, chunki bu nuqtalarda $\lim\limits_{x\to\pm1} f(x)=\infty$. (6) signum funksiya uchun $x=0$ uzilish nuqtasi bo'ladi , chunki $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)$ mavjud emas.

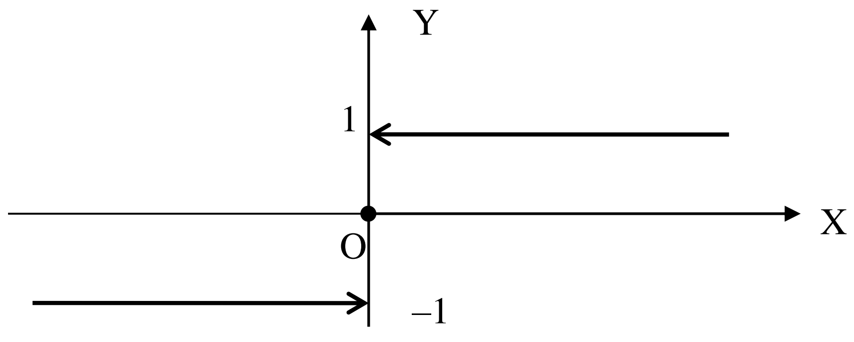
Funksiyaning uzilish nuqtalari uch sinfga ajratiladi.

7-TA'RIF: Agar $y=f(x)$ funksiyaning $x=a$ uzilish nuqtasida $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ limit mavjud, ammo $a\notin D\{f\}$ yoki $f(a)\neq A$ bo'lsa, unda $x=a$ funksiyaning ***tuzatib bo'ladigan uzilish nuqtasi*** deyiladi.

Bu yerda $x=a$ funksiyaning tuzatib bo'ladigan uzilish nuqtasi deyilishiga sabab shuki, agar $f(a)=A$ deb olsak, unda funksiya $x=a$ nuqtada uzluksiz funksiyaga aylanadi. Masalan, yuqorida ko'rib o'tilgan (7) funksiya $f(x)=\sin x/x$ uchun $f(0)=0$ demasdan, $f(0)=1$ desak, u hamma joyda uzluksiz bo'ladi.

8-TA'RIF: Agarda $x=a$ nuqta $y=f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi bo'lib, bu nuqtada funksiyaning chap $f(a-0)$ va o'ng $f(a+0)$ limitlari mavjud hamda chekli sonlardan iborat bo'lsa, $x=a$ funksiyaning ***I tur uzilish nuqtasi*** deyiladi. Bunda $\Delta=f(a+0)-f(a-0)$ soni funksiyaning a uzilish nuqtasidagi ***sakrashi*** deb ataladi.

Masalan, (6) signum funksiya uchun $x=0$ I tur uzilish nuqtasi bo'ladi. Bu holda $\operatorname{sgn}(0-0)=-1$, $\operatorname{sgn}(0+0)=1$ va funksiya bu nuqtada o'z qiymatini uzluksiz ravishda o'zgartirmasdan, $\Delta=1-(-1)=2$ sakrash bilan o'zgartiradi (50-rasm).



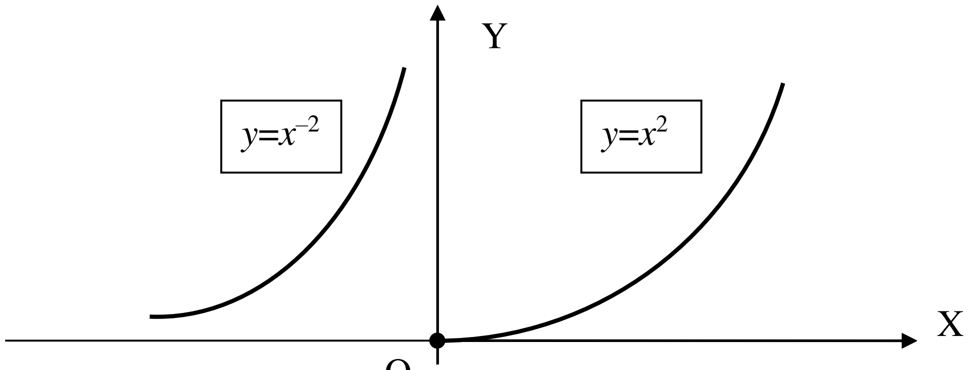
50-rasm

8-TA'RIF: Agarda $y=f(x)$ funksiyaning $x=a$ uzilish nuqtasida uning chap va o'ng limitlaridan kamida bittasi cheksiz yoki mavjud bo'lmasa, $x=a$ funksiyaning ***II tur uzilish nuqtasi*** deyiladi.

Masalan,

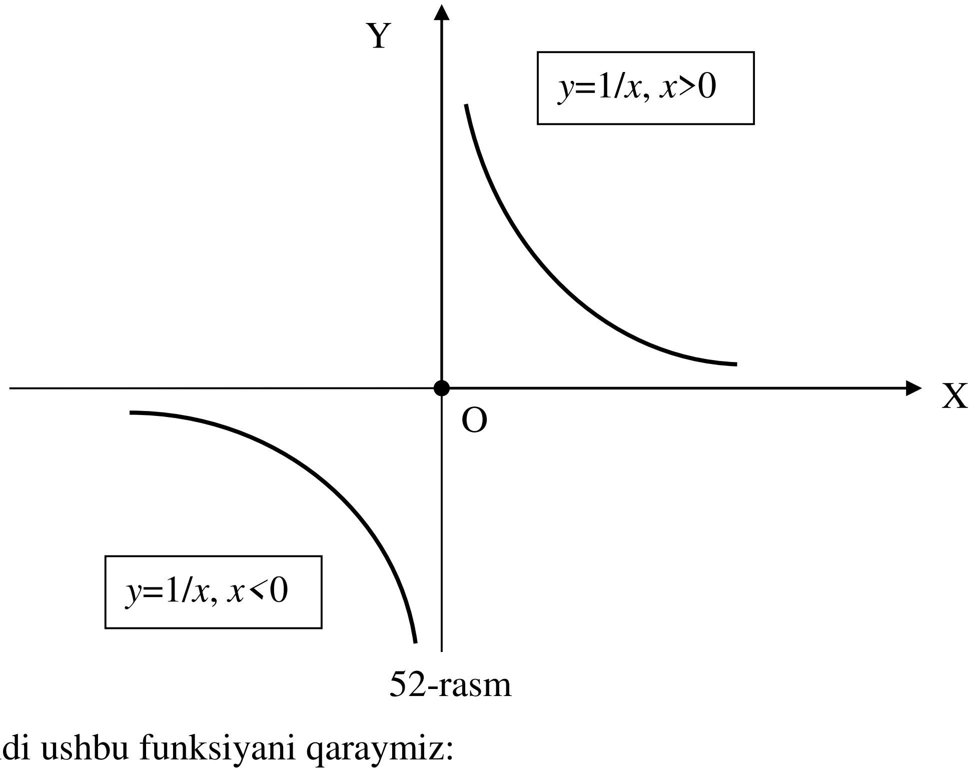
$$y=\begin{cases} x^2, x \ge 0 \\ x^{-2}, x < 0 \end{cases}$$

funksiya $x=0\in D\{f\}$ nuqtada II tur uzilishga ega, chunki $f(0+0)=0$, $f(0-0)=\infty$ bo‘lmoqda (51-rasmga qarang).



51-rasm

$f(x)=x^{-1}$ funksiya uchun $x=0\notin D\{f\}$ II tur uzilish nuqtasi bo‘ladi, chunki bu nuqtada $f(0-0)=-\infty$ va $f(0+0)=\infty$, ya’ni chap va o‘ng limitlardan ikkalasi ham cheksiz bo‘lmoqda (52-rasmga qarang).



52-rasm

Endi ushbu funksiyani qaraymiz:

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x}, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ \sin\dfrac{1}{x}, & x>0. \end{cases}$$

Bu funksiya barcha nuqtalarda, jumladan x=0 nuqtada aniqlangan. Bunda $x\to 0$ bo‘lganda $|\cos(1/x)|\leq 1$, ya’ni chegaralangan funksiya bo‘lgani uchun

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}=0=f(0)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Demak, bu funksiya uchun x=0 nuqtada chap limit mavjud va bundan tashqari u chapdan uzluksiz. Endi bu funksiyaning x=0 nuqtadagi o‘ng limitini qaraymiz. Agar $x=(2\pi n+\pi/2)^{-1}$, $n\in N$, deb olsak, unda $n\to\infty$ bo‘lganda $x\to 0+0$ bo‘ladi va bu holda

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{n\to\infty}\sin(2\pi n+\frac{\pi}{2})=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}1=1$$

natijani olamiz. Xuddi shu tarzda $x=(2\pi n)^{-1}$, $n\in N$, deb olsak, unda $n\to\infty$ bo‘lganda yana $x\to 0+0$ bo‘ladi, ammo bu holda

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{n\to\infty}\sin 2\pi n=\lim_{n\to\infty}\sin 0=\lim_{n\to\infty}0=0$$

natijaga kelamiz. Oxirgi ikki tenglikdan qaralayotgan funksiyaning x=0 nuqtada o‘ng limiti mavjud emasligi kelib chiqadi. Demak, bu funksiya uchun x=0 II tur uzilish nuqtasi bo‘ladi.

XULOSA

Funksiyaning eng muhim xususiyatlaridan biri uning uzluksizligi bo‘lib hisoblanadi. Bunga sabab shuki, atrofimizdagi ko‘p jarayonlar uzluksiz ravishda davom etadi va ular uzluksiz funksiyalar orqali ifodalanadi. Funksiya uzluksizligi uning limiti orqali aniqlanadi. Oraliqda uzluksiz funksiyani grafigi uzluksiz, yaxlit chiziqdan iborat funksiya singari tasavvur etish mumkin. Barcha asosiy elementar funksiyalar o‘zlarining aniqlanish sohasida uzluksiz bo‘ladi. Kesmada uzluksiz funksiya shu kesmada o‘zining eng katta va eng kichik qiymatiga erishadi.

Biror nuqtada uzluksiz bo‘lmagan funksiya shu nuqtada, bu nuqta esa uning uzilish nuqtasi deyiladi. Uzilish nuqtalari atrofida funksiya qanday qiymatlar qabul qilishiga qarab, ular tuzatib bo‘ladigan, I va II tur uzilish nuqtalariga ajratiladi.

Tayanch iboralar

* Funksiyaning nuqtadagi uzluksizligi * Argument orttirmasi * Funksiya orttirmasi * Uzluksizlikni orttirma orqali ifodasi * Oraliqda uzluksizlik * O‘ng tomondan uzluksizlik * Chap tomondan uzluksizlik * Kesmada uzluksizlik * Kesmadagi eng katta qiymat * Kesmadagi eng kichik qiymat * Veyershtrass teoremasi * Tekis uzluksizlik * Kantor teoremasi * Uzilish nuqtalari * Tuzatib bo‘ladigan uzilish nuqtalari * I tur uzilish nuqtalari * II tur uzilish nuqtalari

Takrorlash uchun savollar

1. Qachon funksiya nuqtada uzluksiz deyiladi?
2. Argument va funksiya orttirmalari qanday aniqlanadi?
3. Orttirmalar tilida funksiya uzluksizligi qanday ifodalanadi?

4. Qaysi shartda funksiya oraliqda uzluksiz deyiladi?
5. Asosiy elementar funksiyalar uzluksizligi to‘g‘risida nima deyish mumkin?
6. Uzluksiz funksiyalarning asosiy xossalari nimalardan iborat?
7. Elementar funksiyalar uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?
8. Qachon funksiya nuqtada chap (o‘ng) tomondan uzluksiz deyiladi?
9. Funksiyaning nuqtada uzluksizligining zaruriy va yetarli sharti nimadan iborat?
10. Qaysi shartda funksiya kesmada uzluksiz deyiladi?
11. Funksiyaning kesmadagi eng katta qiymati deb nimaga aytiladi?
12. Funksiyaning kesmadagi eng kichik qiymati deb nimaga aytiladi?
13. Veyershtrass teoremasida nima tasdiqlanadi?
14. Qachon funksiya biror sohada tekis uzluksiz deyiladi?
15. Uzluksizlik va tekis uzluksizlik orasida qanday bog‘lanish mavjud?
16. Kantor teoremasida qanday tasdiq keltiriladi?
17. Funksiyaning uzilish nuqtalari deb nimaga aytiladi?
18. Tuzatib bo‘ladigan uzilish nuqtasi nima?
19. I tur uzilish nuqtasi qanday ta’riflanadi?
20. Qaysi shartda uzilish nuqtasi II turga kiritiladi?

Testlardan namunalar

1. $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi uzluksizlik sharti qayerda noto‘g‘ri ifodalangan ?
   A) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$; B) $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$; C) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f=0$;
   D) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0$; E) Barcha javoblarda to‘g‘ri ifodalangan.

2. Teoremani yakunlang: Asosiy elementar funksiyalar … uzluksiz .
   A) barcha nuqtalarda; B) ba’zi bir nuqtalarda; C) $(0;\infty)$ sohada ;
   D) aniqlanish sohasiga tegishli har bir nuqtada ; E) $(-\infty;0)$ sohada .

3. Agarda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x=x_0$ nuqtada uzluksiz bo‘lsa, shu nuqtada quyidagi funksiyalardan qaysi biri uzluksiz bo‘lishi shart emas ?
   A) $f(x)+g(x)$; B) $f(x)-g(x)$; C) $f(x)\cdot g(x)$; D) $f(x)/g(x)$;
   E) Barcha funksiyalar uzluksiz bo‘ladi.

4. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz va $g(x_0)\neq 0$ bo‘lsa, shu nuqtada quyidagi funksiyalarning qaysi biri uzluksiz bo‘lmaydi ?
   A) $f(x)+g(x)$; B) $f(x)-g(x)$; C) $f(x)\cdot g(x)$; D) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$
   E) Ko‘rsatilgan barcha funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

5. Qaysi shartda $y=f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada chapdan uzluksiz bo‘ladi ?
   A) $f(a+0)=f(a)$; B) $f(a-0)=f(a)$; C) $f(a-0)=f(a+0)$;
   D) $f(a-0)\neq f(a+0)$; E) To‘g‘ri javob keltirilmagan.

6. Qaysi shartda $y=f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada o‘ngdan uzluksiz bo‘ladi ?
A) $f(a+0)=f(a)$; B) $f(a-0)=f(a)$; C) $f(a-0)=f(a+0)$;
D) $f(a-0)\neq f(a+0)$; E) To‘g‘ri javob keltirilmagan.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Quyidagi funksiyani x=0 nuqtada uzluksiz ekanligini ko‘rsating:

$$f(x)=\begin{cases} 1-\cos^n x, & x\leq 0; \\ \sin(n+1)x, & x>0. \end{cases}$$

2. Quyidagi funksiya uchun x=0 I tur uzilish nuqta ekanligini ko‘rsating va uning bu nuqtadagi sakrashini toping:

$$f(x)=\begin{cases} n-\ln(1+nx), & x\leq 0; \\ 1+2n\cos(n+1)x, & x>0. \end{cases}$$

VII BOB. DIFFERENSIAL HISOB

Funksiyaning maksimum – minimumini yoki urinmasini topish va shunga oʻxshash juda koʻp murakkab masalalar bizning usulda hayratga qoldiradigan darajada oson va yengil yechiladi.
Leybnits G.W.

§1. FUNKSIYA HOSILASI , UNING MEXANIK GEOMETRIK VA IQTISODIY MA'NOSI

- ***Hosila tushunchasiga olib keladigan amaliy masalalar.***
- ***Hosila ta'rifi va uning amaliy ma'nolari.***
- ***Differensiallanuvchi funksiya va uning uzluksizligi.***
- ***Hosilaning iqtisodiy tatbiqlari.***

Differensial hisob oliy matematikaning eng asosiy va eng kuchli, samarali usullaridan biri boʻlib hisoblanadi. Matematik tahlilning bu boʻlimi nisbatan yosh boʻlib, uning dastlabki kurtaklari XVII asrda Ferma, Paskal, Dekart kabi matematiklarning ishlarida shakllangan va XVIII asrda buyuk ingliz olimi Nyuton (1642–1727) va mashhur olmon matematigi Leybnits (1646–1716) tomonidan unga asos solingan va turli masalalarni yechish uchun keng qoʻllanilgan.

1.1. Hosila tushunchasiga olib keladigan amaliy masalalar. Differensial hisob asosida funksiya hosilasi tushunchasi yotadi va u tarixan quyidagi amaliy masalalarni yechish jarayonida paydo boʻlgan.

❖ **Oniy tezlik masalasi.** Bizga ma'lumki, toʻgʻri chiziq boʻyicha tekis harakat qilayotgan moddiy nuqtaning ixtiyoriy t vaqtdagi tezligi $v(t)=v_0$=const, ya'ni oʻzgarmas boʻladi. Bunda harakat boshlangandan keyin t vaqt oʻtgach nuqtaning bosib oʻtgan masofasi $S(t)=vt$ funksiya bilan aniqlanadi va ***harakat tenglamasi*** deb ataladi. Endi bu nuqta toʻgʻri chiziq boʻyicha notekis harakatda boʻlgan holni qaraymiz. Bu holda moddiy nuqtaning tezligi t vaqt oʻtishi bilan oʻzgarib boradi va biror $v=v(t)$ funksiyani hosil qiladi. Moddiy nuqtaning t vaqt momentidagi tezligi ***oniy tezlik*** deb ataladi. Biz notekis harakat tenglamasi $S=S(t)$ ma'lum boʻlgan taqdirda moddiy nuqtaning biror t_0 vaqtdagi $v_0=v(t_0)$ oniy tezligini topish masalasini qaraymiz. Buning uchun ikkinchi bir $t=t_0+\Delta t$ vaqtni qaraymiz. Unda moddiy nuqtaning koʻrilayotgan $(t_0, t)=(t_0, t_0+\Delta t)$ vaqt oraligʻida bosib oʻtgan masofasi

$$S(t)–S(t_0)= S(t_0+\Delta t)–S(t_0)= \Delta S,$$

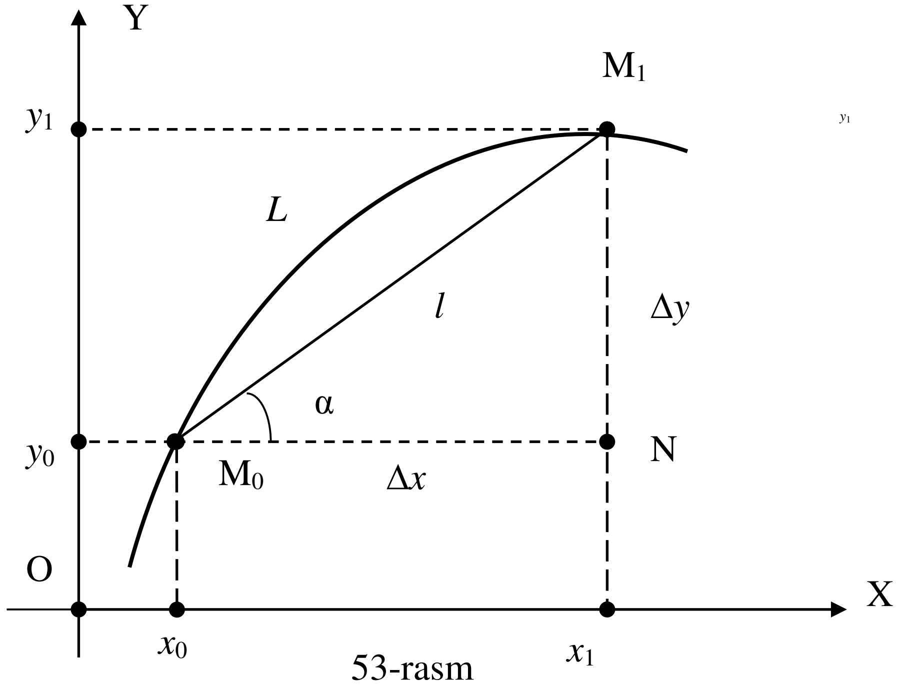
ya'ni harakat tenglamasini ifodalovchi $S=S(t)$ funksiyaning orttirmasiga teng boʻladi. Agar notekis harakatdagi moddiy nuqtaning bu vaqt oraligʻidagi oʻrtacha tezligini $\bar{v}(\Delta t)$ deb belgilasak, uning qiymati $\bar{v}(\Delta t)=\Delta S/\Delta t$ formula bilan aniqlanadi. Bu holda $v(t_0)$ oniy tezlik $\bar{v}(\Delta t)$ oʻrtacha tezlikning $t\to t_0$, ya'ni $\Delta t\to 0$ boʻlgandagi limiti kabi aniqlanadi. Demak, notekis harakatda $v(t_0)$ oniy tezlik

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}(\Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad (1)$$

limitni hisoblash orqali topiladi.

❖ **Urinma masalasi.** Dastlab tekislikdagi berilgan L chiziqning $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasiga o‘tkazilgan urinma tushunchasini kiritamiz.

Berilgan L chiziqda yotuvchi ikkita M_0 va M_1 nuqtalarni tutashtiruvchi M_0M_1 kesma ***vatar*** deb ataladi (53-rasmga qarang).



53-rasm

Bu vatar yotgan to‘g‘ri chiziq M_0 nuqtadan o‘tgani uchun uning tenglamasi (IV bob, §2, (1) formulaga qarang)

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad k = tg\alpha = \frac{|NM_1|}{|NM_0|} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

<u>1-TA’RIF:</u> Agar L chiziqning M_0M_1 vatari yotgan l to‘g‘ri chiziq M_1 nuqta L chiziq bo‘ylab M_0 nuqtaga cheksiz yaqinlashib borganda ($M_1 \to M_0$) biror l_0 to‘g‘ri chiziqqa cheksiz yaqinlashib borsa ($l \to l_0$), unda l_0 berilgan L chiziqning M_0 nuqtadagi ***urinmasi*** deyiladi.

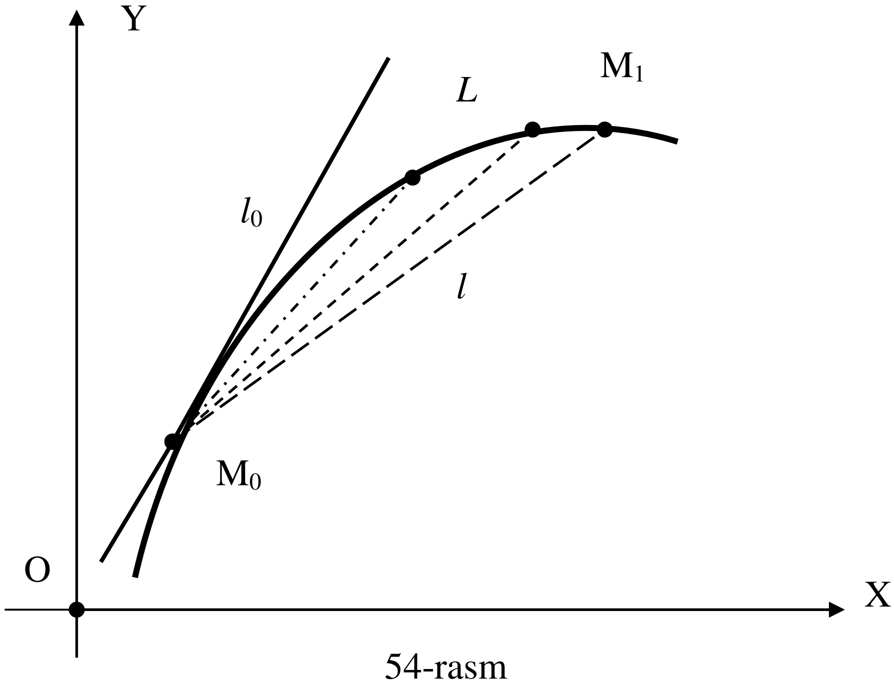
Egri chiziqning $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi urinmasi shu nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq bo‘lgani uchun (54-rasmga qarang) uning ham tenglamasi vatar tenglamasi singari $y - y_0 = k_0(x - x_0)$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu tenglamadagi k_0 burchak koeffitsiyentini topish uchun L chiziq tenglamasini ifodalovchi $y = \varphi(x)$ funksiya berilgan deb hisoblaymiz. Urinma ta’rifiga asosan

$$M_1 \to M_0 \Rightarrow x_1 \to x_0, \, y_1 \to y_0 \Rightarrow \Delta x \to 0, \Delta y \to 0$$

bo‘lgani uchun M_0M_1 vatarning k burchak koeffitsiyenti uchun yuqorida keltirilgan formulaga asosan

$$k_0 = \lim_{M_1 \to M_0} k = \lim_{M_1 \to M_0} tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} \qquad (2)$$

natijani olamiz.



54-rasm

❖ **Mehnat unumdorligi masalasi.** Ishchining ish kuni davomidagi mehnat unumdorligi o‘zgaruvchi miqdor bo‘ladi. Ertalab ish kuni boshlangach, ma’lum bir paytgacha u ishga kirishish jarayonida bo‘lib, bu davrda uning mehnat unumdorligi oshib boradi. So‘ngra ma’lum bir vaqt davomida ishchi deyarli bir xil mehnat unumdorligi bilan ishini davom ettiradi. Ish kuni oxiriga yaqinlashgan sari toliqish natijasida ishchining mehnat unumdorligi pasayib boradi. Shunday qilib, ish kuni davomida t vaqt o‘zgarib borishi bilan ishchining mehnat unumdorligi biror $z=z(t)$ funksiya orqali ifodalanadi. Uni topish uchun ishchining ish kuni boshlangandan keyin t vaqt o‘tgach ishlab chiqargan mahsulot hajmini ifodalovchi $h=h(t)$ funksiya ma’lum deb olamiz. Bu funksiya yordamida ishchining $t=t_0$ vaqtdagi $z_0=z(t_0)$ mehnat unumdorligini topamiz. Bu maqsadda ish kunining t_0 va $t_1=t_0+\Delta t$ vaqt oralig‘ini qaraymiz. Bu vaqt oralig‘ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi $h(t_0+\Delta t)- h(t_0)=\Delta h$ kabi aniqlanadi. U holda uzunligi Δt bo‘lgan bu vaqt oralig‘idagi ishchining o‘rtacha mehnat unumdorligi $\bar{z}(\Delta t)=\Delta h/\Delta t$ nisbat orqali aniqlanadi. Bu yerdan ishchining $t=t_0$ vaqtdagi $z_0=z(t_0)$ mehnat unumdorligini topish uchun $\Delta t\to 0$ deb olishimiz kerak va natijada

$$z(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{z}(\Delta t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta t} \qquad (3)$$

formulaga ega bo‘lamiz.

Bu uchala masala mazmunan turlicha bo‘lsa ham, ularni yechish bir xil matematik usulda amalga oshirilganligi va bu yechimlar (1)–(3) formulalar orqali bir xil ko‘rinishida ifodalanganligini ta’kidlab o‘tamiz.

1.2. Hosila ta’rifi va uning amaliy ma’nolari. Yuqoridagi masalalarni yechish uchun amalga oshirilgan ishlarni umumiy holda qaraymiz. Bizga biror $y=f(x)$ funksiya berilgan. Bu funksiyaning aniqlanish sohasiga kiruvchi x_0 va $x=x_0+\Delta x$ argument qiymatlarini qaraymiz, ya’ni x_0 nuqtada argumentga Δx orttirma beramiz. Argumentning bu Δx orttirmasiga mos keluvchi $y=f(x)$ funksiyaning

$\Delta y=\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ orttirmasini topamiz. So‘ngra Δf funksiya orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbatini $\Delta x\to 0$ holdagi limitini hisoblaymiz.

2-TA'RIF: Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning Δf orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbati $\Delta x\to 0$ bo‘lganda chekli limitga ega bo‘lsa, bu limit qiymati funksiyaning x_0 nuqtadagi ***hosilasi*** deb ataladi.

Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi $f'(x_0)$ yoki $y'(x_0)$ kabi belgilanadi va, ta'rifga asosan,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (4)$$

tenglik orqali aniqlanadi.

Misol sifatida $f(x)=x^2$ funksiya hosilasini uning ta'rifiga asosan topamiz:

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2 \;\Rightarrow$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x\,.$$

Demak, $(x^2)'=2x$. Shunday tarzda $x'=1$ va $(x^3)'=3x^2$ ekanligini ko‘rsatish mumkin.

Oldin ko‘rilgan masalalarning (1)–(3) javoblarini kiritilgan hosila tushunchasi orqali ifodalaymiz. Harakat tenglamasi $S=S(t)$ funksiya bilan ifodalanadigan notekis harakatda t_0 vaqtdagi oniy tezlik uchun topilgan (1) natijadan

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=S'(t_0) \qquad (1')$$

formulani hosil qilamiz.

Demak, $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi uning o‘zgarish tezligini ifodalaydi va bu ***hosilani mexanik ma'nosi*** deyiladi. Nyuton hosila tushunchasiga mana shu yo‘nalishdagi tadqiqotlari orqali kelgan va uni “flyuktsiya” deb atagan. Shuni ta'kidlab o‘tish kerakki, bu yerda “tezlik” tushunchasi faqat harakat tezligini ifodalamasdan, u keng ma'noda tushuniladi. Masalan, ximiyaviy reaksiya tezligi, texnologik jarayon tezligi, iqtisodiy islohotlarni amalga oshirish tezligi va hokazo.

Endi $y=\varphi(x)$ funksiya orqali berilgan L chiziqning $M_0(x_0,y_0)=M_0(x_0,\varphi(x_0))$ nuqtasiga o‘tkazilgan l_0 urinmaning k burchak koeffitsiyenti ifodalovchi (2) formulani eslab, undan

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}=\varphi'(x_0) \qquad (2')$$

natijaga kelamiz.

Demak, $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi uning grafigini $M_0(x_0,y_0)=M_0(x_0,f(x_0))$ nuqtasiga o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentini ifodalaydi va bu ***hosilani geometrik ma'nosi*** deyiladi. Nyutonning hosila bo‘yicha ishlaridan bexabar holda Leybnits mana shunday geometrik masalalarni yechish jarayonida hosila tushunchasiga kelgan.

Shunday qilib, $y=f(x)$ funksiya grafigining $M_0(x_0,y_0)=M_0(x_0,f(x_0))$ nuqtasiga o‘tkazilgan urinma tenglamasi

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Rightarrow y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \qquad (5)$$

ko‘rinishda topiladi.

Misol sifatida $f(x)=x^2$ parabolaning $x_0=3$ abssissali nuqtasiga o‘tkazilgan urinma tenglamasini topamiz. Bunda $f(x_0)= f(3)=3^2=9$, $f\,'(x_0)=2\,x_0=2\cdot3=6$ va shu sababli, (5) formulaga asosan, izlangan urinma tenglamasi

$$y=6(x-3)+9 \Rightarrow y=6x-9$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Mehnat unumdorligi to‘g‘risidagi masalaning (3) javobini hosila orqali

$$z(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta t}=h'(t_0) \qquad (3')$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Demak, $y=f(x)$ funksiya x vaqtgacha ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini ifodalasa, uning hosilasi $f\,'(x)$ shu x vaqtdagi mehnat unumdorligini ifodalaydi va buni ***hosilaning iqtisodiy ma’nosi*** deb qarash mumkin.

1.3. Differensiallanuvchi funksiya va uning uzluksizligi. Dastlab differensiallanuvchi funksiya tushunchasini kiritamiz.

3-TA’RIF: Agar $y=f(x)$ funksiya x nuqtada chekli $f\,'(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, u shu nuqtada ***differensiallanuvchi*** deyiladi. Aks holda $y=f(x)$ funksiya x nuqtada ***differensiallanmovchi*** deb ataladi. Funksiyani $f\,'(x)$ hosilasini topish amali ***differensiallash amali*** deb ataladi.

Funksiyaning differensiallanuvchiligi va uzluksizligi orasidagi bog‘lanish quyidagi teorema orqali ifodalanadi.

TEOREMA: Agarda $y=f(x)$ funksiya x nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u shu nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Isbot: Teoremani isbotlash uchun, funksiyaning uzluksizligi ta’rifiga asosan,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f=0 \qquad (6)$$

shart bajarilishini ko‘rsatish kifoya. Hosila ta’rifini ifodalovchi (4) tenglik va limitni mavjudligi haqidagi oldin ko‘rib o‘tilgan lemmaga (VII bob, §3) asosan

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=f\,'(x)+\alpha(\Delta x)\Rightarrow \Delta f=(f\,'(x)+\alpha(\Delta x))\Delta x$$

tenglikni yozish mumkin. Bu yerda $\Delta x\to 0$ bo‘lganda $\alpha(\Delta x)$ cheksiz kichik miqdor bo‘ladi. Bu holda, limit hisoblash qoidalariga asosan,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f=\lim_{\Delta x\to 0}(f\,'(x)+\alpha(\Delta x))\Delta x=f\,'(x)\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)\Delta x=f\,'(x)\cdot 0+0=0\,.$$

Demak, (6) shart o‘rinli va shu sababli $f(x)$ funksiya x nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Izoh: Teoremadagi tasdiqning teskarisi umuman olganda o‘rinli emas. Masalan, $f(x)=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz, ammo bu nuqtada differensiallanuvchi emas. Haqiqatan ham, $x=0$ nuqtada argumentga Δx orttirma berganimizda funksiya orttirmasi uchun $\Delta f=f(0+\Delta x)-f(0)= f(\Delta x)= |\Delta x|$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerdan ko‘rinadiki

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f=\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0,$$

ya’ni $f(x)=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz. Ammo

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,\quad \lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1\,.$$

Bu yerdan ko‘rinadiki $\Delta x\to 0$ bo‘lganda $\Delta f/\Delta x$ nisbat limitga ega emas va shu sababli $x=0$ nuqtada $f\,'(0)$ hosila mavjud emas.

4-TA'RIF: Berilgan $y=f(x)$ funksiya (a,b) oraliqning har bir x nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, u shu ***oraliqda differensiallanuvchi*** deb ataladi.

Masalan, $y=x^2$ funksiya har qanday (a,b) oraliqda differensiallanuvchi. $y=|x|$ funksiya esa $x=0$ nuqtani o'z ichiga olmaydigan barcha oraliqlarda differensiallanuvchi, ammo $x=0$ nuqtani o'z ichiga oluvchi oraliqlarda differensiallanuvchi bo'lmaydi

1.4. Hosilaning iqtisodiy tatbiqlari. Hosilani iqtisodiy mazmunini ifodalovchi mehnat unumdorligi haqidagi masalani yuqorida ko'rib o'tgan edik. Ammo hosilani iqtisodiyotga tatbig'i bu bilan chegaralanib qolmasdan, u iqtisodiyotda juda keng qo'llaniladi. Masalan, ishlab chiqarish xarajatlari y va mahsulot hajmi x orasidagi bog'lanish biror $y=f(x)$ ishlab chiqarish funksiyasi bilan berilgan bo'lsa, unda $y'=f'(x)$ hosila ishlab chiqarishning ***limitik xarajati*** deyiladi va bir birlik qo'shimcha mahsulot ishlab chiqarish uchun kerak bo'ladigan qo'shimcha xarajatlarning taqribiy qiymatini ifodalaydi. Shunday tarzda limitik daromad, limitik tushum, limitik mahsulot, limitik unumdorlik kabi muhim iqtisodiy tushunchalar hosila orqali ifodalanadi. Iqtisodiy tatbiqlarda hosila biror iqtisodiy jarayon, obyektni vaqt yoki boshqa bir omil bo'yicha o'zgarish tezligini o'rganish uchun ham qo'llaniladi.

Hosila tushunchasini yana bir iqtisodiy tatbig'iga misol sifatida, iqtisodiy jarayonlarni o'rganish va bir qator amaliy masalalarni yechish uchun qo'llaniladigan funksiyaning elastikligi tushunchasini qaraymiz.

5-TA'RIF: Berilgan $y=f(x)$ funksiya uchun $\Delta f/f$ funksiya nisbiy orttirmasini $\Delta x/x$ argument nisbiy orttirmasiga nisbatini $\Delta x\to 0$ bo'lgandagi limiti ***funksiyaning elastikligi*** deb ataladi .

Berilgan $y=f(x)$ funksiya elastikligi $E_x(f)$ kabi belgilanadi va, ta'rifga asosan,

$$E_x(f)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f}{f}:\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{x}{f}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{x}{f}\cdot f'(x)=\frac{x}{y}\cdot f'(x) \qquad (7)$$

formula bilan hisoblanadi. Funksiyaning elastikligi x argument qiymati 1% o'zgarganda $y=f(x)$ funksiya qiymati taqriban necha % o'zgarishini ifodalaydi.

Masalan, korxonaning ishlab chiqarayotgan mahsulotiga aholining talabi y va bu mahsulot narxi x orasidagi $y=f(x)$ bog'lanishni o'rganishda funksiyaning elastikligi $E_x(f)$ keng qo'llaniladi. Bu holda $E_x(f)$ mahsulot narxi x 1% o'zgarganda aholining talabi taqriban necha % o'zgarishini ifodalaydi.

Agar $|E_x(f)|>1$ bo'lsa, talab narxga nisbatan ***elastik***, $|E_x(f)|<1$ bo'lsa –***noelastik*** , $|E_x(f)|=1$ bo'lsa –***bir elastikli*** deb ataladi. Bu tushuncha ma'nosini aniqlash uchun korxonaning Mr kabi belgilanadigan limitik daromadini qaraymiz. Bu iqtisodiy ko'rsatkich talab elastikligi orqali

$$Mr=(1-|E_x(f)|^{-1})x$$

formula bilan ifodalanadi. Bu yerdan ko'rinadiki, talab elastik bo'lganda narx o'sishi (kamayishi) bilan mahsulotni sotishdan olinadigan umumiy daromad ham oshadi (kamayadi). Noelastik talabda esa narx o'sishi (kamayishi) bilan mahsulotni sotishdan olinadigan umumiy daromad aksincha kamayadi (oshadi).

XULOSA

Funksiya hosilasi matematik tahlilning asosiy tushunchasi bo‘lib, juda ko‘p nazariy va amaliy tatbiqlarga egadir. Notekis harakatda tezlik, egri chiziqqa urinmaning burchak koeffitsiyenti, iqtisodiyotda mehnat unumdorligi yoki ishlab chiqarish sur’ati hosila yordamida aniqlanadi. Kelgusida hosila funksiya xususiyatlarini o‘rganishning kuchli quroli ekanligini ko‘ramiz. Har qanday funksiya ham hosilaga ega bo‘lavermaydi. Masalan, $y=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada hosilaga ega emas. Hosilasi mavjud funksiya differensiallanuvchi deyiladi. Agar funksiya biror oraliqda differensiallanuvchi bo‘lsa, unda u bu oraliqda uzluksiz bo‘ladi.

Hosila tushunchasi iqtisodiy nazariyada ko‘p qo‘llaniladi. Masalan, limitik xarajat, limitik daromad, funksiya elastikligi kabi iqtisodiy tushunchalar hosila yordamida aniqlanadi va hisoblanadi.

Tayanch iboralar

* Funksiyaning hosilasi * Hosilaning mexanik ma’nosi * Hosilaning geometrik ma’nosi * Hosilaning iqtisodiy ma’nosi * Differensiallanuvchi funksiya * Differensiallash amali * Oraliqda differensiallanuvchi funksiya * Funksiyaning elastikligi

Takrorlash uchun savollar

1. Oniy tezlik masalasi qanday ifodalanadi?
2. Urinma haqidagi masala qanday mazmunga ega?
3. Mehnat unumdorligi masalasi nimadan iborat?
4. Funksiyaning nuqtadagi hosilasi ta’rifi qanday ifodalanadi?
5. Hosilaning mexanik ma’nosi nimadan iborat?
6. Hosilaning geometrik ma’nosi qanday ifodalanadi?
7. Hosilaning iqtisodiy ma’nosi qanday misol bilasiz?
8. Qachon funksiya differensiallanuvchi deyiladi?
9. Differensiallanuvchi funksiyaning uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?
10. Uzluksiz funksiya differensiallanuvchi bo‘lishi shartmi?
11. Qachon funksiya oraliqda differensiallanuvchi deyiladi?
12. Funksiyaning elastikligi deb nimaga aytiladi?
13. Funksiyaning elastikligi qanday iqtisodiy ma’noga ega?

Testlardan namunalar

7. $y=f(x)$ funksiyaning Δx argument orttirmasiga mos keladigan Δf orttirmasi qayerda to‘g‘ri ifodalangan?

A) $\Delta f=f(x)-f(\Delta x)$; B) $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(\Delta x)$; C) $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$;
D) $\Delta f=f(x+\Delta x)-f((x-\Delta x)$; E) $\Delta f=f(x)\Delta x$.

8. $y=x^3$ funksiyaning Δy orttirmasi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?

A) $3x^2\Delta x+(\Delta x)^3$; B) $3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$; C) $3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2$;

D) $3x(\Delta x)^2(x+3\Delta x)$; E) $3x\Delta x(x+\Delta x)+(\Delta x)^3$.

9. $y=x^3$ funksiya uchun $\Delta y/\Delta x$ orttirmalar nisbatini toping.

A) $3x^2+(\Delta x)^2$; B) $3x(x+3\Delta x)$; C) $3x^2+3x\Delta x$;

D) $3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2$; E) $3x\Delta x(x+\Delta x)+(\Delta x)^3$.

10. $y=f(x)$ funksiya hosilasini ta’rif bo‘yicha hisoblashda quyidagilardan qaysi biri bajarilmaydi?

A) argument orttirmasi Δx hisoblanadi;
B) funksiya orttirmasi Δf hisoblanadi;
C) orttirmalar nisbati $\Delta f/\Delta x$ hisoblanadi;
D) $\Delta f/\Delta x$ nisbatning $\Delta x\to 0$ bo‘lgandagi limiti hisoblanadi;
E) ko‘rsatilganlarning barchasi bajariladi.

11. $y=f(x)$ funksiya hosilasining ta’rifi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?

A) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to\infty}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$; B) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta f}$; C) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$;

D) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to\infty}\dfrac{\Delta x}{\Delta f}$; E) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta f\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta f}$.

12. Hosilaning mexanik ma’nosi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?

A) harakatda bosib o‘tilgan masofa; B) harakatda sarflangan vaqt;
C) harakatda oniy tezlik; D) harakatda to‘xtash holati;
E) to‘g‘ri javob keltirilmagan.

13. $y=x^3$ kubik parabolaning $x_0=-1$ abssissali nuqtasiga o‘tkazilgan urinma tenglamasini aniqlang.

A) $y=3x+2$; B) $y=3x+4$; C) $y=3x-2$; D) $y=3x-4$; E) $y=3x$.

14. $y=x^2$ funksiyaning $x=5$ nuqtadagi elastikligini hisoblang.

A) 1; B) 2; C) 5; D) 8; E) 10.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. $f(x)=n^2x+e^{nx}$ funksiyaning argument orttirmasi Δx bo‘lgandagi Δf orttirmasini toping.

2. $f(x)=n^2x+nx^2$ funksiyaning $f'(x)$ hosilasini ta’rif asosida toping.

§2. FUNKSIYANI DIFFERENSIALLASH QOIDALARI. HOSILALAR JADVALI

- ***Hosilani hisoblash algoritmi.***
- ***Differensiallash qoidalari.***
- ***Logarifmik differensiallash usuli.***
- ***Hosilalar jadvali.***

2.1. Hosilani hisoblash algoritmi. Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning $f'(x)$ hosilasini topish, ya'ni uni differensiallash, oldingi paragrafda keltirilgan ta'rifga asosan quyidagi algoritm bo'yicha amalga oshiriladi:

- funksiyaning x argumentiga $\Delta x\neq 0$ orttirma berib, $x+\Delta x$ nuqtani topamiz;
- funksiya orttirmasini $\Delta f= f(x+\Delta x)-f(x)$ formula bo'yicha hisoblaymiz;
- $\Delta f/\Delta x$ orttirmalar nisbatni topamiz;
- $\Delta f/\Delta x$ nisbatning $\Delta x\to 0$ bo'lgandagi limitini aniqlaymiz.

Misol sifatida asosiy elementar funksiyalardan biri bo'lgan $f(x)=\sin x$

hosilasini yuqorida keltirilgan algoritm bo'yicha topamiz:

✓ x va $x+\Delta x$ nuqtalarda funksiyaning $f(x)=\sin x$ va $f(x+\Delta x)=\sin(x+\Delta x)$ qiymatlarini hisoblaymiz;

✓ trigonometrik ayirmani ko'paytmaga keltirish formulasidan foydalanib, Δf funksiya orttirmasini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\Delta f= f(x+\Delta x)-f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x= 2\sin(\Delta x/2)\cdot\cos(x+\Delta x/2);$$

✓ $\Delta f/\Delta x$ orttirmalar nisbatni tuzamiz:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)}{\Delta x}=\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\cdot\cos(x+\Delta x/2)\ ;$$

✓ Ko'paytmaning limiti, I ajoyib limit hamda $y=\cos x$ funksiya uzluksizligidan foydalanib, $\Delta f/\Delta x$ nisbatning $\Delta x\to 0$ bo'lgandagi limitini hisoblaymiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\cdot\cos(x+\Delta x/2)]=(\frac{\Delta x}{2}=\alpha)$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\lim_{\alpha\to 0}\cos(x+\alpha)=1\cdot\cos x=\cos x\,.$$

Demak,

$$(\sin x)'=\cos x \qquad (1)$$

formula o'rinli ekan. Xuddi shunday tarzda

$$(\cos x)'=-\sin x \qquad (2)$$

ekanligini aniqlaymiz.

Yana bir misol sifatida $f(x)=a^x$ ko‘rsatkichli funksiya hosilasini topamiz:

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x \ln a. \qquad (3)$$

Bu yerda ajoyib limitlardan biri (VI bob, §3) bo‘lgan

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$$

limit qiymatidan foydalanildi. Jumladan, $a=e$ holda $(e^x)' = e^x \ln e = e^x$ natijaga ega bo‘lamiz.

2.2. Differensiallash qoidalari. Har qanday funksiya hosilasini yuqoridagi algoritm bo‘yicha hisoblash oson emas va ancha murakkab hisoblashlarni talab etadi. Shu sababli amalda $y=f(x)$ funksiya hosilasini hisoblash quyidagi ***differensiallash qoidalari*** yordamida osonroq amalga oshirilishi mumkin.

1-qoida: O‘zgarmas funksiya, ya’ni ixtiyoriy C o‘zgarmas sonning hosilasi nolga teng , ya’ni

$$(C)'=0 \quad (C\text{–const}). \qquad (4)$$

Isbot: Har qanday o‘zgarmas $f(x)$=C funksiya uchun argumentning ixtiyoriy $\Delta x\neq 0$ orttirmasida

$$\Delta f= f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0, \qquad \Delta f/\Delta x=0$$

tenglik o‘rinli ekanligidan va hosila ta’rifidan

$$(C)' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0$$

ekanligi kelib chiqadi.

Masalan, $(3{,}2)'=0$, $(-7)'=0$, $(\sin 25^0)'=0$, $(\pi)'=0$ va hokazo.

2-qoida: Agar $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, bu nuqtada $y=u(x)\pm v(x)=u\pm v$ funksiya ham differensiallanuvchi va uning hosilasini

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \tag{5}$$

formula bilan hisoblash mumkin.

Isbot: Funksiya orttirmasi ta’rifidan foydalanib, har qanday Δx argument orttirmasida $\Delta(u\pm v)=\Delta u\pm\Delta v$ ekanligini ko‘rish qiyin emas. Bu yerdan hosila ta’rifi va limit hisoblash qoidasiga asosan kerakli tenglikni olamiz:

$$(u \pm v)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u\pm v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u \pm \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u' \pm v' \quad .$$

Demak, ikkita differensiallanuvchi funksiyalarning algebraik yig‘indisi differensiallanuvchi funksiya bo‘lib, algebraik yig‘indining hosilasi hosilalarning algebraik yig‘indisiga teng bo‘ladi.

Masalan,

$$(x^2+\sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x+\cos x, \quad (5-\cos x)' = (5)' - (\cos x)' = 0-(-\sin x) = \sin x \,.$$

1-natija: Differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiyaga ixtiyoriy C o‘zgarmas sonni qo‘shsak, uning hosilasi o‘zgarmaydi.

Haqiqatan ham $(f(x)+C)' = f'(x)+C' = f'(x)+0 = f'(x)$.

Izoh: Yuqoridagi 2- qoidada keltirilgan tasdiqning teskarisi umuman olganda o‘rinli emas. Masalan, $u=|x|$ va $v=1-|x|$ funksiyalar yig‘indisi $u+v=1$ o‘zgarmas funksiya sifatida barcha x nuqtalarda, jumladan $x=0$ nuqtada differensiallanuvchi. Ammo u va v qo‘shiluvchi funksiyalar $x=0$ nuqtada differensiallanuvchi emas.

3-qoida: Agar $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, bu nuqtada $y=u(x)\cdot v(x)=u\cdot v$ funksiya ham differensiallanuvchi va uning hosilasi uchun

$$(u\cdot v)'= u'\cdot v+ u\cdot v' \qquad (6)$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Funksiya orttirmasi ta’rifiga asosan

$$\Delta u=u(x+\Delta x)- u(x) \Rightarrow u(x+\Delta x)= u(x)+ \Delta u,$$

$$\Delta v=v(x+\Delta x)- v(x) \Rightarrow v(x+\Delta x)= v(x)+ \Delta v$$

ekanligidan foydalanib, $\Delta(u\cdot v)$ funksiya orttimasini topamiz:

$$\Delta(u\cdot v) =u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)- u(x)\cdot v(x)= [u(x)+ \Delta u]\cdot[v(x)+ \Delta v] - u(x)\cdot v(x)=$$

$$= u(x) \cdot\Delta v+ v(x) \cdot \Delta u+\Delta u\cdot\Delta v.$$

Bu yerdan, hosila ta’rifi va limit hisoblash qoidalariga asosan,

$$(u\cdot v)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u\cdot v)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)\cdot\Delta v+v(x)\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}=$$
$$=u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+v(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v$$

natijani olamiz. Shartga asosan $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi , demak uzluksiz ham bo‘lgani uchun

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v', \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u', \quad \lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$$

tengliklar o‘rinli bo‘ldi. Bu tengliklarni oldingi natijaga qo‘yib, $y=u\cdot v$ funksiya differensiallanuvchi va

$$(u\cdot v)'= u\cdot v'+ v\cdot u'+ u'\cdot 0= u\cdot v'+ v\cdot u' ,$$

ya’ni (6) formula o‘rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Masalan,

$$(e^x \cdot \sin x)'= (e^x)' \cdot \sin x+ e^x \cdot(\sin x)'= e^x \cdot \sin x+ e^x \cdot \cos x=(\sin x+ \cos x)e^x.$$

2-natija: O‘zgarmas C ko‘paytuvchini hosila belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

Haqiqatan ham, (4) va (6) formulalarga asosan

$$[C\cdot f(x)]'=C'\cdot f'(x)+C\cdot f'(x)=0\cdot f(x)+C\cdot f'(x)=C\cdot f'(x) .$$

Masalan, $(5x^2)'=5\cdot(x^2)'= 5\cdot 2x=10x$.

4-qoida: Agar $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi va bu yerda $v=v(x)\neq 0$ shart bajarilsa, unda bu nuqtada $y=u(x)/v(x)=u/v$ funksiya ham differensiallanuvchi va uning hosilasi uchun

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2} \qquad (7)$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Bu tasdiqni isboti oldingi qoida isbotiga o‘xshash tarzda amalga oshiriladi va o‘quvchiga mustaqil ish sifatida taklif etiladi.

Bu qoidadan foydalanib, y=tg$x$ va y=ctg$x$ asosiy elementar funksiyalarning hosilasini topamiz. cos$x$≠0 shartda, ya’ni $x\neq(\pi/2)\pm\pi n$ (n=0,1,2,3, ….) bo‘lganda

$$(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Xuddi shunday ravishda, sin$x$≠0 shartda, ya’ni $x\neq\pm\pi n$ (n=0,1,2,3, ….) bo‘lganda, (ctg$x$)′=–1/(sin^2x) ekanligi topiladi. Demak, y=tg$x$ va y=ctg$x$ funksiyalar o‘zlarining aniqlanish sohasida differensiallanuvchi bo‘lib, ularning hosilalari

$$(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\mathrm{tg}^2x\,,\quad (\mathrm{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-(1+\mathrm{ctg}^2x\,) \tag{8}$$

formula bilan topiladi.

5-qoida: Berilgan $y=f(x)$ funksiya x nuqtaning biror atrofida qat’iy monoton (o‘suvchi yoki kamayuvchi) va uzluksiz bo‘lsin. Bundan tashqari $y=f(x)$ funksiya bu x nuqtada differensiallanuvchi va $f'(x)\neq0$ bo‘lsin. Bu shartlarda $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiya mavjud va differensiallanuvchi bo‘lib, uning hosilasi uchun

$$\left\{f^{-1}(y)\right\}'=\frac{1}{f'(x)}\ \text{yoki}\ \ x'_y=\frac{1}{y'_x} \tag{9}$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Keltirilgan shartlarda tegishli $y=f(x)$ nuqtaning biror atrofida $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiya mavjud, qat'iy monoton va uzluksiz bo'lishini ko'rsatish mumkin.Bu funksiyani differensiallanuvchi bo'lishini aniqlash uchun uning y argumentiga $\Delta y \neq 0$ orttirma beramiz. Bu holda $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiya

$$\Delta x=f^{-1}(y+\Delta y)-f^{-1}(y)$$

orttirma oladi. Bunda $f^{-1}(y)$ teskari funksiya qat'iy monoton ekanligidan $\Delta x \neq 0$, uzluksiz ekanligidan esa $\Delta y \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu holda, $f'(x)$ mavjud va noldan farqli ekanligi hamda hosila ta'rifidan ushbu natijani olamiz:

$$\left\{f^{-1}(y)\right\}' = x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^{-1} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^{-1} = (y'_x)^{-1} = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Demak, $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiya differensiallanuvchi va (9) formula o'rinli.

Bu qoidadan foydalanib yana bir nechta asosiy elementar funksiyalarning hosilalarini aniqlaymiz.

Dastlab $y=f(x)=\arcsin x$ teskari trigonometrik funksiya hosilasini topamiz. Ta'rifga asosan, $x \in (-1, 1)$ bo'lganda bu funksiya $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ qiymatlarni qabul etadi hamda $x=\sin y$ funksiyaga teskari bo'ladi. Bu yerda $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ bo'lgani uchun, $x=\sin y$ teskari funksiyaning hosilasi

$$x'_y = (\sin y)' = \cos y > 0,$$

ya'ni noldan farqli bo'ladi. Bu holda, (9) formulaga asosan,

$$(\arcsin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

natijani hosil qilamiz. Demak,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1) \tag{10}$$

formula o‘rinli ekan. Xuddi shunday usulda

$$(\arccos x)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\mathrm{arctg}x)' = -(\mathrm{arcctg}x)' = \frac{1}{1+x^2} \tag{11}$$

formulalarni isbotlash mumkin.

Endi $y=\log_a x$ ($a>0$, $a \neq 1$) logarifmik funksiya hosilasini topamiz. Bunda $x \in (0,\infty)$ va $y \in (-\infty, \infty)$ hamda logarifmik funksiya qat’iy monoton bo‘lib, u $x=a^y$ ko‘rsatkichli funksiyaga teskaridir. Bundan tashqari $x=a^y$ differensiallanuvchi va $(a^y)'=a^y \ln a \neq 0$. Shu sababli, (9) formulaga asosan, logarifmik funksiya hosilasi mavjud va

$$(\log_a x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

ekanligini topamiz. Demak,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}\ . \tag{12}$$

5-qoida: Berilgan $y=f(u)$ murakkab funksiyada tashqi $f(u)$ va ichki $u(x)$ funksiyalar argumentlari bo‘yicha differensiallanuvchi bo‘lsin. Bu holda $y=f(u)$ murakkab funksiya x bo‘yicha differensiallanuvchi bo‘lib, uning hosilasi

$$f'_x(u) = f'_u(u) \cdot u'(x) \tag{13}$$

formula bilan, ya'ni tashqi va ichki funksiyalar hosilalarining ko'paytmasi kabi topiladi.

Isbot: *u(x)* funksiya differensiallanuvchi ekanligidan uning uzluksizligi kelib chiqadi va shu sababli $\Delta x\to 0 \Rightarrow \Delta u\to 0$ bo'ladi. Bu yerdan, hosila ta'rifi va limit hisoblash qoidalariga asosan ,

$$f'_x(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=f'_u(u)\cdot u'(x),$$

ya'ni $y=f(u)$ murakkab funksiya differensiallanuvchi va (13) formula o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Masalan, $(\sin x^2)'=(u=x^2)=(\sin u)'_x=(\sin u)'_u\cdot u'=\cos u\cdot(x^2)'=2x\cos x^2$,

$(\sin^2 x)'=(u=\sin x)=(u^2)'_x=(u^2)'_u\cdot u'=2u\cdot(\sin x)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$.

Bu qoidadan foydalanib, $y=x^{\alpha}$ (α–ixtiyoriy haqiqiy son), $x\in(0,\infty)$, darajali funksiyaning differensiallanuvchi ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun darajali funksiyani $y=x^{\alpha}=e^{\ln x^{\alpha}}=e^{\alpha\ln x}$ ko'rinishdagi murakkab ko'rsatkichli funksiya kabi ifodalaymiz. Unda, (13) formula, ko'rsatkichli va logarifmik funksiya hosilasidan foydalanib,

$$y'=(x^{\alpha})'=(e^{\alpha\ln x})'=(u=\alpha\ln x)=(e^u)'=e^u u'=e^{\alpha\ln x}(\alpha\ln x)'=x^{\alpha}\alpha\cdot\frac{1}{x}=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

natijaga kelamiz. Demak, $y=x^{\alpha}$, $x\in(0,\infty)$, darajali funksiya differensiallanuvchi va uning hosilasi

$$(x^{\alpha})'=\alpha\cdot x^{\alpha-1} \qquad (14)$$

formula orqali hisoblanadi. Masalan,

$$(x)'=1,\quad (x^2)'=2x,\quad (x^3)'=3x^2,\quad (x^{-1})'=(\frac{1}{x})'=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2},$$

$$(x^{1/2})'=(\sqrt{x})'=\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad (x^{1/3})'=(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3}x^{-2/3}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Izoh: (15) formula nafaqat $x\in(0,\infty)$ sohada, balkim $y=x^{\alpha-1}$ funksiyaning aniqlanish sohasida ham o‘rinli bo‘ladi. Jumladan, $\alpha=n\in N$, ya’ni natural son bo‘lsa, (15) formula ixtiyoriy $x\in(-\infty,\infty)$, $\alpha=-n\in Z^-$, ya’ni manfiy butun son bo‘lganda esa barcha $x\neq 0$ uchun o‘rinli bo‘ladi.

2.3. Logarifmik differensiallash usuli. Ba’zi hollarda differensiallanuvchi $y=f(x)>0$ funksiya hosilasini uning logarifmi orqali quyidagicha topish mumkin:

$$[\ln f(x)]'=(u=f(x))=(\ln u)'=\frac{1}{u}u'=\frac{f'(x)}{f(x)}\Rightarrow f'(x)=[\ln f(x)]'\cdot f(x).\quad (16)$$

<u>1-TA’RIF:</u> Funksiyaning $f'(x)$ hosilasini (16) formula orqali topish ***logarifmik differensiallash usuli*** deyiladi.

Masalan, $f(x)=x^2e^{2x}(1+x^4)^3$ funksiya hosilasini bevosita hisoblash ancha murakkab. Biroq logarifmik differensiallash usulida bu hosila osonroq topiladi:

$$\ln f(x)=\ln[x^2e^{2x}(1+x^4)^3]=2\ln x+2x+3\ln(1+x^4)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow[\ln f(x)]'=[2\ln x+2x+3\ln(1+x^4)]'=\frac{2}{x}+2+\frac{12x^3}{1+x^4}=\frac{f'(x)}{f(x)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=(\frac{2}{x}+2+\frac{12x^3}{1+x^4})f(x)=(\frac{2}{x}+2+\frac{12x^3}{1+x^4})\cdot x^2e^{2x}(1+x^4)^3=$$

$$=2xe^{2x}(1+x^4)^3+2x^2e^{2x}(1+x^4)^3+12x^5e^{2x}(1+x^4)^2=$$

$$=2xe^{2x}(1+x^4)^2[1+x^4+x(1+x^4)+6x^4]=2xe^{2x}(1+x^4)^2(x^5+7x^4+x+1).$$

Yana bir misol sifatida $f(x)=x^{\alpha}$ ($x>0$, α-ixtiyoriy haqiqiy son) darajali funksiya hosilasini logarifmik differensiallash usulida aniqlaymiz:

$$\ln f(x)=\ln x^{\alpha}=\alpha\ln x\Rightarrow[\ln f(x)]'=(\alpha\ln x)'=\frac{\alpha}{x}\Rightarrow(x^{\alpha})'=\frac{\alpha}{x}\cdot x^{\alpha}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Bu yerdan (15) formula o‘rinli ekanligiga yana bir marta ishonch hosil etamiz.

<u>2-TA’RIF:</u> Agar $u=u(x)>0$, $v=v(x)$ esa ixtiyoriy funksiya bo‘lsa, unda $y=u(x)^{v(x)}=u^v$ ko‘rinishdagi murakkab funksiya ***darajali-ko‘rsatkichli funksiya*** deyiladi.

Agar $u=u(x)>0$ va $v=v(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi bo‘lsa, unda $y=u^v$ darajali-ko‘rsatkichli funksiya ham differensiallanuvchi bo‘ladi va uning hosilasini logarifmik differensiallash usulida quyidagicha hisoblash mumkin:

$$\ln y=v\cdot\ln u\Rightarrow(\ln y)'=(v\cdot\ln u)'\Rightarrow\frac{y'}{y}=v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{u'}{u}\Rightarrow y'=y\cdot(v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{u'}{u}).$$

Bu natijani ushbu ko‘rinishda yozamiz:

$$(u^v)'=u^v\cdot\ln u\cdot v'+v\cdot u^{v-1}\cdot u'\ . \qquad (17)$$

Bu yerdan ko‘rinadiki, $y=u^v$ darajali-ko‘rsatkichli funksiya hosilasi ikkita qo‘shiluvchidan iborat. Bunda birinchi qo‘shiluvchi $y=u^v$ funksiyani murakkab ko‘rsatkichli funksiya (u o‘zgarmas) singari qarab, undan hosila olish natijasida hosil bo‘ladi. Ikkinchi qo‘shiluvchi esa bu funksiyani murakkab darajali funksiya (v o‘zgarmas) deb, undan hosila olish orqali topilishi mumkin.

Misol sifatida $y=x^x$ funksiya hosilasini (17) formula orqali topamiz:

$$(x^x)' = x^x \cdot \ln x \cdot x' + x \cdot x^{x-1} \cdot x' = (1+\ln x)\, x^x . \qquad (18)$$

2.4. Hosilalar jadvali. Oldin ko‘rilganlarga asosan barcha asosiy elementar funksiyalar o‘zlarining aniqlanish sohasida differensiallanuvchi bo‘ladi. Ularning hosilalari va differenrsiallash qoidalarini ***hosilalar jadvali*** ko‘rinishda ifodalaymiz. Bu jadvaldan foydalanib ixtiyoriy elementar funksiyani hosilasini topish mumkin va u matematik tahlil “Differensial hisob” bo‘limining asosiy quroli bo‘lib hisoblanadi. Bunda elementar funksiyalarning hosilalari yana elementar funksiya bo‘lishini ta’kidlab o‘tamiz.

H O S I L A L A R   J A D V A L I

	I. DARAJALI FUNKTSIYALAR		
1	$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in (-\infty, \infty)$	2	$(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} u', \ u = u(x)$
3	$(x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x \ , \ (x^3)' = 3x^2 ,$ $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	4	$(u^2)' = 2uu' \ , \ (u^3)' = 3u^2 u' ,$ $(\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2} \ , \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
	II. KO‘RSATGICHLI FUNKTSIYALAR		
5	$(a^x)' = a^x \ln a, a > 0, a \neq 1$	6	$(a^u)' = a^u u' \ln a, u = u(x)$
7	$(e^x)' = e^x, \quad (10^x)' = 10^x \ln 10$	8	$(e^u)' = e^u \cdot u' , \quad u = u(x)$
	III. LOGARIFMIK FUNKTSIYALAR		
9	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}$	10	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} = \frac{u' \log_a e}{u}, u = u(x)$
11	$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10} = \frac{\lg e}{x}$	12	$(\ln u)' = \frac{1}{u} u' , \quad u = u(x)$
	IV. TRIGONOMETRIK FUNKTSIYALAR		
13	$(\sin x)' = \cos x \ ,$ $(\cos x)' = -\sin x$	14	$(\sin u)' = \cos u \cdot u' ,$ $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

15	$(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$, $(\mathrm{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	16	$(\mathrm{tg}u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$, $(\mathrm{ctg}u)'=-\frac{u'}{\sin^2 u}$
V. TESKARI TRIGONOMETRIK FUNKTSIYALAR			
17	$(\arcsin x)'=-(\arccos x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	18	$(\arcsin u)'=-(\arccos u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
21	$(\mathrm{arctg}x)'=-(\mathrm{arcctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}$		$(\mathrm{arctg}u)'=-(\mathrm{arcctg}u)'=\frac{u'}{1+u^2}$
DIFFERENSIALLASH QOIDARLARI			
27	$(C)'=0$, (C–const.), $(C\cdot u)'=C\cdot u'$	28	$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$
29	$(u\pm v)'=u'\pm v'$, $(\frac{u}{v})'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$	30	$[f(u)]'_x=f'_u(u)\cdot u'$, $\quad u=u(x)$
31	$\{f^{-1}(y)\}'=\frac{1}{f'(x)}$, $\quad x'_y=\frac{1}{y'_x}$	32	$(u^v)'=u^v v'\ln u+vu^{v-1}u'$

XULOSA

Istalgan differensiallanuvchi funksiya hosilasini uning ta’rifidan kelib chiqadigan algoritm bo‘yicha bevosita hisoblash noqulay va murakkab bo‘ladi. Shu sababli funksiyalar hosilasini hisoblash uchun differensiallash qoidalaridan foydalaniladi. Ular yordamida funksiyalar yig‘indisi, ayirmasi, ko‘paytmasi va bo‘linmasining hosilalarini topish mumkin. Bundan tashqari murakkab va teskari funksiyalarning hosilalarini hisoblash formulalari ham mavjud. Ayrim hollarda funksiya hosilasini logarifmik differensiallash usulidan foydalanib osonroq hisoblash mumkin. Barcha asosiy elementar funksiyalar differensiallanuvchi, ularning hosilalari va differensiallash qoidalari hosilalar jadvalini tashkil etadi. Bu jadvaldan foydalanib ixtiyoriy differensiallanuvchi funksiyaning hosilasini hisoblab bo‘ladi.

Tayanch iboralar

* Hosilani hisoblash algoritmi * O‘zgarmas son hosilasi * Algebraik yig‘indi hosilasi * Ko‘paytmaning hosilasi * Bo‘linmaning hosilasi * Teskari funksiya hosilasi * Murakkab funksiya hosilasi * Logarifmik differensiallash * Darajali-ko‘rsatkichli funksiya * Hosilalar jadvali

Takrorlash uchun savollar

1. Funksiya hosilasini topish algoritmi qanday qadamlardan iborat?
2. O‘zgarmas sonning hosilasi nimaga teng?
3. Funksiyalar algebraik yig‘indisining hosilasi qanday hisoblanadi?

4. Funksiyalar algebraik yig‘indisi differensiallanuvchi bo‘lsa, qo‘shiluvchilar differensiallanuvchi bo‘lishi shartmi?
5. Funksiyalar ko‘paytmasining hosilasi qanday topiladi?
6. Differensiallashda o‘zgarmas ko‘paytuvchini nima qilish mumkin?
7. Funksiyalar nisbatining hosilasi qanday hisoblanadi?
8. Teskari funksiyaning hosilasi qaysi shartda mavjud va qanday topiladi?
9. Murakkab funksiyaning hosilasi qanday hisoblanadi?
10. Logarifmik differensiallash usulining mohiyati nimadan iborat?
11. Darajali – ko‘rsatkichli funksiya qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
12. Darajali – ko‘rsatkichli funksiyaning hosilasi qaysi formula bilan aniqlanadi?
13. Elementar funksiyalarning hosilasi qanday funksiyadan iborat bo‘ladi?
14. Asosiy elementar funksiyalarning hosilalari jadvalini yozing .

Testlardan namunalar

1. Differensiallash qoidasi qayerda xato ko‘rsatilgan?

A) $(Cu)'=Cu'$ (C-const.); B) $(u\pm v)'=u'\pm v'$; C) $(u\cdot v)'=u'v+uv'$;

D) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v+uv'}{v^2}$; E) $(f(u))'=f'(u)u'$.

2. Ikkita u va v diffrentsiallanuvchi funksiyalar u/v nisbatining hosilasini hisoblash formulasi to‘g‘ri yozilgan javobni ko‘rsating.

A) $\dfrac{u'v+uv'}{v}$; B) $\dfrac{u'v+uv'}{v^2}$; C) $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$;

D) $\dfrac{u'v-uv'}{v}$; E) $\dfrac{u'v'-uv}{v^2}$.

3. $y=x^2/\sin x$ funksiyaning y' hosilasini hisoblang.

A) $y'=x^2/\cos x$; B) $y'=2x/\sin x$; C) $y'=2x/\cos x$;

D) $y'=x(2\sin x+x\cos x)/\sin^2 x$; E) $y'=x(2\sin x-x\cos x)/\sin^2 x$.

4. Ikkita u va v diffrentsiallanuvchi funksiyalar $u\cdot v$ ko‘paytmasining hosilasini hisoblash formulasi qayerda to‘g‘ri yozilgan?

A) $u'v'$; B) $u'v'+uv$; C) $u'v+uv'$; D) $u'v-uv'$; E) $u'v'-uv$.

5. $y=x^2\sin x$ funksiyaning y' hosilasini hisoblang.

A) $y'=x^2\cos x$; B) $y'=x(x\sin x-2\cos x)$; C) $y'=2x\sin x$;

D) $y'=x(x\cos x+2\sin x)$; E) $y'=x(x\cos x-2\sin x)$.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Quyidagi funksiyalarning hosilasini differensiallash qoidalari yordamida hisoblang:

$$a)\ f(x) = nx^n + (n+1)\sin x - n^2\cos x - 2n^x;\ \ b)\ f(x) = x^n e^x;\ \ c)\ f(x) = \frac{\ln x}{x+n}.$$

2. Ushbu murakkab funksiyalarning hosilasini hisoblang:

$$a)\ f(x) = \ln(nx + \cos x);\quad b)\ f(x) = \sin^{2n}(x^2 + 2nx + 1)\ .$$

3. $f(x) = (x+n)^{nx}$ darajali-ko‘rsatgichli funksiya hosilasini toping.

§3. DIFFERENSIALLANUVCHI FUNKSIYALAR HAQIDAGI ASOSIY TEOREMALAR.

- ***Roll teoremasi.***
- ***Lagranj teoremasi.***
- ***Koshi teoremasi.***

3.1. Roll teoremasi. Biz bu paragrafda kelgusida qaraladigan differensial hisobning amaliy tatbiqlarini asoslash uchun zarur bo‘ladigan teoremalarni keltiramiz. Dastlab farang matematigi M.Roll (1652-1719) tomonidan oldin ko‘phadlar, so‘ngra esa kengroq funksiyalar sinfi uchun isbotlangan ushbu teoremani qaraymiz.

1-TEOREMA (Roll teoremasi): Berilgan $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va uning ichki nuqtalarida differensiallanuvchi bo‘lib, chegaralarida teng qiymatlar qabul etsin, ya’ni $f(a)=f(b)$ bo‘lsin. Bu holda shu kesma ichida kamida bitta shunday “c” nuqta topiladiki, bu nuqtada funksiyaning hosilasi nolga teng, ya’ni $f'(c)=0$ bo‘ladi.

Isbot: Bizga ma’lumki (VII bob, §4, Veyershtrass teoremasi), kesmada uzluksiz bo‘lgan funksiya shu kesmada o‘zining eng kichik m va eng katta M qiymatlariga erishadi.

Agar $m=M$ bo‘lsa, u holda albatta $f(x)=C$ (C-const) va $f'(x)=0$ bo‘ladi, ya’ni teoremadagi tasdiq $[a,b]$ kesmaning har bir nuqtasida bajariladi.

Endi $m<M$ holni qaraymiz. Kesma chegaralarida funksiya qiymatlari o‘zaro teng bo‘lgani uchun, funksiyaning eng katta M va eng kichik m qiymatlaridan kamida bittasi $[a,b]$ kesmaning ichki nuqtasida erishiladi.

Agar biror $a<c<b$ nuqtada $f(c)=M$ bo‘lsa, u holda, eng katta qiymat ta’rifiga asosan, ixtiyoriy Δx argument orttirmasi uchun $\Delta f(c)=f(c+\Delta x)-f(c) < 0$ bo‘ladi. Bu yerdan

$$\frac{\Delta f(c)}{\Delta x} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \le 0,\quad \Delta x > 0\quad ,$$

$$\frac{\Delta f(c)}{\Delta x} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \ge 0,\quad \Delta x < 0$$

ekanligi kelib chiqadi. Teorema shartiga asosan, qaralayotgan $x=c$ nuqta $[a,b]$ kesmaning ichki nuqtasi bo‘lgani uchun, $f'(c)$ hosila mavjuddir. Unda yuqoridagi tengsizliklardan , hosila ta’rifi va limit xossalariga asosan, quyidagi natijalarga kelamiz:

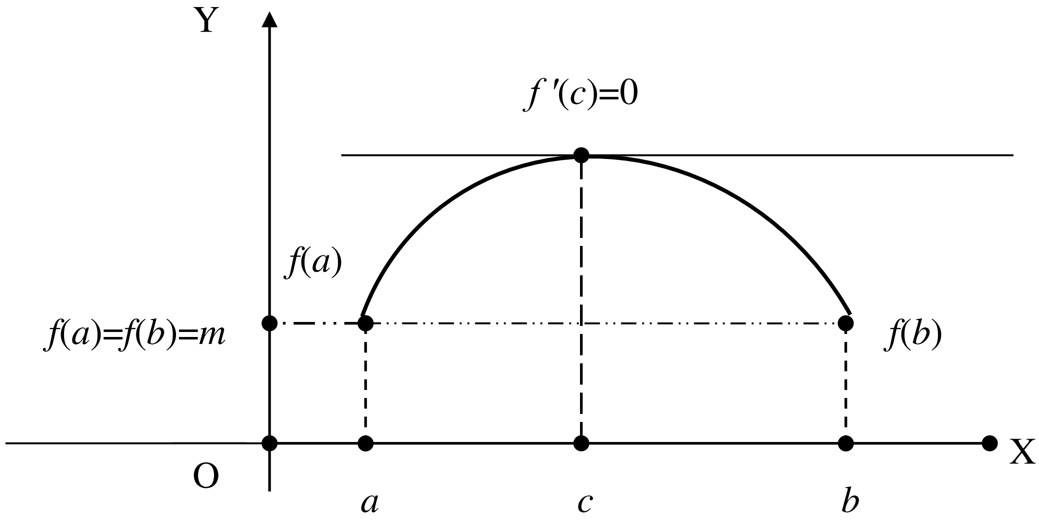
$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\geq 0,\quad f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\leq 0.$$

Ammo $f'(c)\geq 0$ va $f'(c)\leq 0$ tengsizliklar faqat $f'(c)=0$ bo‘lgan holda birgalikda bo‘ladi.

Xuddi shunday ravishda, agar biror $a<c<b$ ichki nuqtada $f(c)=m$ bo‘lsa, unda $f'(c)=0$ bo‘lishi ko‘rsatiladi. Teorema isbot bo‘ldi.

Shunday qilib, differensiallanuvchi funksiyaning teng qiymatlari orasida funksiyaning hosilasi hech bo‘lmaganda bitta nuqtada nolga teng bo‘lar ekan.

Roll teoremasi quyidagi geometrik talqinga ega: (a,b) oraliqda differensiallanuvchi (ya’ni oraliqning har bir nuqtasida urinmaga ega) funksiya bu oraliq chegaralarida bir xil qiymatlar qabul etsa, u holda urinmalar orasida kamida bittasi OX o‘qiga parallel va uning burchak koeffitsiyenti $k=f'(c)=0$ bo‘ladi. (55-rasmga qarang).



55-rasm

Masalan, $f(x)=(x-1)\cdot(x-3)=x^2-4x+3$ funksiya $[1,3]$ kesmada Roll teoremasini barcha shartlarini qanoatlantiradi. Bu funksiya hosilasi $f'(x)=2x-4$ bo‘lib, haqiqatan ham u $[1,3]$ kesmaning ichki $c=2$ nuqtasida nolga aylanadi.

3.2. Lagranj teoremasi. Endi yana bir farang matematigi Lagranj (1736-1813) nomi bilan ataladigan teoremani qaraymiz.

<u>2-TEOREMA (Lagranj teoremasi):</u> Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va kesmaning ichida differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda (a,b) oraliqda kamida bitta shunday “c” nuqta topiladiki, unda

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a) \qquad (1)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Teorema shartini qanoatlantiruvchi $y=f(x)$ funksiya orqali ushbu yordamchi funksiyani kiritamiz:

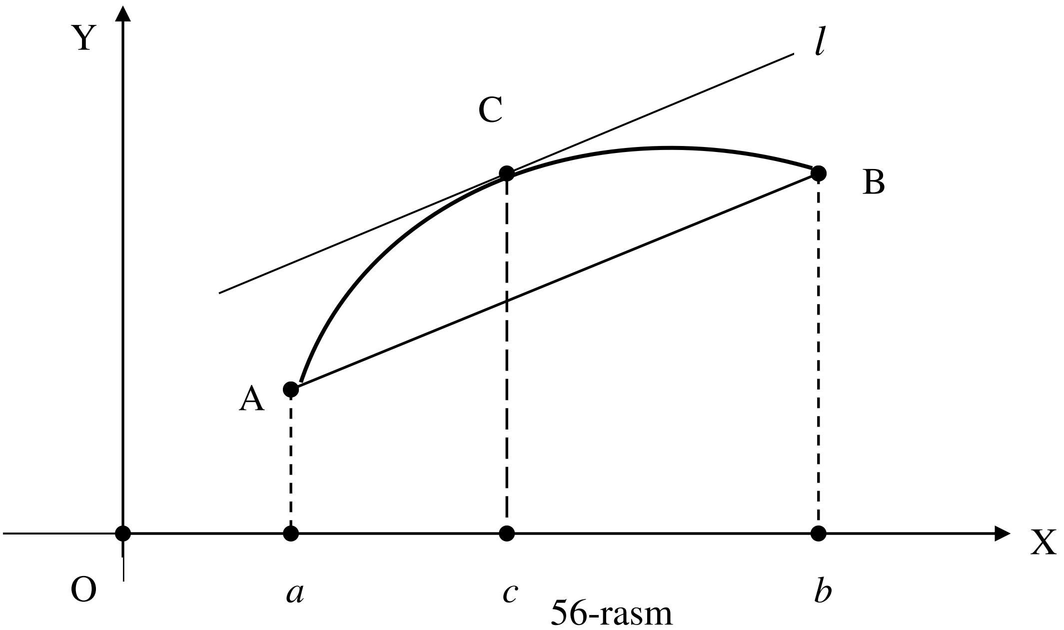
$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Teorema shartiga asosan bu funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va uning ichki nuqtalarida differensiallanuvchi. Bundan tashqari bu funksiya chegaraviy nuqtalarda $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ shartni qanoatlantiradi. Shu sababli, Roll teoremasiga asosan, kamida bitta shunday $c\in(a,b)$ nuqta mavjudki, unda $\varphi'(c)=0$ tenglik bajariladi. Bu yerdan

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow\varphi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

natijani, ya’ni teorema tasdig‘ini olamiz.

Lagranj teoremasining geometrik ma’nosi aniqlash uchun (1) tenglikning o‘ng tomonidagi $f'(c)$ hosila $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, funksiya grafigini ifodalovchi AB egri chiziqning (56-rasmga qarang) biror $C(c,f(c))$ nuqtasiga o‘tkazilgan l urinmasining, chap tomonidagi kasr esa uning $A(a,f(a))$ va $B(b,f(b))$ nuqtalarini tutashtiruvchi AB vatarining burchak koeffitsiyentini bo‘ladi.



56-rasm

Demak, ikkita to‘g‘ri chiziqning parallellik shartiga asosan (V bob,§2, (5) tenglikka qarang), AB egri chiziqning kamida bitta nuqtasidagi l urinma uning AB vatariga parallel joylashgan bo‘ladi.

Misol sifatida $f(x)=\alpha x^3-2\alpha x^2+\beta x+\gamma$ funksiyani [0,1] kesmada qaraymiz. Bunda α, β va γ–ixtiyoriy haqiqiy sonlar. Bu holda Lagranj teoremasini barcha shartlari bajariladi va

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{(\alpha-2\alpha+\beta+\gamma)-\gamma}{1}=\beta-\alpha.$$

Endi (1) tenglik bajariladigan c nuqtani topib, $0<c<1$ ekanligini tekshiramiz:

$$f'(c)=3\alpha c^2-4\alpha c+\beta=\beta-\alpha\Rightarrow 3c^2-4c+1=0\Rightarrow c_1=1,c_2=\frac{1}{3}\Rightarrow c=\frac{1}{3}\in(0,1).$$

Izoh: Agar $f(b)-f(a)=\Delta f$–funksiya orttirmasi, $b-a=\Delta x$–argument orttirmasi ekanligini hisobga olsak, (1) tenglik $\Delta f=f'(c)\cdot\Delta x$ ko‘rinishni oladi va orttirmalar orasidagi munosabatni ifodalaydi. Shu sababli (1) tenglik ***chekli orttirmalar yoki Lagranj formulasi*** deb ataladi.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, Lagranj teoremasi Roll teoremasidan keltirib chiqarildi. Ammo Roll teoremasi o'z navbatida Lagranj teoremasining xususiy holi bo'lib, undan $f(a)=f(b)$ holda kelib chiqadi.

3.3. Koshi teoremasi. Lagranj teoremasini farang matematigi Koshining (1789 - 1857) ushbu teoremasi umumlashtiradi.

3-TEOREMA (Koshi teoremasi): Berilgan $y=f(x)$ va $y=g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada uzluksiz va uning ichki nuqtalarida differensiallanuvchi hamda (a,b) oraliqda $g'(x)\neq 0$ bo'lsin. Bu holda kamida bitta shunday $c\in(a,b)$ nuqta topiladiki, unda

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (2)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot: Teorema shartiga ko'ra ixtiyoriy $x\in(a,b)$ uchun $g'(x)\neq 0$ ekanligidan $g(b)\neq g(a)$ xulosa kelib chiqadi. Haqiqatan ham, agar $g(b)=g(a)$ bo'lsa, unda Roll teoremasiga asosan, kamida bitta $c\in(a,b)$ nuqtada $g'(c)=0$ bo'lar edi. Bu esa teorema shartiga zid. Shu sababli quyidagi yordamchi funksiyani kiritish mumkin:

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left[g(x)-g(a)\right].$$

Teorema shartlarida bu funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lib,

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$$

hosilaga ega. Bulardan tashqari kiritilgan yordamchi $F(x)$ funksiya $F(a)=F(b)=0$ shartni ham qanoatlantirishini tekshirib ko'rishimiz mumkin. Demak, $F(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada Roll teoremasining hamma shartlarini qanoatlantiradi. Shuning uchun $[a,b]$ kesma ichida kamida bitta shunday c nuqta ($a<c<b$) topiladiki, unda $F'(c)=0$, ya'ni

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikdan bevosita teorema tasdig'i bo'lgan (2) formula kelib chiqadi.

Masalan, Koshi teoremasini [0,1] kesmada

$$f(x)=Ax^2+Bx+C\,,\quad g(x)=(A+B)x+2A\quad (A,\,B,\,C\in(-\infty,\,\infty) \text{ va } A+B\neq 0)$$

ko'rinishdagi funksiyalar uchun qaraymiz. Bu holda

$$\frac{f(1)-g(1)}{f(0)-g(0)}=\frac{A+B+C-(A+B)-2A}{C-2A}=1\Rightarrow\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{2Ac+B}{A+B}=1\Rightarrow c=\frac{1}{2}\in(0,1)$$

Demak, ko'rilayotgan funksiyalar uchun Koshi teoremasi tasdig'i $c=0,5\in(0,1)$ nuqtada bajariladi.

Izohlar: 1) Koshi teoremasidan $g(x)=x$ xususiy holda Lagranj teoremasi kelib chiqadi va shu sababli (2) ***chekli orttirmalarning umumlashgan formulasi yoki Koshi formulasi*** deb ataladi.

2) $f(a)=f(b)$ holda Koshi teoremasidan Roll teoremasi kelib chiqadi.

XULOSA

Differensial hisobning bir qator nazariy va amaliy masalalarini qarashda farang matematiklari Roll, Lagranj va Koshi teoremalardan foydalaniladi. Bu teoremalar orqali biror kesmada uzluksiz, uning ichki nuqtalarida esa differensiallanuvchu bo‘lgan funksiyalarning ma’lum bir xossalari ifodalanadi.

Tayanch iboralar

* Roll teoremasi * Lagranj teoremasi * Koshi teoremasi

Takrorlash uchun savollar

1. Roll teoremasining shartlari nimadan iborat?
2. Roll teoremasida nima tasdiqlanadi?
3. Roll teoremasining geometrik ma’nosi qanday ifodalanadi?
4. Lagranj teoremasi qanday mazmunga ega?
5. Lagranj teoremasining geometrik ma’nosi nimadan iborat?
6. Qaysi holda Lagranj teoremasidan Roll teoremasi kelib chiqadi?
7. Koshi teoremasi qanday ifodalanadi?
8. Qaysi holda Koshi teoremasidan Lagranj teoremasi kelib chiqadi?
9. Qaysi holda Koshi teoremasidan Roll teoremasi kelib chiqadi?

Testlardan namunalar

1. Roll teoremasining tasdig‘ini ko‘rsating: Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va uning ichki nuqtalarida differensiallanuvchi hamda chegaraviy nuqtalarda $f(a)=f(b)$ bo‘lsa, u holda bu kesma ichida kamida bitta shunday $x=c$ nuqta topiladiki, unda ..... bo‘ladi.

A) $f'(c)>0$; B) $f'(c)<0$; C) $f'(c)=0$; D) $f'(c)\neq 0$; E) $f'(c)=f(c)$.

2. $f(x)=x\sin x$ funksiya uchun Roll teoremasi qaysi kesmada o‘rinli?

A) $[0, 1]$; B) $[0, \pi/2]$; C) $[0, \pi]$; D) $[2, \pi]$; E) $[\pi/2, \pi]$.

3. $f(x)=x^2-6x+9$, $x\in[1,5]$, funksiya uchun Roll teoremasining tasdig‘i o‘rinli bo‘ladigan c nuqtani toping.

A) $c=1,5$; B) $c=2$; C) $c=2,5$; D) $c=3$; A) $c=4,5$.

4. $f(x)=x^2-2x+9$, $x\in[0,4]$, funksiya uchun Lagranj teoremasining tasdig‘i o‘rinli bo‘ladigan c nuqtani toping.

A) $c=1$; B) $c=1,5$; C) $c=2$; D) $c=2,5$; E) $c=3$.

5. Agar $f(x)=x^3+8$, $g(x)=x^3+x+1$ va $x\in[-1,2]$ bo‘lsa, Koshi teoremasining tasdig‘i o‘rinli bo‘ladigan c nuqtani toping.

A) $c=-0,5$; B) $c=0$; C) $c=0,5$; D) $c=1$; E) $c=1,5$.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. $f(x)=x^{n+1}-x^{n}+1$ funksiya uchun [0,1] kesmada Roll teoremasi shartlari bajarilishini tekshiring va teorema tasdig‘idagi $x=c$ nuqtani toping.

2. $f(x)=nx+\sin nx$ funksiya uchun [0,π] kesmada Lagranj teoremasi shartlari bajarilishini tekshiring va teorema tasdig‘idagi $x=c$ nuqtani toping.

§4. FUNKSIYA DIFFERENSIALI. YUQORI TARTIBLI HOSILA VA DIFFERENSIALLAR

- ***Differensial va uni hisoblash.***
- ***Differensialni taqribiy hisoblashlarda qo‘llanilishi.***
- ***Yuqori tartibli hosila va differensiallar.***
- ***Parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyalarni differensiallash.***

4.1. Differensial va uni hisoblash. Berilgan $y=f(x)$ funksiyada x argument Δx orttirma olganda funksiya orttirmasi $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$ kabi aniqlanishini eslatib o‘tamiz. Masalan, $f(x)=x^2$ va $g(x)=x^3$ funksiyalar uchun ularning orttirmalari

$$\Delta f=2x\Delta x+(\Delta x)^2,\quad \Delta g=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3=3x^2\Delta x+[3x+\Delta x](\Delta x)^2$$

ko‘rinishda bo‘lib, birinchi qo‘shiluvchi Δx argument orttirmasiga nisbatan chiziqli (birinchi darajali), ikkinchi qo‘shiluvchi esa Δx orttirmaning ikkinchi va uchinchi darajalaridan iborat bo‘lmoqda. Bunda $\Delta x\to 0$, ya’ni cheksiz kichik miqdor bo‘lsa, unda ikkinchi qo‘shiluvchi Δx argument orttirmasiga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor, ya’ni $o(\Delta x)$ bo‘ladi (VII bob, §4, 7-ta’rifga qarang). Shunday qilib, yuqorida ko‘rilgan funksiyalarning orttirmalari

$$\Delta f=2x\cdot\Delta x+o(\Delta x)\ ,\quad \Delta g=3x^2\Delta x+o(\Delta x)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

1-TA’RIF: Agar $y=f(x)$ funksiya orttimasi $\Delta x\to 0$ holda

$$\Delta f=A\cdot\Delta x+o(\Delta x) \qquad (1)$$

ko‘rinishda ifodalansa va bunda A ko‘paytuvchi Δx argument orttirmasiga bog‘liq bo‘lmasa (x argumentni o‘ziga bog‘liq bo‘lishi mumkin), unda $A\cdot\Delta x$ ifoda funksiyaning ***differensiali***, funksiyani o‘zi esa x nuqtada ***differensiallanuvchi*** deb ataladi.

Funksiya differensiali df kabi belgilanadi va ta’rifga asosan $df=A\cdot\Delta x$, ya’ni Δf funksiya orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbatan chiziqli qismini ifodalaydi.

Yuqorida ko‘rilgan funksiyalarning orttirmalari ifodalaridan $df=d(x^2)=2x\cdot\Delta x$, $dg=d(x^3)=3x^2\cdot\Delta x$ ekanligini ko‘ramiz.

Ammo umumiy holda $y=f(x)$ funksiyaning df differensialini ta’rif bo‘yicha, ya’ni (1) tenglik orqali topish ancha murakkab masaladir. Shu sababli bu differensialni osonroq usulda topish masalasi paydo bo‘ladi. Bu masala quyidagi teoremada o‘z yechimini topadi.

1-TEOREMA: Agar $y=f(x)$ funksiya biror x nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, uning shu nuqtadagi differensiali

$$df=f'(x)\cdot\Delta x \qquad (2)$$

formula bilan topilishi mumkin.

Isbot: Hosila ta’rifi va funksiya limitning mavjudligi haqidagi lemmaga asosan (VII bob,§3) quyidagi tengliklarni yozish mumkin:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x)\Rightarrow\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x)+\alpha(\Delta x)\Rightarrow$$

$$\Delta f=f'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x\Rightarrow\Delta f=f'(x)\Delta x+o(\Delta x).$$

Oxirgi tenglikni (1) bilan solishtirib va differensial ta’rifidan foydalanib, (2) formulaga ega bo‘lamiz. Teorema isbot bo‘ldi.

Endi $f(x)=x$ xususiy holni ko‘ramiz. Bu holda $df=dx$ va (2) formulaga asosan $dx=(x)'\cdot\Delta x=\Delta x$. Demak x erkli o‘zgaruvchi (argument) uchun $\Delta x=dx$, ya’ni orttirma va differensial o‘zaro teng bo‘ladi. Shu sababli differensial uchun (2) formulani

$$df=f'(x)\cdot dx=f'(x)dx \qquad (3)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Demak, df funksiya differensialini topish uchun uning $f'(x)$ hosilasini dx argument differensialiga ko‘paytirish kifoya. Masalan,

$$dx^2=(x^2)'dx=2xdx,\ dx^3=(x^3)'dx=3x^2dx,\ d\sin x=(\sin x)'dx=\cos xdx\,.$$

(3) formuladan yoki 1-teoremadan ko‘rinadiki, agar biror x nuqtada $f'(x)$ hosila mavjud bo‘lsa, unda df differensial ham mavjuddir. Bu yerda teskari teorema ham o‘rinli bo‘ladi.

2-TEOREMA: Agar $y=f(x)$ funksiyaning biror x nuqtada df differensiali mavjud bo‘lsa, uning shu nuqtadagi $f'(x)$ hosilasi ham mavjud va

$$f'(x)=\frac{df}{dx} \qquad (4)$$

formula bilan topilishi mumkin.

Isbot: Differensial ta’rifidagi (1) tenglikka asosan ushbu tengliklarni yoza olamiz:

$$\Delta f=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)\Rightarrow\frac{\Delta f}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=A+o(1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(A+o(1))=A+\lim_{\Delta x\to 0}o(1)=A+0=A\,.$$

Demak, (1) tenglik o‘rinli, ya’ni df differensial mavjud bo‘lsa, unda $f'(x)$ hosila mavjud va $f'(x)=A$ bo‘ladi. Ammo, ta’rifga asosan, $A\cdot\Delta x=Adx=df$ bo‘lgani uchun $A=df/dx$ deb yozish mumkin va bundan (4) formula o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

Bu ikkala teoremadan $y=f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo‘lishi uchun uning chekli $f'(x)$ hosilasi mavjud bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi kelib chiqadi. Shu sababli hosila tushunchasi kiritilgan oldingi §1da hosilaga ega funksiyani differensiallanuvchi deb ataganimiz bejiz emas va ba’zan hosila (4) kasr ko‘rinishida ham belgilanadi.

(3) tenglik va hosila olish qoidalaridan differensiallarni hisoblashning quyidagi qoidalari kelib chiqadi:

1. $dC=0$, C-const. ; **2.** $d[Cf(x)] = Cdf(x)$;

3. $d[f(x)\pm g(x)]=df(x)\pm dg(x)$; **4.** $df(x)g(x)=f(x)dg(x)+g(x)df(x)$;

$$\textbf{5. } d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)df(x)-f(x)dg(x)}{[g(x)]^2}\quad (g(x)\neq 0).$$

Endi $y=f(u)$, $u=u(x)$, murakkab funksiyaning differensialini hisoblash masalasini qaraymiz. Bunda tashqi $f(u)$ va ichki $u(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi deb qaraladi. Differensial hisoblashning (3) formulasi va murakkab funksiya hosilasini hisoblash qoidasiga asosan ushbu tenglikni hosil etamiz:

$$df(u)=(f(u))'_x dx = f'(u)\cdot u'dx = f'(u)\cdot du \qquad (5)$$

Bu yerdan, (3) va (5) formulalarni taqqoslab, oddiy va murakkab funksiya differensiali bir xil usulda hisoblanishini ko‘ramiz. Bu ***differensialning invariantlik xossasi*** deyiladi.

Masalan, $y=\cos\sqrt{x}$ murakkab funksiya uchun

$$dy = d\cos\sqrt{x} = (\cos\sqrt{x})'dx = -\sin\sqrt{x}\,(\sqrt{x})'dx = -\sin\sqrt{x}\,d(\sqrt{x})\,.$$

4.2. Differensialni taqribiy hisoblashlarda qo‘llanilishi. (1) tenglik va differensial ta’rifidan foydalanib

$$\Delta f=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)=df+o(\Delta x) \qquad (6)$$

tenglikni yozish mumkin. Bu tenglikdan argument orttirmasi Δx kichik son bo‘lganda funksiya orttirmasi Δf va differensiali df qiymatlari bir-biriga yaqin, ya’ni $\Delta f\approx df$ taqribiy tenglik o‘rinli bo‘lishini ko‘ramiz.

Masalan, $f(x)=x^2$ funksiyaning $x=40$ va $\Delta x=dx=0{,}01$ bo‘lgandagi Δf orttirmasi va df differensialini topamiz. Bu yerda

$$\Delta f=2x\Delta x+(\Delta x)^2=2\cdot 40\cdot 0{,}01+0{,}0001=0{,}8001\,,\quad df=2xdx=2\cdot 40\cdot 0{,}01=0{,}8\,.$$

Bu natijalardan ko‘rinib turibdiki, Δf va df qiymatlarining farqi atigi 0,0001 bo‘lib, bir-biriga juda yaqin.

Shu sababli (6) tenglik bo‘yicha funksiya uchun ushbu taqribiy hisoblash formulasini yozish mumkini:

$$\Delta f\approx df \Rightarrow f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\,\Delta x \Rightarrow f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\,\Delta x \qquad (7)$$

(7) formula yordamida, funksiyaning ma’lum yoki oson hisoblanadigan $f(x)$ qiymatidan foydalanib, uning noma’lum yoki hisoblanishi qiyin bo‘lgan $f(x+\Delta x)$ qiymati taqribiy hisoblanadi.

Misol sifatida sin31° taqribiy qiymatini topamiz. Buning uchun $f(x)=\sin x$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiyada $x=30°$, $x+\Delta x=31°$ deb olamiz. Bu holda $\Delta x=1°$ va $f'(x)=\cos x$ bo‘lgani uchun, (7) formulaga asosan, quyidagi natijani olamiz:

$$\sin 31^0=\sin(30^0+1^0)\approx\sin 30^0+\cos 30^0\cdot 1^0=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\approx 0{,}515\,.$$

Bu yerda $\sqrt{3}\approx 1.73$, $\pi\approx 3.14$ deb olindi. Bu natijani aniqligi to‘g‘risida xulosa chiqarish uchun trigonometrik funksiyalarning jadvaliga asosan to‘rt xona aniqlikda $\sin 31^0\approx 0.5150$ ekanligini ko‘rsatib o‘tamiz.

Differensial yordamida funksiyalar uchun taqribiy formulalar ham hosil qilish mumkin. Bu maqsadda (7) formulada x=0 deb olib, kichik Δx qiymatlari uchun

$$f(\Delta x) \approx f(0)+f'(0)\Delta x$$

natijani olamiz. Bu yerda Δx o‘rniga x qo‘yib, argumentning kichik qiymatlarida $y=f(x)$ funksiya uchun

$$f(x) \approx f(0)+f'(0)\cdot x \qquad (8)$$

taqribiy formulaga ega bo‘lamiz. Masalan, x kichik son bo‘lganda,

$$\sin x \approx x, \quad (1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x, \quad e^x \approx x, \quad \ln(1+x) \approx x, \quad \mathrm{tg} x \approx x \qquad (9)$$

taqribiy formulalardan foydalanish mumkin.

4.3. Yuqori tartibli hosila va differensiallar. Endi funksiyaning yuqori tartibli hosilasi va differensiali tushunchalarini kiritamiz.

Ma’lumki, $y=f(x)$ funksiya biror (a,b) oraliqda differensiallanuvchi bo‘lsa, uning hosilasi $f'(x)$ shu oraliqda aniqlangan yangi bir funksiya bo‘ladi. Shu sababli $f'(x)$ funksiyaning hosilasi to‘g‘risida so‘z yuritish mumkin.

2-TA’RIF: Agar $f'(x)$ hosila differensiallanuvchi funksiya bo‘lsa, uning hosilasi $y=f(x)$ ***funksiyaning II tartibli hosilasi*** deyiladi.

Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning II tartibli hosilasi $f''(x)$, y'' yoki $f^{(2)}(x)$,$y^{(2)}$ kabi belgilanadi va , ta’rifga asosan, $f''(x)=[f'(x)]'$ formula bilan hisoblanadi.

Masalan, $f(x)=x^4$ funksiya uchun $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=(4x^3)'=12x^2$ bo‘ladi.

Agar moddiy nuqta to‘g‘ri chiziq bo‘ylab $S=S(t)$ tenglama bilan harakatlanayotgan bo‘lsa, unda $S'(t)$ uning t vaqtdagi $v(t)$ oniy tezligini ifodalashini ko‘rib o‘tgan edik. Unda $S''(t)$ nuqtaning harakat davomidagi tezligini o‘zgarish tezligini, ya’ni $a(t)$ tezlanishini ifodalaydi.

Yuqorida ko‘rib o‘tilgan tarzda differensiallanuvchi II tartibli $f''(x)$ hosila bo‘yicha ***III tartibli hosila*** $[f''(x)]'$ kabi aniqlanadi va $f'''(x)$ yoki $f^{(3)}(x)$ kabi belgilanadi. Bu jarayonni davom ettirilib, $f^{(n)}(x)$ ***n–tartibli hosila*** tushunchasi quyidagi rekkurent formula orqali kiritiladi:

$$f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x))',\ n=2,3,4,\dots . \qquad (10)$$

Izoh: Hosila tartibi tushunchasi kiritilgach, qulaylik uchun $f(x)$ funksiyaning o‘zi 0-tartibli hosila, ya’ni $f(x)=f^{(0)}(x)$, $f'(x)$ esa I tartibli hosila, ya’ni $f'(x)=f^{(1)}(x)$ deb qaraladi.

Masalan, $f(x)=x^3$ uchun $f^{(0)}(x)=x^3$, $f^{(1)}(x)=3x^2$, $f^{(2)}(x)=6x$, $f^{(3)}(x)=6$ va $n\geq4$ holda $f^{(n)}(x)=0$ bo‘ladi. Umuman olganda, $f(x)=P_m(x)$ – m-darajali ko‘phad bo‘lsa, unda $n>m$ holda $f^{(n)}(x)=0$ bo‘ladi.

3-TA’RIF: Agar $y=f(x)$ funksiya uchun n–tartibli hosila mavjud bo‘lsa, u ***n marta differensiallanuvchi*** funksiya deb ataladi.

n–tartibli hosila ta’rifini ifodalovchi (10) formuladan ko‘rinadiki, umuman olganda $f^{(n)}(x)$ berilgan funksiyadan ketma-ket n marta hosila olish orqali birin-ketin topiladi. Ammo ba’zi funksiyalar uchun n–tartibli hosila ifodasini birdaniga yozish mumkin. Masalan,

$$(e^x)^{(n)}=e^x\ ,\ (a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a\ ,\ (\sin x)^{(n)}=\sin(x+\pi n/2)\ ,\ (\cos x)^{(n)}=\cos(x+\pi n/2)\ .$$

n–tartibli hosila hisoblanadigan (11) formula va hosila olish qoidalaridan foydalanib, n marta differensiallanuvchi $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar uchun

$$(C)^{(n)}=0\ (C\text{-const})\ ,\ (C\cdot u)^{(n)}=C\cdot u^{(n)}\ ,\quad (u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$$

formulalar o‘rinli ekanligini ko‘rsatish qiyin emas.

Ammo $y=uv$ ko‘paytmaning n–tartibli hosilasi uchun formula murakkab bo‘lib, quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi:

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v''+\cdots+nu'v^{(n-1)}+v^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$$

Bu tenglik ***Leybnits formulasi*** deyiladi va unda qatnashadigan binomial koeffitsiyentlar [I bob,§4, (4)]

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!},\quad n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n$$

formula bilan hisoblanishini eslatib o‘tamiz.

Berilgan $y=f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo‘lsa, uning differensiali $df=f'(x)dx$ ko‘rinishda bo‘ladi. Demak, df differensialning qiymati x argument va $dx=\Delta x$ argument orttirmasiga (differensialiga) bog‘liq bo‘ladi. Biz argument differensiali dx ixtiyoriy, ammo o‘zgarmas va x argumentning qiymatiga bog‘liq bo‘lmagan son deb qaraymiz. Bu holda df differensial x argumentning biror funksiyasidan iborat bo‘ladi va shu sababli uning differensiali to‘g‘risida so‘z yuritish mumkin.

4-TA’RIF: Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning differensiali df o‘z navbatida differensiallanuvchi funksiya bo‘lsa, uning differensiali $y=f(x)$ funksiyaning ***ikkinchi tartibli differensiail*** deb ataladi.

$y=f(x)$ funksiyaning II tartibli differensiali d^2f kabi belgilanadi va, ta’rifga asosan, quyidagi formula bilan topiladi:

$$d^2f=d(df)=d(f'(x)dx)=[f'(x)dx]'dx=[f'(x)]'\,dx\,dx=f''(x)(dx)^2=f''(x)dx^2\ .$$

Demak, $y=f(x)$ funksiyaning II tartibli differensiali uning II tartibli hosilasi orqali

$$d^2f=f''(x)dx^2\ ,\ dx^2=(dx)^2,$$

formula yordamida topiladi. Xuddi shunday tarzda $y=f(x)$ funksiyaning ***n – tartibli differensiali*** d^nf

$$d^nf=d(d^{n-1}f)=f^{(n)}(x)(dx)^n=f^{(n)}(x)dx^n\ ,\ n=2,3,4,\ \ldots \qquad (11)$$

kabi aniqlanadi va hisoblanadi.

Bunda funksiyaning o‘zi $f=d^0f$ – 0-tartibli, differensiali esa $df=d^1f$– 1- tartibli differensial singari qaraladi.

Masalan, $f(x)=x^3$ funksiya uchun $df=3x^2dx$, $d^2f=6xdx^2$, $d^3f=6dx^3$ va $n\geq 4$ holda $d^nf=0$ bo‘ladi.

Yuqori tartibli differensiallardan foydalanib, yuqori tartibli hosilalarni

$$f''(x)=\frac{d^2f}{dx^2},\quad f'''(x)=\frac{d^3f}{dx^3},\cdots,\ f^{(n)}(x)=\frac{d^nf}{dx^n}$$

kabi yozish mumkin.

4.4. Parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyalarni differensiallash. Bir qator masalalarni yechishda funksiyaning parametrik ko‘rinishdagi ifodasi qulay bo‘ladi.

5-TA’RIF: Agar x va y o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanish bevosita emas, balkim uchinchi bir t o‘zgaruvchi yordamida biror $x=\varphi(t)$ va $y=\psi(t)$, $\alpha\leq t\leq\beta$, funksiyalar orqali bavosita berilgan bo‘lsa, unda x argumentning y funksiyasi ***parametrik*** ko‘rinishda berilgan, t esa ***parametr*** deyiladi.

Masalan, $x=t^3=\varphi(t)$, $y=t^6=\psi(t)$, $t\in(-\infty, \infty)$, parametrik ko‘rinishda bavosita berilgan funksiya $y=f(x)=x^2$, $x\in(-\infty, \infty)$, ko‘rinishdagi bevosita berilgan funksiyani ifodalaydi.

Parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyaning x bo‘yicha hosilasini topish uchun dastlab uni $y=f(x)$ ko‘rinishda yozib, so‘ngra uning hosilasini hisoblab topish mumkin. Masalan, yuqoridagi misolda parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyaning hosilasi $y'=f'(x)=2x$ ekanligi oson topiladi. Ammo har doim ham bu usul qulay bo‘lmaydi, chunki parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyani $y=f(x)$ ko‘rinishda yozish qiyin yoki $y=f(x)$ funksiya ko‘rinishi juda murakkab bo‘lib, undan hosila olish noqulay bo‘lishi mumkin. Shu sababli parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyaning hosilasini to‘g‘ridan-to‘g‘ri $x=\varphi(t)$ va $y=\psi(t)$ funksiyalar orqali topish masalasi paydo bo‘ladi. Bizni qiziqtiradigan $y=f(x)$ funksiya $x=\varphi(t)$ va $y=\psi(t)$ funksiyalar orqali parametrik ko‘rinishda berilgan bo‘lsin. Agar $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar keraklicha marta differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda hosilani differensiallar orqali ifodasi va differensiallash qoidalaridan foydalanib,

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \qquad (12)$$

$$y''_x=(y'_x)'_x=\frac{d(y'_x)}{dx}=\frac{d(y'_x)/d(t)}{dx/d(t)}=\frac{[\psi'(t)/\varphi'(t)]'}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3} \qquad (13)$$

formulalar o‘rinli ekanligini ko‘ramiz. Bu formulalar parametrik ko‘rinishda berilgan funksiya hosilalarini topishni ifodalaydi.

Masalan, $x=2\cos t$ va $y=3\sin t$, $t\in[0,\pi/2]$, funksiyalar orqali parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyani qaraymiz. Bunda

$$\frac{x}{2}=\cos t\,,\quad \frac{y}{3}=\sin t\Rightarrow\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1\Rightarrow\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

tenglik o‘rinli va shu sababli bu funksiya yarim o‘qlari $a=2$ va $b=3$ bo‘lgan ellipsni (V bob,§3, (7)) I chorakdagi bo‘lagini ifodalaydi. Bu funksiya uchun $y'(x)$ va $y''(x)$ hosilalarni (12) va (13) formulalardan topamiz:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{3\cos t}{-2\sin t}=-\frac{3}{2}\operatorname{ctg} t\,,\quad y''_x=\frac{y''x'-y'x''}{[x']^3}=\frac{6\sin^2 t+6\cos^2 t}{-8\sin^3 t}=\frac{-3}{4\sin^3 t}\,.$$

XULOSA

Funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatan chiziqli qismi mavjud bo‘lsa, u differensial deb ataladi. Funksiya differensiali mavjud bo‘lishi uchun uning hosilasi mavjud bo‘lishi zarur va yetarlidir. Shu sababli ham hosilaga ega funksiyalar differensiallanuvchi deyiladi. Bu holda funksiya differensiali uning hosilasini argument orttirmasiga (differensialiga) ko‘paytirish orqali topilishi mumkin. Differensial yordamida funksiya qiymatlarini taqribiy hisoblash va natijalarni baholash mumkin.

Funksiyaning hosilasi yana biror funksiyadan iborat bo‘ladi va shu sababli uning hosilasi to‘g‘risida so‘z yuritib bo‘ladi. Agar bu hosila mavjud bo‘lsa, u berilgan funksiyaning II tartibli hosilasi deb ataladi. Shunday tarzda n-tartibli ($n\geq 2$) hosilalar aniqlanadi. Shuningdek n-tartibli ($n\geq 2$) differensiallar tushunchasi ham qaraladi.

Ayrim masalalarda x argument va y funksiya orasidagi bog‘lanish bevosita berilmasdan, parametr deb ataladigan yordamchi t o‘zgaruvchi orqali bavosita aniqlanadi. Bu holda funksiya parametrik ko‘rinishda berilgan deyiladi va uning hosilasini hisoblash formulalari mavjud.

Tayanch iboralar

* Funksiya differensiali * Differensialning mavjudlik sharti * Algebraik yig‘indi differensiali * Ko‘paytma differensiali * Bo‘linma differensiali * Differensialning invariantligi * Differensialning tatbiqlari * Yuqori tartibli hosilalar * II tartibli hosilaning mexanik ma’nosi * Leybnits formulasi * Yuqori tartibli differensiallar
* Parametrik ko‘rinishda berilgan funksiya hosilasi

Takrorlash uchun savollar

1. Funksiya differensiali deb nimaga aytiladi?
2. Differensial mavjudligini zaruriy va yetarli sharti nimadan iborat?
3. Funksiya orttirmasi va differensiali orasida qanday bog‘lanish mavjud?
4. O‘zgarmas son differensiali nimaga teng?
5. Algebraik yig‘indining differensiali qanday topiladi?
6. Ko‘paytmaning differensiali qanday hisoblanadi?
7. Bo‘linmani differensiallash qoidasi qanday ifodalanadi?
8. Murakkab funksiyani differensiallash qoidasi nimadan iborat?
9. Differensialning invariantlik xossasi nimani ifodalaydi?
10. Differensial taqribiy hisoblashlarda qanday qo‘llaniladi?
11. Funksiyaning II tartibli hosilasi deb nimaga aytiladi?
12. II tartibli hosilaning mexanik ma’nosi nimadan iborat?
13. Yuqori tartibli hosilalar qanday aniqlanadi?
14. Yuqori tartibli hosilalarni hisoblash qoidalari nimadan iborat?
15. Leybnits formulasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
16. Yuqori tartibli differensiallar qanday aniqlanadi?
17. Parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyaning hosilasi qanday topiladi?

Testlardan namunalar

1. Agar $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi $f'(x)$ mavjud va chekli bo‘lsa, uning df differensiali qanday topiladi?

A) $df=f'(x)+dx$; B) $df=f'(x)-dx$; C) $df=f'(x)/dx$;
D) $df=f'(x)dx$; E) $df=f'(x)$.

2. Differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiya argumentining orttirmasi Δx kichik bo‘lganda uning differensiali df va orttirmasi Δf orasidagi munosabat qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?

A) $\Delta f = df$; B) $\Delta f > df$; C) $\Delta f < df$; D) $\Delta f \cdot df > 0$; E) $\Delta f \approx df$.

3. Differensiallanuvchi funksiyaning differensialini topish qoidasi qayerda noto‘g‘ri ko‘rsatilgan?

A) $dCf = Cdf$; B) $d(u+v) = du + dv$; C) $d(u-v) = du - dv$;

D) $d(uv) = udv - vdu$; E) $df(u) = f'(u)du$.

4. $y=\cos(3x+4)$ funksiya differensiali dy qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?

A) $dy= \sin(3x+4)dx$; B) $dy= 4\sin(3x+4)dx$; C) $dy= -3\sin(3x+4)dx$;

D) $dy= -4\sin(3x+4)dx$; E) $dy= 3\sin(3x+4)dx$.

5. $y=x\ln x$ funksiyaning dy differensialini toping.

A) $dy= xdx$; B) $dy= \ln xdx$; C) $dy=(1/x)dx$;

D) $dy= (1+\ln x)dx$; E) $dy=(1-\ln x)dx$.

6. Funksiyani differensial yordamida taqribiy hisoblash formulasi qayerda to‘g‘ri ifodalangan?

A) $f(x+\Delta x)\approx f(x)df$; B) $f(x+\Delta x)\approx f(x)+df$; C) $f(x+\Delta x)\approx f(x)/df$;

D) $f(x+\Delta x)\approx df / f(x)$; E) $f(x+\Delta x)\approx f(x)\pm df$.

7. Qaysi funksiyaning n-tartibli hosilasi noto‘g‘ri yozilgan?

A) $(e^x)^{(n)} = e^x$; B) $(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$; C) $(x^n)^{(n)} = n!$;

D) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$; E) barcha hosilalar to‘g‘ri yozilgan.

8. $y=x\ln x$ funksiyaning II tartibli y'' hosilasi topilsin.

A) $y''=1+\ln x$; B) $y''=\ln x$; C) $y''=1$; D) $y''=1/x$; E) $y''=1-\ln x$.

9. $y=xe^x$ funksiyaning n-tartibli hosilasi $y^{(n)}$ topilsin.

A) $y^{(n)}= xe^x$; B) $y^{(n)}= nxe^x$; C) $y^{(n)}=(x+n)e^x$; D) $y^{(n)}=(x-n)e^x$;

E) to‘g‘ri javob keltirilmagan.

10. $y=(t+1)^2$, $x=t^2+1$ parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyaning $y'(x)$ hosilasini toping.

A) $y' = \frac{1}{t}$; B) $y' = 1 + \frac{1}{t}$; C) $y' = 1 - \frac{1}{t}$; D) $y' = t + \frac{1}{t}$; E) $y' = t - \frac{1}{t}$.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Ushbu funksiyaning III tartibli $f'''(x)$ hosilasini hisoblang:

$$f(x)=n\sin x+\cos nx-x^n \ .$$

2. $f(x)=e^x\cos nx$ funksiyaning II tartibli $f''(x)$ hosilasini hisoblang.

3. Differensial yordamida $f(x)=\sqrt{n^2+nx}$ funksiyaning x=0.05 nuqtadagi taqribiy qiymatini toping.

4. $y=(t+1)^n$, $x=t^{2n}+1$ parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning $y'(x)$ hosilasini toping.

§5. FUNKSIYANI HOSILA YORDAMIDA TEKSHIRISH

- ***Funksiyaning monotonlik oraliqlari.***
- ***Funksiyaning lokal ekstremumlari.***
- ***Funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik sohalari***.
- ***Botiqlik va qavariqlikning iqtisodiy tatbiqlari.***
- ***Funksiya grafigining burilish nuqtalari.***
- ***Logistik funksiya.***
- ***Funksiya grafigining asimptotalari.***
- ***Funksiyani tekshirishning umumiy sxemasi.***
- ***Funksiyaning global ekstremumlari.***

Agar $y=f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lsa, uning juda ko'p xususiyatlarini $f'(x)$ hosila yordamida aniqlash mumkin. Shu sababli hosila funksiyani tekshirish uchun asosiy va kuchli qurol bo'lib hisoblanadi.

5.1. Funksiyaning monotonlik oraliqlari. Biz VI bob §2 da o'suvchi va kamayuvchi funksiyalar ta'rifini bergan edik. Bu ta'rifni yana bir marta eslatib o'tamiz.

<u>1-TA'RIF:</u> Agarda $y=f(x)$ funksiya biror (a,b) oraliqda aniqlangan va bu oraliqqa tegishli ixtiyoriy ikkita $x_1<x_2$ nuqtalarda $f(x_1)<f(x_2)$ $[f(x_1)>f(x_2)]$ shartni qanoatlantirsa, u shu oraliqda ***o'suvchi* [*kamayuvchi*]** deb ataladi.

Masalan, $y=2^x$ $[y=(0,2)^x]$ funksiya barcha nuqtalarda, ya'ni $(-\infty , \infty)$ oraliqda o'suvchi [kamayuvchi], $y=1+x^2$ funksiya $(-\infty ,0)$ oraliqda kamayuvchi, $(0,\infty)$ oraliqda esa o'suvchi bo'ladi.

Funksiyaning o'sish va kamayish oraliqlarini birgalikda uning ***monotonlik oraliqlari*** deb ataymiz. Differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiyaning monotonlik oraliqlarini topish masalasini qaraymiz.

<u>1-TEOREMA:</u> **I.** Differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiya biror (a,b) oraliqda o'suvchi [kamayuvchi] bo'lsa, bu oraliqda uning hosilasi $f'(x)\geq 0$ $[f'(x) \leq 0]$ shartni qanoatlantiradi.

II. Agar differensiallanuvchi bo'lgan $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi biror (a,b) oraliqda $f'(x)>0$ $[f'(x)<0]$ shartni qanoatlantirsa, unda bu (a,b) oraliqda funksiya o'suvchi [kamayuvchi] bo'ladi.

Isbot: I. $y=f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda o'suvchi va x, $x+\Delta x$ nuqtalar shu oraliqqa tegishli bo'lsin.Agarda $\Delta x >0$ bo'lsa, unda

$$x+\Delta x >x \Rightarrow f(x+\Delta x) > f(x) \Rightarrow \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) >0 \;\Rightarrow\; \Delta f/\Delta x>0.$$

Demak, $\Delta x>0 \Rightarrow \Delta f/\Delta x>0$. Xuddi shunday mulohazalardan $\Delta x<0$ holda ham $\Delta f/\Delta x>0$ ekanligi kelib chiqadi. Bu yerdan, hosila ta'rifi va limit xossasiga asosan,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$$

natijani olamiz.

Xuddi shunday usulda kamayuvchi $y=f(x)$ funksiya uchun $f'(x) \leq 0$ ekanligi isbotlanadi.

II. $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi (a,b) oraliqdagi har bir x nuqtada $f'(x)>0$ shartni qanoatlantirsin. Bu holda, chekli orttirmalar haqidagi Lagranj teoremasiga asosan (§3, (1) formula), (a,b) oraliqdagi har qanday $x_1<x_2$ nuqtalar uchun

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi),\ x_1 < \xi < x_2$$

tenglik bajariladi. Bu tenglikdan, $x_2 - x_1 > 0$ va $f'(\xi)>0$ bo‘lgani uchun,

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1),$$

ya’ni $y=f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda o‘suvchi ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shunday usulda (a,b) oraliqdagi har bir x nuqtada $f'(x) < 0$ bo‘lsa, unda bu oraliqda $y=f(x)$ funksiya kamayuvchi ekanligi ko‘rsatiladi. Teorema to‘liq isbotlandi.

1-izoh: Teoremaning I qismi (a,b) oraliq $y=f(x)$ funksiyaning monotonlik oralig‘i bo‘lishini zaruriy, II qismi esa yetarli shartini ifodalaydi.

2-izoh: Monotonlik oralig‘ining yetarlilik sharti har doim ham uning uchun zaruriy shart bo‘lmaydi. Masalan, $f(x)=e^x$ funksiya $(-\infty, \infty)$ oraliqda o‘suvchi va bu oraliqda uning hosilasi $f'(x)=e^x>0$ shartni qanoatlantiradi. Ammo shu oraliqda o‘suvchi $f(x)=x^3$ funksiyaning hosilasi $f'(x)=3x^2$ bu oraliqdagi $x=0$ nuqtada nolga teng bo‘ladi, ya’ni yetarlilik sharti $f'(x)>0$ bajarilmaydi.

Yuqoridagi teoremadan kelib chidadiki, berilgan differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiyaning o‘sish yoki kamayish oraliqlarini topish uchun $f'(x)>0$ yoki $f'(x)<0$ tengsizlikni yechish kerak.

Masalan, $f(x)=x+1/x$ funksiya uchun $f'(x)=1-1/x^2>0$ tengsizlikning yechimi $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ sohadan iborat va shu sababli bu sohada berilgan funksiya o‘suvchi bo‘ladi. $x=0$ nuqtada funksiya aniqlanmaganligini hisobga olib, bu funksiya $(-1, 0) \cup (0,1)$ sohada kamayuvchi ekanligini ko‘ramiz.

5.2. Funksiyaning lokal ekstremumlari. Biz biror ishlab chiqarishni tashkil etayotganimizda mahsulot ishlab chiqarish xarajatlarini iloji boricha kamaytirish (minimallashtirish) va mahsulot ishlab chiqarishdan olinadigan foydani iloji boricha ko‘paytirish (maksimallashtirish) masalasini yechishga harakat qilamiz. Bu kabi masalalar funksiyani ekstremumlari tushunchasiga olib keladi.

2-TA’RIF: Berilgan $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqta va uning biror atrofida aniqlangan bo‘lib, bu atrofdagi ixtiyoriy x nuqta uchun $f(x_0)\geq f(x)$ $[f(x_0) \leq f(x)]$ shartni qanoatlantirsa, u shu x_0 nuqtada ***lokal maksimumga (minimumga)*** ega deb ataladi.

Masalan, $f(x)=\sin x$ funksiya $x=\pi/2$ nuqtada $\sin(\pi/2)=1$ lokal maksimumga, $x=3\pi/2$ nuqtada esa $\sin(3\pi/2)=-1$ lokal minimumga ega bo‘ladi.

Funksiyaning lokal maksimum va minimum qiymatlari birgalikda uning ***lokal*** e***kstremumlari*** deyiladi. Lokal ekstremumning zaruriy sharti quyidagi Ferma teoremasi orqali ifodalanadi.

<u>2-TEOREMA:</u> ***(Ferma teoremasi):*** Agar $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi va lokal ekstremumga ega bo‘lsa, unda bu nuqtada funksiyaning hosilasi $f'(x_0)=0$ shartni qanoatlantiradi.

Isbot: Berilgan $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal maksimumga ega bo‘lgan holni qaraymiz. Bu holda $|\Delta x|$ yetarli kichik bo‘lganda

$$f(x_0+\Delta x) \leq f(x_0) \;\Rightarrow\; \Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \leq 0$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bundan $\Delta x>0$ ($\Delta x<0$) bo‘lganda, $\Delta f/\Delta x\leq 0$ ($\Delta f/\Delta x\geq 0$) ekanligi kelib chiqadi . Shu sababli hosila ta’rifi va limit xossasiga asosan ushbu tengsizliklarga ega bo‘lamiz:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0\,, \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0 \;\; .$$

Teorema shartiga ko‘ra $f'(x_0)$ hosila mavjud bo‘lgani uchun, bu ikkala tengsizlikdan $f'(x_0)=0$ ekanligi kelib chiqadi.

$y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal minimumga ega bo‘lgan hol ham xuddi shunday qaraladi. Teorema isbot bo‘ldi.

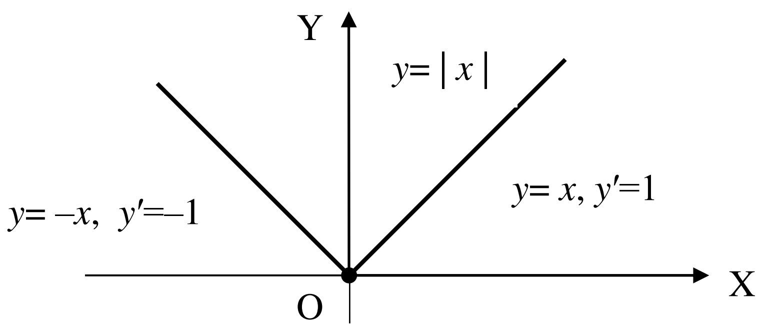
Masalan, $f(x)=\sin x$ funksiya $x_0=\pi/2$ nuqtada lokal maksimumga ega va bu nuqtada uning hosilasi $f'(\pi/2)=\cos(\pi/2)=0$ tenglikni qanoatlantiradi.

Ferma teoremasining bir iqtisodiy talqinini keltiramiz. Ishlab chiqarish nazariyasining asosiy qonunlaridan biri quyidagicha ifodalanadi: ishlab chiqarishda mahsulotning optimal (maqsadga muvofiq, eng qulay) hajmi limitik xarajat MS va limitik daromad MD tengligi bilan aniqlanadi. Demak, mahsulotning x_0 optimal hajmi MS(x_0)=MD(x_0) tenglamadan topiladi. Bu tasdiq bevosita Ferma teoremasidan kelib chiqadi. Haqiqatan ham, korxonaning x hajmdagi mahsulot ishlab chiqarishdagi xarajatlari S(x), daromadi D(x) bo‘lsa, unda uning olgan foydasi F(x)=D(x)–S(x) funksiya bilan aniqlanadi.Bu holda mahsulotning optimal hajmi x_0 foyda F(x) maksimal bo‘ladigan nuqta kabi aniqlanadi. Buning uchun, Ferma teoremasiga asosan,

$$F'(x_0)=0 \Rightarrow D'(x_0)-S'(x_0)=0 \Rightarrow D'(x_0)=S'(x_0) \Rightarrow MS(x_0)=MD(x_0)$$

tenglik, ya’ni yuqorida keltirilgan iqtisodiy qonun bajarilishi kerak.

Funksiya $f'(x)=0$ shartni qanoatlantiruvchi nuqtalardan boshqa nuqtada ham lokal ekstrmumga ega bo‘lishi mumkin. Masalan, $f(x)=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada minimumga ega (57-rasmga qarang), ammo bu nuqtada uning hosilasi mavjud emas.



57-rasm

Xulosa: Funksiya ekstremumga ega bo‘lgan nuqtada uning hosilasi nolga teng yoki mavjud bo‘lmaydi.

3-TA’RIF: Funksiya hosilasi nolga teng yoki mavjud bo‘lmagan nuqtalar shu funksiyaning ***kritik yoki statsionar nuqtalari*** deyiladi.

Demak, funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo‘lsa, x_0 nuqta uning kritik nuqtasi bo‘ladi. Ammo bu tasdiqning teskarisi har doim ham o‘rinli bo‘lmaydi, ya’ni ekstremumning yuqorida ko‘rsatilgan $f'(x_0)=0$ zaruriy sharti yetarli shart emas.

Masalan, $y=x^3$ funksiyaning $f'(x)=3x^2$ hosilasi $x=0$ nuqtada nolga teng va shu sababli bi funksiya uchun $x=0$ kritik nuqta bo‘ladi. Ammo bu nuqtada funksiya ekstremumga ega emas, chunki $x<0$ bo‘lganda $f(x)<0=f(0)$ va $x>0$ bo‘lganda $f(x)>0=f(0)$.

3-TEOREMA (***lokal ekstremumning I yetarli sharti***): Agar $y=f(x)$ funksiya x_0 kritik nuqtaning biror atrofida differensiallanuvchi bo‘lib, bu kritik nuqtani chapdan ($x<x_0$) o‘ngga ($x>x_0$) qarab bosib o‘tishda $f'(x)$ hosila o‘z ishorasini o‘zgartirsa, u holda x_0 kritik nuqtada $f(x)$ funksiya lokal ekstremumga erishadi. Jumladan, bunda $f'(x)$ hosila o‘z ishorasini musbatdan manfiyga (manfiydan musbatga) o‘zgartirsa, unda x_0 kritik nuqtada $f(x)$ funksiya lokal maksimumiga (lokal minimumiga) erishadi.

Isbot: $f'(x)>0$ $(x<x_0)$ va $f'(x)<0$ $(x>x_0)$ holni ko‘ramiz. Kritik x_0 nuqtaning biror atrofidagi ixtiyoriy x nuqtani qaraymiz. Bu holda, Lagranj teoremasiga asosan,

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0) \qquad (1)$$

tenglikni yoza olamiz. Bunda $x<x_0$ yoki $x>x_0$ holda $\xi\in(x,x_0)$ yoki $\xi\in(x_0,x)$ bo‘ladi.

Agar $x<x_0 \Rightarrow x-x_0<0$ bo‘lsa, unda teorema shartiga asosan $f'(\xi)>0$, chunki $\xi<x_0$. Bu yerdan va (1) tenglikdan $f(x)-f(x_0)<0 \Rightarrow f(x)<f(x_0)$ ekanligini ko‘ramiz.

Xuddi shunday agar $x>x_0$, ya’ni $x-x_0>0$ bo‘lsa, unda $\xi>x_0$ va $f'(\xi)<0$ bo‘ladi. Bu holda ham $f(x)-f(x_0)<0$, ya’ni $f(x)<f(x_0)$ natijani olamiz. Demak, x_0 kritik nuqta atrofidagi ixtiyoriy x nuqta uchun $f(x)<f(x_0)$ bo‘ladi va, ta’rifga asosan, bu nuqtada funksiya lokal maksimumga egadir.

Teoremaning $f'(x)<0$ $(x<x_0)$ va $f'(x)>0$ $(x>x_0)$ shartdagi tasdig‘i ham shu tarzda isbotlanadi.

Misol sifatida $f(x)=x+1/x$ funksiyani ekstremumga tekshiramiz. Buning uchun dastlab $f'(x)=1-1/x^2$ hosilani topamiz. Bunda $f'(x)=0$ tenglamadan $x_1=-1$ va $x_2=1$ kritik nuqtalarni aniqlaymiz. Bundan tashqari $x=0$ nuqtada $f'(x)$ mavjud emas, ammo bu nuqta funksiyani aniqlanish sohasiga kirmaydi va shu sababli uni ekstremumga tekshirish ma’noga ega emas

Dastlab $x_1=-1$ kritik nuqtani qaraymiz. Bunda $x<-1$ bo‘lganda $f'(x)>0$ va $x>-1$ bo‘lganda $f'(x)<0$ ekanligini ko‘ramiz. Demak, $x_1=-1$ kritik nuqtada funksiya lokal maksimumga ega va $f_{max}=f(-1)=-2$.

Xuddi shunday ravishda $x_2=1$ kritik nuqtada funksiya lokal minimumga ega va $f_{\min}=f(1)=2$ ekanligini aniqlaymiz.

Endi $f(x)=1+(x-1)^{2/3}$ funksiyani qaraymiz. Bu holda

$$f'(x)=[1+(x-1)^{2/3}]'=\frac{2}{3}(x-1)^{-1/3}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$$

va hosila birorta ham nuqtada nolga teng bo'lmaydi. Ammo $x=1$nuqtada hosila mavjud emas va bu nuqta funksiyani aniqlanish sohasiga kiradi. Demak, $x=1$ kritik nuqta bo'ladi. Bunda $x<1$ bo'lganda $f'(x)<0$ va $x>1$ bo'lganda $f'(x)>0$. Demak, $x=1$ kritik nuqtada funksiya lokal minimumga ega va $f_{\min}=f(1)=1$ bo'ladi.

4-TEOREMA: Agar $y=f(x)$ funksiya hosilasi x_0 kritik nuqtaning chap va o'ng atrofida ishorasini o'zgartirmasa, bu nuqtada funksiya ekstremumga ega bo'lmaydi.

Isbot: $f'(x)>0$ holni ko'ramiz. Kritik x_0 nuqtaning biror atrofidagi ixtiyoriy x nuqtani qaraymiz. Bu holda yana Lagranj teoremasiga asosan yuqoridagi (1) tenglikni yozamiz. Unda $x<x_0$ va $x>x_0$ hollarning ikkalasida ham $f'(\xi)>0$ bo'ladi. Bundan $x<x_0$ holda $f(x)<f(x_0)$, $x>x_0$ holda esa $f(x)>f(x_0)$ ekanligini ko'ramiz. Bu esa $y=f(x)$ funksiya x_0 kritik nuqtada ekstremumga ega emasligini ifodalaydi.

Teoremaning $f'(x)<0$ holdagi isboti oldingi hol kabi amalga oshiriladi va o'quvchiga mustaqil ish sifatida havola etiladi.

Masalan, $f(x)=\ln(x^3+1)$ funksiyaning hosilasi $f'(x)=3x^2/(x^3+1)$ bo‘lib, undan $x=0$ kritik nuqta ekanligini ko‘ramiz. Bu kritik nuqta atrofida $f'(x)>0$ va shu sababli unda funksiya ekstremumga ega bo‘lmaydi.

Ayrim hollarda kritik nuqta atrofida $f'(x)$ hosilaning ishorasini aniqlash murakkab bo‘ladi. Bunday hollarda, $y=f(x)$ funksiya x_0 kritik nuqtada ikki marta differensiallanuvchi va $f''(x)$ bu nuqtaning biror atrofida uzluksiz bo‘lsa, quyidagi teoremadan foydalanish mumkin.

5-TEOREMA (***lokal ekstremumning II yetarli sharti***)***:*** Agar x_0 kritik nuqtada $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$ va chekli bo‘lsa, unda bu nuqtada $y=f(x)$ funksiya lokal ekstremumga ega bo‘ladi. Jumladan, $f''(x_0)<0$ ($f''(x_0)>0$) bo‘lsa, $f(x_0)$ funksiyaning lokal maksimumi (lokal minimumi) bo‘ladi.

Isbot: $f''(x_0)>0$ holni ko‘ramiz. $f''(x)$ hosila x_0 kritik nuqtaning biror atrofida uzluksiz bo‘lgani shu atrofda musbat bo‘ladi. Bu holda x_0 kritik nuqtaning shu atrofida $f'(x)$ hosila o‘suvchi funksiya bo‘ladi, chunki bu yerda uning hosilasi $[f'(x)]'=f''(x_0)>0$. Ammo, shartga ko‘ra $f'(x_0)=0$. Bundan $x<x_0$ holda $f'(x_0)<0$ va $x>x_0$ holda $f'(x_0)>0$ ekanligi kelib chiqadi. Bu yerdan, lokal ekstremumning I yetarli shartiga asosan, $y=f(x)$ funksiya x_0 kritik nuqta lokal minimumga ega ekanligi kelib chiqadi.

$f''(x_0)<0$ hol ham shu ravishda qaraladi. Teorema to‘liq isbotlandi.

Misol sifatida $f(x)=x^4-4x$ funksiyani ekstremumga II tartibli hosila yordamida tekshiramiz. $f'(x)=4x^3-4=4(x^3-1)=0$ tenglamadan funksiya yagona $x_0=1$ kritik nuqtaga ega ekanligini aniqlaymiz. Funksiyaning II tartibli hosilasi $f''(x)=12x^2$ bu kritik nuqtada $f''(1)=12>0$ qiymatni qabul qiladi. Demak, berilgan funksiya $x_0=1$ kritik nuqtada lokal minimumga ega va $f_{\min}=f(1)=1–4=–3$ bo'ladi.

Agar x_0 kritik nuqtada ikkinchi tartibli hosila $f''(x_0)=0$ bo'lsa, unda funksiyaning x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lishi yoki bo'lmasligini 5-teorema orqali aniqlab bo'lmaydi. Masalan, $f(x)=x^3$ va $g(x)=x^4$ funksiyalar uchun $x=0$ kritik nuqta bo'ladi. Bu nuqtada II tartibli hosilalar $f''(x)=6x$, $g''(x)=12x^2$ nolga tengdir. Bu kritik nuqtani birinchi tartibli hosila orqali, ya'ni 3-teorema yordamida tekshirib, unda $f(x)=x^3$ ekstremumga ega emas, $g(x)=x^4$ esa lokal minimumga ega ekanligini aniqlaymiz.

Demak, lokal ekstremumning II yetarli shartini tekshirish osonroq, ammo uning qo'llanish sohasi torroq ekan.

Bu bo'limni ekstremumga doir bir iqtisodiy masalani qarash bilan yakunlaymiz.

Masala: Fermer bog'ida n dona olma daraxti bor.Agar hosil hozir yig'ib olinsa, har bir daraxtdan m kg olma olinib, uni p so'mdan sotish mumkin. Agar hosilni yig'ish orqaga surilsa, har haftada bitta daraxtdan olinadigan hosil miqdori r kg oshadi, ammo uning narxi q so'mdan pasayib boradi. Bunda m, p, r va q musbat sonlardir. Fermer hosilni qachon yig'ib olganda maksimal foyda ko'radi ?

Yechish: Hosilni yig'ib olinguncha o'tgan haftalar sonini x deb belgilaymiz. Bu holda bog'dan yig'ilgan hosil miqdori $n(m+xr)$ kg, uning narxi esa $p–xq$ so'mga teng bo‘ladi. Unda olmani sotishdan olingan foyda $f(x)= n(m+xr)(\ p–xq)$ funksiya bilan ifodalanadi. Bu funksiyani ekstremumga tekshiramiz. Dastlab uning hosilasini hisoblab, x_0 kritik nuqtasini topamiz:

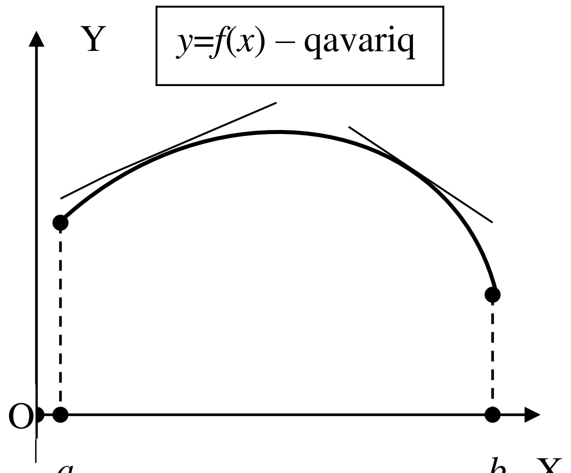
$$f'(x) = n(m+xr)'(p-xq)+n(m+xr)(p-xq)' =$$
$$= n[(rp-mq)-2qrx]=0 \Rightarrow x_0 = \frac{rp-mq}{2qr} \quad .$$

Bu yerda $f''(x)=–2qr<0$ bo‘lgani uchun x_0 kritik nuqtada foyda funksiyasi $f(x)$ maksimumga erishadi va foydaning maksimal qiymati quyidagicha bo‘ladi:

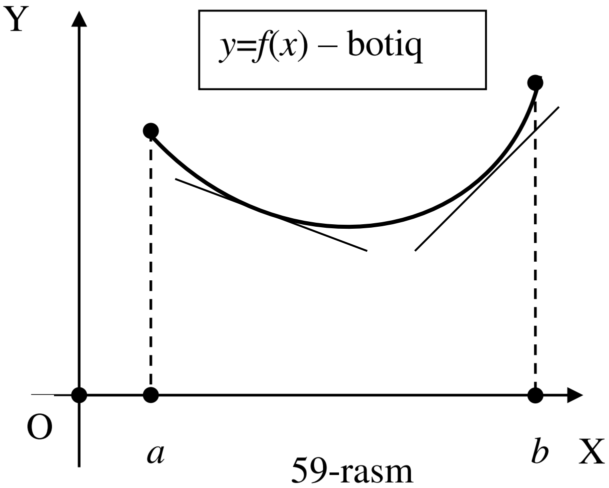
$$f_{\max} = f\left(\frac{rp-mq}{2qr}\right) = \frac{n(rp+mq)^2}{4rq} \quad .$$

5.3. Funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik sohalari. Funksiyaning yana bir muhim xususiyatlaridan biri uning qavariqligi va botiqligi bo‘lib hisoblanadi. Bunga misol sifatida fizikaning optika bo‘limida qaraladigan qavariq va botiq linzalarni ko‘rsatish mumkin.

<u>4-TA’RIF:</u> Agar $y=f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda differensiallanuvchi va uning grafigi bu oraliqdagi har bir $M(x,f(x))$ nuqtada o‘tkazilgan urinmasidan pastda (yuqorida) joylashgan bo‘lsa, u shu oraliqda ***qavariq*** (***botiq***) deyiladi (58-59- rasmlarga qarang).



58-rasm



59-rasm

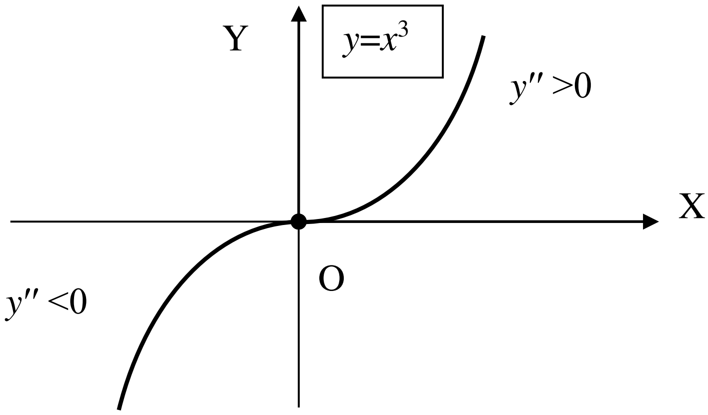
Masalan, $y=e^x$ grafigi $(-\infty, \infty)$ oraliqda botiq; $y=\ln x$ grafigi $(0, \infty)$ oraliqda, ya’ni aniqlanish sohasidagi barcha nuqtalarda qavariq; $y=\sin x$ funksiyaning grafigi $(0,\pi)$ oraliqda qavariq, $(\pi,2\pi)$ oraliqda esa botiq bo‘ladi.

Umumiy holda $y=f(x)$ funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik sohalari uning II tartibli hosilasi orqali quyidagi teorema yordamida aniqlanadi.

6-TEOREMA: Agar $y=f(x)$ funksiya (a,b) oraliqning har bir nuqtasida ikki marta differensiallanuvchi va barcha $x\in(a, b)$ nuqtalarda $f''(x)>0$ $(f''(x)<0)$ shart bajarilsa, funksiya grafigi bu oraliqda botiq (qavariq) bo‘ladi.

Bu teoremani isbotsiz qabul etamiz.

Masalan, $f(x)=x^3$ funksiya uchun $f''(x)=6x>0$ tengsizlik yechimi $(0,\infty)$ oraliqdan iborat bo‘ladi va unda bu funksiya grafigi botiq bo‘ladi.Xuddi shunday $f''(x)=6x<0$ tengsizlik yechimi bo‘lgan $(-\infty, 0)$ oraliqda funksiya grafigi qavariq bo‘ladi (60-rasmga qarang).



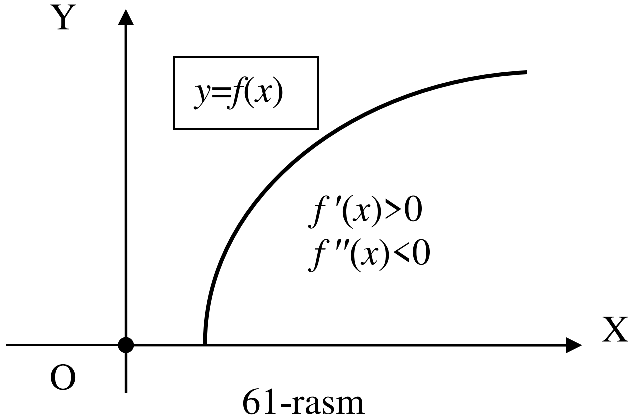
60-rasm

Izohlar: 1. Agar biror (a,b) oraliqning har bir nuqtasida $f''(x)=0$ bo‘lsa, unda $f(x)=Ax+B$ ko‘rinishda va uning grafigi to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘ladi. To‘g‘ri chiziqni qavariq ham, botiq ham deb olish mumkin.

2. II tartibli hosila ta’rifiga asosan $f''(x)=[f'(x)]'$ bo‘lgani uchun, funksiya grafigining botiqlik sohasida $f'(x)$ hosila o‘suvchi (chunki $[f'(x)]'=f''(x)>0$) va qavariqlik sohasida kamayuvchi (chunki $[f'(x)]'=f''(x)<0$) bo‘ladi.

5.4. Botiqlik va qavariqlikning iqtisodiy tatbiqlari. Funksiya grafigining botiqlik va qavariqligi bir qator iqtisodiy jarayonlarni tavsiflashda qo‘llaniladi.

❖ ***O‘sish tezligi monoton kamayib boradigan o‘suvchi iqtisodiy jarayonlar.*** Bunday xususiyatli iqtisodiy jarayonlar o‘suvchi ($f'(x)>0$) va grafigi qavariq ($f''(x)<0$) bo‘lgan $y=f(x)$ funksiya orqali ifodalanadi (61-rasmga qarang).

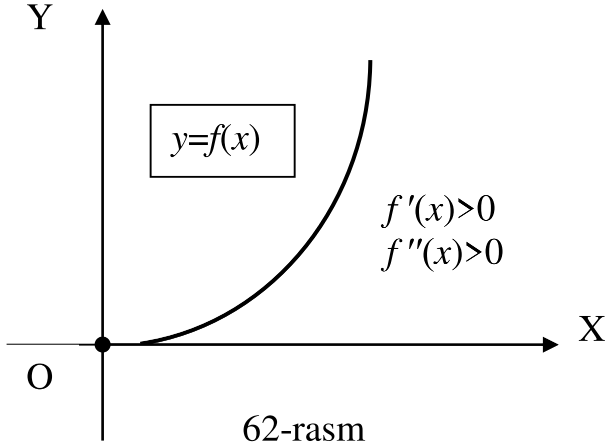


61-rasm

Bularga $y=ax^{\alpha}$ ($a>0$, $0<\alpha<1$)-darajali, $y=a\ln x+b$ [$a>0$, $b\in(-\infty, \infty)$] -logarifmik, $y=x/(ax+b)$-kasr-ratsional funksiyalar misol bo‘ladi.

Masalan, monopoliyalashgan bozor sharoitida sotilgan mahsulot hajmi x oshib borishi bilan uning tushumi y ham o‘sib boradi, ammo talab qonuni ta’sirida uning o‘sish tezligi kamayib boradi.

❖ ***O‘sish tezligi monoton o‘sib boradigan o‘suvchi iqtisodiy jarayonlar.*** Bunday iqtisodiy jarayonlar o‘suvchi ($f'(x)>0$) va grafigi botiq bo‘lgan ($f''(x)>0$) $y=f(x)$ funksiya orqali ifodalanadi (62-rasmga qarang).

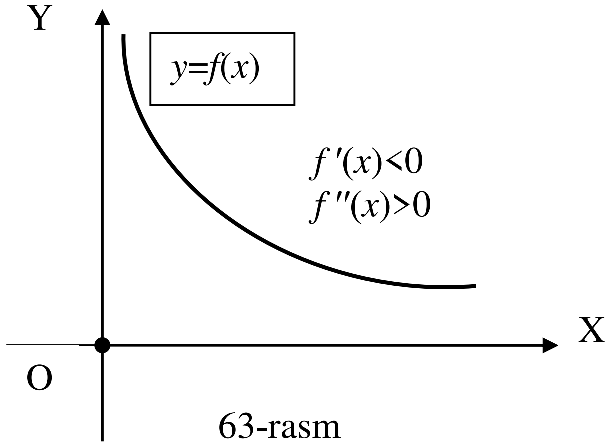


62-rasm

Bularga $y=ax^{\alpha}$ ($a>0$, $\alpha>1$)-darajali, $y=ax^2+bx+c$ ($a>0$)-kvadratik , $y=ae^{kx}$ ($a>0$, $k>0$)- ko‘rsatkichli funksiyalar misol bo‘la oladi.

Masalan, mikroiqtisodiyotda sarflangan resurslar miqdori x va ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi y orasidagi bog‘lanishni ifodalovchi $y=f(x)$ ishlab chiqarish funksiyasi ishlab chiqarish jarayonining boshlang‘ich bosqichida, ya’ni x qiymati kichik bo‘lganda, yoki samaradorligi yuqoriroq bo‘lgan yangi texnologiyalarni joriy etish natijasida yuqorida ko‘rsatilgan xususiyatga ega bo‘ladi.

❖ ***O'sish tezligi monoton o'sib boradigan kamayuvchi iqtisodiy jarayonlar.*** Bunday xossali iqtisodiy jarayonlar kamayuvchi ($f'(x)<0$) va grafigi botiq ($f''(x)>0$) bo'lgan $y=f(x)$ funksiya orqali ifodalanadi (63-rasmga qarang).

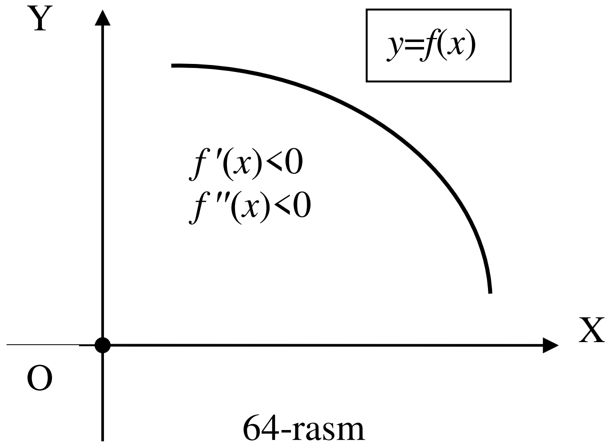


63-rasm

Bularga $y=ax^{\alpha}$ ($a>0$, $\alpha<0$)-darajali, $y=ae^{kx}+b$ ($a>0$, $b\geq 0$, $k<0$)- ko'rsatkichli, $y=x/(ax-b)$ ($a>0$, $b>0$)-kasr-ratsional funksiyalar misol bo'ladi.

Masalan, xodimlarni boshqarish nazariyasidan ma'lumki, ish haqi x kattaligini oshirish natijasida xodimlarning mehnat unumdorligi y ma'lum bir paytgacha o'sib boradi. Ammo x ish haqi oshib borgan sari mehnat sur'ati ham kattalashib boradi va shu tufayli ish haqining keyingi qo'shimcha Δx o'sishi mehnat unumdorligini Δy miqdorga o'zgarishiga ta'siri tobora kamayib boradi.

❖ ***O'sish tezligi monoton kamayib boradigan kamayuvchi iqtisodiy jarayonlar.*** Bunday iqtisodiy jarayonlar kamayuvchi ($f'(x)<0$) va grafigi qavariq ($f''(x)<0$) bo'lgan $y=f(x)$ funksiya orqali ifodalanadi (64-rasmga qarang).



64-rasm

5.5. Funksiya grafigining burilish nuqtalari. Funksiya xossalarini o‘rganish va ularni tatbiq etishda uning burilish nuqtasi tushunchasi ham muhim ahamiyatga egadir.

5-TA’RIF: Funksiya grafigi biror $M(x_0,f(x_0))$ nuqtadan o‘tayotganda botiqligini qavariqlikka yoki aksincha, qavariqligini botiqlikka o‘zgartirsa, bu nuqta uning ***burilish (egar) nuqtasi*** deyiladi.

Masalan, ko‘rib o‘tilgan $f(x)=x^3$ funksiya uchun koordinatalar boshi O(0,0) burilish nuqtasi bo‘ladi. $F(x)=x^2$ funksiya grafigi paraboladan iborat bo‘lib, u hamma joyda botiq va shu sababli burilish nuqtasiga ega emas. Umumiy holda $y=f(x)$ funksiya grafigining burilish nuqtasi mavjudligi va uni topish masalasini qaraymiz.

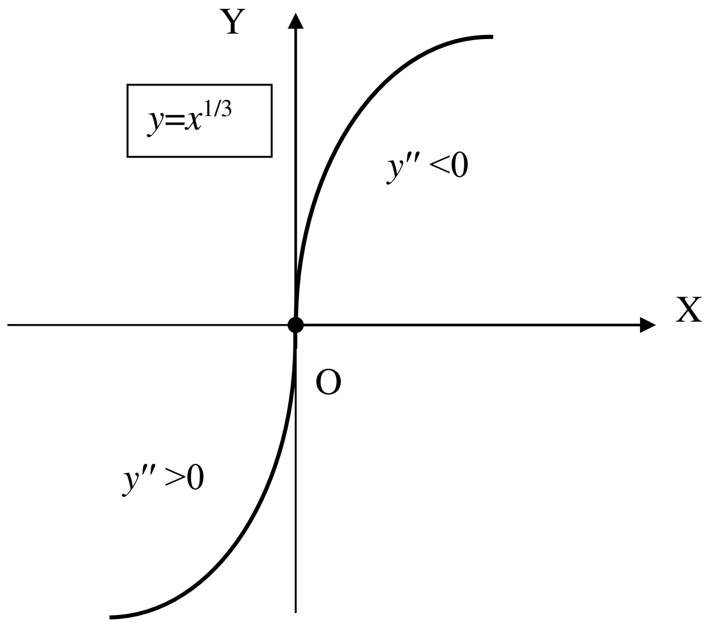
7-TEOREMA (Burilish nuqtasi mavjudligining zaruriy sharti): Agar $y=f(x)$ funksiya uchun $M(x_0,f(x_0))$ burilish nuqtasi va x_0 nuqta hamda uning biror atrofida $y=f(x)$ funksiya ikki marta differensiallanuvchi bo‘lsa, unda $f''(x_0)=0$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Funksiya grafigi x_0 nuqta biror atrofining chap tomonida ($x<x_0$) qavariq, o‘ng tomonida ($x>x_0$) esa botiq bo‘lsin. Unda, oldingi teoremaga asosan,

$x<x_0$ holda $f''(x)<0$, $x>x_0$ holda $f''(x)>0$ bo‘ladi. Bu yerdan, teorema shartiga asosan x_0 nuqtada funksiya ikki marta differensiallanuvchi bo‘lgani uchun, teorema tasdig‘i $f''(x_0)=0$ kelib chiqadi.

Masalan, $f(x)=\sin x$ funksiya uchun $x_0=\pi$ abssissali nuqta burilish nuqtasi va unda $f''(\pi)=-\sin\pi=0$ bo‘ladi.

Izoh: $y=f(x)$ funksiyaning $M(x_0,f(x_0))$ burilish nuqtasida $f''(x_0)$ mavjud bo‘lmasligi ham mumkin. Masalan, $f(x)=x^3$ funksiyaga teskari $g(x)=x^{1/3}$ funksiya uchun O(0,0) burilish nuqtasi bo‘ladi (65-rasmga qarang) va bu $x_0=0$ nuqtada II tartibli hosila $g''(x)=(-2/9)x^{-5/3}$ mavjud emas.



65-rasm

Shuni ta’kidlab o‘tish lozimki, $f''(x_0)=0$ burilish nuqtasi mavjudligini zaruriy sharti har doim ham yetarli emas. Masalan, $f(x)=x^4$ funksiyaning $f''(x)=12x^2$ hosilasi $x_0=0$ nuqtada nolga teng, ammo bu nuqtada funksiya grafigi burilishga ega emas. Haqiqatan ham $x< x_0=0$ va $x> x_0=0$ hollarda $f''(x)=12x^2>0$, ya’ni bu funksiya grafigi barcha nuqtalarda botiq va shu sababli burilish nuqtasiga ega emas. Shuning uchun burilish nuqtasini aniqlashga imkon beradigan yetarli shartni topish masalasi paydo bo‘ladi. Bu masala quyidagi teoremada o‘z yechimini topadi.

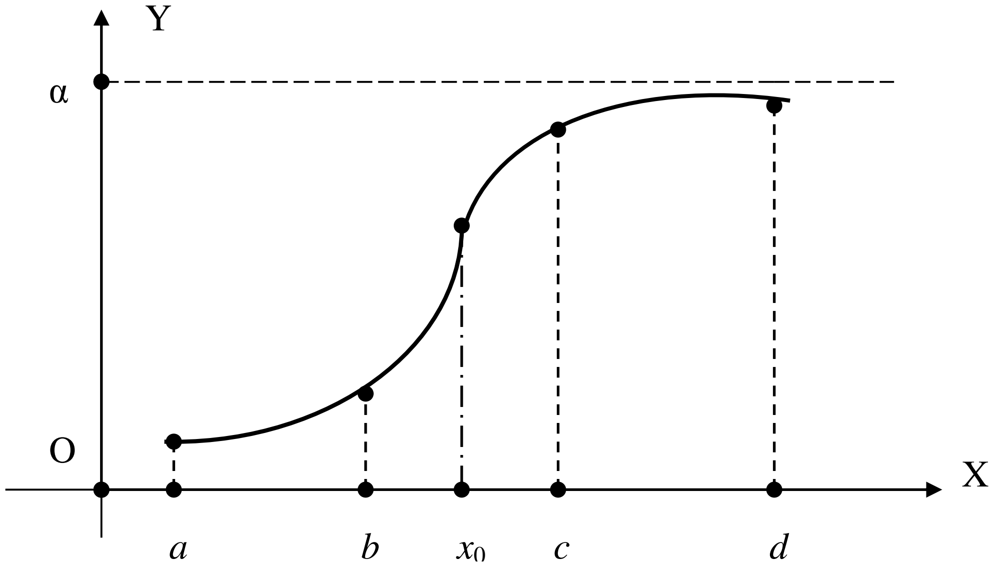
8-TEOREMA ***(Burilish nuqtasi mavjudligining yetarli sharti):*** Agar biror x_0 nuqtada $y=f(x)$ funksiyaning II tartibli hosilasi $f''(x_0)=0$ yoki mavjud bo‘lmasa va bu nuqta biror atrofining chap va o‘ng tomonida $f''(x)$ turli ishorali qiymatlarga ega bo‘lsa, unda $M(x_0, f(x_0))$ funksiya grafigining burilish nuqtasi bo‘ladi.

Isbot: Dastlab $f''(x)<0$, $x<x_0$ va $f''(x)>0$, $x>x_0$ holni ko‘ramiz. Oldin ko‘rilgan 6-teoremaga asosan, x_0 nuqtaning chap tomonida funksiya grafigi qavariq, o‘ng tomonida esa botiq bo‘ladi. Demak, ta’rifga asosan, $M(x_0, f(x_0))$ nuqta $y=f(x)$ funksiya grafigining burilish nuqtasi bo‘ladi.

$f''(x)>0$, $x<x_0$ va $f''(x)<0$, $x>x_0$ hol ham xuddi shunday isbotlanadi.

Misol sifatida $f(x)=x^3–3x^2$ funksiya grafigining burilish nuqtasini topamiz. Bu yerda $f''(x)=6x–6=0$ tenglamadan $x_0=1$ nuqtani topamiz. Bu nuqtani tekshiramiz. Bunda $x<x_0=1$ bo‘lganda $f''(x)<0$ (grafik qavariq) va x>x_0=1 bo‘lganda $f''(x)>0$ (grafik botiq) bo‘lgani uchun $M(1,–2)$ funksiya grafigining burilish nuqtasi bo‘ladi.

5.6. Logistik funksiya. Funksiya grafigining botiqlik va qavariqligi hamda burilish nuqtasining iqtisodiyotga tatbig‘i sifatida menejment, mikroiqtisodiyot, boshqarish nazariyalarida o‘suvchi jarayonlarni ifodalash uchun qo‘llaniladigan $y=\alpha/(1+be^{-\beta x})$ ($\alpha>0$, $b>0$, $\beta>0$) funksiyani ko‘ramiz. U ***logistik funksiya*** deb atalib, uning grafigi S harfiga o‘xshash va bitta burilish nuqtasiga ega bo‘lib, quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi (66-rasmga qarang):



66-rasm

Masalan, menejmentda biror yangi texnologiyani ishlab chiqish va uni joriy etish xarajatlari x bilan bu xarajatlarning samaradorligi y orasidagi bog'lanish logistik funksiya ko'rinishida bo'ladi. Bunda yangi texnologiyani joriy etish samaradorligi uch bosqichdan iborat bo'ladi.

1. ***Shakllanish bosqichi.*** Bu bosqich logistik funksiya grafigining (a,b) oraliqqa mos keladigan qismi bilan ifodalanadi. U yangi texnologiyani ishlab chiqish va joriy etishning boshlang'ich davri bo'lib, bunda yangi texnologiya hali takomillashmagan va shu sababli unga sarflanayotgan xarajatlarning samaradorligi unchalik yuqori bo'lmaydi.

2. ***Tez o'sish bosqichi.*** Bu bosqich logistik funksiya grafigining $x\in (b,c)$ oraliqqa mos keladigan bo'lagi bilan ifodalanadi. Bunda yangi texnologiya tez rivojlanishi va keng qo'llanilishi natijasida unga sarflanayotgan xarajatlar yuqori samaradorlik bera boshlaydi. Bu yerda samaradorlikning o'sish tezligi x_0 burilish nuqtasigacha oshib, undan keyin kamayib boradi.

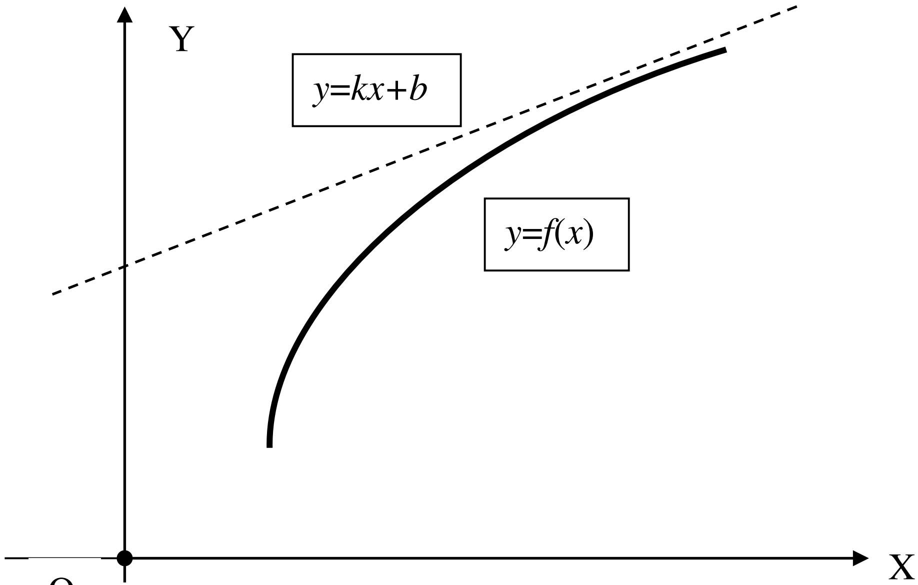
3. ***Imkoniyatlarga to'liq erishish bosqichi.*** Bu bosqich logistik funksiya grafigining $x\in(c,d)$ oraliqqa mos keladigan qismi bilan tavsiflanadi. Bunda kiritilgan texnologiya o'z imkoniyatlariga to'liq erishgan bo'lib, xarajatlar qanchalik oshib bormasin, samaradorlik α darajadan yuqori bo'la olmaydi.

5.7. Funksiya grafigining asimptotalari. Biz II tartibli egri chiziq bo'lgan giperbola bilan tanishganimizda uning asimptotasi (V bob,§4, (2)) haqida so'z yuritgan edik. Unda bu tushuncha aniq bir ta'rif orqali berilmagan , chunki buning uchun yetarli ma'lumotlar poydevori mavjud emas edi.

6-TA'RIF: Biror $y=kx+b$ tenglama bilan berilgan to'g'ri chiziq va $y=f(x)$ funksiya grafigi bilan ifodalaydigan egri chiziq uchun

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx-b\right]=0 \qquad (2)$$

shart bajarilsa, unda $y=kx+b$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining ***og'ma asimptotasi*** deyiladi (67-rasmga qarang).



67-rasm

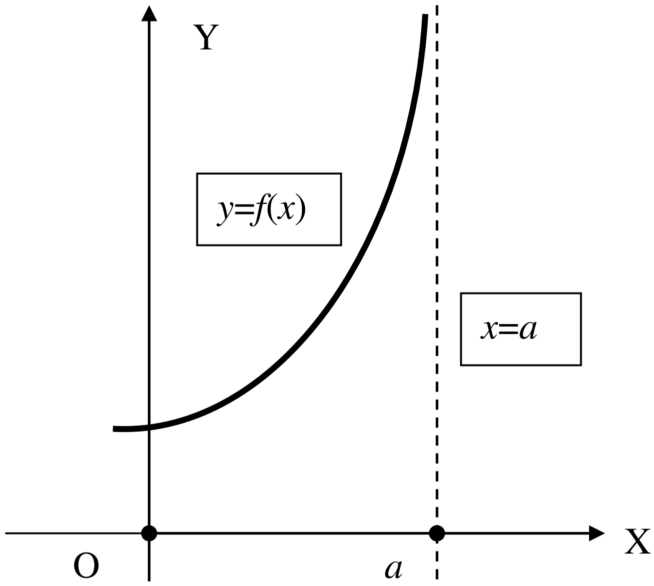
Masalan, $f(x)=x+1/x$ funksiya grafigi uchun $y=x$ to'g'ri chiziq og'ma asimptota bo'ladi, chunki

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to\infty}[x+\frac{1}{x}-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

7-TA'RIF: Agar biror $x=a$ nuqtada $y=f(x)$ funksiyaning

$$\lim_{x\to a-0}f(x),\quad \lim_{x\to a+0}f(x)$$

chap va o‘ng limitlaridan kamida bittasi cheksiz bo‘lsa, unda $x=a$ tenglamali vertikal to‘g‘ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining ***vertikal asimptotasi*** deyiladi (68-rasmga qarang).



68-rasm

Odatda vertikal asimptotalar funksiyaning aniqlanish sohasi bo‘yicha uning uzilish nuqtalari orqali topiladi. Masalan, $f(x)=1/(x^3-1)$ funksiya grafigi uchun $x=1$ to‘g‘ri chiziq vertikal asimptota bo‘ladi.

Funksiyaning og‘ma asimptotalarining mavjudligi va ularning tenglamasi quyidagi teorema bilan aniqlanadi.

8-TEOREMA: Berilgan $y=f(x)$ funksiya grafigi og‘ma asimptotaga ega bo‘lishi uchun

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k, \qquad \lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b \qquad (3)$$

limitlarning ikkalasi ham mavjud hamda chekli bo‘lishi zarur va yetarlidir. Bu holda og‘ma asimptota $y=kx+b$ tenglamaga ega bo‘ladi.

Isbot: ***Zaruriylik sharti.*** Berilgan (3) shartlarni zaruriyligini ko‘rsatamiz. Tenglamasi $y=kx+b$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigi uchun og‘ma asimptota bo‘lsin. Unda, og‘ma asimptota ta’rifini ifodalovchi (2) tenglik va limit xossalariga asosan, quyidagilarni yozish mumkin:

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=\lim_{x\to\infty}x[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}]=0\Rightarrow$$
$$\lim_{x\to\infty}[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}]=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-k-\lim_{x\to\infty}\frac{b}{x}=0.$$

Bu yerdan, eng so‘nggi limit qiymati nol bo‘lgani uchun,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$$

ekanligi kelib chiqadi. Og‘ma asimptota ta’rifi va limit xossasidan yana bir marta foydalanib,

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]-\lim_{x\to\infty}b=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$$

natijani olamiz.

Yetarlilik sharti. Teoremaning (3) shartidagi ikkinchi limitga asosan

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=0$$

tenglikni yoza olamiz. Bu yerdan, 6-ta’rifga asosan, $y=kx+b$ to‘g‘ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigi uchun og‘ma asimptota bo‘lishi kelib chiqadi.

Masalan, $f(x)=(2x^2+3x-5)/x$ funksiya uchun

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-5}{x^2}=\lim_{x\to\infty}(2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2})=2+0-0=2,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-2x]=\lim_{x\to\infty}[\frac{2x^2+3x-5}{x}-2x]=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-5}{x}=\lim_{x\to\infty}(3-\frac{5}{x})=3$$

ekanligini topamiz. Demak, bu funksiyaning grafigi $y=2x-3$ og‘ma asimptotaga

ega bo‘ladi.

5.8. Funksiyani tekshirishning umumiy sxemasi. Yuqorida olingan natijalar bo‘yicha $y=f(x)$ funksiya xususiyatlarini quyidagi tartibda aniqlash mumkin ;

- ✓ Funksiyaning D{f} aniqlanish sohasini topamiz ;
- ✓ Funksiyaning E{f} qiymatlar sohasini topishga harakat qilamiz. Bu sohani to‘g‘ridan-to‘g‘ri topish qiyin bo‘lsa, uni funksiyaning keyingi qadamlarda aniqlanadigan xususiyatlaridan foydalanib aniqlash mumkin ;
- ✓ Funksiyani juft yoki toqlikka tekshiramiz ;
- ✓ Funksiyani davriylikka tekshiramiz va u davriy bo‘lsa, uning davrini aniqlaymiz;
- ✓ Funksiyani uzilish nuqtalari mavjudligini tekshiramiz va ular mavjud bo‘lsa, ularning turini aniqlaymiz ;
- ✓ $f(x)=0$ tenglamadan funksiya nollarini topamiz va ular orqali funksiya o‘z ishorasini o‘zgartirmaydigan oraliqlarni hamda funksiya grafigini OX o‘qi bilan kesishish nuqtalarini aniqlaymiz ;
- ✓ $f'(x)>0$ va $f'(x)<0$ tengsizliklarni yechib, funksiyaning o‘sish va kamayish, ya’ni monotonlik sohalarini aniqlaymiz ;
- ✓ $f'(x)=0$ yoki $f'(x)$ mavjud emas shartlardan funksiyaning kritik nuqtalarni topamiz va bu nuqtalarda funksiyani I yoki II tartibli hosila yordamida ekstremumga tekshiramiz ;
- ✓ $f''(x)>0$ va $f''(x)<0$ tengsizliklarni yechib, funksiya grafigining botiqlik va qavariqlik sohalarini topamiz ;
- ✓ $f''(x)=0$ yoki $f''(x)$ mavjud emas shartlardan foydalanib funksiya grafigining burilish nuqtalarini aniqlaymiz ;
- ✓ Funksiya grafigi asimptotalarini, agarda ular mavjud bo‘lsa, topamiz ;
- ✓ Argument $x\to\pm\infty$ bo‘lganda funksiya limitini tekshiramiz;
- ✓ Oldingi qadamlarda olingan ma’lumotlar asosida funksiya grafigini chizamiz .

5.9. Funksiyaning global ekstremumlari. Berilgan $y=f(x)$ funksiya biror $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. Unda, Veyershtrass teoremasiga (VII bob,§4) asosan, funksiya bu kesmadagi qandaydir x_1 va x_2 nuqtalarda o‘zining eng katta va eng kichik

$$\max_{x\in[a,b]} f(x)=f(x_1)=M\ , \qquad \min_{x\in[a,b]} f(x)=f(x_2)=m$$

qiymatlarini qabul etadi. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmadagi biror x_0 nuqtada lokal ekstremumga ega bo‘lsa, unda $f(x)\leq f(x_0)$ yoki $f(x)\geq f(x_0)$ tengsizliklardan biri x_0 nuqtaning biror atrofidagi x nuqtalar uchun bajarilib, barcha $x\in[a,b]$ uchun o‘rinli bo‘lmasligi ham mumkin. Shu sababli ular ***lokal (tor doiradagi) ekstremumlar*** deyiladi. Ammo $M=f(x_1)\geq f(x)$, $m=f(x_2)\leq f(x)$ tengsizliklar barcha $x\in[a,b]$ uchun o‘rinli bo‘ladi va shu sababli ular mos ravishda $y=f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi global maksimumi (M) va global minimumi (m), birgalikda ***global (keng doiradagi) ekstremumlari*** deyiladi.

Veyershtrass teoremasida kesmada uzluksiz funksiyalar uchun global ekstremumlar mavjudligi tasdiqlanadi, ammo ularni qanday topish masalasi qaralmaydi. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesma ichida differensiallanuvchi bo‘lsa, bu masala quyidagi algoritm asosida hal etiladi:

- Berilgan funksiyaning $f'(x)$ hosilasi hisoblanadi ;
- $f'(x)=0$ tenglamadan $[a,b]$ kesma ichida joylashgan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kritik nuqtalar topiladi;
- Berilgan funksiyaning kritik nuqtalardagi $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... , $f(x_n)$ va kesma chegaralaridagi $f(a)$, $f(b)$ qiymatlari hisoblanadi;
- Yuqorida hisoblangan funksiya qiymatlari orasidan eng katta va eng kichigi topiladi. Ular biz izlayotgan m va M global ekstremumlarni ifodalaydi.

Misol sifatida $f(x)=x^4-2x^2+3$ funksiyaning $[-3,2]$ kesmadagi global ekstremumlarini topamiz. Buning uchun dastlab $f'(x)=4x(x^2-1)=0$ tenglamadan $x_1=-1$, $x_2=0$ va $x_3=1$ kritik nuqtalarni topamiz. Ularning uchalasi ham biz qarayotgan $[-3,2]$ kesma ichida joylashgan va shu sababli bu nuqtalarning barchasini qaraymiz. Kritik va chegaraviy nuqtalarda berilgan funksiya qiymatlarini hisoblab,

$$f(-3)=66,\ f(-1)=f(1)=2,\ f(0)=3, f(2)=11$$

natijalarni olamiz. Bu natijalarni taqqoslab, berilgan funksiyaning global ekstremumlari

$$M=\max_{x\in[-3,2]} f(x)=f(-3)=66, \quad m=\min_{x\in[-3,2]} f(x)=f(\pm1)=2$$

ekanligini aniqlaymiz.

XULOSA

Hosila – funksiya xususiyatlarini tekshirish uchun kuchli va qulay vositadir. Differensiallanuvchi funksiyalarning monotonlik oraliqlari va lokal ekstremumlarini topishning umumiy usullari I tartibli hosila orqali ifodalanadi. II tartibli hosila yordamida esa funksiyani kritik nuqtalarining xarakteri, botiqlik va qavariqlik sohalari va burilish nuqtalari aniqlanadi. Bu tushunchalar turli iqtisodiy masalalarni yechishda, ishlab chiqarish bilan bog‘liq jarayonlarni matematik usullarda o‘rganishda keng qo‘llaniladi. Bunga misol sifatida logistik funksiyani ko‘rsatish mumkin.

Funksiyani to‘liq tekshirish uchun uning asimptotalarini aniqlash ham muhim ahamiyatga ega. Funksiya grafigining og‘ma va vertikal asimptotalarini topish usullari ham ishlab chiqilgan.

Kesmada uzluksiz va uning ichida differensiallanuvchi bo‘lgan funksiyaning shu kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari, ya’ni uning global ekstremumlari ham hosila yordamida topiladi.

Tayanch iboralar

* Funksiyaning o‘sish sohasi * Funksiyaning kamayish sohasi * Funksiyaning monotonlik sohasi * Lokal maksimum * Lokal minimum * Lokal ekstremumlar * Kritik nuqta * Botiqlik sohasi * Qavariqlik sohasi * Burilish nuqtasi * Logistik funksiya * Og‘ma asimptota * Vertikal asimptota * Global ekstremumlar

Takrorlash uchun savollar

1. Funksiyaning o‘sish (kamayish) oraliqlari deb nimaga aytiladi?
2. Funksiyaning monotonlik oraliqlari qanday ta’riflanadi?
3. Differensiallanuvchi funksiyaning monotonlik oraliqlari qanday topiladi?
4. Funksiyaning lokal maksimumi (minimumi) deb nimaga aytiladi?
5. Funksiyaning lokal ekstremumlari qanday ta’riflanadi?
6. Ekstremumning zaruriy sharti nimadan iborat va u yetarli shart bo‘ladimi?
7. Kritik nuqta deb nimaga aytiladi?
8. Ekstremumning yetarli sharti I tartibli hosila orqali qanday ifodalanadi?
9. Ekstremumning yetarli sharti II tartibli hosila orqali qanday ifodalanadi?
10. Funksiya grafigining botiqlik (qavariqlik) sohalari qanday ta’riflanadi?
11. Funksiya grafigining botiqlik (qavariqlik) sohalari qanday topiladi?
12. Funksiya grafigining burilish nuqtasi nima?
13. Differensiallanuvchi funksiya grafigining burilish nuqtalari qanday topiladi?
14. Funksiya grafigining og‘ma asimptotalari qanday ta’riflanadi?
15. Funksiya grafigining vertikal asimptotalari qanday ta’riflanadi va topiladi?
16. Og‘ma asimptotalar mavjudligining zaruriy va yetarli sharti nimadan iborat?
17. Funksiyani to‘liq tekshirish qanday bosqichlardan tashkil topadi?
18. Funksiyaning kesmadagi global ekstremumlari nima va ular qanday topiladi?

Testlardan namunalar

1. Ushbu $f(x)=x^3-3x$ funksiyaning kamayish oralig‘ini toping.
   A) $(-1;1)$; B) $(0,1)$; C) $(-1,0)$; D) $(-\infty,-1)$; E) $(-2, 2)$.

2. $y=x\ln x$ funksiya o‘sish sohasi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?
   A) $(0, e)$; B) $(-\infty, 1/e)$; C) $(0, \infty)$; D) $(0; 1/e)$; E) $(1/e; \infty)$.

3. $f(x)=x^3-3x$ funksiyaning kritik nuqtalarini toping.
   A) $\{-1;1\}$; B) $\{0;1\}$; C) $\{-1;0\}$; D) $\{2;3)$; E) $\{-2;2\}$.

4. $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi x_0 kritik nuqtadan chap va o‘ng tomonda qanday ishoraga ega bo‘lganda $f(x_0)$ lokal maksimum bo‘ladi?
   A) musbat, musbat; B) musbat, manfiy; C) manfiy, manfiy;
   D) manfiy, musbat; E) qarama-qarshi ishorali.

5. $y=f(x)$ funksiya x_0 kritik nuqtada ikki marta differensiallanuvchi bo‘lsa, qaysi shartda $f(x_0)$ lokal maksimum bo‘ladi?
   A) $f''(x_0)>0$; B) $f''(x_0)<0$; C) $f''(x_0)=0$; D) $f''(x_0)\neq 0$; E) $|f'(x_0)|\geq 1$.

6. $y=(x^4+2x^3-4)/(x^3+1)$ funksiya grafigining og‘ma asimptotasi tenglamasini yozing.
   A) $y=x$; B) $y=x+1$; C) $y=x-1$; D) $y=x+2$; E) $y=x-1$.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. $f(x)=x^n e^{nx}$ funksiyaning monotonlik oraliqlarini toping.

2. $f(x)=x^n e^{-nx}$ funksiyani ekstremumga tekshiring .

3. $f(x)=xe^{nx}$ funksiya grafigining botiqlik va qavariqlik sohalarini toping.

4. Ushbu funksiyaning og‘ma va vertikal asimptotalarini toping:

$$f(x)=\frac{x^{n+1}+nx^n+1}{x^n-1} .$$

§6. ANIQMASLIKLAR VA LOPITAL QOIDALARI

- ***Aniqmasliklar va ularni ochish.***
- ***Lopitalning I qoidasi va uning tatbiqlari.***
- ***Lopitalning II qoidasi.***
- ***Turli aniqmasliklarni ochish.***

6.1. Aniqmasliklar va ularni ochish. Cheksiz kichik (katta) miqdorlar xossalari o‘rganilganda (VI bob,§3) ularning nisbatlari cheksiz kichik (katta) miqdor bo‘lishi shart emas ekanligi misollar orqali ko‘rsatilgan edi. Funksiya hosilasi yordamida bu nisbatlarning qiymatlarini topish masalasini umumiy holda qarash va uning yechimini berish mumkin.

1-TA’RIF: Agar $x\to a$ (a–chekli yoki cheksiz son) bo‘lganda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar cheksiz kichik miqdorlar, ya’ni

$$\lim_{x\to a} f(x)=0, \qquad \lim_{x\to a} g(x)=0$$

munosabatlar o‘rinli bo‘lsa, ularning $f(x)/g(x)$ nisbati $x\to a$ bo‘lganda **0/0** ***ko‘rinishdagi aniqmaslik*** deyiladi.

Masalan, $x\to 0$ bo‘lganda $\sin x/x$, $x\to 1$ holda $(x^3-1)/(x^2-1)$ va $x\to\infty$ bo‘lgan holda $[\ln(1+1/x)]/(e^{1/x}-1)$ nisbatlar 0/0 ko‘rinishdagi aniqmasliklar bo‘ladi.

2-TA’RIF: Agar $x\to a$ (a–chekli yoki cheksiz son) bo‘lganda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar cheksiz katta miqdorlar bo‘lsa, ya’ni

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty, \qquad \lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$$

munosabatlar o‘rinli bo‘lsa, ularning $f(x)/g(x)$ nisbati $x \to a$ bo‘lganda ∞/∞ ***ko‘rinishdagi aniqmaslik*** deyiladi.

Masalan, $x \to 0$ bo‘lganda $\ln|\sin x|/\ln|x|$, $x \to \infty$ holda $(x+1)^2/(x^2+1)$ nisbatlar ∞/∞ ko‘rinishdagi aniqmaslikdir.

3-TA'RIF: Berilgan 0/0 yoki ∞/∞ ko‘rinishdagi $f(x)/g(x)$ aniqmaslikning $x \to a$ bo‘lgandagi limitini topish shu ***aniqmaslikni ochish*** deb ataladi.

Limitlarni hisoblash mavzusi bo‘yicha misollar yechganimizda ayrim aniqmasliklarni ochish masalasi bilan shug‘ullangan edik. Ammo unda har bir aniqmaslikni ochish uchun ko‘paytuvchilarga ajratish, qo‘shmasiga ko‘paytirish, eng katta darajasiga bo‘lish, ajoyib limitlarga keltirish kabi sun’iy usullardan foydalanilgan edi. Shunday qilib, har bir aniqmaslikni ochish uchun o‘ziga xos xususiy usuldan foydalangan edik.

6.2. Lopitalning I qoidasi va uning tatbiqlari. Endi aniqmasliklarni ochishning umumiy qoidasini ko‘rib chiqamiz. Bu qoidani farang matematigi Fransua Lopital (1661–1704 y.) o‘zining 1696 yilda bosmadan chiqqan «Cheksiz kichik miqdorlar tahlili» nomli kitobida birinchi marta keltirgan va shuning uchun ***Lopital qoidalari*** nomi bilan tarixga kirgan.

1-TEOREMA (***Lopitalning I qoidasi***)**:** $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqta atrofida aniqlangan, differensiallanuvchi va $g'(x) \neq 0$ bo‘lsin. Bundan tashqari $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x \to a$ shartda cheksiz kichik miqdorlar bo‘lsin, ya’ni

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \ , \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad (1)$$

tengliklar bajarilsin. Bu holda, agar

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

mavjud bo‘lsa (chekli yoki cheksiz), unda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

ham mavjud bo‘ladi va ushbu tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (2)$$

Isbot: Dastlab $a<\infty$ holni ko‘ramiz. Teorema shartiga ko‘ra a nuqta atrofida $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi bo‘lgani uchun, ular bu yerda uzluksiz bo‘ladilar va shuning uchun ham (1) shartga ko‘ra

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = 0, \qquad g(a) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad (3)$$

deb olishimiz mumkin. a nuqtaning berilgan atrofidagi ixtiyoriy $[a, x]$ kesmani qaraymiz. Teorema shartlari va (3) tengliklarga asosan bu kesmada $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uzluksiz, uning ichida differensiallanuvchi va (a, x) oraliqda $g'(x)\neq 0$ bo‘ladi. Bu holda, Koshi teoremasiga asosan [VII bob,§3, (2)] , shunday $c\in(a, x)$ nuqta mavjudki, unda ushbu tenglik bajariladi:

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (4)$$

Bu yerda (3) tengliklardan ham foydalanildi. (4) tenglikda $x\to a$ deb olamiz. Bu holda, $c\in(a,x)$ ekanligidan $c\to a$ bo‘lishi kelib chiqadi. Shu sababli (4) tenglikda argument $x\to a$ bo‘lganda limitga o‘tib, ushu natijani olamiz:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (5)$$

Limitning qiymati undagi o‘zgaruvchi miqdorni qanday belgilanishiga bog‘liq emas va shuning uchun (5) tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (6)$$

(5) va (6) tengliklardan isbotlanishi kerak bo‘lgan (2) tasdiq kelib chiqadi.

Endi $a=\infty$ holni ko‘ramiz, ya’ni $x\to\infty$ bo‘lsin. Bu holda $z=1/x$ yangi o‘zgaruvchini kiritsak, $x\to\infty$ holda $z\to 0$ bo‘ladi. Bu yerda $x=1/z$ bo‘lgani uchun va (2) tenglikka asosan

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{f(\frac{1}{z})}{g(\frac{1}{z})}=\lim_{z\to 0}\frac{\left[f(\frac{1}{z})\right]'}{\left[g(\frac{1}{z})\right]'}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{f'(\frac{1}{z})(\frac{1}{z})'}{g'(\frac{1}{z})(\frac{1}{z})'}=\lim_{z\to 0}\frac{f'(\frac{1}{z})}{g'(\frac{1}{z})}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

natijani olamiz.Teorema to‘liq isbot bo‘ldi.

Misol sifatida, Lopitalning I qoidasidan foydalanib, oldin (VI bob,§3) ko‘rilgan bir nechta ajoyib limitlarni isbotlaymiz.

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\cos 0=1.$$

Bu natija 1 ajoyib limitni ifodalaydi.

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to 0}\frac{[\ln(1+ax)]'}{x'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+ax}\cdot(1+ax)'}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{1+ax}=\frac{a}{1+0}=a.$$

Bu limitni III ajoyib limit deb atagan edik.

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a}{1}=\frac{a^0\ln a}{1}=\ln a.$$

Bu natijani IV ajoyib limit deb olish mumkin.

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to 0}\frac{\left[(1+x)^{\alpha}-1\right]'}{x'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1}=\alpha\cdot(1+0)^{\alpha-1}=\alpha\ .$$

Bu natijani V ajoyib limit deb atagan edik.

Izoh: Agar 1-teoeremada qo‘shimcha ravishda $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar chekli $x=a$ nuqtada uzluksiz deb shart qo‘ysak, unda (2) tenglikni

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

6.3. Lopitalning II qoidasi. Endi ∞/∞ ko‘rinishdagi aniqmasliklarni ochish masalasini qaraymiz.

2-TEOREMA **(*Lopitalning II qoidasi*):** $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqta atrofida aniqlangan, differensiallanuvchi va $g'(x)\neq 0$ bo‘lsin. Bundan tashqari $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x\to a$ shartda cheksiz katta miqdorlar bo‘lsin, ya’ni

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty,\qquad \lim_{x\to a}g(x)=\infty \tag{7}$$

munosabatlar o‘rinli bo‘lsin. Bu holda, agar

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

mavjud bo‘lsa (chekli yoki cheksiz), unda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

ham mavjud bo‘ladi va ushbu tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{8}$$

Bu teorema isboti ustida to‘xtalib o‘tirmaymiz.

Lopitalning II qoidasi yordamida ushbu limitlarni hisoblaymiz:

- $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1-x^2)}{\ln(1-x)}=(\frac{\infty}{\infty})=\lim_{x\to 1}\frac{[\ln(1-x^2)]'}{[\ln(1-x)]'}=\lim_{x\to 1}\frac{-2x/(1-x^2)}{-1/(1-x)}=$$
$$=2\lim_{x\to 1}\frac{x(1-x)}{(1-x^2)}=2\lim_{x\to 1}\frac{x(1-x)}{(1-x)(1+x)}=2\lim_{x\to 1}\frac{x}{1+x}=2\cdot\frac{1}{2}=1;$$
- $$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=(\frac{\infty}{\infty})=\lim_{x\to\infty}\frac{x'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0;$$
- $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{\ln x}=(\alpha>0,\ \frac{\infty}{\infty})=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^\alpha)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1/x}=\alpha\lim_{x\to\infty}x^\alpha=\infty.$$

1-izoh: Yuqoridagi (2) yoki (8) tengliklarda $f'(x)/g'(x)$ nisbat $x\to a$ holda yana 0/0 yoki ∞/∞ ko‘rinishdagi aniqmaslikdan iborat bo‘lib, $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar 1-teorema yoki 2-teorema shartlarini qanoatlantirsin. Bu holda

$$\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

mavjud bo‘lsa, quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}\quad . \tag{9}$$

Shunday qilib, aniqmaslikni ochish uchun Lopital qoidasini bir necha marta ketma-ket qo'llash mumkin. Buning uchun har gal Lopital qoidasi shartlarini bajarilishini tekshirib ko'rish kerak.

Misol sifatida quyidagi limitlarni hisoblaymiz:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=(\dfrac{0}{0})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=(\dfrac{0}{0})=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{2}=\dfrac{1}{2}$;

- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left[(x+1)^2\right]'}{\left(x^2+1\right)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2(x+1)}{2x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)'}{x'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+0}{1}=1.$

2-izoh: Lopital qoidasiga teskari tasdiq doimo ham o'rinli bo'lishi shart emas, ya'ni

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

mavjud , ammo

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

mavjud bo'lmasligi mumkin.

Masalan, $f(x)=x+\sin x$, $g(x)=x$, $x\to\infty$ bo'lsin. Bu holda

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x})=1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1+0=1.$$

Ammo bu funksiyalar uchun

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}=1+\lim_{x\to\infty}\cos x$$

va bu limit mavjud emas, chunki $x\to\infty$ holda davriy funksiya bo'lgan $\cos x$ limitga ega emas.

3-izoh: Lopital qoidasi har doim ham aniqmaslikni ochishga imkon beravermaydi. Masalan, ushbu limitni qaraymiz:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=(\frac{\infty}{\infty})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x-1})'}{(\sqrt{x+1})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=(\frac{\infty}{\infty})=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1})'}{(\sqrt{x-1})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=\cdots$$

Bu yerdan ko'rinadiki berilgan limit, Lopital qoidasi ikki marta qo'llanilgach, yana o'ziga qaytib kelmoqda. Demak, bu aniqmaslikni Lopital qoidasi orqali ochib bo‘lmaydi. Holbuki bu limit surat va maxrajni x o‘zgaruvchiga bo‘lish usulida oson hisoblanadi:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-1/x}}{\sqrt{1+1/x}}=\frac{\sqrt{1-0}}{\sqrt{1+0}}=1.$$

6.4. Turli aniqmasliklarni ochish. Oldin ko‘rilgan va shartli ravishda 0/0 yoki ∞/∞ kabi belgilangan aniqmasliklar bilan bir qatorda shartli ravishda $0\cdot\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0, , $\infty-\infty$ kabi belgilanadigan aniqmasliklar ham mavjud.

4-TA’RIF: Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,\ \ \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ bo‘lsa, $f(x)\cdot g(x)$ ko‘paytma $x\to a$ bo‘lganda $\mathbf{0\cdot\infty}$ ***ko‘rinishdagi aniqmaslik*** deyiladi.

Masalan, $x\to 0$ bo‘lganda $f(x)=x$, $g(x)=\ln|x|$ funksiyalar ko‘paytmasi $f(x)\cdot g(x)=x\ln|x|$ yuqorida ta’riflangan $0\cdot\infty$ ko‘rinishidagi aniqmaslikdir.

Bunday aniqmasliklarni ochish uchun ularni

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{1/g(x)}\ \text{ yoki }\ f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{1/f(x)}$$

kabi yozib, 0/0 yoki ∞/∞ ko‘rinishdagi aniqmaslikka keltiriladi va so‘ngra Lopital qoidalaridan foydalaniladi. Masalan,

$$\lim_{x\to 0} x\ln|x|=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{1/x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln|x|)'}{(1/x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1/|x|}{-1/x^2}=-\lim_{x\to 0}|x|=0.$$

4-TA’RIF: Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ bo‘lsa, $f(x)^{g(x)}$ $(f(x)>0)$ ifoda $x\to a$ bo‘lganda $\mathbf{1^\infty}$ ***ko‘rinishdagi aniqmaslik*** deyiladi.

Masalan, $f(x)=1+1/x$, $g(x)=x$ funksiyalar uchun $f(x)^{g(x)}=(1+1/x)^x$ ifoda 1^∞ ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘ladi.

Bunday aniqmasliklarni ochish uchun $u=f(x)^{g(x)}$ deb belgilaymiz va bu tenglikni ikkala tomonidan logarifm olib, $\ln u=\ln f(x)^{g(x)}=g(x)\ln f(x)$ ko‘paytmaga kelamiz. Bunda

$$\lim_{x\to a} g(x)=\infty,\quad \lim_{x\to a}\ln f(x)=\ln 1=0$$

bo‘lgani uchun $\ln u=g(x)\ln f(x)$ ko‘paytma $0\cdot\infty$ ko‘rinishidagi aniqmaslik va uni yuqorida ko‘rsatilgan usulda ochish mumkin. Agar

$$\lim_{x\to a}\ln u=\lim_{x\to a}\{[\ln f(x)]g(x)\}=b$$

bo‘lsa, unda ko‘rsatkichli funksiyalarning uzluksizligidan foydalanib, ushbu natijani olamiz:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a} u=\lim_{x\to a} e^{\ln u}=e^{\lim\limits_{x\to a}\ln u}=e^b. \qquad (10)$$

Misol sifatida $\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e$ II ajoyib limitni (VI bob, §3) isbotlaymiz.

Bunda $f(x)=1+1/x$, $g(x)=x$ bo‘lib, $\ln u=g(x)\ln f(x)=x\ln(1+1/x)$ va

$$\lim_{x\to\infty}\ln u=\lim_{x\to\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}=(\frac{0}{0})=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{[\ln(1+1/x)]'}{(1/x)'}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{1+1/x}\cdot\frac{(1+1/x)'}{(1/x)'}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{1+1/x}\cdot 1\right]=\frac{1}{1+0}=1.$$

Bu yerdan, (10) tenglikka asosan,

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\ln u} = e^1 = e,$$

ya'ni II ajoyib limitga ega bo'lamiz.

5-TA'RIF: Agar berilgan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun

$$\lim_{x\to a} f(x)=0,\ \lim_{x\to a} g(x)=0 \quad \text{yoki} \quad \lim_{x\to a} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to a} g(x)=0$$

bo'lsa, unda $f(x)^{g(x)}$ $(f(x)>0)$ ifoda $x\to a$ bo'lganda $\mathbf{0^0}$ ***yoki*** $\mathbf{\infty^0}$ ***ko'rinishdagi aniqmaslik*** deyiladi.

Bunday ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochish yuqorida 1^∞ ko'rinishdagi aniqmasliklar uchun ko'rib o'tilgan usulda amalga oshiriladi.

Masalan, $f(x)=x$, $g(x)=x$ va $x\to 0+0$ holda $u=f(x)^{g(x)}=x^x$ ifoda 0^0 ko'rinishdagi aniqmaslik bo'ladi. Bunda

$$\lim_{x\to 0+0}\ln u = \lim_{x\to 0+0} x\ln x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{1/x} = (\frac{\infty}{\infty}) =$$

$$= \lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x\to 0+0}\frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0+0} x = 0$$

va, (10) tenglikka asosan,

$$\lim_{x\to 0+0} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\ln u} = e^0 = 1\ .$$

6-TA'RIF: Agar berilgan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty, \quad \lim_{x\to a} g(x)=\infty$$

bo'lsa, unda $f(x)-g(x)$ ayirma $x\to a$ bo'lganda $\infty-\infty$ ***ko'rinishdagi aniqmaslik*** deyiladi.

Bunday aniqmasliklarni ochish uchun ularni

$$f(x)-g(x)=f(x)[1-g(x)/f(x)]$$

ko'rinishda yozamiz. Bunda ikki hol bo'lishi mumkin.

I. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)} = A \neq 1$. Bu holda

$$f(x)-g(x)=f(x)[1-g(x)/f(x)]$$

ifodani $x\to a$ bo'lganda shartli ravishda $(1-\text{A})\cdot\infty$ ko'rinishda deb qarash mumkin va shu sababli

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \pm\infty.$$

Masalan, $f(x)=x$, $g(x)=\ln x$ va $x\to+\infty$ deb olsak, $f(x)-g(x)=x-\ln x$ ayirma $\infty-\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslik bo'ladi. Bu holda

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = (\frac{\infty}{\infty}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0 = A \neq 1$$

bo'lgani uchun

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x) = +\infty.$$

II. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)} = A = 1$. Bu holda

$$f(x)–g(x)=f(x)[1–g(x)/f(x)]$$

ifoda $x\to a$ bo‘lganda $0\cdot\infty$ ko‘rinishidagi aniqmaslik bo‘ladi va uni yuqorida ko‘rilgan usulda ochish mumkin.

Masalan, $f(x)=1/\cos x$, $g(x)=\mathrm{tg}x$ va $x\to\pi/2$ deb olsak,

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{\cos x}-\mathrm{tg}x$$

ayirma $\infty–\infty$ ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘ladi. Bu holda

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}x\cdot\cos x)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$$

bo‘lgani uchun

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{\cos x}-\mathrm{tg}x)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos x}(1-\cos x\cdot\mathrm{tg}x)=(0\cdot\infty)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)'}{(\cos x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\mathrm{ctg}x=0.$$

XULOSA

Oldin biz hosilani funksiyani tekshirishga tatbiqlari bilan tanishib chiqqan edik. Ammo hosilaning tatbiqlari bu bilan chegaralanib qolmaydi. Buning tasdig‘i sifatida aniqmasliklarni ochish masalasini ko‘rish mumkin.

Bunda 0/0 ko‘rinishdagi aniqmasliklar hosila yordamida Lopitalning I qoidasi orqali ochiladi. Bu qoida yordamida oldin keltirilgan bir qator ajoyib limitlar oson isbotlanadi.

Agar aniqmaslik ∞/∞ ko‘rinishda bo‘lsa, uni ochish uchun Lopitalning II qoidasidan foydalaniladi. Bu qoida ham hosila tushunchasi orqali ifodalanadi.

Yuqorida ko‘rilgan aniqmasliklardan tashqari $0\cdot\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0, , $\infty-\infty$ kabi belgilanadigan aniqmasliklar ham Lopital qoidalariga keltirish orqali ochiladi.

Tayanch iboralar

* 0/0 ko‘rinishdagi aniqmaslik * ∞/∞ ko‘rinishdagi aniqmaslik * Aniqmasliklarni ochish * Lopitalning I qoidasi * Lopitalning II qoidasi * $0\cdot\infty$ ko‘rinishdagi aniqmaslik * 1^∞ ko‘rinishdagi aniqmaslik * 0^0 ko‘rinishdagi aniqmaslik * ∞^0 ko‘rinishdagi aniqmaslik * $\infty-\infty$ ko‘rinishdagi aniqmaslik

Takrorlash uchun savollar

1. 0/0 ko‘rinishdagi aniqmaslik ta’rifini bering.
2. ∞/∞ ko‘rinishdagi aniqmaslik qanday ta’riflanadi?
3. Aniqmasliklarni ochish deb nimaga aytiladi?

4. Lopitalning I qoidasi qanday ifodalanadi?
5. Lopitalning II qoidasi qanday mazmunga ega?
6. Lopitalning I qoidasi yordamida I ajoyib limit qanday isbotlanadi?
7. Lopital qoidasiga teskari tasdiq har doim o‘rinlimi? Misol keltiring.
8. 0/0 va ∞/∞ aniqmasliklardan tashqari yana qanday ko‘rinishdagi aniqmasliklar mavjud?
9. 0·∞ ko‘rinishdagi aniqmaslik qanday ochiladi?
10. II ajoyib limit Lopital qoidasi yordamida qanday isbotlanadi?
11. 1^{∞}, 0^0 va ∞^0 ko‘rinishdagi aniqmasliklar qanday ochiladi?
12. ∞–∞ ko‘rinishdagi aniqmaslik qanday ochiladi?

Testlardan namunalar

1. Qaysi holda $f(x)/g(x)$ nisbat $x \to a$ bo‘lganda 0/0 ko‘rinishdagi aniqmaslik deyiladi?
   A) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$; B) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$; C) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$;
   D) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$; E) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq 0,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=0$.

2. Quyidagilardan qaysi biri $x \to 1$ bo‘lganda 0/0 ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘lmaydi?
   A) $\dfrac{x^n-1}{x^m-1},\ n,m\in N, n\neq m$; B) $\dfrac{a^x-a}{x-1}$; C) $\dfrac{\ln x}{\arccos x}$;
   D) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$; E) $\dfrac{\sin 3(x-1)}{\cos(x-1)}$.

3. Agarda $f(x)/g(x)$ nisbat $x \to a$ bo‘lganda 0/0 ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘lsa, qaysi tenglik Lopitalning I qoidasini ifodalaydi?
   A) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$; B) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g(x)}$;
   C) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g'(x)}$; D) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$;
   E) to‘g‘ri javob keltirilmagan.

4. $f(x)/g(x)$ nisbat limitini ($x \to a$) hisoblash uchun Lopitalning I qoidasida $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarga quyidagi shartlardan qaysi talab etilmaydi?
   A) $f(x)$ va $g(x)$ a nuqtaning biror atrofida differensiallanuvchi;
   B) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$; C) $g'(x)\neq 0$;
   D) $f(a)=0$, $g(a)=0$; E) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ limit mavjud .

5. Lopitalning I qoidasini isbotlash uchun kimning teoremasidan foydalaniladi?
A) Veyershtrass ; B) Roll ; C) Lagranj ; D) Koshi ; E) Ferma .

6. Lopital qoidasidan foydalanib $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{4x}$ limitni hisoblang.

A) $\dfrac{5}{4}$; B) $\dfrac{4}{5}$; C) 0; D) $-\dfrac{5}{4}$ **;** E) ∞ .

<u>Mustaqil ish topshiriqlari</u>

1. Ko‘rsatilgan ko‘rinishdagi ushbu aniqmaslikarni oching:

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{(n+1)x}-e^{-nx}}{e^{nx}-1}\ (\dfrac{0}{0})$; $b)\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+x^n)}{\ln x}\ (\dfrac{\infty}{\infty})$;

$c)\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{n}{1-x^n}-\dfrac{n+1}{1-x^{n+1}}\right)\ (\infty-\infty)$; $d)\ \lim\limits_{x\to 0}(1-\cos nx)\mathrm{ctg}^2 nx\ \ (0\cdot\infty)$.

VIII BOB . INTEGRAL HISOB

Integral–har xil jarayon va hodisalarning
hajmdor quyilmasi bo‘lib, bu mo‘jizani yaratgan
Leybnits va Nyuton ijodiy fantaziyasining
aqlga sig‘maydigan portlashining mevasidir.
Feynberg E.L.

§1. BOSHLANG‘ICH FUNKSIYA VA ANIQMAS INTEGRAL. INTEGRALLAR JADVALI

- ***Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral.***
- ***Aniqmas integral xossalari.***
- ***Integrallar jadvali.***

1.1. Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral. Differensial hisob bobida berilgan $y=F(x)$ funksiya sining $F'(x)=f(x)$ hosilasini topish masalasi bilan shug‘ullangan edik. Ammo bir qator savollarga javob izlashda teskari, ya’ni $y=F(x)$ funksiyani uning ma’lum bo‘lgan $F'(x)=f(x)$ hosilasi bo‘yicha topish masalasiga duch kelamiz.

Masalan, moddiy nuqtaning harakat tenglamasi $S=S(t)$ berilgan bo‘lsa, unda t_0 vaqtgacha bosib o‘tilgan masofa $S_0=S(t_0)$ kabi aniqlanadi.Ammo harakat tenglamasi $S=S(t)$ noma’lum bo‘lib, uning hosilasi $S'(t)=v(t)$, ya’ni oniy tezlik berilgan holda $S_0=S(t_0)$ masofani qanday topish masalasi paydo bo‘ladi. Bu kabi masalalar integral tushunchasiga olib keladi va uni o‘rganishga kirishamiz.

<u>1-TA’RIF:</u> Biror chekli yoki cheksiz (a,b) oraliqdagi har bir x nuqtada differensiallanuvchi va hosilasi

$$F'(x)=f(x) \tag{1}$$

shartni qanoatlantiruvchi $F(x)$ berilgan $f(x)$ funksiya uchun ***boshlang‘ich funksiya*** deyiladi.

Masalan, $f(x)=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$, $x\in(-\infty,\ \infty)$, funksiya uchun $F(x)=a^x/\ln a$ boshlang‘ich funksiya bo‘ladi, chunki ixtiyoriy x uchun

$$F'(x)=(a^x/\ln a)'=a^x\ln a/\ln a=a^x=f(x)$$

tenglik o‘rinlidir.

Xuddi shunday $F(x)=x^5/5$ funksiya barcha x nuqtalarda $f(x)=x^4$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi, chunki bunda (1) tenglik bajariladi.

Berilgan $y=F(x)$ funksiyaning $y'=F'(x)=f(x)$ hosilasi bir qiymatli aniqlanadi. Masalan, $y=x^2$ funksiya yagona $y'=2x$ hosilaga ega. Ammo $y=f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich $F(x)$ funksiyasini topish masalasi bir qiymatli hal qilinmaydi. Haqiqatan ham, agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘lsa, u holda ixtiyoriy C o‘zgarmas son uchun $F(x)+C$ funksiya ham $f(x)$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi. Haqiqatan ham, differensiallash qoidalariga asosan,

$$(F(x)+C)'=F'(x)+(C)'=f(x)+0=f(x)$$

va, ta’rifga asosan, $F(x)+C$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi.

Masalan, $f(x)=2x$ uchun ixtiyoriy C o‘zgarmasda x^2+C boshlang‘ich funksiyalar bo‘ladi.

Demak, berilgan $y=f(x)$ funksiya uchun $F(x)+C$ ko‘rinishdagi cheksiz ko‘p boshlang‘ich funksiya mavjud bo‘ladi. Bunda $F(x)$ birorta boshlang‘ich funksiyani, C esa ixtiyoriy o‘zgarmas sonni ifodalaydi.

Bu yerda berilgan $y=f(x)$ funksiya uchun barcha boshlang‘ich funksiyalarni topish masalasi paydo bo‘ladi. Bu savolga javob berish uchun dastlab ushbu lemmani (yordamchi teoremani) qaraymiz.

LEMMA: Agar $y=Q(x)$ funksiya biror (a,b) oraliqda differensiallanuvchi va bu oraliqning har bir nuqtasida uning hosilasi $Q'(x)=0$ bo‘lsa, unda bu funksiya (a,b) oraliqda o‘zgarmas, ya’ni $Q(x)=C$ (C - const) bo‘ladi.

Isbot: Qaralayotgan (a,b) oraliqdan ixtiyoriy ikkita x_1 va x_2 ($x_1 \neq x_2$) nuqtalarni olamiz. Unda $y=Q(x)$ funksiya olingan $[x_1, x_2]$ kesmada Lagranj teoremasining (VII bob,§3) barcha shartlarini qanoatlantiradi va shu sababli

$$Q(x_2)-Q(x_1)=Q'(\xi)(x_2-x_1)\ , \quad x_1<\xi< x_2\ ,$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Lemma sharti bo‘yicha (a,b) oraliqning barcha nuqtalarida $Q'(x)=0$ bo‘lgani uchun ξ nuqtada ham $Q'(\xi)=0$ bo‘ladi. Bu yerdan, oldingi tenglikka asosan, $Q(x_2)-Q(x_1)=0$, ya’ni $Q(x_2)=Q(x_1)$ tenglikka ega bolamiz. Bu esa $Q(x)=C$ ekanligini ifodalaydi. Lemma isbot bo‘ldi.

Endi quyidagi teoremani qaraymiz.

1-TEOREMA: Agar $F(x)$ va $\Phi(x)$ berilgan $f(x)$ funksiyaning ixtiyoriy ikkita boshlang‘ich funksiyalari bo‘lsa, u holda biror C o‘zgarmas sonda $\Phi(x)=F(x)+C$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Teorema shartiga asosan $F(x)$ va $\Phi(x)$ berilgan $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyalari bo‘lgani uchun $F'(x)=f(x)$ ва $\Phi'(x)=f(x)$ tenglik o‘rinlidir. Bu yerdan $Q(x)=\Phi(x)-F(x)$ funksiyaning hosilasi

$$Q'(x) = [\Phi(x)-F(x)]'= \Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

ekanligini ko‘ramiz. Unda, oldingi lemmaga asosan, $Q(x)=C$ natijani olamiz. Demak, $Q(x)=\Phi(x)-F(x)=C$ va haqiqatan ham $\Phi(x)=F(x)+C$ tenglik o‘rinli.

Bu teoremadan ushbu muhim xulosa kelib chiqadi: agar $F(x)$ berilgan $f(x)$ funksiyaning birorta boshlang‘ich funksiyasi bo‘sa, uning barcha boshlang‘ich funksiyalari $F(x)+C$ (C-ixtiyoriy o‘zgarmas son) kabi aniqlanadi. Demak, $f(x)$ funksiyaning barcha boshlang‘ich funksiyalarini topish uchun uning birorta $F(x)$ boshlang‘ich funksiyasini topib, unga C o‘zgarmas sonni qo‘shib qo‘yish kifoyadir. Masalan, $f(x)=2x$ funksiyaning barcha boshlang‘ich funksiyalari x^2+C ko‘rinishda bo‘ladi.

2-TA’RIF: Agar $F(x)$ biror (a,b) oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, unda $F(x)+C$ (C – ixtiyoriy o‘zgarmas son) funksiyalar to‘plami shu oraliqda $f(x)$ funksiyaning ***aniqmas integrali*** deyiladi .

Berilgan $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali $\int f(x)dx$ kabi belgilanadi va, ta’rifga asosan, birorta $F(x)$ boshlang‘ich funksiya bo‘yicha

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (2)$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bunda C ixtiyoriy o‘zgarmas son ekanligini yana bir marta eslatib o‘tamiz.

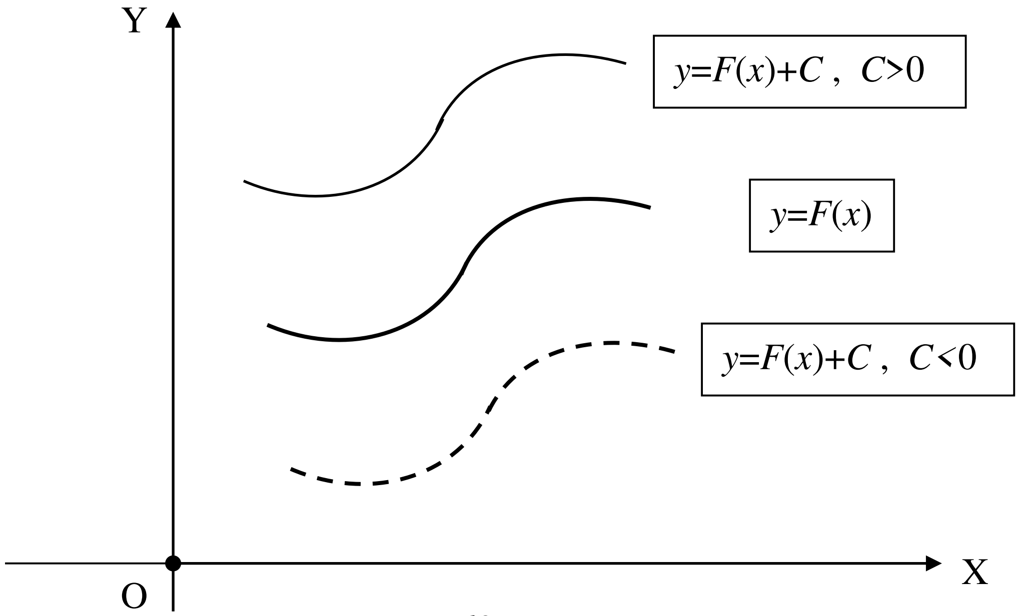
(2) tenglikda $\int$ - integral belgisi, $f(x)$ ***integral ostidagi funksiya*** , $f(x)dx$ ***integral ostidagi ifoda***, x esa ***integrallash o‘zgaruvchisi*** deyiladi. Berilgan $f(x)$ funksiyaning $\int f(x)dx$ aniqmas integralini topish amali bu funksiyani ***integrallash*** deb ataladi.

Izoh: Berilgan $f(x)$ uchun qaysi shartda $F(x)$ boshlang‘ich funksiya , demak $\int f(x)dx$ aniqmas integral, mavjud bo‘lish masalasi kelgusida, §6 da qaraladi.

Yuqorida topilgan boshlang‘ich funksiyalar bo‘yicha quyidagi aniqmas integrallarni yozish mumkin:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ , \ \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C\ , \quad \int 2x dx = x^2 + C.$$

Aniqmas integral ta’rifini ifodalovchi (2) tenglikdan ko‘rinadiki, aniqmas integral $y=F(x)+C$(C-ixtiyoriy o‘zgarmas son) funksiyalar sinfini ifodalaydi. Shu sababli, geometrik nuqtai-nazardan, aniqmas integral $y=F(x)$ funksiya grafigini OY koordinata o‘qi bo‘ylab parallel ko‘chirishdan (VII bob,§3) hosil bo‘ladigan chiziqlar sinfidan iborat bo‘ladi (69-rasmga qarang).



69-rasm

1.2. Aniqmas integral xossalari. Aniqmas integral ta’rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

I. Aniqmas integral hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng, ya’ni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Isbot: Aniqmas integral va boshlang‘ich funksiya ta’rifini ifodalovchi (2) va (1) tengliklarga asosan

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x).$$

II. Aniqmas integral differentsiali integral ostidagi ifodaga teng, ya’ni

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

Isbot: Differensial ta’rifi va oldingi xossaga asosan

$$d(\int f(x)dx) = (\int f(x)dx)'dx = f(x)dx.$$

Izoh: Bu yerdan differentsiallash amali integrallash amaliga teskari amal ekanligini ko‘ramiz.

III. Biror funksiyaning hosilasidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy C o‘zgarmasning yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Isbot: Agar $F'(x)=f(x)$ deb belgilasak, unda $F(x)$ hosil qilingan $f(x)$ funksiya uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi. Unda, aniqmas integral ta’rifiga asosan,

$$\int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

IV. Biror funksiyaning differentsialidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan o‘zgarmas yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Isbot: Differensial ta’rifi va oldingi xossaga asosan

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Izoh: Bu yerdan integrallash amali differentsiallash amaliga o‘zgarmas son aniqligida teskari amal ekanligini ko‘ramiz.

V. O‘zgarmas k ko‘paytuvchini integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya’ni

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Bu tenglik o‘zgarmas son aniqligida tushuniladi.

Isbot: I xossaga asosan ikkala aniqmas integral bir xil $kf(x)$ hosilaga ega. Demak, bu aniqmas integrallarning ikkalasi ham $kf(x)$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi va shu sababli ular bir-biridan faqat o‘zgarmas songa farq qilishi mumkin.

Masalan,

$$\int 10xdx = \int 5\cdot 2xdx = 5\int 2xdx = 5(x^2 + C) = 5x^2 + 5C = 5x^2 + C.$$

Bu yerda C ixtiyoriy o‘zgarmas son bo‘lgani uchun $5C$ ham ixtiyoriy o‘zgarmas son bo‘ladi va shu sababli uni yana C deb belgilash mumkin.

VI. Ikkita funksiya algebraik yig‘indisidan olingan aniqmas integral shu funksiyalarning har biridan olingan aniqmas integrallarning algebraik yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Bu yerda ham tenglik o‘zgarmas son aniqligida tushuniladi.

Isbot: Aniqmas integralning I xossasiga asosan

$$(\int [f(x) \pm g(x)]dx)' = f(x) \pm g(x).$$

Algebraik yig‘indining hosilasi va I xossaga asosan

$$(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx)' = (\int f(x)dx)' \pm (\int g(x)dx)' = f(x) \pm g(x).$$

Demak, VI xossadagi tenglikning ikkala tomonidagi funksiyalar bir xil hosilaga ega va shu sababli ular o‘zgarmas son aniqligida teng bo‘ladi.

Masalan,

$$\int (5^x + 2x)dx = \int 5^x dx + \int 2xdx = \frac{5^x}{\ln 5} + x^2 + C.$$

Izoh: VI xossa chekli sondagi funksiyalarning algebraik yig‘indisi uchun ham o‘rinli bo‘ladi.

3-TA’RIF: V va VI xossalar aniqmas integralning ***chiziqlilik xossalari*** deyiladi.

Aniqmas integralning chiziqlilik xossalarini bitta

$$\int [Af(x)+Bg(x)]dx = A\int f(x)dx + B\int g(x)dx \qquad (3)$$

tenglik orqali ham ifodalash mumkin.

VII. Agar a va b o‘zgarmas sonlar bo‘lsa, unda quyidagi tasdiq o‘rinlidir:

$$\int f(x)dx = F(x)+C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C \quad .$$

Isbot: Ikkinchi integral javobi to‘g‘riligini differensiallash orqali ko‘rsatamiz. Shartga ko‘ra $F'(x)=f(x)$ bo‘lgani uchun va murakkab funksiya hosilasi formulasiga asosan

$$\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]' = \frac{1}{a}F'(ax+b)\cdot(ax+b)' = \frac{1}{a}f(ax+b)\cdot a = f(ax+b)\,.$$

Masalan,

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5}+C \Rightarrow \int (2x-3)^4 dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-3)^5}{5}+C = \frac{(2x-3)^5}{10}+C\,.$$

1.3. Integrallar jadvali. Hosilalar jadvali (VIII bob, §2), oldin hisoblangan hosilalar va aniqmas integral ta’rifidan foydalanib, asosiy integrallar jadvalini yozamiz. Bunda aniqmas integral javobining to‘g‘riligini tenglikning o‘ng tomonidan hosila olish orqali tekshirish mumkin. Natijada integral ostidagi funksiya hosil bo‘lishi kerak. Masalan,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

integral javobi to‘g‘riligini tekshiramiz. Murakkab funksiya hosilasi formulasiga asosan

$$(\ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}}\cdot(x+\sqrt{x^2 \pm a^2})' =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}}\cdot[1+\frac{1}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}}(x^2 \pm a^2)'] = \frac{1}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}}\cdot(1+\frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}) = .$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}+x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,.$$

Differensiallash natijasida integral ostidagi funksiya hosil bo‘ldi. Demak, integral javobi to‘g‘ri ko‘rsatilgan.

INTEGRALLAR JADVALI

1. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha \neq -1)$

2. $\int dx = x + C$

3. $\int x dx = \dfrac{x^2}{2}+C$

4. $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x}+C$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$ 6. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ 8. $\int e^x dx = e^x + C$

9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ 10. $\int \cos x dx = \sin x + C$

11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \mathrm{tg}^2 x) dx = \mathrm{tg} x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C \quad (x \neq \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

13. $\int \mathrm{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

14. $\int \mathrm{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C \quad (x \neq \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

15. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg} x + C \\ -\mathrm{arcctg} x + C \end{cases}$ 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

17. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C$ 18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Bu jadval, integralning ko‘rib o‘tilgan xossalari va kelgusida qaraladigan integrallash usullaridan foydalanib juda ko‘p integrallarni hisoblash mumkin.

XULOSA

Matematik tahlilda hosila bilan bir qatorda yana bir muhim tushuncha integral bo‘lib hisoblanadi. Hosilasi berilgan $f(x)$ funksiyaga teng bo‘lgan differensiallanuvchi $F(x)$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang‘ich funksiya deb ataladi. Berilgan funksiya uchun boshlang‘ich funksiyalar cheksiz ko‘p bo‘lib, ular bir-biridan faqat o‘zgarmas C soniga farq qiladi. Berilgan $f(x)$ funksiya uchun barcha boshlang‘ich funksiyalar sinfi $F(x)+C$ (C–ixtiyoriy o‘zgarmas son) shu funksiyaning aniqmas integrali deyiladi. Funksiyaning aniqmas integralini topish integrallash amali deyiladi va u differensiallash amaliga teskari bo‘ladi. Berilgan funksiyaning integralini topish integral xossalari va jadvali yordamida amalga oshirilishi mumkin.

Tayanch iboralar

* Boshlang‘ich funksiya * Aniqmas integral * Integral ostidagi funksiya * Integral ostidagi ifoda * Integrallash o‘zgaruvchisi * Aniqmas integralning geometrik ma’nosi * Integrallash amali * Integralning chiziqlilik xossasi * Integrallar jadvali

Takrorlash uchun savollar

1. Berilgan funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi deb nimaga aytiladi?

2. Boshlang‘ich funksiya qanday xossalarga ega?
3. Berilgan funksiyaning aniqmas integrali qanday ta’riflanadi?
4. Integral ostidagi funksiya deb nimaga aytiladi?
5. Integral ostidagi ifoda deb nimaga aytiladi?
6. Integrallash amali nimani ifodalaydi?
7. Aniqmas integralning geometrik ma’nosi nimadan iborat?
8. Aniqmas integral qanday xossalarga ega?
9. Integrallash va differensiallash amallari o‘zaro qanday bog‘langan?
10. Aniqmas integralning chiziqlilik xossasi nimadan iborat?
11. Integral hisoblash natijasini qanday tekshirish mumkin?
12. Darajali funksiyaning aniqmas integrali nimadan iborat?
13. Ko‘rsatkichli funksiya qanday integrallamadi?
14. Trigonometrik funksiyalarning integrallarini yozing.

Testlardan namunalar

1. Quyidagilardan qaysi biri $f(x)=\ln x$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi?

A) $\frac{1}{x}$; B) $x\ln x$; C) $x\ln x+x$; D) $x\ln x-x$; E) $\frac{1}{x}\ln x - x$.

2. Teoremani to‘ldiring: Agar $F(x)$ biror $f(x)$ funksiya uchun boshlang‘ich funksiya bo‘lsa, unda ixtiyoriy C o‘zgarmas soni uchun .... funksiya ham $f(x)$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi.

A) $C\cdot F(x)$; B) $C-F(x)$; C) $C+F(x)$; D) C/F(x) ; E) $F(x+C)$.

3. Agar $F(x)$ biror $f(x)$ funksiya uchun boshlang‘ich funksiya bo‘lsa, unda $\int f(x)dx$ aniqmas integral ta’rif bo‘yicha qanday aniqlanadi?

A) $C\cdot F(x)$; B) $C-F(x)$; C) $C+F(x)$; D) $C/F(x)$; E) $F(x+C)$.

4. Qaysi darajali funksiyaning aniqmas integrali noto‘g‘ri yozilgan?

A) $\int \sqrt{x}dx = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$; B) $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$; C) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$;

D) $\int \sqrt[3]{x}dx = \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + C$; E) $\int \frac{1}{x}dx = -\frac{1}{x^2} + C$.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Ushbu aniqmas integrallarni hisoblang va olingan natijani differensiallash orqali tekshiring:

a) $\int (x^n - n\sin nx + \mathrm{tg}(x+n) + n)dx$; *b)* $\int (e^{nx} - \frac{n}{x+n} + 2\sqrt{x-n} + n^x)dx$;

c) $\int (\frac{n}{x^2-n^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+n^2}})dx$; *d)* $\int (\frac{n}{\cos^2(1+nx)} + \frac{1}{\sin^2(n+x)})dx$.

§2. ANIQMAS INTEGRALNI HISOBLASH USULLARI. KVADRAT UCHHADLI AYRIM INTEGRALLARNI HISOBLASH

- ***Yoyish usuli.***
- ***Differensial belgisi ostiga kiritish usuli.***
- ***O'zgaruvchilarni almashtirish usuli.***
- ***Bo'laklab integrallash usuli.***
- ***Kvadrat uchhadli integrallarni hisoblash.***

Oldingi boblarda differensiallanuvchi har qanday elementar funksiyaning hosilasini hosilalar jadvali va differensiallash qoidalari yordamida topish mumkin ekanligini ko'rib o'tgan edik. Bunda elementar funksiyaning hosilasi yana elementar funksiyadan iborat bo'ladi. Endi berilgan funksiyani integrallash masalasiga kelsak, vaziyat ancha murakkab bo'ladi. Bunda berilgan elementar funksiya uchun boshlang'ich funksiya (aniqmas integral) mavjudligini aniqlash bir masala bo'lib (bu masala yechimi keyinroq keltiriladi), integral mavjudligi ma'lum taqdirda uni hisoblash ancha qiyin muammo bo'ladi. Bundan tashqari bir qator elementar funksiyalarning aniqmas integrali elementar funksiyalar orqali ifodalanmaydi. Masalan,

$$I_1=\int e^{-x^2}dx\,,\quad I_2=\int\cos x^2dx\,,\quad I_3=\int\frac{dx}{\ln x}\,(x>0,\,x\neq1)\,,\quad I_4=\int\frac{\sin x}{x}dx$$

kabi integrallar mavjud, ammo elementar funksiya bo'lmaydi. Bu integrallar bilan aniqlanadigan funksiyalar maxsus funksiyalar deb ataladi va ular turli amaliy masalalarni yechishda qo'llaniladi. Masalan, I_1 orqali aniqlanadigan maxsus funksiya Puasson (farang olimi, 1781 - 1840) integrali deb ataladi va ehtimolliklar nazariyasida, diffuziya va issiqlik o'tkazish masalasini o'rganishda keng qo'llaniladi. I_2 Frenel (farang fizigi va matematigi, 1788 - 1827) integrali deyiladi va optika masalalarini yechishda juda ko'p qo'llaniladi. I_3 va I_4 mos ravishda integral logarifm va integral sinus deb ataladi.

Shunday qilib, aniqmas integralni hisoblashning umumiy usuli mavjud bo'lmasdan, har bir integral o'ziga xos bir usulda topilishi mumkin. Ammo ma'lum bir hollar uchun integralni hisoblash usullari ishlab chiqilgan va ular bilan tanishishga o'tamiz.

2.1. Yoyish usuli. Bu usulda dastlab berilgan integral ostidagi murakkabroq $f(x)$ funksiya soddaroq (masalan, integrallari bevosita jadval orqali topiladigan) $f_k(x)$ (k=1,2,…,n) funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasiga yoyiladi. So'ngra bu chiziqli yoyilma integrali oldingi paragrafda ko'rilgan integralning chiziqlilik xossalaridan foydalanilib hisoblanadi. Bu usulni matematik ko'rinishda quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx&=\int[A_1f_1(x)+A_2f_2(x)+\cdots+A_nf_n(x)]dx=\\&=A_1\int f_1(x)dx+A_2\int f_2(x)dx+\cdots+A_n\int f_n(x)dx\end{aligned}\qquad(1)$$

Misol sifatida bu usulda quyidagi integrallarni hisoblaymiz:

❖ $$\int \frac{7x-5x^2+1}{x^2}dx=\int\left(\frac{7}{x}-5+\frac{1}{x^2}\right)dx=7\int\frac{dx}{x}-5\int dx+\int\frac{dx}{x^2}=$$
$$=7\ln|x|-5x-\frac{1}{x}+C;$$

❖ $$\int \mathrm{tg}^2 x dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=$$
$$=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int dx=\mathrm{tg}x-x+C\;;$$

❖ $$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\int\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right]dx=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right]=$$
$$=\frac{1}{2a}[\ln|x-a|-\ln|x+a|]+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

Bu asosiy integrallar jadvalidagi 17-integral ekanligini eslatib o‘tamiz.

2.2. Differensial belgisi ostiga kiritish usuli. Bu usul aniqmas integralning ushbu ***invariantlik xossasi*** orqali amalga oshiriladi:

$$\int f(x)dx=F(x)+C\Rightarrow\int f(u)du=F(u)+C. \qquad (2)$$

Bu tenglik differensialning invariantlik xossasidan [VII bob,§4, (5)] kelib chiqadi va unda $u=u(x)$ ixtiyoriy differentsiallanuvchi funksiyani ifodalaydi. Shunday qilib, integrallash o‘zgaruvchisi x biror differentsiallanuvchi $u=u(x)$ funksiya bilan almashtirilsa, integral javobida ham x o‘rniga $u=u(x)$ funksiya qo‘yiladi.

Ko‘p hollarda bu usulni qo‘llash uchun dastlab integral ostidagi funksiyaning bir qismi differensial ostiga kiritiladi va integral kerakli ko‘rinishga keltiriladi. Misol sifatida quyidagi integrallarni hisoblaymiz.

➢ $$\int\ln x d\ln x=(u=\ln x)=\int u du=\frac{u^2}{2}+C=\frac{\ln^2 x}{2}+C\;.$$

➢ $$\int(x+4)^{99}dx=\int(x+4)^{99}d(x+4)=(u=x+4)=$$
$$=\int u^{99}du=\frac{u^{100}}{100}+C=\frac{(x+4)^{100}}{100}+C.$$

Bu yerda $dx=d(x+4)$ ekanligidan foydalandik.

➢ $$\int\mathrm{tg}x dx=\int\frac{\sin x dx}{\cos x}=\int\frac{-d\cos x}{\cos x}=(u=\cos x)=$$
$$=-\int\frac{du}{u}=-\ln|u|+C=-\ln|\cos x|+C\;.$$

Bu asosiy integrallar jadvalidagi 13-integral javobining isbotini ifodalaydi.

Bu usul yordamida quyidagi ko‘rinishdagi integrallarni ham hisoblash mumkin:

$$\int\frac{f'(x)dx}{f(x)}=\int\frac{df(x)}{f(x)}=\ln|f(x)|+C\;,\qquad\int\frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}}=\int\frac{df(x)}{\sqrt{f(x)}}=2\sqrt{f(x)}+C\;.$$

2.3. O‘zgaruvchilarni almashtirish usuli. Bu usulda berilgan $\int f(x)dx$ integraldagi “eski” x o‘zgaruvchidan “yangi” t o‘zgaruvchiga biror $x=\varphi(t)$ funksiya orqali o‘tamiz. Bunda $\varphi(t)$ funksiya ***almashtirma*** deb ataladi va u differensiallanuvchi, hosilasi uzluksiz hamda teskari funksiyasi $t=\varphi^{-1}(x)$ mavjud deb olinadi. Bu holda

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]d\varphi(t) = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

tenglik (o‘zgarmas son aniqligida) o‘rinli bo‘ladi. Bunda tenglikning o‘ng tomonidagi integral hisoblangandan keyin, t o‘zgaruvchi o‘rniga $t=\varphi^{-1}(x)$ qo‘yilib, berilgan integral javobi olinadi.

Yuqoridagi (3) tenglikni o‘rinli ekanligini isbotlash uchun uning har ikki tomonining hosilalari o‘zaro teng ekanligi ko‘rsatish kifoya. Bunda, oldingi paragrafda ko‘rsatilgan aniqmas integralning I xossasiga asosan, chap tomondagi integral hosilasi integral ostidagi $f(x)$ funksiyaga teng bo‘ladi. O‘ng tomondagi integralda $t=\varphi^{-1}(x)$ bo‘lgani uchun u x o‘zgaruvchining murakkab funksiyasi bo‘ladi. Shu sababli murakkab funksiyani differensiallash qoidasi va teskari funksiya hosilasi formulasiga asosan

$$\left(\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt\right)'_x = \left(\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt\right)'_t\cdot\frac{dt}{dx} =$$

$$= f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\cdot[\varphi^{-1}(x)]' = f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x)$$

natijani olamiz. Demak, haqiqatan (3) tenglikning ikkala tomoni bir xil $f(x)$ hosilaga ega va shu sababli u o‘rinlidir.

Berilgan integralni (3) tenglik yordamida hisoblash ***o‘zgaruvchilarni almashtirish usuli*** deb ataladi. Agar (3) tenglikda $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)=g(t)$ deb belgilasak, unda o‘zgaruvchilarni almashtirish usulida $f(x)$ funksiyani integrallash masalasi $g(t)$ funksiyani integrallash masalasiga keladi. Ayrim hollarda $x=\varphi(t)$ yoki $t=\varphi^{-1}(x)$ almashtirmani shunday tanlash mumkinki, $g(t)$ funksiya oson integrallamadi. Bu almashtirmani tanlash berilgan integral ko‘rinishiga qarab amalga oshiriladi va integral hisoblovchini mahorati va tajribasiga bog‘liq bo‘ladi.

O‘zgaruvchilarni almashtirish usuliga misol sifatida ushbu integrallarni hisoblaymiz.

- $$\int\frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = \begin{bmatrix}\sqrt{x+4}=t,\ x+4=t^2\\ x=t^2-4,\ dx=2tdt\end{bmatrix} = \int\frac{2tdt}{(t^2-4)\cdot t} =$$

$$=2\int\frac{dt}{t^2-2^2} = 2\cdot\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C$$

- $$\int\frac{dx}{x^2+a^2} = (a\neq 0) = \begin{bmatrix}x=at,\quad t=x/a,\\ dx=d(at)=adt\end{bmatrix} = \int\frac{adt}{a^2t^2+a^2} =$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}t+C = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

Xuddi shunday tarzda

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C$$

ekanligini ko‘rsatish mumkin. Bu natijalar asosiy integrallar jadvaldagi 15-16 integrallarni umumlashtiradi.

2.4. Bo‘laklab integrallash usuli. Faraz qilaylik, $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar differentsiallanuvchi funksiyalar bo‘lsin. Bu funksiyalar ko‘paytmasining differentsialini yozamiz:

$$d(uv) = vdu + udv \ .$$

Bu yerdan

$$udv = d(uv) - vdu$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bu tenglikning ikkala tomonini hadma-had integrallab, quyidagi natijani hosil qilamiz:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu \, .$$

Bu yerdan, integralning oldingi paragrafda ko‘rsatilgan IV xossasiga asosan, ushbu formulaga ega bo‘lamiz:

$$\int udv = uv - \int vdu \, . \qquad (4)$$

Bu natija ***bo‘laklab integrallash formulasi*** deyiladi. Ayrim hollarda (4) formulaning chap tomonidagi integralni hisoblash murakkab, o‘ng tomondagi integral esa osonroq hisoblanadi.

Demak, berilgan $\int f(x)dx$ integralni (4) formula orqali bo‘laklab integrallash usulida hisoblash quyidagi algoritm asosida amalga oshirilishi mumkin:

- Integral ostidagi $f(x)dx$ ifodani ikki bo‘lakka ajratamiz;
- Hosil bo‘lgan bo‘laklardan dx qatnashganini dv, ikkinchisini esa u orqali belgilaymiz;
- Hosil qilingan dv differensial bo‘yicha biror v boshlang‘ich funksiyani topamiz. Buning uchun $v = \int dv$ aniqmas integralni hisoblab, unda ixtiyoriy C o‘zgarmas sonni C=0 deb olish mumkin;
- Hosil qilingan u funksiya bo‘yicha du differensialni hisoblaymiz;
- (4) tenglikni o‘ng tomonidagi $\int vdu$ integralni hisoblaymiz;
- Berilgan $\int f(x)dx = \int udv$ integralni (4) tenglikning o‘ng tomoni orqali topamiz.

Bunda $f(x)dx=udv$ bo‘laklashda u va dv shunday tanlanishi kerakki, (4) formuladagi $\int vdu$ jadval integrali yoki hisoblanishi osonroq bo‘lgan integraldan iborat bo‘lsin.

Bo‘laklab integrallash usuliga misol sifatida $\int xe^x dx$ integralni hisoblaymiz. Bunda ikki holni qaraymiz.

1-hol. Integral ostidagi $xe^x dx$ ifodani $u=e^x$, $dv=xdx$ ko‘rinishda bo‘laklaymiz. Bu holda

$$du = de^x = (e^x)'dx = e^x dx \, , \quad v = \int dv = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C$$

bo‘lgani uchun, C=0 deb, (4) formuladan

$$\int xe^x dx = \frac{x^2}{2} e^x - \frac{1}{2} \int x^2 e^x dx$$

tenglikka kelamiz. Ammo bunda hosil bo‘lgan o‘ng tomondagi integral berilgan integralga nisbatan murakkabroq ko‘rinishga ega. Demak, bunday bo‘laklash maqsadga muvofiq emas.

2-hol. Bu holda $u=x$, $dv=e^x dx$ deb olamiz. Bunda

$$du = dx \, , \quad v = \int dv = \int e^x dx = e^x + C$$

bo‘ladi. Bu yerda C=0 deb va (4) formuladan foydalanib, berilgan integralni quyidagicha oson hisoblaymiz:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$$

Ayrim integrallarni hisoblash uchun bo‘laklab integrallash formulasini bir necha marta qo‘llashga to‘g‘ri keladi. Bunga misol sifatida ushbu integralni qaraymiz:

$$\int x^2 \sin x dx = \begin{bmatrix} u = x^2, \quad dv = \sin x dx, \\ du = 2xdx, \quad v = \int \sin x dx = -\cos x \end{bmatrix} = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x, \quad dv = \cos x dx, \\ du = dx, \quad v = \int \cos x dx = \sin x \end{bmatrix} = -x^2 \cos x + 2(x \sin x - \int \sin x dx) =$$

$$= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C.$$

Shunday qilib, bu yerda (4) bo‘laklab integrallash formulasidan ikki marta foydalandik.

Izoh: Yuqoridagidek mulohaza yuritib, $\int x^n \sin x dx$, n=1,2,3, … , integral bo‘laklab integrallash formulasini n marta qo‘llash orqali hisoblanishini ko‘rish mumkin.

Ba’zi integrallarni hisoblash uchun dastlab bo‘laklab integrallash orqali ularga nisbatan tenglama hosil qilinib, so‘ngra bu tenglamani yechib ko‘zlangan maqsadga erishiladi. Misol sifatida $I = \int \sqrt{1-x^2}\, dx$ integralni hisoblaymiz.

$$I = \int \sqrt{1-x^2}\, dx = \begin{bmatrix} u = \sqrt{1-x^2}, \quad dv = dx, \\ du = \dfrac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = x \end{bmatrix} = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - I + \arcsin x + C.$$

Shunday qilib izlanayotgan I integral uchun

$$I = x\sqrt{1-x^2} - I + \arcsin x + C \Rightarrow 2I = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C$$

chiziqli tenglamani hosil qildik. Bu tenglamani yechib,

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = I = \frac{x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + C$$

natijaga erishamiz.

Bo‘laklab integrallash usulida

$$\int x^n \cos ax dx, \quad \int x^n \sin ax dx, \quad \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx, \quad \int x^n a^x dx, \quad \int x^n \ln x dx,$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx, \quad \int e^{ax} \sin bx dx, \quad \int x^n \arccos x dx, \quad \int x^n \mathrm{arctg} x dx, \quad \int \sin \ln x dx$$

va shularga o‘xshash integrallarni hisoblash mumkin.

2.5. Kvadrat uchhadli integrallarni hisoblash. Endi kvadrat uchhad qatnashgan ayrim aniqmas integrallarni hisoblash masalasini ko‘rib chiqamiz.

Dastlab ushbu integrallarni qaraymiz:

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \qquad I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad .$$

Avvalo maxrajdagi kvadrat uchhaddan to‘liq kvadratni ajratib olamiz:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - (\frac{b}{2a})^2\right] =$$

$$= a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a})\right] = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 \pm \kappa^2\right].$$

Bu yerda

$$\pm k^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{D}{4a^2}$$

belgilash kiritilgan. Bunda, agar kvadrat uchhad diskriminanti $D=b^2-4ac>0$, ya’ni uning ildizlari haqiqiy sonlar bo‘lsa, k^2 manfiy ishora bilan; $D<0$ bo‘lsa k^2 musbat ishora bilan olinadi. Ikkala holda ham $k\neq 0$ bo‘lishini ta’kidlab o‘tamiz. $D=0$ holni keyinchalik ko‘ramiz.

Yuqoridagi tenglik asosida I_1 integralni o‘zgaruvchilarni almashtirish usulida quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{(x + \frac{b}{2a})^2 \pm \kappa^2} = \begin{bmatrix} t = x + \frac{b}{2a}, \\ dt = d(x + \frac{b}{2a}) = dx \end{bmatrix} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 \pm \kappa^2} .$$

Bu tenglikning o‘ng tomonida jadval integrali turibdi va

$$\int \frac{dt}{t^2 + k^2} = \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{t}{k} + C , \qquad \int \frac{dt}{t^2 - k^2} = \frac{1}{2k}\ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right| + C$$

ekanligini eslatib o‘tamiz.

Bu ko‘rinishdagi integrallarni hisoblashga misollar keltiramiz.

1. $$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 2^2} = \begin{bmatrix} t = x + 1, \\ dt = dx \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 2^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C .$$

2. $$\int \frac{dx}{x^2 - 6x - 7} = \int \frac{dx}{(x-3)^2 - 4^2} = \begin{bmatrix} t = x - 3, \\ dt = dx \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t^2 - 4^2} =$$

$$= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{t-4}{t+4}\right| + C = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-7}{x+1}\right| + C .$$

Endi $D=0$ bo‘lgan holni qaraymiz. Bu holda $k=0$ va

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{(x+\frac{b}{2a})^2}=\left[\begin{array}{l} t=x+\frac{b}{2a}, \\ dt=d(x+\frac{b}{2a})=dx \end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{at}+C=-\frac{1}{a(x+b/2a)}+C=-\frac{2}{2ax+b}+C$$

natijaga ega bo‘lamiz.

Xuddi shunday tarzda $a>0$ va $k\neq 0$ bo‘lganda

$$I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{b}{2a})^2\pm\kappa^2}}=\left[\begin{array}{l} t=x+\frac{b}{2a}, \\ dt=dx \end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm\kappa^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|t+\sqrt{t^2\pm\kappa^2}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\frac{b}{2a}+\sqrt{(x+\frac{b}{2a})^2\pm\kappa^2}\right|+C,$$

$a>0$ va $k=0$ bo‘lganda esa

$$I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{b}{2a})^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{d(x+\frac{b}{2a})}{\left|x+\frac{b}{2a}\right|}=\pm\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\frac{b}{2a}\right|+C$$

natijalarni olamiz.

Masalan,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-8x+9}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+9/2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+1/2}}=$$

$$=\left[\begin{array}{l} t=x-2, \\ dt=dx \end{array}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+(\sqrt{1/2})^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t+\sqrt{t^2+(\sqrt{1/2})^2}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2+(\sqrt{1/2})^2}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+9/2}\right|+C.$$

Endi $a<0$ holni ko‘ramiz. Bu holda kvadrat uchhad diskriminanti $D>0$ deb olishimiz kerak, chunki aks holda barcha nuqtalarda $ax^2+bx+c\leq 0$ va I_2 integral ostidagi funksiya aniqlanmagan bo‘ladi. Bu shartda

$$I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int\frac{dx}{\sqrt{k^2-(x+\frac{b}{2a})^2}}=\left[\begin{array}{l} t=x+\frac{b}{2a}, \\ dt=dx \end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int\frac{dt}{\sqrt{\kappa^2-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{t}{k}+C=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{2ax+b}{2ak}+C.$$

Endi umumiyroq ko‘rinishdagi quyidagi integrallarni qaraymiz:

$$I_3=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx,\quad I_4=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

Oldin I_3 integralni hisoblash yo‘lini ko‘rsatamiz:

$$I_3=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+(B-\frac{Ab}{2a})}{ax^2+bx+c}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}+(B-\frac{A}{2a})\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{2a}\int\frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}+(B-\frac{A}{2a})\cdot I_1=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c}+(B-\frac{A}{2a})\cdot I_1=\frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+(B-\frac{A}{2a})\cdot I_1.$$

Bu yerda I_1 yuqorida ko‘rib o‘tilgan integraldir va uni hisoblashni bilamiz.

Misol sifatida ushbu integralni qaraymiz:

$$\int\frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x-4)+5}{x^2-4x+8}dx=\frac{3}{2}\int\frac{(2x-4)dx}{x^2-4x+8}+5\int\frac{dx}{x^2-4x+8}=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2-4x+8)}{x^2-4x+8}+5\int\frac{dx}{(x-2)^2+2^2}=\frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+8\right|+\frac{5}{2}\text{arctg}\frac{x-2}{2}+C.$$

I_4 integral ham shu kabi hisoblanadi:

$$I_4=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+(B-\frac{A}{2a})\cdot I_2=$$

$$=\frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+(B-\frac{A}{2a})\cdot I_2\ .$$

Bu yerdagi I_2 integralni hisoblash usuli yuqorida ko‘rsatilgan edi.

I_4 ko‘rinishdagi integralni hisoblashga misol keltiramiz:

$$\int\frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx=\int\frac{\frac{5}{2}(2x+4)-7}{\sqrt{(x+2)^2+6}}dx=$$

$$=5\sqrt{x^2+4x+10}-7\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right|+C.$$

XULOSA

Differensiallash amaliga nisbatan integrallash amali ancha murakkabdir. Hatto ayrim elementar funksiyalarning aniqmas integrallari elementar funksiyalar sinfida mavjud bo‘lmasdan, ular maxsus (noelementar) funksiyalar orqali ifodalanadi. Bundan tashqari ixtiyoriy aniqmas integralni hisoblashga imkon beradigan universal, umumiy usul mavjud emas. Shu sababli faqat ayrim , ma’lum bir xususiyatlarga ega bo‘lgan, aniqmas integrallarni hisoblash usullarini ko‘rsatish mumkin. Ularga yoyish, differensial ostiga kiritish, o‘zgaruvchilarni almashtirish va bo‘laklab integrallash usullari kiradi.

Ko‘rsatilgan usullardan foydalanib kvadrat uchhad qatnashgan ayrim aniqmas integrallarni hisoblash mumkin.

Tayanch iboralar

* Yoyish usuli * Differensial ostiga kiritish usuli * O‘zgaruvchilarni almashtirish usuli * Bo‘laklab integrallash usuli * Kvadrat uchhadli integrallar

Takrorlash uchun savollar

1. Elementar funksiyalarning integrali har doim ham elementar funksiyadan iborat bo‘ladimi?
2. Elementar funksiyalar orqali ifodalanmaydigan integrallarga misol keltiring.
3. Yoyish usulida integral qanday hisoblanadi?
4. Integralni yoyish usulida hisoblashga misol keltiring.
5. Differensial ostiga kiritish usulining mohiyati nimadan iborat?
6. Differensial ostiga kiritish usulining tatbig‘iga misol ko‘rsating.
7. O‘zgaruvchilarni almashtirish usuli nimadan iborat?
8. Almashtirma deb nimaga aytiladi?
9. Aniqmas integralni o‘zgaruvchilarni almashtirish usulida hisoblashga doir misol keltiring.
10. Bo‘laklab integrallash formulasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
11. Bo‘laklab integrallashda qanday hollar bo‘lishi mumkin?
12. Qanday ko‘rinishdagi aniqmas integrallarni bo‘laklab integrallash usulida hisoblash mumkin?
13. Kvadrat uchhadli I_1 integral qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
14. Kvadrat uchhadli I_1 integral qanday hisoblanadi?
15. Kvadrat uchhad qatnashgan I_2 integral qanday ko‘rinishga ega?
16. Kvadrat uchhad qatnashgan I_2 integral qanday hisoblanadi?
17. Kvadrat uchhadli I_3 integral qanday hisoblanadi?
18. Kvadrat uchhad qatnashgan I_4 integral qanday qilib I_2 integral ko‘rinishiga keltiriladi?
19. Kvadrat uchhadli integrallar qanday funksiyalar orqali ifodalanadi?

Testlardan namunalar

1. Aniqmas integralni hisoblashning qaysi usuli mavjud emas?
A) ko‘paytirish usuli; B) o‘zgaruvchini almashtirish usuli;
C) differensial ostiga kiritish usuli; D) yoyish usuli;
E) bo‘laklab integrallash usuli.

2. $\int \frac{2x^2-3x+5}{x^2}dx$ integralni yoyish usulida hisoblang.

A) $2-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}+C$; B) $2x-3\ln|x|+\frac{5}{x^2}+C$; C) $2x-\frac{3}{x}-\frac{5}{3x^3}+C$;

D) $2x-3\ln|x|-\frac{5}{x}+C$; E) $2x+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x}+C$.

3. $\int f(x)dx$ aniqmas integralda $x=\varphi(t)$ almashtirma bajarilganda u qanday ko‘rinishga keladi?

A) $\int f(\varphi(t))\varphi(t)dt$; B) $\int f(t)\varphi'(t)dt$; C) $\int f(\varphi(t))dt$;

D) $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$; E) to‘g‘ri javob keltirilmagan.

4. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^{10}-1}}$ integral qaysi almashtirma orqali jadval integraliga keltiriladi?

A) $t=x^2$; B) $t=x^3$; C) $t=x^4$; D) $t=x^5$; E) $t=x^6$.

5. Qaysi tenglik bo‘laklab integrallash usulini ifodalaydi?

A) $\int f(x)dx = \int udv = uv - \int vdu$; B) $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$;

C) $\int f(x)dx = \int \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{n} a_k \int f_k(x)dx$; D) $\int f(x)dx = F(x) + C$;

E) to‘g‘ri javob keltirilmagan.

6. $\int x^2 \ln x dx$ integralni hisoblash uchun integral ostidagi ifodani qanday bo‘laklash kerak?

A) $u=x$, $dv=x\ln x dx$; B) $u=x^2$, $dv=\ln x dx$; C) $u=\ln x$, $dv=x^2 dx$;
D) $u=x\ln x$, $dv=xdx$; E) $u=x^2\ln x$, $dv=dx$.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. $\int (\mathrm{tg}^2 nx + \frac{x^{2n}-1}{x^n})dx$ aniqmas integralni yoyish usulida hisoblang:

2. Ushbu aniqmas integralni invariantlik xossasidan foydalanib hisoblang:

$$\int [\sin^2 nx \cos nx + \frac{\ln^n (x+n)}{x+n}]dx \ ;$$

3. Ushbu aniqmas integralni o‘zgaruvchilarni almashtirish usulida hisoblang:

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{x^{2n}+n^2}} \ ;$$

4. Ushbu aniqmas integralni bo‘laklab integrallash usulida hisoblang:

$$\int x^n \ln nx dx \ .$$

§3. RATSIONAL KASRLAR VA ULARNI INTEGRALLASH

- ***Ratsional funksiyalar.***
- ***Eng sodda ratsional funksiyalar va ularni integrallash.***
- ***Kompleks sonlar haqida tushunchalar.***
- ***Ratsional funksiyalarni integrallash.***

Oldingi paragrafda har qanday elementar funksiya integrali yana elementar funksiyadan iborat bo‘lishi shart emas ekanligini misollarda ko‘rsatgan edik. Shu sababli qanday elementar funksiyalarning integrallari elementar funksiyalar orqali ifodalanishini, ya’ni elementar funksiyalarda integrallanuvchi funksiyalar sinflarini aniqlash masalasi paydo bo‘ladi. Ushbu paragrafda bunday funksiyalarning muhim bir sinfini qisqacha ko‘rib o‘tamiz.

3.1. Ratsional funksiyalar. Ma’lumki ,

$$P_n(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0) \qquad (1)$$

ko'rinishdagi funksiya ***ko'phad*** deyiladi. Bunda a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, …, a_1, a_0 o'zgarmas sonlar bo'lib, ular ko'phadning ***koeffitsiyentlari*** , n esa ko'phadning ***darajasi*** deb ataladi.

Masalan, $P_3(x)=5x^3-x^2+2x+4$ – III darajali, $P_2(x)=3x^2-5x+2$ – II darajali, $P_1(x)=8x+3$ – I darajali ko'phadlardir.

Izoh: Har qanday o'zgarmas funksiyani $P_0(x)=a_0$ – 0-darajali ko'phad deb qarash mumkin.

1-TA'RIF: Ikkita ko'phad nisbatidan iborat funksiya ***ratsional kasr yoki ratsional funksiya*** deyiladi.

Odatda ratsional kasr $R(x)$ kabi belgilanadi va, ta'rifga asosan,

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0} \qquad (2)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Masalan,

$$\frac{3x-5}{x^2-2x+7},\quad \frac{4x^2+x-3}{5x^2-3x+1},\quad \frac{6x^3+5x^2+9x-3}{5x^2-3x+1}$$

ratsional kasrlardir.

Izoh: Har qanday $Q_m(x)$ ko'phadni maxraji $P_0(x)=1$ bo'lgan ratsional kasr kabi qarash mumkin va shu nuqtai nazardan ko'phadlar ba'zan butun funksiyalar deb ataladi.

Ma'lumki, m/n oddiy (sonli) kasrda maxraj suratdan katta, ya'ni $n>m$ bo'lsa, bu kasr to'g'ri, $n\leq m$ holda esa noto'g'ri kasr deyiladi. Bu tushuncha ratsional kasrlar uchun quyidagicha kiritiladi.

2-TA'RIF: Agar (2) ratsional kasrda maxrajning darajasi $n>m$ bo'lsa, u ***to'g'ri***, $n\leq m$ holda esa ***noto'g'ri ratsional kasr*** deb aytiladi.

Masalan,

$$R(x)=\frac{3x^4-x^3+2x^2-5x+1}{x^6+2x^4+3x^2+7}$$

to'g'ri,

$$R_1(x)=\frac{2x^3-3x^2+4x-5}{x^3+x^2-6x+1},\quad R_2(x)=\frac{2x^5-3x^3+x+5}{x^3+2x^2-4x+1}$$

noto'g'ri ratsional kasrlar bo'ladi.

Har qanday noto'g'ri m/n ($m>n$) oddiy kasrni

$$\frac{m}{n}=k+\frac{r}{n},\quad k\in Z,\quad r<n$$

ko'rinishda, ya'ni butun son va to'g'ri kasr yig'indisi kabi ifodalash mumkin. Xuddi shunday tasdiq noto'g'ri ratsional kasrlar uchun ham o'rinli bo'ladi, ya'ni ular uchun ushbu tenglikni hosil qilish mumkin:

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=L_{m-n}(x)+\frac{G_r(x)}{P_n(x)},\quad r<n. \qquad (3)$$

Bunda $L_{m-n}(x)$ va $G_r(x)$ ko'rsatilgan tartibli ko'phadlar bo'ladi.

Demak, har doim noto‘g‘ri ratsional kasrni ko‘phad (butun funksiya) va to‘g‘ri ratsional kasr yig‘indisi kabi ifodalash mumkin.

Masalan,

$$R(x)=\frac{2x^4-3x^3+1}{x^2+x-2}$$

noto‘g‘ri ratsional kasr suratini maxrajiga ustun usulida bo‘lib, uni

$$R(x)=\frac{2x^4-3x^3+1}{x^2+x-2}=2x^2-5x+9+\frac{-19x+19}{x^2+x-2}$$

ko‘rinishga keltira olamiz.

Har qanday ko‘phad darajali funksiyalarning algebraik yig‘indisi sifatida oson integrallamadi va uning integrali yana ko‘phaddan iborat, ya’ni elementar funksiya bo‘ladi. Demak, (3) tenglikka asosan, har qanday ratsional kasrni integrallash masalasi to‘g‘ri ratsional kasrni integrallash masalasiga olib keladi. Shu sababli kelgusida faqat to‘g‘ri ratsional kasrlarni integrallash bilan shug‘ullanamiz.

3.2. Eng sodda ratsional funksiyalar va ularni integrallash. Quyidagi ko‘rinishdagi to‘g‘ri ratsional kasrlarni qaraymiz:

$$\text{I. } R_I(x)=\frac{A}{x-a}, \quad \text{II. } R_{II}(x)=\frac{A}{(x-a)^k},$$

$$\text{III. } R_{III}(x)=\frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad \text{IV. } R_{IV}(x)=\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}.$$

Bunda A, B, a, p, q–haqiqiy sonlar, k=2,3,4, ... , va x^2+px+q kvadrat uchhad haqiqiy ildizlarga ega emas, ya’ni uning diskriminanti $D=p^2-4q<0$ deb olinadi.

3-TA’RIF: Yuqorida kiritilgan $R_{\text{I}}(x)-R_{\text{IV}}(x)$ mos ravishda I–IV tur ***eng sodda ratsional kasrlar*** deb ataladi.

Eng sodda ratsional kasrlarni integrallash masalasini qaraymiz.

I va II turdagi oddiy kasrlarni integrallash jadval integrallariga oson keltiriladi:

$$\int R_I(x)dx=\int\frac{Adx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C;$$

$$\int R_{II}(x)dx=\int\frac{Adx}{(x-a)^\kappa}=A\int(x-a)^{-\kappa}d(x-a)=$$

$$=A\frac{(x-a)^{-\kappa+1}}{-\kappa+1}+C=\frac{A}{(1-\kappa)(x-a)^{\kappa-1}}+C, \quad k=2,3,4,\cdots.$$

III turdagi eng sodda $R_{\text{III}}(x)$ ratsional kasrning integralini hisoblash usuli oldingi paragrafda (I_3 integral) ko‘rilgan edi. Shunday bo‘lsada, bayonimizni to‘liq bo‘lishi va hisoblashlarni so‘ngi nuqtasigacha yetkazish maqsadida , bu usulni biz qarayotgan

$$p^2-4q<0\Rightarrow q-\frac{p^2}{4}=\sigma^2>0$$

hol uchun yana bir marta eslatamiz:

$$\int R_{III}(x)dx = \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)-\frac{Ap}{2}+B}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \begin{bmatrix} x^2+px+q=t \\ (2x+p)dx=dt \end{bmatrix} = \frac{A}{2}\int \frac{dt}{t} + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2+\sigma^2} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| - (B-\frac{Ap}{2})\cdot\frac{1}{\sigma}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sigma} + C \quad .$$

Endi IV turdagi eng sodda $R_{\text{IV}}(x)$ kasrning integralini hisoblaymiz:

$$\int R_{IV}(x)dx = \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^k}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^k} + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{[(x+\frac{p}{2})^2+\sigma^2]^k} = \frac{A}{2}I_k + (B-\frac{Ap}{2})J_k \ .$$

Bu yerdagi

$$I_k = \int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^k}, k = 2,3,4,\cdots \quad ,$$

$$J_k = \int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{[(x+\frac{p}{2})^2+\sigma^2]^k}, \ \sigma = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}, k = 2,3,4,\cdots$$

integrallarni hisoblaymiz:

$$I_k = \int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^k} = \begin{bmatrix} x^2+px+q=t \\ (2x+p)dx=dt \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t^k} =$$

$$= \frac{1}{(1-k)t^{k-1}} + C = \frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + C;$$

$$J_k = \int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{[(x+\frac{p}{2})^2+\sigma^2)^k} = \begin{bmatrix} t = x+\frac{p}{2}, \\ dt = dx \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{(t^2+\sigma^2)^k} =$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}\int\frac{t^2+\sigma^2-t^2}{(t^2+\sigma^2)^n}dt=\frac{1}{\sigma^2}\int\frac{dt}{(t^2+\sigma^2)^{k-1}}-\frac{1}{\sigma^2}\int\frac{t^2dt}{(t^2+\sigma^2)^k}\quad .$$

Bu tenglikdagi oxirgi integralga bo‘laklab integrallash formulasini qo‘llaymiz. Buning uchun integral ostidagi ifodani

$$u=t\,,\qquad dv=\frac{tdt}{(t^2+\sigma^2)^k}$$

ko‘rinishda bo‘laklaymiz. Bu holda $du=dt$ va

$$v=\int dv=\int\frac{tdt}{(t^2+\sigma^2)^k}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+\sigma^2)}{(t^2+\sigma^2)^k}=\frac{1}{2(1-k)(t^2+\sigma^2)^{k-1}}$$

bo‘lgani uchun , bo‘laklab integrallash formulasiga asosan, ushbu tenglikni hosil qilamiz:

$$\int\frac{t^2dt}{(t^2+\sigma^2)^k}=\frac{t}{2(1-k)(t^2+\sigma^2)^{k-1}}-\frac{1}{2(1-k)}\int\frac{dt}{(t^2+\sigma^2)^{k-1}}\,.$$

Natijada J_k integralni hisoblash uchun

$$J_k=\frac{1}{\sigma^2}\int\frac{dt}{(t^2+\sigma^2)^{k-1}}-\frac{1}{\sigma^2}\int\frac{t^2dt}{(t^2+\sigma^2)^k}=$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}\int\frac{dt}{(t^2+\sigma^2)^{k-1}}+\frac{t}{2(k-1)\sigma^2(t^2+\sigma^2)^{k-1}}-\frac{1}{2(k-1)\sigma^2}\int\frac{dt}{(t^2+\sigma^2)^{k-1}}=$$

$$=\frac{1}{2(k-1)\sigma^2}\left[\frac{t}{(t^2+\sigma^2)^{k-1}}+(2k-3)\int\frac{dt}{(t^2+\sigma^2)^{k-1}}\right]$$

formulani hosil etamiz. Bu yerdan J_k integralni hisoblash uchun ushbu

$$J_k=\int\frac{dt}{(t^2+\sigma^2)^k}=\frac{1}{2(k-1)\sigma^2}\left[\frac{t}{(t^2+\sigma^2)^{k-1}}+(2k-3)J_{k-1}\right]\quad(4)$$

rekkurent formula o‘rinli ekanligini ko‘ramiz. Bu rekkurent formula bo‘yicha J_k integralni hisoblash xuddi shu ko‘rinishdagi, ammo k parametrining qiymati bittaga kichik bo‘lgan J_{k-1} integralni hisoblashga olib keladi. O‘z navbatida J_{k-1} integralni hisoblash J_{k-2} integralga keltiriladi va bu jarayon quyidagi J_1 jadval integrali hosil bo‘lguncha davom ettiriladi:

$$J_1=\int\frac{dt}{t^2+\sigma^2}=\frac{1}{\sigma}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sigma}+C\,.$$

J_k integral uchun hosil qilingan ifodaga t va σ o‘rniga ularning

$$t=x+\frac{p}{2}\,,\quad \sigma=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$$

qiymatlarini qo‘yib, bu integral javobini topamiz.

Misol sifatida IV turdagi ratsional kasrning ushbu integralini hisoblaymiz:

$$I=\int\frac{(x-1)dx}{(x^2+2x+3)^2}=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+2)-2}{(x^2+2x+3)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+2)dx}{(x^2+2x+3)^2}-2\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+2x+3)}-2\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+2x+3)}-2J_2\,. \quad (5)$$

Bunda J_2 quyidagi integralni ifodalaydi:

$$J_2=\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}=\int\frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2}=\begin{bmatrix} t=x+1, \\ dt=dx \end{bmatrix}=$$

$$=\int\frac{dt}{(t^2+2)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{t^2+2-t^2}{(t^2+2)^2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+(\sqrt{2})^2}-\frac{1}{2}\int\frac{t^2dt}{(t^2+2)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\int\frac{t^2dt}{(t^2+2)^2}\ .$$

Oxirgi integralni yuqorida ko‘rsatilgan usulda bo‘laklab integrallaymiz:

$$\int\frac{t^2dt}{(t^2+2)^2}=\begin{bmatrix} u=t,\ dv=\dfrac{tdt}{(t^2+2)^2} \\ du=dt, v=-\dfrac{1}{2(t^2+2)} \end{bmatrix}=-\frac{t}{2(t^2+2)}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+2}=$$

$$=-\frac{t}{2(t^2+2)}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=-\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C\,.$$

Demak ,

$$J_2=\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\frac{x+1}{4(x^2+2x+3)}+C\,.$$

J_2 integralning bu qiymatini I uchun hosil qilingan (5) tenglikka qo‘yib, berilgan I integral javobini topamiz :

$$I=\int\frac{(x-1)dx}{(x^2+2x+3)^2}=-\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)}-\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C\,.$$

Shunday qilib, I–IV turdagi eng sodda ratsional kasrlar elementar funksiyalarda integrallanuvchi va ularning integrallari logarifmik, arctg($ax+b$) ko‘rinishdagi teskari trigonometrik funksiyalar hamda ratsional kasrlar orqali ifodalanadi.

3.3. Kompleks sonlar haqida tushunchalar. Ratsional funksiyalarni integrallash bo‘yicha keyingi tasdiqlarni ifodalash uchun bizga kompleks son tushunchasi kerak bo‘ladi. $i^2=-1$ yoki $i=\sqrt{-1}$ tenglik bilan aniqlanadigan i belgi ***mavhum birlik*** deb ataladi. Mavhum birlik yordamida manfiy sondan ham kvadrat ildiz olish imkoniyati paydo bo‘ladi. Masalan,

$$\sqrt{-25}=\sqrt{25\cdot(-1)}=\sqrt{25\cdot i^2}=5i\,.$$

Mavhum birlik i va x, y haqiqiy sonlar orqali $z=x+yi$ kabi aniqlanadigan ifodalar ***kompleks sonlar*** deyiladi. Bunda y=0 desak, $z=x$ haqiqiy son hosil bo‘ladi, ya’ni kompleks sonlar to‘plami haqiqiy sonlarni o‘z ichiga oladi.

Ikkita $z_1=x_1+y_1i$, $z_2=x_2+y_2i$ kompleks sonlarning yig‘indisi, ayirmasi va ko‘paytmasi algebraik ikkihadlar yig‘indisi, ayirmasi va ko‘paytmasi kabi aniqlanadi:

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i\,,\quad z_1-z_2=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i\,,$$

$$z_1z_2=(x_1+y_1i)\cdot(x_2+y_2i)=x_1x_2+(x_1y_2+x_2y_1)i+y_1y_2i^2=$$

$$=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i\,.$$

Masalan, $z_1=3+4i$, $z_2=5–2i$ kompleks sonlar uchun

$$z_1+z_2=8+2i,\quad z_1-z_2=-2+6i,\qquad z_1z_2=23+14i.$$

Ikkita $x+yi$ va $x–yi$ ko‘rinishdagi kompleks sonlar ***qo‘shma kompleks sonlar*** deyiladi. Qo‘shma kompleks sonlar yig‘indisi $2x$ va ko‘paytmasi x^2+y^2 doimo haqiqiy son bo‘ladi.

Agar $x^2+px+q=0$ kvadrat tenglamaning diskriminanti $D=(p/2)^2–q<0$ bo‘lsa, unda bu tenglama ikkita $a\pm ib$ ko‘rinishdagi qo‘shma kompleks sonlardan iborat ildizlarga ega bo‘ladi .

Masalan, $x^2–8x+25=0$ kvadrat tenglamada diskriminanti

$$D=(-4)^2-25=-9 \text{ va } \sqrt{D}=\sqrt{-9}=\sqrt{9\cdot(-1)}=\sqrt{9i^2}=3i$$

bo‘lgani uchun, bu tenglamaning ildizlari $x_1=4–3i$ va $x_2=4+3i$ qo‘shma kompleks sonlardan iborat ekanligi kelib chiqadi.

3.4. Ratsional funksiyalarni integrallash. Endi umumiy holda $R(x)=Q_m(x)/P_n(x)$ to‘g‘ri ratsional kasrni integrallash masalasi ustida qisqacha to‘xtalib o‘tamiz. Bunda “Oliy algebra” fanida ko‘riladigan va isbotlanadigan bir qator teoremalarni isbotsiz keltiramiz. Ularning orasida ushbu teorema asosiy vazifani bajaradi:

1-TEOREMA: Har qanday (2) ko‘rinishdagi $R(x)$ to‘g‘ri ratsional kasrni

$$R(x)=\sum_{k=1}^{r}R_k(x) \tag{6}$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bunda $R_k(x)$ I–IV turdagi eng sodda ratsional kasrlar, ularning umumiy soni $r\leq n$ bo‘ladi.

Demak, har qanday to‘g‘ri ratsional kasrni eng sodda ratsional kasrlarning (4) chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida yozish mumkin. Kelgusida (6) tenglikni $R(x)$ ratsional kasrning yoyilmasi deb yuritamiz.

Masalan, ushbu ratsional kasrlar uchun

$$\frac{x^2+2x+6}{x^3-7x^2+14x-8}=\frac{3}{x-1}-\frac{7}{x-2}+\frac{5}{x-4}\,, \tag{7}$$

$$\frac{3x-2}{x^3+3x^2+4x+2}=\frac{-5}{x+1}+\frac{5x+8}{x^2+2x+2} \tag{8}$$

yoyilmalar o‘rinli ekanligini bevosita tekshirib ko‘rish mumkin.

1-teoremadan har qanday $R(x)=Q_m(x)/P_n(x)$ ratsional kasr, eng sodda ratsional kasrlarning yig‘indisi sifatida, elementar funksiyalarda integrallanuvchi va uning integrali logarifmik, arktangens hamda ratsional funksiyalar orqali ifodalanishi kelib chiqadi. Ammo bu integralni hisoblash uchun bizga ratsional kasrning (6) yoyilmasi kerak bo‘ladi. Shu sababli $R(x)=Q_m(x)/P_n(x)$ ratsional kasrning (6) yoyilmasini topish masalasini qaraymiz.

Dastlab (4) yoyilmada qatnashadigan eng sodda $R_k(x)$ kasrlarning turi va soni qanday aniqlanishini ko‘ramiz. Bu savolga javob maxrajining nollari, ya’ni

$$P_n(x)=0 \qquad (9)$$

algebraik tenglamaning ildizlari yordamida topiladi. Shu sababli (9) algebraik tenglamaning ildizlari to‘g‘risidagi ayrim ma’lumotlarni va ulardan kelib chiqadigan natijalarni qisqacha, isbotsiz keltiramiz.

Biror $x=a$ soni (9) tenglamani ayniyatga aylantirsa, ya’ni $P_n(a)\equiv 0$ bo‘lsa, u shu tenglamaning ***ildizi*** deyiladi. Masalan, $x=-1$ soni

$$P_3(x)=x^3+3x^2+4x+2=0 \qquad (10)$$

tenglamaning ildizi bo‘ladi, chunki $P_3(-1)=(-1)^3+3\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)+2\equiv 0$.

(9) tenglama uchun $x=a$ ildiz bo‘lib, $P_n'(a)\neq 0$ shart bajarilsa, unda $x=a$ bu tenglamaning ***oddiy ildizi*** deyiladi. Bu holda (9) tenglamani chap tomonidagi ko‘phadni $P_n(x)=(x-a)L_{n-1}(x)$ ko‘paytma ko‘rinishda ifodalab bo‘ladi. Bu tenglikda $L_{n-1}(x)$ ko‘paytuvchi biror $(n-1)$- darajali ko‘phad bo‘lib, u $L_{n-1}(a)\neq 0$ shartni qanoatlantiradi.

Masalan, $x=-1$ soni (10) tenglamaning oddiy ildizi bo‘ladi, chunki

$$P_3'(x)=(x^3+3x^2+4x+2)'=3x^2+6x+4\Rightarrow P_3'(-1)=1\neq 0\,.$$

Bunda haqiqatan ham yuqorida aytilgan tasdiq o‘rinli bo‘lib,

$$P_3(x)=x^3+3x^2+4x+2=(x+1)(x^2+2x+2)=(x+1)L_2(x) \qquad (11)$$

tenglik bajarilishini va $L_2(-1)=1\neq 0$ ekanligini tekshirib ko‘rish mumkin.

2-TEOREMA: Agar $x=a$ soni (9) tenglamaning, ya’ni $R(x)=Q_m(x)/P_n(x)$ ratsional kasr maxrajining oddiy ildizi bo‘lsa, unda $R(x)$ kasrning (6) yoyilmasida bitta $A/(x-a)$ ko‘rinishdagi I tur eng sodda ratsional kasrdan iborat qo‘shiluvchi qatnashadi.

Masalan, (8) ratsional kasrning maxraji uchun $x=-1$ oddiy ildizi bo‘lishini yuqorida ko‘rib o‘tdik va shu sababli ratsional kasrning (8) yoyilmasida bitta $-5/(x+1)$ qo‘shiluvchi qatnashmoqda.

Agar (9) tenglamaning $x=a$ ildizi uchun

$$P_n^{(k)}(a)=0\;(k=1,2,\cdots,s-1)\,,\quad P_n^{(s)}(a)\neq 0$$

shartlar bajarilsa, $x=a$ bu tenglamaning ***s karrali ildizi*** deyiladi. Bu holda (7) tenglamaning chap tomonini $P_n(x)=(x-a)^sL_{n-s}(x)$ $[L_{n-s}(a)\neq 0]$ ko‘rinishda ifodalab bo‘ladi.

Masalan, $P_3(x)=x^3-x^2-8x+12=0$ tenglama uchun $x=2$ ikki karrali ildiz bo‘ladi. Haqiqatan ham

$$P_3(2)=0\,,\; P_3'(x)\big|_{x=2}=(3x^2-2x-8)\big|_{x=2}=0\,,\; P_3''(x)\big|_{x=2}=(6x-2)\big|_{x=2}=10\neq 0$$

va

$$P_3(x)=x^3-x^2-8x+12=(x-2)^2(x+3) \qquad (12)$$

tenglik o‘rinli.

3-TEOREMA: Agar $x=a$ soni (9) tenglamaning, ya’ni $R(x)=Q_m(x)/P_n(x)$ ratsional kasr maxrajining s karrali ildizi bo‘lsa, unda $R(x)$ kasrning (6) yoyilmasida

$$\frac{A_k}{(x-a)^k}\,, \quad k=1,2,\cdots,s$$

ko‘rinishdagi bitta I tur va s–1 ta II tur eng sodda ratsional kasrlardan iborat qo‘shiluvchilar qatnashadi.

Masalan, (12) tenglikdan

$$R(x)=\frac{2x^2-2x+1}{x^3-x^2-8x+12}$$

ratsional kasrning maxraji uchun x=2 ikki karrali va x=–3 oddiy ildiz ekanligi kelib chiqadi va bunda

$$R(x)=\frac{2x^2-2x+1}{x^3-x^2-8x+12}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{x+3}$$

yoyilma o‘rinli bo‘lishini tekshirib ko‘rish mumkin.

Agar biror $x_1=a+bi$ kompleks son (9) algebraik tenglamaning ildizi bo‘lsa, unda $x_2=a-bi$ qo‘shma kompleks son ham bu tenglamaning ildizi bo‘lishini isbotlash mumkin. Demak, $P_n(x)=0$ tenglama kompleks ildizlarga ega bo‘lsa, bu ildizlar albatta qo‘shma kompleks sonlar juftliklaridan iborat bo‘ladi.

Agar $x_{1,2}=a\pm bi$ qo‘shma kompleks sonlar $P_n(x)=0$ tenglamaning oddiy ildizi bo‘lsa, unda

$$P_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)L_{n-2}(x)=(x^2+px+q)L_{n-2}(x) \quad [L_{n-2}(x_{1,2})\neq 0,\ p=-2a,\ q=a^2+b^2]$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Masalan,

$$P_4(x)=2x^4-17x^3+77x^2-107x-75$$

ko‘phad uchun $x_{1,2}=3\pm 4i$ oddiy kompleks ildiz bo‘ladi. Bu holda

$$(x-x_1)(x-x_2)=x^2-6x+25 \Rightarrow P_4(x)=(x^2-6x+25)(2x^2-5x-3) \quad (13)$$

ekanligini ko‘rsatish mumkin.

4-TEOREMA: Agar $R(x)=Q_m(x)/P_n(x)$ ratsional kasrning maxraji $x_{1,2}=a\pm bi$ qo‘shma kompleks sonlar juftligidan iborat oddiy ildizga ega bo‘lsa, unda $R(x)$ kasrning (4) yoyilmasida bitta

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q} \quad (p=-2a\,, \quad q=a^2+b^2)$$

ko‘rinishdagi III tur eng sodda ratsional kasr qatnashadi.

Masalan, (13) tenglikka asosan,

$$\frac{2x^3-x^2+5x+1}{(x^2-6x+25)(2x^2-5x-3)}=\frac{2x^3-x^2+5x+1}{(x^2-6x+25)(2x+1)(x-3)}=$$

$$=\frac{Ax+B}{x^2-6x+25}+\frac{C}{2x+1}+\frac{D}{x-3}$$

ko‘rinishdagi yoyilma o‘rinli bo‘ladi.

5-TEOREMA: Agar $R(x)=Q_m(x)/P_n(x)$ ratsional kasrning maxraji uchun $x_{1,2}=a\pm bi$ qo‘shma kompleks sonlar s karrali ildizi bo‘lsa, unda

$$P_n(x)=(x^2+px+q)^s L_{n-2s}(x) \quad [L_{n-2s}(x_{1,2})\neq 0,\ p=-2a,\ q=a^2-b^2]$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi va $R(x)$ ratsional kasrning chiziqli yoyilmasida

$$\frac{A_k x + B_k}{(x^2 + px + q)^k}, \quad k = 1,2,\cdots,s$$

ko‘rinishdagi bitta III tur va s–1 ta IV tur eng sodda ratsional kasrlar qatnashadi.

Masalan, $P_4(x)=(x^2+9)^3(x-5)=0$ tenglama uchun $x=\pm 3i$ uch karrali kompleks ildiz, $x=5$ esa oddiy haqiqiy ildiz bo‘lgani uchun ushbu ratsional kasr quyidagi ko‘rinishdagi yoyilmaga ega bo‘ladi:

$$\frac{4x^3 - 3x^2 + x - 6}{(x^2+9)^3(x-5)} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2+9} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2+9)^2} + \frac{A_3}{x-5}.$$

Demak, yuqoridagi 2–5- teoremalardan

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$$

to‘g‘ri ratsional kasrning (6) yoyilmasidagi eng sodda ratsional kasrlarning turlari va sonlari aniqlanadi. Ammo (6) yoyilmani to‘liq aniqlash uchun unga kiruvchi eng sodda ratsional kasrlarning suratlaridagi A_k , B_k koeffitsiyentlarni ham aniqlash kerak bo‘ladi. Bu masala ***noma'lum koeffitsiyentlar usuli*** deb ataluvchi usulda hal qilinishi mumkin. Bu usulning mohiyatini quyida misol orqali tushuntiramiz.

Shunday qilib, ratsional kasrning $\int R(x)dx$ integralini hisoblash uch bosqichda amalga oshiriladi.

I. Dastlab $R(x)$ kasr maxrajning nollari orqali uning (6) yoyilmasidagi eng sodda ratsional kasrlarning turlari va sonlari 2-5 teoremalar yordamida aniqlanadi.

II. Yoyilmadagi eng sodda ratsional kasrlarning suratlaridagi A_k va B_k qiymatlari noma'lum koeffitsiyentlar usulida topiladi.

III. $R(x)$ kasrning eng sodda ratsional kasrlardagi (6) chiziqli yoyilmasi to‘liq topilgach, $\int R(x)dx$ integral bu yoyilma bo‘yicha integralning chiziqlilik xossalari (§1, (3) formula) va eng sodda ratsional kasrlarning integrallaridan foydalanilib hisoblanadi.

Yuqorida aytilganlarni

$$I = \int \frac{x+1}{x^5 - x^2} dx$$

integralni hisoblashga tatbiq etamiz.

I. Dastlab maxrajning nollarini aniqlaymiz:

$$x^5 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x^2(x-1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Bu yerdan ko‘rinadiki, maxraj uchun $x_1=0$ ikki karrali, $x_2=1$ oddiy haqiqiy ildizlar bo‘ladi. Bundan tashqari uchinchi ko‘paytuvchidan maxrajning bir juft oddiy qo‘shma kompleks ildizi ham mavjudligini ko‘ramiz. Shu sababli integral ostidagi ratsional kasr quyidagi ko‘rinishda eng sodda ratsional kasrlarga yoyiladi:

$$\frac{x+1}{x^5 - x^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x-1} + \frac{A_4 x + B}{x^2 + x + 1}.$$

II. Bu yoyilmadagi A_1, A_2, A_3, A_4 va B sonlarni noma'lum koeffitsiyentlar usulida topamiz. Buning uchun yoyilmaning o‘ng tomonidagi kasrlarni umumiy maxrajga keltiramiz. So‘ngra hosil bo‘lgan kasrning suratini yoyilmaning chap tomonidagi kasrning suratiga tenglashtiramiz. Natijada quyidagi tenglikka kelamiz:

$$A_1 x(x-1)(x^2 + x + 1) + A_2(x-1)(x^2 + x + 1) +$$
$$+ A_3 x^2(x^2 + x + 1) + (A_4 x + B)x^2(x-1) = x + 1.$$

Bu tenglikdagi qo‘shiluvchilarni x darajalari bo‘yicha guruhlaymiz:

$$(A_1 + A_3 + A_4)x^4 + (A_2 + A_3 - A_4 + B)x^3 + (A_3 - B)x^2 - A_1 x - A_2 = x + 1.$$

Bu tenglik x o‘zgaruvchining barcha qiymatlarida o‘rinli, ya'ni ayniyat bo‘lishi kerak. Bu esa x o‘zgaruvchining mos darajalari oldidagi koeffitsiyentlarni teng bo‘lishini taqozo etadi. Bundan A_1, A_2, A_3, A_4 va B noma'lumlar uchun quyidagi 5 noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} A_1 + A_3 + A_4 = 0 \\ A_2 + A_3 - A_4 + B = 0 \\ A_3 - B = 0 \\ -A_1 = 1 \\ -A_2 = 1 \end{cases}$$

Bu sistemani yechib,

$A_1=-1$, $A_2=-1$, $A_3=2/3$, $A_4=1/3$, B=2/3

ekanligini topamiz. Demak, integral ostidagi ratsional kasr

$$\frac{x+1}{x^5-x^2} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3(x-1)} + \frac{x+2}{3(x^2+x+1)}$$

ko‘rinishda eng sodda ratsional kasrlar orqali ifodalanadi. Shu bilan ratsional kasrli integralni hisoblashning I –II bosqichlari yakunlandi. Endi III bosqichga, ya’ni bevosita integralni hisoblashga o‘tamiz.

III. $$I = \int \frac{x+1}{x^5-x^2}dx = \int \left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3(x-1)} + \frac{x+2}{3(x^2+x+1)} \right] dx =$$

$$= -\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{2}{3(x-1)}dx + \int \frac{x+2}{3(x^2+x+1)}dx =$$

$$= -\ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{3}J \, .$$

Yakuniy natijaga erishish uchun *J* integralni hisoblash qoldi. Bu III tur eng sodda ratsional kasrdan olingan integral bo‘lib, uni yuqorida ko‘rsatilgan usulda hisoblaymiz:

$$J = \int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1+1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x+1/2)}{(x+1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \, .$$

Bu natijani izlanayotgan *I* integral uchun hosil qilingan oldingi tenglikka qo‘yib, ushbu oxirgi natijani olamiz:

$$\int \frac{x+1}{x^5-x^2}dx = -\ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\frac{(x-1)^2\sqrt{x^2+x+1}}{|x|^3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \, .$$

Kelgusida bir qator funksiyalarni integrallash ratsional kasrlarni integrallash masalasiga olib kelishini ko‘ramiz.

XULOSA

Har qanday aniqmas integral elementar funksiyalar orqali ifodalanishi shart emas ekanligi oldin ta'kidlab o'tilgan edi. Shu sababli elementar funksiyalarda ifodalanadigan integrallar sinfini topish masalasi paydo bo'ladi. Bu masalaning xususiy bir javobi sifatida ratsional funksiyalardan olingan integrallarni ko'rsatish mumkin. Bunda dastlab I-IV turdagi eng sodda ratsional funksiyalarni integrallash usuli ko'rsatiladi. So'ngra, ixtiyoriy ratsional funksiyani ularning algebraik yig'indisi kabi yozish mumkinligidan foydalanib, umumiy holda ratsional funksiyadan olingan integrallarni hisoblash amalga oshiriladi. Bu integrallar logarifmik, arctg($ax+b$) ko'rinishdagi teskari trigonometrik funksiyalar hamda ratsional kasrlar, ya'ni elementar funksiyalar orqali ifodalanadi.

Tayanch iboralar

* Ko'phad * Ratsional kasr (funksiya) * Noto'g'ri ratsional kasr * To'g'ri ratsional kasr * I tur eng sodda ratsional kasr * II tur eng sodda ratsional kasr * III tur eng sodda ratsional kasr * IV tur eng sodda ratsional kasr * Mavhum birlik * Kompleks son * Qo'shma kompleks sonlar * Ratsional kasr yoyilmasi * Noma'lum koeffitsiyentlar usuli

Takrorlash uchun savollar

1. Qanday ko'rinishdagi funksiyalar ko'phadlar deb ataladi?
2. Ko'phad darajasi qanday aniqlanadi?
3. Ratsional kasr deb nimaga aytiladi?
4. Qachon ratsional kasr noto'g'ri kasr deyiladi?
5. Qaysi shartda ratsional kasr to'g'ri kasr bo'ladi?
6. Noto'g'ri ratsional kasrni qanday ko'rinishda yozish mumkin?
7. I tur eng sodda ratsional kasr qanday ko'rinishda bo'ladi?
8. II tur eng sodda ratsional kasr qanday aniqlanadi?
9. III tur eng sodda ratsional kasr qanday ko'rinishda bo'ladi?
10. IV tur eng sodda ratsional kasr deb nimaga aytiladi?
11. I tur eng sodda ratsional kasrning integrali qanday funksiyadan iborat?
12. II tur eng sodda ratsional kasrning integrali qanday ifodalanadi?
13. III tur eng sodda ratsional kasrning integrali qanday hisoblanadi?
15. IV tur eng sodda ratsional kasr qanday integrallamadi?
16. Eng sodda ratsional kasrlarning integrallari qanday funksiyalar orqali ifodalanadi?
17. Har qanday ratsional kasrni qanday ko'rinishda yozish mumkin?
18. Ratsional kasrning eng sodda ratsional kasrlar orqali yoyilmasining ko'rinishi nimaga asosan aniqlanadi?
19. Ratsional kasrning eng sodda ratsional kasrlar orqali yoyilmasidagi koeffitsiyentlar qanday topiladi?
20. Noma'lum koeffitsiyentlar usulining mohiyati nimadan iborat?
21. Ratsional kasrning integralini hisoblash qanday bosqichlardan iborat?

Testlardan namunalar

1. Quyidagi funksiyalardan qaysi biri ko'phadni ifodalaydi?

A) $\sum_{k=0}^{n} a_k \sin kx$; B) $\sum_{k=0}^{n} a_k \sin^k x$; C) $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$; D) $\sum_{k=0}^{n} a_k x^{-k}$; E) $\sum_{k=0}^{n} a_k x_k$.

2. $P(x)=(x^2+2x-10)^2(3x+5)$ ko‘phadning darajasini aniqlang.
A) 1 ; B) 2 ; C) 3 ; D) 4 ; E) 5 .

3. Agar $P_n(x)$ va $Q_m(x)$ ko‘phadlar bo‘lsa, unda quyidagi funksiyalardan qaysi biri ratsional kasr deyiladi?
A) $P_n(x)+Q_m(x)$; B) $P_n(x)-Q_m(x)$; C) $P_n(x)/Q_m(x)$;
D) $P_n(x)\cdot Q_m(x)$; E) $P_n[Q_m(x)]$.

4. Qaysi shartda $R(x)=P_n(x)/Q_m(x)$ to‘g‘ri ratsional kasr deyiladi?
A) $m \geq n$; B) $m \leq n$; C) $m>n$; D) $m<n$; E) $m \neq n$.

5. Qaysi shartda $R(x)=P_n(x)/Q_m(x)$ noto‘g‘ri ratsional kasr deyiladi?
A) $m \geq n$; B) $m \leq n$; C) $m>n$; D) $m \neq n$;
E) to‘g‘ri javob keltirilmagan .

6. Quyidagilardan qaysi biri to‘g‘ri ratsional kasr bo‘ladi?
A) $\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$; B) $\dfrac{(x+1)^3}{x^2+x+1}$; C) $\dfrac{x^2+x+1}{x^3+1}$;
D) $\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^2}$; E) $\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$.

7. I tur eng sodda ratsional kasrni ko‘rsating.
A) $\dfrac{Ax+B}{x-a}$; B) $\dfrac{Ax+B}{(x-a)^k}$; C) $\dfrac{A}{(x-a)^k}, k \geq 2$; D) $\dfrac{A}{x-a}$; E) $\dfrac{x+b}{x-a}$.

8. II tur eng sodda ratsional kasrni ko‘rsating.
A) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$; B) $\dfrac{Ax+B}{(x-a)^k}$; C) $\dfrac{A}{x-a}$;
D) $\dfrac{A}{x^2+px+q}$; E) $\dfrac{A}{(x-a)^k}, k \geq 2$.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Quyidagi ratsional kasrlarni eng sodda ratsional kasrlarga yoyilmasini toping:

a) $\dfrac{nx^2+(n+2)x-1}{(x^2+4x+3)(x+5)}$; *b)* $\dfrac{nx^2+x+n-1}{(x^2-2x+5)(x-1)}$; *c)* $\dfrac{nx+3}{(x-1)^2(x^2+4)^2}$.

2. Quyidagi ratsional kasrli integrallarni hisoblang:

a) $\int \dfrac{nx^2+(n-3)x+5}{(x^2+3x+2)(x-4)}dx$; *b)* $\int \dfrac{nx^2+x+n+3}{(x^2-8x+25)(x+2)}dx$;

$$c)\ \int \frac{nx-2}{(x+3)^2(x^2+9)^2}dx\ ; \qquad d)\ \int \frac{x^2+nx-1}{x^3-3x^2+4x-2}dx\,.$$

§4. AYRIM IRRATSIONAL VA TRIGONOMETRIK IFODALI INTEGRALLAR

- ***Irratsional funksiyalarni integrallash.***
- ***Eyler almashtirmalari.***
- ***Trigonometrik ifodali integrallar.***

Oldingi paragrafda har qanday $R(x)$ ratsional kasr elementar funksiyalarda integrallanuvchi ekanligini va bu integralni hisoblash usullarini ko'rib o'tdik. Shu sababli berilgan biror funksiyaning aniqmas integrali u yoki bu yo'l bilan biror ratsional kasrdan olingan integralga keltirilsa, unda bu integral hisoblandi deb olish mumkin. Bu paragrafda mana shunday funksiyalarning ayrim sinflari bilan tanishamiz.

4.1. Irratsional funksiyalarni integrallash. Agar $y=f(x)$ funksiya x argumentning kasr darajalari ishtirok etgan algebraik ifodadan iborat bo'lsa, uni ***irratsional funksiya*** deb ataymiz. Masalan,

$$y=\sqrt[3]{x^6+x^3+1}\,,\quad y=2x-5\sqrt{x}+\sqrt[6]{x^5}=2x-5x^{1/2}+x^{5/6}\,,\quad y=\frac{1+\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}+x}$$

kabilar irratsional funksiyalar bo'ladi.

Biz bu yerda ayrim irratsional funksiyalarni integrallash masalasi bilan shug'ullanamiz. Oldin shuni ta'kidlab o'tamizki, har qanday irratsional funksiyadan olingan aniqmas integral elementar funksiyalarda ifodalanmaydi.

Masalan, ushbu

$$I_1=\int\sqrt{1+x^2}\,dx\,,\quad I_2=\int\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$$

irratsional ifodali integrallardan I_1 elementar funksiyalar orqali ifodalanadi, ammo I_2 uchun bunday deb bo'lmaydi.

❖ Dastlab ***binomial integral*** deb ataladigan va

$$I(r,s,p)=\int x^r(a+bx^s)^p\,dx$$

ko'rinishda bo'lgan integrallarni qaraymiz. Bunda r, s, p – ratsional va a, b – haqiqiy sonlarni ifodalaydi. Agar r, s, p sonlarning uchalasi ham butun son bo'lsa, unda integral ostida ratsional funksiya hosil bo'ladi va bu holda binomial integral elementar funksiyalarda ifodalanadi. Agar r, s, p sonlardan kamida bittasi butun bo'lmasa, unda binomial integral ostida irratsional funksiya hosil bo'ladi. Bunda binomial integral faqat quyidagi uch holda elementar funksiyalarda ifodalanishi mumkinligi buyuk rus matematigi P.L.Chebishev(1821-1894 y.) tomonidan isbotlangan:

1) p–butun son. Bu holda $t=\sqrt[m]{x}\,,\ x=t^m$ almashtirma (m – integral ostidagi r va s sonlarning umumiy maxraji) bajaramiz. Agar $r=k/m$, $s=q/m$ deb olsak, unda

$$x^r=t^k\,,\ x^s=t^q\,,\ dx=dt^m=mt^{m-1}dt$$

bo'ladi va binomial integral

$$I(r,s,p)=m\int t^{k+m-1}(a+bt^q)^p\,dt$$

ko'rinishni olib, ratsional funksiyadan olingan integralga keladi.

Misol sifatida

$$I=\int\frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^2}$$

integralni hisoblaymiz. Bu parametrlari $r=-1$, $s=1/3$ va $p=-2$ bo'lgan binomial

integral bo'lib, uni yuqorida ko'rsatilganga asosan $t=\sqrt[3]{x}\,,\ x=t^3$ almashtirma yordamida hisob, ushbu natijaga ega bo'lamiz:

$$I=\int\frac{3t^2dt}{t^3(1+t)^2}=3\int\frac{dt}{t(1+t)^2}=3[\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{t+1}-\int\frac{dt}{(t+1)^2}]=$$

$$=3\left[\ln|t|-\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}\right]+C=3\left[\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right|+\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\right]+C .$$

2) $n=(r+1)/s$ – butun son . Bu holda $p=k/m$ bo'lsa, unda $a+bx^s=t^m$ almashtirmadan foydalaniladi. Bunda

$$(a+bx^s)^p=t^k,\quad x^r=\left(\frac{t^m-a}{b}\right)^{\frac{r}{s}},\quad dx=\frac{m}{bs}\left(\frac{t^m-a}{b}\right)^{\frac{1}{s}-1}t^{m-1}dt$$

bo'lib, binomial integral quyidagi ratsional kasrli integralga keladi:

$$I(r,s,p)=\frac{m}{b^n s}\int(t^m-a)^{n-1}t^{k+m-1}dt .$$

3) $n=p+(r+1)/s$ – butun son. Bu holda $p=k/m$ bo'lsa, unda $ax^{-s}+b=t^m$ almashtirma qo'llaniladi. Bunda

$$x=\left(\frac{a}{t^m-b}\right)^{\frac{1}{s}},\quad (a+bx^s)^p=x^{ps}(ax^{-s}+b)^p=\left(\frac{a}{t^m-b}\right)^p t^k,$$

$$x^r=\left(\frac{a}{t^m-b}\right)^{\frac{r}{s}},\quad dx=-\frac{ma}{s}\left(\frac{a}{t^m-b}\right)^{\frac{1}{s}-1}\frac{t^{m-1}}{(t^m-b)^2}dt$$

bo'ladi va binomial integral quyidagi ratsional kasrli integralga keladi:

$$I(r,s,p)=-\frac{ma^n}{s}\int\frac{t^{k+m-1}}{(t^m-b)^{n-1}}dt .$$

❖ $I=\int R(x,x^{\frac{m}{n}},\ldots,x^{\frac{r}{s}})dx$ ko'rinishdagi integrallarni qaraymiz. Bunda R orqali unga kiruvchi x, $x^{m/n}$,..., $x^{r/s}$ o'zgaruvchilarga nisbatan faqat ratsional amallar bajarilishi ifodalangan va m, n, ..., r, s –natural sonlardir. Bu integralni hisoblash uchun unda qatnashuvchi kasr daraja ko'rsatkichlarining k umumiy maxrajini topamiz va $x=t^k$, $dx=kt^{k-1}dt$ almashtirma bajaramiz. Bu holda x, $x^{m/n}$,..., $x^{r/s}$ kasr ko'rsatkichli darajalar yangi t o'zgaruvchining butun darajalari orqali ifodalanadi va natijada $I=\int R_1(t)dt$ ratsional kasrli integralni hosil etamiz. Bu integralni hisoblab va olingan natijada $t=x^{1/n}$ deb, berilgan aniqmas integralni topamiz.

Misol sifatida

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\frac{dx}{x^{1/2}+x^{1/3}}$$

irratsional ifodali integralni hisoblaymiz.

Integral ostidagi x o'zgaruvchining daraja ko'rsatkichlari 1/2 va 1/3 kasrlardan iborat bo'lib, ularning umumiy maxraji 6 bo'lgani uchun $x=t^6$, $dx=6t^5dt$ almashtirma bajaramiz. Natijada berilgan integralni quyidagicha hisoblaymiz:

$$I=\int\frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3dt}{t+1}=6\int\frac{(t^3+1-1)dt}{t+1}=6\int(t^2-t+1-\frac{1}{t+1})dt=$$

$$=6[\int(t^2-t+1)dt-\int\frac{d(t+1)}{t+1}]=6[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|]+C=(t=\sqrt[6]{x})=$$

$$=6[\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}-\ln|1+\sqrt[6]{x}|]+C=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|1+\sqrt[6]{x}|+C .$$

❖ $I=\int R\left[x,(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{m}{n}},...,(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{r}{s}}\right]dx$ ko‘rinishdagi integralni qaraymiz

By yerda R, m, n, s, r uchun oldingi integralda qo‘yilgan shartlar saqlanadi. Kasrdagi a,b,c va d haqiqiy sonlar uchun $a/b\neq c/d$ shartni qo‘yamiz, chunki bu shart bajarilmasa

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{b}{d}\cdot\frac{\frac{a}{b}x+1}{\frac{c}{d}x+d}=\frac{b}{d}$$

bo‘ladi va integraldagi irratsionallik yo‘qoladi.

Agar $m/n, \ldots, r/s$ kasrlarning umumiy maxraji k bo‘lsa, bu integralni hisoblash uchun

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^{\kappa}\ ,\quad t=\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

almashtirma bajaramiz. Bu holda

$$x=\frac{b-dt^m}{ct^m-a},\quad dx=\frac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(ct^m-a)^2}dt,$$

ya’ni x va dx yangi t o‘zgaruvchi orqali ratsional ifodalanadi. Shu sababli yuqoridagi almashtirma natijasida berilgan integral uchun $I=\int R_1(t)dt$ ratsional funksiyaning integraliga ega bo‘lamiz. Bu integralni hisoblab va hosil bo‘lgan natijada t o‘rniga uning yuqoridagi ifodasini qo‘yib, berilgan I integral javobini topamiz.

Misol sifatida ushbu integralni hisoblaymiz:

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}\ .$$

Bu yerda $a=-2$, $b=1$, $c=0$, $d=1$ va 1/2, 1/4 kasrlarning umumiy maxraji 4 ekanligini nazarga olib,

$$1-2x=t^4\ ,\ x=(1-t^4)/2\ ,\ dx=-2t^3dt,\ t=\sqrt[4]{1-2x}$$

almashtirma bajaramiz. Natijada berilgan integral quyidagi ko‘rinishga keltiriladi va hisoblanadi:

$$I=\int\frac{-2t^3dt}{t^2-t}=-2\int\frac{t^2dt}{t-1}=-2\int\frac{t^2-1+1}{t-1}dt=-2[\int(t+1)dt+\int\frac{d(t-1)}{t-1}]=$$

$$=-2[\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|+C=-t^2-2t-2\ln|t-1|+C=$$

$$=-\sqrt{1-2x}-2\sqrt[4]{1-2x}-2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x}-1\right|+C\ .$$

4.2. Eyler almashtirmalari. Shu bobning boshida (§2, 2.5. ga qarang) kvadrat uchhad qatnashgan integrallarni ayrim xususiy hollarda hisoblash masalasini ko‘rib o‘tgan edik. Endi bu masalani nisbatan umumiyroq bo‘lgan

$$IE=\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\ )dx\ (a\neq 0)$$

ko'rinishdagi integrallar uchun qaraymiz. Bunday irratsional ifodali integrallar shveysariyalik buyuk matematik L. Eyler (1707-1783 y.) tomonidan taklif etilgan almashtirmalar yordamida ratsional kasrli integralga keltiriladi va hisoblanadi. Bu yerda uch hol qaraladi.

I hol. Bunda ko'rilayotgan *IE* integralda $a>0$ deb olinadi. Bu holda integralda x o'zgaruvchidan yangi t o'zgaruvchiga ***Eylerning I alshmashtirmasi*** deb ataladigan va

$$t = x\sqrt{a} - \sqrt{ax^2 + bx + c} \Rightarrow \sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} - t$$

ko'rinishda bo'lgan almashtirma orqali o'tiladi. Bu holda IE integraldagi x, $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ va dx yangi t o'zgaruvchi orqali ratsional kasr ko'rinishida ifodalanadi. Demak, qaralayotgan *IE* integral ratsional kasrli integralga keltirilib, ko'zlangan maqsadga erishildi.

Misol sifatida ushbu integralni hisoblaymiz :

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4x - 4}}.$$

Bu yerda $a=1>0$ bo'lgani uchun $\sqrt{x^2 + 4x - 4} = x - t$ almashtirish bajaramiz. Bu holda

$$x^2 + 4x - 4 = x^2 - 2xt + t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2 + 4}{2(t+2)} \Rightarrow dx = \frac{t^2 + 4t - 4}{2(t+2)^2} dt,$$

$$\sqrt{x^2 + 4x - 4} = x - t = \frac{t^2 + 4}{2(t+2)} - t = \frac{4 - 4t - t^2}{2(t+2)}.$$

Bu tengliklarni berilgan integralga qo'yib, quyidagi natijalarga kelamiz:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4x - 4}} = \int \frac{\frac{t^2 + 4t - 4}{2(t+2)^2} dt}{\frac{t^2 + 4}{2(t+2)} \cdot \frac{4 - 4t - t^2}{2(t+2)}} = -2\int \frac{dt}{t^2 + 4} =$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 4} - x}{2} + C.$$

II hol. Endi $c>0$ bo'lsin. Bu holda *IE* integralni hisoblash uchun ushbu ***Eylerning II almashtirmasidan*** foydalanamiz:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}.$$

Bu almashtirma natijasida ratsional kasrli integralga kelamiz. Misol sifatida ushbu integralni hisoblaymiz:

$$I = \int \frac{(1 - \sqrt{1 + x + x^2})^2}{x^2\sqrt{1 + x + x^2}} dx.$$

Eylerning II almashtirmasiga ko'ra quyidagilarni olamiz:

$$\sqrt{1 + x + x^2} = xt + 1 \Rightarrow 1 + x + x^2 = x^2t^2 + 2xt + 1 \Rightarrow x = \frac{2t - 1}{1 - t^2} \Rightarrow$$

$$dx=\frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}dt\,,\quad \sqrt{1+x+x^2}=xt+1=\frac{t^2-t+1}{1-t^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-\sqrt{1+x+x^2}=\frac{-2t^2+t}{1-t^2}\quad .$$

Hosil qilingan bu ifodalarni berilgan integralga qo‘yamiz:

$$\int\frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx=\int\frac{(-2t^2+t)^2(1-t^2)^2(1-t^2)(2t^2-2t+2)}{(1-t^2)^2(2t-1)^2(t^2-1)^2(t^2-t+1)}dt=$$

$$=2\int\frac{t^2}{1-t^2}dt=2\int(-1+\frac{1}{1-t^2})dt=-2t+\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$

$$=-\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x}+\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}-1}{x-\sqrt{1+x+x^2}+1}\right|+C\,.$$

III hol. Qaralayotgan *IE* integral ostidagi ax^2+bx+c kvadrat uchhad α va β haqiqiy ildizlarga ega, ya’ni diskriminant $D=b^2–4ac>0$ bo‘lsin. Bu holda

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t$$

ko‘rinishdagi ***Eylerning III almashtirmasidan*** foydalanib, integral ostidagi ifodani ratsional kasr ko‘rinishiga keltiramiz.

Misol sifatida $\int\frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$ integralni hisoblaymiz.

Bu yerda $2+x–x^2$ kvadrat uchhad $\alpha=–1$ va $\beta=2$ haqiqiy ildizlarga ega va uni $2+x–x^2=(x+1)(2–x)$ ko‘rinishda yozish mumkin. Shu sababli Eylerning III almashtirmasidan foydalanamiz va undan quyidagi tengliklarga ega bo‘lamiz:

$$\sqrt{2+x-x^2}=t(x+1)\Rightarrow\sqrt{(x+1)(2-x)}=t(x+1)\Rightarrow\sqrt{2-x}=t\sqrt{x+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2-x=t^2(x+1)\Rightarrow x=\frac{2-t^2}{t^2+1}\Rightarrow dx=(\frac{2-t^2}{t^2+1})'dt=-\frac{6tdt}{(t^2+1)^2}\quad .$$

Bundan tashqari

$$\sqrt{2+x-x^2}=t(\frac{2-t^2}{t^2+1}+1)=\frac{3t}{t^2+1}$$

ekanligidan ham foydalanib, yuqoridagi integralni quyidagicha hisoblaymiz:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}=-6\int\frac{tdt}{\frac{2-t^2}{t^2+1}\cdot\frac{3t}{t^2+1}(t^2+1)^2}=-2\int\frac{dt}{2-t^2}=$$

$$=-2\int\frac{dt}{2-t^2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\right|+C=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{(t+\sqrt{2})^2}{2-t^2}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{(t+\sqrt{2})^2}{2-t^2}\right|+C=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t^2+2+2t\sqrt{2}}{2-t^2}\right|+C\,.$$

Logarifm ostidagi kasrni x orqali ifodalaymiz va soddalashtirib,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{2\sqrt{2}\sqrt{2+x-x^2} + x + 4}{3x} \right| + C$$

natijani olamiz.

4.3. Trigonometrik ifodali integrallar. Bu yerda biz trigonometrik funksiyalar qatnashgan

$$IT = \int R(\sin x, \cos x)dx$$

ko‘rinishdagi integrallarni qaraymiz. Bunda $R(\sin x,\cos x)$ ifoda $\sin x$ va $\cos x$ ustida faqat arifmetik amallar bajarilgan ifodani belgilaydi. Bu integral $tg\frac{x}{2} = t$ almashtirma yordami bilan hamma vaqt ratsional kasrning integraliga keltirilishi mumkinligini ko‘rsatamiz. Haqiqatan ham

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

va

$$\frac{x}{2} = \mathrm{arctg}\, t \Rightarrow x = 2\mathrm{arctg}\, t, \quad dx = 2d\mathrm{arctg}\, t = \frac{2dt}{1+t^2}$$

ekanligidan $\sin x$, $\cos x$, x, dx kiritilgan t orqali ratsional ifodalanadi. Shu sababli $t=\mathrm{tg}(x/2)$ ***universal almashtirma*** deb ataladi.Demak , universal almashtirma orqali IT integral ratsional kasrli integralga keltiriladi:

$$IT = \int R(\sin, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt \ .$$

Misol sifatida ushbu

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$$

trigonometrik ifodali integralni hisoblaymiz. Buning uchun $t=\mathrm{tg}(x/2)$ universal almashtirmadan foydalanib, bu integralni quyidagi ko‘rinishga keltirib hisoblaymiz:

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5}dt = 2\int \frac{dt}{2t^2+8t+8} =$$

$$= \int \frac{d(2+t)}{(2+t)^2} = -\frac{1}{2+t} + C = -\frac{1}{2+\mathrm{tg}\frac{x}{2}} + C \ .$$

Endi ayrim xususiy hollarni qaraymiz. Bu hollarda trigonometrik ifodali aniqmas integral universal almashtirmadan farqli boshqa almashtirma orqali osonroq hisoblanishi mumkin.

➢ $\int R(\sin x)\cos x dx$ ko‘rinishdagi integralni hisoblash uchun $t=\sin x$ almashtirmadan foydalanish mumkin. Bunda $dt=\cos x dx$ bo‘ladi va

$$\int R(\sin x)\cos x dx = \int R(t)dt$$

ratsional kasrli integralga kelinadi. Masalan,

$$\int (1+8\sin^3 x)\cos dx = \int (1+8t^3)dt = t + 2t^4 + C = \sin x + 4\sin^4 x + C$$

➢ Agar trigonometrik ifodali aniqmas integral

$$\int R(\cos x)\sin x dx$$

ko‘rinishda bo‘lsa, unda $t=\cos x$ almashtirma maqsadga muvofiqdir. Chunki bu holda $dt= -\sin x dx$ bo‘lib, berilgan integral to‘g‘ridan-to‘g‘ri ratsional kasrli integralga keladi:

$$\int R(\cos x)\sin x dx = -\int R(t)dt .$$

Masalan,

$$\int \frac{\cos^3 x \sin x dx}{1+\cos^4 x} = -\int \frac{t^3 dt}{1+t^4} = -\frac{1}{4}\int \frac{d(1+t^4)}{1+t^4}dt = -\frac{1}{4}\ln(1+t^4) + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln(1+\cos^4 x) + C = \ln\frac{1}{\sqrt[4]{1+\cos^4 x}} + C \ .$$

➢ $\int R(\mathrm{tg} x)dx$ ko‘rinishdagi trigonometrik ifodali aniqmas integrallar

$$t=\mathrm{tg} x \ , \ x=\mathrm{arctg} x, \ dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

almashtirma yordamida darhol ratsional funksiyaning integraliga keltiriladi:

$$\int R(tgx)dx = \int R(t)\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt .$$

Masalan,

$$\int (tg^3 x + tgx - 3)dx = \int \frac{t^3+t-3}{1+t^2}dt = \int \frac{t(t^2+1)-3}{1+t^2}dt = \int (t + \frac{t}{1+t^2} - \frac{3}{1+t^2})dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+t^2) - 3\mathrm{arctg} t + C = \frac{tg^2 x}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+tg^2 x) - 3x + C .$$

➢ $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$ ko‘rinishdagi, ya’ni integral ostidagi ifodada $\sin x$ va $\cos x$ funksiyalar faqat juft darajalarda qatnashgan integrallarni qaraymiz. Bu holda $\mathrm{tg} x=t$ almashtirmadan foydalanish mumkin. Bunda,

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2} \ , \ dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

bo‘lgani uchun, qaralayotgan integral ostidagi ifoda ratsional kasrga quyidagicha almashinadi:

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx = \int R(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2})\frac{dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt\ .$$

Masalan,

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = = \int \frac{dt}{\left(1+\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)\left(1+t^2\right)} = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(1/\sqrt{2})^2 + t^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\mathrm{arctg}\sqrt{2}t + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\sqrt{2}\mathrm{tg}x + C$$

Bu paragrafni quyidagi integrallarni ko‘rish bilan yakunlaymiz:

$$\int \sin mx \cos nx dx,\quad \int \sin mx \sin nx dx,\quad \int \cos mx \cos nx dx \quad (m \neq n).$$

Bu integrallar quyidagi trigonometrik formulalar orqali yoyish usulida ikkita oson hisoblanadigan integrallarga keltiriladi:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]\ ,$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]\ .$$

Masalan,

$$\int \sin mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(m+n)x}{m+n} + \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right] + C\ .$$

Misol sifatida ushbu integralni hisoblaymiz:

$$\int \cos 6x \cos 4x dx = \frac{1}{2}\int [\cos 10x + \cos 2x]dx = \frac{1}{20}[\sin 10x + 5\sin 2x] + C\ .$$

XULOSA

Oldin ixtiyoriy ratsional funksiyadan olingan integralni hisoblash mumkinligi va natija elementar funksiyalar orqali ifodalanishini ko‘rib o‘tgan edik. Bu masala irratsional ifodali integrallar uchun qaralganda vaziyat butunlay o‘zgaradi. Birinchidan barcha irratsional funksiyalarni ratsional funksiya singari umumiy ko‘rinishda yoza olmaymiz. Ikkinchidan ma’lum bir ko‘rinishdagi irratsional funksiyalarning integrallari, unda qatnashuvchi parametrlarning qiymatlariga qarab, ayrim holda elementar funksiyalar orqali ifodalansa, boshqa hollarda esa maxsus funksiyalar ko‘rinishida bo‘ladi. Bunga misol sifatida binomial integrallarni ko‘rsatish mumkin. Chebishev tomonidan bu integral faqat uch holda elementar funksiyalarda ifodalanishi isbotlangan. Ammo ayrim ko‘rinishdagi irratsional ifodali integrallarni ma’lum bir almashtirmalar yordamida ratsional funksiyadan olingan integrallarga keltirish orqali hisoblash mumkin. Kvadrat uchhad qatnashgan ayrim irratsional ifodalar Eyler almashtirmalari orqali ratsional funksiyaga keltiriladi va hisoblanadi.

Trigonometrik funksiyalar ishtirok etgan integrallar ham doimo elementar funksiyalarda ifodalanmasligini oldin (§2 ga qarang) Frenel integrali va integral sinus misollarida ta'kidlab o'tgan edik. Ammo trigonometrik funksiyalar ratsional ko'rinishda qatnashgan bir qator integrallarni universal almashtirma yordamida ratsional funksiyaga keltirish orqali elementar funksiyalarda ifodalash mumkin.

Tayanch iboralar

* Irratsional funksiya * Binomial integral * Eyler almashtimalari * Ratsional trigonometrik ifoda * Universal almashtirma

Takrorlash uchun savollar

1. Qachon funksiya irratsional deyiladi?
2. Binomial integral qanday ko'rinishda bo'ladi?
3. Qaysi hollarda binomial integral elementar funksiyalar orqali ifodalanadi?
4. Binomial integrallarni hisoblash uchun qanday almashtirmalardan foydalaniladi?
5. $\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, ..., x^{\frac{r}{s}})dx$ ko'rinishdagi irratsional ifodali integrallar qanday hisoblanadi?
6. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ ko'rinishdagi irratsional ifodali integralni hisoblash uchun Eylerning almashtirmalari qanday ko'rinishda bo'ladi?
7. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ ko'rinishdagi trigonometrik ifodali integrallarni hisoblash uchun qo'llaniladigan universal almashtirma qanday ko'rinishda bo'ladi?
8. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ ko'rinishdagi trigonometrik ifodali integrallar universal almashtirma orqali qanday hisoblanadi?
9. $\int R(\sin x)\cos x dx$ ko'rinishdagi integrallar qanday hisoblanadi?
10. $\int R(tgx)dx$ ko'rinishdagi integrallar qanday almashtirma yordamida hisoblanadi?
11. $\int \sin mx \cos nx dx$ ko'rinishdagi integrallar qanday hisoblanadi?

Testlardan namunalar

1. Qaysi shartda $\int x^r(a+bx^s)^p dx$ binomial integral elementar funksiyalarda integrallanuvchi bo'lmasligi mumkin?

   A) $\frac{r+1}{s}+p$–butun son ; B) $\frac{r+1}{s}$ –butun son ; C) s–butun son ;

   D) p–butun son ; E) keltirilgan barcha hollarda integrallanuvchi bo'ladi.

2. $R(x, x^{2/3}, x^{3/4}, x^{1/6})$ irratsional funksiya qanday almashtirma orqali ratsional kasrga keltiriladi?

A) $x=t^3$; B) $x=t^4$; C) $x=t^6$; D) $x=t^{12}$; E) $x=t^{13}$.

3. Trigonometrik funksiyali ifodalarni ratsional kasrga ketiruvchi universal almashtirmani ko'rsating.

A) sin$x$=t; B) cos$x$=t; C) tg$x$=t; D) ctg$x$=t; E) tg(x/2)=t.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Quyidagi irratsional ifodali aniqmas integrallarni hisoblang:

$$a)\ \int \frac{\sqrt[3]{x}-n^2}{\sqrt[6]{x^5}\,(\sqrt{x}-n^3)}dx; \qquad b)\ \int \sqrt{\frac{1-nx}{1+nx}}dx\ .$$

2. Quyidagi trigonometrik ifodali integralni universal almashtirma yordamida hisoblang:

$$\int \frac{dx}{(n+1)\sin x - 2n\cos x}dx\ .$$

3. Quyidagi trigonometrik ifodali integrallarni hisoblang:

$$a)\ \int \frac{\sin^3 x}{\cos^{2n+1} x}dx; \quad b)\ \int \sin^{2n-1} x \cos^3 x dx; \quad c)\ \int \sin(2n+1)x \sin(2n-1)x dx;$$

$$d)\ \int \sin(2n+1)x\cos(2n-1)xdx; \qquad e)\ \int \cos(2n+1)x\cos(2n-1)xdx.$$

§5. ANIQ INTEGRAL VA UNING XOSSALARI

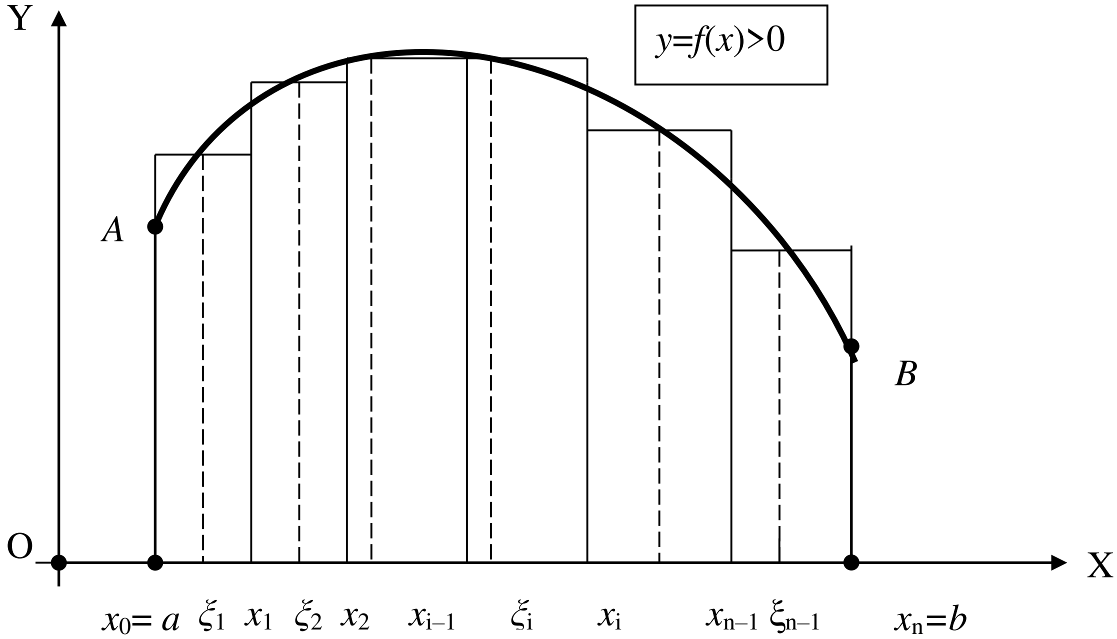
- ***Aniq integral tushunchasiga olib keluvchi masalalar.***
- ***Aniq integralning ta'rifi va mavjudlik sharti.***
- ***Aniq integralning xossalari.***

5.1. Aniq integral tushunchasiga olib keluvchi masalalar. Bir qator matematik, fizik, mexanik va iqtisodiy masalalarni yechish uchun aniq integral tushunchasi juda katta ahamiyatga ega. Bu tushunchani kiritishdan oldin unga olib keladigan ayrim masalalarni qaraymiz.

• ***Egri chiziqli trapetsiya yuzasini hisoblash masalasi.*** Turli geometrik shakllarning yuzalarini topish masalasi matematikaning eng qadimgi masalalaridan biri bo'lib hisoblanadi. Qadimgi Vavilon va Misrda ko'pburchaklarning yuzalarini hisoblay olganlar. Buyuk yunon olimi Arximed (miloddan oldingi 287-212 y.) parabola segmentining yuzasini hisoblashni bilgan.O'rta Osiyolik yurtdoshlarimiz Beruniy va Al-Xorazmiy doira va doiraviy sektor yuzalarini topa olganlar. Ammo bu geometrik shaklarning yuzalari o'ziga xos usullarda aniqlangan bo'lib, ixtiyoriy geometrik shaklning yuzasini hisoblashga imkon beradigan umumiy usul ma'lum emas edi. Differensial va integral hisob yaratilgach bu masala geometrik shakllarning nisbatan keng sinfi uchun o‘z yechimini topdi.

1-TA’RIF: Berilgan $y=f(x)$ uzluksiz funksiya grafigi, $x=a$ va $x=b$ vertikal to‘g‘ri chiziqlar hamda OX o‘qi bilan chegaralangan geometrik shakl ***egri chiziqli trapetsiya*** deb ataladi.

Quyidagi 70-rasmda ko‘rsatilgan *aABb* egri chiziqli trapetsiyaning *S* yuzasini topish masalasini qaraymiz.



70-rasm

Buning uchun dastlab *aABb* egri chiziqli trapetsiyaning asosini ifodalovchi $[a,b]$ kesmani $x_1<x_2<\ldots<x_i<\ldots<x_{n-1}$ bo‘lgan ixtiyoriy $n-1$ ta nuqta yordamida bo‘laklarga ajratamiz. Bu nuqtalarga $a=x_0$ va $b=x_n$ nuqtalarni birlashtirsak, $[a,b]$ kesma ular orqali

$$[x_0, x_1]\,,\quad [x_1, x_2]\,,\quad \ldots\,,\quad [x_{i-1}, x_i]\,,\quad \ldots\,,\quad [x_{n-1}, x_n]$$

n ta kichik kesmachalarga bo‘linadi.

So‘ngra x_i , $i=1,2,\ \ldots,\ n-1$ bo‘linish nuqtalaridan OY o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tqazib, berilgan *aABb* egri chiziqli trapetsiyani *n* ta kichik egri chiziqli trapetsiyalarga (yuqoridagi 69-rasmga qarang) ajratamiz. Ravshanki *aABb* egri chiziqli trapetsiyaning *S* yuzasi *n* ta kichik egri chiziqli trapetsiyalarning yuzalari yig‘indisiga teng bo‘ladi. Shu sababli, agar asosi $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2,3,\ldots, n)$ bo‘lgan egri chiziqli kichik trapetsiyalarning yuzalarini ΔS_i kabi belgilansa, quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$S=\Delta S_1+\Delta S_2+\cdots+\Delta S_i+\cdots+\Delta S_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i \qquad (1)$$

Bu yerda ΔS_i $(i=1,2, \ldots , n)$ ham egri chiziqli trapetsiyalarning yuzalari bo‘lgani uchun ularning aniq qiymatlarini topa olmaymiz. Bu yuzalarning taqribiy qiymatini aniqlash uchun $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2, \ldots , n)$ kesmalarning har biridan ixtiyoriy ravishda ξ_i nuqtalarni tanlab olamiz. Tanlangan ξ_i nuqtalarda *AB* egri chiziqni ifodalovchi $y=f(x)>0$ funksiyaning $f(\xi_i)$ qiymatlarini hisoblaymiz. Endi har bir ΔS_i $(i=1,2, \ldots , n)$

yuzalarni asoslari $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ va balandliklari $h_i = f(\xi_i) > 0$ bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklarning yuzalari bilan almashtirib, quyidagi taqribiy tengliklarga ega bo‘lamiz:

$$\Delta S_1 \approx f(\xi_1)\Delta x_1\ , \Delta S_2 \approx f(\xi_2)\Delta x_2, \ldots, \Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i\ , \ldots,\ \Delta S_n \approx f(\xi_n)\Delta x_n\ .$$

Bu taqribiy tengliklarni (1) yig‘indiga qo‘yib, berilgan *aABb* egri chiziqli trapetsiyaning izlanayotgan *S* yuzasi uchun ushbu taqribiy tenglikka ega bo‘lamiz:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\ . \qquad (2)$$

(2) taqribiy tenglikning geometrik ma’nosi shundan iboratki, biz hozircha hisoblay olmaydigan egri chiziqli trapetsiyaning *S* yuzasi to‘g‘ri to‘rtburchaklardan hosil qilingan pog‘onasimon shakl yuzasi bilan almashtirildi. Bunda bo‘laklar soni *n* qanchalik katta qilib olinsa, pog‘onasimon shaklning yuzasi egri chiziqli trapetsiyaning *S* yuzasini shunchalik darajada aniqroq ifodalaydi. Bu mulohazadan izlanayotgan *S* yuzaning aniq qiymati

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (3)$$

limit bilan aniqlanishi mumkinligini ko‘ramiz.

- ***O‘zgaruvchi kuch bajargan ishni hisoblash masalasi*.** Yo‘nalishi va kattaligi o‘zgarmas bo‘lgan kuch ta’sirida moddiy nuqta *L* to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakat qilayotgan bo‘lsin. Bunda kuch yo‘nalishi bilan moddiy nuqtaning harakat yo‘nalishi bir xil deb olamiz. Agar bu shartlarda kattaligi *f* bo‘lgan kuch ta’sirida moddiy nuqta *L* to‘g‘ri chiziq bo‘ylab *a* nuqtadan *b* nuqtaga ko‘chirilsa, ya’ni $b-a$ masofaga siljigan bo‘lsa, unda bajarilgan ish $A = f\cdot(b-a)$ formula bilan aniqlanishi bizga maktab fizika kursidan ma’lum.

Endi yuqoridagi shartlardan kuch kattaligi o‘zgarmas degan shartdan voz kechib, u harakatning har bir *x* nuqtasida biror uzluksiz $f(x)$ funksiya bo‘yicha o‘zgarib boradigan umumiyroq holni qaraymiz. Bu holda kuch moddiy nuqtani $[a,b]$ kesma bo‘yicha harakatlantirganda bajarilgan *A* ishni hisoblash masalasi paydo bo‘ladi. Bu masalani yechish uchun moddiy nuqtani bosib o‘tgan yo‘lini ifodalovchi $[a,b]$ kesmani oldingi masaladagi singari *n* ta bo‘laklarga ajratib, har bir $[x_{i-1}, x_i]$ ($i=1,2, \ldots , n$) kichik kesmada o‘zgaruvchi kuchning bajargan ishini ΔA_i deb belgilaymiz. Bu holda $[a, b]$ kesmada bajarilgan umumiy *A* ish qiymatini

$$A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \cdots + \Delta A_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \qquad (4)$$

yig‘indi ko‘rinishida ifodalash mumkin. Bu yerda ham ΔA_i ishning aniq qiymatini hisoblay olmaymiz. Ularning taqribiy qiymatlarini hisoblash uchun $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalarning har biridan ixtiyoriy ξ_i nuqtani tanlab olamiz va unda kuchning $f(\xi_i)$ qiymatini hisoblaymiz. Uzunligi $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ bo‘lgan bu kichik kesmada kuch kattaligi o‘zgarmas va $f(\xi_i)$ deb hisoblab, ushbu taqribiy tengliklarni yoza olamiz:

$$\Delta A_1 \approx f(\xi_1)\cdot \Delta x_1\ ,\ \Delta A_2 \approx f(\xi_2)\cdot \Delta x_2\ , \ldots, \Delta A_i \approx f(\xi_i)\cdot \Delta x_i\ , \ldots,\ \Delta A_n \approx f(\xi_n)\cdot \Delta x_n\ .$$

Bularni (4) yig‘indiga qo‘yib, izlanayotgan *A* ishning taqribiy qiymatini topamiz:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\ . \qquad (5)$$

Bu yerda ham $[x_{i-1}, x_i]$ bo‘laklar soni n oshib borgan sari (5) taqribiy tenglik xatoligi tobora kamayib boradi deb kutish mumkin. Shu sababli A ishning aniq qiymati

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (6)$$

limit orqali ifodalanadi.

• ***Mahsulot hajmini topish masalasi.*** Agar ish kuni davomida mehnat unumdorligi o‘zgarmas, ya’ni ixtiyoriy t vaqtda uning kattaligi f bo‘lsa, unda (T_1,T_2) vaqt oralig‘ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi $V=f\cdot(T_2-T_1)$ formula bilan hisoblanadi. Masalan, sozlangan avtomatik qurilma uchun bu holni o‘rinli deb olish mumkin.

Ammo ishchining mehnat unumdorligi to‘g‘risida bunday deb bo‘lmaydi. Masalan, ish kunining boshlang‘ich davrida (ishga ko‘nikish) uning mehnat unumdorligi ma’lum bir vaqtgacha o‘sib boradi. So‘ngra, ishga kirishib ketgandan keyin, ma’lum bir vaqt oralig‘ida bir xil unumdorlik bilan mahsulot ishlab chiqaradi. Ish kuni oxiriga yaqinlashgan sari, charchash tufayli, mehnat unumdorligi pasayib boradi. Shunday qilib mehnat unumdorligi o‘zgaruvchan va t vaqtga bog‘liq ravishda biror uzluksiz $f(t)$ funksiya orqali aniqlangan bo‘ladi. Bu holda (T_1,T_2) vaqt oralig‘ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi V uchun yuqoridagi formula o‘rinli bo‘lmasligi ravshandir va uni topish masalasi paydo bo‘ladi. Bu masala ham oldingi masalalardagi mulohazalar asosida quyidagicha yechiladi. (T_1,T_2) vaqt oralig‘ini ixtiyoriy ravishda tanlangan

$$T_1=t_0< t_1< t_2< \cdots t_i<\cdots t_{n-1}< t_n=T_2$$

nuqtalar bilan n ta (t_{i-1}, t_i) $(i=1,2,3, \cdots, n)$ vaqt oraliqchalariga bo‘laklaymiz. Bu vaqt oraliqchalarida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini ΔV_i $(i=1,2,3, \cdots, n)$ deb belgilasak, unda butun vaqt oralig‘ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi

$$V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \cdots + \Delta V_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta V_i \qquad (7)$$

yig‘indi kabi ifodalanadi. Bu yig‘indidagi qo‘shiluvchilarning taqribiy qiymatlarini topish maqsadida (t_{i-1}, t_i) $(i=1,2,3, \cdots, n)$ vaqt oraliqchalaridan ixtiyoriy bir ξ_i vaqtni tanlab olamiz va unda $f(\xi_i)$ mehnat unumdorligini aniqlaymiz. Kichkina (t_{i-1}, t_i) oraliqda uzluksiz $f(t)$ funksiya o‘z qiymatini unchalik ko‘p o‘zgartira olmaydi va shu sababli bu yerda mehnat unumdorligini o‘zgarmas va uning qiymati $f(\xi_i)$ deb olishimiz mumkin. Shu sababli $\Delta t_i= t_i- t_{i-1}$ vaqt ichida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi uchun

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i)\cdot\Delta t_i\,, \quad i=1,2,3, \cdots, n,$$

taqribiy tengliklarni yozish mumkin. Bu taqribiy tengliklarni (7) yig‘indiga qo‘yib,

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i \qquad (8)$$

taqribiy natijaga ega bo‘lamiz. Bu holda mahsulot hajmining aniq qiymati

$$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i \qquad (9)$$

limit orqali topiladi.

Yuqoridagi geometrik, fizik va iqtisodiy mazmunli uchta turli masala bir xil matematik usulda o'z yechimini topib, (3), (6) va (9) ko'rinishdagi bir xil limit orqali ifodalandi. Shu sababli bu usul va limitni umumiy holda qarash ma'noga egadir.

5.2. Aniq integralning ta'rifi va mavjudlik sharti. Berilgan $y=f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan bo'lsin. Bu kesmani ixtiyoriy

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_i<\ldots x_{n-1}<x_n=b$$

bo'linish nuqtalari yordamida n ta

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ \ldots,\ [x_{i-1}, x_i],\ \ldots,\ [x_{n-1}, x_n]$$

kichik kesmachalarga ajratamiz. Hosil bo'lgan har bir $[x_{i-1}, x_i]$ (i=1, 2, 3, …, n) kichik kesmachalardan ixtiyoriy bir ξ_i nuqtani tanlaymiz. Tanlangan ξ_i nuqtalarda berilgan $f(x)$ funksiyaning $f(\xi_i)$ (i=1, 2, 3, …, n) qiymatlarini va $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalarning $x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$ (i=1, 2, 3, …, n) uzunliklarini hisoblaymiz. Bu qiymatlaridan foydalanib ushbu yig'indini tuzamiz:

$$S_n(f)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (10)$$

<u>2-TA'RIF:</u> (10) tenglik bilan aniqlanadigan $S_n(f)$ yig'indi $y=f(x)$ funksiya uchun $[a,b]$ kesma bo'yicha ***integral yig'indi*** deb ataladi.

$S_n(f)$ integral yig'indi ta'rifidan ko'rinadiki uning qiymati $[x_{i-1}, x_i]$ kichik kesmachalar uzunligi Δx_i, ularning soni n va tanlangan ξ_i nuqtalarga bog'liq bo'ladi. $\Delta_n=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$ belgilash kiritamiz.

<u>3-TA'RIF:</u> Agar $S_n(f)$ integral yig'indilar ketma-ketligi $n\to\infty$ va $\Delta_n\to 0$ bo'lganda x_i bo'linish nuqtalari hamda $[x_{i-1}, x_i]$ kichik kesmachalardan olinadigan ξ_i nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan biror chekli $S(f)$ limitga ega bo'lsa , bu limit qiymati $S(f)$ berilgan $f(x)$ funksiyadan $[a,b]$ kesma bo'yicha olingan ***aniq integral*** deyiladi.

Berilgan $f(x)$ funksiyadan $[a,b]$ kesma bo'yicha olingan aniq integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi va ta'rifga asosan quyidagicha aniqlanadi :

$$\int\limits_a^b f(x)dx=S(f)=\lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} S_n(f)=\lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\ . \qquad (11)$$

Bu yerda a – aniq integralning ***quyi chegarasi***, b – ***yuqori chegarasi***, $[a, b]$ – integrallash kesmasi, x–integrallash o'zgaruvchisi, $f(x)$ – ***integral ostidagi funksiya***, $f(x)dx$ – ***integral ostidagi ifoda*** deyiladi.

<u>4-TA'RIF:</u> Agar $f(x)$ funksiyadan $[a,b]$ kesma bo'yicha olingan aniq integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ mavjud bo'lsa, unda $f(x)$ bu kesmada ***integrallanuvchi funksiya*** deb ataladi.

Izoh: Aniq integralning yuqorida keltirilgan ta'rifi olmoniyalik buyuk matematik Riman (1826–1866 y.) tomonidan taklif etilgan va shu sababli Riman integrali deb yuritiladi. Bundan tashqari aniq integralning Koshi, mashhur farang matematigi Lebeg (1875–1941 y.) va niderlandiyalik matematik Stilt'yes (1856–1894 y.) tomonlaridan kiritilgan ta'riflari ham mavjud va keng qo'llaniladi.

Oldin ko'rilgan masalalarga qaytsak, (3) va (11) tengliklarga asosan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi

$$S=\int_a^b f(x)dx,$$

(6) va (11) tengliklarga asosan o'zgaruvchi kuch bajargan ish

$$A=\int_a^b f(x)dx,$$

(9) va (11) tengliklarga asosan ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi

$$V=\int_a^b f(t)dt$$

aniq integrallar orqali ifodalanishi kelib chiqadi. Bu tengliklarni aniq integralning geometrik, mexanik va iqtisodiy ma'nolari deb olishimiz mumkin.

Aniq integral ta'rifidan ko'rinadiki, berilgan $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lishi uchun ancha og'ir shartlarni qanoatlantirishi kerak. Haqiqatan ham, qaralayotgan $[a,b]$ kesmani bo'linish nuqtalari x_i (i=1,2, ···, n) va $[x_{i-1}, x_i]$ kesmalardan tanlanadigan ξ_i nuqtalar qanday bo'lmasin aniq integralni ifodalovchi (11) limit qiymati $S(f)$ bir xil bo'lishi kerak. Bu esa har qanday funksiya uchun bajarilavermaydi. Masalan, [0,1] kesmada aniqlangan D(x) Dirixle funksiyasi (VII bob, §3) uchun integral yig'indini qaraymiz. Agar $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalardan olinadigan ξ_i nuqtalar ratsional sonlarni ifodalasa, unda $D(\xi_i)=1$ va integral yig'indi

$$S_n(D)=\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=1-0=1\ ;$$

agar ξ_i nuqtalar irratsional sonlarni ifodalasa, unda $D(\xi_i)=0$ va integral yig'indi

$$S_n(D)=\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} 0\cdot\Delta x_i=0$$

bo'ladi. Bu yerdan ko'rinadiki, $n\to\infty$ bo'lganda $S_n(f)$ integral yig'indi limitining qiymati ξ_i nuqtalarning tanlanishiga bog'liq. Bundan esa $D(x)$ funksiya [0,1] kesmada integrallanuvchi emasligi kelib chiqadi.

Shu sababli (11) limitni, ya'ni $\int_a^b f(x)dx$ integralni qaysi shartda mavjud bo'lishini aniqlashimiz kerak. Bu savolga javob isbotsiz beriladigan ushbu teoremalarda keltiriladi.

1-TEOREMA: Berilgan $[a,b]$ kesmada chegaralangan va unda chekli sondagi uzilish nuqtalariga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo'ladi.

NATIJA: Berilgan $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo'ladi.

Haqiqatan ham, Veyershtrass teoremasiga asosan (VI bob, §4) $[a,b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiya shu kesmada chegaralangan bo'lib, oldingi teorema shartlarini qanoatlantiradi va shu sababli bu kesmada integrallanuvchidir.

Bu tasdiqlardan funksiyalarning nisbatan keng sinfi uchun ularning aniq integrallari mavjud ekanligini ko‘ramiz. Aniq integrallarning qiymatini topish (integralni hisoblash) masalasini kelgusiga qoldirib, bu masalani yechish uchun kerak bo‘ladigan aniq integralning xossalari bilan tanishamiz.

5.3. Aniq integralning xossalari. Avvalo yuqorida ko‘rib o‘tilgan aniq integral ta’rifiga ikkita qo‘shimcha kiritamiz.

❖ Aqar aniq integralda quyi a va yuqori b chegaralar ($a<b$) o‘rni almashsa, unda

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad (12)$$

tenglik o‘rinli deb qabul etamiz. Bunday qarorni quyidagicha tushuntirish mumkin. (12) tenglikning chap tomonidagi integralda x integrallash o‘zgaruvchisi OX o‘qda $x=a$ nuqtadan $x=b$ nuqtaga qarab o‘sadi va shu sababli $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}>0$ bo‘ladi. O‘ng tomondagi integralda esa aksincha bo‘lib, x integrallash o‘zgaruvchisi $x=b$ nuqtadan $x=a$ nuqtaga qarab kamayib boradi va unda $\delta x_i= x_{i-1}-x_i= -\Delta x_i<0$ bo‘ladi. Demak, (12) tenglikdagi integrallar uchun ularning integral yig‘indilari faqat ishoralari bilan farq qiladi. Bu yerdan, limit xossasiga asosan, (12) tenglikni qabul etish mumkinligini ko‘ramiz.

❖ (12) tenglikdan

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad (13)$$

deb qabul qilishimiz mumkinligi kelib chiqadi. Haqiqatan ham bu holda

$$\int_a^a f(x)dx = -\int_a^a f(x)dx \Rightarrow 2\int_a^a f(x)dx = 0 \Rightarrow \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Izoh: Aniq integral ta’rifini ifodalovchi (11) tenglikdan ko‘rinadiki, uning qiymati biror sondan iborat bo‘ladi. Bu son faqat integral ostidagi $f(x)$ funksiya va $[a,b]$ integrallash kesmasiga bog‘liq bo‘lib, integrallash o‘zgaruvchisiga bog‘liq emas. Shu sababli aniq integralda integrallash o‘zgaruvchisini har xil belgilash mumkin, ya’ni

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(s)ds = \cdots \quad .$$

I xossa: Aniq integralda o‘zgarmas ko‘paytuvchini integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya’ni k o‘zgarmas son bo‘lsa,unda

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad (14)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Aniq integral ta’rifi va limit xossasiga asosan

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} \sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\Delta x_i = k \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)dx \ .$$

II xossa: Ikki yoki undan ortiq funksiyalar algebraik yig‘indisining aniq integrali qo‘shiluvchilar aniq integrallarining algebraik yig‘indisiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_m(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \cdots \pm \int_a^b f_m(x)dx \qquad (15)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bunda tenglikning o‘ng tomonidagi aniq integrallar mavjud deb hisoblanadi.

Isbot: Aniq integral ta’rifi va limit xossasiga asosan

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_m(x)]dx = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} [f_1(\xi_i) \pm f_2(\xi_i) \pm \cdots \pm f_m(\xi_i)]\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i \pm \cdots \pm \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f_m(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \cdots \pm \int_a^b f_m(x)dx \quad .$$

III xossa: Agar $[a, b]$ kesmada $f(x)\geq 0$ va integrallanuvchi bo‘lsa, unda uning aniq integrali uchun

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \qquad (16)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Bu holda integral yig‘indida $f(\xi_i)\geq 0$, $\Delta x_i>0$ (i=1,2,3,$\cdots$, n) bo‘lgani uchun va aniq integral ta’rifi hamda limit xossasiga asosan

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} S_n(f) \geq 0 ,$$

ya’ni (16) tengsizlik o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

IV xossa: Agar $[a, b]$ kesmada $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar integrallanuvchi hamda $f(x)\leq g(x)$ bo‘lsa, unda ularning aniq integrallari uchun

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \qquad (17)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: II xossaga asosan $h(x)=g(x)–f(x)$ funksiya berilgan $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo‘ladi. Bundan tashqari $f(x)\leq g(x)$ shartdan $h(x)\geq 0$ ekanligi kelib chiqadi. Unda, IV va II xossalardan foydalanib, (17) tengsizlikka quyidagicha erishamiz:

$$\int_a^b h(x)dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)]dx \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \ .$$

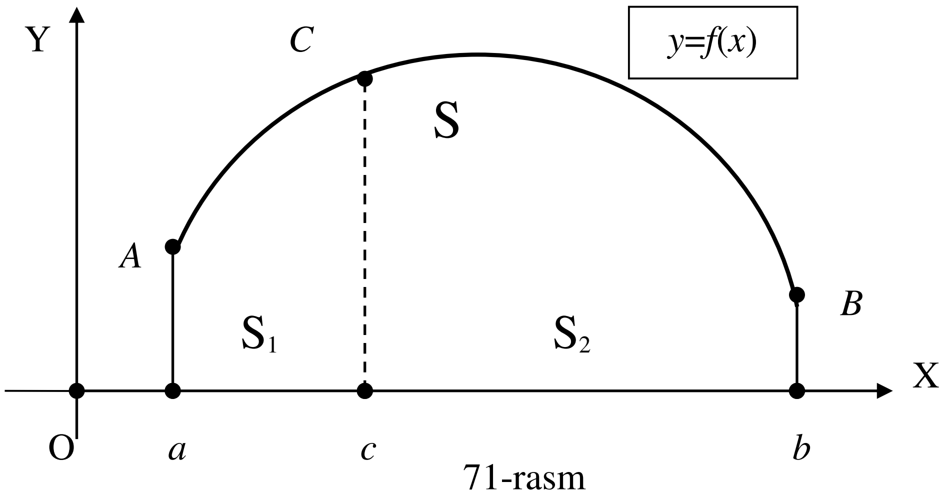
V xossa: Agar $a<c<b$ va $f(x)$ funksiya $[a,c]$, $[c,b]$ kesmalarda

integrallanuvchi bo‘lsa, unda u [a,b] kesmada ham integrallanuvchi va

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (18)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Bu xossani qat’iy matematik isbotini keltirmasdan, uni integralning geometrik mazmuniga asoslangan (71-rasmga qarang) talqinini keltirish bilan chegaralanamiz.



71-rasm

(18) tenglikning o‘ng tomonidagi birinchi integral y=f(x) funksiya grafigi orqali hosil qilingan *aACc* egri chiziqli trapetsiyaning S_1 yuzasini, ikkinchi integral *cCBb* egri chiziqli trapetsiyaning S_2 yuzasini ifodalaydi. (18) tenglikning chap tomondagi integral esa y=f(x) funksiya grafigi orqali hosil qilingan *aABb* egri chiziqli trapetsiyaning S yuzasini ifodalaydi. Bu yerda $S=S_1+S_2$ tenglik o‘rinli va uni integrallar orqali ifodalab, (18) tenglikni hosil etamiz.

Izoh: III xossani ifodalovchi (18) tenglik $c<a$ va $c>b$ holda ham o‘rinli bo‘ladi. Masalan, $c>b$ holda $a<b<c$ bo‘lgani uchun (18) tenglik yuqoridagi mulohazalar va (12) tenglikka asosan quyidagicha keltirib chiqariladi:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_b^c f(x)dx .$$

VI xossa: Har qanday [a,b] kesmada o‘zgarmas $f(x)=1$ funksiya integrallanuvchi va

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dx = b-a \qquad (19)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Bu holda integral yig‘indida $f(\xi_i)=1$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ (i=1,2,3,$\cdots$, n), $x_0=a$ va $x_n=b$ bo‘lgani uchun

$$S_n(1) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i = \sum_{i=1}^{n}\Delta_i = (x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\cdots+(x_n-x_{n-1}) = x_n - x_0 = b-a .$$

Bu yerdan integral ta’rifi va limit xossasidan (19) tenglik kelib chiqadi:

$$\int_a^b dx = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} S_n(1) = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} (b-a) = b-a\,.$$

Izoh: Integralning geometrik ma'nosiga ko'ra (19) tenglikdagi aniq integral asosi $[a,b]$ kesmadan iborat va balandligi $f(x)=1$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchak yuzasini ifodalaydi va bu yuza $S=1\cdot(b-a)=b-a$ ekanligidan ham (19) tenglikka ishonch hosil etish mumkin.

VII xossa: Agar $[a,b]$ kesmada $(a<b)$ integrallanuvchi $y=f(x)$ funksiyaning shu kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari mos ravishda m va M bo'lsa, unda aniq integral uchun

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \qquad (20)$$

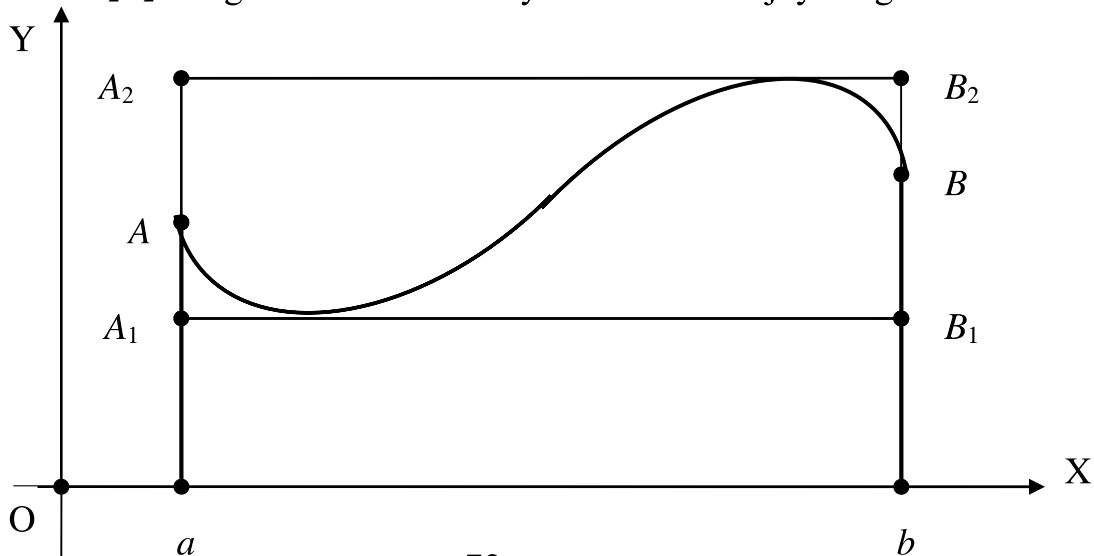
qo'sh tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot: Shartga asosan $[a,b]$ kesmada $m\le f(x)\le M$ bo'lgani uchun IV xossa va (19) tenglikdan hamda I xossadan foydalanib, quyidagilarni olamiz:

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx \Rightarrow m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)\,.$$

Bu xossaning geometrik ma'nosi shundan iboratki (72-rasmga qarang), $[a,b]$ kesmada $y=f(x)$ funksiya grafigi orqali hosil qilingan $aABb$ egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi asoslari $b-a$, balandliklari esa mos ravishda m va M bo'lgan aA_1B_1b va aA_2B_2b to'g'ri to'rtburchaklar yuzalari orasida joylashgan bo'ladi .



72-rasm

VIII xossa: Agar $|f(x)|$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, unda $f(x)$ funksiya ham bu kesmada integrallanuvchi va quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \qquad (21)$$

Isbot: $-|f(x)|\leq f(x)\leq|f(x)|$ qo‘sh tengsizlikni hadlab integrallab, bu tasdiqqa quyidagicha erishamiz:

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \ .$$

IX xossa**(*****O‘rta qiymat haqidagi teorema*****)*****:*** Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, bu kesmada shunday ξ nuqta mavjudki, unda

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \qquad (22)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Berilgan $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lgani uchun, Veyershtrass teoremasiga asosan, u bu kesmada o‘zining eng kichik m va eng katta M qiymatlarini qabul etadi. Shu sababli bu funksiya uchun VII xossani ifodalovchi (20) qo‘sh tengsizlik o‘rinli va uni quyidagicha yozish mumkin:

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M \ .$$

Bu qo‘sh tengsizlik orasida turgan sonni μ deb belgilasak, unda kesmada uzluksiz funksiya xossasiga asosan (VI bob, §5, 5-teorema natijasi), $[a,b]$ kesmada shunday ξ nuqta mavjudki, unda $f(\xi)=\mu$ bo‘ladi. Bu yerdan, belgilashimizga asosan,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu = f(\xi) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

ekanligi kelib chiqadi.

<u>5-TA’RIF:</u> (22) tenglik orqali aniqlanadigan

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

soni $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi ***o‘rta qiymati*** deb ataladi.

XULOSA

Juda ko‘p amaliy masalalarni yechish aniq integral tushunchasiga olib keladi. Masalan, geometriyada egri chiziqli trapetsiya yuzasini topish, fizikada o‘zgaruvchi kuch bajargan ishni hisoblash, iqtisodiyotda ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini aniqlash kabi masalalar shular jumlasidandir. Aniq integral berilgan funksiya va kesma bo‘yicha tuziladigan integral yig‘indining limiti kabi aniqlanadi. Berilgan kesmada chegaralangan va faqat chekli sondagi uzilish nuqtalariga ega bo‘lgan funksiya uchun aniq integral mavjud bo‘ladi. Yuqorida ko‘rsatilgan masalalardan aniq integralning geometrik, mexanik va iqtisodiy ma’nolari kelib chiqadi. Aniq integral qiymatini hisoblash yoki baholash uchun uning bir qator xossalaridan foydalanish mumkin.

<u>Tayanch iboralar</u>

* Integral yig‘indi * Aniq integral * Integral ostidagi funksiya * Integral ostidagi ifoda * Integrallash o‘zgaruvchisi * Quyi chegara * Yuqori chegara * Integrallanuvchi funksiya * Integralning geometrik ma’nosi * Integralning mexanik ma’nosi * Integralning iqtisodiy ma’nosi * Funksiyaning o‘rta qiymati

Takrorlash uchun savollar

1. Funksiyaning berilgan kesma bo‘yicha integral yig‘indisi qanday hosil qilinadi?
2. Aniq integral qanday ta’riflanadi?
3. Qaysi shartda funksiya berilgan kesmada integrallanuvchi deyiladi?
4. Integrallanmovchi funksiyaga misol keltira olasizmi?
5. Qaysi shartda funksiya berilgan kesmada integrallanuvchi bo‘ladi?
6. Integralning geometrik ma’nosi nimadan iborat?
7. Integralning mexanik ma’nosi qanday ifodalanadi?
8. Integralning iqtisodiy ma’nosi nimadan iborat?
9. Aniq integralning quyi va yuqori chegaralari nima?
10. Aniq integralda quyi va yuqori chegaralar o‘rni almashtirilsa nima bo‘ladi?
11. Aniq integralda o‘zgarmas ko‘paytuvchini nima qilish mumkin?
12. Funksiyalarning algebraik yig‘indisidan olingan aniq integral qanday xossaga ega?
13. O‘zgarmas funksiyaning $[a,b]$ kesma bo‘yicha aniq integrali nimaga teng?
14. Funksional tengsizlikni hadlab integrallash mumkinmi?
15. Integrallash kesmasida musbat bo‘lgan funksiyadan shu kesma bo‘yicha olingan aniq integral qiymati haqida nima deyish mumkin?
16. Integrallash kesmasida manfiy bo‘lgan funksiyadan shu kesma bo‘yicha olingan aniq integral qiymati haqida nima deyish mumkin?
17. Aniq integral uchun o‘rta qiymat haqidagi teorema qanday ifodalanadi?
18. Funksiyaning kesma bo‘yicha orta qiymati deb nimaga aytiladi?

Testlardan namunalar

1. Aniq integralning geometrik ma’nosini ko‘rsating.
   A) egri chiziqli trapetsiyaning og‘ma tomoning burchak koeffitsiyenti;
   B) egri chiziqli trapetsiyaning perimetri ;
   C) egri chiziqli trapetsiyaning o‘rta chizig‘i uzunligi ;
   D) egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi ;
   E) to‘g‘ri javob keltirilmagan.

2. Aniq integralning mexanik ma’nosini ko‘rsating.
A) o‘zgaruvchi kuchning eng katta qiymati;
B)o‘zgaruvchi kuchning eng kichik qiymati;
C) o‘zgaruvchi kuchning momenti;
D) o‘zgaruvchi kuchning bajargan ish;
E) o‘zgaruvchi kuchning o‘rta qiymati.

3. Aniq integralning iqtisodiy ma’nosini ko‘rsating.
A) mahsulot ishlab chiqarishda mehnat unumdorligi;
B) ishlab chiqarilgan mahsulot tannarxi;
C) ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi;
D) ishlab chiqarilgan mahsulot chakana narxi;
E) mahsulot ishlab chiqarishda sarflangan xomashyo.

4. $[a, b]$ kesma bo‘yicha $y=f(x)$ funksiya uchun $S_n(f)$ integral yig‘indi tuzishda quyidagi amallardan qaysi biri bajarilmaydi?
A) $[a, b]$ kesma x_i (i=1, 2, ···, n–1) va $x_0=a$, $x_n=b$ nuqtalar bilan n bo‘lakka ajratiladi;
B) $[x_{i-1}, x_i]$ (i=1, 2, ···, n) kesmalardan ξ_i nuqtalar olinadi;
C) tanlangan ξ_i nuqtalarda $f(x)$ funksiya qiymatlari hisoblanadi;
D) $[x_{i-1}, x_i]$ (i=1, 2, ···, n) kesmalarning uzunliklari $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ topiladi;
E) ko‘rsatilgan barcha amallar bajariladi .

5. $[a, b]$ kesmada aniqlangan $y=f(x)$ funksiya uchun tuzilgan

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

integral yig‘indi orqali uning aniq integral qanday aniqlanadi?

A) $\int_a^b f(x)dx = S_n(f)$; B) $\int_a^b f(x)dx = \max S_n(f)$; C) $\int_a^b f(x)dx = \min S_n(f)$;

D) $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{n\to\infty,\\ \max\Delta x\to 0}} S_n(f)$; E) to‘g‘ri javob keltirilmagan.

6. $[a, b]$ kesmada aniqlangan $y=f(x)$ funksiya uchun $\int_a^b f(x)dx$ aniq integral qanday shartda doimo mavjud bo‘ladi?
A) yuqoridan chegaralangan; B) quyidan chegaralangan;
C) o‘suvchi; D) kamayuvchi; E) uzluksiz.

7. Aniq integralning xossasi qayerda xato ko‘rsatilgan?

A) $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

B) $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$;

C) $\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$;

D) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \; (k - const.)$;

E) barcha qoidalar to‘g‘ri ko‘rsatilgan.

8. Aniq integral xossasini ifodalovchi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

tenglik bajarilishi uchun c nuqta qanday shartni qanoatlantirishi kerak?

A) $c< a$; B) $c> b$; C) $c=a$ yoki $c=b$; D) $a< c<b$;

E) ko‘rsatilgan barcha shartlarda tenglik bajariladi .

9. Aniq integral uchun quyidagi tengliklardan qaysi biri o‘rinli emas?

A) $\int_a^a f(x)dx=0$; B) $\int_a^b f(x)dx=\int_b^a f(x)dx$; C) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$;

D) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$; E) keltirilgan barcha tengliklar o‘rinli.

<u>**Mustaqil ish topshiriqlari**</u>

1. Agar $\int_a^b f(x)dx=5,\ \int_a^b g(x)dx=-3$ bo‘lsa quyidagi integrallarning qiymatlarini toping:

$a)\int_a^b (n+1)f(x)dx;\quad b)\int_a^b (n-1)g(x)dx;\quad c)\int_a^b [nf(x)+(2n+1)g(x)]dx.$

§6. ANIQ INTEGRALLARNI HISOBLASH USULLARI

- ***Aniq integralni ta’rif bo‘yicha hisoblash.***
- ***Nyuton – Leybnits formulasi.***
- ***Bo‘laklab integrallash usuli.***
- ***Aniq integralda o‘zgaruvchini almashtirish usuli.***
- ***Aniq integrallarni taqribiy hisoblash .***

6.1. Aniq integralni ta’rif bo‘yicha hisoblash. Biz aniq integral ta’rifi va asosiy xossalarini o‘rgangan bo‘lsak ham, ammo hozircha faqat bitta $f(x)=1$ o‘zgarmas funksiyadan $[a,b]$ kesma bo‘yicha olingan aniq integral qiymatini bilamiz xolos. Bu yo‘nalishda yana bir misol sifatida $f(x)=x$ funksiyadan $[a,b]$ kesma bo‘yicha olingan

$$I=\int_a^b xdx$$

aniq integralni uning ta’rifidan foydalanib hisoblaymiz. $f(x)=x$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lgani uchun u integrallanuvchi, ya’ni I aniq integral mavjud. Unda, ta’rifga asosan, $[a,b]$ kesmani ixtiyoriy ravishda kichik $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalarga bo‘laklab va ulardan istalgan ξ_i nuqtalarni tanlab,

$$S_n(f)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\xi_i(x_i-x_{i-1})$$

integral yig‘indini hosil etib, uning $n\to\infty$, $\max\Delta x_i\to 0$ bo‘lgandagi limitini topsak, bu limit qiymati doimo bir xil bo‘ladi va I integral qiymatini ifodalaydi. Shu sababli biz $[a,b]$ kesmani o‘zaro teng bo‘lgan n bo‘lakka ajratamiz. Bu holda hosil bo‘lgan har bir $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachaning uzunligi bir xil va $\Delta x_i=h=(b-a)/n$, ularning chegaralari esa $x_i=a+ih$, $i=0,1,2,\cdots, n-1, n$ kabi aniqlanadi.Har bir $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalardan ξ_i

nuqta sifatida uning chap chegarasini, ya'ni $\xi_i = x_{i-1}$ (i=1,2,⋯, n) deb olamiz. Bu holda integral yig'indi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i = h\sum_{i=1}^{n} \xi_i = h\sum_{i=1}^{n}[a + (i-1)h] = h[\sum_{i=1}^{n} a + h\sum_{i=1}^{n}(i-1)] =$$

$$= h[na + h\frac{n(n-1)}{2}] = (b-a)[a + \frac{b-a}{n}\cdot\frac{n-1}{2}] \ .$$

Bu yerdan, aniq integral ta'rifi va limit xossalariga asosan,

$$I = \lim_{n\to\infty} S_n(f) = \lim_{n\to\infty}(b-a)[a + \frac{b-a}{2}\cdot\frac{n-1}{n}] = (b-a)[a + \frac{b-a}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}] =$$

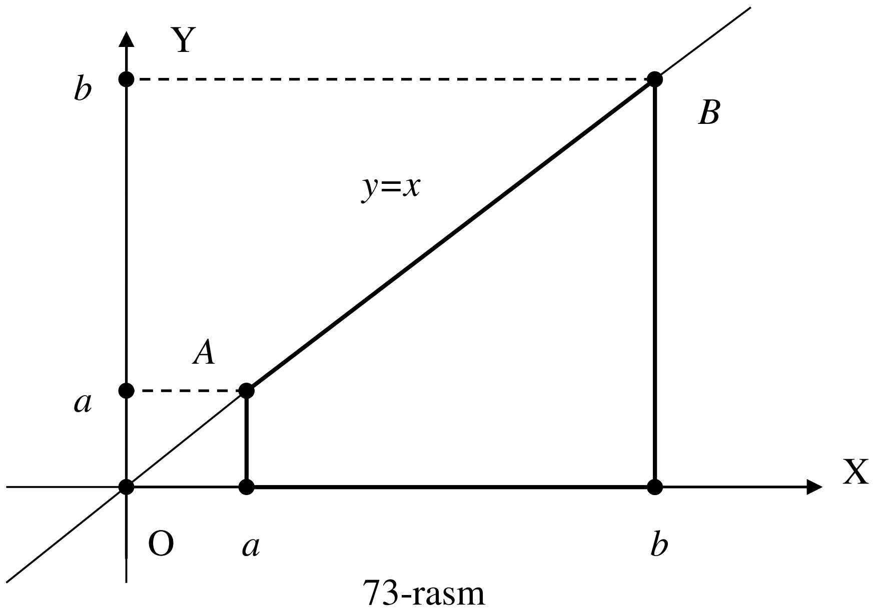
$$= (b-a)[a + \frac{b-a}{2}\cdot 1] = (b-a)\cdot\frac{b+a}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}$$

natijani olamiz. Demak,

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2-a^2}{2} \ . \qquad (1)$$

Bu natijaga aniq integralning geometrik ma'nosidan foydalanib ham kelish mumkin. Haqiqatan ham, (1) aniq integral $y=x$, $x=a$, $x=b$ va y=0 chiziqlar bilan chegaralangan *aABb* trapetsiya (73-rasmga qarang) yuzini ifodalaydi. Chizmadan ko'rinadiki, bu trapetsiyaning balandligi $H=b-a$, asoslari esa a va b. Shu sababli

$$I = \int_a^b x dx = S_{aABb} = \frac{a+b}{2}H = \frac{a+b}{2}(b-a) = \frac{b^2-a^2}{2} \ .$$



73-rasm

6.2. Nyuton – Leybnits formulasi. Oldingi natijalardan ko'rinadiki, aniq integralni uning ta'rifi, ya'ni integral yig'indining limiti orqali topish masalasi hatto oddiy $y=x$ funksiya misolida ancha qiyinchilik bilan yechiladi. Shu sababli aniq integralni hisoblashning qulayroq, osonroq usulini topish masalasi paydo bo'ladi. Bu masala integral hisobning asosiy formulasi bo'lmish Nyuton – Leybnits formulasi orqali o'z yechimini topadi. $y=f(x)$ biror $[a,b]$ kesmada uzluksiz funksiya bo‘lsin. Unda $y=f(x)$ bu $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi funksiya bo‘ladi. Bu yerdan ixtiyoriy $x\in[a,b]$ uchun

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt \qquad (2)$$

aniq integral mavjud ekanligi kelib chiqadi. Bunda quyi chegara a o‘zgarmas, yuqori chegara x esa o‘zgaruvchi deb qaralsa, unda (2) tenglik $[a,b]$ kesmada aniqlangan biror $\Phi(x)$ funksiyani ifodalaydi va ***yuqori chegarasi o‘zgaruvchi integral*** deb ataladi. Bu funksiya differensial va integral hisob orasidagi chuqur bog‘lanishni ifodalovchi quyidagi muhim xususiyatga ega.

1-TEOREMA: Agar (1) tenglikda $f(x)$ uzluksiz funksiya bo‘lsa , unda $\Phi(x)$ funksiya differensiallanuvchi va

$$\Phi'(x)=(\int_a^x f(t)dt)'=f(x) \qquad (3)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: $\Phi(x)$ funksiya differensiallanuvchi ekanligini va uning hosilasini ta’rif bo‘yicha topamiz. Buning uchun uning x argumentiga Δx orttirma berib va, aniq integralning oldin ko‘rib o‘tilgan V xossasidan foydalanib, $\Delta\Phi(x)$ funksiya orttirmasini quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=$$

$$=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Bu tenglikni, aniq integralning oldin ko‘rsatilgan o‘rta qiymati haqidagi xossasiga asosan,

$$\Delta\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(\xi)(x+\Delta x-x)=f(\xi)\Delta x\,,\;\; \xi\in[x,\,x+\Delta x]$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bu yerdan, hosila ta’rifi va $f(x)$ funksiya uzluksizligiga asosan,

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)=\lim_{\xi\to x} f(\xi)=f(x)$$

natijani, ya’ni isbotlanishi kerak bo‘lgan (3) tenglikni hosil qilamiz. Bu natijani olishda $\xi\in[x, x+\Delta x]$ bo‘lgani uchun $\Delta x\to 0$ holda $\xi\to x$ bo‘lishidan foydalanildi.

Izoh: Bu teoremadan (2) tenglik bilan aniqlangan $\Phi(x)$ berilgan uzluksiz $f(x)$ funksiya uchun boshlang‘ich funksiya bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, har qanday uzluksiz funksiya uchun uning boshlang‘ich funksiyasi mavjud va uni (2) formula orqali topish mumkin ekan.

2-TEOREMA: Agar $F(x)$ uzluksiz $f(x)$ funksiyaning biror boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a) \qquad (4)$$

tenglik o‘rinlidir.

Isbot: $F(x)$ uzluksiz $f(x)$ funksiyaning biror boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsin. Oldingi teoremaga asosan (2) tenglik bilan aniqlangan $\Phi(x)$ funksiya ham $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘ladi. Bizga ma’lumki, $f(x)$ funksiyaning har qanday ikkita boshlang‘ich funksiyalari bir-biridan faqat biror C o‘zgarmas qo‘shiluvchi bilan farq qiladi, ya’ni

$$\Phi(x)=F(x)+C \Rightarrow \int_a^x f(t)dt=F(x)+C\ .$$

Bu tenglikda $x=a$ deb va $\int_a^a f(x)dx=0$ ekanligidan foydalanib, $C=-F(a)$ ekanligini aniqlaymiz. Bu natijani oldingi tenglikka qo‘yib, ushbu formulaga kelamiz:

$$\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)\,.$$

Oxirgi tenglikda $x=b$ desak,

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$$

formulaga ega bo‘lamiz. Bu formulada t integrallash o‘zgaruvchisini x bilan almashtirib (aniq integralda integrallash o‘zgaruvchisini ixtiyoriy tarzda belgilash mumkinligini eslatib o‘tamiz), isbotlanishi kerak bo‘lgan (4) formulani hosil qilamiz.

Izoh: (4) formulada $F(x)$ sifatida $f(x)$ funksiyaning ixtiyoriy bir boshlang‘ich funksiyasini olish mumkin. Bunga sabab shuki, $f(x)$ funksiyaning ixtiyoriy ikkita $F_1(x)$ va $F_2(x)$ boshlang‘ich funksiyalari bir – biridan faqat biror C o‘zgarmas son bilan farqlanadi va $F_1(b)–F_1(a)= F_2(b)–F_2(a)$ bo‘ladi.

<u>1-TA’RIF:</u> (4) tenglik aniq integralni hisoblashning ***Nyuton-Leybnits formulasi*** deyiladi.

Aniqmas va aniq integral tushunchalari bir-biriga bog‘liqmas ravishda kiritilgan edi. Aniqmas integral $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyalari sinfi singari , aniq integral esa $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesma bo‘yicha integral yig‘indilarining limiti singari kiritilganligini eslatamiz. Ammo bu ikkala tushuncha orasida chambarchas bog‘lanish mavjudligi va ularning ikkalasi ham “integral” deb atalishi bejiz emasligini ko‘rsatish uchun Nyuton – Leybnits formulasini shartli ravishda quyidagicha yozamiz:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b=[F(x)+C]\Big|_a^b=\int f(x)dx\,\Big|_a^b \qquad (5)$$

Demak, aniq integralni Nyuton – Leybnits formulasi bo‘yicha hisoblash uchun dastlab uning chegaralarini “unutib”, uni aniqmas integral singari qaraymiz va hisoblaymiz. So‘ngra chegaralar borligini “eslab”, aniqmas integralni hisoblangan ifodasiga x o‘rniga yuqori chegara b va quyi chegara a qiymatlarini qo‘yamiz. Natijada hosil bo‘lgan sonlar ayirmasini olib, berilgan aniq integral qiymatini topamiz. Bunda aniqmas integral javobidagi ixtiyoriy C o‘zgarmas sonni hisobga olmasak ham bo‘ladi.

Misol sifatida, $f(x)=x^{\alpha}$ ($\alpha\neq-1$) darajali funksiyadan $[a,b]$ kesma bo'yicha olingan aniq integralni (4) Nyuton – Leybnits formulasi yordamida hisoblaymiz:

$$\int_a^b x^{\alpha}dx=\left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_a^b=\frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ .$$

Bevosita ta'rif bo'yicha hisoblangan (1) natija bu yerdan α=1 bo'lganda kelib chiqadi.

Shunday qilib, Nyuton – Leybnits formulasi orqali aniq integralni hisoblash masalasi bizga tanish bo'lgan aniqmas integralni hisoblash masalasiga keltiriladi. Bunga yana bir nechta misol keltiramiz:

- $\int_0^1\sqrt{x}dx=\left.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right|_0^1=\frac{2}{3}$; $\quad\int_a^b e^{4x}dx=\left.\frac{1}{4}e^{4x}\right|_a^b=\frac{e^{4b}-e^{4a}}{4}$;
- $\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=\int_1^e\ln x d\ln x=\left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^e=\frac{\ln^2 e-\ln^2 1}{2}=\frac{1}{2}\ln^2 e=\frac{1}{2}$;
- $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}=\left.\sqrt{1+x^2}\right|_0^{\sqrt{3}}=2-1=1$.

6.3. Bo'laklab integrallash usuli. $u=u(x)$ va $v=v(x)$ differentsiallanuvchi funksiyalar bo'lsin. Bu holda $(uv)'=u'v+uv'$ ekanligidan uv funksiya $u'v+uv'$ uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi. Shu sababli, Nyuton – Leybnits formulasiga asosan,

$$\int_a^b[u'v+uv']dx=uv\Big|_a^b$$

tenglikni yozish mumkin. Bu yerdan, aniq integralning II xossasi va $u'dx=du$, $v'dx=dv$ ekanligidan foydalanib, ushbu natijalarni olamiz:

$$\int_a^b u'vdx+\int_a^b uv'dx=uv\Big|_a^b\Rightarrow\int_a^b vdu+\int_a^b udv=uv\Big|_a^b\Rightarrow$$

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu \qquad (6)$$

2-TA'RIF: (6) tenglik aniq integralni ***bo'laklab integrallash formulasi*** deb ataladi.

Bu yerdan ko'rinadiki, aniq integralni bo'laklab integrallash xuddi aniqmas integralga o'xshash usulda amalga oshiriladi. Buni quyidagi misollarda ko'ramiz:

- $\int_0^{\pi/2}x\cos xdx=\begin{bmatrix}u=x, & dv=\cos xdx\\ du=dx, & v=\sin x\end{bmatrix}=x\cdot\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin xdx=$
$=\frac{\pi}{2}+\cos x\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}-1=\frac{\pi-2}{2}$;

- $$\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=\begin{bmatrix} u=\ln x, & dv=\dfrac{dx}{\sqrt{x}} \\ du=\dfrac{dx}{x}, & v=2\sqrt{x}\end{bmatrix}=2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^{e^2}-2\int_1^{e^2}\sqrt{x}\frac{dx}{x}=$$

$$=4e-4\sqrt{x}\Big|_1^{e^2}=4e-4e+4=4\ ;$$

6.4. Aniq integralda o‘zgaruvchini almashtirish usuli. Berilgan uzluksiz $y=f(x)$ funksiyadan $[a,b]$ kesma bo‘yicha olingan

$$\int_a^b f(x)dx$$

aniq integralni ba’zi hollarda biror $x=\varphi(t)$ differensiallanuvchi funksiya orqali “eski” x o‘zgaruvchidan “yangi” t o‘zgaruvchiga o‘tish usulida hisoblash mumkin bo‘ladi. Bunda $\varphi(t)$ funksiya ***almashtirma*** deb ataladi va unga quyidagi shartlar qo‘yiladi:

1. $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;
2. $\varphi(t)$ va $\varphi'(t)$ funksiyalar $t\in[\alpha,\beta]$ kesmada uzluksiz ;
3. $f[\varphi(t)]$ murakkab funksiya $[\alpha,\beta]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz.

Bu shartlarda ushbu formula o‘rinli bo‘ladi:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (7)$$

Isbot: $F(x)$ berilgan integral ostidagi $f(x)$ funksiyaning birorta boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsin. Unda, Nyuton – Leybnits formulasiga asosan,

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

tenglikni yozish mumkin. Bu yerdan, integralni invariantlik xossasi (§2, (2) tenglikka qarang) va yuqoridagi 1 – 3 shartlardan foydalanib, ushbu natijaga kelamiz:

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]d\varphi(t)=F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a)\,.$$

Oldingi va bu tenglikning o‘ng tomonlarini taqqoslab, (7) formula o‘rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

3-TA’RIF: (7) tenglik aniq integralda ***o‘zgaruvchilarni almashtirish formulasi*** deb ataladi.

Ushbu aniq integrallarni o‘zgaruvchilarni almashtirish formulasi yordamida hisoblaymiz.

- $$\int_0^3\frac{xdx}{\sqrt{x+1}}=\begin{bmatrix}\sqrt{x+1}=t, & x=t^2-1,\ dx=2tdt \\ \alpha=\sqrt{0+1}=1, & \beta=\sqrt{3+1}=2\end{bmatrix}=\int_1^2\frac{(t^2-1)\cdot 2tdt}{t}=$$

$$=2\int_1^2(t^2-1)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^2=2\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}\ ;$$

➢ $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} x=\sin t,\ dx=\cos t dt,\ 1-x^2=\cos^2 t \\ \alpha=\arcsin 0=0, \quad \beta=\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2} \end{bmatrix} =$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}(t+\frac{\sin 2t}{2})\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \quad .$$

6.5. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash . Yuqorida ko‘rib o‘tilgan usullarda $I=\int\limits_a^b f(x)dx$ aniq integral qiymatini hisoblash masalasi integral ostidagi $f(x)$ funksiyaning biror $F(x)$ boshlang‘ich funksiyani topish va uning qiymatlarini hisoblash masalasiga keltiriladi. Ammo ayrim aniq integrallar uchun bu usullarni qo‘llashda quyidagi muammolar paydo bo‘lishi mumkin:

1) $F(x)$ boshlang‘ich funksiyani topish murakkab ;

2) $F(x)$ boshlang‘ich funksiya murakkab ko‘rinishda bo‘lib, uning $F(a)$ va $F(a)$ qiymatlarini hisoblash qiyinchilik tug‘diradi ;

3) $F(x)$ boshlang‘ich funksiya elementar funksiyalarda ifodalanmaydi;

4) integral ostidagi $f(x)$ funksiya jadval ko‘rinishida berilgan .

Bunday hollarda aniq integralning qiymatini taqribiy hisoblash masalasi paydo bo‘ladi. Bu masalani yechish uchun matematikada turli formulalar topilgan bo‘lib, ular umumiy holda ***kvadratur formulalar*** deb ataladi. Shu formulalardan eng soddalaridan ikkitasini qisqacha ko‘rib o‘tamiz.

I. ***To‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi.*** Bu formulani keltirib chiqarish uchun dastlab $[a,b]$ kesmani uzunligi bir xil va $\Delta x=(b-a)/n$ bo‘lgan n ta $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalarga (i=1, 2, ···, n) ajratamiz. Bunda x_i bo‘linish nuqtalari

$$x_i = a + i\Delta x = a + \frac{b-a}{n}i, \quad i=0,1,2,\cdots,n \qquad (8)$$

formula bilan topiladi.

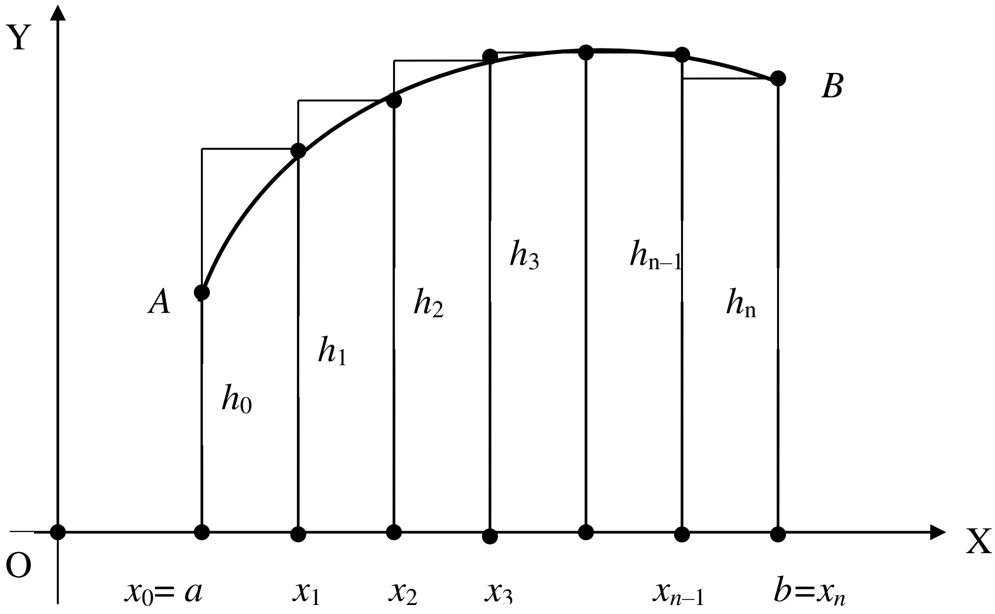
So‘ngra integral ostidagi $f(x)$ funksiyaning x_i bo‘linish nuqtalaridagi $f(x_i)$ (i=1, 2, ···, n) qiymatlarini hisoblaymiz. Bu qiymatlar va $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalar uzunligi Δx bo‘yicha

$$S_n(f)=f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x$$

integral yig‘indini hosil qilamiz. Ta’rifga asosan I aniq integral $S_n(f)$ integral yig‘indilar ketma – ketligining $n\to\infty$ bo‘lgandagi limitiga teng. Shu sababli, n katta son bo‘lganda, $I\approx S_n(f)$ deb olish mumkin. Natijada ushbu taqribiy formulaga ega bo‘lamiz:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \Delta x\cdot[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_n)] = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i). \qquad (9)$$

Agar $[a,b]$ kesmada $f(x)>0$ deb olsak, unda (9) taqribiy tenglikning o‘ng tomonidagi yig‘indi asoslari bir xil Δx uzunlikli $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalardan, balandliklari esa $h_i=f(x_i)$ (i=1, 2, ···, n) bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan tuzilgan pog‘onasimon geometrik shaklning (74-rasmga qarang) yuzini ifodalaydi. Chap tomondagi aniq integral qiymati esa $aABb$ egri chiziqli trapetsiya yuziga teng.



74-rasm

<u>3-TA'RIF:</u> Aniq integral uchun (9) taqribiy tenglik ***to'g'ri to'rtburchaklar formulasi*** deyiladi.

To'g'ri to'rtburchaklar formulasining xatoligi

$$\Delta \leq M_1 \frac{(b-a)^2}{4n}, \quad M_1 = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)| \tag{10}$$

formula bilan baholanadi.

Misol sifatida to'g'ri to'rtburchaklar formulasi yordamida

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}x\Big|_0^1 = \text{arctg}1 - \text{arctg}0 = \frac{\pi}{4} \tag{11}$$

aniq integralning taqribiy qiymatini topamiz. Buning uchun [0,1] integrallash kesmasini n=10 teng bo'lakka ajratamiz va hisoblashlar natijalarini quyidagi jadval ko'rinishida ifodalaymiz.

i	x_i=0.1i	1+x_i^2	$f(x_i)=\dfrac{1}{1+x_i^2}$	$\sum_i f(x_i)$
1	0.1	1.01	0.9901	0.9901
2	0.2	1.02	0.9615	1.9516
3	0.3	1.09	0.9174	2.8690
4	0.4	1.16	0.8621	3.7311
5	0.5	1.25	0.8000	4.5311
6	0.6	1.36	0.7353	5.2664
7	0.7	1.49	0.6711	5.9375
8	0.8	1.64	0.6098	6.5473
9	0.9	1.81	0.5525	7.0998
10	1.0	2.0	0.5000	7.5998

Bizning misolda Δx=(1–0)/10=0.1 bo‘lgani uchun, (9) formulaga asosan, ushbu natijani olamiz:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0.1 \cdot 7.5998 = 0.75998 .$$

Bu taqribiy natijani xatoligini (10) formula bo‘yicha baholaymiz. Bizning misolda

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow |f'(x)| = \left| -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \right| < \frac{2 \cdot 1}{(1+0^2)^2} = 2$$

va shu sababli (10) formulada M_1=2 deb olish mumkin. Bu holda

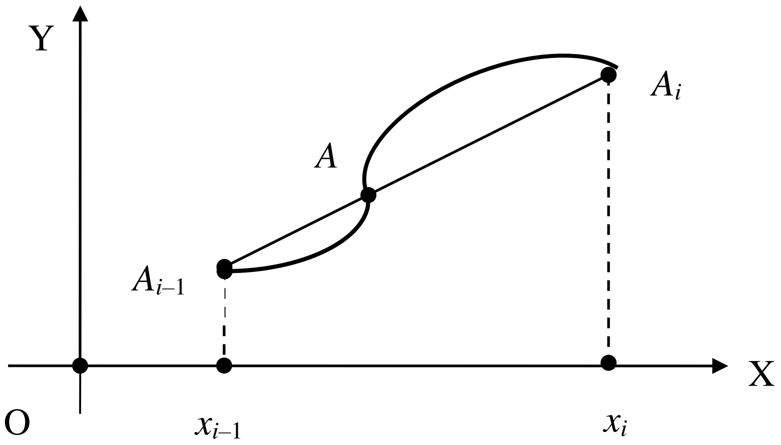
$$\Delta \le 2 \cdot (1-0)^2/(4 \cdot 10) = 1/20 = 0.05$$

bo‘lgani uchun (11) aniq integralning qiymati

$$0.75998-0.05 < I < 0.75998+0.05 \;\Rightarrow\; 0.70998 < I < 0.80998$$

oraliqda yotadi. Bu natijani (11) integralning aniq qiymati $\pi/4 \approx 0.7854$ bilan taqqoslab, yo‘l qo‘yilgan absolut xatolik Δ=0.0255 ekanligini ko‘rishimiz mumkin. Shunday qilib, hatto unchalik katta bo‘lmagan n=10 holda ham (9) to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi ancha yaxshi natija berdi.

II. ***Trapetsiyalar formulasi.*** Soddalik uchun bu formulani I integral ostidagi funksiya $f(x)>0$ bo‘lgan holda qaraymiz.Bu yerda ham $[a,b]$ integrallash kesmasini (8) nuqtalar bilan bir xil Δx uzunlikli n ta $[x_{i-1}, x_i]$ (i=1, 2, ···, n) kesmachalarga bo‘laklaymiz. So‘ngra $y=f(x)$ funksiya grafigidagi $A_{i-1}(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ va $A_i(x_i, f(x_i))$ nuqtalarni to‘g‘ri chiziq kesmasi (vatar) bilan tutashtirib, egri chiziqli $x_{i-1}A_{i-1}AA_ix_i$ trapetsiyani to‘g‘ri chiziqli $x_{i-1}A_{i-1}A_ix_i$ trapetsiya bilan (75-rasmga qarang) almashtiramiz.



75-rasm

Bu holda to‘g‘ri chiziqli $x_{i-1}A_{i-1}A_ix_i$ trapetsiyaning yuzi

$$S_i = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1}) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\Delta x \quad (i = 1,2,3,\cdots,n)$$

egri chiziqli $x_{i-1}A_{i-1}AA_ix_i$ trapetsiyaning yuziga taqriban teng deb olish mumkin. Unda bu yuzalarning yig‘indisi aniq integralning taqribiy qiymatiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\right] \quad (12)$$

taqribiy formula o‘rinli bo‘ladi.

4-TA’RIF: Aniq integral uchun (12) taqribiy tenglik ***trapetsiyalar formulasi*** deyiladi.

Trapetsiyalar formulasining absolut xatoligi

$$\Delta \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \quad , \quad M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \qquad (13)$$

formula bilan baholanadi.

Misol sifatida (11) aniq integralning taqribiy qiymatini n=10 bo‘lgan holda trapetsiyalar formulasi orqali hisoblaymiz. Oldingi hisoblash natijalaridan foydalanib,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0.1 \cdot [\frac{1+0.5}{2} + 7.0998] = 0.78498$$

taqribiy tenglikni hosil etamiz. Bunda hosil qilingan taqribiy natijaning absolut xatoligi

$$\Delta=\pi/4–0.78498=0.7854–0.78498=0.0004$$

bo‘lib, to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi absolut xatoligiga (unda Δ=0.0255 ekanligini eslatib o‘tamiz) qaraganda ancha kichikdir. Demak, trapetsiyalar formulasi to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasiga nisbatan aniqroq natija beradi. Buni ularning xatoliklarini ifodalovchi (10) va (13) formulalar orqali ham ko‘rish mumkin.

Ko‘rib o‘tilgan to‘g‘ri to‘rtburchaklar va trapetsiyalar formulalariga nisbatan aniq integralning taqribiy qiymatini aniqroq hisoblashga imkon beradigan boshqa kvadratur formulalar ham mavjudligini ta’kidlab o‘tamiz. Masalan, ingliz matematigi Simpson (1710 – 1761) tomonidan topilgan parabolalar formulasi, Chebishevning kvadratur formulasi shular jumlasidandir.

XULOSA

Oldin aniq integral ta’rifga asosan integral yig‘indining limiti singari aniqlanishini ko‘rgan edik. Ammo kamdan-kam funksiyaning aniq integralini bevosita ta’rif bo‘yicha hisoblash mumkin. Bunda juda murakkab hisoblashlarni bajarishga to‘g‘ri keladi. Shu sababli aniq integralni qulay va osonroq hisoblash usulini topish masalasi paydo bo‘ladi. Bu masalaning javobi Nyuton-Leybnits formulasi orqali beriladi. Bu formula integral hisobning eng asosiy formulasi bo‘lib, aniq va aniqmas integrallar orasidagi bog‘lanishni ifodalaydi. Agar berilgan aniq integralni to‘g‘ridan-to‘g‘ri Nyuton-Leybnits formulasi yordamida hisoblash murakkab bo‘lsa, unda ayrim hollarda bo‘laklab integrallash yoki o‘zgaruvchilarni almashtirish usullaridan foydalanish mumkin.

Bir qator hollarda integralning aniq qiymatini topish masalasi juda murakkab bo‘lishi mumkin. Bunday hollarda aniq integral qiymatini taqribiy hisoblash usullariga murojaat qilinadi. Ularga to‘g‘ri to‘rtburchaklar va trapetsiyalar formulalarini misol qilib ko‘rsatib bo‘ladi.

Tayanch iboralar

* Yuqori chegarasi o‘zgaruvchan integral * Nyuton-Leybnits formulasi
* Bo‘laklab integrallash formulasi * O‘zgaruvchilarni almashtirish usuli
* Kvadratur formulalar * To‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi * Trapetsiyalar formulasi

Takrorlash uchun savollar

1. Yuqori chegarasi o‘zgaruvchan integralning hosilasi nimaga teng?
2. Nyuton-Leybnits formulasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
3. Aniq integralni bo‘laklab integrallash formulasini keltirib chiqaring.
4. Aniq integralda o‘zgaruvchilarni almashtirish formulasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
5. Aniq integralni taqribiy hisoblash masalasi qayerdan paydo bo‘ladi?
6. Kvadratur formulalar nima?
7. To‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasining mazmuni nimadan iborat?
8. To‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasining xatoligi qanday baholanadi?
9. Trapetsiyalar formulasi qanday aniqlanadi?
10. Trapetsiyalar formulasining xatoligi qanday baholanadi?

Testlardan namunalar

1. Agar $y=F(x)$ berilgan $[a,b]$ kesmada $y=f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, unda aniq integral uchun Nyuton–Leybnits formulasi qayerda to‘g‘ri ifodalangan?

A) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)$; B) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(a)\cdot F(b)$; C) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b)/F(a)$;

D) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$; E) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b)+F(a)$.

2. $\int\limits_0^\pi \sin^2 xdx$ aniq integral qiymatini Nyuton–Leybnits formulasi yordamida toping.

A) π; B) π/2; C) π/3; D) π/4; E) π/6.

3. $\int\limits_0^\pi \cos^2 xdx$ aniq integral qiymatini Nyuton–Leybnits formulasi yordamida toping.

A) π; B) π/2; C) π/3; D) π/4; E) π/6.

4. Aniq integralni bo‘laklab integrallash formulasini ko‘rsating.

A) $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$; B) $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b + \int\limits_a^b vdu$; C) $\int\limits_a^b udv = \int\limits_a^b vdu$;

D) $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b$;   E) To‘g‘ri javob ko‘rsatilmagan.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Quyidagi aniq integrallarni Nyuton-Leybnits formulasi bo‘yicha hisoblang:

$a)\ \int_0^1 [nx^{n-1} + (n+1)x - 2n]dx$; $b)\ \int_0^{\pi} [\sin(2n+1)x + n\cos 2nx]dx$.

2. Quyidagi aniq integrallarni bo‘laklab integrallash usulida hisoblang:

$a)\ \int_0^1 xe^{nx}dx$; $b)\ \int_1^e x^n \ln x dx$; $c)\ \int_0^{\pi} e^{nx}\cos(n+1)xdx$.

3. Quyidagi aniq integrallarni o‘zgaruvchilarni almashtirish yordamida hisoblang:

$a)\ \int_0^n \frac{x+n}{\sqrt{n^2+3nx}}dx$; $b)\ \int_{01}^n \frac{\sqrt{5nx+4n^2}}{x}dx$; $c)\ \int_{1/n}^1 \frac{dx}{x\sqrt{n^2x^2+1}}$.

§7. ANIQ INTEGRALLARNING AYRIM TATBIQLARI

- ***Tekislikdagi geometrik shakllarning yuzalarini hisoblash.***
- ***Tekislikdagi egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash.***
- ***Aniq integral yordamida jismlar hajmini hisoblash.***
- ***Aniq integralni mexanika masalalariga tatbiqlari.***
- ***Aniq integralni ayrim iqtisodiy tatbiqlari.***

Aniq integral yordamida egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi, o‘zgaruvchi kuch bajargan ishni va mehnat unumdorligi o‘zgaruvchan bo‘lgan holda ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini topish mumkinligini oldin ko‘rib o‘tgan edik. Ammo aniq integralning amaliy tatbiqlari bu bilan chegaralanib qolmasdan, bulardan tashqari uning yordamida yana juda ko‘p masalalar o‘z yechimini topadi. Bu paragrafda ulardan ayrimlari bilan tanishamiz.

7.1. Tekislikdagi geometrik shakllarning yuzalarini hisoblash. Bizga ma’lumki, $y=f(x)\geq 0$ funksiya grafigi, $x=a$ va $x=b$ vertikal to‘g‘ri chiziqlar hamda $y=0$, ya’ni OX koordinata o‘qi bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi aniq integral orqali

$$S = \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

formula bilan hisoblanadi. Bu formulani umumiyroq hollarda qaraymiz.

❖ Agar $[a,b]$ kesmada $f(x)\leq 0$ bo‘lsa, unda tegishli egri chiziqli trapetsiya OX o‘qidan pastda joylashgan va aniq integral qiymati manfiy son bo‘ladi. Shu sababli bu holda egri chiziqli trapetsiya yuzasi

$$S = -\int_a^b f(x)dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right| \qquad (2)$$

formula orqali topiladi.

Masalan, $x\in[\pi/2,\pi]$ holda $y=\cos x\le 0$ va bunda hosil bo‘ladigan egri chiziqli trapetsiya yuzasi

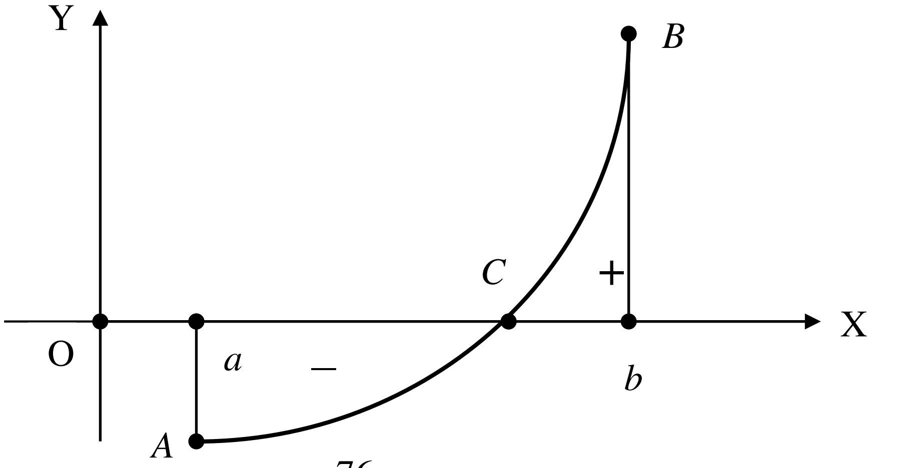
$$S = \left|\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx\right| = \left|\sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right| = |0-1| = 1 \;.$$

❖ Agar $[a,b]$ kesmada $f(x)$ ishorasi o‘zgaruvchan funksiya bo‘lsa, unda tegishli egri chiziqli trapetsiyaning bir qismi OX o‘qidan yuqorida , bir qismi esa pastda joylashgan bo‘ladi (keyingi betdagi 76-rasmga qarang).

Bu holda hosil bo‘ladigan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi (1) va (2) formulalardan foydalanib topiladi va ularni birlashtirib

$$S = \int_a^b |f(x)|dx \qquad (3)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

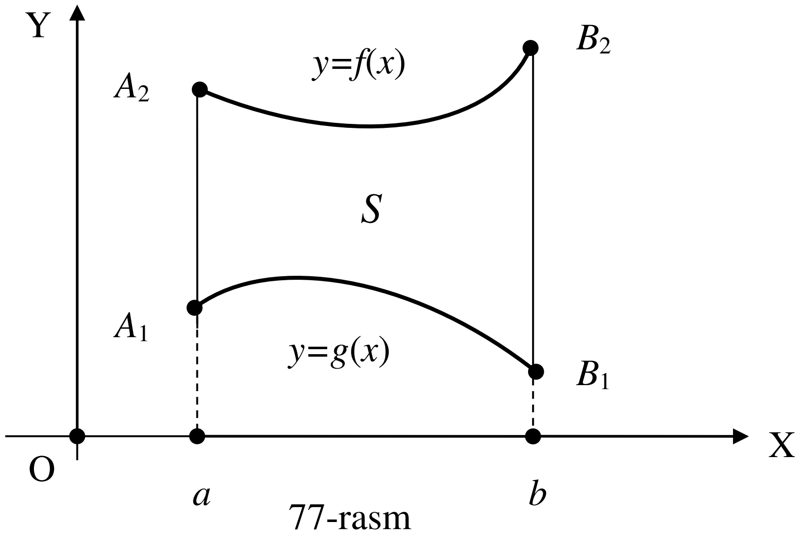


76-rasm

Masalan, $x\in[0,\pi]$ holda $y=\cos x$ funksiya $[0,\pi/2)$ sohada musbat, $(\pi/2,\pi]$ sohada esa manfiy qiymatlar qabul etadi. Bunda hosil bo‘ladigan egri chiziqli trapetsiya yuzasi

$$S = \int_0^{\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos x) dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} - \sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi} = 1-(-1) = 2 \;.$$

❖ $y=f(x)$ va $y=g(x)$ $[f(x)\ge g(x)]$ egri chiziqlar hamda $x=a$ va $x=b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan geometrik shaklning (77-rasm) S yuzasini hisoblash talab etiladi.



77-rasm

Chizmadan va aniq integralning geometrik ma'nosidan foydalanib, quyidagi tengliklarni yoza olamiz:

$$S=S_{A_1A_2B_2B_1}=S_{aA_2B_2b}-S_{aA_1B_1b}=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx\ . \qquad (4)$$

Masalan, $y=x^2$ va $y=x$, $x=2$ va $x=4$ chiziqlar bilan chegaralangan yassi geometrik shakl yuzasini (4) formuladan foydalanib hisoblaymiz:

$$S=\int_2^4(x^2-x)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^4=\left(\frac{64}{3}-8\right)-\left(\frac{8}{3}-2\right)=\frac{56}{3}-6=\frac{38}{3}=12\frac{2}{3}\ .$$

❖ Endi $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ ($t\in[\alpha,\beta]$) parametrik tenglama bilan berilgan chiziqdan hosil qilingan egri chiziqli trapetsiya yuzasini hisoblash masalasini qaraymiz. Unda (1) formuladagi aniq integralda x o'zgaruvchini t o'zgaruvchi bilan almashtirib, quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b ydx=\int_\alpha^\beta\psi(t)d\varphi(t)=\int_\alpha^\beta\psi(t)\varphi'(t)dt\ . \qquad (5)$$

Misol sifatida yarim o'qlari a va b bo'lgan ellipsning S yuzasini topamiz. Bu ellipsning parametrik tenglamasi $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ ($t\in[0,2\pi]$) ekanligi bizga ma'lum. Ellipsning simmetrikligidan hamda (5) formuladan foydalanib, uning yuzasi S uchun

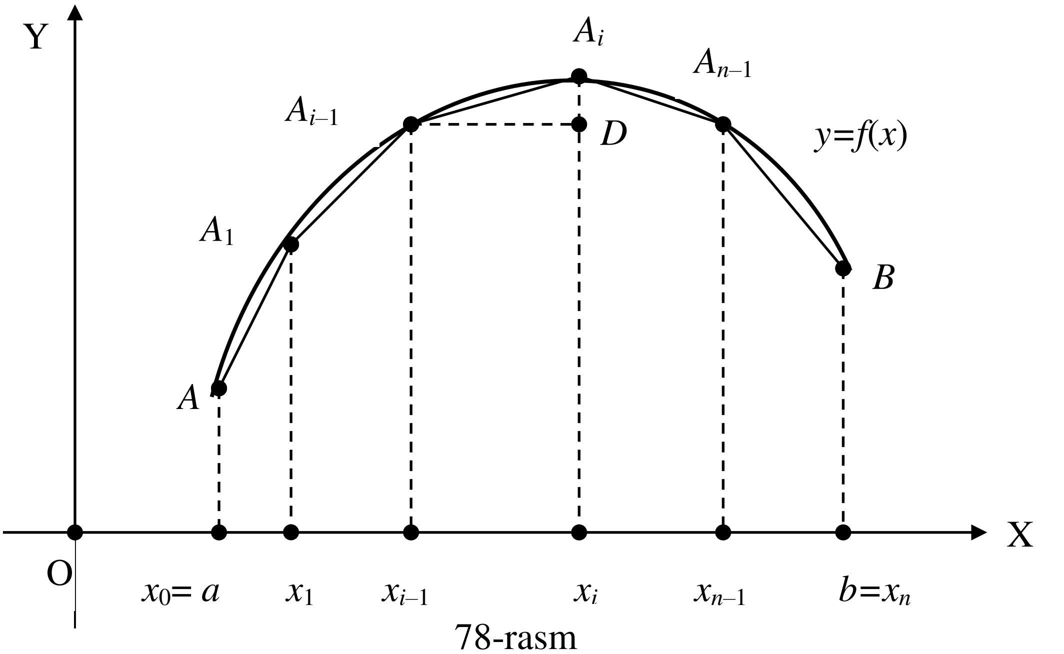
$$S=4\int_0^a f(x)dx=4\int_{\pi/2}^0 b\sin t(-a\sin t)dt=-4ab\int_{\pi/2}^0\sin^2 tdt=$$

$$=-4ab\int_{\pi/2}^0\frac{1-\cos 2t}{2}dt=-2ab\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\pi/2}^0=\pi ab$$

formulaga ega bo'lamiz. Bunda $a=b=R$ desak, unda ellips aylanaga o'tadi va yuqoridagi formuladan doira yuzasi uchun bizga tanish bo'lgan $S=\pi R^2$ formula kelib chiqadi.

7.2. Tekislikdagi egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash. Maktab geometriyasida tekislikdagi egri chiziqlardan faqat aylana va uning yoylari uzunligini hisoblash formulasi beriladi. Parabola, giperbola, sinusoida kabi egri chiziqlarning turli yoylari uzunligini hisoblash masalasi amaliyotda kerak bo‘ladi. Bu masala ham aniq integral yordamida o‘z yechimini topadi.

$y=f(x)$, $x\in[a,b]$, funksiya bilan berilgan egri chiziqning AB yoyi uzunligini topish masalasini qaraymiz (78-rasmga qarang).



78-rasm

Bunda $f(x)$ differensiallanuvchi va uning $f'(x)$ hosilasi $[a,b]$ kesmada uzluksiz deb hisoblaymiz. Berilgan $[a,b]$ kesmani

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

nuqtalar bilan ixtiyoriy n bo‘lakka ajratamiz. Natijada AB yoy n ta kichik $A_{i-1}A_i$ (i=1, 2, ···, n) yoychalarga ajraladi.

Agar AB yoy uzunligi l va $A_{i-1}A_i$ (i=1, 2, ···, n) yoychalar uzunliklari Δl_i deb olsak, unda

$$l=\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i$$

deb yozish mumkin. Endi kichik $A_{i-1}A_i$ (i=1, 2, ···, n) yoychalarni ularning vatari , ya’ni $A_{i-1}A_i$ kesmalar bilan almashtiramiz. To‘g‘ri burchakli $A_{i-1}A_iD$ uchburchakda

$$|A_{i-1}D|=x_i-x_{i-1}=\Delta x_i, \qquad |A_iD|=f(x_i)-f(x_{i-1})=\Delta f(x_i)$$

katetlar bo‘yicha $A_{i-1}A_i$ gipotenuza uzumligini Pifagor teoremasidan foydalanib topamiz:

$$|A_{i-1}A_i|=\sqrt{|A_{i-1}D|^2+|A_iD|^2}=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta f(x_i))^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i}\right)^2}\cdot\Delta x_i\,.$$

Bu yerda $\Delta l_i\approx|A_{i-1}A_i|$ deb, izlanayotgan yoy uzunligi l uchun ushbu taqribiy tenglikni hosil etamiz:

$$l=\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i\approx\sum_{i=1}^{n}|A_{i-1}A_i|=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i=L_n\quad.$$

Bu taqribiy tenglikdan aniq tenglikka o‘tish uchun $n\to\infty$, $\Delta_n\to 0$ deb olamiz. Bu holda, hosila ta’rifiga asosan,

$$\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i} \approx f'(x_i)$$

deb olish mumkin. Shu sababli yuqoridagi L_n yig‘indini $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ funksiya uchun $[a,b]$ kesma bo‘yicha integral yig‘indi deb qarash mumkin. Unda, aniq integral ta’rifiga asosan, izlanayotgan yoy uzunligi l uchun quyidagi formulani hosil etamiz:

$$l = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} L_n = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left(\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \ . \qquad (6)$$

Misol sifatida $y=\ln\sin x$ egri chiziqning $x=\pi/3$ va $x=\pi/2$ abssissali nuqtalari orasidagi yoyining uzunligini topamiz. Bunda $y'=\mathrm{ctg}x$ ekanligidan va universal almashtirmadan foydalanib, (6) formulaga asosan, ushbu natijani olamiz:

$$l = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 x}\,dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 x}\,dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} t = tg\frac{x}{2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \alpha = tg\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \beta = tg\frac{\pi}{4} = 1 \end{array}\right] = \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{1+t^2}{2t}\frac{2dt}{1+t^2} = \ln t\Big|_{1/\sqrt{3}}^{1} = \ln\sqrt{3} \ .$$

Agar egri chiziq $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ ($t\in[\alpha,\beta]$) parametrik tenglamasi bilan berilgan bo‘lsa, unda $dx=\varphi'(t)dt$, $dy=\psi'(t)dt$ va

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

bo‘lgani uchun (6) formula quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{1+[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t))}]^2}\,\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt \ . \qquad (7)$$

Misol sifatida $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$ ($t\in[0,\ln\pi]$) parametrik tenglamasi bilan berilgan egri chiziq yoyi uzunligini topamiz. Bunda

$$x'=\varphi'(t)= e^t(\cos t-\sin t)\ ,\ y'=\psi'(t)= e^t(\cos t+\sin t)$$

bo‘lgani uchun, (7) formulaga asosan, quyidagi javobga ega bo‘lamiz:

$$l = \int_0^{\ln\pi} \sqrt{[e^t(\cos t-\sin t)]^2+[e^t(\cos t+\sin t)]^2}\,dt = \sqrt{2}e^t\Big|_0^{\ln\pi} = \sqrt{2}(\pi-1) \ .$$

7.3. Aniq integral yordamida jismlar hajmini hisoblash. Maktab geometriyasidan biz faqat eng sodda jismlar bo‘lmish prizma, piramida, konus, silindr va shar hajmlarini hisoblash formulalarini bilamiz. Aniq integral yordamida bir qator murakkabroq jismlarning hajmini hisoblash imkoniyatiga ega bo‘lamiz.

- ***Jism hajmini uning ko‘ndalang kesimi yuzasi bo‘yicha hisoblash.*** Bizga biror J jism berilgan bo‘lib, uni OX o‘qiga perpendikular tekisliklar bilan kesganimizda hosil bo‘ladigan kesimlarning yuzasi ma’lum va bu yuza biror uzluksiz $S(x)$, $x\in[a,b]$, funksiya orqali ifodalansin. Bu holda J jismning V hajmini topish masalasini qaraymiz. Buning uchun $[a,b]$ kesmani

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

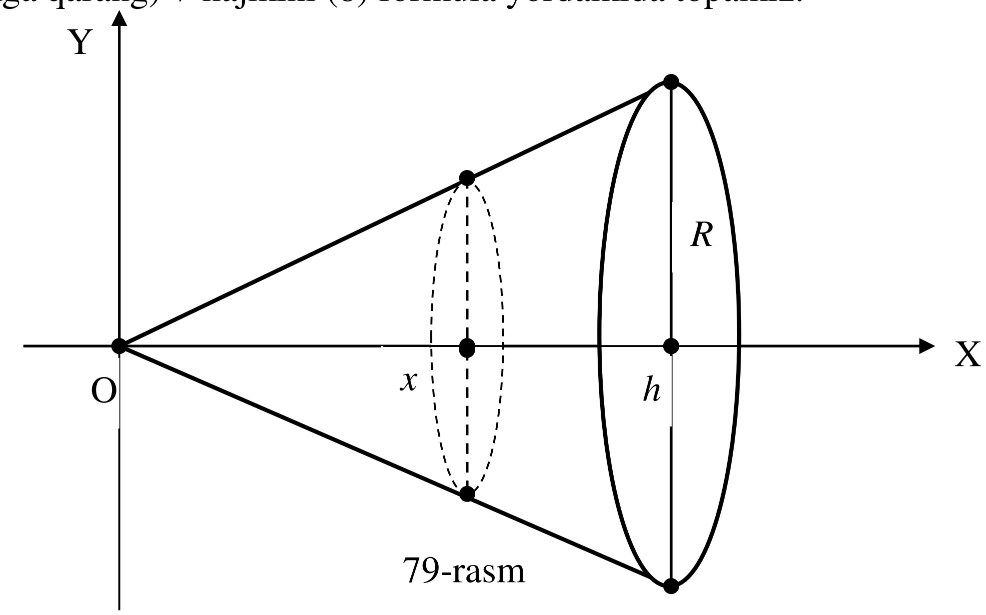
nuqtalar bilan ixtiyoriy n bo‘lakka ajratamiz va bu nuqtalar orqali OX o‘qiga perpendikular tekisliklar o‘tkazamiz. Bu tekisliklar jismni J_i (i=1, 2, $\cdots$, n) qatlamlarga ajratadi. Bu qatlamlarning hajmlarini ΔV_i (i=1, 2, $\cdots$, n) deb belgilasak, unda izlangan V hajmni $V=\Delta V_1+\Delta V_2+\cdots+\Delta V_n$ yig‘indi ko‘rinishida yozish mumkin. Yuqorida ko‘rsatilgan x_i bo‘linish nuqtalari orqali hosil qilingan har bir $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalardan (i=1, 2, $\cdots$, n) ixtiyoriy bir ξ_i nuqtalarni tanlab olamiz. Endi J_i (i=1, 2, $\cdots$, n) qatlamlarning har birini balandligi $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, asosining yuzasi esa $S(\xi_i)$ bo‘lgan silindrik jismlar bilan almashtiramiz. Bu holda $\Delta V_i\approx S(\xi_i)\Delta x_i$ taqribiy tenglik o‘rinli ekanligini nazarga olsak, yuqoridagi yig‘indidan

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i\approx\sum_{i=1}^{n}S(\xi_i)\Delta x_i=V_n$$

taqribiy natijaga ega bo‘lamiz. Bu taqribiy tenglikda bo‘laklar soni n qanchalik katta va $\Delta_n=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$ qanchalik kichik bo‘lsa, V_n yig‘indi izlanayotgan V hajm qiymatiga shunchalik yaqin bo‘ladi deb olish mumkin. Shu sababli J jismning hajmi V yuqoridagi V_n yig‘indilar ketma-ketligining $n\to\infty$, $\Delta_n\to 0$ bo‘lgandagi limiti deb olinadi. Unda V_n yig‘indi $S(x)$ funksiya uchun $[a,b]$ kesma bo‘yicha integral yig‘indi ekanligini hisobga olib va aniq integral ta’rifidan foydalanib, berilgan J jismning V hajmini uning ko‘ndalang kesimi yuzasi $S(x)$ bo‘yicha hisoblash uchun quyidagi formulaga ega bo‘lamiz:

$$V=\lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}}V_n=\lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}}\sum_{i=1}^{n}S(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b S(x)dx\ . \qquad (8)$$

Misol sifatida asosining radiusi R, balandligi esa h bo‘lgan doiraviy konusning (79-rasmga qarang) V hajmini (8) formula yordamida topamiz.



79-rasm

Bunda ko‘ndalang kesimlar doiralardan iborat bo‘lib, ularning radiuslari $r=Rx/h$, $x\in[0,h]$, funksiya bilan aniqlanadi. Demak, ko‘ndalang kesim yuzasi

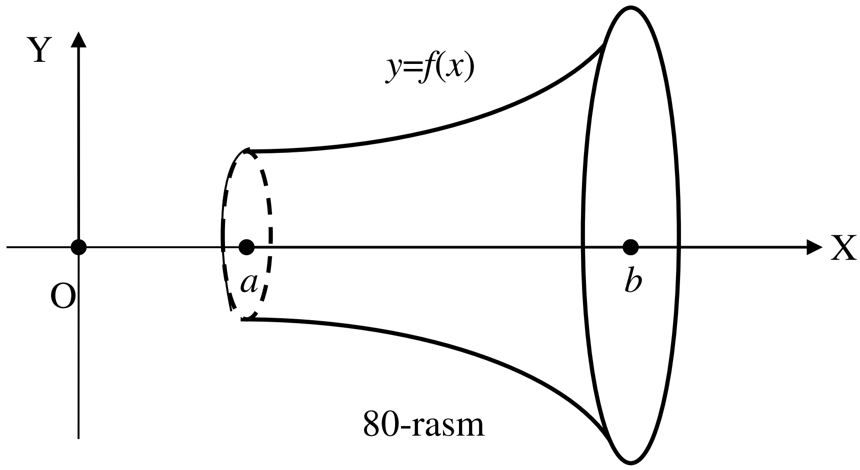
$$S(x)=\pi r^2=\pi(Rx/h)^2$$

funksiya bilan ifodalanadi. Unda bu konus hajmi uchun, (8) tenglikka asosan,

$$V=\int_0^h S(x)dx=\int_0^h \frac{\pi R^2x^2}{h^2}dx=\frac{\pi R^2x^3}{3h^2}\bigg|_0^h=\frac{\pi R^2h^3}{3h^2}=\frac{\pi R^2h}{3}=\frac{1}{3}S_{asos}\cdot h$$

formulaga , ya'ni bizga maktabdan tanish bo'lgan natijaga kelamiz.

- ***Aylanma jismlarining hajmini hisoblash.*** Endi $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, funksiya grafigi orqali hosil qilingan egri chiziqli trapetsiyaning OX koordinata o'qi atrofida aylanishdan hosil bo'lgan *J* aylanma jismning (80-rasmga qarang) *V* hajmini topish masalasini ko'ramiz.



80-rasm

Bunda aylanma jismning ko'ndalang kesimlari doiralardan iborat bo'lib, ularning yuzasi $S(x)=\pi f^2(x)$ funksiya bilan ifodalanadi. Demak, (8) formulaga asosan, aylanma jism hajmi *V* uchun ushbu formulaga ega bo'lamiz:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx\quad. \tag{9}$$

Misol sifatida oldin ko'rib o'tilgan doiraviy konusning hajmini yana bir marta hisoblaymiz. Bu konusni uning $y=Rx/h$ tenglamali yasovchisini OX koordinata o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan aylanma jism deb qarash mumkin ya shu sababli, (9) formulaga asosan,

$$V=\pi\int_0^h \frac{R^2x^2}{h^2}dx=\frac{\pi R^2x^3}{3h^2}\bigg|_0^h=\frac{\pi R^2h^3}{3h^2}=\frac{\pi R^2h}{3}=\frac{1}{3}S_{asos}\cdot h$$

natijaga, ya'ni oldin hosil qilingan formula o'rinli ekanligiga yana bir marta ishonch hosil etamiz.

Yana bir misol sifatida yarim o'qlari *a* va *b* bo'lgan ellipsni OX o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'ladigan ellipsoidning hajmini topamiz. Ellipsning kanonik tenglamasidan (V bob,§3, (7))

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),\ x\in[-a,a]$$

ekanligini topamiz. Bu natijani (7) formulaga qo'yib, ellipsoidning *V* hajmini hisoblaymiz:

$$V=\pi\int_{-a}^{a} f^2(x)dx=\pi\int_{-a}^{a} y^2dx=\pi b^2\int_{-a}^{a}(1-\frac{x^2}{a^2})dx=\pi b^2(x-\frac{x^3}{3a^2})\Big|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

Agar bunda $a=b=R$ deb olsak, unda ellipsoid radiusi R bo‘lgan sharga aylanadi va bu holda sharning halmi uchun yuqoridagi natijadan bizga maktabdan tanish bo‘lgan $V=4\pi R^3/3$ formula kelib chiqadi.

7.4. Aniq integralni mexanika masalalariga tatbiqlari. Biz oldin kattaligi o‘zgaruvchan va $f(x)$ funksiya bilan aniqlanadigan kuch moddiy nuqtani $[a,b]$ kesma bo‘yicha harakatlantirganda bajarilgan A ish qiymati aniq integral orqali

$$A=\int_a^b f(x)dx$$

formula bilan hisoblanishini ko‘rsatgan edik. Ammo bu bilan aniq integralni mexanika masalalarini yechishga tatbig‘i chegaralanib qolmaydi. Bunga misol sifatida bu yo‘nalishda yana ikkita masalani ko‘rib o‘tamiz.

- ***Notekis harakatda bosib o‘tilgan masofani hisoblash.*** Ma’lumki, biror v o‘zgarmas tezlik bilan to‘g‘ri chiziq bo‘ylab tekis harakat qilayotgan moddiy nuqtaning $[a,b]$ vaqt oralig‘ida bosib o‘tgan s masofasi $s=v(b-a)$ formula bilan hisoblanadi. Endi tezligi har bir t vaqtda o‘zgaruvchan va $v=v(t)$ funksiya bilan aniqlanadigan notekis harakatda moddiy nuqtaning $[a,b]$ vaqt oralig‘ida bosib o‘tadigan s masofani hisoblash masalasini ko‘ramiz. Buning uchun $[a,b]$ vaqt oraligini $a=t_0$, t_1, t_2, ….. , t_{n-1}, $t_n=b$ nuqtalar bilan ixtiyoriy n bo‘lakka ajratamiz. Har bir (t_{i-1}, t_i) vaqt oraliqchalari uzunliklarini Δt_i kabi belgilaymiz va undan ixtiyoriy bir $\tilde{t}_i$ nuqtani tanlaymiz. Moddiy nuqtaning (t_{i-1}, t_i) vaqt oraliqchalarida bosib o‘tgan masofasini s_i kabi belgilab, bu vaqtda uning v_i tezligi taqriban o‘zgarmas va $v_i=v(\tilde{t}_i)$deb olamiz. Bu holda $s_i\approx v_i\Delta t_i=v(\tilde{t}_i)\Delta t_i$ bo‘lib, bosib o‘tilgan s masofa uchun

$$s=\sum_{i=1}^{n}s_i\approx\sum_{i=1}^{n}v_i\Delta t_i=\sum_{i=1}^{n}v(\tilde{t}_i)\Delta t_i$$

taqribiy tenglikni hosil qilamiz. Bu masofaning aniq qiymatini topish maqsadida bo‘lakchalar soni n ni cheksiz oshirib boramiz. Bunda $\Delta_n=\max_{1\le i\le n}\Delta x_i$ cheksiz kamayib boradi deb hisoblaymiz. Natijada, aniq integral ta’rifiga asosan,

$$s=\lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}}\sum_{i=1}^{n}v(\tilde{t}_i)\Delta t_i=\int_a^b v(t)dt \qquad (10)$$

formulaga ega bo‘lamiz.

Misol sifatida tezligi $v(t)=t^2+3t$ qonun bo‘yicha o‘zgaradigan notekis harakatda [3,8] vaqt oralig‘ida bosib o‘tilgan s masofani (10) formulaga asosan topamiz:

$$s=\int_3^8(3t^2+4t)dt=(t^3+2t^2)\Big|_3^8=(8^3+2\cdot 8^2)-(3^3+2\cdot 3^2)=640-45=595.$$

Bundan tashqari aniq integral bir jinsli bo‘lmagan sim massasini, yassi chiziq va geometrik shaklning og‘irlik markazi, inersiya momentlarini hisoblash uchun ham qo‘llaniladi.

7.5. Aniq integralning ayrim iqtisodiy tatbiqlari. Aniq integral tushunchasi kiritilayotganda , o‘zgaruvchan mehnat unumdorligi bo‘yicha mahsulot hajmini aniqlash masalasini ko‘rgan edik. Masalan, korxonada mehnat unumdorligi har bir ish kuni davomida

$$z = f(t) = -0{,}0033t^2 - 0{,}089t + 20{,}96$$

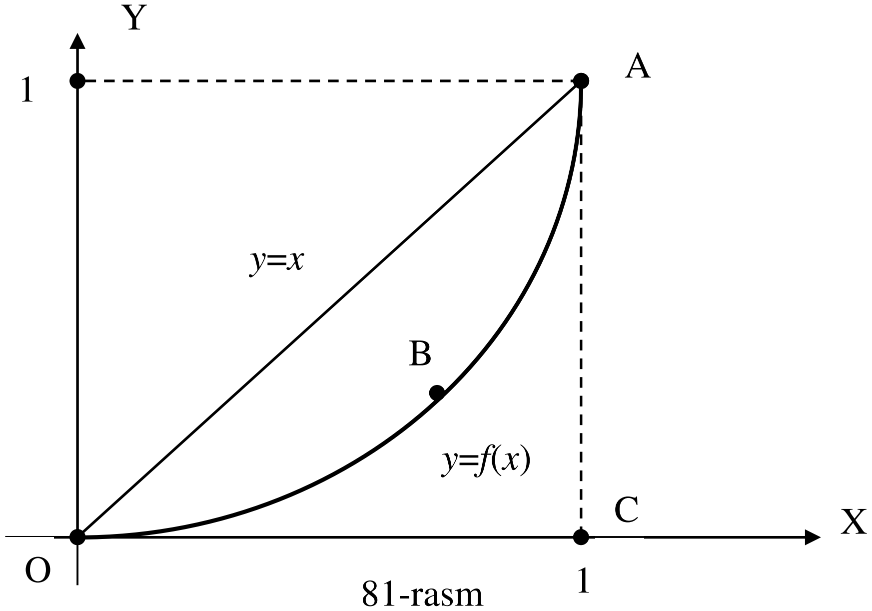
funksiya bilan berilgan bo‘lsin. Bunda $0 \le t \le 8$ bo‘lib, t vaqtni soatda ifodalaydi. Bu korxonaning yil (258 ish kuni) davomida ishlab chiqargan mahsulot hajmini topamiz:

$$Q = 258\int_0^8 (-0{,}0033t^2 - 0{,}089t + 20{,}96)dt = 258 \cdot (-0{,}0011t^3 - 0{,}0445t^2 + 20{,}96t)\Big|_0^8 =$$

$$= 258 \cdot (-0{,}5632 - 2{,}848 + 167{,}68) = 258 \cdot 164{,}2688 = 42381{,}3504 \ .$$

Demak, bu korxona bir yilda 42381 dona mahsulot ishlab chiqaradi. Biz bu yerda yana bir qator iqtisodiy masalalarni aniq integral yordamida yechilishi bilan tanishamiz.

❖ ***Djini koeffitsiyentini hisoblash masalasi.*** Aholi o‘rtasida daromadni qanchalik darajada notekis taqsimlanganligini ifodalovchi $y=f(x)$, $x\in[0,1]$, funksiyani qaraymiz (keyingi betdagi 81-rasmga qarang). Bunda y – daromad ulushini, x – aholi ulushini belgilaydi.



81-rasm

Bu funksiya grafigini ifodalovchi OBA egri chiziq ***Lorents egri chizig‘i*** deyiladi. Daromad aholi o‘rtasida tekis taqsimlangan holda $y=x$ bo‘ladi va bunda Lorents egri chizig‘i bissektrisadagi OA kesmaga aylanadi. Shu sababli har qanday $x\in[0,1]$ uchun $0\le f(x)\le x$ qo‘sh tengsizlik bajariladi. Bunda OABO geometrik shakl yuzasi qanchalik katta bo‘lsa, daromadni notekis taqsimlanish darajasi ham shunchalik katta bo‘ladi. Shu sababli aholi o‘rtasida daromadni notekis taqsimotini o‘lchovi sifatida OABO shakl yuzasini OAC uchburchak yuzasiga nisbati olinadi. Bu nisbat

Djini koeffitsiyenti deb ataladi va k orqali belgilanadi. Bu yerda yuzalarni aniq integral orqali ifodalab, Djini koeffitsiyenti uchun quyidagi formulani hosil etamiz:

$$k=\frac{S_{OABO}}{S_{OAC}}=\frac{\int\limits_0^1[x-f(x)]dx}{\int\limits_0^1 xdx}=2\int\limits_0^1[x-f(x)]dx \qquad (11)$$

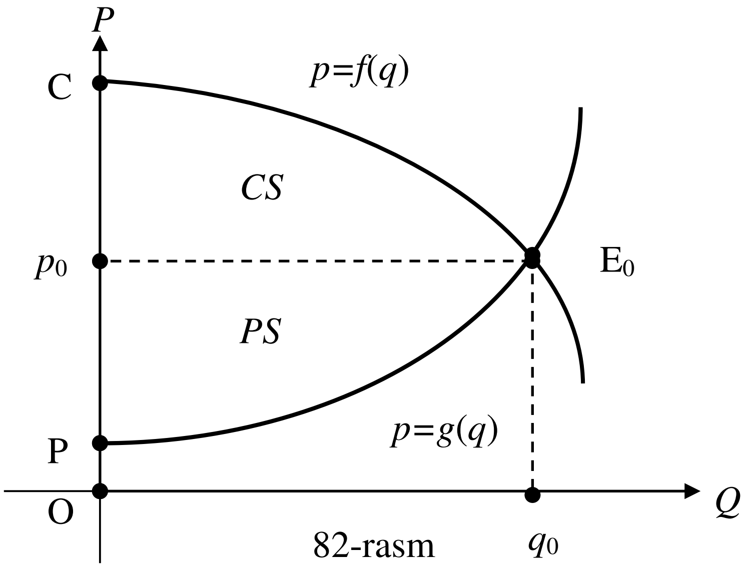
Masalan, Lorents egri chizig'i $y=x/(3-2x)$, $x\in[0,1]$, funksiya bilan berilgan holda Djini koeffitsiyentini (11) formula bo'yicha hisoblaymiz:

$$k=2\int\limits_0^1(x-\frac{x}{3-2x})dx=2\int\limits_0^1(x+\frac{x-1{,}5+1{,}5}{2x-3})dx=2\int\limits_0^1(x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2x-3})dx=$$

$$=2(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\cdot\ln|2x-3|)\Big|_0^1=2(1-\frac{3}{4}\cdot\ln 3)\approx 0{,}352\ .$$

❖ ***Iste'molchi va ishlab chiqaruvchining yutuqlari masalasi.*** Dastlab talab va taklif funksiyalari tushunchalarini kiritamiz.

Mahsulot birligining narxi p va shu mahsulotni iste'molchi tomonidan xarid qilinish halmi q orasidagi bog'lanishni ifodalovchi $p=f(q)$ funksiya ***talab funksiyasi*** deb ataladi. Iqtisodiyotda narx p, hajm (miqdor) q harfi bilan belgilanadi va shu sababli talab funksiyasi an'anaviy $y=f(x)$ ko'rinishda yozilmasdan, $p=f(q)$ ko'rinishda yozildi (82-rasmga qarang).



82-rasm

Mazmuniga asosan bu funksiya kamayuvchi bo'ladi, chunki mahsulot narxi p oshishi bilan bu mahsulotni xarid qilish hajmi q kamayadi (yuqoridagi chizmaga qarang).

Mahsulot birligining narxi p va shu mahsulotni ishlab chiqarilish hajmi q orasidagi bog'lanishni ifodalovchi $p=g(q)$ funksiya ***taklif funksiyasi*** deb ataladi. Mazmuniga asosan bu funksiya o'suvchi bo'ladi, chunki mahsulot narxi p oshishi bilan bu mahsulotni ishlab chiqarish hajmi q oshadi (yuqoridagi chizmaga qarang).

Talab va taklif funksiyalarning grafiklari qandaydir bir $E_0(q_0,p_0)$ nuqtada kesishadi. Bu nuqtada iste'molchining talabi hajmi va ishlab chiqaruvchining taklif hajmi o‘zaro teng bo‘ladi. Bunday holat ***bozor muvozanati*** deb ataladi. Bozor muvozanatini keltirib chiqaruvchi mahsulot hajmi q_0 va narxi p_0 qiymatlari berilgan talab va taklif funksiyalari bo‘yicha

$$\begin{cases} f(q) = p \\ g(q) = p \end{cases} \tag{12}$$

tenglamalar sistemasidan topiladi.

Bozor muvozanati shartida iste’molchilar o‘zlarining q_0 hajmdagi talablarini qondirishlari uchun mahsulot birligining p_0 narxda xarid qilib, jami p_0q_0 miqdorda xarajat qilishlari mumkin. Ammo bir qism iste’molchilar u yoki bu sabablar bo‘yicha mahsulot xarid qilishni bozor muvozanati erishiladigan vaqtgacha kutib o‘tira olmaydilar. Bundan tashqari ishlab chiqaruvchi ham o‘z mahsulotini iloji boricha p_0 narxdan yuqoriroq bahoda sotishga harakat qiladi. Shu sababli iste’molchi talab etgan q_0 hajmdagi mahsulotni ishlab chiqaruvchi bozorga birdaniga chiqarmasdan va uning hammasini birdaniga p_0 narxda sotmasdan, u o‘z mahsulotini Δq_i (i=1,2,3,$\cdots$, n) hajmdagi kichik-kichik partiyalarda bozorga chiqarib, uni $f(q_i)>p_0$ narxda sotadi. Natijada iste’molchi o‘ziga kerak bo‘lgan q_0 hajmdagi mahsulotni xarid qilish uchun p_0q_0 miqdorda xarajat qilish o‘rniga

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(q_i)\Delta q_i$$

miqdor xarajat qiladi. Mahsulot ishlab chiqarish va uni xarid qilish jarayonlari uzluksiz ravishda ro‘y berib turadi. Shu sababli $f(x)$ talab funksiyasini uzluksiz va mahsulotni kichik-kichik Δq_i hajmli partiyalar soni $n\to\infty$ deb olish mumkin. Bu holda , aniq integral ta’rifiga asosan, iste’molchining q_0 hajmdagi mahsulotni xarid qilish uchun qilgan xarajatining asl qiymati quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n(f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(q_i)\Delta q_i = \int_0^{q_0} f(q)dq. \tag{13}$$

Bu yerdan ko‘rinadiki, agar iste’molchi o‘zi talab etgan q_0 hajmdagi mahsulotni p_0 bozor muvozanati narxida xarid qilganda, uning xarajatlari

$$CS = S - p_0q_0 = \int_0^{q_0} f(q)dq - p_0q_0 = \int_0^{q_0} [f(q) - p_0]dq \tag{14}$$

miqdorda kam bo‘lar edi. Shu sababli ***CS iste’molchining yutug‘i*** , ba’zan esa ***iste’molchining ortiqcha xarajati*** deb yuritiladi. Yuqoridagi 82-rasmda bu ko‘rsatkich p_0E_0C egri chiziqli trapetsiya yuzasi kabi ifodalanadi.

Xuddi shundek, ishlab chiqaruvchi bozor muvozanatida o‘zi taklif etgan q_0 hajmdagi mahsulotni p_0 narxda sotganda p_0q_0 miqdordagi pul mablag‘iga ega bo‘lar edi. Ammo u bozor muvozanati bo‘lishini kutib o‘tirmasdan, Δq_i hajmda (i=1,2,3,$\cdots$, n) ishlab chiqargan mahsulotini darhol bozorga chiqarib, uning har birligini $g(q_i)<p_0$ narxda sotadi. Natijada ishlab chiqaruvchining q_0 hajmdagi mahsulotni sotish orqali erishgan asl pul mablag‘i quyidagicha bo‘ladi:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n(g) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(q_i)\Delta q_i = \int_0^{q_0} g(q)dq < p_0q_0.$$

Shunday qilib, ishlab chiqaruvchi o‘z mahsulotini bozor muvozanati shartida sotganda

$$PS = p_0 q_0 - \int_0^{q_0} g(q)dq = \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)]dq \qquad (15)$$

qoshimcha pul mablag‘iga ega bo‘lar edi. Shu sababli *PS* ***ishlab chiqaruvchining yutug‘i*** deb ataladi. Yuqoridagi 82-rasmda bu ko‘rsatkich Pp_0E_0 egri chiziqli trapetsiya yuzasi kabi ifodalanadi.

Masalan,talab funksiya $p=f(q)=240-q^2$, taklif funksiya esa $p=g(q)=q^2+2q+20$ ko‘rinishda bo‘lganda iste’molchi va ishlab chiqaruvchi yutuqlarini aniqlaymiz. Buning uchun dastlab ushbu tenglamalar sistemasini yechamiz:

$$\begin{cases} p = 240 - q^2 \\ p = q^2 + 2q + 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 240 - q^2 \\ 240 - q^2 = q^2 + 2q + 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 240 - q^2 \\ q^2 + q - 110 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0 = 140 \\ q_0 = 10 \end{cases}$$

Demak, bozor muvozanati narxi p_0=140, hajmi esa q_0=10 bo‘ladi. Unda, (15) formulaga asosan, iste’molchining yutug‘i

$$CS = \int_0^{q_0} [f(q) - p_0]dq = \int_0^{10} [240 - q^2 - 140]dq = (100q - \frac{q^3}{3})\Bigg|_0^{10} = 666,(6) \approx 667\,,$$

ishlab chiqaruvchining yutug‘i esa, (16) formulaga asosan,

$$PS = \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)]dq = \int_0^{10} [120 - q^2 - 2q]dq = (120q - \frac{q^3}{3} - q^2)\Bigg|_0^{10} = 766,(6) \approx 767\,.$$

XULOSA

Oldin aytilgandek aniq integral juda ko‘p amaliy masalalarni yechish uchun qo‘llaniladi. Geometriyada aniq integraldan turli ko‘rinishdagi egri chiziqli trapetsiyalarning yuzalarini hisoblash, egri chiziq yoyining uzunligini topish, jismlar hajmini aniqlash kabi masalalarni yechishda foydalaniladi. Aniq integralning mexanik tatbiqlariga misol sifatida kuch bajargan ishni hisoblash, notekis harakatda bosib o‘tilgan masofani aniqlash, sim massasini topish kabilarni ko‘rsatish mumkin. Iqtisodiy nazariyada esa aniq integral yordamida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini topish, iqtisodiy ko‘rsatkich bo‘lgan Djini koeffitsiyentini hisoblash, iste’molchi va ishlab chiqaruvchining yutug‘ini aniqlash kabi masalalar o‘z yechimini topadi.

Tayanch iboralar

* Egri chiziqli trapetsiya yuzasi * Tekislikdagi shakl yuzasi * Egri chiziq yoyi uzunligi * Ko‘ndalang kesim bo‘yicha jism hajmi * Aylanma jism hajmi * O‘zgaruvchi kuch bajargan ish * Notekis harakatda bosib o‘tilgan masofa * Lorents egri chizig‘i * Djini koeffitsiyenti * Talab funksiyasi * Taklif funksiyasi * Bozor muvozanati * Iste’molchining yutug‘i * Ishlab chiqaruvchining yutug‘i

Takrorlash uchun savollar

1. Tekislikdagi geometrik shakllarning yuzasi aniq integral orqali qanday hisoblanadi?
2. Tekislikdagi egri chiziq yoyi uzunligi aniq integral orqali qanday hisoblanadi?
3. Jism hajmini uning ko‘ndalang kesimi yuzasi orqali hisoblash formulasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
4. Aylanma jismning hajmi aniq integral yordamida qanday hisoblanadi?
5. O‘zgaruvchi kuch bajargan ish aniq integral orqali qanday ifodalanadi?
6. Notekis harakatda bosib o‘tilgan masofani hisoblash formulasini yozing.
7. Lorents egri chizig‘i deyilganda nima tushuniladi?
8. Djini koeffitsiyenti orqali nima aniqlanadi?
9. Djini koeffitsiyenti aniq integral orqali qanday ifodalanadi?
10. Talab funksiyasi nima va u qanday xossaga ega?
11. Taklif funksiyasi nima va u qanday xossaga ega?
12. Bozor muvozanati qanday aniqlanadi?
13. Iste’molchining yutug‘i qanday ma’noni ifodalaydi?
14. Ishlab chiqaruvchining yutug‘i nima va u qanday hisoblanadi?

Testlardan namunalar

1. $y=x^3$, $x=0$, $x=2$ va $y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning S yuzasini toping.

A) $S=1$; B) $S=2$; C) $S=3$; D) $S=4$; E) $S=5$.

2. $y=f(x)$ va $y=g(x)$, $f(x)\geq g(x)$, funksiyalarning grafiklari, $x=a$ va $x=b$ vertikal chiziqlar bilan chegaralangan geometrik shaklning S yuzasini hisoblash formulasi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?

A) $S=\int_a^b[f(x)+g(x)]dx$; B) $S=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$; C) $S=\int_a^b f(x)g(x)dx$;

D) $S=\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx$; E) $S=\int_a^b[g(x)-f(x)]dx$.

3. $y=x^2$ va $y=x^4$ egri chiziqlar bilan chegaralangan shaklning S yuzasini toping.

A) $S=4$; B) $S=2$; C) $S=3/10$; D) $S=2/15$; E) $S=3/8$.

4. $y=f(x)$, $x\in[a, b]$, funksiya grafigidan iborat yoyining l uzunligini hisoblash formulasini ko‘rsating.

A) $l=\int_a^b f(x)dx$; B) $l=\int_a^b\sqrt{1+f^2(x)}dx$; B) $l=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)}dx$;

C) $l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$; D) $l=\int_a^b\sqrt{1-[f'(x)]^2}dx$; E) $l=\int_a^b f^2(x)dx$.

5. Ko'ndalang kesimining yuzasi $S=3x^2$, $x\in[1,2]$, bo'lgan jismning V hajmini toping.

A) $V=3$; B) $V=1$; C) $V=2$; D) $V=5/3$; E) $V=7$.

6. $y=\sqrt{5}x^2$, $x\in[2,3]$, parabola yoyini OX koordinata o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan aylanma jismning V hajmini toping .

A) $V=5\pi$; B) $V=211\pi$; C) $V=24\pi^2$; D) $V=(5\pi)^2$; E) $V=45\pi$.

7. Moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab $v(t)=2t+5$ o'zgaruvchan tezlik bilan notekis harakat qilganda [4,8] vaqt oralig'ida bosib o'tgan s masofani toping.

A) $s=28$; B) $s=48$; C) $s=68$; D) $s=88$; E) $s=108$.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. $y^2=n^2x$ va $y=nx$ chiziqlar bilan chegaralangan geometrik shaklning yuzasini toping.

2. Kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{4n^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ bo'lgan ellipsni OX koordinata o'qi atrofida aylanishidan hosil qilingan aylanma jism hajmini aniqlang.

3. Tenglamasi $y^2=nx^3$ bo'lgan yarim kubik parabolaning koordinata boshi va $x=n$ abssissali nuqtalari orasidagi yoyining uzunligini toping.

§8. XOSMAS INTEGRALLAR

- ***I tur xosmas integrallar.***
- ***II tur xosmas integrallar.***
- ***Aralash turli xosmas integrallar.***

Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning aniq integrali tushunchasini ikkita shart bajarilgan holda qaragan edik. Birinchidan, $[a,b]$ integrallash sohasining a va b chegaralari chekli sonlardan iborat deb olingan edi. Ikkinchidan, integral ostidagi $f(x)$ funksiya $[a,b]$ integrallash sohasida chegaralangan deb hisoblangan edi.

Ammo bir qator masalalarni yechishda quyi yoki yuqori chegaralaridan kamida bittasi cheksiz ($\pm\infty$) yoki integral ostidagi $f(x)$ funksiya integrallash sohasida chegaralanmagan integrallar paydo bo'ladi. Masalan, $y=e^{-x}$, $x=0$ va $y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyani yuzasini topish masalasi $[0,\infty)$ cheksiz soha bo'yicha integral tushunchasini kiritishni va uni hisoblashni taqozo qiladi. Yoki $y=2\sqrt{x}$, $x\in[0,1]$, parabola yoyining uzunligini topish masalasi [0,1] kesmada chegaralanmagan $f(x)=\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ funksiyani integrallash masalasiga keladi.

Shu sababli aniq integral tushunchasini bunday hollar uchun umumlashtirishga to'g'ri keladi va bu yerda biz shu masala bilan shug'ullanamiz.

8.1. I tur xosmas integrallar. Berilgan $y=f(x)$ funksiya $[a, +\infty)$ cheksiz yarim oraliqda aniqlangan va ixtiyoriy chekli $b\geq a$ uchun $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi , ya'ni

$$F(b)=\int_a^b f(x)dx$$

integral mavjud bo'lsin.

1-TA'RIF: $y=f(x)$ funksiyaning $[a, +\infty)$ cheksiz yarim oraliq bo'yicha ***I tur xosmas integrali*** deb yuqori chegarasi o'zgaruvchi $F(b)$ integralning $b\to+\infty$ bo'lgandagi limitiga aytiladi.

$y=f(x)$ funksiyaning $[a, +\infty)$ cheksiz yarim oraliq bo'yicha I tur xosmas integrali

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad (1)$$

deb belgilanadi va , ta'rifga asosan,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

kabi aniqlanadi.

Geometrik nuqtai nazardan (1) xosmas integral $y=f(x)$ $[f(x)\geq 0]$, $x=a$ va $y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan cheksiz shaklning yuzasini ifodalaydi.

2-TA'RIF: Agar (2) limit mavjud va chekli bo'lsa, unda (1) xosmas integral ***yaqinlashuvchi***, aks holda esa ***uzoqlashuvchi*** deyiladi.

(1) xosmas integralni qarashda ikkita masala paydo bo'ladi.

I. (1) xosmas integral yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlash;

II. (1) xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lgan holda uning qiymatini topish.

Misol sifatida ushbu I tur xosmas integralni qaraymiz:

$$I_\alpha=\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}\,,\ a>0 \qquad (3)$$

Bu integralni uch holda tahlil etamiz.

1) Dastlab α>1 holni qaraymiz. Bu holda xosmas integral ta'rifi va Nyuton – Leybnits formulasiga asosan quyidagi natijani olamiz:

$$I_\alpha=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_a^b=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}}-a^{1-\alpha}\right)=\frac{1}{1-\alpha}(0-a^{1-\alpha})=\frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

Demak, bu holda qaralayotgan (3) xosmas integral yaqinlashuvchi va uning qiymati $a^{1-\alpha}/(\alpha-1)$ bo'ladi.

2) Endi α=1 holni tahlil etamiz:

$$I_1=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_a^b=\lim_{b\to+\infty}(\ln b-\ln a)=\infty\ .$$

Demak, bu holda (3) xosmas integral uzoqlashuvchi.

3) α<1, ya'ni 1–α>0 holni ko'rib chiqamiz:

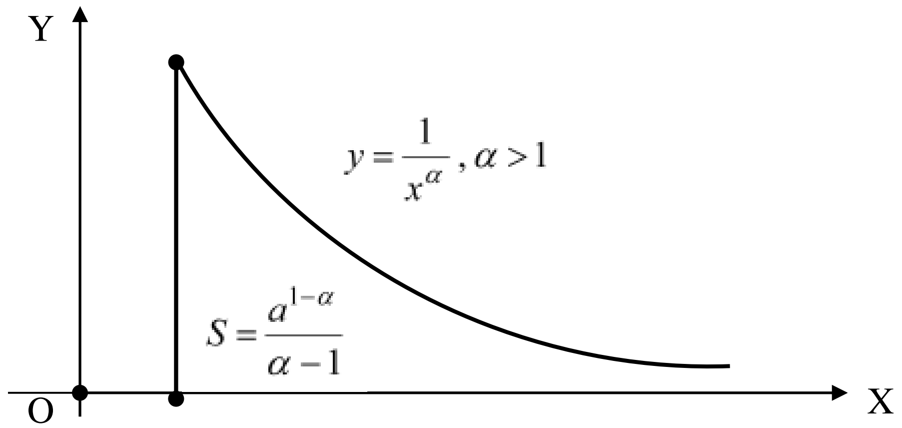
$$I_\alpha = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_a^b = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to+\infty}(b^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}) = \infty .$$

Demak, bu holda ham (3) xosmas integral uzoqlashuvchi ekan.

Shunday qilib, (3) xosmas integral α>1 holda yaqinlashuvchi, aks holda, ya'ni α≤1 bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi. Bu natijaning geometrik ma'nosi shundan iboratki, tekislikdagi

$$y=\frac{1}{x^\alpha}\ (\,x\in[a,\infty)\,,\, a>0)\,,\ x=1\,,\ y=0$$

chiziqlar bilan chegaralangan yarim cheksiz geometrik shakllar α>1 holda qiymati $S=a^{1-\alpha}/(\alpha-1)$ bo'l gan chekli yuzaga ega (83-rasmga qarang).



83-rasm

Aksincha, α≤1 bo'lganda esa bu geometrik shakllar cheksiz yuzaga ega bo'ladi.

Ko'p hollarda (1) xosmas integralning aniq qiymatini bilish shart bo'lmasdan, uning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini va, yaqinlashuvchi bo'lgan holda, qiymatini baholash yetarlidir. Bunday hollarda quyidagi teoremalardan foydalaniladi.

<u>1-TEOREMA:</u> Agar $a\le x<\infty$ cheksiz yarim oraliqda $0\le f(x)\le g(x)$ va $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, unda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral ham yaqinlashuvchi va quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

Isbot: Teorema sharti va aniq integral xossasiga asosan [§5, (17)], ixtiyoriy $a<b<+\infty$ uchun

$$F(b)=\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \le G\,,\qquad G=\int_a^{+\infty} g(x)dx\,,$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bunda $F'(b)=f(b)\ge 0$ bo'lgani uchun $F(b)$ monoton kamaymovchi funksiyadir. Ikkinchi tomondan barcha $b\ge a$ uchun $F(b)\le G<\infty$, ya'ni chegaralangan funksiyadir. Bulardan $b\to+\infty$ bo'lganda $F(b)$ chekli limitga ega bo'lishi kelib chiqadi. Bu yerdan, 1-ta'rifga asosan,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) \le G = \int_a^{+\infty} g(x)dx ,$$

ya'ni teorema tasdig'i o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Misol sifatida ushbu xosmas integralni qaraymiz:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3(x+1)} .$$

Bunda integral ostidagi $f(x)$ funksiya

$$0 < f(x) = \frac{1}{x^3(x+1)} \le \frac{1}{2x^3} = g(x) ,\ x \ge 1$$

shartni qanoatlantiradi va

$$\int_1^{+\infty} g(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^3} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{2x^3} = \lim_{b\to+\infty}(-\frac{1}{4x^2})\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}(-\frac{1}{4b^2}+\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} .$$

Demak, 1-teoremaga asosan, berilgan I xosmas integral yaqinlashuvchi va uning qiymati $I\le 1/4$ bo'ladi.

2-TEOREMA: Agar $a\le x<\infty$ cheksiz yarim oraliqda $0 \le g(x) \le f(x)$ va $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi bo'lsa, unda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Bu teoremaning isboti 1-teorema isboti singari amalga oshiriladi va o'quvchiga mustaqil ish sifatida havola etiladi.

Masalan, $I = \int_1^{\infty} \frac{x+4}{\sqrt{x^3}}dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi ekanligini ko'rsatamiz.

Haqiqatan ham, $x\ge 1$ bo'lganda, integral ostidagi funksiya

$$f(x) = \frac{x+4}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = g(x)$$

shartni qanoatlantiradi va

$$\int_1^{+\infty} g(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}(2\sqrt{b}-2) = +\infty .$$

Bu yerdan, 2-teoremaga asosan, berilgan I integral uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Agar xosmas integral ostidagi $f(x)$ funksiya turli ishorali qiymatlarni qabul etsa, unda quyidagi teoremadan foydalanish mumkin.

3-TEOREMA: Agar $x\ge a$ bo'lganda $|f(x)|\le g(x)$ va $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, unda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral ham yaqinlashuvchi va

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} |f(x)|dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx \qquad (4)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Bu teoremani isbotsiz qabul etamiz.

Masalan, ixtiyoriy λ haqiqiy soni uchun

$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos\lambda x}{x^\alpha} dx \quad (\alpha > 1, a > 0) \qquad (5)$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘ladi, chunki

$$\left|\frac{\cos\lambda x}{x^\alpha}\right| \le \frac{1}{x^\alpha} = g(x) \Rightarrow \int_a^{+\infty} \frac{\cos\lambda x}{x^\alpha} dx \le \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \ .$$

<u>3-TA’RIF:</u> Agar $J = \int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, unda $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral ***absolut yaqinlashuvchi*** deyiladi. Agar I yaqinlashuvchi, J esa uzoqlashuvchi bo‘lsa, unda I xosmas integral ***shartli yaqinlashuvchi*** deb ataladi.

Masalan, (5) xosmas integral $\alpha>1$ holda absolut yaqinlashuvchi, $0<\alpha\le 1$ holda esa shartli yaqinlashuvchi ekanligini ko‘rsatish mumkin.

Yuqoridagi (4) tengsizlikdan absolut yaqinlashuvchi xosmas integral yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Agar $y=f(x)$ funksiya $(-\infty, b]$ cheksiz yarim oraliqda aniqlangan bo‘lsa, uning bu soha bo‘yicha I tur xosmas integrali yuqoridagi (2) tenglikka o‘xshash tarzda quyidagicha aniqlanadi:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx \ . \qquad (6)$$

Bu xosmas integral uchun ham uning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligi 2-ta’rif asosida aniqlanadi.

Masalan, har qanday chekli b va $\lambda>0$ sonlari uchun $I = \int_{-\infty}^{b} e^{\lambda x} dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi, chunki

$$I = \int_{-\infty}^{b} e^{\lambda x} dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b e^{\lambda x} dx = \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}\Big|_a^b = \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{\lambda}(e^b - e^a) = \frac{1}{\lambda}(e^b - 0) = \frac{e^b}{\lambda} \ .$$

Agar $y=f(x)$ funksiya cheksiz $(-\infty,\infty)$ oraliqda aniqlangan bo‘lsa, uning bu oraliq bo‘yicha I tur xosmas integrali yuqorida kiritilgan xosmas integrallar orqali

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)dx \qquad (7)$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bunda c – ixtiyoriy chekli son, jumladan 0 bo‘lishi mumkin.

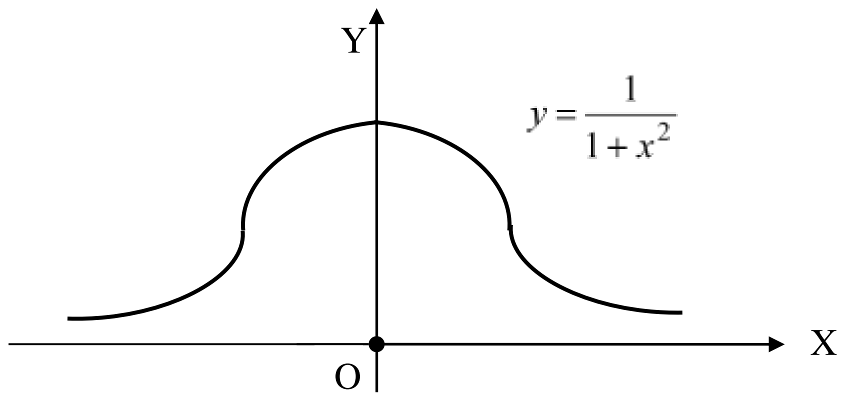
<u>4-TA’RIF:</u> Agar (7) tenglikning o‘ng tomonidagi ikkala xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, unda tenglikning chap tomonidagi xosmas integral ham ***yaqinlashuvchi*** deyiladi. Agar o‘ng tomondagi xosmas integrallardan kamida bittasi uzoqlashuvchi bo‘lsa, unda chap tomondagi xosmas integral ***uzoqlashuvchi*** deb ataladi.

Masalan,

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_a^0+\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^b=[0-(-\pi/2)]+[(\pi/2)-0]=\pi\,,$$

ya’ni J xosmas integral yaqinlashuvchi ekan. Demak, $y=1/(1+x^2)$, $x\in(-\infty,+\infty)$, va $y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan cheksiz geometrik shakl (84-rasmga qarang) chekli va π soniga teng yuzaga ega bo‘ladi.



84-rasm

8.2. II tur xosmas integrallar. Endi chegaralanmagan funksiyalar uchun aniq integral tushunchasini umumlashtiramiz. Berilgan $y=f(x)$ funksiya $(a,b]$ yarim oraliqda chegaralanmagan, ammo ixtiyoriy $\varepsilon\in(0,b-a]$ uchun bu funksiya $[a+\varepsilon,b]$ kesmada chegaralangan va integrallanuvchi bo‘lsin. Bu holda

$$F(\varepsilon)=\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx\,,\quad \varepsilon\in(0,b-a]\,,$$

funksiyani qarash mumkin.

5-TA’RIF: $F(\varepsilon)$ funksiyaning $\varepsilon\to0+0$ holdagi o‘ng limiti berilgan $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesma bo‘yicha ***II tur xosmas integrali*** deb ataladi.

Berilgan $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesma bo‘yicha II tur xosmas integrali quyidagicha belgilanadi va aniqlanadi:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0+0}F(\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to0+0}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx \qquad (8)$$

limitga aytiladi.

6-TA’RIF: Agar (8) limit mavjud va chekli bo‘lsa, u holda II tur xosmas integral ***yaqinlashuvchi*** deyiladi. Aks holda bu xosmas integral ***uzoqlashuvchi*** deb ataladi.

Misol sifatida ushbu II tur xosmas integralni ko‘ramiz:

$$I(\alpha)=\int_0^b\frac{dx}{x^\alpha}\qquad(0<b<+\infty\,,\,\alpha>0)\quad . \qquad (9)$$

Bu yerda uch holni qaraymiz.

1) Dastlab 0<α<1 holni tahlil etamiz:

$$I(\alpha)=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_{\varepsilon}^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{\alpha-1}\right|_{\varepsilon}^{b}=\frac{1}{\alpha-1}\lim_{\varepsilon\to 0+0}(b^{1-\alpha}-\varepsilon^{1-\alpha})=b^{1-\alpha}\ .$$

Demak, bu holda (9) II tur xosmas integral yaqinlashuvchi va uning qiymati $b^{1-\alpha}$.

2) Endi α=1 holni o‘rganamiz:

$$I(1)=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_{\varepsilon}^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\ln x\Big|_{\varepsilon}^{b}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}(\ln b-\ln\varepsilon)=+\infty\ .$$

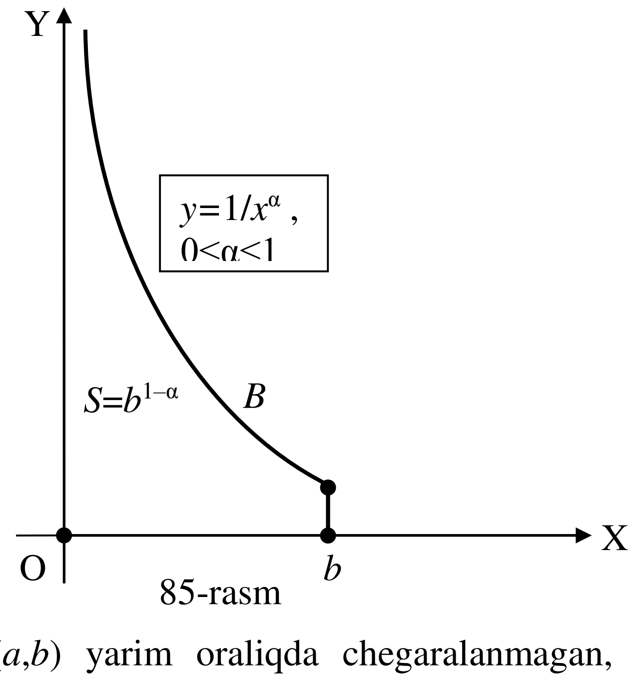
Demak, bu holda (9) II tur xosmas integral uzoqlashuvchi bo‘ladi.

3) α>1 holni qaraymiz:

$$I(\alpha)=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_{\varepsilon}^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{\alpha-1}\right|_{\varepsilon}^{b}=\frac{1}{\alpha-1}\lim_{\varepsilon\to 0+0}(b^{1-\alpha}-\varepsilon^{1-\alpha})=-\infty\,.$$

Demak, bu holda ham (9) II tur xosmas integral uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Shunday qilib, (9) xosmas integral 0<α<1 holda yaqinlashuvchi, α≥1 holda esa uzoqlashuvchi ekan. Bu natijaning geometrik ma’nosi shundan iboratki, $y=1/x^{\alpha}$, $x=0$, $x=b>0$, $y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan cheksiz geometrik shaklning S yuzasi 0<α<1 holda chekli va $S=b^{1-\alpha}$ (keyingi betdagi 85-rasmga qarang), α≥1 holda esa bu shakl yuzasi cheksiz bo‘lar ekan.



85-rasm

$y=f(x)$ funksiya $[a,b)$ yarim oraliqda chegaralanmagan, ammo ixtiyoriy $\varepsilon\in(0,b-a]$ uchun bu funksiya $[a,b-\varepsilon]$ kesmada chegaralangan va integrallanuvchi bo‘lsin. Bu holda $f(x)$ funksiyaning II tur xosmas integrali quyidagicha kiritiladi:

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_{a}^{b-\varepsilon}f(x)dx\ .$$

Bu yerda ham tenglikning o‘ng tomonidagi limit mavjud va chekli bo‘lsa xosmas integral yaqinlashuvchi, aks holda – uzoqlashuvchi deyiladi.

Masalan,

$$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=-2\lim_{\varepsilon\to 0+0}\sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\varepsilon}=-2\lim_{\varepsilon\to 0+0}(\sqrt{\varepsilon}-1)=2.$$

Demak, bu II tur xosmas integral yaqinlashuvchi.

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^2 x}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{dx}{\cos^2 x}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\operatorname{tg}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)=+\infty.$$

Demak, bu II tur xosmas integral uzoqlashuvchi.

Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmaning biror ichki $x=c$ nuqtasida chegaralanmagan bo‘lsa, bu holda II tur xosmas integral

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx \qquad (10)$$

tenglik orqali kiritiladi. Bu xosmas integralning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo‘lishi 4-ta’rif singari aniqlanadi.

Masalan, $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4}$ xosmas integralni qaraymiz. Integral ostidagi funksiya c=0 nuqtada uzlukli va chegaralanmagan. Unda, (10) tenglikka asosan,

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^4}+\int_0^1\frac{dx}{x^4}=I_1+I_2,$$

$$I_1=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^4}=\lim_{\varepsilon\to 0-0}\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{dx}{x^4}=-\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0-0}\frac{1}{x^3}\Big|_{-1}^{\varepsilon}=-\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0-0}(\frac{1}{\varepsilon^3}+1)=+\infty,$$

$$I_2=\int_0^1\frac{dx}{x^4}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^4}=-\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0+0}\frac{1}{x^3}\Big|_{\varepsilon}^{1}=-\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0+0}(1-\frac{1}{\varepsilon^3})=+\infty\ .$$

Demak, bu II tur xosmas integral uzoqlashuvchi ekan.

II tur xosmas integrallarning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini yetarli shartlari oldin I tur xosmas integrallar uchun ifodalangan 1-3 teoremalarga o‘xshash ifodalanadi.

8.3. Aralash turdagi xosmas integrallar. Agar $y=f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada chegaralanmagan bo‘lsa, unda $[a,+\infty)$ yoki $(-\infty, a]$ cheksiz yarim oraliqlar bo‘yicha aralash turdagi xosmas integrallar

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^{+\infty} f(x)dx \quad (a<b<+\infty),$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int_c^a f(x)dx \quad (-\infty<c<a)$$

kabi aniqlanadi. Bunda tengliklarning o‘ng tomonidagi I va II turdagi xosmas integrallarning ikkalasi ham yaqinlashuvchi bo‘lsa aralash turdagi xosmas integral ham yaqinlashuvchi, aks holda esa uzoqlashuvchi deb hisoblanadi.

Masalan,

$$f(x)=\begin{cases}1/\sqrt{x}\,, & 0<x\le 1\\ 1/x^2\,, & 1\le x<+\infty\end{cases}$$

funksiya uchun $I=\int_0^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integralni qaraymiz:

$$I=\int_0^{+\infty} f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^{+\infty} f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=I_1+I_2\ ,$$

$$I_1=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_\varepsilon^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0+0}2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1=2\ ,$$

$$I_2=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}(-\frac{1}{x})\Big|_1^b=1\ .$$

Demak, aralash turdagi I integral yaqinlashuvchi va uning qiymati $I=I_1+I_2=3$.

Xuddi shunday tarzda aralash turdagi

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}\ ,\quad \int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\ ,\quad \int_0^{+\infty}\frac{dx}{x}$$

xosmas integrallar uzoqlashuvchi ekanligini koʻrsatish mumkin va bu oʻquvchiga mustaqil ish sifatida havola etiladi.

XULOSA

Aniq integral ta’rifida integrallash sohasi chekli kesma va integral ostidagi funksiya chegaralangan deb qaralgan edi. Ammo bir qator masalalarni yechishda bu shartlardan kamida bittasi bajarilmaydigan vaziyatlar paydo boʻladi. Misol sifatida cheksiz geometrik shakllarning yuzasini hisoblash masalasini koʻrsatish mumkin. Bunday hollarda xosmas integrallar tushunchasidan foydalaniladi. Ular ma’lum bir aniq integral qiymatlarining u yoki bu holdagi limiti kabi aniqlanadi. Bu limit mavjud va chekli boʻlsa, xosmas integral yaqinlashuvchi, aks holda esa uzoqlashuvchi deyiladi.

Integrallash sohasining kamida bitta chegarasi cheksiz boʻlgan holda I tur xosmas integral tushunchasiga kelamiz. Agar integral ostidagi funksiya chegaralanmagan boʻlsa, unda II tur xosmas integralga ega boʻlamiz. Chegaralaridan kamida bittasi cheksiz va integral ostidagi funksiya chegaralanmagan boʻlgan xosmas integrallar aralash turli deb ataladi.

Tayanch iboralar

* I tur xosmas integral * Xosmas integralning geometrik ma’nosi * Yaqinlashuvchi xosmas integral * Uzoqlashuvchi xosmas integral *Absolut yaqinlashuvchi xosmas integral * Shartli yaqinlashuvchi xosmas integral * II tur xosmas integral * Aralash turdagi xosmas integral .

Takrorlash uchun savollar

1. Xosmas integral tushunchasi qayerdan paydo bo‘ladi?
2. I tur xosmas integral qanday ta’riflanadi?
3. I tur xosmas integralning geometrik mazmuni nimadan iborat?
4. Qachon xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi?
5. Qachon xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi?
6. Xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lishining yetarli sharti nimadan iborat?
7. Xosmas integral qaysi shartda uzoqlashuvchi bo‘ladi?
8. Qachon xosmas integral absolut yaqinlashuvchi deyiladi?
9. Absolut yaqinlashuvchi xosmas integral qanday xossaga ega?
10. Qachon xosmas integral shartli yaqinlashuvchi deyiladi?
11. II tur xosmas integral qanday ta’riflanadi?
12. Aralash turdagi xosmas integral qanday aniqlanadi?

Testlardan namunalar

1. Qaysi holda $\int_a^b f(x)dx$ integral I tur xosmas integral deyiladi?

A) $b=+\infty$; B) $a=-\infty$; C) $a=-\infty$ va $b=+\infty$;
D) $a=-\infty$ yoki $b=+\infty$; E) barcha hollarda.

2. Quyidagi integrallardan qaysi biri I tur xosmas integral bo‘ladi?

A) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$; B) $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$; C) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$;
D) $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ yoki $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$; E) barcha integrallar .

3. Ushbu ta’rifni yakunlang: I tur xosmas integral I yaqinlashuvchi deyiladi, agar … .

A) uning qiymati musbat bo‘lsa; B) uning qiymati manfiy bo‘lsa;
C) uning qiymati nolga teng bo‘lsa; D) uning qiymati chekli bo‘lsa;
E) uning qiymati cheksiz bo‘lsa.

4. $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{1+x^4}$ I tur xosmas integral qiymatini toping.

A) $\frac{2}{3}$; B) $\frac{\pi}{4}$; C) ∞ ; D) 3.5; E) 2π .

5. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ I tur xosmas integral α parametrning qanday qiymatlarida yaqinlashuvchi bo‘ladi ?

A) α>0; B) α<0; C) α>1; D) α<1; E) α≠0.

6. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$ II tur xosmas integral qiymatini hisoblang .

A) 0.5; B) 1; C) 2; D) 4; E) ∞ .

7. $\int_0^2 \frac{dx}{x^\alpha}$ II tur xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘ladigan α parametrning barcha qiymatlari qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?

A) $\alpha<1$; B) $\alpha>1$; C) $\alpha>0$; D) $\alpha<0$; E) $\alpha\neq 0$.

<u>Mustaqil ish topshiriqlari</u>

1. I tur xosmas integrallarni hisoblang:

$a)\ \int_0^{+\infty} 10^{-nx}\,dx$; $b)\ \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^{2n+1}}\,dx$; $c)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{n^2+x^2}$.

2. II tur xosmas integrallarni hisoblang:

$a)\ \int_0^n \frac{dx}{\sqrt{n^2-x^2}}$; $b)\ \int_0^n \frac{xdx}{\sqrt{n^2-x^2}}$; $c)\ \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[2n+1]{x^{2n}}}$.

IX BOB . KO‘P O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR

Iqtisodiy hisoblashlarning matematik usullari
bo‘yicha mutaxassislar tomonidan ayniqsa ko‘p
o‘zgaruvchili funksiyalar keng qo‘llanilishi
ko‘pchilik uchun kutilmagan holdir.
A.N. Kolmogorov

§1. KO‘P O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR TA’RIFI , LIMITI VA UZLUKSIZLIGI

- ***Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya tushunchasiga olib keluvchi masalalar.***
- ***Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar va ular bilan bog‘liq tushunchalar.***
- ***Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning limiti.***
- ***Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi.***
- ***Ikki o‘zgaruvchili uzluksiz funksiyalarning xossalari.***

1.1. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya tushunchasiga olib keluvchi masalalar. Oldingi boblarda biz $y=f(x)$ ko‘rinishdagi bir o‘zgaruvchili funksiyalar bilan tanishgan va ularni o‘rgangan edik. Bunda ikkita x va y o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanish qaralib, bitta erkli o‘zgaruvchi (argument) x qiymatlari bo‘yicha ikkinchi y erksiz o‘zgaruvchi (funksiya) qiymatlari to‘liq aniqlanar edi. Masalan, kvadratning yuzini ifodalovchi S funksiya uning tomoni x orqali $S=x^2$, kubning hajmi V uning qirrasi x orqali $V=x^3$ ko‘rinishda to‘liq aniqlanadi. Ko‘rib o‘tilgan talab $p=f(q)$ va taklif $p=g(q)$ funksiyalarida mahsulot hajmini ifodalovchi bitta q o‘zgaruvchini (omilni) p mahsulot narxiga ta’siri qaralgan edi.

Ammo bir qator amaliy masalalarni o‘rganishda ikkitadan ortiq o‘zgaruvchilar orasidagi shunday bog‘lanishlarni qarashga to‘g‘ri keladiki, ulardan birining qiymatlari qolganlarining qiymatlari orqali to‘liq aniqlanadi.

Masalan, matematikada turli to‘g‘ri to‘rtburchaklarning yuzi S uning tomonlarini ifodalovchi ikkita erkli x va y o‘zgaruvchilar orqali $S=xy$, to‘g‘ri burchakli parallelepipedning hajmi V uning qirralarini ifodalovchi uchta x, y va z erkli o‘zgaruvchilar yordamida $V=xyz$ ko‘rinishda aniqlanadi.

Fizikada jismning turli nuqtalardagi zichligi ρ=ρ(x,y,z), harorati T=T(x,y,z) va shu kabi kattaliklar bu nuqtaning vaziyatini ifodalovchi uchta erkli x, y, z koordinatalar orqali aniqlanadi. Bunga qo‘shimcha ravishda t vaqtni ham hisobga olsak, unda yuqoridagi kattaliklar to‘rtta a, a, z va t erkli o‘zgaruvchilar orqali ifodalanadi.

Iqtisodiyotda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori y va turli x_1, x_2 , x_3, $\cdots$, x_n omillar orasidagi bog‘lanish

$$y = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

ko‘rinishdagi ishlab chiqarish funksiyasi orqali o‘rganiladi. Birinchi marta bunday ishlab chiqarish funksiyalari 1928 yilda amerikalik olimlar K.Kobb va P. Duglas tomonidan ikki omilli hol uchun

$$y = a_0 x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \ , 0 < \alpha < 1$$

ko‘rinishda taklif etilgan va shu sababli Kobb – Duglas funksiyasi deb ataladi. Bunda x_1–asosiy ishlab chiqarish fondi hajmi, x_2–sarflangan mehnat resurslari hajmi bo‘lib hisoblanadi.

1.2. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar va ular bilan bog‘liq tushunchalar. Yuqorida ko‘rib o‘tilgan masalalar qiymati n ta x_1, x_2 , x_3, $\cdots$, x_n erkli o‘zgaruvchilar orqali aniqlanadigan funksiyalar nazariyasini yaratishni taqozo qiladi. Buning uchun ixtiyoriy x_1, x_2 , x_3, $\cdots$, x_n haqiqiy sonlardan hosil qilingan $\boldsymbol{x}$=(x_1, x_2 , x_3, $\cdots$, x_n) vektorlardan tuzilgan n o‘lchovli chiziqli fazoni (IV bob, §5) qaraymiz va uni R^n kabi belgilaymiz. Bu fazodagi ikkita

$$\boldsymbol{x}' = (x_1', x_2', \cdots, x_n') \ , \ \boldsymbol{x}'' = (x_1'', x_2'', \cdots, x_n'')$$

vektorlar uchun ($\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}''$) kabi belgilanadigan ***skalyar ko‘paytma*** tushunchasini quyidagicha kiritamiz:

$$(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'')= x_1'x_1'' + x_2'x_2'' + \cdots + x_n'x_n'' \,. \qquad (1)$$

1-TA'RIF: Ixtiyoriy ikkita vektorlari uchun (1) tenglik orqali skalyar ko'paytma kiritilgan R^n chiziqli fazo ***n o'lchovli evklid fazo*** deb ataladi.

Kelgusida R^n evklid fazosiga tekislik va uch o'lchovli fazoga o'xshash geometrik talqin berish maqsadida unga tegishli har bir $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ vektorni shu fazoning nuqtasi deb ataymiz va uni bitta M harfi bilan belgilaymiz. Bunda $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ sonlari M nuqtaning koordinatalari deb olinadi va bu tasdiq $M(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ ko'rinishda ifodalanadi.

Endi R^n evklid fazodagi ikkita

$$M'(x_1', x_2', \cdots, x_n'), \quad M''(x_1'', x_2'', \cdots, x_n'')$$

nuqtalar orasidagi masofa tushunchasini kiritamiz. Bu masofani $d(M', M'')$ kabi belgilaymiz va R^2 tekislik yoki R^3 fazodagi masofaga o'xshash tarzda quyidagicha kiritamiz:

$$d(M', M'') = \sqrt{(x_1' - x_1'')^2 + (x_2' - x_2'')^2 + \cdots + (x_n' - x_n'')^2} \quad .$$

Bu tushunchani skalyar ko'paytma orqali $d^2(M_1, M_2)=(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}'', \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}'')$ tenglik bilan ham kiritish mumkin.

2-TA'RIF: Agar n o'lchovli R^n evklid fazosidagi biror D to'plamdagi har bir $M(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ nuqtaga ma'lum bir qonun asosida qandaydir u haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsa, unda u berilgan D to'plamda aniqlangan ***n o'zgaruvchili funksiya*** deb ataladi.

$D \subset R^n$ to‘plamda aniqlangan n o‘zgaruvchili funksiya $u=f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ yoki qisqacha $u=f(M)$ kabi belgilanadi. Bunda $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ sonlari funksiyaning ***argumentlari*** deb yuritiladi.

3-TA’RIF: Berilgan n o‘zgaruvchili $u=f(M)$ funksiya ma’noga ega bo‘lgan R^n evklid fazosidagi barcha $M(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ nuqtalar to‘plami funksiyaning ***aniqlanish sohasi***, $u=f(M)$ funksiya qabul etadigan haqiqiy sonlar to‘plami esa bu funksiyaning ***qiymatlar to‘plami*** deyiladi.

Funksiyaning aniqlanish sohasi D{f}, qiymatlar sohasi esa E{f} kabi belgilanadi. Masalan,

$$u = \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}$$

funksiyaning D{f} aniqlanish sohasi R^n evklid fazosini

$$r^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2 \geq 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq r^2$$

shartni qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plamidan iborat bo‘ladi. Bu to‘plam, uch o‘lchovli fazodagi sharga o‘xshatib, R^n evklid fazosidagi markazi O(0,0,$\cdots$,0) nuqtada joylashgan r radiusli ***n o‘lchovli shar*** deb ataladi. Ko‘rilayotgan funksiyaning qiymatlar sohasi E{f}=[0, r] kesmadan iborat bo‘ladi.

Kelgusida soddalik uchun va olinadigan natijalarni geometrik talqinini berish maqsadida asosan ikki o‘zgaruvchili funksiyalarni qarash bilan cheklanamiz. Shuni ta’kidlab o‘tish lozimki, bu xususiy n=2 holda olinadigan natijalar osonlik bilan n>2 holga umumlashtirilishi mumkin. Bundan tashqari yozuvlarni soddalashtirish va uch o‘lchovli fazodagi (kelgusida uni qisqacha fazo deb yuritamiz) nuqta koordinatalariga moslashtirish maqsadida ikki o‘zgaruvchili funksiyani z, uning argumentlarini esa x va y kabi belgilaymiz. Shunday qilib, umumiy holda ikki o‘zgaruvchili funksiya $z=f(x,y)$, $z=g(x,y)$ va hokazo ko‘rinishda yoziladi. Masalan,

$$z=f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}, \quad z=g(x,y)=3x+5y-1, \quad z=h(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$$

ikki o‘zgaruvchili funksiyalar bo‘ladi.

Ikki o‘zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyaning D{f} aniqlanish sohasi tekislikdagi $M(x,y)$ nuqtalardan tashkil topganligi uchun u tekislik yoki undagi biror sohadan iborat bo‘ladi. Masalan, yuqorida keltirilgan funksiyalar uchun D{f} markazi O(0,0) koordinata boshida joylashgan va radiusi r=1 bo‘lgan birlik doiradan, D{g} butun tekislikdan (D{g}=R^2), D{h}= R^2–{O}, ya’ni tekislikning koordinata boshidan tashqari barcha nuqtalaridan iboratdir.

Ikki o‘zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyani geometrik mazmuni uning grafigi tushunchasidan kelib chiqadi. Bu tushunchani kiritish uchun fazoda XYZ to‘g‘ri burchakli Dekart koordinatalari sistemasini olamiz. XOY koordinata tekisligida funksiyaning D{f} aniqlanish sohasini qaraymiz va uning har bir $M(x,y)$ nuqtasidan XOY koordinata tekisligiga perpendikular o‘tkazamiz. Bu perpendikularga funksiyaning $z=f(x,y)$ qiymatini qo‘yamiz. Natijada fazoda koordinatalari $(x, y, f(x,y))$ bo‘lgan P nuqtani hosil qilamiz (keyingi betdagi 86-rasmga qarang).

<u>4-TA’RIF:</u> $z=f(x,y)$ funksiyaning ***grafigi*** deb fazodagi

$$P(x, y, z)=P(x, y, f(x,y))= P(x, y, f(M)),\ M=M(x,y)\in \mathrm{D}\{f\},$$

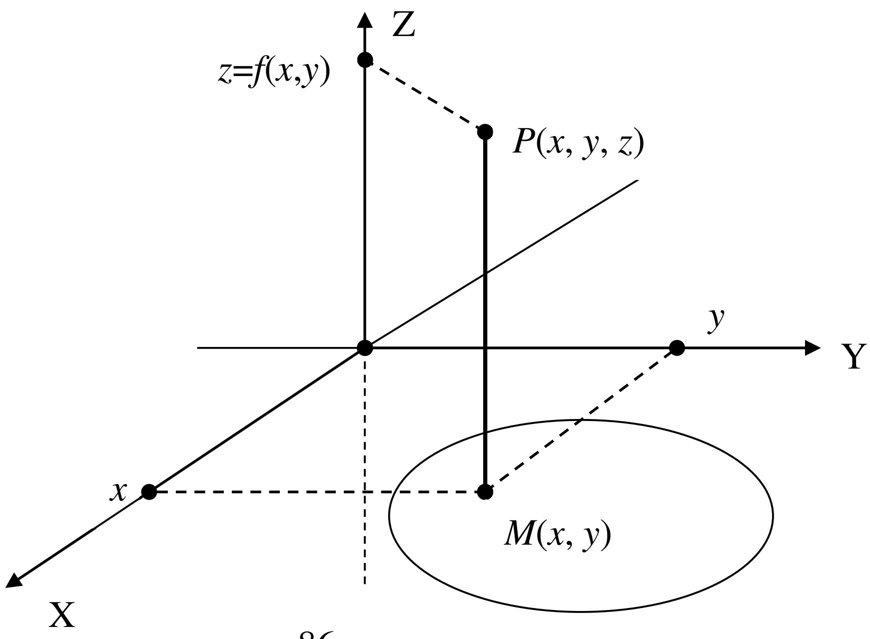
nuqtalarning geometrik o‘rniga aytiladi.

Umuman olganda ikki o‘zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyaning grafigi fazodagi biror sirtdan iborat bo‘ladi va shu sababli $z=f(x,y)$ fazodagi ***sirt tenglamasi*** deb ham ataladi.

Masalan, yuqorida keltirilgan $z=f(x,y)$ funksiyaning grafigi tenglamasi

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2} \Rightarrow z^2=1-x^2-y^2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=1$$

bo‘lgan sferadan, $z=g(x,y)$ funksiyaning grafigi esa tenglamasi $z=3x+5y-1$ yoki $3x+5y-z-1=0$ bo‘lgan tekislikdan iboratdir.



86-rasm

Ammo yuqoridagi $z=h(x,y)$ funksiya grafigini to‘g‘ridan-to‘g‘ri tasavvur etish oson emas. Bunday hollarda funksiyaning sath chiziqlari tushunchasidan foydalanish mumkin.

5-TA’RIF: $z=f(x,y)$ funksiyaning qiymatlari biror o‘zgarmas C soniga teng bo‘ladigan XOY koordinata tekisligidagi nuqtalar to‘plamidan iborat chiziq funksiyaning ***sath chizig‘i***, C soni esa ***sath*** deb ataladi.

Ta’rifdan ko‘rinadiki, $z=f(x,y)$ funksiyaning C sathli sath chizig‘i tenglamasi $f(x,y)=C$ bo‘lgan chiziqdan iborat bo‘ladi. Ko‘p hollarda sath chiziqlarini chizish osonroq bo‘lib, ular asosida $z=f(x,y)$ funksiya grafigi haqida tasavvur hosil qilish mumkin bo‘ladi. Masalan, $z=h(x,y)$ funksiyaning sath chiziqlarini topamiz:

$$z = h(x,y) = C \Rightarrow \frac{1}{x^2 + y^2} = C(C > 0) \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{C} = r^2,\ r = \sqrt{\frac{1}{C}}$$

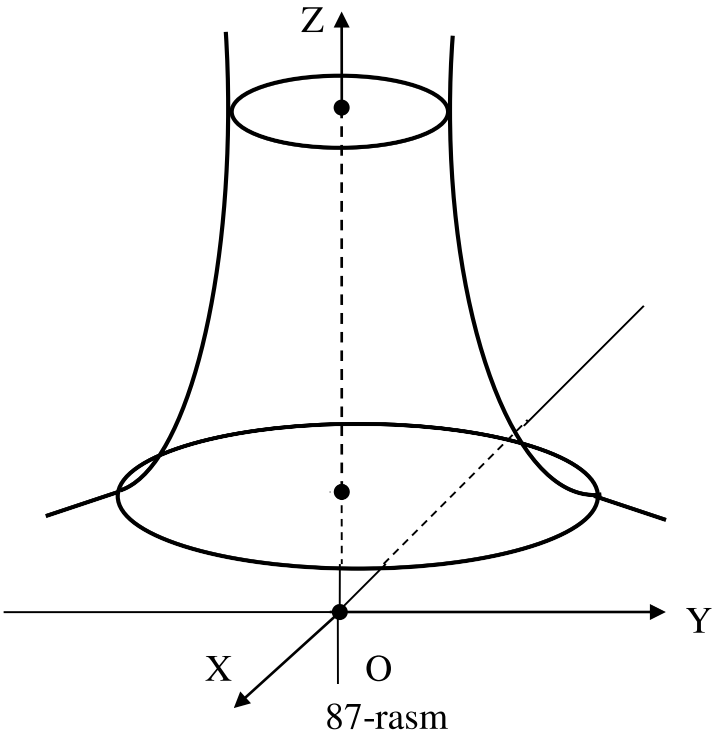
Bu yerdan ko‘rinadiki, bu funksiyaning barcha sath chiziqlari markazi koordinata boshida joylashgan aylanalardan iborat. Bu aylanalarning radiuslari C sath oshgan sari kichrayib boradi. Demak, bu funksiyaning grafigi “asosi” XOY tekislikka yaqinlashgan sari ($z\to 0$) radiusi cheksiz kattalashib boradigan, “uchi” esa OZ o‘qi bo‘yicha yuqoriga chiqqan sari radiusi cheksiz kamayib boradigan aylanalardan iborat (teleminoraga o‘xshash) aylanma sirt kabi bo‘ladi (keyingi betdagi 87-rasmga qarang).

Sath chiziqlaridan tashqari $z=f(x,y)$ funksiya grafigi haqida tasavvur hosil qilish uchun uni XOZ yoki YOZ koordinata tekisliklariga parallel bo‘lgan $y=y_0$ yoki $x=x_0$ tekisliklar bilan kesishdan hosil bo‘ladigan $z=f(x,y_0)$ yoki $z=f(x_0,y)$

chiziqlardan ham foydalanish mumkin. Masalan, biz ko‘rib o‘tgan $z=h(x,y)$ funksiya uchun bu chiziqlar

$$z = h(x, y_0) = \frac{1}{x^2 + y_0^2}, \quad z = h(x_0, y) = \frac{1}{x_0^2 + y^2}$$

tenglamali egri chiziqlardan iboratdir.



87-rasm

1.3. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning limiti. Bir o‘zgaruvchili $y=f(x)$ funksiyalar nazariyasida limit tushunchasi muhim ahamiyatga ega ekanligini ko‘rib o‘tgan edik. Shu sababli bu tushunchani ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar uchun ham kiritish maqsadga muvofiqdir.

6-TA’RIF: Berilgan $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning ***r radiusli atrofi*** deb tekislikdagi

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < r$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan $M(x,y)$ nuqtalar to‘plamiga aytiladi.

Ta’rifdan ko‘rinadiki, $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning r radiusli atrofi markazi shu nuqtada joylashgan va radiusi r bo‘lgan ochiq doiradan [uni $U_r(x_0,y_0)$ kabi belgilaymiz] iborat bo‘ladi. Demak, $M(x,y)\in U_r(x_0,y_0)$ bo‘lishi uchun undan $M_0(x_0,y_0)$ nuqtagacha masofa $d(M,M_0)<r$ shartni qanoatlantirishi kerak.

<u>7-TA’RIF:</u> Biror chekli A soni ikki o‘zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyaning uning argumentlari $x\to x_0$, $y\to y_0$ (yoki $M(x,y)\to M_0(x_0,y_0)$) bo‘lgandagi ***limiti*** deb aytiladi, agar har qanday kichik $\varepsilon>0$ soni uchun unga bog‘liq shunday $r(\varepsilon)=r>0$ son topilsaki, $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning $r=r(\varepsilon)$ radiusli atrofiga tegishli bo‘lgan barcha $M(x,y)\neq M_0(x_0,y_0)$ nuqtalar uchun

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa.

Ikki o‘zgaruvchili $f(x,y)$ funksiyaning $x\to x_0$, $y\to y_0$ holdagi limiti

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \quad \text{yoki} \quad \lim_{M\to M_0} f(M)=A$$

kabi belgilanadi.

Masalan,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{1-\sqrt{x^2+y^2+1}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)(1+\sqrt{x^2+y^2+1})}{(1-\sqrt{x^2+y^2+1})(1+\sqrt{x^2+y^2+1})}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)(1+\sqrt{x^2+y^2+1})}{-(x^2+y^2)}=-\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+\sqrt{x^2+y^2+1})=-2\ .$$

Ikki o‘zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiya uchun $M(x,y)\to M_0(x_0,y_0)$ bo‘lganda A limitni mavjud bo‘lishi va uni hisoblash masalasi bir o‘zgaruvchili funksiya holiga nisbatan ancha murakkab bo‘ladi. Bunga sabab shuki to‘g‘ri chiziqda $x \to x_0$ intilish faqat ikki yo‘nalishda, o‘ng va chap tomondan bo‘lishi mumkin. Tekislikda esa $M(x,y) \to M_0(x_0,y_0)$ intilish cheksiz ko‘p yo‘nalishda amalga oshirilishi mumkin va bularning har birida $z=f(x,y)$ funksiya bir xil A soniga yaqinlashib borishi kerak. Buni bir necha misollarda ko‘ramiz.

1-misol. $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ funksiya $x \to 0$, $y \to 0$ bo‘lganda limitga ega, chunki ma’lum $x^2+y^2 \geq 2|x||y|$ tengsizlikka asosan

$$|f(x,y)| = \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|xy^2|}{2|x||y|} = \frac{|y|}{2} \Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0 .$$

2-misol. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ funksiya $x \to 0$, $y \to 0$ bo‘lganda limitga ega emasligini ko‘rsatamiz. Buning uchun $y=kx$ deb olamiz, ya’ni O(0,0) nuqtaga to‘g‘ri chiziqlar bo‘yicha yaqinlashamiz. Bu holda

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2} .$$

Bu yerdan ko‘rinadiki limit qiymati barcha k uchun bir xil bo‘lmasdan, k o‘zgarishi bilan u ham o‘zgaradi va shu sababli bu limit mavjud emas.

3-misol. $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ funksiyaning $x \to 0$, $y \to 0$ holda limiti qanday bo‘lishini tekshiramiz. Bunda $y=kx$ deb olsak

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0 \quad .$$

Demak, O(0,0) nuqtaga ixtiyoriy to‘g‘ri chiziqlar bo‘yicha yaqinlashganimizda limit qiymati bir xil va nolga teng. Ammo hali bundan berilgan limit mavjud va uning qiymati nol deya olmaymiz, chunki bu natija ixtiyoriy yo‘nalish bo‘yicha bir xil bo‘lishi kerak. Masalan, $y=kx^2$, ya’ni parabola bo‘yicha yaqinlashishni qaraymiz:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^4}{x^4+k^2x^4}=\frac{k}{1+k^2}.$$

Bu holda limit qiymati k qiymatiga bog‘liq bo‘lmoqda. Demak,qaralayotgan funksiyaning $x\to 0$, $y\to 0$ bo‘lganda limiti mavjud emas ekan.

Yuqorida 7-ta’rif orqali aniqlangan limitda funksiyaning ikkala argumenti x va y bir paytda x_0 va y_0 sonlariga intiladi deb olamiz va bunda

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

karrali limit deb yuritiladi. Ammo bu yerda x yoki y argumentlarni u yoki bu tartibda x_0 yoki y_0 sonlariga ketma-ket yaqinlashtirib,

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=A_1, \qquad \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=A_2$$

limitlarni ham hosil etish mumkin. Bular ***takroriy limitlar*** deb ataladi va ularni hisoblash osonroq.

4-misol. $f(x,y)=3x+5xy-y^2$ funksiyaning $x\to 2$, $y\to -3$ holdagi takroriy limitlarini qaraymiz :

$$\lim_{x\to 2}\lim_{y\to -3} f(x,y)=\lim_{x\to 2}\lim_{y\to -3}(3x+5xy-y^2)=\lim_{x\to 2}(3x-15x-9)=-33=A_1\ ,$$

$$\lim_{y\to -3}\lim_{x\to 2} f(x,y)=\lim_{y\to -3}\lim_{x\to 2}(3x+5xy-y^2)=\lim_{y\to -3}(6+10y-y^2)=-33=A_2\,.$$

Demak, bu funksiya uchun ikkala takroriy limit mavjud va ular o‘zaro teng.

5-misol. Ushbu funksiyaning $x\to 0$, $y\to 0$ holdagi takroriy limitlarini hisoblaymiz:

$$f(x,y)=\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}\,.$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{x}=\lim_{x\to 0}(1+x)=1=A_1,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y+y^2}{y}=-1=A_2.$$

Demak, bu funksiya uchun ikkala takroriy limit mavjud, ammo ular o‘zaro teng emas.

Yuqoridagi misollardan ko‘rinadiki takroriy limitlar doimo o‘zaro teng bo‘lishi shart emas ekan. Bundan tashqari karrali va takroriy limitlar orasida qanday munosabat mavjudligini ham umumiy holda aytib bo‘lmaydi. Bunday hollarda quyidagi teoremadan foydalanish mumkin.

1-TEOREMA: Berilgan $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning biror $U_r(x_0,y_0)$ atrofida aniqlangan va karrali limit

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

mavjud bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $M(x,y)\in U_r(x_0,y_0)$ uchun

$$\varphi(y)=\lim_{x\to x_0} f(x,y)\,,\quad \psi(x)=\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

oddiy limitlar mavjud bo‘lsa, unda ikkala takroriy limit

$$A_1=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\psi(x)\,,\quad A_2=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\varphi(y)$$

mavjud va $A_1=A_2=A$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Bu teoremani isbotsiz qabul etamiz.

Ammo takroriy limitlar mavjudligi va ularning o‘zaro tengligidan karrali limitning mavjudligi va $A_1=A_2=A$ tenglik o‘rinli bo‘lishi kelib chiqmaydi. Masalan, yuqorida ko‘rilgan 2-misolda $A_1=A_2=0$, ammo karrali limit mavjud emas.

Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning limiti uchun bir o‘zgaruvchili funksiya limitining oldin ko‘rib o‘tilgan barcha xossalari (VII bob, §3, asosiy teorema) saqlanib qolishini ushbu teorema ko‘rsatadi.

2-TEOREMA: Agar $z=f(x,y)$ va $z=g(x,y)$ funksiyalarning ikkalasi ham $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning biror $U_r(x_0,y_0)$ atrofida aniqlangan va ularning karrali limitlari

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A\,,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)=B$$

mavjud bo‘lsa, unda quyidagi tengliklar o‘rinli bo‘ladi:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} C = C \quad (C - const.), \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} Cf(x,y) = C\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = CA \ ,$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} [f(x,y) \pm g(x,y)] = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) \pm \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y) = A \pm B \ ,$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} [f(x,y) \cdot g(x,y)] = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) \cdot \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y) = AB \, ,$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)} = \frac{A}{B} \quad \left(\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y) = B \neq 0 \right).$$

Bu teorema yuqorida eslatilgan teorema singari isbotlanadi va shu sababli uning ustida to‘xtalib o‘tirmaymiz.

Masalan, bu teorema asosida ushbu karrali limitlarni hisoblaymiz:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} (3x+5y+1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} 3x + \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} 5y + \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} 1 =$$

$$= 3\lim_{x\to 1} x + 5\lim_{y\to 2} y + \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} 1 = 3\cdot 1 + 5\cdot 2 + 1 = 14,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x+5xy-3y+1}{x^2+y^3+2} = \frac{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (2x+5xy-3y+1)}{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^3+2)} = \frac{1}{2}.$$

Ikki o‘zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyaning karrali limiti ta’rifini $x\to\pm\infty$, $y\to\pm\infty$ yoki $A=\pm\infty$ hollar uchun ham berish mumkin, ammo ular ustida to‘xtalib o‘tirmaymiz.

1.4. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi. Bir o‘zgaruvchili $y=f(x)$ funksiyalar uchun limit tushunchasi kiritilgach, uning yordamida funksiyaning uzluksizlik ta’rifi berilgan edi. Bu tushunchani ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar uchun ham kiritish mumkin.

8-TA’RIF: $M_0(x_0,y_0)$ nuqta $z=f(x,y)$ funksiyaning D{f} aniqlanish sohasidagi biror nuqta bo‘lib, o‘zgaruvchi $M(x,y)$ nuqta funksiyaning aniqlanish sohasida qolgan holda M_0 (x_0,y_0) nuqtaga ixtiyoriy usulda intilganda ($M\to M_0$ bo‘lganda)

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0) \text{ yoki } \lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0) \tag{2}$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, $z=f(x, y)$ funksiya M_0 (x_0,y_0) nuqtada ***uzluksiz*** deyiladi. Bu holda $M_0(x_0,y_0)$ funksiyaning ***uzluksizlik nuqtasi*** deyiladi. Biror D sohaning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lgan funksiya shu ***sohada uzluksiz*** deyiladi.

Masalan, $f(x,y)=2x^2+3xy-5y^2$ funksiya tekislikdagi barcha nuqtalarda aniqlangan va ularning har birida uzluksizdir. Demak, bu funksiya butun tekislikda uzluksiz. Xuddi shunday,

$$f(x,y)=\sqrt{36-4x^2-9y^2}$$

funksiya D{f}={(x,y): $(x/3)^2+(y/2)^2\leq 1$}aniqlanish sohasida, ya’ni yarim o‘qlari a=3, b=2 bo‘lgan ellips va uning ichida uzluksiz bo‘ladi.

Geometrik nuqtayi nazardan biror D sohada uzluksiz $z=f(x, y)$ funksiya XOY koordinata tekisligidagi proyeksiyasi shu sohadan iborat bo‘lgan yaxlit bir sirtni ifodalaydi. Shu sababdan tekislik, sfera, uzluksiz chiziqni OX o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan aylanma sirt kabilarni ifodalovchi ikki o‘zgaruvchili funksiyalar uzluksiz bo‘ladi.

Endi $z=f(x,y)$ funksiyaning $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada uzluksizligini boshqa bir ta'rifini keltiramiz. Agar $M(x,y)$ o'zgaruvchi nuqta bo'lsa, unda $\Delta x=x-x_0$ va $\Delta y=y-y_0$ ayirmalar mos ravishda x va y argumentlarning o'zgarishlarini ifodalaydi hamda ***argument orttirmalari*** deyiladi. Bu holda $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$ deb yozish mumkin. Bunda $z=f(x,y)$ funksiyaning o'zgarishi

$$\Delta z= \Delta f=f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0) \qquad (3)$$

ayirma orqali aniqlanadi va u funksiyaning ***to'la orttirmasi*** deb ataladi. Orttirmalar tilida (2) tenglikdagi $x\to x_0$, $y\to y_0$ munosabatlardan $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ ekanligi kelib chiqadi. Shu sababli (2) tenglikni

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta f =0 \qquad (4)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. Bu $z=f(x,y)$ funksiya uzluksizligini orttirmalar tilidagi ifodasidir. Undan uzluksiz funksiyada x va y argumentlar qanchalik kichik o'zgarishga ega bo'lsa, funksiya ham shunchalik kichik o'zgarishga ega bo'lishi kelib chiqadi. Amaliy masalalarda $z=f(x,y)$ funksiya uzluksizligini (4) tenglik bilan aniqlash osonroq bo'ladi.

Ikki o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi ta'rifini ifodalovchi (2) tenglikdan va limit xossalarini ifodalovchi 2-teoremadan bevosita quyidagi teorema kelib chiqadi.

3-TEOREMA: Agar $f(x,y)$ va $g(x,y)$ funksiyalar $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, unda shu nuqtada $C\,f(x,y)$ (C-const.), $f(x,y)\pm g(x,y)$, $f(x,y)\cdot g(x,y)$ va $g(x,y)\neq 0$ qo'shimcha shartda $f(x,y)/g(x,y)$ funksiyalar ham uzluksiz bo'ladi.

Bu teoremadan foydalanib murakkabroq ko‘rinishdagi funksiya uzluksizligini tekshirish masalasini soddaroq ko‘rinishdagi funksiyalarning uzluksizligini tekshirish masalasiga keltirish mumkin. Masalan,

$$z = \frac{2x^3 + 3x^2y^2 - y^3}{x^4 + x^2y^2 + y^4 + 1} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

funksiyada $f(x,y)$ va $g(x,y)$ tekislikdagi barcha nuqtalarda uzluksiz, $g(x,y)\neq 0$ (hatto $g(x,y)\geq 1$) ekanligidan uni butun tekislikda uzluksizligi teoremadan kelib chiqadi.

Yuqoridagi 8-ta’rifda ikki o‘zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyaning ikkala x va y argumentlari bo‘yicha uzluksizligi qaralgan edi. Bu yerda funksiyaning alohida har bir argumenti bo‘yicha uzluksizligini qarash mumkin. Buning uchun dastlab funksiyaning xususiy orttirmasi tushunchasini kiritamiz.

<u>9-TA’RIF:</u> Berilgan $z=f(x,y)$ funksiya uchun argumentlarning Δx va Δy orttirmalarida

$$\Delta_x f = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)\,, \quad \Delta_y f = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \qquad (5)$$

ayirmalar mos ravishda funksiyaning x va y argumentlari bo‘yicha $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadagi ***xususiy orttimalari*** deb ataladi.

(3) tenglik bilan aniqlangan Δf orttirma funksiyaning ikkala x va y argumentlari bo‘yicha o‘zgarishini ifodalaydi va shu sababli to‘la orttirma deyiladi. (5) tenglik bilan aniqlangan $\Delta_x f$ yoki $\Delta_y f$ orttirmalar esa funksiyaning faqat x (bunda y o‘zgarmas) yoki y argumenti bo‘yicha (bunda x o‘zgarmas) o‘zgarishini ifodalaydi va shu sababli xususiy orttirma deyiladi.

Masalan, $f(x,y)=x^2+3xy-4y$ funksiya uchun ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtada to‘la va xususiy orttirmalarni topamiz:

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = [(x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x)(y+\Delta y) - 4(y+\Delta y)] -$$

$$-[x^2+3xy-4y] = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3[x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y] - 4\Delta y \ ,$$

$$\Delta_x f = f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = [(x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x)y - 4y] - [x^2+3xy-4y] =$$

$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3xy\Delta x \ ,$$

$$\Delta_y f = f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = [x^2 + 3x(y+\Delta y) - 4(y+\Delta y] - [x^2+3xy-4y] =$$

$$= 3x\Delta y - 4\Delta y .$$

<u>10-TA’RIF:</u> Berilgan $z=f(x,y)$ funksiya uchun $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta_x f = 0 \quad \text{yoki} \quad \lim_{\Delta y\to 0} \Delta_y f = 0 \qquad (6)$$

tengliklar bajarilsa, unda bu funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada ***x yoki y argumenti bo‘yicha uzluksiz*** deyiladi .

Masalan, yuqorida ko‘rilgan $f(x,y)=x^2+3xy-4y$ funksiya uchun ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtada (6) shartlar bajariladi. Demak, bu funksiya butun tekislikda x va y argumentlari bo‘yicha uzluksizdir.

Agar $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada ikkala argumentlari bo‘yicha uzluksiz bo‘lsa, unda bu nuqtada har bir argumenti bo‘yicha ham uzluksiz bo‘ladi, chunki (4) tenglikdan (6) tengliklar xususiy hol sifatida kelib chiqadi. Ammo teskari tasdiq o‘rinli bo‘lishi shart emas. Masalan,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0\ , & x^2+y^2=0\end{cases} \qquad (7)$$

funksiyani O(0,0) nuqtada uzluksizlikka tekshiramiz. Bunda

$$\Delta_x f=f(0+\Delta x,0)-f(0,0)=f(\Delta x,0)=\frac{\Delta x\cdot 0}{(\Delta x)^2+0^2}=0\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\Delta_x f=0,$$

$$\Delta_y f=f(0,0+\Delta y)-f(0,0)=f(0,\Delta y)=\frac{0\cdot\Delta y}{0^2+(\Delta y)^2}=0\Rightarrow \lim_{\Delta y\to 0}\Delta_y f=0.$$

Demak, bu funksiya O(0,0) nuqtada x va y argumentlari bo‘yicha uzluksiz . Ammo $y=kx$ ($k\neq 0$)) deb olsak, unda

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{k}{1+k^2}=\frac{k}{1+k^2}\neq 0=f(0,0).$$

Demak, bu funksiya O(0,0) nuqtada ikkala x va y argumentlari bo‘yicha uzluksiz emas.

<u>11-TA’RIF:</u> Agar biror $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada (2) tenglik bajarilmasa, bu nuqtada berilgan $z=f(x,y)$ funksiya ***uzlukli***, $M_0(x_0,y_0)$ esa funksiyaning ***uzilish nuqtasi*** deyiladi.

Masalan, oldin ko‘rib o‘tilgan (7) funksiya O(0,0) nuqtada uzlukli,

$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2-y^2}$$

funksiya esa $y = \pm x$ to‘g‘ri chiziqda yotgan barcha nuqtalarda uzlukli , chunki bu nuqtalar funksiyaning aniqlanish sohasiga kirmaydi va ularda (2) tenglik bajarilmaydi.

1.5. Ikki o‘zgaruvchili uzluksiz funksiyalarning xossalari. Ikki o‘zgaruvchili uzluksiz $z=f(x,y)$ funksiyaning xossalarini ifodalash uchun dastlab to‘g‘ri chiziqdagi (a,b) oraliq (ochiq soha) va $[a,b]$ kesma (yopiq soha) tushunchalarini tekislik uchun umumlashtiramiz.

12-TA’RIF: Tekislikdagi *D* sohaning $M_0(x_0,y_0)$ nuqtasi o‘zining biror *r* atrofi bilan (6-ta’rifga qarang) shu sohada joylashgan bo‘lsa, u ***ichki nuqta*** deb ataladi .

Masalan, doira, kvadrat, uchburchak kabi figuralarning ichidagi nuqtalar ularning ichki nuqtalari bo‘ladi.

13-TA’RIF: Tekislikdagi $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning ixtiyoriy *r* atrofida ham *D* sohaga tegishli, ham *D* sohaga tegishli bo‘lmagan nuqtalar mavjud bo‘lsa, u *D* soha uchun ***chegaraviy nuqta*** deb ataladi .

Masalan, doira uchun uning aylanasidagi har bir nuqta chegaraviy bo‘ladi.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, *D* sohaning chegaraviy nuqtasi bu sohaga tegishli bo‘lishi ham, tegishli bo‘lmasligi ham mumkin.

14-TA’RIF: Tekislikdagi *D* sohaning barcha chegaraviy nuqtalar to‘plami uning ***chegarasi*** deb ataladi.

Masalan, doira uchun uning aylanasi chegara bo‘ladi.

15-TA’RIF: Agar *D* sohaga tegishli barcha nuqtalar ichki bo‘lsa, *D* ***ochiq soha*** deb ataladi.

Masalan, doira, kvadrat, uchburchak kabi figuralarning ichidagi barcha nuqtalardan iborat sohalar ochiq bo‘ladi.

Agar D ochiq soha bo‘lsa, unga chegaraviy nuqtalari kirmaydi.

16-TA’RIF: Agar D sohaning barcha chegaraviy nuqtalari bu sohaga tegishli bo‘lsa u ***yopiq soha*** deyiladi.

Masalan, doira o‘zining aylanasi bilan birgalikda yopiq sohani tashkil etadi.

17-TA’RIF: Agar D soha to‘liq biror chekli r radiusli doira ichida yotsa, u ***chegaralangan soha*** , aks holda esa ***chegaralanmagan soha*** deb ataladi.

Masalan, ellips ichidagi nuqtalardan iborat soha chegaralangan, parabola bilan chegaralangan soha esa chegaralanmagan bo‘ladi .

Yopiq va chegaralangan D sohada uzluksiz bo‘lgan ikki o‘zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyaning bir nechta muhim xossalarini ko‘rsatib o‘tamiz. Bu xossalar $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lgan bir o‘zgaruvchili funksiyalarning xossalarini (VII bob, §4) ikki o‘zgaruvchili funksiyalar uchun umumlashtiradi. Bu xossalar VII bob, §4 dagi tegishli teoremalarga o‘xshash isbotlanadi va shu sababli ularni takrorlab turmaymiz.

4-TEOREMA **(*Veyershtrass teoremasi*):** Agar $z=f(x,y)$ funksiya yopiq va chegaralangan D sohada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsa, bu D sohada kamida bitta shunday $M_0(x_0, y_0)$ $[M_1(x_1, y_1)]$ nuqta topiladiki, D sohaning boshqa hamma $M(x,y)$ nuqtalari uchun

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \qquad [f(x_1, y_1) \leq f(x, y)]$$

munosabat bajariladi.

Bu holda $f(x, y)$ funksiyaning $f(x_0, y_0) = A, \quad f(x_1, y_1) = B$ qiymatlari mos ravishda uning D sohadagi ***eng katta va eng kichik qiymati*** deb aytiladi hamda max$f$ va min$f$ kabi belgilanadi.

Masalan, $f(x,y)=2(x^2+ y^2)+3$ funksiya $D=\{(x,y): x^2+ y^2\leq 4\}$ yopiq doirada aniqlangan va uzluksiz. Bu funksiya D sohada o‘zining eng katta max$f$ qiymatini sohaning $x^2+y^2=4$ chegarasidagi ixtiyoriy $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada qabul etadi va bunda max$f$ =2·4+3=11 bo‘ladi. Bu funksiya D sohada o‘zining eng kichik qiymatiga $x^2+y^2=0$ bo‘lganda, ya’ni O(0,0) nuqtada erishadi va min$f$ =2·0+3=3 bo‘ladi.

<u>18-TA’RIF:</u> Agar D sohada aniqlangan $z=f(x, y)$ funksiya uchun shunday chekli A (yoki B) soni mavjud bo‘lsaki, ixtiyoriy $M(x,y)\in D$ nuqtada $f(x, y)\leq A$ (yoki $f(x, y)\geq B$) shart bajarilsa, bu funksiya D sohada ***yuqoridan (yoki quyidan) chegaralangan*** deb ataladi.

Masalan, $f(x, y)=5–x^2–y^2$ funksiya yuqoridan A=5, $g(x, y)= x^2+y^2 –2$ funksiya esa quyidan B=–2 soni bilan chegaralangan.

<u>19-TA’RIF:</u> Agar D sohada aniqlangan $z=f(x, y)$ funksiya bu sohada ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo‘lsa, u D sohada ***chegaralangan funksiya*** deb ataladi.

Masalan, $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ funksiya o‘zining D$\{f\}=\{(x,y): x^2+y^2\leq 9\}$ aniqlanish sohasida yuqoridan A=3, quyidan esa B=0 soni bilan chegaralangan. Demak, bu funksiya chegaralangandir.

Yuqoridagi Veyershtrass teoremasidan bevosita quyidagi teorema kelib chiqadi.

5-TEOREMA: Yopiq sohada uzluksiz funksiya shu sohada chegaralangan bo‘ladi.

Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning navbatdagi xossasini ifodalash uchun quyidagi tushunchani kiritamiz.

20-TA'RIF: Tekislikdagi D sohaning ixtiyoriy ikkita nuqtasini biror uzluksiz chiziq bilan tutashtirish mumkin bo‘lsa, u ***bog‘lamli soha*** deyiladi.

Masalan, aylana bilan chegaralangan soha (ochiq yoki yopiq doira) bog‘lamli soha bo‘ladi. Ammo ikkita konsentrik aylana bilan chegaralangan soha (ochiq yoki yopiq holda) bog‘lamli soha emas.

6-TEOREMA (Boltsano – Koshi teoremasi): Agar $f(x,y)$ funksiya yopiq va chegaralangan bog‘lamli D sohada uzluksiz bo‘lib, uning ikkita $M_1(x_1, y_1)$ va $M_2(x_2, y_2)$ nuqtasida qarama-qarshi ishorali qiymatlarga ega bo‘lsa, u holda bu sohaga tegishli kamida bitta $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada berilgan $f(x,y)$ funksiya nol qiymatga ega bo‘ladi .

Masalan, $f(x,y)=x^2+ y^2-3$ funksiya $D=\{(x,y): x^2+ y^2\leq 4\}$ yopiq doirada ham manfiy (misol uchun $f(1,1)=-1<0$), ham musbat (misol uchun $f(1.5,1)=0,25>0$) qiymatlarni qabul etadi. Bu funksiya D sohaga tegishli bo‘lgan $x^2+y^2=3$ aylanadagi har bir nuqtada nol qiymatni qabul etadi.

XULOSA

Bir qator nazariy va amaliy masalalarda uch va undan ortiq oʻzgaruvchilar orasidagi bogʻlanishlarni qarashga toʻgʻri keladi. Shu sababli koʻp oʻzgaruvchili funksiyalar nazariyasi yaratilgan. Bunda bir oʻzgaruvchili funksiyalar uchun oldin koʻrilgan tushuncha va natijalar umumlashtiriladi. Masalan, funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohalari, grafigi, limiti, uzluksizligi kabilar shular jumlasiga kiradi. Shu bilan bir qatorda bu nazariyada koʻp oʻzgaruvchili funksiyalarga xos boʻlgan tushuncha va natijalar ham qaraladi. Misol sifatida sath chiziqlari, takroriy limit, argumentlar boʻyicha uzluksizlik kabilarni koʻrsatish mumkin. Bir oʻzgaruvchili funksiyalar uchun oldin koʻrilgan Veyershtrass va Koshi-Boltsano teoremalari koʻp oʻzgaruvchili funksiyalar uchun ham oʻrinli boʻlishini koʻrsatish mumkin.

Tayanch iboralar

* Skalyar koʻpaytma * Evklid fazosi * Masofa * Koʻp oʻzgaruvchili funksiya * Aniqlanish sohasi * Qiymatlar sohasi * Funksiya grafigi * Sirt tenglamasi * Sath chizigʻi * Funksiya limiti * Takroriy limit * Funksiya uzluksizligi * Funksiyaning argument boʻyicha uzluksizligi * Ichki nuqta * Chegaraviy nuqta * Ochiq soha * Yopiq soha * Veyershtrass teoremasi * Chegaralangan funksiya * Bogʻlamli soha * Boltsano-Koshi teoremasi * Funksiyaning uzlukliligi

Takrorlash uchun savollar

1. Koʻp oʻzgaruvchili funksiya tushunchasiga olib keladigan masalalarga misol keltiring.
2. n oʻlchovli chiziqli fazoda skalyar koʻpaytma tushunchasi qanday kiritiladi?
3. n oʻlchovli evklid fazosi deb nimaga aytiladi?
4. n oʻlchovli evklid fazosida masofa tushunchasi qanday kiritiladi?
5. Koʻp oʻzgaruvchili funksiya ta’rifini keltiring.
6. Ikki oʻzgaruvchili funksiya qanday ta’riflanadi?
7. Ikki oʻzgaruvchili funksiyaning aniqlanish sohasi nima?
8. Ikki oʻzgaruvchili funksiyaning geometrik mazmuni nimadan iborat?
9. Ikki oʻzgaruvchili funksiyaning sath chizigʻi nima?
10. Ikki oʻzgaruvchili funksiyaning sath chizigʻi nima maqsadda qoʻllaniladi?
11. Tekislikdagi nuqtaning r radiusli atrofi deb nimaga aytiladi?

12.Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning limiti qanday ta’riflanadi?
13.Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning limiti qanday xossalarga ega?
14.Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning takroriy limiti nima?
15.Qaysi shartda takroriy limitlar o‘zaro teng bo‘ladi?
16.Qachon ikki o‘zgaruvchili funksiya nuqtada uzluksiz deyiladi?
17.Qaysi shartda ikki o‘zgaruvchili funksiya biror sohada uzluksiz deyiladi?
18.Ikki o‘zgaruvchili uzluksiz funksiyalar qanday xossalarga ega?
19.Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning argument bo‘yicha uzluksizligi nima?
20.Sohaning qanday nuqtasi ichki deb ataladi?
21.Qaysi shartda sohaning nuqtasi chegaraviy deyiladi?
22.Tekislikdagi qanday sohalar ochiq deb ataladi?
23.Tekislikdagi yopiq soha qanday ta’riflanadi?
24.Qachon tekislikdagi soha chegaralangan deyiladi?
25. Veyershtrass teoremasida qanday tasdiq keltiriladi?
26. Tekislikdagi soha qachon bog‘lamli deb aytiladi?
27. Boltsano-Koshi teoremasida nima tasdiqlanadi?
28.Qachon ikki o‘zgaruvchili funksiya nuqtada uzlukli deyiladi?
29.Ikki o‘zgaruvchili uzlukli funksiyaga misol ko‘rsating.

Testlardan namunalar

1. Tomonlari x va y bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakka doir qaysi masalaning javobi ikki o‘zgaruvchili funksiya bilan ifodalanmaydi?
A) yuzasini topish; B) perimetrini topish; C) diagonalini topish;
D) ikkita qarama-qarshi tomonining yig‘indisini topish;
E) Barcha masalalarning javoblari ikki o‘zgaruvchili funksiya bilan ifodalanadi.

2. $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ funksiyaning D{f} aniqlanish sohasini toping.
A) Tomoni a=3 va markazi O(0,0) nuqtada joylashgan kvadrat;
B) Tomoni a=3 va markazi O(0,0) nuqtada joylashgan kvadratning tashqarisidan iborat soha;
C) Radiusi R=3 va markazi O(0,0) nuqtada joylashgan doira;
D) Radiusi R=3 va markazi O(0,0) nuqtada joylashgan aylananing tashqarisidan iborat soha; E) [–3,3] kesmadan iborat soha .

3. $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ funksiyaning qiymatlar sohasini toping.
A) [–3,3]; B) (–3,3); C) [0,3]; D) (0,3); E) [0,9].

4. Ikki o‘zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiya qanday geometrik obyektni ifodalaydi?
A) tekislikdagi to‘g‘ri chiziqni; B) tekislikdagi egri chiziqni;
C) fazodagi tekislikni; D) fazodagi sirtni; E) fazodagi jismni.

5. Ta’rifni to‘ldiring: Ikki o‘zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyaning sath chizig‘i deb $\cdots$ tenglama bilan aniqlanadigan chiziqqa aytiladi .

A) $f(C,y)=0$;   B) $f(x,C)=0$;   C) $f(0,y)=C$;   D) $f(x,0)=C$;   E) $f(x,y)=C$.

6. $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ funksiyaning O(0,0) nuqtadagi limitini toping.

A) 0;   B) 1;   C)1/2;   D) Mavjud emas;   E) 2.

7. $z=x^2+y^2+2xy$ funksiyaning y bo‘yicha $\Delta_y z$ xususiy orttirmasini toping.

A) $\Delta_y z=2(\Delta x+\Delta y)$;   B) $\Delta_y z=2(x\Delta x+y\Delta y+\Delta x\cdot\Delta y)$;

C) $\Delta_y z=2x\Delta x+2y\Delta y+2(x\Delta y+y\Delta x)$;   D) $\Delta_y z=2(x+y)\Delta y+\Delta y^2$;

E) $\Delta_y z=2x+2y+2(\Delta x+\Delta y)$.

8. α parametrning qanday qiymatida

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x-y}, & x\neq 1 \text{ va } y\neq 1;\\ \alpha, & x=1 \text{ va } y=1\end{cases}$$

funksiya $M_0(1, 1)$ nuqtada uzluksiz bo‘ladi?

A) 0 ;   B) 1 ;   C) 2 ;   D) 3 ;   E) –1 .

Mustaqil ish topshiriqlari

1. $f(x,y)=\sqrt{n^2-x^2-y^2}$ ikki o‘zgaruvchili funksiyaning aniqlanish sohasi D{f} va qiymatlar sohasi E{f} toping.

2. $f(x,y)=nx^2-(n+1)xy+y^2$ ikki o‘zgaruvchili $f(x,y)$ funksiyaning $\Delta_x f$, $\Delta_y f$ xususiy va Δf to‘la orttirmalarining argument orttirmalari $\Delta x=0.1$ va $\Delta y=0.2$ bo‘lgandagi qiymatlarini aniqlang.

3. Ushbu karrali limitni hisoblang:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to n}}\frac{\sin nxy}{x}\,.$$

§2. IKKI O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYANING HOSILA VA DIFFERENSIALLARI

- ***Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari.***
- ***Yo‘nalish bo‘yicha hosila va gradient.***
- ***Ikki o‘zgaruvchili funksiya differensiallari va ularning tatbiqlari.***
- ***Yuqori tartibli differensiallar.***

Bir o‘zgaruvchili funksiya xususiyatlarini o‘rganishda va juda ko‘p masalalarni yechishda funksiyaning hosilasi muhim ahamiyatga ega ekanligini ko‘rib o‘tgan edik. Shu sababli bu tushunchani ikki o‘zgaruvchili funksiya uchun ham aniqlash masalasi bilan shug‘ullanamiz. Bunda ikki o‘zgaruvchili funksiya uchun kiritiladigan tushunchalar va keltiriladigan tasdiqlar deyarli o‘zgarishsiz ikkidan ortiq o‘zgaruvchili funksiyalar uchun ham umumlashtirilishi mumkinligini yana bir marta ta’kidlab o‘tamiz.

2.1. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari. Bir o‘zgaruvchili funksiyaning hosilasi Δf funksiya orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbatining $\Delta x\to 0$ bo‘lgandagi limiti kabi aniqlanishini eslatib o‘tamiz. Ikki o‘zgaruvchili funksiya uchun ham hosila tushunchasini shunday tarzda kiritamiz.

Berilgan $z=f(x,y)$ funksiya biror D sohada aniqlangan va $M(x,y)$ shu sohaning ichki nuqtasi bo‘lsin. Bu nuqtaning x abssissasiga Δx orttirma berib, y ordinatani o‘zgartirmay qoldiramiz. Bunda hosil bo‘ladigan $N(x+\Delta x,y)$ nuqta ham D sohaga tegishli deb hisoblaymiz. Bu holda $z=f(x,y)$ funksiyaning o‘zgarishi

$$\Delta_x f = f(x+\Delta x\,,\, y) - f(x,\, y),$$

ya’ni x argument bo‘yicha xususiy orttirma orqali ifodalanadi.

<u>1-TA’RIF:</u> Agar $z=f(x,y)$ funksiyaning x bo‘yicha $\Delta_x f$ xususiy orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbati $\Delta x\to 0$ bo‘lganda chekli limitga ega bo‘lsa, bu limit qiymati funksiyaning ***x bo‘yicha xususiy hosilasi*** deb ataladi.

Bu hosila

$$z'_x\,,\quad f'_x\,,\quad f'_x(x,y)\,,\quad \frac{\partial z}{\partial x}\,,\quad \frac{\partial f}{\partial x}$$

kabi belgilardan biri bilan belgilanadi. Bunda indeks yoki maxrajdagi x belgi hosila x argument bo‘yicha olinayotganligini ifodalaydi. Ta’rifga ko‘ra

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}\,. \qquad (1)$$

Bu yerda $\Delta_x f$ xususiy orttirma faqat x hisobiga o‘zgarib, unda y o‘zgarmas bo‘ladi. Shu sababli f'_x xususiy hosila bir x o‘zgaruvchili funksiyaning hosilasi singari aniqlanadi. Bundan $z=f(x,y)$ funksiyaning x bo‘yicha xususiy hosilasini hisoblashda ikkinchi y o‘zgaruvchini o‘zgarmas son kabi qarash kerakligi va oldin ko‘rib o‘tilgan hosilalar jadvali hamda differensiallash qoidalaridan foydalanish mumkinligi kelib chiqadi.

Masalan,

$$f(x,y) = 3x^2 \sin y + 5xy + y^2 \Rightarrow f'_x(x,y) = (3x^2 \sin y + 5xy + y^2)'_x =$$

$$= (3x^2 \sin y)'_x + (5xy)'_x + (y^2)'_x = 3\sin y (x^2)'_x + 5y(x)'_x + (y^2)'_x =$$

$$= 6x \sin y + 5y \ .$$

Xuddi shunday tarzda $z = f(x,y)$ funksiyaning

$$z'_y\,, \quad f'_y\,, \quad f'_y(x,y)\,, \quad \frac{\partial z}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

kabi belgilanadigan y bo‘yicha xususiy hosilasi kiritiladi:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \ . \qquad (2)$$

Yuqoridagi misolda x o‘zgaruvchini o‘zgarmas deb qarab, y bo‘yicha xususiy hosilani hisoblaymiz:

$$f'_y(x,y) = (3x^2 \sin y + 5xy + y^2)'_y = (3x^2 \sin y)'_y + (5xy)'_y + (y^2)'_y =$$

$$= 3x^2 (\sin y)'_y + 5x(y)'_y + (y^2)'_y = 3x^2 \cos y + 5x + 2y$$

Yana bir misol sifatida

$$f(x,y) = \mathrm{arctg} xy^2$$

funksiyaning xususiy hosilalarini hisoblaymiz:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{arctg} xy^2) = \frac{1}{1+(xy^2)^2}\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) = \frac{y^2}{1+x^2y^4},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{arctg} xy^2) = \frac{1}{1+(xy^2)^2}\frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = \frac{2xy}{1+x^2y^4}.$$

Bir o‘zgaruvchili funksiya hosilasining geometrik mazmuniga o‘xshash ikki o‘zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyaning xususiy hosilalarining ham geometrik mazmuni mavjud. Yuqorida aytilgandek, bu funksiya grafigi biror S sirtni ifodalaydi. Bu sirtga tegishli $M_0(x_0, y_0)$ nuqtani qaraymiz. Bu holda $f(x,y_0)=\varphi(x)$ bir o‘zgaruvchili funksiya bu S sirtni $y=y_0$ tekislik bilan kesishda hosil bo‘ladigan biror L chiziqni ifodalaydi. Shu sababli x bo‘yicha xususiy hosilaning $f'_x(x_0, y_0)$ son qiymati L chiziqqa $M_0(x_0, y_0)$ nuqta o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentini ifodalaydi.

Demak, $f'_x(x_0, y_0) = \mathrm{tg}\alpha$ bo‘lib, bunda α burchak S sirtni $y=y_0$ tekislik bilan kesishda hosil bo‘ladigan L chiziqqa $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada o‘tkazilgan urinmaning OX koordinata o‘qi bilan hosil etgan burchakni ifodalaydi. Xuddi shunday, $f'_y(x_0, y_0)$ soni S sirtni $x=x_0$ tekislik bilan kesishda hosil bo‘ladigan G chiziqqa $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentini ifodalaydi.

Bir o‘zgaruvchili funksiya $M_0(x_0)$ nuqtada hosilaga ega bo‘lsa, unda bu nuqtada uzluksiz bo‘lar edi. Ammo ikki o‘zgaruvchili funksiyaning $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada f'_x, f'_y xususiy hosilalari mavjudligidan uni bu nuqtada uzluksizligi har doim ham kelib chiqmaydi.

Masalan,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0\ , & x^2+y^2=0\end{cases}$$

funksiya O(0,0) nuqtada uzlukli (§1, (7) ga qarang) ekanligini ko‘rgan edik.

Ammo $f(x,0)\equiv 0$ va $f(0,y)\equiv 0$ bo‘lgani uchun bu funksiyaning O(0,0) nuqtada ikkala xususiy hosilalari mavjud va $f'_x(0,0)=0$, $f'_y(0,0)=0$ bo‘ladi.

Berilgan $z=f(x,y)$ funksiyaning

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}$$

xususiy hosilalari mavjud bo‘lsin. Bu holda ular x va y o‘zgaruvchilarning funksiyalari bo‘ladi va shuning uchun ulardan yana xususiy hosilalar olish mumkin. Agar bu xususiy hosilalar mavjud bo‘lsa, unda

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{xx},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{yy}$$

$z=f(x,y)$ funksiyaning x va y argumentlari bo‘yicha ***II tartibli xususiy hosilalari***,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f''_{xy},\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f''_{yx}$$

esa $z=f(x,y)$ funksiyaning ***II tartibli aralash hosilalari*** deyiladi. Shunday qilib jami 4 ta II tartibli hosilalarga ega bo‘lamiz.

Masalan, $z=3x^2y+5x-3y+4$ funksiyaning I tartibli xususiy hosilalari

$$f'_x=(3x^2y+5x-3y+4)'_x=6xy+5,\quad f'_y=(3x^2y+5x-3y+4)'_y=3x^2-3,$$

bo‘lgani uchun uning II tartibli hosilalari quyidagicha bo‘ladi:

$$f''_{xx}=(f'_x)'_x=(6xy+5)'_x=6y,\quad f''_{yy}=(f'_y)'_y=(3x^2-3)'_y=0,$$
$$f''_{xy}=(f'_x)'_y=(6xy+5)'_y=6x,\quad f''_{yx}=(f'_y)'_x=(3x^2-3)'_x=6x.$$

Yana bir misol sifatida yuqorida ko‘rib o‘tilgan $f(x,y)=\mathrm{arctg}(xy^2)$ funksiyaning II tartibli hosilalarini topamiz:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2}{1+x^2y^4}\right)=-\frac{2xy^6}{(1+x^2y^4)^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2xy}{1+x^2y^4}\right)=\frac{2x-6x^3y^4}{(1+x^2y^4)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{1+x^2y^4}\right)=\frac{2y-2x^2y^5}{(1+x^2y^4)^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2xy}{1+x^2y^4}\right)=\frac{2y-2x^2y^5}{(1+x^2y^4)^2}\ .$$

Bu misollarda II tartibli aralash hosilalar o‘zaro teng, ya’ni $f''_{xy}=f''_{yx}$ ekanligini ko‘ramiz. Ammo bu tenglik barcha funksiyalar uchun o‘rinli bo‘lishi shart emas. Masalan, ushbu funksiyani qaraymiz:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}xy, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

Bu funksiyani *x* bo‘yicha xususiy hosilasini hisoblab, quyidagi natijani olamiz:

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

Bu yerda x=0 deb,

$$f'_x(0,y)=-y \Rightarrow f''_{xy}(0,y)=-1 \Rightarrow f''_{xy}(0,0)=-1$$

natijaga kelamiz. Xuddi shunday tarzda $f''_{yx}(0,0)=1$ ekanligini ko‘rish mumkin. Demak, bu funksiya uchun O(0,0) nuqtada II tartibli aralash hosilalar o‘zaro teng emas.

Ammo ma’lum bir shartlarni qanoatlantiradigan funksiyalar uchun yuqoridagi misollarda ko‘rilgan aralash hosilalar tengligi o‘rinli bo‘ladi.

1-TEOREMA: Agar $z=f(x,y)$ funksiya va uning $f'_x, \quad f'_y, \quad f''_{xy}, \quad f''_{yx}$ hosilalari $M(x,y)$ nuqta va uning biror atrofida aniqlangan, bu nuqtada II tartibli $f''_{xy}, \quad f''_{yx}$ aralash hosilalar uzluksiz bo‘lsa, unda aralash hosilalar bu nuqtada o‘zaro teng, ya’ni $f''_{xy}=f''_{yx}$ bo‘ladi.

Bu teorema ***aralash hosilalar haqidagi teorema*** deb ataladi va uni isbotsiz qabul qilamiz.

O‘z navbatida $z=f(x,y)$ funksiyaning II tartibli hosilalaridan yana xususiy hosilalar olib (ular mavjud bo‘lgan taqdirda), quyidagi 8 ta III tartibli hosilalarga ega bo‘lamiz:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \ \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \ \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \ \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \ .$$

Bu jarayonni davom ettirib, ikki o‘zgaruvchili funksiyalar uchun 2^n ta n- tartibli hosilalarni n–1-tartibli hosilalar orqali birin-ketin aniqlab borish mumkin.

Ikki o‘zgaruvchili funksiya xususiy hosilalarining iqtisodiy tatbig‘iga doir bir misol qaraymiz. Yo‘lovchilar soni z bilan aholi soni x va shaharlar orasidagi masofa y o‘zaro $z=x^2/y$ ikki o‘zgaruvchili funksiya ko‘rinishida bog‘langan. Bu holda $z'_x = 2x/y$ xususiy hosila shaharlar orasidagi masofa y bir xil bo‘lganda yo‘lovchilar sonini oshishi x aholi soniga k=2 koeffitsiyent bilan to‘g‘ri proporsional bog‘langanligini ifodalaydi. $z'_y = -x^2/y^2$ xususiy hosiladan esa aholi soni x o‘zgarmaganda yo‘lovchilar sonini oshishi shaharlar orasidagi y masofaning kvadratiga teskari proporsional bo‘lishi kelib chiqadi .

2.2. Yo‘nalish bo‘yicha hosila va gradient. Endi $z=f(x,y)$ funksiyaning xususiy hosilalari tushunchasining bir umumlashmasini kiritamiz. Buning uchun funksiya $M(x,y)$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan va bu nuqtadan o‘tuvchi l to‘g‘ri chiziq bo‘yicha yo‘nalish biror $\boldsymbol{e}=\{\cos\alpha, \cos\beta\}$ birlik vektor orqali berilgan bo‘lsin. Bunda cosα, cosβ berilgan $\boldsymbol{e}$ birlik vektorning mos ravishda OX va OY koordinata o‘qlari bilan hosil etgan α va β ($\beta=90^0-\alpha$) burchaklar bilan aniqlanadi va ***yo‘naltiruvchi kosinuslar*** deb ataladi. Bu l to‘g‘ri chiziqda yotuvchi va $M(x,y)$ nuqtaning atrofiga tegishli yana bir N(x+Δx,y+Δy) nuqtani qaraymiz. Bunda $z=f(x,y)$ funksiyaning o‘zgarishi

$$\Delta_l f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

ayirma orqali ifodalanadi va u funksiyaning ***l yo‘nalish bo‘yicha orttirmasi*** deyiladi. Bu yerda $MN=\Delta l$ belgilash kiritamiz. Bunda $N\to M$ desak, ya’ni $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ bo‘lsa, unda $\Delta l\to 0$ bo‘ladi.

<u>2-TA’RIF:</u> Agar $\Delta l\to 0$ bo‘lganda $\Delta_l f/\Delta l$ nisbat chekli limitga ega bo‘lsa, bu limit qiymati $z=f(x,y)$ funksiyaning ***l yo‘nalish bo‘yicha hosilasi*** deb ataladi.

$z=f(x,y)$ funksiyaning l yo‘nalish bo‘yicha hosilasi

$$f'_l, \quad z'_l, \quad \frac{\partial f}{\partial l}, \quad \frac{\partial z}{\partial l}$$

kabi belgilanadi va , ta’rifga asosan,

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta_l f}{\Delta l}$$

kabi aniqlanadi. $\Delta l=\Delta x\cos\alpha+\Delta y\cos\beta$ tenglikdan foydalanib,

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta \tag{4}$$

formula o‘rinli ekanligini keltirib chiqarish mumkin.

Masalan, $f(x,y)=x^2-y^2$ funksiyaning $M(x,y)$ nuqtadagi $\alpha=60^0$ yo‘nalish bo‘yicha hosilasi

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta=2x\cos 60^0-2y\sin 60^0=x-y\sqrt{3}$$

formula bilan hisoblanadi. Xususan, $M(1,1)$ nuqtada bu hosilaning qiymati $1-\sqrt{3}$ bo‘ladi.

Agar l yo‘nalish biror $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2\}$ vektor orqali berilgan bo‘lsa, unda bu yo‘nalish bo‘yicha hosila

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$$

formula bilan hisoblanadi.

Masalan, yuqoridagi funksiyaning $M(1,1)$ nuqtadagi $\boldsymbol{a}=\{4,3\}$ vektor bilan aniqlanadigan l yo‘nalishi bo‘yicha hosilasining qiymatini topamiz:

$$\frac{\partial f}{\partial l}=2x\cdot\frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}}-2y\cdot\frac{3}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{8x-6y}{5}\Rightarrow\quad\frac{\partial f(1,1)}{\partial l}=\frac{8-6}{5}=\frac{2}{5}.$$

Agar l sifatida OX (yoki OY) koordinata o‘qining yo‘nalishini olsak , unda α=0, β=90^0 (yoki α=90^0, β=0) bo‘ladi va (4) formuladan

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{yoki} \quad \frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial y}$$

natijalarni olamiz. Demak, $z=f(x,y)$ funksiyaning x yoki y bo‘yicha xususiy hosilalari uning l yo‘nalish bo‘yicha hosilasining xususiy holi bo‘ladi.

3-TA’RIF: $z=f(x,y)$ funksiyaning ***gradienti*** deb koordinatalari f'_x va f'_y xususiy hosilalardan iborat vektorga aytiladi.

$z=f(x,y)$ funksiyaning gradienti odatda grad$f$ kabi belgilanadi. Gradient ma’nosini aniqlash uchun, vektorlarning skalyar ko‘paytmasidan (III bob, §2) foydalanib, l yo‘nalish bo‘yicha hosilaning (4) ifodasini quyidagicha yozib chiqamiz:

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\vec{e}\cdot \text{grad}f=|\vec{e}|\cdot|\text{grad}f|\cdot\cos\varphi=|\text{grad}f|\cdot\cos\varphi \quad .$$

Bu yerda φ orqali l yo‘nalishni ifodalovchi ***e*** birlik vektor bilan gradient vektor orasidagi burchak ifodalangan. Oxirgi tenglikdan ko‘rinadiki, φ=0 bo‘lganda yo‘nalish bo‘yicha hosila berilgan nuqtada o‘zining eng katta qiymatiga erishadi. Demak, berilgan nuqtada $z=f(x,y)$ funksiyaning turli l yo‘nalishlar bo‘yicha hosilasi (o‘zgarish tezligi) bu yo‘nalish gradient bilan ustma-ust tushganda eng katta qiymatiga erishadi va bu qiymat gradient moduliga teng bo‘ladi. Gradient , majoziy qilib aytganda, tog‘ cho‘qqisida olib chiqadigan eng tikka yo‘nalishni ifodalaydi.

Masalan,yuqorida ko‘rilgan $f(x,y)=x^2–y^2$ funksiyaning $M(x,y)$ nuqtadagi gradienti grad$f$={$2x$, $–2y$} bo‘ladi. Xususan, $M(1,1)$ nuqtada grad$f$={2, –2} va bu nuqtadagi funksiyaning eng katta o‘zgarish tezligi | grad$f$ |$=2\sqrt{2}$ bo‘ladi.

2.3. Ikki o‘zgaruvchili funksiya differensiallari va ularning tatbiqlari. Oldin $z=f(x,y)$ funksiyaning aniqlanish sohasidagi biror $M(x,y)$ nuqtadagi to‘la orttirmasini eslaymiz (§1, (3) ga qarang):

$$\Delta z=\Delta f=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)\ .$$

4-TA’RIF: Agar $z=f(x,y)$ funksiyaning berilgan $M(x,y)$ nuqtadagi to‘la orttirmasi

$$\Delta f=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y \qquad (5)$$

ko‘rinishda ifodalanib, unda $A=A(x,y)$ va $B=B(x,y)$ argumentlarning Δx va Δy orttirmalariga bog‘liq bo‘lmagan sonlar, α va β esa $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ holda cheksiz kichik miqdorlar bo‘lsa, unda bu funksiya $M(x,y)$ nuqtada ***differensiallanuvchi*** deb ataladi. To‘la orttirmaning Δx va Δy orttirmalariga nisbatan bosh, chiziqli qismi $A\Delta x+B\Delta y$ funksiyaning ***differensiali*** deyiladi.

$z=f(x,y)$ funksiyaning differensiali df yoki $df(x,y)$ kabi belgilanadi va, ta’rifga asosan, (5) tenglikdan

$$df=A\Delta x+B\Delta y \qquad (6)$$

formula orqali topiladi.

Misol sifatida $f(x,y)=x^2+xy+3y$ funksiyaning differensiallanuvchi ekanligini ta’rif bo‘yicha tekshiramiz. Buning uchun dastlab funksiyaning to‘la orttirmasini topamiz:

$$\Delta f=[(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)(y+\Delta y)+3(y+\Delta y)]-[x^2+xy+3y]=$$
$$=2x\Delta x+(\Delta x)^2+x\Delta y+y\Delta x+\Delta x\Delta y+3\Delta y=(2x+y)\Delta x+(x+3)\Delta y+\Delta x\Delta x+\Delta x\Delta y.$$

Bu tenglikni (5) bilan taqqoslab, $A=2x+y$, $B=x+3$, $\alpha=\Delta x$, $\beta=\Delta x$ ekanligini ko‘ramiz. Bunda 4-ta’rifdagi barcha shartlar bajarilmoqda va shu sababli bu funksiya tekislikdagi ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtada differensiallanuvchi va uning differensiali , (6) tenglikka asosan, quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$df=(2x+y)\Delta x+(x+3)\Delta y.$$

Ammo funksiyani differensiallanuvchi ekanligini har doim ham uning ta’rifi asosida tekshirish oson bo‘lmaydi. Shu sababli bu savolga umumiy holda javob topish masalasi paydo bo‘ladi. Bu masala quyidagi teoremada o‘z yechimini topadi.

2-TEOREMA: Agar $z=f(x,y)$ funksiyaning f'_x , f'_y xususiy hosilalari $M(x,y)$ nuqta va uning biror atrofida aniqlangan hamda uzluksiz bo‘lsa, unda funksiya bu nuqtada differensiallanuvchi va uning differensiali

$$df=f'_x\Delta x+f'_y\Delta y=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \qquad (7)$$

formula bilan aniqlanadi.

Isbot: $z=f(x,y)$ funksiyaning $M(x,y)$ nuqtadagi to‘la orttirmasini quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$\Delta f=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)=[f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)]+[f(x, y+\Delta y)-f(x, y)] \quad (8)$$

Bu yerda kvadrat qavs ichidagi ayirmalar bir o‘zgaruvchili funksiyaning orttirmalarini ifodalaydi. I qavsdagi bir o‘zgaruvchili funksiya $f(x,y+\Delta y)$ ko‘rinishda bo‘lib, uning argumenti $[x, x+\Delta x]$ kesmada o‘zgaradi. Teorema shartiga ko‘ra $f(x,y+\Delta y)$ funksiya bu kesmada f'_x hosilaga ega. Unda I qavsdagi orttirmaga Lagranj teoremasini (VIII bob, §3) qo‘llash mumkin:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)=\frac{\partial f(\overline{x}, y+\Delta y)}{\partial x}\Delta x, \quad x<\overline{x}<x+\Delta x \,. \quad (9)$$

Xuddi shunday tarzda

$$f(x, y+\Delta y)-f(x, y)=\frac{\partial f(x, \overline{y})}{\partial y}\Delta y, \quad y<\overline{y}<y+\Delta y \qquad (10)$$

tenglikni hosil qilamiz. Teorema shartiga ko‘ra xususiy hosilalar uzluksiz va $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0 \Rightarrow \overline{x}\to x, \overline{y}\to y$ bo‘lgani uchun

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\partial f(\overline{x}, y+\Delta y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \quad , \quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\partial f(x, \overline{y})}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Bu tengliklardan, limit xossasiga asosan (VII bob, §3, lemmaga qarang), quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$\frac{\partial f(\overline{x}, y+\Delta y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\gamma_1, \quad \frac{\partial f(x, \overline{y})}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\gamma_2 \qquad (11)$$

Bu yerda γ_1 va γ_2 $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ bo‘lganda cheksiz kichik miqdorlar bo‘ladi.

Endi (8) tenglikka dastlab (9)-(10), so‘ngra ular o‘rniga (11) tengliklarni qo‘yib, funksiyaning to‘la orttirmasini ushbu ko‘rinishga keltiramiz:

$$\Delta f=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y \,. \qquad (12)$$

Bu yerdan, (12) natijani (5) tenglik bilan taqqoslab, $z=f(x,y)$ funksiya $M(x,y)$ nuqtada differensiallanuvchi va uning differensiali uchun (7) formula o‘rinli ekanligini ko‘ramiz. Teorema to‘la isbotlandi.

Masalan, yuqorida ko‘rib o‘tilgan $f(x,y)=x^2+xy+3y$ funksiyaning differensialini endi (7) formula bo‘yicha topamiz:

$$df=(x^2+xy+3y)'_x\Delta x+(x^2+xy+3y)'_y\Delta y=(2x+y)\Delta x+(x+3)\Delta y \,.$$

Bu oldin olingan natijani ifodalaydi, ammo unga ancha oson erishildi.

Endi xususiy $f(x,y)=x$ holda funksiya differensialini (7) formula orqali topamiz:

$$dx=df=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y=1\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y=\Delta x \,.$$

Xuddi shunday ravishda $f(x,y)=y$ holda $dy=\Delta y$ ekanligini ko‘ramiz. Shu sababli funksiya differensiali uchun (7) formulani ushbu ko‘rinishda yozish mumkin:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \qquad (13)$$

Bu tenglikning o‘ng tomonidagi qo‘shiluvchilar $z=f(x,y)$ funksiyaning mos ravishda x va y bo‘yicha ***xususiy differensiallari*** deyiladi va $d_x f$, $d_y f$ kabi belgilanadi. Bu holda df ***to‘la differensial*** deb yuritiladi.

Izoh: Bir o‘zgaruvchili $y=f(x)$ funksiya $M(x)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lishi uchun uning shu nuqtada faqat $f'(x)$ hosilasi mavjudligi talab qilinib, uning uzluksizligi talab etilmas edi. Ikki o‘zgaruvchili funksiya uchun esa uning xususiy hosilalarini mavjudligi differensiallanuvchi bo‘lishi uchun yetarli emas.

Masalan,

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x=0 \text{ yoki } y=0, \\ 1, & x\neq 0 \text{ va } y\neq 0 \end{cases}$$

funksiya uchun $f(x,0)=0$ va $f(0,y)=0$ bo‘lgani uchun O(0,0) nuqtada uning xususiy hosilalari mavjud va $f'_x(0,0)=0$, $f'_y(0,0)=0$. Ammo O(0,0) nuqtada bu funksiya to‘la orttirmasini (5) ko‘rinishda yozib bo‘lmaydi. Haqiqatan ham, ixtiyoriy $\Delta x\neq 0$, $\Delta y\neq 0$ uchun $\Delta f=f(0+\Delta x,\ 0+\Delta y)-f(0,0)=1-0=1$, ya’ni $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ bo‘lganda cheksiz kichik miqdor emas. Demak, O(0,0) nuqtada bu funksiyaning xususiy hosilalari mavjud, ammo differensiallanuvchi emas.

<u>5-TA’RIF:</u> Fazodagi S sirtda yotuvchi va uning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasidan o‘tuvchi barcha egri chiziqlarining shu nuqtadagi barcha urinmalaridan hosil bo‘lgan P tekislik S sirtning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasidagi ***urinma tekisligi*** deb ataladi.

<u>3-TEOREMA:</u> Agar $z=f(x,y)$ funksiyaning grafigi S sirtdan iborat bo‘lsa, bu sirtning biror $M_0(x_0, y_0, z_0)= M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ nuqtasida urinma P tekislik mavjud bo‘lishi uchun funksiya shu nuqtada differensiallanuvchi bo‘lishi zarur va yetarli.

Bu teoremani isbotsiz qabul etamiz.

Bunda df to‘la differensial S sirtning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadagi urinma tekisligi applikatasining orttirmasiga teng bo‘ladi va bu tasdiq ***to‘la differensialning geometrik ma’nosini*** ifodalaydi. Bu holda S sirtning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasiga o‘tkazilgan P urinma tekislik tenglamasi

$$z - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) \qquad (14)$$

ko‘rinishda bo‘lishini keltirib chiqarish mumkin.

Masalan, $z=f(x,y)=x^2-2xy+y^2-x+2y$ funksiya bilan aniqlangan S sirtning $M(1,1,1)$ nuqtasiga o‘tkazilgan urinma tekislik tenglamasini topamiz. Bunda xususiy hosilalar mavjud, uzluksiz va

$$f'_x(1,1) = (2x-2y-1)\Big|_{y=1}^{x=1} = -1, \quad f'_y(1,1) = (-2x+2y+2)\Big|_{y=1}^{x=1} = 2 \quad ,$$

$f(1,1)=1$ bo‘lgani uchun, (14) tenglikka asosan izlangan urinma tekislik

tenglamasi

$$z-1=-(x-1)+2(y-1) \Rightarrow x-2y+z=0$$

ekanligini aniqlaymiz.

(5) tenglikdan ko‘rinadiki, agar $z=f(x,y)$ funksiya $M(x,y)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, unda u bu nuqtada uzluksiz bo‘ladi. Haqiqatan ham, bu holda

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta f = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} (A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y) = 0$$

va, ta’rifga asosan, funksiya $M(x,y)$ nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Ammo teskari tasdiq umuman olganda o‘rinli emas, ya’ni funksiyani biror $M(x,y)$ nuqtada uzluksiz ekanligidan uni bu nuqtada differensiallanuvchi bo‘lishi kelib chiqmaydi.

Masalan, $f(x,y)=|x|(y+1)$ funksiyani O(0,0) nuqtada qaraymiz. Bu nuqtada uning to‘la orttirmasini uchun

$$\Delta f = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) = |\Delta x|\Delta y \Rightarrow \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta f = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} |\Delta x|\Delta y = 0$$

tenglik o‘rinli ekanligidan funksiyani uzluksizligi kelib chiqadi. Endi bu nuqtada funksiyaning x bo‘yicha xususiy orttirmasini qaraymiz:

$$\Delta_x f = f(0+\Delta x, 0) - f(0,0) = f(\Delta x, 0) = |\Delta x|.$$

Bu yerdan ko‘rinadiki, O(0,0) nuqtada funksiyaning x bo‘yicha xususiy hosilasi mavjud emas, chunki $\Delta x\to 0$ bo‘lganda $|\Delta x|/\Delta x$ nisbatning limiti mavjud emas. Demak, O(0,0) nuqtada funksiya uzluksiz, ammo differensiallanuvchi emas.

Yuqorida isbotlangan 2-teoremadan ushbu natija kelib chiqadi.

NATIJA: Agar $z=f(x,y)$ funksiyaning f'_x, f'_y xususiy hosilalari $M(x,y)$ nuqta va uning biror atrofida aniqlangan hamda uzluksiz bo‘lsa, unda bu funksiya $M(x,y)$ nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Haqiqatan ham bu shartlarda funksiya $M(x,y)$ nuqtada differensiallanuvchi va shu sababli uzluksiz bo‘ladi.

Endi to‘la differensialning tatbig‘iga doir bir masalani qaraymiz. Buning uchun yuqoridagi (12) tenglikda $z=f(x,y)$ funksiyaning Δx va Δy argument orttirmalari kichik sonlardan iborat deb olamiz. Bu holda bu tenglikda $\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y$ qo‘shiluvchi ham kichik son bo‘ladi. Shu sababli (12) tenglikda bu qo‘shiluvchini hisobga olmasak, undan quyidagi taqribiy tengliklar kelib chiqadi:

$$\Delta f \approx df \Rightarrow f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy \Rightarrow$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y . \qquad (15)$$

Bu formuladan foydalanib, $z=f(x,y)$ funksiyaning hisoblash uchun "noqulay" bo'lgan $N(x+\Delta x, y+\Delta y)$ nuqtadagi qiymati uning hisoblash uchun "qulay" bo'lgan $M(x,y)$ nuqtadagi qiymati yordamida taqriban topilishi mumkin.

Misol sifatida $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ funksiyaning $N(2.98,\ 4.03)$ nuqtadagi qiymatini, ya'ni $\sqrt{2.98^2+4.03^2}$ ildizni taqribiy qiymatini topamiz. Bunda "qulay" nuqta $M(3,4)$ bo'ladi, chunki unda funksiyaning qiymati oson hisoblanadi va $f(3,4)=5$ bo'ladi. Bu holda $\Delta x=2.98–3=–0.02$, $\Delta y=4.03–4= 0.03$ va

$$f'_x(3,4) = \left.\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{x=3}^{y=4} = \frac{6}{5} = 1.2 , \quad f'_y(3,4) = \left.\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{x=3}^{y=4} = \frac{8}{5} = 1.6 \ .$$

Bu natijalarni (15) taqribiy formulaga qo'yib,

$$f(2.98, 4.03) = \sqrt{2.98^2+4.03^2} \approx 5 + 1.2\cdot(-0.02) + 1.6\cdot 0.03 = 5.024$$

ekanligini topamiz. Bu ildizning uch xona aniqlikdagi qiymati 5.012 ekanligidan olingan taqribiy natijaning aniqligi haqida tasavvur hosil qilishimiz mumkin.

2.4. Yuqori tartibli differensiallar. Endi yuqori tartibli differensiallar tushunchasini kiritamiz. $z=f(x,y)$ funksiya II tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo'lsin. Bu holda

$$df = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

to'la differensial ikki o'zgaruvchili funksiya sifatida uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'ladi. Shu sababli df differensialning $d(df)$differensiali haqida so'z yuritish mumkin .

6-TA'RIF: Agar $z=f(x,y)$ funksiya df differensialning $d(df)$differensiali mavjud bo'lsa, u funksiyaning ***II tartibli differensiali*** deb ataladi va d^2f kabi belgilanadi.

Agar $z=f(x,y)$ funksiya II tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, uning II tartibli differensiali d^2f mavjud va uning ta'rifi hamda to'la differensial formulasiga asosan quyidagi natijani olamiz:

$$d^2f = d(df) = \frac{\partial(df)}{\partial x}dx + \frac{\partial(df)}{\partial y}dy = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right]dx + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right]dy =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dydx + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 .$$

Bunda argument differensiallari dx va dy o'zgarmas son singari qaraldi hamda aralash hosilalar haqidagi teoremadan foydalanildi.

Demak, II tartibli differensial d^2f funksiyaning II tartibli hosilalari orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 \qquad (16)$$

I tartibli df differensialni ifodalovchi (13) tenglikdan f "umumiy ko'paytuvchini" shartli ravishda qavsdan tashqariga chiqarib va tenglikni ikkala tomonini unga "qisqartirib", ushbu operator belgisiga ega bo'lamiz:

$$d=\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy. \qquad (17)$$

Izoh: Matematik analizda operator atamasi funksiyaga funksiyani mos qo'yadigan akslantirishni ifodalaydi. (17) operator har bir f funksiyaga uning df to'la differensialini mos qo'yadi.

(17) operator orqali II tartibli d^2f differensialni hisoblashni ifodalaydigan (16) formulani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$d^2f=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f. \qquad (18)$$

Umuman olganda, $z=f(x,y)$ funksiya n-tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, uning n-tartibli differensiali d^nf mavjud bo'lib, $d^nf=d(d^{n-1}f)$ rekurrent formula orqali aniqlanadi va

$$d^nf=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f \qquad (19)$$

operator formula yordamida hisoblanadi. Nyuton binomi formulasidan (I bob,§3, (5) formula) foydalanib, (19) operatorli tenglikdan n-tartibli d^nf differensialni $z=f(x,y)$ funksiyaning n-tartibli hosilalari orqali ifodalovchi ushbu formulaga ega bo'lamiz:

$$d^nf=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{\partial^n f}{\partial^k x\partial^{n-k}y}dx^k dy^{n-k}. \qquad (20)$$

Ikki o'zgaruvchili funksiyaning n-tartibli d^nf differensiali bir o'zgaruvchili funksiyaning n-tartibli differensialiga o'xshash vazifani bajaradi va ulardan funksiyalarning xususiyatlarini o'rganishda va turli masalalarni yechishda foydalaniladi.

XULOSA

Oldin ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun limit, uzluksizlik kabi asosiy tushunchalar umumlashtirilgan edi. Endi bu funksiyalar uchun differensial hisobda eng asosiy bo'lgan hosila va differensial tushunchalari qaraladi. Bunda ko'p o'zgaruvchili funksiyalarga xos bo'lgan xususiy hosila, aralash hosila, xususiy va to'la differensial kabi yangi tushunchalar ham paydo bo'ladi. Shuningdek yo'nalish bo'yicha hosila va gradient tushunchalari va ularning xossalar qaraladi. Urinma chiziq tushunchasini umumlashtiruvchi urinma tekislik tushunchasi kiritiladi. Kiritilgan tushuncha va olingan natijalarning geometrik talqini beriladi.

Tayanch iboralar

* Xususiy hosilalar * Yo'nalish bo'yicha hosila * Gradient * Yuqori tartibli xususiy hosilalar * Aralash hosilalar * Differensiallanuvchi funksiya * Xususiy

differensial *To‘la differensial * Differensialning geometrik ma’nosi * Yuqori tartibli differensiallar

Takrorlash uchun savollar

1. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari qanday ta’riflanadi?
2. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari qanday geometrik ma’noga ega?
3. Yo‘nalish bo‘yicha hosila qanday aniqlanadi?
4. Gradient nima?
5. Gradient qanday xossaga ega?
6. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning II tartibli xususiy hosilalari qanday ta’riflanadi?
7. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning II tartibli aralash hosilalari deb nimaga aytiladi?
8. Aralash hosilalar haqidagi teoremada nima tasdiqlanadi?
9. Qachon ikki o‘zgaruvchili funksiya differensiallanuvchi deyiladi?
10. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning to‘la differensiali nimaga teng?
11. Ikki o‘zgaruvchili funksiyani differensiallanuvchi bo‘lishining zaruriy va yetarli sharti nimadan iborat?
12. Qaysi sartda ikki o‘zgaruvchili funksiya uzluksiz bo‘ladi?
13. Ikki o‘zgaruvchili uzluksiz funksiyaning differensiallanuvchiligi haqida nima deyish mumkin?
14. To‘la differensial qanday geometrik ma’noga ega?
15. Qaysi shartda fazodagi sirtga urinma tekislik mavjud bo‘ladi?
16. Fazodagi sirtga urinma tekislik tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
17. To‘la differensialning tatbig‘iga doir qanday misol bilasiz?
18. Yuqori tartibli differensiallar qanday aniqlanadi?
19. Yuqori tartibli differensiallar qanday hisoblanadi?

Testlardan namunalar

1. $z=f(x,y)$ funksiyaning x argumenti bo‘yicha f'_x xususiy hosilasi qanday aniqlanadi?

A) $f'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta x}$; B) $f'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x, y+\Delta x) - f(x,y)}{\Delta x}$;

C) $f'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x,y)}{\Delta x}$;

D) $f'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$; E) $f'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y) + f(x,y)}{\Delta x}$.

2. $z=f(x,y)$ funksiyaning y argumenti bo‘yicha f'_y xususiy hosilasi qanday aniqlanadi?

A) $f'_y = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$; B) $f'_y = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$;

C) $f'_y = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta y}$;

D) $f'_y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x}$; E) $f'_y = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y+\Delta y) + f(x,y)}{\Delta y}$.

3. $z=x^2+y^3+xy$ funksiyaning x bo‘yicha f'_x xususiy hosilasini toping.

A) $f'_x = 2x+3y^2+y$; B) $f'_x = 2x+y^3+x$; C) $f'_x = 2x+y$;

D) $f'_x = 2x+3y^2+x$; E) $f'_x = 2x+xy$.

4. $z=x^2+y^3+xy$ funksiyaning y bo‘yicha f'_y xususiy hosilasini toping.

A) $f'_y = 2x+3y^2+y$; B) $f'_y = x^2+3y^2+y$; C) $f'_y = 2x+3y^2$;

D) $f'_y = 2x+3y^2+x$; E) $f'_x = 3y^2+x$.

5. $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lishi uchun qaysi shart talab etilmaydi?

A) $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqta va uning biror atrofida aniqlangan;

B) $M_0(x_0,y_0)$ nuqta va uning biror atrofida f'_x, f'_y xususiy hosilalar mavjud;

C) $M_0(x_0,y_0)$ nuqta va uning biror atrofida f'_x, f'_y xususiy hosilalar uzluksiz;

D) $M_0(x_0,y_0)$ nuqta va uning biror atrofida f'_x, f'_y xususiy hosilalar musbat;

E) Keltirilgan barcha shartlar talab etiladi.

6. $z=x^2+y^3+xy$ funksiyaning dz to‘liq differensialini toping.

A) $dz=(x^2+x)dx+(y^3+y)dy$; B) $dz=(2x+3y^2+x)dx+(2x+3y^2+y)dy$;

C) $dz=(2x+y)dx+(3y^2+x)dy$; D) $dz=2xdx+3y^2dy$;

E) $dz=(3y^2+x)dx+(2x+y)dy$;

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Ushbu ikki o‘zgaruvchili funksiyalarning to‘la differensiallarini toping:

a) $f(x,y)=x^n \cdot n^y+\cos nx$; *b*) $f(x,y)=\dfrac{nx^2y-y^2+n}{xy}$.

2. To‘la differensial yordamida $f(x,y)=\sqrt[n]{x^2+y^2}$ funksiyaning $M(0.05,\ 0.9)$ nuqtadagi taqribiy qiymatini hisoblang.

3. Berilgan ikki o‘zgaruvchili $f(x,y)$ funksiyalarning II tartibli differensiallarini aniqlang:

$$a)\ f(x,y)=xy(x^n+y^n)\,; \qquad b)\ f(x,y)=\frac{nx-y}{x+ny}\,.$$

§3. IKKI O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYANING EKSTREMUMLARI

- ***Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning lokal ekstremumlari.***
- ***Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning shartli ekstremumlari.***
- ***Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning global ekstremumlari.***
- ***Eng kichik kvadratlar usuli.***

3.1. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning lokal ekstremumlari. Berilgan $z=f(x,y)$ funksiya tekislikdagi biror D sohada aniqlangan bo‘lib, $M_0(x_0, y_0)$ bu sohaning ichki nuqtasi bo‘lsin.

1-TA’RIF: Agar $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning biror $U_r(x_0, y_0)$ atrofiga tegishli ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqta uchun

$$f(x_0, y_0)\geq f(x,y) \quad [f(x_0, y_0)\leq f(x,y)] \qquad (1)$$

tengsizlik bajarilsa, unda $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada ***lokal maksimumga*** (***minimumga***) ega deyiladi.

Masalan, $f(x,y)=4-x^2-y^2$ funksiya $M_0(0,0)$ nuqtada lokal maksimumga ega, chunki bu nuqtaning ixtiyoriy atrofidagi $M(x,y)$ nuqtalar uchun $f(x,y)\geq 4=f(0,0)$. Xuddi shunday $g(x,y)=4+x^2+y^2$ funksiya $M_0(0,0)$ nuqtada $g(0,0)=4$ lokal minimumga ega ekanligi ko‘rsatiladi.

1-ta’rifda $f(x_0, y_0)\geq f(x,y)$ $[f(x_0, y_0)\leq f(x,y)]$ tengsizlik faqat $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning biror kichik atrofida bajarilishi talab etiladi. Bu tengsizlik, biz yuqorida ko‘rgan misoldagi singari, $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning ixtiyoriy atrofida o‘rinli bo‘lishi shart emas. Shu sababli $f(x_0, y_0)$ lokal maksimum yoki minimum deb atalmoqda.

Agar (1) tengsizlikda $x=x_0+\Delta x$ va $y=y_0+\Delta y$ deb olsak, uni lokal maksimum holida

$$f(x_0,y_0)\geq f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\Rightarrow f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\leq 0\Rightarrow \Delta f\leq 0,$$

lokal minimum holida esa $\Delta f\geq 0$ ko‘rinishda yozish mumkin. Shu sababli 1-ta’rifni funksiyaning to‘la orttirmasi orqali quyidagicha ifodalash mumkin.

2-TA’RIF: Agar $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning biror $U_r(x_0, y_0)$ atrofida $z=f(x,y)$ funksiyaning to‘la orttirmasi uchun $\Delta f(x_0, y_0)\leq 0$ ($\Delta f(x_0, y_0)\geq 0$) tengsizlik bajarilsa, unda bu funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada ***lokal maksimumga*** (***minimumga***) ega deyiladi.

3-TA’RIF: Funksiyaning lokal maksimum va minimumlari birgalikda ***funksiyaning lokal ekstremumlari*** deyiladi.

2-ta’rifga asosan funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada lokal ekstremumga ega bo‘lishi uchun uning bu nuqtadagi $\Delta f(x_0, y_0)$ to‘la orttirmasi Δx va Δy argument orttimalarining turli kichik qiymatlarida o‘z ishorasini o‘zgartirmasligi lozim.

Yuqoridagi misolda ko‘rib o‘tilgan $f(x,y)=4-x^2-y^2$ va $g(x,y)=4+x^2+y^2$ funksiyalar uchun lokal ekstremumlar $f(x,y)$ va $g(x,y)$ ifodalari bo‘yicha bevosita topildi. Ammo murakkabroq ko‘rinishdagi funksiyalar uchun bunday qilib bo‘lmaydi. Shu sababli umumiy holda ikki oʻzgaruvchili funksiyaning lokal ekstrimumlarini topish masalasi paydo boʻladi. Bu masala bir oʻzgaruvchili funksiyalar uchun oldin (VI bob,§5) koʻrilgan edi. Bu yerda $z=f\,(x,y)$ funksiyani ekstremumga tekshirish ham shunga oʻxshash amalga oshirilishini koʻramiz.

1-TEOREMA **(*Ferma teoremasi*):** Agar $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada lokal ekstremumga erishsa va bu nuqtada uning ikkala xususiy hosilalari mavjud boʻlsa, unda ular nolga teng boʻladi, ya'ni

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)=0 \\ f'_y(x_0,y_0)=0 \end{cases} \tag{2}$$

tengliklar oʻrinli boʻladi.

Isbot: $z=f(x,y)$ funksiyada $y=y_0$ deb olamiz va bunda hosil boʻladigan bir oʻzgaruvchili $h(x)=f(x,y_0)$ funksiyani qaraymiz. Teorema shartiga koʻra bu funksiya $x=x_0$ nuqtada lokal ekstremumga ega va uning hosilasi $h'(x)=f'_x(x,y_0)$ mavjud. Unda, bir oʻzgaruvchili funksiyalar uchun oldin isbotlangan Ferma teoremasiga asosan (VII bob,§5), $h'(x_0)=f'_x(x_0,y_0)=0$ ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shunday tarzda $f'_y(x_0,y_0)=0$ tenglik oʻrinli ekanligi koʻrsatiladi va teoremaning isboti yakunlanadi.

Bu teorema ***ekstremumning zaruriy shartini*** ifodalaydi va undan ushbu natija kelib chiqadi.

NATIJA: Agar $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada lokal ekstremumga erishsa va differensiallanuvchi boʻlsa, unda bu nuqtada uning differensiali $df(x_0,y_0)=0$ va gradienti $\mathrm{grad}f(x_0,y_0)=0$ boʻladi.

Bu tasdiq bevosita (2) tengliklardan va differensial, gradient ta'riflaridan kelib chiqadi.

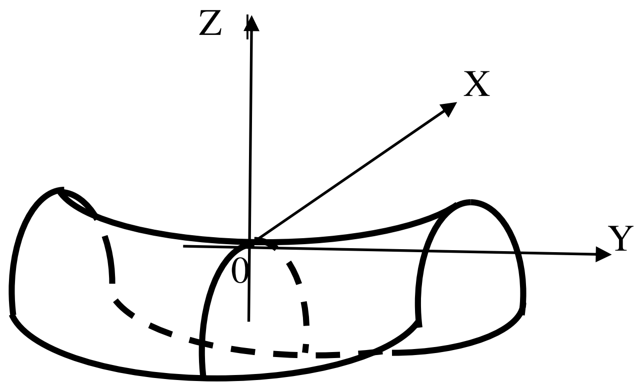
Masalan, yuqorida koʻrilgan $f(x,y)=4-x^2-y^2$ funksiya uchun haqiqatan ham u lokal maksimumga erishadigan $M_0(0,0)$ nuqtada

$$f'_x(0,0)=2x\Big|_{x=0}^{y=0}=0 \quad , \quad f'_y(0,0)=-2y\Big|_{x=0}^{y=0}=0 \Rightarrow df(0,0)=0\,,\, \mathrm{grad}f(0,0)=0$$

tengliklar bajariladi.

(2) tengliklar lokal ekstremumning faqat zaruriy shartini ifodalab, lokal ekstremum boʻlishi uchun yetarli emas.

Masalan, $f(x,y)=x^2-y^2$ differensiallanuvchi funksiya grafigi 88-rasmda koʻrsatilgan sirtdan iborat.



88-rasm

Bu funksiya uchun O(0,0) nuqtada (2) tengliklar bajariladi, ammo bu nuqtada funksiya lokal ekstremumga ega emas. Haqiqatan ham bu holda to‘la orttirma

$$\Delta f = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) = f(\Delta x, \Delta y) = \Delta x^2 - \Delta y^2$$

ko‘rinishda bo‘lib, $\Delta x > \Delta y$ bo‘lganda musbat, $\Delta x < \Delta y$ holda esa manfiy qiymat qabul etadi. Demak, O(0,0) nuqtaning ixtiyoriy atrofida $\Delta f(0, 0)$ to‘la orttirma o‘z ishorasini o‘zgartiradi va shu sababli bu nuqtada lokal ekstremum mavjud emas.
Bu funksiyaning grafigi bo‘lmish sirt quyidagi chizmada ko‘rsatilgan va unda O(0,0) nuqta ***egar nuqta*** deb ataladi. Sirtlar uchun egar nuqta egri chiziqlar uchun burilish nuqtasiga o‘xshash xususiyatga ega bo‘ladi.

4-TA’RIF: Agar $z=f(x,y)$ funksiyaning xususiy hosilalari mavjud bo‘lsa, unda (2) tengliklarni qanoatlantiruvchi nuqtalar bu funksiyaning ***kritik yoki statsionar nuqtalari*** deb ataladi.

Ferma teoremasidan funksiya lokal ekstremumlariga kritik nuqtalarida erishishi mumkinligi kelib chiqadi. Shu sababli funksiyani ekstremumga tekshirish uchun birinchi navbatda uning kritik nuqtalarini topish kerak. Agar $z=f(x,y)$ funksiya uchun $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqta bo‘lsa, unda funksiya bu nuqtada yoki lokal maksimumga, yoki lokal minimumga ega yoki umuman lokal ekstremumga ega bo‘lmasligi mumkin. Shu sababli $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqta bu xususiyatlardan qaysi biriga ega ekanligini aniqlash masalasi paydo bo‘ladi. Bu masala ekstremumning yetarli shartini topish orqali hal etiladi. Buning uchun $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqtaning biror atrofida aniqlangan, uzluksiz hamda uzluksiz I va II tartibli hosilalarga ega deb hisoblaymiz. Quyidagi belgilashlar kiritamiz:

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0),\ B = f''_{xy}(x_0, y_0),\ C = f''_{yy}(x_0, y_0),\ \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2. \quad (3)$$

2-TEOREMA(Ekstremumning yetarli shartlari): Agar $z=f(x,y)$ funksiya uchun $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqta bo‘lsa, unda (3) belgilashlarda quyidagi tasdiqlar o‘rinli :

1. $\Delta>0$, $A>0$ holda funksiya $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqtada lokal minimumga ega;
2. $\Delta>0$, $A<0$ holda funksiya $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqtada lokal maksimumga ega;
3. $\Delta<0$ holda funksiya $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqtada lokal ekstremumga ega emas.

Bu teoremani isbotsiz qabul etamiz.

Izoh: Agar $\Delta=0$ bo‘lsa funksiyaning $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqtadagi xususiyatini bu teorema orqali aniqlab bo‘lmaydi. Bu holda javob funksiyaning $\Delta f(x_0,y_0)$ to‘la orttirmasining ishorasini tekshirish orqali topiladi.

Shunday qilib ikki o‘zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyani ekstremumga tekshirish quyidagi algoritm asosida amalga oshiriladi:

- ✓ funksiyaning $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ xususiy hosilalari hisoblanadi;
- ✓ xususiy hosilalar nolga tenglashtirilib,

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi hosil etiladi;

- ✓ hosil etilgan tenglamalar sistemasi yechilib, funksiyaning kritik nuqtalari topiladi. Agar kritik nuqtalar mavjud bo‘lmasa, unda funksiya ekstremumga ega bo‘lmaydi;
- ✓ funksiyaning II tartibli hosilalari topiladi;
- ✓ kritik nuqtada (3) formulalar bo‘yicha *A*, *B*, *C* va Δ qiymatlari hisoblanadi;
- ✓ *A*, *B*, *C* va Δ qiymatlari bo‘yicha kritik nuqtada funksiyaning xususiyati 2-teorema yordamida aniqlanadi.

Misol sifatida, $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ funksiyani ekstremumga tekshiramiz. Bu holda

$$f'_x(x,y) = 2x + y - 3\,, \quad f'_y(x,y) = 2y + x - 6$$

bo‘lib, ulardan tuzilgan

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasidan $M_0(0,3)$ kritik nuqtani topamiz. Bu yerda

$$f''_{xx}(x,y) = 2\,, \quad f''_{xy}(x,y) = 1\,, \quad f''_{yy}(x,y) = 2$$

bo‘lgani uchun $A=2$, $B=1$, $C=2$ va $\Delta = AC - B^2 = 3$ ekanligini ko‘ramiz.

Bunda $\Delta>0$, $A>0$ va shu sababli,ekstremumning yetarli shartiga asosan, bu funksiya $M_0(0,3)$ kritik nuqta lokal minimumga ega va $f_{min} = f(0,3) = 3^2 - 18 = -9$ bo‘ladi.

Ikki o‘zgaruvchili funksiya lokal ekstremumiga doir ushbu iqtisodiy mazmunli masalani qaraymiz.

Masala: Ishlab chiqarish funksiyasi pul birligida ifodalanib, $f(x,y) = 30\sqrt[6]{x^3 y^2}$ ko‘rinishga ega. Bunda *x*–I xomashyo , *y*–II xomashyo birliklari miqdorini ifodalaydi. I xomashyo bir birligining qiymati – 5, II xomashyoniki esa– 10 pul birligiga teng. Bu xomashyolardan foydalanish natijasida erishiladigan foydaning maksimal qiymatini toping.

Yechish: Bizga ma’lumki, ishlab chiqarish funksiyasi $f(x,y)$ xomashyolardan foydalanish natijasida olingan daromadni ifodalaydi. Bunda, masala shartiga asosan, xomashyolar uchun qilingan xarajatlar $g(x,y)=5x+10y$ ikki o‘zgaruvchili funksiya orqali topiladi. Shu sababli xomashyolardan foydalanish natijasida olingan foyda ushbu

$$F(x,y) = f(x,y) - g(x,y) = 30x^{1/2}y^{1/3} - 5x - 10y$$

ikki o‘zgaruvchili funksiya orqali aniqlanadi. Bu funksiyani yuqorida ko‘rsatilgan algoritm bo‘yicha ekstremumga tekshiramiz. Bu yerda xususiy hosilalar

$$F'_x(x,y) = 15x^{-1/2}y^{1/3} - 5\,, \quad F'_y(x,y) = 10x^{1/2}y^{-2/3} - 10\ .$$

Bu xususiy hosilalarni nolga tenglashtirib, ushbu tenglamalar sistemasiga kelamiz va uni yechamiz:

$$\begin{cases} 3x^{-1/2}y^{1/3} = 1 \\ x^{1/2}y^{-2/3} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{1/2} = 3y^{1/3} \\ 3y^{1/3}y^{-2/3} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9y^{2/3} = 81 \\ y = 27 \end{cases}.$$

Demak, $M_0(81,27)$ kritik nuqta bo‘ladi. Bu kritik nuqtani II tartibli hosilalar yordamida tekshiramiz:

$$F''_{xx}(x,y)=-\frac{15}{2}x^{-3/2}y^{1/3}\Rightarrow\ A=F''_{xx}(81{,}27)=-\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{9^3}\cdot 3=-\frac{5}{162}\ ,$$

$$F''_{xy}(x,y)=F''_{yx}(x,y)=5x^{-1/2}y^{-2/3}\Rightarrow B=F''_{xy}(81{,}27)=5\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}=\frac{5}{81}\ ,$$

$$F''_{xx}(x,y)=-\frac{20}{3}x^{1/2}y^{-5/3}\Rightarrow C=F''_{xx}(81{,}27)=-\frac{20}{3}\cdot 9\cdot\frac{1}{243}=-\frac{20}{81}\ ,$$

$$\Delta=AC-B^2=(-\frac{5}{162})(-\frac{20}{81})-(\frac{5}{81})^2=\frac{50-25}{81^2}=(\frac{5}{81})^2>0\,.$$

Bu kritik nuqtada $\Delta>0$, $A<0$ bo‘lgani uchun unda foydani ifodalovchi $F(x,y)$ funksiya maksimumga ega bo‘ladi maksimal foyda qiymati pul birligida

$$F(81{,}27)=30\cdot 9\cdot 3-5\cdot 81-10\cdot 27=135$$

bo‘ladi.

3.2. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning shartli ekstremumlari. Oldingi qismda $z=f(x,y)$ funksiyani ekstremumga tekshirishda uning x va y argumentlari butun $D\{f\}$ aniqlanish sohasida qaralgan edi. Ammo bir qator masalalarni yechishda x va y argumentlarni faqat ma’lum bir shartni qanoatlantiradigan qiymatlarida funksiya ekstremumini topishga to‘g‘ri keladi.

Masalan, perimetri $2p$ bo‘lgan barcha to‘g‘ri to‘rtburchaklar orasidan yuzi eng katta bo‘lganini topish masalasini qaraymiz. Agar to‘g‘ri to‘rtburchak tomonlarini x va y deb olsak, bu masala $S(x,y)=xy$ funksiyaning uning argumentlari $2(x+y)=2p$ yoki $x+y=p$ shartni qanoatlantirganda, ya’ni $y=-x+p$ tenglamali to‘g‘ri chiziqda yotganda, ekstremumini topish masalasiga keladi. Bu masala yechimini quyidagicha topamiz:

$$\begin{cases} S(x,y)=xy \\ y=p-x \end{cases}\Rightarrow S(x,y)=x(p-x)=px-x^2=g(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x)=p-2x=0\Rightarrow x_0=\frac{p}{2}\Rightarrow g(x_0)=p\cdot\frac{p}{2}-(\frac{p}{2})^2=\frac{p^2}{4}\ .$$

Shunday qilib, bu masalani yechish uchun x va y argumentlarga qo‘yilgan shartdan foydalanib, ikki o‘zgaruvchili $S(x,y)$ funksiyadan bir o‘zgaruvchili $g(x)$ funksiyaga o‘tdik va uni ekstremumga tekshirdik. Bu yerda $g''(x)=-2<0$ bo‘lgani uchun $g(x)$ funksiya topilgan $x_0=p/2$ kritik nuqtada maksimumga ega bo‘ladi. Demak, perimetri $2p$ bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklar orasida eng katta yuzaga tomonlari $x_0=p/2$ => $y_0=p-p/2=p/2$ bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak, ya’ni kvadrat erishadi va bu yuza qiymati $S=p^2/4$ bo‘ladi.

Endi ko‘rib o‘tilgan bu masalani umumlashtiramiz. Bizga $z=f(x,y)$ ikki o‘zgaruvchili funksiya berilgan bo‘lib, uning x va y argumentlari $D\{f\}$ aniqlanish sohasida biror

$$\varphi(x,y)=0 \qquad (4)$$

tenglama bilan ifodalanadigan shartni qanoatlantirsin.

5-TA’RIF: $z=f(x,y)$ funksiyaning argumentlari qanoatlantiradigan (4) tenglama ***bog‘lanish tenglamasi*** deb ataladi.

6-TA’RIF: Koordinatalari (4) bog‘lanish tenglamasini qanoatlantiruvchi $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning biror atrofidagi koordinatalari (4) shartni qanoatlantiruvchi barcha $M(x,y)$ nuqtalar uchun $z=f(x,y)$ funksiya $f(x_0,y_0)\geq f(x,y)$ $[f(x_0,y_0)\leq f(x,y)]$ tengsizlikni qanoatlantirsa, unda bu funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada ***shartli maksimumga (mimnimumga)*** ega deyiladi va ular birgalikda ***shartli ekstremumlar*** deb ataladi.

Umumiy holda ham funksiyaning shartli ekstremumini yuqorida koʻrilgan xususiy masaladagi singari usulda quyidagicha topish mumkin:

1) dastlab (4) bogʻlanish tenglamasidan $y=\psi(x)$ funksiyani topamiz ;

2) soʻngra ikki oʻzgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyadan, $y=\psi(x)$ ekanligini hisobga olib, bir oʻzgaruvchili $g(x)=f(x,\psi(x))$ funksiyaga oʻtamiz;

3) Hosil boʻlgan $g(x)$ funksiyani bizga ma'lum usulda (VIII bob,§5) ekstremumga tekshiramiz.

Ammo bu usul har doim ham qulay emas, jumladan $y=\psi(x)$ funksiyani topish masalasi murakkab boʻlishi mumkin. Shu sababli bu masalani Lagranj tomonidan taklif etilgan usulda yechamiz. Buning uchun berilgan $z=f(x,y)$ funksiya va (4) bogʻlanish tenglamasi boʻyicha

$$\mathrm{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\,\varphi(x,y) \qquad (5)$$

uch oʻzgaruvchili funksiyani hosil qilamiz. Bunda $\mathrm{L}(x,y,\lambda)$–***Lagranj funksiyasi***, λ–***Lagranj koʻpaytuvchisi*** deb ataladi. Bu holda quyidagi teorema oʻrinli ekanligini isbotlash mumkin.

3-TEOREMA Agar $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada $z=f(x,y)$ funksiya shartli ekstremumga ega boʻlsa, unda shunday λ_0 soni topiladiki, $N(x_0,y_0,\lambda_0)$ nuqtada $\mathrm{L}(x,y,\lambda)$ Lagranj funksiyasi ekstremumga (shartsiz) ega boʻladi.

Bu teoremadan koʻrinadiki, $z=f(x,y)$ funksiyaning shartli ekstremumini topish masalasi $\mathrm{L}(x,y,\lambda)$ Lagranj funksiyasini ekstremumga tekshirishga keltiriladi. Bu xulosadan, ekstremumning zaruriy (2) shartiga asosan, quyidagi tenglamalar sistemasiga ega boʻlamiz:

$$\begin{cases} L'_x = f'_x(x,y) - \lambda\varphi'_x(x,y) = 0 \\ L'_y = f'_y(x,y) - \lambda\varphi'_y(x,y) = 0 \\ \qquad L'_\lambda = \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Bu sistemani yechib, λ_0, x_0, y_0 ildizlarni topamiz. Unda $z=f(x,y)$ funksiyaning shartli ekstremumlari (6) sistema ildizlari orqali aniqlanadigan $M_0(x_0,y_0)$ nuqtalarda boʻlishi mumkin.

Misol sifatida, dastlab $z=f(x,y)=(x/3)+(y/4)$ funksiyani $x^2+y^2=1$ aylanada shartli ekstremumga tekshiramiz. Qaralayotgan misolda bogʻlanish tenglamasi $\varphi(x,y)=x^2+y^2-1=0$ koʻrinishda boʻladi. Lagrang funksiyasini tuzamiz:

$$L(x,y,\lambda)=\frac{x}{3}+\frac{y}{4}-\lambda(x^2+y^2-1)\ .$$

Bu funksiyadan foydalanib, (6) tenglamalar sistemasini hosil etamiz va uni yechamiz:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}-2\lambda x=0 \\ \frac{1}{4}-2\lambda y=0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{6\lambda} \\ y=\frac{1}{8\lambda} \\ (\frac{1}{6\lambda})^2+(\frac{1}{8\lambda})^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=\pm\frac{4}{5} \\ y_0=\pm\frac{3}{5} \\ \lambda_0=\pm\frac{5}{24} \end{cases}.$$

Demak, $f(x,y)$ funksiya o'zining shartli ekstremumlariga $\lambda_0=5/24$ bo'lganda $M_1(4/5,3/5)$ va $\lambda_0=-5/24$ bo'lganda $M_2(-4/5,-3/5)$ nuqtalarda erishishi mumkin. Bu nuqtalarda $L(x,y,\lambda_0)$ funksiyani ekstremumga tekshiramiz. Bunda

$$A=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=-2\lambda_0,\ B=\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}=0,\ C=\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=-2\lambda_0 \Rightarrow \Delta=AC-B^2=4\lambda_0^2.$$

Bu yerdan $\lambda_0=\pm5/24$ bo'lganda $\Delta>0$ ekanligi kelib chiqadi va shu sababli $L(x,y,\pm5/24)$ funksiya lokal ekstremumga ega bo'ladi. Bunda $\lambda_0=5/24$ bo'lganda $A=-5/12<0$ va shu sababli, 2-teoremaga asosan, $M_1(4/5,3/5)$ nuqtada $L(x,y,5/24)$ funksiya lokal maksimumga egadir. Unda bu nuqtada qaralayotgan $f(x,y)$ shartli maksimumga ega va uning qiymati $f_{max}=f(4/5, 3/5)=5/12$ bo'ladi.

Xuddi shunday tarzda $M_2(-4/5,-3/5)$ nuqtada $f(x,y)$ shartli minimumga ega va $f_{min}=f(-4/5,-3/5)=-5/12$ bo'lishi ko'rsatiladi.

Endi yana bir misol sifatida $z=f(x,y)=xy$ funksiyani $x^2+y^2=8$ aylanada shartli ekstremumga tekshiramiz. Bunda Lagranj funksiyasi $L(x,y,\lambda)=xy-\lambda(x^2+y^2-8)$ ko'rinishda bo'ladi. (6) tenglamalar sistemasini tuzamiz va uni yechamiz:

$$\begin{cases} y-2\lambda x=0 \\ x-2\lambda y=0 \\ x^2+y^2-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4\lambda^2 y \\ x=2\lambda y \\ x^2+y^2-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0=\frac{1}{2} \\ x_0=\pm2 \\ y_0=\pm2 \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda_0=-\frac{1}{2} \\ x_0=\pm2 \\ y_0=\mp2 \end{cases}$$

Demak, berilgan $f(x,y)=xy$ funksiya o'zining shartli ekstremumlariga

$M_1(2,2)$, $M_2(-2,-2)$ $[\lambda_0=1/2]$ va $M_3(2,-2)$, $M_4(-2, 2)$ $[\lambda_0=-1/2]$

nuqtalarda erishishi mumkin. Bu nuqtalarda $L(x,y,\lambda_0)$ funksiyani ekstremumga tekshiramiz. Bu yerda

$$A=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=-2\lambda_0,\ B=\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}=1,\ C=\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=-2\lambda_0 \Rightarrow \Delta=AC-B^2=4\lambda_0^2-1$$

va $\lambda_0=\pm1/2$ holda $\Delta=0$ bo'ladi. Shu sababli $L(x,y,\lambda_0)$ funksiyani ekstremumga tekshirish uchun ekstremumning yetarli shartini ifodalovchi 2-teoremadan foydalana olmaymiz. Unda $L(x,y,\lambda_0)$ funksiyaning $\Delta L(x,y,\lambda_0)$ to'liq orttirmasiga murojaat etamiz:

$$\Delta L(x,y,\lambda_0)=L(x+\Delta x,y+\Delta y,\lambda_0)-L(x,y,\lambda_0)=$$
$$=\{(x+\Delta x)(y+\Delta y)-\lambda_0[(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2-8]\}-[xy-\lambda_0(x^2+y^2-8]=$$
$$=x\Delta y+y\Delta x+\Delta x\Delta y-\lambda_0[2x\Delta x+2y\Delta y+\Delta x^2+\Delta y^2].$$

Bu yerdan $\lambda_0=1/2$ va $x=y$ holda $\Delta L(x,x,1/2)=-(\Delta x-\Delta y)^2/2\le0$ ekanligini ko'ramiz. Unda, 2-ta'rifga asosan, $M_1(2,2)$ va $M_2(-2,-2)$ nuqtalarda $L(x,y,1/2)$

funksiya maksimumga, qaralayotgan $f(x,y)=xy$ funksiya esa shartli maksimumga ega va uning qiymati $f_{max}=f(\pm2, \pm2)=4$ bo‘ladi.

Xuddi shunday tarzda $\lambda_0=-1/2$ va $x=-y$ holda $\Delta L(x, -x, -1/2)=(\Delta x+\Delta y)^2/2\geq0$ ekanligini va $M_3(2,-2)$ va $M_4(-2, 2)$ nuqtalarda $f(x,y)=xy$ funksiya shartli minimumga ega va uning qiymati $f_{min}=f(\pm2, \mp2)=-4$ ekanligi ko‘rsatiladi.

Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning shartli ekstremumiga doir quyidagi iqtisodiy mazmunli masalani qaraymiz.

Masala: Ishlab chiqarish funksiyasi pul birligida ifodalanib, $f(x,y)=30\sqrt[6]{x^3y^2}$ ko‘rinishga ega. Bunda x–I xomashyo , y–II xomashyo birliklari miqdorini ifodalaydi. I xomashyo bir birligining qiymati – 5, II xomashyoniki esa – 10 pul birligiga teng. Bu xomashyolarga 600 pul birligi hajmida xarajat qilishimiz mumkin. Bu shartda olinadigan foyda maksimal qiymatga erishishi uchun har bir xomashyodan qancha miqdor olinishi kerakligini aniqlang.

Yechish: Oldin bu masala qaralganda xomashyoga xarajatlar chegaralangan emas edi. Endi esa olinadigan foydani ifodalovchi ushbu

$$F(x,y)=f(x,y)-g(x,y)=30x^{1/2}y^{1/3}-5x-10y$$

ikki o‘zgaruvchili funksiyani $5x+10y=600$ yoki $x+2y=120$ bog‘lanish tenglamasi bo‘lgan holda shartli ekstremumga tekshirishimiz kerak. Bu holda $x=120-2y$ tenglik o‘rinli bo‘lgani uchun foyda funksiyasi

$$F(120-2y,y)=30\sqrt[6]{(120-2y)^3y^2}-5(120-2y)-10y=$$
$$=30\sqrt[6]{(120-2y)^3y^2}-600=H(y)$$

ko‘rinishga kelib, bir o‘zgaruvchili $H(y)$ funksiyaga aylanadi. Bu funksiyani ekstremumga tekshirish uchun dastlab kritik nuqtani topamiz:

$$H'(y)=[30(120-2y)^{1/2}y^{1/3}-600]'=30\cdot[-\frac{1}{(120-2y)^{1/2}}y^{1/3}+\frac{(120-2y)^{1/2}}{3y^{2/3}}]=$$
$$=10\cdot\frac{(120-2y)-3y}{(120-2y)^{1/2}y^{2/3}}=0\Rightarrow y_0=24\Rightarrow x_0=120-2\cdot24=72\ .$$

Demak, $H(y)$ funksiya uchun $y_0=24$ kritik nuqta bo‘ladi. Bunda $H'(y)$ hosila $y<24$ holda musbat, $y>24$ holda esa manfiy ishoraga ega bo‘lganligi uchun $H(y)$ funksiya $y_0=24$ kritik nuqtada maksimum qiymatga erishadi. Demak, I xomashyodan $x_0=72$, II xomashyodan esa $y_0=24$ birlik ishlatilganda olinadigan foyda maksimal va uning qiymati

$$H(24)=F(72,24)=30\cdot\sqrt{72}\cdot\sqrt[3]{24}-600\approx733-600=133$$

pul birligiga teng bo‘ladi.

3.3. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning global ekstremumlari. Berilgan $z=f(x,y)$ funksiya biror yopiq va chegaralangan D sohada aniqlangan va uzluksiz , bu sohaning ichki nuqtalarida chekli xususiy hosilalarga ega bo‘lsin. Unda bu funksiya, Veyershtrass teoremasiga asosan (§1, 4- teorema), D sohada o‘zining eng katta *maxf* (global maksimum) va eng kichik *minf* (global minimum) qiymatlariga erishadi. Bu qiymatlar, funksiyani lokal ekstremumga tekshirishdan foydalanilib, quyidagi tartibda topiladi:

❖ Funksiyaning $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ xususiy hosilalari hisoblanadi ;

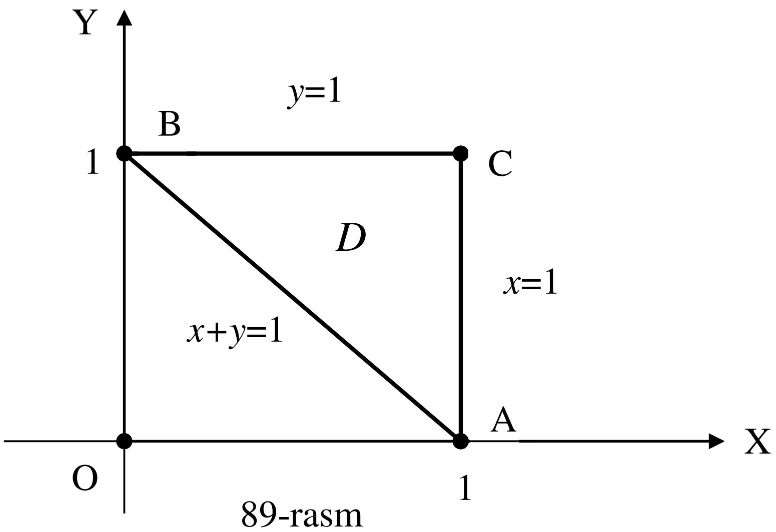
❖ Xususiy hosilalar nolga tenglashtirilib, kritik nuqtalar topiladi ;

❖ Topilgan kritik nuqtalardan faqat D soha ichida yotuvchilari qaralib, ularda berilgan funksiyaning qiymatlari hisoblanadi ;

❖ D soha chegarasini ifodalovchi chiziqning $y=\varphi(x)$, $x\in[a,b]$, tenglamasidan foydalanilib, chegarada ikki o‘zgaruvchili $f(x,y)$ funksiyani $g(x)= f(x, \varphi(x))$ bir o‘zgaruvchili funksiyaga keltiriladi va uning $[a,b]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topiladi (VIII bob,§5);

❖ Funksiyaning oldingi ikki qadamda hisoblangan barcha qiymatlarini taqqoslab, uning D sohadagi eng katta *maxf* va eng kichik *minf* qiymatlarini, ya’ni global ekstremumlarini topamiz.

Misol sifatida, $f(x,y)=x^2+2y^2-x-3y+5$ funksiyaning $x=1$, $y=1$ va $x+y=1$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan uchburchakdan iborat D sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topamiz (89-rasmga qarang) .



89-rasm

1) Berilgan funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz:

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=2x-1=0 \\ f'_y(x,y)=4y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=1/2 \\ y_0=3/4 \end{cases}.$$

Demak, funksiyaning bitta $M_0(1/2,\ 3/4)$ kritik nuqtasi mavjud. Bu kritik nuqta qaralayotgan D soha ichida joylashgan va shu sababli uni hisobga olib, bu nuqtada $f(1/2,\ 3/4)=29/8$ ekanligini aniqlaymiz.

2) Berilgan funksiyani AC chegarada qaraymiz. Unda $x=1$ bo‘lgani uchun funksiyamiz

$$f(1,y)=1^2+2y^2-1-3y+5=2y^2-3y+5\ ,\ 0\le y\le 1,$$

ko‘rinishga keladi, ya’ni bir o‘zgaruvchili funksiyaga aylanadi. Uning kritik nuqtasini topamiz:

$$f'(1,y)=4y-3=0 \Rightarrow y=3/4\ .$$

Bu kritik nuqta va [0,1] kesmaning chegaraviy nuqtalarida berilgan funksiya qiymatlarini hisoblab, $f(1,3/4)=31/8$, $f(1,0)=5$, $f(1,1)=4$ ekanligini topamiz;

3) Berilgan funksiyani BC chegarada qaraymiz. Unda $y=1$ bo‘lgani uchun funksiyamiz

$$f(x,1)=x^2-x+4\ ,\ 0\le x\le 1,$$

ko‘rinishga keladi. Bu yerda kritik nuqta x=1/2 bo‘lib, unda va [0,1] kesma chegaralarida f(1/2,1)=15/4, f(0,1)= f(1,1)=4 ekanligini topamiz;

4) Berilgan funksiyani AB chegarada qaraymiz. Unda y=1–x bo‘lgani uchun funksiyamiz

$$f(x,1-x)=3x^2-2x+4\ ,\ 0\leq x\leq 1,$$

ko‘rinishga keladi. Bunda kritik nuqta x=1/3 va unda f(1/3,2/3)=11/3 bo‘ladi. Chegaraviy nuqtalarda f(0,1)=4, f(1,0)=5 ekanligi oldin ko‘rilgan edi.

Shunday qilib, berilgan funksiyaning hisoblangan

$$f(1/2,\ 3/4)=29/8,\ f(1,\ 3/4)=31/8,\ f(1,0)=5,\ f(1,\ 1)=4,$$
$$f(1/2,\ 1)=15/4,\ f(0,1)=4,\ f(1/3,\ 2/3)=11/3$$

qiymatlarini taqqoslab, uning global minimumi $minf$=f(1/2,3/4)=29/8 va global maksimumi $maxf$=f(1,0)=5 ekanligini ko‘ramiz

3.4. Eng kichik kvadratlar usuli. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning lokal ekstremumlarini yana bir tatbig‘ini ko‘ramiz. Ko‘p hollarda qandaydir ikkita x va y o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanishni nazariy topib bo‘lmaydi. Bunday hollarda ular ustida n marta kuzatuvlar yoki tajribalar o‘tkazib, bu kuzatuv natijalari quyidagi jadval ko‘rinishida ifodalanadi:

x	x_1	x_2	⋯	x_i	⋯	x_n
y	y_1	y_2	⋯	y_i	⋯	y_n

Bu tajribaviy ma’lumotlar asosida x va y orasidagi bog‘lanish haqida xulosalar chiqarish uchun dastlab jadvaldagi kuzatuv natijalarining turli tasodifiy xatoliklari (o‘lchash, yaxlitlash, hisoblash xatoliklari va hokazo) ta’siridan iloji boricha qutilishga harakat qilinadi. Bu ***kuzatuv natijalarini silliqlash*** deb ataladi. So‘ngra yuqoridagi jadval ko‘rinishda berilgan x va y o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanishni biror y=f(x) funksiya ko‘rinishda analitik ifodalashga harakat qilinadi. Bunday yo‘l bilan tajribaviy ma’lumotlar asosida hosil etilgan y=f(x) formula ***empirik formula*** deb ataladi. Ko‘p hollarda empirik formula chiziqli , ya’ni y=ax+b ko‘rinishda deb olinadi. Bunda a va b parametrlarning qiymati noma’lum bo‘lib, ular quyidagi mulohaza asosida tanlanadi. Qaralayotgan y o‘zgaruvchining x=x_i (i=1,2,3,⋯, n) bo‘lgandagi y_i tajribaviy qiymatlari bilan chiziqli empirik formula bilan aniqlanadigan ax_i+b nazariy qiymatlari orasidagi tafovutni ifodalovchi $\Delta_i= ax_i+b- y_i$ ayirmalarni kiritamiz. Bunda barcha kuzatuv natijalarining umumiy tafovutini baholash maqsadida nazariy jihatdan asoslangan, amaliyotda keng qo‘llaniladigan va sodda ko‘rinishga ega bo‘lgan ***eng kichik kvadratlar usuli*** deb ataladigan usulda ushbu yig‘indi qaraladi:

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2\ . \qquad (7)$$

Eng kichik kvadratlar usulida noma’lum a va b parametrlarning qiymatlari umumiy tafovutni ifodalovchi ikki o‘zgaruvchili S(a,b) funksiya lokal minimumiga erishadigan qilib tanlanadi. Shunday qilib a va b parametrlarni tanlash masalasi ikki o‘zgaruvchili S(a,b) funksiyani ekstremumga tekshirish masalasiga keltirildi. Demak, biz birinchi navbatda S(a,b) funksiyaning kritik nuqtasini topishimiz kerak. Buning uchun xususiy hosilalarni hisoblaymiz:

$$S'_a(a,b)=\sum_{i=1}^{n}2(ax_i+b-y_i)x_i=2[a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i],$$

$$S'_b(a,b)=\sum_{i=1}^{n}2(ax_i+b-y_i)=2[a\sum_{i=1}^{n}x_i+b\sum_{i=1}^{n}1-\sum_{i=1}^{n}y_i].$$

Bu yerda yozuvlarni ixchamlash maqsadida quyidagi belgilashlar kiritamiz:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\equiv\overline{X},\quad \sum_{i=1}^{n}y_i\equiv\overline{Y},\quad \sum_{i=1}^{n}x_i^2\equiv\overline{X^2},\quad \sum_{i=1}^{n}x_iy_i\equiv\overline{XY}.$$

Xususiy hosilalarni nolga tenglashtirib va bu belgilashlardan foydalanib, $M(a,b)$ kritik nuqtani topish uchun quyidagi sistemani hosil etamiz:

$$\begin{cases}\overline{X^2}a+\overline{X}b=\overline{XY}\\ \overline{X}a+nb=\overline{Y}\end{cases}. \tag{8}$$

Bu yerda (8) ***normal tenglamalar sistemasi*** deyiladi. Bu chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida (III bob, §4) yechamiz. Bu sistemaning asosiy determinantini hisoblaymiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\overline{X^2} & \overline{X}\\ \overline{X} & n\end{vmatrix}=n\overline{X^2}-(\overline{X})^2. \tag{9}$$

Ushbu Koshi tengsizligidan

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\le\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2$$

y_i=1 (i=1,2,3,···, n) holda $\Delta>0$ ekanligi kelib chiqadi. Demak (8) normal sistema doimo yagona yechimga ega bo‘ladi. Uning yordamchi determinantlarini hisoblaymiz:

$$\Delta_a=\begin{vmatrix}\overline{XY} & \overline{X}\\ \overline{Y} & n\end{vmatrix}=n\overline{XY}-\overline{X}\cdot\overline{Y},\quad \Delta_b=\begin{vmatrix}\overline{X^2} & \overline{XY}\\ \overline{X} & \overline{Y}\end{vmatrix}=\overline{X^2}\cdot\overline{Y}-\overline{X}\cdot\overline{XY}. \tag{10}$$

Bu yerdan (9) va (10) natijalar orqali izlangan a va b parametrlar uchun ushbu formulalarni hosil etamiz:

$$a=\frac{\Delta_a}{\Delta}=\frac{n\overline{XY}-\overline{X}\cdot\overline{Y}}{n\overline{X^2}-(\overline{X})^2},\quad b=\frac{\Delta_b}{\Delta}=\frac{\overline{X^2}\cdot\overline{Y}-\overline{X}\cdot\overline{XY}}{n\overline{X^2}-(\overline{X})^2}. \tag{11}$$

(11) formula bilan topiladigan $M(a,b)$ kritik nuqtada (7) tenglik bilan aniqlanadigan $S(a,b)$ funksiya lokal minimumga ega bo‘lishini ko‘rsatamiz. Bu tasdiq

$$S''_{aa}=2\overline{X^2}=A,\quad S''_{ab}=2\overline{X}=B,\quad S''_{bb}=2n=C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\overline{\Delta}=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=4(n\overline{X^2}-\overline{X}^2)=4\Delta>0$$

va A>0 bo‘lgani uchun 2-teoremadan kelib chiqadi.

Izoh: Empirik formula qandaydir $y=f(x,a,b,c,\cdots)$ ko‘rinishda izlanganda ham undagi noma’lum $a,b,c,$ ··· parametrlar eng kichik kvadratlar usulida yuqorida ko‘rsatilgan tarzda baholanadi.

Misol: Mahsulot uchun talab funksiyasini aniqlash maqsadida yillar davomida uning sotuv hajmi x (ming dona) va narxi y (shartli pul birligida) ustida kuzatuvlar natijalari quyidagi jadval ko'rinishida berilgan :

x_i	12.2	18.6	29.2	15.7	25.4	35.2	14.7	11.1
y_i	29.2	30.5	29.7	31.3	30.8	29.9	27.8	27.0

Talab funksiyasi chiziqli, ya'ni $y=ax+b$ ko'rinishda deb olib, kuzatuv natijalari bo'yicha noma'lum a va b parametrlarning qiymatlarini eng kichik kvadratlar usulida tanlaymiz. (8) normal tenglamalar sistemasini tuzish uchun kerak bo'ladigan koeffitsiyentlarni hisoblashni quyidagi jadval ko'rinishida amalga oshiramiz:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
12.2	29.2	148.84	356.24
18.6	30.5	345.96	567.30
29.2	29.7	852.64	867.24
15.7	31.3	246.49	491.41
25.4	30.8	645.16	782.32
35.2	29.9	1239.04	1052.48
14.7	27.8	216.09	408.66
11.1	27.0	123.21	299.70
$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{X^2}$	$\overline{XY}$
162.1	236.2	3817.43	4825.35

Olingan natijalar bo'yicha normal tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$\begin{cases} 3817.43a + 162.1b = 4825.35 \\ 162.1a + 8b = 236.2 \end{cases}.$$

Bu sistemani Kramer usulida yechamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3817.43 & 162.1 \\ 162.1 & 8 \end{vmatrix} = 30539.44 - 26276.41 = 4263.03,$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 4825.35 & 162.1 \\ 236.2 & 8 \end{vmatrix} = 38602.80 - 38288.02 = 317.78,$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 3817.43 & 4825.35 \\ 162.1 & 236.2 \end{vmatrix} = 901676.966 - 782189.235 = 119487.731,$$

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{317.78}{4263.03} \approx 0,07, \quad b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{119487.731}{4263.03} \approx 28.03 .$$

Demak, izlangan talab funksiyasini $y=0.07x+28.03$ ko'rinishda deb hisoblash mumkin. Bu yerda sotuv hajmi x oldidagi koeffitsiyent kichik son ekanligidan bu mahsulotning narxi y muvozanatlashgan, ya'ni sotuv hajmiga qarab keskin o'zgaruvchi emasligini ko'ramiz.

XULOSA

Bu paragrafda bir o‘zgaruvchili funksiyalar uchun aniqlangan tushuncha va olingan natijalarni ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarga umumlashtirish davom ettiriladi. Endi ikki o‘zgaruvchili funksiya misolida lokal va global ekstremum tushunchalari, ularning mavjudligining zaruriy va yetarli shartlarini aniqlash, bu ekstremumlarni topish masalalari ko‘rib o‘tiladi. Bu bilan bir qatorda ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarga xos bo‘lgan shartli ekstremum tushunchasi va uni Lagranj usulida topish masalasi qaraladi.

Funksiya ekstremumlarining tatbig‘iga misol sifatida kuzatuv natijalarini eng kichik kvadratlar usulida topiladigan empirik formulalar orqali silliqlash masalasi ko‘rib chiqiladi.

Tayanch iboralar

* Lokal maksimum * Lokal minimum * Lokal ekstremum * Ferma teoremasi * Kritik nuqta * Ekstremumning yetarli sharti * Ekstremumga tekshirish algoritmi
*Bog‘lanish tenglamasi * Shartli lokal maxsimum * Shartli lokal minimum * Shartli lokal ekstremum * Lagrang funksiyasi * Global maksimum * Global minimum * Global ekstremum * Kuzatuv natijalarini silliqlash * Empirik formulalar * Eng kichik kvadratlar usuli

Takrorlash uchun savollar

1. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning lokal maksimumi (minimumi) qanday ta’riflanadi?
2. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning lokal ekstremumlari nima?
3. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning lokal ekstremumlari uning to‘la orttirmasi orqali qanday ta’riflanadi?
4. Lokal ekstremumning zaruriy sharti nimadan iborat?
5. Lokal ekstremumning zaruriy sharti yetarli ham bo‘ladimi?
6. Lokal ekstremumning yetarli sharti qanday ifodalanadi?
7. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning ekstremumga tekshirish algoritmi qaysi bosqichlardan iborat bo‘ladi?
8. Bog‘lanish tenglamasi nimani ifodalaydi?
9. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning shartli lokal maksimumi qanday ta’riflanadi?
10. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning shartli lokal maksimumi nima?
11. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning shartli lokal ekstremumlari deb nimaga aytiladi?
12. Lagranj funksiyasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
13. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning global ekstremumlari qanday ta’riflanadi?

14. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning global ekstremumlari qanday topiladi?
15. Kuzatuv natijalarini silliqlash deganda nima tushuniladi?
16. Qanday formulalar empirik deb ataladi?
17. Eng kichik kvadratlar usulining mohiyati nimadan iborat?

Testlardan namunalar

1. Ta’rifni to‘ldiring: $z=f(x,y)=f(M)$ funksiya aniqlanish sohasidagi ichki $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada lokal maksimumga ega deyiladi, agar shu nuqtaning biror atrofidagi ··· uchun $f(M_0)\geq f(M)$ shart bajarilsa.

A) bitta $M(x,y)$ nuqta; B) ayrim $M(x,y)$ nuqtadalar;
C) barcha $M(x,y)$ nuqtadalar; D) birorta $M(x,y)$ nuqta;
E) To‘g‘ri javob keltirilmagan.

2. Ta’rifni to‘ldiring: $z=f(x,y)=f(M)$ funksiya aniqlanish sohasidagi ichki $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada lokal minimumga ega deyiladi, agar shu nuqtaning biror atrofidagi ··· uchun $f(M_0)\leq f(M)$ shart bajarilsa.

A) bitta $M(x,y)$ nuqta; B) ayrim $M(x,y)$ nuqtadalar;
C) barcha $M(x,y)$ nuqtadalar; D) birorta $M(x,y)$ nuqta;
E) To‘g‘ri javob keltirilmagan.

3. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning lokal ekstremumi nimadan iborat?

A) faqat lokal maksimumlardan; B) faqat lokal minimumlardan;
C) lokal maksimum yoki lokal minimumlardan;
D) lokal maksimum va lokal minimumlardan;
E) barcha javoblar to‘g‘ri.

4. Berilgan $z=f(x,y)$ funksiya aniqlanish sohasidagi ichki $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada lokal maksimumga ega bo‘lishi uchun uning biror atrofida $\Delta f(x_0,y_0)$ to‘la orttirma qanday shartni qanoatlantirishi kerak?

A) $\Delta f(x_0,y_0)=0$; B) $\Delta f(x_0,y_0)\leq 0$; C) $\Delta f(x_0,y_0)\geq 0$; D) $\Delta f(x_0,y_0)\neq 0$;
E) to‘g‘ri javob keltirilmagan.

5. $z=(x-1)^2+(y+2)^2+1$ funksiyaning $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqtasini toping.

A) $M_0(2,1)$; B) $M_0(1,2)$; C) $M_0(1,-2)$; D) $M_0(-1,2)$; E) $M_0(0,0)$.

6. Differensiallanuvchi $z=f(x,y)$ funksiyani $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada ekstremumga ega bo‘lishining zaruriy shartini ko‘rsating.

A) $f'_x(x_0,y_0)=0$; B) $f'_y(x_0,y_0)=0$; C) $f'_x(x_0,y_0)=0,\ f'_y(x_0,y_0)=0$
D) $df=f'_x(x_0,y_0)dx+f'_y(x_0,y_0)dy=0$; E) $f'_x(x_0,y_0)+f'_y(x_0,y_0)=0$;

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Ushbu ikki o‘zgaruvchili funksiyani ekstremumga tekshiring:

$$f(x,y)=xy+\frac{n}{x}+\frac{n+1}{y} \quad (x>0\ y>0).$$

2. $f(x,y)=xy$ funksiyaning $x+y=n$ bo‘lgandagi shartli ekstremumini toping.

3. $f(x,y)=x^2-y^2$ funksiyaning $x^2+y^2\leq n^2$ doiradagi global ekstremumlarini aniqlang.

X BOB. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

Nyutondan Laplasgacha bo‘lgan davrda matematik tabiatshunoslikning asosiy g‘oyasi differensial tenglama tushunchasi bilan uzviy bog‘langan. Laplasga asosan tabiatning asosiy qonunlari differensial tenglamalar ko‘rinishida ifodalanib, ularni integrallash kelajakni haqqoniy ravishda bashorat etishga imkon beradi.

Kolmogorov A.N.

§1. BIRINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA ULARNING AYRIM TATBIQLARI

- *Differensial tenglamalar va ular bilan bog‘liq tushunchalar.*
- *Ayrim I tartibli differensial tenglamalar va ularni integrallash.*
- *I tartibli differensial tenglamalarning ayrim tatbiqlari.*

1.1. Differensial tenglamalar va ular bilan bog‘liq tushunchalar.

Matematika, mexanika, fizika, iqtisodiyot va boshqa fanlarning bir qator murakkab masalalarida o‘rganilayotgan obyektning asosiy xususiyatlarini ifodalovchi qonunlar qaralayotgan funksiyani uning hosilalari bilan bog‘lanishini ko‘rsatuvchi tenglamalar orqali ifodalanadi.

1-TA’RIF: Erkli o‘zgaruvchi x, noma’lum funksiya $y=y(x)$ va uning hosilalari $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ orasidagi bog‘lanishni ifodalovchi tenglik ***oddiy differensial tenglama*** deb ataladi.

Masalan,

$$y''' + y'\sin x - x^2 y - 3\ln x = 0, \quad (y'')^3 - 5y' + 7y^2 + 1 = 0, \quad \mathrm{tg} y' - 3\sin x - 2 = 0$$

oddiy differensial tenglamalar bo‘ladi. Bu misollardan ko‘rinadiki, oddiy differensial tenglamada erkli o‘zgaruvchi x , noma’lum y funksiyaning o‘zi, hosilalarning ayrimlari qatnashmasligi mumkin.

Izoh: Ko‘p o‘zgaruvchili $y=y(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ funksiya va uning xususiy hosilalari qatnashgan differensial tenglamalarni ham qarash mumkin. Ular ***xususiy hosilalali differensial tenglamalar*** deyiladi. Biz faqat oddiy differensial tenglamalarni qaraymiz va kelgusida ularni differensial tenglama, ba’zan esa qisqacha tenglama deb yuritamiz.

2-TA’RIF: Noma’lum funksiyaning differensial tenglamada qatnashuvchi hosilalarining eng yuqori tartibi bu ***differensial tenglamaning tartibi*** deyiladi.

Masalan, yuqorida keltirilgan differensial tenglamalar mos ravishda I, II va III tartiblidir.

Umumiy holda n-tartibli differensial tenglama

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

ko‘rinishda yoziladi. Bunda $F(\cdot)$ biror n+2 o‘zgaruvchili funksiyani ifodalaydi. Odatda (1) tenglamani $y^{(n)}$ hosilaga nisbatan yechish mumkin deb hisoblanadi va

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

kabi yoziladi. (2) ***yuqori tartibli hosilaga nisbatan yechilgan differensial tenglama*** deb ataladi. Masalan, yuqorida (1) ko‘rinishda yozilgan differensial tenglamalarni

$$y''' = 3\ln x + x^2 y - y'\sin x, \quad y'' = \sqrt[3]{5y' - 7y^2 - 1}, \quad y' = \mathrm{arctg}(3\sin x + 2)$$

kabi (2) ko‘rinishda ifodalash mumkin.

3-TA’RIF: Agar biror $\varphi(x)$ funksiya n marta differensiallanuvchi bo‘lib, bu funksiya va uning hosilalari (1) yoki (2) tenglamaga qo‘yilganda bu tenglama ayniyat ko‘rinishiga kelsa, unda $\varphi(x)$ funksiya (1) yoki (2) ***differensial tenglamaning yechimi*** deyiladi.

Masalan, $\varphi(x)=x^2+3x-2$ funksiya II tartibli

$$y'' - 3y' + 2y - 2x^2 + 11 = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' = 3y' - 2y + 2x^2 - 11$$

differensial tenglamaning yechimi bo‘ladi. Haqiqatan ham,

$$\varphi(x) = x^2 + 3x - 2 \Rightarrow \varphi'(x) = 2x + 3, \quad \varphi''(x) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'' - 3\varphi' + 2\varphi - 2x^2 + 11 = 2 - 3(2x+3) + 2(x^2 + 3x - 2) - 2x^2 + 11 \equiv 0 \ .$$

4-TA’RIF: (1) yoki (2) differensial tenglamaning yecimini topish uni ***integrallash***, topilgan $y=\varphi(x)$ yechim esa uning ***integrali*** deb aytiladi.

Bu ta’rif shu bilan asoslanadiki, differensial tenglamani yechish integrallash amali orqali bajariladi va uning yechimi qandaydir funksiyaning integrali kabi ifodalanadi. Bunga kelgusida ishonch hosil etamiz.

Bu paragrafda biz I tartibli va hosilaga nisbatan yechilgan, ya’ni

$$y' = f(x, y) \qquad (3)$$

ko‘rinishdagi differensial tenglamalar bilan shug‘ullanamiz. Bu tenglamani, hosilani differensial yordamida ifodalash orqali,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \Rightarrow dy = f(x, y)dx$$

ko‘rinishda ham ifodalash mumkin. Bu tenglamada noma’lum funksiyaning differensiali qatnashadi va bu bilan uni differensial tenglama deb atalishi asoslanadi.

Birinchi navbatda (3) tenglama yechimga ega yoki yo‘qligi, agar yechim mavjud bo‘lsa, uning yagona yoki yagonamasligi masalasini qaraymiz. Bu maqsadda dastlab quyidagi tushunchani kiritamiz:

5-TA’RIF: (3) differensial tenglamani berilgan x_0 nuqtada berilgan y_0 qiymatni qabul qiluvchi $y=y(x)$ yechimini topish ***Koshi masalasi*** deyiladi.

Bu ta’rifdagi shart

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{yoki} \quad y\big|_{x=x_0} = y_0 \qquad (4)$$

ko‘rinishda yoziladi va ***boshlang‘ich shart*** deb ataladi.

1-TEOREMA (Koshi teoremasi): Agar (3) tenglamada $f(x,y)$ funksiya va uning y bo‘yicha $f'_y(x, y)$ xususiy hosilasi XOY tekislikka tegishli (x_0,y_0) nuqtaning biror ochiq atrofida uzluksiz bo‘lsa , unda bu tenglamaning (4) boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi, ya’ni (3)-(4) Koshi masalasining yechimi mavjud va bu yechim yagonadir.

Bu teorema Koshi masalasi uchun ***mavjudlik va yagonalik teoremasi*** deb yuritiladi va uni isbotsiz qabul etamiz .

Izoh: Agar 1-teorema shartlari bajarilmasa, Koshi masalasi yechimining yagonaligi haqidagi tasdiq bajarilmasligi mumkin. Masalan,

$$y' = \sqrt[5]{y^4}\ ,\quad y\big|_{x=0} = 0$$

Koshi masalasi uchun ikkita $y=(x/5)^5$ va $y=0$ funksiyalar yechim bo‘lishini tekshirib ko‘rish mumkin. Bunga sabab shuki, bu tenglamada $f(x,y)=\sqrt[5]{y^4}$ bo‘lib, uning xususiy hosilasi $f'_y(x,y) = 4/(5\sqrt[5]{y})$ boshlang‘ich shartdagi (0,0) nuqtada uzluksiz emas.

Koshi teoremasidan II tartibli differensial tenglamaning o‘zi cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lishi va ular bitta ixtiyoriy C o‘zgarmas soniga bog‘liq bo‘lgan $y=\varphi(x,C)$ ko‘rinishdagi funksiyalardan iborat bo‘lishi kelib chiqadi. Haqiqatan ham, turli (4) boshlang‘ich shartda Koshi masalasining yechimi turli yechimlarga ega bo‘ladi. Boshlang‘ich shartlarni esa cheksiz ko‘p ko‘rinishda tanlash mumkin va shu sababli (3) differensial tenglama yechimi ham cheksiz ko‘p bo‘ladi.

Masalan, $y=x^2+C$, $C\in(-\infty, \infty)$ funksiyalar I tartibli $y'=2x$ differensial tenglamani qanoatlantirib, ular bu tenglamaning cheksiz ko‘p yechimni tashkil etishini tekshirib ko‘rish qiyin emas.

6-TA’RIF: Bitta ixtiyoriy o‘zgarmas C soniga bog‘liq $y=\varphi(x,C)$ funksiya I tartibli (3) differensial tenglamaning ***umumiy yechimi*** deyiladi, agar u quyidagi ikki shartni qanoatlantirsa:

1) bu funksiya C o‘zgarmas sonning har bir qiymatida (3) tenglamaning yechimi bo‘ladi ;

2) berilgan (4) boshlang‘ich shartda C o‘zgarmasning shunday C_0 qiymati topiladiki, $y=\varphi(x,C_0)$ funksiya bu boshlang‘ich shartni qanoatlantiradi .

I tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi har doim ham $y=\varphi(x,C)$ ko‘rinishda oshkor ifodalanmaydi. Ko‘p hollarda umumiy yechim $\Phi(x,y,C)=0$ oshkormas ko‘rinishda topiladi va undan y umumiy yechimni har doim ham elementar funksiyalar orqali ifodalab bo‘lmaydi. Bunday hollarda $\Phi(x,y,C)=0$ differensial tenglamaning ***umumiy integrali*** deb ataladi.

7-TA’RIF: Differensial tenglamaning umumiy $y=\varphi(x,C)$ yechimidan C o‘zgarmas sonning aniq bir C_0 qiymatida hosil bo‘lgan $y=\varphi(x,C_0)$ funksiya ***xususiy yechim*** deyiladi.

Masalan, yuqoridagi differensial tenglama uchun $y=x^2+C$ – umumiy yechim, $y=x^2$ ($C=0$), $y=x^2+1$ ($C=1$), $y=x^2-3.5$ ($C=-3.5$) kabi funksiyalar xususiy yechimlar bo‘ladi.

Ayrim I tartibli differensial tenglamalar va ularni integrallash. (3) differensial tenglamalarni umumiy integrallash usuli mavjud emas. Bu tenglamalarni faqat xususiy hollarda yechish (integrallash) usullari topilgan va bu yerda ulardan ayrimlarini ko‘rib o‘tamiz.

❖ ***Eng sodda I tartibli differensial tenglama.*** Bu tenglama

$$y'=f(x) \tag{5}$$

ko‘rinishda bo‘lib, unda $f(x)$ ma’lum bir berilgan funksiyani ifodalaydi. Bu tenglama oldin ko‘rib o‘tilgan boshlang‘ich funksiyani topish masalasini ifodalaydi (IX bob, §1) va shu sababli uning umumiy yechimi aniqmas integral yordamida

$$y=\int f(x)dx \qquad (5^*)$$

formula bilan aniqlanadi.

Masalan,

$$y'=x-\cos 2x \Rightarrow y=\int(x-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}(x^2-\sin 2x)+C\ .$$

Ba’zi hollarda berilgan differensial tenglama u yoki bu usulda (5) ko‘rinishga keltirish orqali integrallanadi va bunga kelgusida bir necha marta ishonch hosil etamiz.

❖ ***O‘zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama.*** Bu tenglama

$$y'=-\frac{N(x)}{M(y)} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{N(x)}{M(y)} \Rightarrow M(y)dy+N(x)dx=0 \qquad (6)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu tenglamada x va y o‘zgaruvchilar bir-biridan ajralgan holda qatnashganligi uchun (birinchi qo‘shiluvchida faqat y, ikkinchisida esa faqat x ishtirok etmoqda) u o‘zgaruvchilari ajralgan tenglama deyiladi. Uning umumiy yechimini topish uchun (6) tenglikni hadma-had integrallaymiz:

$$\int M(y)dy+\int N(x)dx=C\ . \qquad (6^*)$$

Bu integrallarni hisoblab, (6) tenglamaning umumiy yechimini aniqlaymiz.

Masalan,

$$y\ln y dy-e^x dx=0 \Rightarrow \int y\ln y dy-\int e^x dx=\int 0dx \Rightarrow \frac{y^2}{4}(2\ln y-1)-e^x=C\ .$$

Bunda oxirgi tenglik berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimini oshkormas, ya’ni $F(x,y)=C$ ko‘rinishda ifodalaydi. Oldingi misolda esa umumiy yechim oshkor, ya’ni $y=\varphi(x,C)$ ko‘rinishda topilgan edi.

❖ ***O‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama.*** Bu tenglama

$$M_1(y)N_1(x)dy+M_2(y)N_2(x)dx=0 \qquad (7)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. (7) tenglamani integrallash uchun uni $M_2(y)\neq 0$, $N_1(x)\neq 0$ shartda $M_2(y)N_1(x)$ ifodaga hadma-had bo‘lamiz va natijada oldin ko‘rib o‘tilgan ushbu o‘zgaruvchilari ajralgan

$$\frac{M_1(y)}{M_2(y)}dy+\frac{N_2(x)}{N_1(x)}dx=0$$

differensial tenglamaga ega bo‘lamiz. Bu yerdan (7) tenglamaning umumiy yechimi uchun

$$\int\frac{M_1(y)}{M_2(y)}dy+\int\frac{N_2(x)}{N_1(x)}dx=C \qquad (7^*)$$

formulaga ega bo‘lamiz.

Misol sifatida ushbu Koshi masalasini yechamiz :

$$(1+x^2)dy+ydx=0\ ,\quad y(0)=1\ .$$

Bu masaladagi tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama bo‘ladi. Bunda $1+x^2\neq 0$ bo‘lgani uchun $y\neq 0$ deb olish kifoya. Bu shartda, berilgan tenglamani $y(1+x^2)$ ifodaga bo‘lish orqali, umumiy yechimni quyidagicha topamiz:

$$\frac{dy}{y}-\frac{dx}{1+x^2}=0\Rightarrow\int\frac{dy}{y}-\int\frac{dx}{1+x^2}=C\Rightarrow\ln|y|-\mathrm{arctg}x=C\Rightarrow y=e^{\mathrm{arctg}x+C}\ .$$

Endi, boshlang‘ich shartdan foydalanib (x=0, y=1), C o‘zgarmas son qiymatini aniqlaymiz:

$$1=e^{\mathrm{arctg}0+C}\Rightarrow 1=e^C\Rightarrow C=0\ .$$

Demak, berilgan Koshi masalasining yagona yechimi $y=e^{\mathrm{arctg}x}$ funksiyadan iborat bo‘ladi.

Izoh: (7) differensial tenglama $M_2(y)\neq 0$, $N_1(x)\neq 0$ shartda integrallandi. Bu shart bajarilmasa, unda bu tenglama (7^*) ko‘rinishda bo‘lmagan yechimga ega bo‘lishi mumkin. Masalan, yuqoridagi Koshi masalasidagi differensial tenglamani y=0 bo‘lgan holda qaraymiz. Bu holda dy=0 bo‘lgani uchun y=0 funksiya bu tenglamaning yechimi ekanligini ko‘ramiz. Yuqorida topilgan umumiy yechim $y=e^{\mathrm{arctg}x+C}>0$ bo‘lgani uchun undan y=0 yechim kelib chiqmaydi.

❖ ***Bir jinsli differensial tenglama.*** Oldin bir jinsli funksiya tushunchasini kiritamiz.

<u>8-TA’RIF:</u> Agar $f(x,y)$ funksiya ixtiyoriy o‘zgarmas λ soni uchun

$$f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$$

shartni qanoatlantirsa , bu funksiya x va y o‘zgaruvchilarga nisbatan ***bir jinsli funksiya*** deb ataladi.

Masalan,

$$f(x,y)=\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

bir jinsli funksiya bo‘ladi, chunki

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda x-\lambda y}{\sqrt{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2}}=\frac{\lambda(x-y)}{\lambda\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=f(x,y)\,.$$

Xuddi shunday tarzda

$$f(x,y)=\sin\frac{y}{x}\,,\quad f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}\,,\quad f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

funksiyalar ham bir jinsli bo‘lishini ko‘rsatish mumkin va buni o‘quvchiga havola etamiz.

LEMMA: Agar $f(x,y)$ bir jinsli funksiya bo‘lsa, uni $f(x,y)=g(y/x)$ ko‘rinishda yozish mumkin.

Isbot: Funksiyaning bir jinslilik shartida λ=1/x deb olib

$$f(x,y)=f(\frac{1}{x}\cdot x,\frac{1}{x}\cdot y)=f(1,\frac{y}{x})=g(\frac{y}{x})$$

lemma tasdig‘iga ega bo‘lamiz.

Masalan,

$$f(x,y)=\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x(1-y/x)}{x\sqrt{1+(y/x)^2}}=\frac{1-y/x}{\sqrt{1+(y/x)^2}}=g(\frac{y}{x})\ .$$

<u>9-TA’RIF:</u> Agar birinchi tartibli

$$y'=f(x,y)$$

tenglamada $f(x,y)$ bir jinsli funksiya bo‘lsa, u ***bir jinsli differensial tenglama*** deyiladi.

Lemmaga asosan bir jinsli I tartibli differensial tenglamani

$$y' = g(\frac{y}{x}) \qquad (8)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bu tenglamani integrallash uchun $u(x)=u=y/x$ almashtirma bajaramiz. Bu holda

$$y = ux \Rightarrow y' = (ux)' = u'x + u$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bu tenglik va (8) tenglamadan foydalanib $u=u(x)$ funksiya uchun ushbu tenglamani hosil etamiz:

$$y' = g(\frac{y}{x}) \Rightarrow u'x + u = g(u) \Rightarrow x\frac{du}{dx} = g(u) - u \Rightarrow xdu = (g(u) - u)dx .$$

Bu o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama bo‘lib, uning umumiy integralini yuqorida ko‘rsatilgan usulda topamiz:

$$xdu = (g(u) - u)dx \Rightarrow \frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{g(u) - u} = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \ . \quad (8^*)$$

(8^*) tenglamadan $u=u(x,C)$ umumiy yechimni aniqlagach, berilgan (8) tenglamaning umumiy integralini $y=xu$ formula orqali topamiz.

Misol sifatida bir jinsli

$$y' = \frac{x + y}{x}$$

differensial tenglamani ko‘rsatilgan usulda integrallaymiz:

$$y' = \frac{x + y}{x} \Rightarrow (ux)' = \frac{x + ux}{x} \Rightarrow u'x + u = 1 + u \Rightarrow u' = \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \Rightarrow y = xu = x\ln|x| + Cx .$$

❖ ***To‘liq differensialli tenglama.*** Dastlab ushbu ta’rifni kiritamiz:

9-TA’RIF: Agar

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (9)$$

tenglamada $M(x,y)$ va $N(x,y)$ funksiyalar tekislikdagi biror D sohada uzluksiz, differensiallanuvchi bo‘lib, ularning xususiy hosilalari uchun

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

shart bajarilib, bu hosilalar ham D sohada uzluksiz bo‘lsa, unda (9) ***to‘liq differensialli tenglama*** deyiladi.

To‘liq differensialli (9) tenglamaning chap tomonini

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(t, y)dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0, s)ds \qquad (9^*)$$

formula bilan topiladigan funksiyaning to‘liq differensiali ko‘rinishda yozish mumkinligini isbotsiz qabul etamiz. Bu holda (9) tenglamaning umumiy integrali $u(x,y)=C$ tenglik bilan oshkormas ko‘rinishda ifodalanadi.

Misol sifatida

$$(x+y-1)dx+(e^y+x)dy=0$$

differensial tenglamaning umumiy yechimini topamiz. Bu yerda $M(x,y)=x+y-1$, $N(x,y)=e^y+x$ bo‘lib, bu funksiyalar tekislikdagi barcha nuqtalarda uzluksiz va differensiallanuvchidir. Bundan tashqari

$$\frac{\partial M}{\partial y}=(x+y-1)'_y=1, \quad \frac{\partial N}{\partial x}=(e^y+x)'_x=1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} .$$

Demak, qaralayotgan differensial tenglama to‘liq differensialli bo‘ladi va shu sababli uning umumiy integralini (9^*) formuladan $x_0=0$, $y_0=0$ deb topamiz:

$$\int_0^x (t+y-1)dt+\int_0^y (e^s+0)ds=C \Rightarrow \left.\left(\frac{t^2}{2}+ty-t\right)\right|_0^x+\left.e^s\right|_0^y=C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2}+xy-x+e^y-1=C \Rightarrow e^y+\frac{x^2}{2}+xy-x=C \quad .$$

Oxirgi tenglikda $C+1$ o‘rniga C yozildi, chunki C ixtiyoriy son bo‘lgani uchun $C+1$ ham ixtiyoriy o‘zgarmas son bo‘ladi.

❖ ***I tartibli chiziqli differensial tenglama.*** Bu tenglamada noma’lum funksiya y va uning hosilasi y' birinchi darajada, ya’ni chiziqli ravishda qatnashib, quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y'+P(x)y=Q(x) . \tag{10}$$

Bunda $P(x)$ va $Q(x)$ uzluksiz funksiyalar yoki o‘zgarmas sonlardir. Agar $Q(x)\equiv 0$ bo‘lsa, (10) bir jinsli , aks holda bir jinsli bo‘lmagan chiziqli tenglama deyiladi.

(10) chiziqli tenglamani Bernulli usulida yechamiz. Buning uchun umumiy yechimni $y=u(x)v(x)=uv$ ko‘rinishda izlaymiz. Bu yerda $u(x)$ va $v(x)$ noma’lum funksiyalar bo‘lib, ularni topish uchun (10) tenglamada y o‘rniga uv ko‘paytmani qo‘yib, ushbu tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$(uv)'+P(x)uv=Q(x) \Rightarrow u'v+uv'+P(x)uv=Q(x) \Rightarrow$$

$$u'v+u[v'+P(x)v]=Q(x). \tag{*}$$

Oxirgi, ya’ni (*) tenglamadan, kvadtrat qavs ichidagi ifodani nolga tenglashtirib, $v=v(x)$ noma’lum funksiya uchun

$$v'+P(x)v=0 \tag{**}$$

tenglamaga ega bo‘lamiz. Bunda (**) berilgan bir jinsli bo‘lmagan (10) chiziqli tenglamaga mos keluvchi bir jinsli tenglama ekanligini ta’kidlab o‘tamiz. Bu o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama bo‘lib, uni yuqorida ko‘rilgan usulda yechamiz:

$$v'+P(x)v=0 \Rightarrow v'=-P(x)v \Rightarrow \frac{dv}{dx}=-P(x)v \Rightarrow \frac{dv}{v}=-P(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\frac{dv}{v}=-\int P(x)dx \Rightarrow \ln|v|-C=-\int P(x)dx \Rightarrow v=e^{C-\int P(x)dx}=C_1e^{-\int P(x)dx}$$

Bu yerda $C_1=1$ deb, izlanayotgan noma’lum funksiyalardan biri

$$v(x)=e^{-\int P(x)dx} \tag{10^*}$$

ekanligini ko‘ramiz. Bu natijani (*) tenglamaga qo‘yib va (**) tenglikdan foydalanib, ikkinchi $u=u(x)$ noma’lum funksiyani topamiz:

$$u'v+u\cdot 0=Q(x)\Rightarrow u'=\frac{Q(x)}{v(x)}\Rightarrow u(x)=\int\frac{Q(x)}{v(x)}dx+C \quad . \qquad (10^{**})$$

Bu yerdan berilgan (10) chiziqli differensial tenglamaning umumiy integrali

$$y=uv=e^{-\int P(x)dx}[\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx+C] \qquad (10^{***})$$

formula bilan topilishini ko‘ramiz.

Misol sifatida ushbu Koshi masalasini yechamiz:

$$y'+2xy=xe^{-x^2}\ , \quad y\big|_{x=0}=3\,.$$

Dastlab Koshi masalasidagi I tartibli chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimini Bernulli usulida topamiz, ya’ni $y=u\cdot v$ ko‘rinishda izlaymiz.

$$(uv)'+2xuv=xe^{-x^2}\Rightarrow u'v+uv'+2xuv=xe^{-x^2}\Rightarrow u'v+u[v'+2xv]=xe^{-x^2}\ .$$

Kvadrat qavs ichidagi ifodani nolga tenglashtirib, $v=v(x)$ funksiyani topamiz:

$$v'+2xv=0\Rightarrow\frac{dv}{dx}=-2xv\Rightarrow\frac{dv}{v}=-2xdx\Rightarrow\int\frac{dv}{v}=-\int 2xdx\Rightarrow v=Ce^{-x^2}\ .$$

Demak, $v(x)=e^{-x^2}$ deb olish mumkin. Unda

$$u'v+u[v'+2xv]=xe^{-x^2}\Rightarrow u'e^{-x^2}=xe^{-x^2}\Rightarrow u'=x\Rightarrow u(x)=\int xdx=\frac{x^2}{2}+C\ .$$

Bu yerdan berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y=uv=(\frac{x^2}{2}+C)e^{-x^2}$$

ko‘rinishda ekanligi kelib chiqadi. Undagi C o‘zgarmas sonini topish uchun Koshi masalasining boshlang‘ich shartiga murojaat etamiz:

$$y(0)=3\Rightarrow(\frac{0^2}{2}+C)e^{-0^2}=3\Rightarrow C=3\ .$$

Demak, berilgan Koshi masalasining izlangan yagona yechimi

$$y=(\frac{x^2}{2}+3)e^{-x^2}$$

funksiyadan iborat bo‘ladi.

❖ ***Bernulli tenglamasi.*** Bu tenglama

$$y'+P(x)y=Q(x)y^{\alpha} \qquad (11)$$

ko‘rinishda bo‘lib, unda $\alpha\neq 0$ va $\alpha\neq 1$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy haqiqiy sonni ifodalaydi. $\alpha=0$ yoki $\alpha=1$ holda (11)yuqorida ko‘rib o‘tilgan (10) chiziqli differensial tenglamaga aylanadi. Bernulli tenglamasini integrallash uchun uni dastlab y^{α} ifodaga bo‘lamiz. Natijada (11) tenglama

$$y^{-\alpha}y'+P(x)y^{1-\alpha}=Q(x)$$

ko‘rinishga keladi. Endi $z=y^{1-\alpha}$ belgilash kiritamiz. Bu holda, murakkab funksiya hosilasi formulasiga asosan, $z'=(1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ bo‘lgani uchun oxirgi tenglama

$$\frac{1}{1-\alpha}z'+P(x)z=Q(x)\Rightarrow z'+(1-\alpha)P(x)z=(1-\alpha)Q(x) \qquad (11^*)$$

ko‘rinishga, ya’ni chiziqli differensial tenglamaga keladi. Bu tenglamani yuqorida ko‘rsatilgan Bernulli usulida integrallab, $z=\varphi(x,C)$ umumiy yechimni topamiz. Unda, yuqoridagi belgilashga asosan, (11) Bernulli tenglamasining umumiy integrali $y^{1-\alpha}=\varphi(x,C)$ tenglik bilan aniqlanadi.

Misol sifatida, ushbu

$$y'+\frac{2}{x}y=2e^x\sqrt{y}$$

Bernulli tenglamasining umumiy integralini yuqorida ko‘rsatilgan usulda topamiz.

$$\frac{y'}{\sqrt{y}}+\frac{2}{x}\sqrt{y}=2e^x\Rightarrow(z=\sqrt{y}\ ,\ z'=\frac{y'}{2\sqrt{y}})\Rightarrow z'+\frac{1}{x}z=e^x .$$

Hosil bo‘lgan chiziqli tenglamani integrallab,

$$z=e^x+\frac{C-e^x}{x}\Rightarrow\sqrt{y}=e^x+\frac{C-e^x}{x}\Rightarrow y=(e^x+\frac{C-e^x}{x})^2$$

natijani olamiz.

I tartibli differensial tenglamalarning ayrim iqtisodiy tatbiqlari. Bu yerda I tartibli differensial tenglamalar yordamida yechiladigan iqtisodiy mazmunli amaliy masalalardan bir nechtasi bilan tanishamiz.

- **Aholi soni haqidagi demografik masala.** Ma’lum bir vaqt birligida mamlakatda dunyoga kelgan chaqaloqlar va vafot etgan odamlar soni shu mamlakat aholisining soniga proporsional (mos ravishda qandaydir k_1 va k_2 proporsionallik koeffitsientlari bilan) ekanligi statistik ma’lumotlar asosida aniqlangan. Shu mamlakat aholisining sonini t vaqt bo‘yicha o‘zgarishini ifodalovchi $y=y(t)$ funksiyani topish talab etiladi.

Yechish: Bu mamlakat aholisining Δt vaqt oralig‘idagi o‘zgarishi Δy shu vaqt oralig‘da dunyoga kelgan chaqaloqlar va vafot etgan odamlar sonlarining ayirmasiga tengdir. Masala shartiga asosan, Δt vaqt oralig‘ida dunyoga kelgan chaqaloqlar soni $k_1y\Delta t$, vafot etgan odamlar soni esa $k_2y\Delta t$ bo‘ladi. Bu yerdan quyidagi natijalarni olamiz:

$$\Delta y=k_1y\Delta t-k_2y\Delta t=(k_1-k_2)y\Delta t=ky\Delta t \quad (k=k_1-k_2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta t}=ky\Rightarrow\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}ky\Rightarrow y'=ky\ .$$

Shunday qilib, aholi soni I tartibli $y'=ky$ differensial tenglama bilan ifodalanuvchi qonuniyat asosida o‘zgaradi. Bu o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama bo‘lib, uni integrallab izlanayotgan $y=y(t)$ funksiyani topamiz:

$$y'=ky\Rightarrow\frac{dy}{dt}=ky\Rightarrow\frac{dy}{y}=kdt\Rightarrow\int\frac{dy}{y}=\int kdt\Rightarrow\ln y=kt+C\Rightarrow$$

$$y=e^{kt+C}=C_0e^{kt}\quad .$$

Bunda C_0 o‘zgarmas son qiymati boshlang‘ich shartdan topiladi. Agar t_0 vaqtda aholi soni y_0 ekanligi ma’lum bo‘lsa, unda $C_0 = y_0 e^{-kt_0}$ kabi aniqlanishini ko‘rsatish mumkin.

- **Mahsulot narxi haqidagi marketing masalasi.** Bozorda t vaqt o‘tishi bilan biror mahsulot narxi $p(t)$, unga talab $h(t)$ va taklif $s(t)$ funksiyalar bo‘yicha o‘zgarib boradi. Narx funksiyasi, talab va taklif funksiyalari orasidagi bog‘lanishni topish talab etiladi.

Yechish: Bozor qonuniyatlariga ko‘ra Δt vaqt oralig‘ida narxning o‘sishi Δp talabni taklifdan qanchalik darajada kattaligiga va shu vaqt oralig‘iga to‘g‘ri proporsional bo‘ladi. Agar proporsionallik koeffitsiyenti k bo‘lsa**,** bu qonuniyatni matematik ko‘rinishda ifodalab, undan quyidagi natijalarni olamiz:

$$\Delta p = k(h-s)\Delta t \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = k(h-s) \Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} k(h-s) \Rightarrow p' = k(h-s).$$

Bunda eng oxirgi tenglik $p=p(t)$ narx funksiyasiga nisbatan eng sodda differensial tenglama bo‘lib, undan

$$p(t) = k\int [h(t) - s(t)]dt$$

formulani hosil qilamiz. Bu formula bilan ifodalanadigan iqtisodiy jarayon ***Evans modeli*** deb ataladi.

- **Mahsulot ishlab chiqarish hajmi haqidagi iqtisodiy masala.** Biror tarmoqda t vaqtda ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini $y=y(t)$ funksiya bilan belgilaymiz. Ishlab chiqarilgan mahsulot bozorda o‘zgarmas p narxda sotiladi deb olamiz. Ishlab chiqarishni kengaytirish uchun sarflanadigan investitsiya hajmi t vaqt bo‘yicha $I=I(t)$ funksiya bilan aniqlansin. Ishlab chiqarishni tabiiy o‘sish modelida mahsulot hajmini ifodalovchi $y=y(t)$ funksiyani topish talab etiladi.

Yechish: Ishlab chiqarishni tabiiy o‘sish modelida quyidagi ikkita shart qo‘yiladi:

a) mahsulot ishlab chiqarish tezligi, ya’ni ishlab chiqarish sur’ati, investitsiya hajmiga proporsional (proporsionallik koeffitsiyenti α) :

$$y'(t) = \alpha I(t) \quad ;$$

b) investitsiya hajmi olinayotgan Y(t) foydaning ma’lum bir qismiga teng, ya’ni

$$I(t) = mY(t) = mpy(t).$$

Bunda m (investitsiyalash normasi) $0<m<1$ shartni qanoatlantiruvchi biror o‘zgarmas son.

Bu shartlardan mahsulot hajmi $y=y(t)$ uchun

$$y'=\alpha mpy=ky \quad (k=\alpha mp)$$

differensial tenglamaga ega bo‘lamiz. Bu tenglama oldin ko‘rilgan demografik masalada paydo bo‘lgan edi va unda umumiy yechim

$$y(t) = Ce^{kt} = Ce^{\alpha mpt}$$

ko‘rinishda bo‘lishi ko‘rsatilgan edi. Agar $y(t_0)= y_0$ boshlang‘ich shart berilgan bo‘lsa, mahsulot ishlab chiqarish hajmi

$$y(t) = y_0 e^{\alpha mp(t-t_0)}$$

funksiya orqali aniqlanadi.

Izoh: Yuqorida biz mahsulot narxi *p* o‘zgarmas deb oldik. Amalda bu shart ma’lum bir qisqa vaqt davri uchun o‘rinli bo‘ladi. Shu sababli ko‘pincha ishlab chiqarishni raqobatli bozor sharoitida o‘sish modelidan foydalaniladi. Bu modelda mahsulot hajmi *y* o‘sib borishi bilan uning narxi *p* kamayib boradi, ya’ni ma’lum bir $p=p(y)$ kamayuvchi funksiya bo‘yicha o‘zgarib boradi deb olinadi. Bu holda mahsulot hajmi funksiyasi $y=y(t)$

$$y'=\alpha mp(y)y$$

o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama orqali aniqlanadi. Bu tenglamaning umumiy yechimi

$$\int \frac{dy}{yp(y)} = \alpha mt + C$$

tenglikdan topiladi. Jumladan, $p(y)=b–ay$ bo‘lgan holda $y=y(t)$ logistik funksiyadan(VIII bob,§5 ga qarang) iborat bo‘ladi.

Masalan, $p(y)=3–y$, $\alpha=1.5$, $m=0.4$, $y(0)=1.5$ bo‘lganda

$$\int \frac{dy}{y(3-y)} = 0.6t + C \Rightarrow -\frac{1}{3}\int [\frac{1}{y-3} - \frac{1}{y}]dy = 0.6t + C \Rightarrow \ln\left|\frac{y-3}{y}\right| = -1.8t + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y-3}{y} = e^{-1.8t+C_1} = C_2e^{-1.8t} \Rightarrow y = \frac{3}{1-C_2e^{-1.8t}}$$

umumiy yechimni olamiz. $y(0)=1.5$ boshlang‘ich shartga asosan bu yerdagi o‘zgarmas son qiymati $C_2= -1$ ekanligini topamiz. Demak, berilgan shartlarda mahsulot hajmi

$$y(t) = \frac{3}{1+e^{-2t}}$$

funksiya bilan topiladi.

I tartibli differensial tenglamalar yordamida radioaktiv moddaning parchalanishi, reaktiv harakat, kimyoviy reaksiyada modda miqdori, jismning sovishi, quymaning qizishi, ilmiy axborot oqimi, berilgan elastiklikka ega bo‘lgan talab funksiyasini topish, talab va taklif funksiyasini narxning o‘zgarish tezligiga bog‘liq holda qarash kabi masalalar ham o‘z yechimini topadi.

XULOSA

Noma’lum funksiyaning hosilalari qatnashgan tenglama differensial tenglama deb ataladi. Differensial tenglamalardan fizika, iqtisodiyot, kimyo, mexanika va boshqa fanlarga doir juda ko‘p masalalarni yechishda keng qo‘llaniladi. Vaqt bilan bog‘liq turli texnologik va iqtisodiy jarayonlar ham matematik usulda differensial tenglamalar orqali tavsiflanadi. Differensial tenglama tartibi unda qatnashgan noma’lum funksiya hosilasining eng katta tartibi bilan aniqlanadi. Differensial tenglamalar yechimining mavjudlik sharti Koshi teoremasi orqali ifodalanadi. Differensial tenglamalar yechimini topish jarayoni uni integrallash deyiladi. Differensial tenglamani integrallashning umumiy usuli mavjud emas. Bundan tashqari juda ko‘p differensial tenglamalarning yechimi elementar funksiyalarda ifodalanmaydi. Shu sababli differensial tenglamalarning ayrim xususiy hollari uchun ularni integrallash usulini ko‘rsatish mumkin. Bu yerda nisbatan soddaroq bo‘lgan I tartibli differensial tenglamalar qaralib, ulardan o‘zgaruvchilari ajralgan, o‘zgaruvchilari ajraladigan, bir jinsli, to‘liq differensialli, chiziqli tenglamalarni va Bernulli tenglamasini integrallash usuli ko‘rsatilgan. Bu tenglamalarni demografiya, marketing va iqtisodiyot masalalarini yechishga tatbiqlari keltirilgan.

Tayanch iboralar

* Differensial tenglama * Differensial tenglama tartibi * Differensial tenglama yechimi * Boshlang‘ich shart * Koshi masalasi * Koshi teoremasi * Umumiy yechim * Umumiy integral * Xususiy yechim * Eng sodda I tartibli differensial tenglama * O‘zgaruvchilari ajralgan tenglama * O‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama * Bir jinsli I tartibli tenglama * To‘liq differensialli tenglama * I tartibli chiziqli differensial tenglama * I tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglama
* I tartibli bir jinsli bo‘lmagan chiziqli differensial tenglama * Bernulli usuli *Bernulli tenglamasi.

Takrorlash uchun savollar

1. **Differensial tenglama qanday ta’riflanadi?**
2. **Differensial tenglamaning tartibi deb nimaga aytiladi?**
3. **Differensial tenglamaning yechimi nima?**
4. **Differensial tenglamani integrallash deyilganda nima tushuniladi?**
5. **Differensial tenglamani integrali nima?**
6. **I tartibli differensial tenglama umumiy holda qanday ko‘rinishda yoziladi?**
7. **I tartibli differensial tenglama uchun Koshi masalasi qanday ifodalanadi?**
8. **Koshi teoremasida nima tasdiqlanadi?**
9. **I tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi nima?**
10. **I tartibli differensial tenglamaning umumiy integrali nima?**
11. **I tartibli differensial tenglamaning xususiy yechimi qanday aniqlanadi?**
12. **Eng sodda I tartibli differensial tenglama qanday ko‘rinishda bo‘ladi?**
13. **O‘zgaruvchilari ajralgan tenglama nima va u qanday integrallanadi?**
14. **O‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama qanday yechiladi?**
15. **Qaysi shartda ikki o‘zgaruvchili funksiya bir jinsli deyiladi?**
16. **Bir jinsli I tartibli differensial tenglama qanday integrallanadi?**
17. **Qaysi shartda differensial tenglama to‘liq differensialli deb ataladi?**
18. **I tartibli chiziqli differensial tenglama qanday ko‘rinishda bo‘ladi?**
19. **I tartibli chiziqli differensial tenglama qanday integrallanadi?**
20. **Bernulli tenglamasi qanday usulda integrallanadi?**
21. **I tartibli differensial tenglamalarning iqtisodiyot masalalarini yechishdagi tatbiqlariga misollar keltiring.**

Testlardan namunalar

1. Differensial tenglama ta’rifini ko‘rsating.

A) noma’lum funksiya qatnashgan tenglama;
B) noma’lum funksiyaning turli qiymatlari qatnashgan tenglama;
C) noma’lum funksiyaning hosilalari qatnashgan tenglama;
D) noma’lum funksiya va uning hosilalarining x_0 nuqtadagi qiymatlari qatnashgan tenglama;
E) noma’lum funksiya va uning integrallari qatnashgan tenglama.

2. Quyidagilardan qaysi biri differensial tenglama bo‘ladi?

A) $y^2+5y-3\cos x=0$; B) $3x^2+4x-1=0$; C) $y(x_0)+2y'(x_0)-x=0$;
D) $y-2xy'+5=0$; E) $y+\sin y=0$.

3. Ta’rifni to‘ldiring: Differensial tenglamaning tartibi deb unda qatnashuvchi noma’lum funksiya hosilalarning ……… aytiladi.

A) eng katta darajasiga; B) eng katta tartibiga; C) soniga;
D) eng katta qiymatiga; E) to‘g‘ri javob keltirilmagan.

4. $(y')^3-(y')^2+y''-5y^4+x^5=0$ differensial tenglama nechanchi tartibli?

A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) 5.

5. I tartibli differensial tenglama eng umumiy holda qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

A) $F(x,y,y')=0$; B) $F(x,y)=y'$; C) $F(x,y')=y$;
D) $F(y,y')=x$; E) $F(x,y,y',y'')=0$.

6. I tartibli differensial tenglama uchun Koshi masalasini ko‘rsating .

A) $y'=f(x,y)$, $y'(x_0)=y_0$; B) $y'=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$;
C) $y'=f(x_0,y)$; D) $y'=f(x,y_0)$; E) $y'=f(x_0,y_0)$.

7. I tartibli chiziqli differensial tenglama Bernulli usulida qanday almashtirma yordamida yechiladi?

A) $y=u+v$; B) $y=u-v$; C) $y=uv$; D) $y=u/v$; E) $y=u^v$.

<u>Mustaqil ish topshiriqlari</u>

1. O‘zgaruvchilari ajraladigan $\frac{nx}{y}dy-\frac{y}{nx}dx=0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

2. Bir jinsli differensial tenglama qatnashgan Koshi masalasini yeching:

$$y'=\frac{ny}{x}+1, \quad y\big|_{x=1}=n-1 .$$

3. I tartibli chiziqli $y'+2nxy=xe^{-x^2}$ differensial tenglamani integrallang.

§2. II TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR .

TARTIBNI PASAYTIRISH USULI

- ***II tartibli differensial tenglamalar va ular bilan bog'liq tushunchalar.***
- ***II tartibli differensial tenglamalar uchun tartibni pasaytirish usuli.***

2.1. II tartibli differensial tenglamalar va ular bilan bog'liq tushunchalar. Oldingi paragrafda ko'rib o'tilgan ta'rifga asosan noma'lum $y=y(x)$ funksiyaga nisbatan II tartibli differensial tenglama eng umumiy holda

$$F(x, y, y', y'')=0$$

ko'rinishda bo'ladi. Biz bu tenglama II tartibli y'' hosilaga nisbatan yechilgan, ya'ni

$$y''=f(x, y, y') \qquad (1)$$

holni qarash bilan chegaralanamiz.

1-TA'RIF: Agar $y=\varphi(x)$ funksiya biror oraliqda ikki marta differensiallanuvchi bo'lib, uni va hosilalarini (1) tenglamaga qo'yilganda ayniyat hosil bo'lsa, bu funksiya berilgan oraliqda ***II tartibli differensial tenglamaning yechimi*** yoki ***integrali*** deyiladi.

Masalan, $y=e^{3x}$ funksiya II tartibli $y''=2y'+3y$ differensial tenglama yechimi bo'ladi. Haqiqatan ham bu funksiya uchun

$$y'=3e^{3x}, \ y''=9e^{3x} \ \Rightarrow 2y'+3y=9e^{3x}\equiv y'' .$$

2-TA'RIF: II tartibli differensial tenglamaning $y=y(x)$ yechimiga qo'yilgan

$$y(x_0)=y_0 , \quad y'(x_0)=y'_0 \qquad (2)$$

ko'rinishdagi shartlar ***boshlang'ich shartlar*** deb aytiladi.

Boshlang'ich shartlarda x_0, y_0, y'_0 berilgan sonlar uchligi bo'lib, odatda bu shart

$$y\big|_{x=x_0}=y_0 , \quad y'\big|_{x=x_0}=y'_0$$

ko'rinishda yoziladi.

3-TA'RIF: II tartibli (1) differensial tenglamaning (2) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yecimini topish ***Koshi masalasi*** deyiladi.

I tartibli differensial tenglama uchun Koshi masalasiga o'xshab, bu yerda ham (1)-(2) Koshi masalasi yechimini mavjud va yagona bo'lish shartlari quyidagi teorema orqali ifodalanadi:

1-TEOREMA ***(Koshi teoremasi):*** Agar (1) tenglamadagi $f(x, y, y')$ funksiya va uning y, y' bo'yicha xususiy hosilalari (2) boshlang'ich shartlar bilan aniqlanadigan (x_0, y_0, y'_0) nuqtaning biror ochiq atrofida uzluksiz bo'lsa , unda (1)–(2) Koshi masalasining yechimi mavjud va bu yechim yagona bo'ladi.

Bu teoremani isbotsiz qabul etamiz. Undan II tartibli differensial tenglamani o'zi cheksiz ko'p yechimga ega bo'lishi va ular ikkita ixtiyoriy C_1 , C_2 o'zgarmas sonlarga bog'liq ekanligi kelib chiqadi. Bunga sabab shuki, turli (2) boshlang'ich shartlarga Koshi masalasining turli yechimlari mos keladi.

4-TA'RIF: Ikkita bog'liqmas C_1 va C_2 o'zgarmas sonlarga bog'liq $y=\varphi(x,C_1,C_2)$ funksiya II tartibli (1) differensial tenglamaning ***umumiy yechimi*** deb ataladi, agar quyidagi ikkita shart bajarilsa:

1) bu funksiya C_1 va C_2 o‘zgarmas sonlarning ixtiyoriy qiymatlarida (1) tenglamaning yechimi bo‘ladi;

2) agar (2) boshlang‘ich shartlar berilgan bo‘lsa, unda C_1 va C_2 o‘zgarmas sonlarning qiymatlarini shunday tanlash mumkinki, bu qiymatlarda $y=\varphi(x,C_1,C_2)$ funksiya bu boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiradi .

Ko‘p hollarda (1) tenglamaning umumiy yechimini $y=\varphi(x,C_1,C_2)$ ko‘rinishda, ya’ni oshkor ravishda ifodalanmasdan, $\Phi(x, y, C_1, C_2)=0$ oshkormas ko‘rinishda topiladi va bu tenglik II tartibli tenglamaning ***umumiy integrali*** deb ataladi.

5-TA’RIF: II tartibli tenglamaning umumiy $y=\varphi(x,C_1,C_2)$ yechimidan C_1 va C_2 o‘zgarmas sonlarning ma’lum bir qiymatlarida hosil bo‘lgan yechim ***xususiy yechim*** deyiladi.

Masalan, $y''=2y'+3y$ tenglamaning umumiy yechimi $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$ bo‘lishini tekshirib ko‘rish mumkin. Unda $y=e^{3x}+e^{-x}$ $(C_1=C_2=1)$, $y=e^{3x}$ $(C_1=1, C_2=0)$ va $y=e^{-x}$ $(C_1=0, C_2=1)$ funksiyalar bu tenglamaning xususiy yechimlari bo‘ladi.

II tartibli differensial tenglamani umumiy yechimini topish uni integrallash deb atalishini eslatib o‘tamiz. II tartibli differensial tenglamalar I tartibli tenglamalarga nisbatan ancha murakkab bo‘lib, ular uchun ham umumiy integrallash usuli mavjud emas. Differensial tenglamalar nazariyasida ayrim ko‘rinishdagi II tartibli tenglamalarni integrallash usullari yaratilgan. Ulardan biri tartibni pasaytirish usuli bo‘lib hisoblanadi.

2.2. II tartibli tenglamalar uchun tartibni pasaytirish usuli. Ayrim II tartibli differensial tenglamalarni $y'=p$ almashtirma orqali I tartibli tenglamaga keltirib bo‘ladi. Bu tenglamaning umumiy yechimi $p=p(x,C_1)$ topilgach, berilgan tenglamaning umumiy yechimi I tartibli $y'=p=p(x,C_1)$ tenglamadan aniqlanadi. Shunday qilib, berilgan II tartibli differensial tenglamani yechish ikkita I tartibli tenglamani yechishga olib kelinadi va bu ***tartibni pasaytirish usuli*** deb ataladi. Bu usul qo‘llaniladigan hollarni qarab chiqamiz.

- $\boldsymbol{y''=f(x)}$ **.** Bu tenglamada noma’lum $y=y(x)$ funksiyaning o‘zi va I tartibli hosilasi y' qatnashmaydi va ***II tartibli eng sodda differensial tenglama*** deyiladi. Bu tenglamani integrallash uchun tartibni pasaytirish usulidan foydalanamiz. Buning uchun $y'=p=p(x)$ deb olamiz. Unda $y''=p'$ bo‘ladi va berilgan tenglama I tartibli eng sodda $p'=f(x)$ differensial tenglamaga keladi. Bu tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$p(x,C_1)=\int f(x)dx+C_1 .$$

Unda berilgan II tartibli tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha aniqlanadi:

$$y'=p(x,C_1)\Rightarrow y=\int p(x,C_1)dx=\int[\int f(x)dx+C_1]dx \quad . \qquad (3)$$

Demak, II tartibli eng sodda differensial tenglamaning umumiy yechimini topish uchun uning o‘ng tomonidagi funksiyani ketma-ket ikki marta integrallash kerak.

Masalan, $y''=6x+e^{3x}-4$ differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y=\int[\int(6x+e^{3x}-4)dx]dx=\int[3x^2+\frac{1}{3}e^{3x}-4x+C_1]dx=$$

$$=x^3+\frac{1}{9}e^{3x}-2x^2+C_1x+C_2$$

funksiyalar sinfidan iborat.

- ***y″=f*(*x*, *y′*) .** Bu tenglamada noma'lum $y=y(x)$ funksiyaning o'zi bevosita qatnashmaydi. Bu yerda ham $y'=p=p(x)$ almashtirma orqali I tartibli $p'=f(x, p)$ differensial tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamani integrallab, uning $p=p(x,C_1)$ umumiy yechimini topamiz. Unda I tartibli eng sodda $y'=p=p(x,C_1)$ differensial tenglamadan berilgan II tartibli tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y=\int p(x,C_1)dx+C_2 \quad . \qquad (4)$$

Misol sifatida,

$$y''=\frac{y'}{x\ln x}, \quad y(e)=-2\,,\ y'(e)=1$$

Koshi masalasini yechamiz. Buning uchun dastlab undagi II tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimini $y'=p$ almashtirma yordamida tartibni pasaytirish usulida topamiz:

$$p'=\frac{p}{x\ln x}\Rightarrow\frac{dp}{dx}=\frac{p}{x\ln x}\Rightarrow\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x\ln x}\Rightarrow\int\frac{dp}{p}=\int\frac{dx}{x\ln x}+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\frac{dp}{p}=\int\frac{d\ln x}{\ln x}+C\Rightarrow\ln|p|=\ln|\ln x|+\ln|C_1|=\ln|C_1\ln x|\Rightarrow p=C_1\ln x\ ;$$

$$y'=p=C_1\ln x\Rightarrow y=\int C_1\ln x dx+C_2=C_1x(\ln x-1)+C_2\ .$$

Endi Koshi masalasining yagona yechimini topish uchun umumiy yechimdagi C_1 va C_2 o'zgarmaslarning qiymatlarini boshlang'ich shartlardan aniqlaymiz:

$$\begin{cases} y(e)=C_1\cdot e\cdot(\ln e-1)+C_2=C_2=-2 \\ y'(e)=p(e,C_1)=C_1\ln e=C_1=1 \end{cases}.$$

Demak, berilgan Koshi masalasining yechimi $y=x(\ln x-1)-2$ funksiyadan iborat ekan.

- ***y″=f*(*y*, *y′*).** Bu tenglamada erkli x o'zgaruvchi bevosita qatnashmagan va bu holda $y'=p=p(y)$ ko'rinishdagi almashtirmadan foydalanamiz. Unda, murakkab funksiya hosilasi (VIII bob,§2, (14) ga qarang) formulasiga asosan

$$y''=p'_x=p'_y\cdot y'=p'p$$

va berilgan tenglamadan I tartibli

$$p'p=f(y,p) \Rightarrow p'=f(y,p)/p$$

tenglamani olamiz. Bu tenglamani integrallab, uning umumiy $p=p(y,C_1)$ yechimini topamiz. Unda berilgan tenglamaning umumiy yechimi I tartibli $y'=p=p(y,C_1)$ tenglamadan aniqlanadi.

Bu usulni $y''=(y')^2/y$ differensial tenglamani integrallash misolida namoyish etamiz:

$$y''=\frac{(y')^2}{y}\ (y'=p\,,\ y''=p'p)\ \Rightarrow p'p=\frac{p^2}{y}\ (p\neq 0)\Rightarrow\frac{dp}{dy}=\frac{p}{y}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}\Rightarrow\int\frac{dp}{p}=\int\frac{dy}{y}\Rightarrow\ln|p|=\ln|y|+\ln|C_1|\Rightarrow p=C_1y\ ;$$

$$y'=p=C_1y\Rightarrow\frac{dy}{dx}=C_1y\Rightarrow\frac{dy}{y}=C_1dx\Rightarrow\int\frac{dy}{y}=\int C_1dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln|y|=C_1x+C\Rightarrow y=e^{C_1x+C}=e^Ce^{C_1x}=C_2e^{C_1x}\ .$$

Bu yerda biz $p\neq0$ deb oldik. Agar $p=0$ bo‘lsa, unda $y'=p=0$ => $y=C$. Bu funksiya umumiy yechimdan $C_1=0$, $C_2=C$ bo‘lganda kelib chiqadi va shu sababli berilgan tenglama yechimi bo‘ladi.

XULOSA

Noma’lum funksiyaning II tartibli hosilasi qatnashgan differensial tenglama II tartibli deyiladi. Bu tenglama bilan bog‘liq bo‘lgan Koshi masalasida ikkita boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimni topish talab etiladi. Differensial tenglamalar nazariyasining eng asosiy teoremasi bo‘lmish Koshi teoremasida ma’lum bir shartlarda bu masalaning yechimi mavjud va yagona ekanligi tasdiqlanadi. Bu holda II tartibli differensial tenglamaning o‘zi ikkita o‘zgarmas sonlarga bog‘liq bo‘lgan cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lishi kelib chiqadi.

Ayrim xususiy hollarda II tartibli differensial tenglamalarni integrallash masalasini ma’lum bir belgilash kiritish orqali ikkita I tartibli tenglamani ketma-ket integrallash masalasiga olib kelish mumkin. Bu tartibni pasaytirish usuli deb ataladi.

Tayanch iboralar

* II tartibli differensial tenglama * II tartibli differensial tenglama yechimi
* Boshlang‘ich shart * Koshi masalasi * Koshi teoremasi * Umumiy yechim
* Umumiy integral * Xususiy yechim * Eng sodda II tartibli differensial tenglama
* Tartibni pasaytirish usuli

Takrorlash uchun savollar

1. II tartibli differensial tenglamaning umumiy ko‘rinishi qanday bo‘ladi?
2. II tartibli differensial tenglamaning yechimi nima?
3. II tartibli differensial tenglama uchun boshlang‘ich shart qanday kiritiladi?
4. II tartibli differensial tenglama uchun Koshi masalasi qanday ifodalanadi?
5. II tartibli tenglama uchun Koshi teoremasida nima tasdiqlanadi?
6. II tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi nima?
7. II tartibli differensial tenglamaning umumiy integrali nima?
8. II tartibli differensial tenglamaning xususiy yechimi qanday aniqlanadi?
9. Tartibni pasaytirish usulining mohiyati nimadan iborat?
10. Eng sodda II tartibli differensial tenglama qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
11. Eng sodda II tartibli differensial tenglama qanday integrallanadi?
12. Qaysi ko‘rinishdagi II tartibli tenglamalarni integrallash uchun tartibni pasaytirish usulini qo‘llash mumkin?

Testlardan namunalar

1. II tartibli differensial tenglamaning umumiy ko‘rinishi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?

A) $F(x, y'')=0$; B) $F(x, y, y'')=0$; C) $F(x, y, y', y'')=0$;
D) $F(y, y', y'')=0$; E) $F(x, y,y', y'', x_0)=0$.

2. II tartibli hosilaga nisbatan yechilgan differensial tenglamaning umumiy ko‘rinishi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?

A) $y''= f(x, y, y', y'')$; B) $y''= f(y, y', y'')$; C) $y''= f(x, y, y')$;
D) $y''= f(y, y')$; E) $y''= f(x, y, y', x_0 , y_0)$.

3. Quyidagi differensial tenglamalardan qaysi biri II tartibli?

A) $(y')^2 + 2yy' - x = 0$; B) $y' + 2y^2 - x = 0$; C) $y' + 2y - x^2 = 0$;
D) $y'' + 2y - x = 0$; E) $(y')^2 + 2y^2 - x^2 = 0$.

4. II tartibli differensial tenglama uchun Koshi masalasida boshlang‘ich shart qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

A) $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$; B) $y(x_0) = y_0$, $y'(x_1) = y_1'$;
C) $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$; D) $y(x_0) = y'(x_0) = y_0$;
E) $y'(x_0) = y_0'$, $y''(x_0) = y_0''$.

5. Koshi teoremasida $y'' = f(x, y, y')$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ Koshi masalasining yechimi haqida qaysi tasdiq ifodalanadi ?

A) yechimi mavjud; B) yechimi mavjud va yagona;
C) yechimi mavjud va cheksiz ko‘p; D) kamida bitta yechim mavjud;
E) ko‘pi bilan bitta yechim mavjud.

6. II tartibli differensial tenglamani tartibni pasaytirish usulida integrallash uchun qanday almashtirma bajariladi?

A) $y=p$; B) $y'=p$; C) $y''=p$; D) $x=p$; E) $y/x=p$;

Mustaqil ish topshiriqlari

1. II tartibli eng sodda differensial tenglamali Koshi masalasini yeching:

$$y'' = xe^{-nx}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

2. Ushbu II tartibli tenglamalarni tartibni pasaytirish usulida integrallang:

$$a)\ y'' = n - y'; \quad b)\ yy'' - n(y')^2 = 0.$$

§3. II TARTIBLI CHIZIQLI O‘ZGARMAS KOEFFITSIYENTLI BIR JINSLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

- ***II tartibli chiziqli differensial tenglamalar.***
- ***Chiziqli bog‘liq va erkli yechimlar.***
- ***Bir jinsli chiziqli tenglamaning umumiy yechimi.***
- ***Fundamental yechimlar va xarakteristik tenglamalar.***

3.1. II tartibli chiziqli differensial tenglamalar. Biz bu yerda yana bir ko‘rinishdagi II tartibli differensial tenglamalarni integrallash usuli bilan tanishamiz.

1-TA’RIF: Agar II tartibli differrensial tenglamada noma’lum funksiya y va uning y', y'' hosilalari birinchi darajada chiziqli ravishda qatnashgan bo‘lsa, u ***chiziqli differensial tenglama*** deyiladi.

II tartibli chiziqli differensial tenglama umumiy holda

$$a_0 y''+a_1 y'+a_2 y=f(x) \qquad (1)$$

ko‘rinishda bo‘ladi va kelgusida uni qisqacha chiziqli tenglama deb yuritamiz. Unda $a_0\neq 0$, a_1 , a_2 berilgan funksiyalar yoki o‘zgarmas sonlar bo‘lib, ***chiziqli tenglamaning koeffitsiyentlari*** deb ataladi. $f(x)$ funksiya ham berilgan bo‘lib, u ***chiziqli tenglamaning o‘ng tomoni*** deb yuritiladi.

Masalan, $y''+xy'+e^x y=\ln x$–chiziqli tenglama, ammo $y''+\ln y'+xy=x^3$–chiziqli tenglama emas, chunki unda y, y', y'' birinchi darajada bo‘lsada, y' hosila logarifmik funksiya argumenti sifatida chiziqli bo‘lmagan ko‘rinishda qatnashmoqda.

2-TA’RIF: Agar (1) chiziqli differensial tenglamaning o‘ng tomoni $f(x)\equiv 0$ bo‘lsa, u ***bir jinsli***, aks holda esa ***bir jinslimas*** deyiladi.

Masalan, $y''+xy'+x^2y=\sin x$– bir jinslimas, $2xy''+y'+x^2y=0$– bir jinsli chiziqli tenglama bo‘ladi.

3-TA’RIF: Agar (1) chiziqli tenglamaning hamma koeffitsiyentlari o‘zgarmas sonlardan iborat bo‘lsa, u ***o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglama*** deyiladi.

Bu paragrafda biz II tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli chiziqli differensial tenglama bilan shug‘ullanamiz. Bunda, umumiylikni yo‘qotmasdan, $a_0=1$ deb olishimiz mumkin, chunki aks holda (1) tenglamani $a_0\neq 0$ songa bo‘lish orqali bunga erishamiz. Bu holda qaralayotgan tenglama

$$y''+a_1 y'+a_2 y=0 \qquad (2)$$

ko‘rinishda bo‘ladi . Bunda a_1 va a_2 o‘zgarmas sonlar ekanligini yana bir marta eslatamiz. Masalan,

$$y''+y'+y=0\ ,\quad y''-7y'+12y=0$$

II tartibli chiziqli o‘zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli differensial tenglama bo‘ladi. Bu tenglama yechimlarining xossalarini qarab chiqamiz.

1-TEOREMA: Agar y_1 va y_2 funksiyalar (2) tenglamaning xususiy yechimlari bo‘lsa , unda y_1+y_2 funksiya ham bu tenglamaning yechimi bo‘ladi.

Isbot: Teorema shartiga asosan

$$y_1''+a_1y_1'+a_2y_1=0\,,\quad y_2''+a_1y_2'+a_2y=0$$

tengliklarni yoza olamiz. Bu holda, hosila olish qoidalariga asosan,

$$(y_1+y_2)''+a_1(y_1+y_2)'+a_2(y_1+y_2)=$$
$$=(y''+a_1y'+a_2y)+(y''+a_1y'+a_2y)=0+0=0\ ,$$

ya’ni haqiqatan ham y_1+y_2 funksiya (2) tenglama yechimi bo‘ladi.

2-TEOREMA: Agar y funksiya (2) tenglamaning yechimi bo‘lsa , unda ixtiyoriy C o‘zgarmas son uchun Cy ham (2) tenglama uchun yechim bo‘ladi.

Isbot: Teorema shartiga ko‘ra (2) tenglik o‘rinli. Unda

$$(Cy)''+a_1(Cy)'+a_2(Cy)=C(y''+a_1y'+a_2y)=C\cdot 0=0.$$

Demak, Cy ham (2) tenglamaning yechimi ekan.

Bu ikkala teoremani birlashtirib, ushbu xulosaga kelamiz:

Xulosa: Agar y_1 va y_2 funksiyalar (2) tenglamaning xususiy yechimlari bo‘lsa, unda ixtiyoriy C_1 va C_2 o‘zgarmas sonlar uchun $y= C_1y_1+C_2y_2$ funksiya, ya’ni ularning chiziqli kombinatsiyasi ham bu tenglamaning yechimi bo‘ladi.

3.2. Chiziqli bog‘liq va erkli yechimlar. Bir jinsli (2) differensial tenglamaning umumiy integralini topish uchun quyidagi tushuncha va natijalar muhim ahamiyatga egadir.

4-TA’RIF: Agar $[a,b]$ kesmada (2) tenglamaning ikkita y_1 va y_2 yechimlarining nisbati biror noldan farqli o‘zgarmas songa teng, ya’ni $y_1/y_2=C=const.$ ($C\neq 0$) bo‘lsa, unda y_1 va y_2 yechimlar $[a,b]$ kesmada ***chiziqli bog‘liq***, aks holda esa ***chiziqli erkli yechimlar*** deyiladi.

Masalan, $y''-4y'=0$ tenglama uchun $y_1=x$, $y_2=e^{4x}$, $y_3=5x$, $y_4=-2e^{4x}$ funksiyalar yechim bo‘lishini tekshirib ko‘rish mumkin. Bunda y_1 va y_2 chiziqli erkli , y_1 va y_3 esa chiziqli bog‘liq yechimlar bo‘ladi. Haqiqatan ham

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{x}{e^{4x}}\neq const., \quad \frac{y_1}{y_3}=\frac{x}{5x}=\frac{1}{5}=0.2=const.$$

Xuddi shunday ravishda y_1 va y_4 , y_2 va y_3 –chiziqli erkli, y_2 va y_4 esa chiziqli bog‘liq yechimlar bo‘lishini ko‘rsatish mumkin.

Berilgan ixtiyoriy y_1 va y_2 differensiallanuvchi funksiyalarni chiziqli bog‘liq yoki erkli ekanligini aniqlash uchun quyidagi tushunchadan foydalaniladi.

5-TA’RIF: Agar y_1 va y_2 differensiallanuvchi funksiyalar bo‘lsa, u holda

$$W(y_1, y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

determinant bu funksiyalarning ***Vronskiy determinanti*** deb ataladi.

Masalan, chiziqli erkli $y_1=x$ va $y_2=e^{4x}$ funksiyalarning Vronskiy determinanti

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & e^{4x} \\ 1 & 4e^{4x} \end{vmatrix}=4xe^{4x}-e^{4x}=(4x-1)e^{4x} \quad ,$$

chiziqli bog‘liq $y_1=x$ va $y_3=5x$ funksiyalar uchun esa

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & 5x \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=5x-5x=0\,.$$

Bu misolda chiziqli erkli funksiyalar uchun $W(y_1 , y_2)\neq 0$ bo‘lgan biror funksiya , chiziqli bog‘liq funksiyalar uchun esa $W(y_1 , y_2) =0$ bo‘ldi.

Bu natija tasodifiy bo‘lmasdan, Vronskiy determinanti uchun quyidagi teoremalar o‘rinlidir.

3-TEOREMA: Agar differensiallanuvchi y_1 va y_2 funksiyalar $[a,b]$ kesmada chiziqli bog‘liq bo‘lsa, u holda bu kesmada Vronskiy determinanti nolga teng bo‘ladi.

Isbot: Agar y_1 va y_2 funksiyalar $[a,b]$ kesmada chiziqli bog‘liq bo‘lsa, unda ta’rifga asosan shunday $\lambda\neq 0$ o‘zgarmas son mavjudki, $y_2=\lambda y_1$ deb yozish mumkin. Bu holda $y_2'=\lambda y_1'$ bo‘ladi va, determinant xossalariga ko‘ra (III bob, §2, 3-4 xossalar),

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, $W(y_1, y_2)=0$ y_1 va y_2 funksiyalar chiziqli bog'liq bo'lishi uchun zaruriy shartni ifodalaydi, ammo bu shart,umuman olganda, yetarli emas. Bunga misol sifatida quyidagi funksiyalarni qaraymiz:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-2{,}0], \\ 0, & x \in [0{,}2] \end{cases} \quad , \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-2{,}0], \\ -x^2, & x \in [0{,}2] \end{cases} \quad .$$

Bu funksiyalar [–2,2] kesmada uzluksiz va differensiallanuvchi bo'lib,

$$\varphi_1'(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [-2{,}0], \\ 0, & x \in [0{,}2] \end{cases} \quad , \quad \varphi_2'(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-2{,}0], \\ -2x, & x \in [0{,}2] \end{cases}$$

ekanligini ko'rish qiyin emas.

Bu funksiyalar uchun [–2,0] kesmada

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

[0,2] kesmada esa

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -x^2 \\ 0 & -2x \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Demak, [–2,2] kesmada $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(x)$ funksiyalarning Vronskiy determinanti $W(\varphi_1, \varphi_2)=0$. Ammo $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(x)$ funksiyalar [–2,2] kesmada chiziqli bog'liq emas , chunki $\varphi_2 = C\varphi_1$ $(-2 \le x \le 0)$ yoki $\varphi_1 = C\varphi_2$ $(0 \le x \le 2)$ tenglik faqat $C=0$ bo'lganda bajariladi.

Ammo y_1 va y_2 funksiyalar (2) differensial tenglamaning yechimlari bo'lsa, unda 3-teoremada teskari teorema o'rinli bo'lishini kelgusida ko'ramiz.

<u>4-TEOREMA:</u> Berilgan (2) tenglamaning y_1 va y_2 yechimlari $[a,b]$ kesmada chiziqli erkli va ularning Vronskiy determinanti $W(y_1,y_2)=W(x)$ bu kesmaning biror x_0 nuqtasida noldan farqli, ya'ni $W(x_0)=W_0 \neq 0$ bo'lsin. Bu holda Vronskiy determinanti bu kesmaning birorta ham x nuqtasida nolga teng bo'lmaydi, ya'ni $W(y_1, y_2) \equiv W(x) \neq 0$ shart bajariladi.

Isbot: Teorema shartiga asosan

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0, \quad y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y = 0$$

tengliklarni yoza olamiz. Ularning birinchisini y_1, ikkinchisini esa y_2 funksiyaga ko'paytirib va hosil bo'lgan tengliklarning ikkinchisidan birinchisini ayirib, ushbu natijani olamiz:

$$(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y) y_1 - (y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) y_2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + a_1 (y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0 \quad . \qquad (3)$$

Vronskiy determinanti ta'rifi va hosila olish qoidalariga asosan

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \ ,$$

$$W'(y_1, y_2) = (y_1 y_2' - y_2 y_1')' = (y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'') = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

ekanligini ko'ramiz. Bu tengliklardan foydalanib (3) tenglikdan

$$W' + a_1 W = 0 \qquad (4)$$

I tartibli differensial tenglamaga ega bo‘lamiz. Bu o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama va uni integrallaymiz:

$$W' + a_1 W = 0 \Rightarrow \frac{dW}{dx} = -a_1 W \Rightarrow \frac{dW}{W} = -a_1 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dW}{W} = -a_1 \int dx + \ln C \Rightarrow \ln W = -a_1 x + \ln C \Rightarrow W(x) = Ce^{-a_1 x} \ . \qquad (5)$$

Oxirgi tenglik farang matematigi Liuvill (1809–1882 y.) tomonidan topilgan va shu sababli ***Liuvill formulasi*** deb ataladi. Bu formuladagi C o‘zgarmas sonni teoremadagi $W(x_0)=W_0$ shartdan aniqlaymiz:

$$W(x_0) = Ce^{-a_1 x_0} = W_0 \Rightarrow C = W_0 e^{a_1 x_0} \ .$$

Demak, teorema shartlarida, Vronskiy determinanti uchun

$$W(x) = W_0 e^{-a_1 (x - x_0)}$$

(6)

formula o‘rinlidir. Bu formuladan teorema tasdig‘i kelib chiqadi, chunki unda $W_0 \neq 0$ va ko‘rsatkichli funksiya birorta ham chekli x nuqtada nolga teng emas.

NATIJA: Agar Vronskiy determinanti $[a,b]$ kesmadagi birorta x_0 nuqtada nolga teng bo‘lsa, unda u bu kesmadagi barcha nuqtalarda ham nolga teng bo‘ladi.

Haqiqatan ham, $W(x_0)=W_0=0$ bo‘lsa, unda (6) formuladan $W(x)\equiv 0$ ekanligi kelib chiqadi.

5-TEOREMA: Agar (2) tenglamaning y_1 va y_2 yechimlari $[a,b]$ kesmada chiziqli erkli bo‘lsa, ularning Vronskiy determinanti $W(y_1,y_2)=W(x)$ bu kesmaning birorta ham x nuqtasida nolga teng bo‘lmaydi, ya’ni $W(y_1 , y_2) = W(x) \neq 0$ shart bajariladi.

Bu teoremani isbotsiz qabul etamiz.

Izoh: Isbotlangan 3 va 5-teoremalardan (2) tenglamaning y_1 va y_2 yechimlari chiziqli bog‘liq (erkli) bo‘lishlari uchun ularning Vronskiy determinanti

$$W(y_1, y_2)=0 \quad (W(y_1, y_2)\neq 0)$$

bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi kelib chiqadi.

Masalan, $y_1=e^{kx}$ va $y_2=e^{mx}$ funksiyalar uchun

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{kx} & e^{mx} \\ ke^{kx} & me^{mx} \end{vmatrix} = (m-k)e^{(k+m)x} \neq 0,$$

ya’ni ular chiziqli erkli bo‘lishi uchun $k \neq m$ shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

3.3. Bir jinsli chiziqli tenglamaning umumiy yechimi. Endi bir jinsli (2) tenglamaning umumiy yechimi ko‘rinishini aniqlaymiz.

6-TEOREMA: Agar y_1 va y_2 funksiyalar (2) tenglamaning ixtiyoriy ikkita chiziqli erkli yechimi bo‘lsa, u holda

$$y=C_1 y_1+C_2 y_2 \qquad (7)$$

(C_1 va C_2 ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar), (2) tenglamaning umumiy yechimini ifodalaydi.

Isbot: $y=\varphi(x)$ funksiya (2) tenglamaning ixtiyoriy bir yechimi bo‘lsin. Bu funksiya biror $x=x_0$ nuqtada

$$\varphi(x_0)=\varphi_0\,, \qquad \varphi'(x_0)=\varphi_0' \qquad (8)$$

shartlarni qanoatlantirsin. (7) funksiyalar orasida (8) shartni qanoatlantiradigan funksiya mavjudligini ko‘rsatamiz. Buning uchun

$$y(x_0)=C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)=\varphi_0\,, \quad y'(x_0)=C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0)=\varphi_0'$$

tengliklar qandaydir C_1 va C_2 o‘zgarmaslarda bajarilishi kerak. Bu o‘zgarmaslarni topish uchun yuqoridagi tengliklardan ushbu chiziqli tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)=\varphi_0 \\ C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0)=\varphi_0' \end{cases} . \qquad (9)$$

Bu sistemaning asosiy determinanti (III bob, §4 ga qarang) W(y_1,y_2) Vronskiy determinantidan iborat va teorema shartida, 5-teoremaga asosan, noldan farqlidir. Bundan (9) sistema yagona C_1^0 , C_2^0 yechimga ega bo‘ladi. Bu holda

$$y^*=C_1^0y_1+C_2^0y_2$$

funksiya yuqoridagi 1va 2- teoremalarga asosan (xulosaga qarang) (2) tenglamani qanoatlantiradi va (8) boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiradi. Ammo, Koshi teoremasiga asosan, (2)-(8) Koshi masalasi yagona yechimga ega va shu sababli $y^*\equiv\varphi(x)$ bo‘ladi. Demak, (2) tenglamani ixtiyoriy yechimini (7) ko‘rinishda yozish mumkin va shu sababli (7) umumiy yechimni ifodalaydi.Teorema isboti yakunlandi.

3.4. Fundamental yechimlar va xarakteristik tenglamalar. Yuqoridagi teoremaga asosan (2) tenglamaning umumiy yechimini topish uchun uning ikkita chiziqli erkli y_1 va y_2 xususiy yechimlarini topish kifoya. Bu holda umumiy yechim (7) ko‘rinishda ifodalanib, y_1 va y_2 (2) tenglamaning ***fundamental yechimlari*** deb ataladi.

Endi (2) tenglamaning chiziqli erkli ikkita y_1 va y_2 xususiy, ya’ni fundamental yechimlarini topish masalasiga o‘tamiz.Ularni $y=e^{\lambda x}$ ko‘rinishda izlaymiz. Bunda λ qandaydir o‘zgarmas son va uni topish uchun $y=e^{\lambda x}$ funksiya va uning $y'=\lambda e^{\lambda x}$, $y''=\lambda^2e^{\lambda x}$ hosilalarini (2) tenglamaga qo‘yib, quyidagi natijalarni olamiz:

$$y''+a_1y'+a_2y=0\Rightarrow\lambda^2e^{\lambda x}+a_1\lambda e^{\lambda x}+a_2e^{\lambda x}=0\Rightarrow(\lambda^2+a_1\lambda+a_2)e^{\lambda x}=0\Rightarrow$$

$$\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0 \quad . \qquad (10)$$

Bundan ko‘rinadiki, (2) bir jinsli chiziqli differensial tenglamani integrallash masalasi (10) kvadrat tenglamani yechish masalasiga keltiriladi.

<u>6-TA’RIF:</u> (10) kvadrat tenglama (2) differensial tenglamaning ***xarakteristik tenglamasi*** deyiladi.

Bizga ma’lumki (10) kvadrat tenglamaning ildizlari λ_1 va λ_2

$$\lambda_{1,2}=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_2}}{2}=\frac{-a_1\pm\sqrt{D}}{2}\,,\, D=a_1^2-4a_2\,,$$

formula bilan topiladi va bunda uch hol bo‘lishi mumkin.

I hol. Diskriminant D>0 va bu holda (10) xarakteristik tenglama ikkita turli $\lambda_1\neq\lambda_2$ haqiqiy ildizlarga ega bo‘ladi. Bu ildizlarga (2) tenglamaning ikkita $y_1=e^{\lambda_1x}$, $y_2=e^{\lambda_2x}$ xususiy yechimlari mos kelib, ular fundamental yechimlarni tashkil etadi. Demak, bu holda (2) bir jinsli chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \qquad (11)$$

ko‘rinishda ifodalanadi.

Misol sifatida, $y''+3y'+2y=0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini topamiz. Buning uchun dastlab xarakteristik tenglamani yozamiz va uning ildizlarini aniqlaymiz:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow D = 3^2 - 4\cdot 2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{-3-\sqrt{1}}{2} = -2, \quad \lambda_2 = \frac{-3+\sqrt{1}}{2} = -1 \quad .$$

Demak, berilgan differensial tenglama uchun $y_1=e^{-2x}$ va $y_2=e^{-2x}$ fundamental yechimlar bo‘lib, umumiy yechim $y=C_1\, e^{-2x}+ C_2\, e^{-x}$ (C_1 va C_2–ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar) ko‘rinishda ifodalanadi.

II hol. Diskriminant D=0 va bu holda (10) xarakteristik tenglama ikkita o‘zaro teng $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0$ haqiqiy ildizlarga ega bo‘ladi. Bu holda, yuqoridagiga o‘xshab, (2) tenglamaning bitta xususiy yechimi $y_1 = e^{\lambda_0 x}$ bo‘ladi. Ikkinchi xususiy yechim sifatida $y_2 = xe^{\lambda_0 x}$ funksiyani olish mumkin. Haqiqatan ham, bu funksiya va uning

$$y_2' = (xe^{\lambda_0 x})' = e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 x e^{\lambda_0 x} = (1+\lambda_0 x)\, e^{\lambda_0 x},$$

$$y_2'' = (xe^{\lambda_0 x})'' = [(1+\lambda_0 x)\, e^{\lambda_0 x}]' = \lambda_0 e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 (1+\lambda_0 x)\, e^{\lambda_0 x} = \lambda_0 (2+\lambda_0 x)\, e^{\lambda_0 x}$$

hosilalarini (2) tenglamaga qo‘yib,

$$y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = \lambda_0 (2+\lambda_0 x)\, e^{\lambda_0 x} + a_1 (1+\lambda_0 x)\, e^{\lambda_0 x} + a_2\, e^{\lambda_0 x} =$$

$$= [(\lambda_0^2 + a_1\lambda_0 + a_2) + (2\lambda_0 + a_1)] e^{\lambda_0 x} \qquad (12)$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bunda λ_0 (10) xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lgani uchun (12) tenglikdagi kvadrat qavs ichidagi birinchi qo‘shiluvchi qiymati nolga teng bo‘ladi.

Bundan tashqari qaralayotgan holda

$$D = a_1^2 - 4a_2 = 0 \Rightarrow a_1^2 = 4a_2$$

ekanligidan foydalanib, (12) tenglikdagi kvadrat qavs ichidagi ikkinchi qo‘shiluvchi uchun ushbu natijani olamiz:

$$(2\lambda_0 + a_1)^2 = 4\lambda_0^2 + 4a_1\lambda_0 + a_1^2 = 4\lambda_0^2 + 4a_1\lambda_0 + 4a_2 = 4(\lambda_0^2 + a_1\lambda_0 + a_2) = 4\cdot 0 = 0.$$

Demak, (12) tenglikdagi kvadrat qavs ichidagi ifoda nolga teng va

$$y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0 \ ,$$

ya’ni $y_2 = xe^{\lambda_0 x}$ funksiya (2) tenglama yechimi bo‘ladi. Bundan tashqari $y_1 = e^{\lambda_0 x}$ va $y_2 = xe^{\lambda_0 x}$ chiziqli erkli yechimlardir, chunki

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{\lambda_0 x}}{xe^{\lambda_0 x}} = \frac{1}{x} \neq const.$$

Bu yerdan qaralayotgan holda (2) differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{\lambda_0 x} + C_2 x e^{\lambda_0 x} = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_0 x} \qquad (13)$$

ko‘rinishda topilishini aniqlaymiz.

Misol sifatida $y''-6y'+9y=0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$\lambda^2-6\lambda+9=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=3 \Rightarrow y=(C_1+C_2x)e^{3x} .$$

III hol. Diskriminant $D<0$ va bu holda (10) xarakteristik tenglama ildizlari

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} = -\frac{a_1}{2} \pm i\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} \equiv \alpha \pm i\beta$$

ko‘rinishdagi ikkita qo‘shma kompleks sonlardan iborat bo‘ladi. Bu holda

$$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x , \ y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$$

funksiyalar (2) differensial tenglamaning xususiy yechimlari bo‘lishini ko‘rsatamiz. $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$ funksiya va uning

$$y_1' = (e^{\alpha x}\cos\beta x)' = (\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x)e^{\alpha x} ,$$

$$y_1''=(y_1')' = [(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x)e^{\alpha x}]' == [(\alpha^2-\beta^2)e^{\alpha x}\cos\beta x - 2\alpha\beta\sin\beta x]e^{\alpha x}$$

hosilalarini (2) tenglamaga qo‘yamiz:

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = [(\alpha^2-\beta^2)\cos\beta x - 2\alpha\beta\sin\beta x]e^{\alpha x} + a_1(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x)e^{\alpha x} +$$

$$+ a_2 e^{\alpha x}\cos\beta x = [(\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 - \beta^2)\cos\beta x - (a_1 - 2\alpha)\sin\beta x]e^{\alpha x} .$$

Bu yerda,

$$\alpha = -\frac{a_1}{2} , \ \beta = \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}$$

ekanligidan foydalanib,

$$\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 - \beta^2 = \frac{a_1^2}{4} - a_1\frac{a_1}{2} + a_2 - \beta^2 = a_2 - \frac{a_1^2}{4} - \beta^2 = \beta^2 - \beta^2 = 0 ,$$

$$a_1 + 2\alpha = a_1 + 2\cdot(-\frac{a_1}{2}) = a_1 - a_1 = 0$$

tengliklar o‘rinli bo‘lishini ko‘ramiz. Bundan

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0 ,$$

ya’ni $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$ funksiya (2) differensial tenglama yechimi ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shunday ravishda $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$ funksiya ham (2) differensial tenglama yechimi ekanligi ko‘rsatiladi.

Demak, bu holda (2) differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+ C_2e^{\alpha x}\sin\beta x=(C_1\cos\beta x+ C_2\sin\beta x) e^{\alpha x} \qquad (14)$$

kabi aniqlanadi.

Misol sifatida

$$y''-4y'+13y=0 , \ y(0)= -1 , y'(0)=4$$

Koshi masalasini yechamiz. Dastlab bu masaladagi differensial tenglamaning umumiy yechimini xarakteristik tenglama yordamida topamiz:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0 \Rightarrow D = (-4)^2 - 4\cdot 13 = -36 < 0 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{-36} = \sqrt{36i^2} = 6i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2 - 3i , \lambda_2 = 2 + 3i \Rightarrow \alpha = 2 , \beta = 3 \Rightarrow y = (C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)e^{2x} .$$

Umumiy yechimdagi C_1 va C_2 o‘zgarmaslarning qiymatlarini boshlang‘ich shartlardan aniqlaymiz:

$$y(0)=C_1=-1 \quad , \quad y'(0)=[(2C_1+3C_2)\cos 3x-(3C_1-2C_2)\sin 3x]e^{2x}\Big|_{x=0}=$$

$$=2C_1+3C_2=-2+3C_2=4 \Rightarrow C_2=2 \quad .$$

Demak, berilgan Koshi masalasining yechimi

$$y=(2\sin 3x-\cos 3x)e^{2x}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

XULOSA

Noma’lum funksiya va uning hosilalari chiziqli ko‘rinishda qatnashgan differensial tenglamalar chiziqli deb ataladi. Bu yerda noma’lumlar oldidagi funksiyalar o‘zgarmas sonlardan iborat bo‘lgan xususiy holni qarash bilan chegaralanamiz. Bu holda II tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamaga ega bo‘lamiz. Dastlab bu tenglamaning o‘ng tomoni aynan nolga teng, ya’ni bir jinsli bo‘lgan holni qaraymiz. Bir jinsli tenglamaning yechimlari chiziqlilik xossasiga egadir. Bundan uning umumiy yechimi ikkita erkli xususiy yechimlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lishi kelib chiqadi. Shu sababli bir jinsli tenglamaning umumiy yechimni topish uchun uning ikkita erkli (fundamental) yechimlarni topish kifoyadir. Bu masala kvadrat tenglama ko‘rinishidagi xarakteristik tenglamaning ildizlari orqali o‘z yechimini topadi. Xarakteristik tenglama diskriminantining ishorasiga qarab bu yerda uch hol qaraladi va har bir holda xususiy yechimlar ko‘rinishi aniqlanadi.

Tayanch iboralar

* II tartibli chiziqli differensial tenglama * Chiziqli differensial tenglamaning koeffitsiyenti * Chiziqli differensial tenglamaning o‘ng tomoni * Bir jinsli chiziqli differensial tenglama * O‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglama * Chiziqli bog‘liq yechimlar * Chiziqli erkli yechimlar * Vronskiy determinanti * Liuvill formulasi * Fundamental yechimlar * Xarakteristik tenglama

Takrorlash uchun savollar

1. **II tartibli chiziqli differensial tenglama qanday ko‘rinishda bo‘ladi?**
2. **Qaysi shartda chiziqli differensial tenglama bir jinsli deb ataladi?**
3. **Bir jinsli chiziqli differensial tenglama yechimlari qanday xossalarga ega?**
4. **Qachon differensial tenglama yechimlari chiziqli bog‘liq (erkli) deyiladi?**
5. **Funksiyalarning Vronskiy determinanti qanday ko‘rinishda bo‘ladi?**
6. **Liuvill formulasida nima ifodalanadi?**
7. **Chiziqli differensial tenglamaning yechimlari chiziqli bog‘liq bo‘lishining zaruriy va yetarli sharti nimadan iborat?**
8. **Chiziqli differensial tenglamaning fundamental yechimlari nima?**

9. Chiziqli differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi deb nimaga aytiladi?

10. Xarakteristik tenglama ildizlari bo‘yicha bir jinsli chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimi qanday topiladi?

Testlardan namunalar

1. Quyidagilardan qaysi biri II tartibli chiziqli differensial tenglama bo‘ladi?

A) $(y'')^2 + a_1 y' + a_2 y = f(x)$; B) $y'' + a_1 (y')^2 + a_2 y = f(x)$;

C) $y'' + a_1 y' + a_2 y^2 = f(x)$; D) $y'' + a_1 y' + a_2 y = f^2(x)$;

E) bu tenglamalar orasida II tartibli chiziqli differensial tenglama yo‘q .

2. II tartibli chiziqli $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$ differensial tenglama quyidagi hollardan qaysi birida bir jinsli bo‘lmaydi?

A) $f(x)=0$; B) $\ln[1+f(x)]=0$; C) $e^{f(x)}=1$; D) $\sin f(x)=0$;

E) keltirilgan barcha hollarda bir jinsli bo‘ladi.

3. Quyidagi II tartibli chiziqli tenglamalardan qaysi biri bir jinsli emas?

A) $y'' - 3y' = 0$; B) $y'' - 3y = 0$; C) $y'' - 3y' + 3y = 0$;

D) $y'' - 3 = 0$; E) keltirilgan tenglamalarning hammasi bir jinsli.

4. Agar y_1 va y_2 berilgan $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ differensial tenglamaning chiziqli erkli yechimlari, C_1 va C_2 ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar bo‘lsa, bu differensial tenglamaning umumiy yechimi y qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

A) *ye* $C_1y_1 + C_2y_2$; B) *ye* $(C_1+y_1)(C_2+y_2)$; C) *ye* $C_1y_1 \cdot C_2y_2$;

D) *ye* C_1y_1 / C_2y_2; E) *ye* $(C_1+y_1)/(C_2+y_2)$.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Quyidagi II tartibli bir jinsli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping:

a) $y'' + (n-1)y' - ny = 0$; *b*) $y'' + 2ny' + n^2 y = 0$; *c*) $y'' - 2\sqrt{2n}\,y' + (n^2+1)y = 0$.

2. II tartibli bir jinsli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglama uchun Koshi masalasini yeching:

$$y'' - 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = n+1, \quad y'(0) = n.$$

§4. II TARTIBLI CHIZIQLI O‘ZGARMAS KOEFFITSIYENTLI BIR JINSLIMAS DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

- ***II tartibli bir jinslimas chiziqli tenglamaning umumiy yechimi.***
- ***O‘zgarmaslarni variatsiyalash usuli.***
- ***Qo‘shish usuli.***

- ***O‘ng tomoni maxsus ko‘rinishda bo‘lgan tenglamalar.***
- ***II tartibli chiziqli differensial tenglamaning bir iqtisodiy tatbig‘i.***

4.1. II tartibli bir jinslimas chiziqli tenglamaning umumiy yechimi. Dastlab, II tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \qquad (1)$$

differensial tenglamada $f(x)\neq 0$ bo‘lsa u bir jinslimas deb atalishini eslatib o‘tamiz.

Bu differensial tenglamaning umumiy yechimini topishda unga mos keluvchi

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (2)$$

bir jinsli tenglama muhim ahamiyatga ega.

1-TEOREMA: Bir jinslimas (1) differensial tenglamaning umumiy yechimi y bu tenglamaning biror $y*$ xususiy yechimi bilan unga mos keluvchi bir jinsli (2) tenglamaning $\bar{y}$ umumiy yechimi yig‘indisi kabi ifodalanadi, ya’ni

$$y = y^* + \bar{y}. \qquad (3)$$

Isbot: Dastlab (3) ko‘rinishdagi funksiyalar (1) tenglamaning yechimi bo‘lishini ko‘rsatamiz. Teorema shartiga ko‘ra

$$(y^*)'' + a_1 (y^*)' + a_2 y^* = f(x), \quad (\bar{y})'' + a_1(\bar{y})' + a_2 \bar{y} = 0$$

bo‘lgani uchun

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = (y^* + \bar{y})'' + a_1 (y^* + \bar{y})' + a_2 (y^* + \bar{y}) =$$
$$= [(y^*)'' + a_1 (y^*)' + a_2 y^*] + [(\bar{y})'' + a_1 (\bar{y})' + a_2 \bar{y}] = f(x) + 0 = f(x) \quad ,$$

ya’ni (3) funksiyalar (1) tenglama yechimi bo‘ladi.

Endi (3) funksiyalar (1) tenglamaning ixtiyoriy yechimini o‘z ichiga olishini, ya’ni umumiy yechimni ifodalashini ko‘rsatamiz. Buning uchun (1) tenglamaning ixtiyoriy bir $y=\varphi(x)$ yechimini olamiz. Bu yechim va uning hosilasi biror x_0 nuqtada

$$\varphi(x_0) = \varphi_0, \quad \varphi'(x_0) = \varphi_0' \qquad (4)$$

qiymatlarni qabul etsin. (3) funksiyalar orasida (4) shartlarni qanoatlantiruvchi funksiya mavjudligini isbotlaymiz. Buning uchun (3) funksiyalar

$$y = y^* + \bar{y} = y^* + C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad (5)$$

ko‘rinishda ekanligidan foydalanamiz. Bu yerda y_1 va y_2 bir jinsli (2) tenglamaning chiziqli erkli yechimlari, C_1 va C_2 esa ixtiyoriy o‘zgarmas sonlardir.

Bu yerda

$$y^*(x_0) = y_0^*, \; y^{*\prime}(x_0) = y_0^{*\prime}, \; y_1(x_0) = y_{10},$$
$$y_2(x_0) = y_{20}, \; y_1'(x_0) = y_{10}', \; y_2'(x_0) = y_{20}'$$

belgilashlar kiritamiz. Bu holda (3) funksiya uchun (4) shartlar quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0^* + C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = \varphi_0 \\ y'(x_0) = y_0^{*\prime} + C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' = \varphi_0' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = \varphi_0 - y_0^* \\ C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' = \varphi_0' - y_0^{*\prime} \end{cases}. \quad (6)$$

Bu C_1 va C_2 o‘zgarmaslarga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasi bo‘lib, uning determinanti Δ bir jinsli (2) tenglamaning y_1 va y_2 yechimlarining Vronskiy $W(y_1,y_2)$ determinantining x_0 nuqtadagi qiymatiga teng. Bunda y_1 va y_2 chiziqli erkli yechimlar bo‘lgani uchun $\Delta=W(y_1,y_2)\neq 0$. Demak , (6) chiziqli tenglamalar sistemasi yagona C_1^0 , C_2^0 yechimga ega. Unda (3) ko‘rinishdagi

$$y = y^* + \bar{y} = y^* + C_1^0 y_1 + C_2^0 y_2$$

funksiya (1) differensial tenglamaning yechimi bo‘ladi va (4) boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiradi. Bu yerdan, Koshi teoremasiga asosan,

$$y = y^* + \bar{y} = y^* + C_1^0 y_1 + C_2^0 y_2 \equiv \varphi(x)$$

ekanligi kelib chiqadi va bu bilan teoremaning isboti yakunlanadi.

4.2. O‘zgarmaslarni variatsiyalash usuli. Biz oldingi paragrafda bir jinsli (2) chiziqli differensial tenglamaning $\bar{y}$ umumiy yechimini topish masalasini hal etgan edik. Shu sababli, 1-teoremaga asosan, bir jinslimas (1) chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimini topish uchun uning biror y^* xususiy yechimini aniqlash kifoya. Buning uchun Lagranj tomonidan taklif etilgan va ***o‘zgarmaslarni variatsiyalash*** deb ataladigan usuldan foydalanish mumkin. Bu usulda (1) tenglamaga mos keluvchi bir jinsli (2) tenglamaning umumiy yechimi $\bar{y}=C_1 y_1+C_2 y_2$ ma’lum deb hisoblanadi. Bu yechimdagi C_1 va C_2 o‘zgarmas sonlarni $C_1(x)$ va $C_2(x)$ funksiyalar bilan almashtirib, (1) tenglamaning y^* xususiy yechimini

$$y^*=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2 \qquad (7)$$

ko‘rinishda izlaymiz. Bunda $C_1(x)$ va $C_2(x)$ noma’lum funksiyalar bo‘lib, ularni topish uchun dastlab (7) tenglikni differensiallaymiz. Ko‘paytmaning hosilasi formulasiga ko‘ra

$$(y^*)'=C_1(x)\, y_1'+C_2(x)\, y_2'+ C_1'(x)\, y_1+C_2'(x)\, y_2$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Endi, shu paytgacha ixtiyoriy deb hisoblanayotgan, $C_1(x)$ va $C_2(x)$ funksiyalar

$$C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \qquad (8)$$

shartni qanoatlantiradi deb olamiz. Bu shartda $(y^*)'$ hosilaning yuqoridagi ifodasi

$$(y^*)'=C_1(x)\, y_1'+C_2(x)\, y_2' \qquad (9)$$

ko‘rinishga keladi. Bu ifodani differensiallab, $(y^*)''$ hosilani topamiz:

$$(y^*)''= C_1(x)\, y_1''+C_2(x)\, y_2''+ C_1'(x)\, y_1'+C_2'(x)\, y_2' \quad . \qquad (10)$$

Xususiy yechim y^* va uning hosilalari $(y^*)'$, $(y^*)''$ uchun topilgan (7), (9) va (10) ifodalarni (1) tenglamaga qo‘yib,

$$C_1(x)\, y_1''+C_2(x)\, y_2''+ C_1'(x)\, y_1'+C_2'(x)\, y_2'+$$
$$+a_1(C_1(x)\, y_1'+C_2(x)\, y_2')+a_2(C_1(x)\, y_1+C_2(x)\, y_2)=f(x)$$

yoki

$$C_1(x)(y_1'' + a_1 y_1' +a_2 y_1)+ C_2(x)(y_2'' + a_1 y_2' +a_2 y_2)+$$
$$+ C_1'(x) y_1' + C_2'(x)\, y_2' =f(x)$$

tenglikni hosil qilamiz. Agar y_1 va y_2 funksiyalar bir jinsli (2) tenglamaning yechimlari ekanligini nazarga olsak, unda bu tenglikdagi dastlabki ikkita qo‘shiluvchida qavs ichidagi ifoda nolga teng bo‘ladi va u

$$C_1'(x) y_1' + C_2'(x)\, y_2' =f(x) \qquad (11)$$

ko‘rinishga keladi. Shunday qilib, noma’lum $C_1(x)$ va $C_2(x)$ funksiyalarni aniqlash uchun (8) va (11) tenglamalardan iborat sistema hosil etdik. Bu sistemani yechib, (7) tenglikdagi noma’lum $C_1(x)$ va $C_2(x)$ funksiyalarni, demak y^* xususiy yechimni topamiz.

Misol sifatida, o‘zgarmaslarni variaysiyalash usulida $y''-2y'-3y=e^{4x}$ tenglamaning xususiy yechimini topamiz. Bu holda, xarakteristik tenglama yordamida, berilgan tenglamaga mos keluvchi bir jinsli $y''-2y'-3y=0$ tenglamaning umumiy yechimi $C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$ ko‘rinishda bo‘lishini topamiz. Unda xususiy yechimni $y^*=C_1(x)e^{-x}+C_2(x)e^{3x}$ ko‘rinishda izlaymiz. Bu holda noma’lum $C_1(x)$ va $C_2(x)$ funksiyalar uchun (8)-(11) tenglamalar sistemasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x}+C_2'(x)e^{3x}=0 \\ -C_1'(x)e^{-x}+3C_2'(x)e^{3x}=e^{4x} \end{cases}.$$

Bu sistemani yechib, noma’lum $C_1(x)$ va $C_2(x)$ funksiyalarni topamiz:

$$\begin{cases} C_1'(x)=-\dfrac{1}{4}e^{5x} \\ C_2'(x)=\dfrac{1}{4}e^{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x)=-\dfrac{1}{20}e^{5x}+\overline{C_1} \\ C_2(x)=\dfrac{1}{4}e^{x}+\overline{C_2} \end{cases}. \qquad (12)$$

Bu yerda $\overline{C_1}, \overline{C_2}$ ixtiyoriy o‘zgarmas sonlarni ifodalaydi va ularni nol deb olib, berilgan bir jinslimas tenglamaning

$$y^*=C_1(x)e^{-x}+C_2(x)e^{3x}=-\frac{1}{20}e^{5x}e^{-x}+\frac{1}{4}e^{x}e^{3x}=\frac{1}{5}e^{4x}$$

xususiy yechimini topamiz. Unda, 1-teoremaga asosan, bu tenglamaning umumiy yechimi ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y=\frac{1}{5}e^{4x}+C_1e^{-x}+C_2e^{3x}\ . \qquad (13)$$

Izoh: (12) tengliklarda $\overline{C_1}, \overline{C_2}$ ixtiyoriy o‘zgarmas sonlarni nolga tenglashtirmasdan va topilgan $C_1(x)$ va $C_2(x)$ funksiyalarni to‘g‘ridan-to‘g‘ri

$$y=C_1(x)e^{-x}+C_2(x)e^{3x}$$

tenglikka qo‘yib, darhol (13) umumiy yechimga ega bo‘lishimiz mumkin.

4.3. Qo‘shish usuli. Ayrim hollarda bir jinslimas tenglamaning xususiy yechimini topishda quyidagi ***qo‘shish teoremasi*** orqali aniqlanadigan qo‘shish usulidan foydalanish mumkin bo‘ladi.

2-TEOREMA: Berilgan bir jinlimas chiziqli

$$y''+a_1y'+a_2y=f(x) \qquad (1)$$

differensial tenglamaning o‘ng tomoni

$$f(x)=A_1f_1(x)+A_2f_2(x)+\cdots+A_nf_n(x)=\sum_{k=1}^{n}A_kf_k(x) \qquad (14)$$

ko‘rinishdagi yig‘indidan iborat bo‘lsin. Bunda A_k va $f_k(x)$ $(k=1,2,\cdots,n)$ ma’lum bir sonlar va funksiyalardir. Bu holda (1) tenglamaning y^* xususiy yechimimi

$$y^*=A_1y_1^*+A_2y_2^*+\cdots+A_ny_n^*=\sum_{k=1}^{n}A_ky_k^* \qquad (15)$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin. Bu yerda y_k^* $(k=1,2,\cdots,n)$ orqali

$$y''+a_1y'+a_2y=f_k(x) \quad (k=1,2,\cdots,n) \qquad (16)$$

differensial tenglamalarning xususiy yechimlari belgilangan .

Isbot: (15) funksiyani (1) differensial tenglamaga qo‘yib va (15), (14) tengliklardan foydalanib, ushbu tenglikka kelamiz:

$$(y^*)'' + a_1(y^*)' + a_2 y^* = (\sum_{k=1}^{n} A_k y_k^*)'' + a_1(\sum_{k=1}^{n} A_k y_k^*)' + a_2 \sum_{k=1}^{n} A_k y_k^* =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k [y_k^{*''} + a_1 y_k^{*'} + a_2 y_k^*] = \sum_{k=1}^{n} A_k f_k(x) = f(x) \quad .$$

Bu yerdan haqiqatan ham (15) funksiya (1) differensial tenglamani qanoatlantirishi, ya’ni uning xususiy yechimi bo‘lishi kelib chiqadi.

Misol sifatida

$$y'' - (\alpha + \beta) y' + \alpha\beta y = ae^{\alpha x} + be^{\beta x}$$

tenglamaning y^* xususiy yechimini topamiz. Dastlab, xarakteristik tenglama ildizlari $\lambda_1=\alpha$, $\lambda_2=\beta$ ekanligidan foydalanib,

$$y'' - (\alpha + \beta) y' + \alpha\beta y = e^{\alpha x}$$

tenglamani y_1^* xususiy yechimini o‘zgarmaslarni variatsiyalash usulida izlab,

$$y_1^* = \frac{x}{\alpha - \beta} e^{\alpha x}$$

ekanligini aniqlaymiz. So‘ngra, xuddi shunday ravishda,

$$y'' - (\alpha + \beta) y' + \alpha\beta y = e^{\beta x}$$

tenglamaning y_2^* xususiy yechimini topamiz:

$$y_2^* = \frac{x}{\beta - \alpha} e^{\beta x} \quad .$$

Bu yerdan, qo‘shish teoremasiga ko‘ra, berilgan differensial tenglamaning y^* xususiy yechimi sifatida

$$y^* = ay_1^* + by_2^* = \frac{x}{\alpha - \beta}(ae^{\alpha x} - be^{\beta x})$$

funksiyani olish mumkinligi kelib chiqadi.

4.4. O‘ng tomoni maxsus ko‘rinishda bo‘lgan tenglamalar. Bir jinslimas (1) chiziqli differensial tenglamaning o‘ng tomoni $f(x)$ maxsus ko‘rinishlarda bo‘lganda, uning xususiy yechimini o‘zgaruvchilarni variatsiyalash usuliga nisbatan osonroq bo‘lgan va differensial tenglamalarni integrallashni talab etmaydigan algebraik usulda topish mumkin. Bu usul mohiyatini

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \qquad (1)$$

differensial tenglamaning o‘ng tomoni

$$f(x) = P_n(x)\, e^{\alpha x}$$

bo‘lgan holda ko‘rsatamiz. Bunda $P_n(x)$–n-darajali ko‘phadni, ya’ni

$$P_n(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0$$

ko‘rinishdagi algebraik funksiyani, α esa haqiqiy sonni ifodalaydi.

Bunda y^* xususiy yechim ko‘rinishi ko‘rsatkichli funksiyada qatnashayotgan α soni va (1) tenglamaga mos keluvchi

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \qquad (17)$$

xarakteristik tenglama ildizlariga bog‘liq bo‘ladi.

1-hol. α soni (17) xarakteristik tenglamaning ildizi emas. Bu holda y^* xususiy yechim

$$y^*=Q_n(x)\,e^{\alpha x} \qquad (18)$$

ko‘rinishda izlanadi. Bu yerda $Q_n(x)$ ham $P_n(x)$ singari qandaydir n-darajali ko‘phad, ya’ni

$$Q_n(x)=q_nx^n+q_{n-1}x^{n-1}+\cdots+q_1x+q_0$$

ko‘rinishda deb olinadi. Bu ko‘phadning q_k (k=0,1,2,$\cdots$, n) koeffitsiyentlarini topish uchun y^* va uni hosilalarini hisoblab, (1) differensial tenglamaga qo‘yamiz va hosil bo‘ladigan tenglamani ikkala tomonini $e^{\alpha x}\neq 0$ funksiyaga bo‘lamiz. Natijada hosil bo‘ladigan tenlikning ikkala tomonida n-darajali ko‘phadlar ishtirok etadi: o‘ng tomonda $P_n(x)$ ko‘phad, chap tomonda esa $Q_n(x)$ ko‘phadning q_k (k=0,1,$\cdots$, n) koeffitsiyentlari qatnashgan ko‘phad. Bu tenglikning ikkala tomonidagi bir xil x^k darajalar (k=0,1,2,$\cdots$, n) oldidagi koeffitsiyentlarni bir-biriga tenglashtirib, noma’lum q_k (k=0,1,2,$\cdots$, n) koeffitsiyentlarni topish uchun n+1 noma’lumli (n+1) ta tenglamali chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemani yechib va topilgan q_k (k=0,1,$\cdots$, n) koeffitsiyentlar (18) tenglikka qo‘yib, izlangan y^* xususiy yechimni topamiz. Bu ***noma’lum koeffitsiyentlar usuli*** deb ataladi.

Misol sifatida, $y''-4y'+3y=(2x+1)e^{5x}$ differensial tenglamaning y^* xususiy yechimini topamiz. Bu yerda α=5 bo‘lib, u $\lambda^2-4\lambda+3=0$ xarakteristik tenglamaning $\lambda_1=1$ va $\lambda_2=3$ ildizlari bilan ustma-ust tushmaydi. Shu sababli bu misolda xususiy yechimni $y^*=(ax+b)e^{5x}$ ko‘rinishda izlaymiz. Bunda

$$(y^*)'=(5ax+a+5b)e^{5x}\ ,\ (y^*)''=(25ax+10a+25b)e^{5x}$$

ekanligidan foydalanib, berilgan differensial tenglamadan quyidagi natijani olamiz:

$$(y^*)''-4(y^*)'+3y^*=(25ax+10a+25b)e^{5x}-4(5ax+a+5b)e^{5x}+3(ax+b)e^{5x}=(2x+1)e^{5x}\ ,$$

$$(8ax+6a+8b)e^{5x}=(2x+1)e^{5x} \Rightarrow 8ax+6a+8b=2x+1\ .$$

Oxirgi tenglikda x oldidagi koeffitsiyentlarni va ozod hadlarni tenglashtirib, noma’lum a va b qiymatlarini topamiz:

$$\begin{cases} 8a=2 \\ 6a+8b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1/4 \\ b=-1/16 \end{cases}.$$

Demak, berilgan differensial tenglamaning xususiy yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$y^*=(\frac{1}{4}x-\frac{1}{16})e^{5x}=\frac{1}{16}(4x-1)e^{5x}.$$

2-hol. α soni (17) xarakteristik tenglamaning ikkita turli ildizlaridan biriga teng, ya’ni uning oddiy ildizi bo‘lsin. Bu holda (1) differensial tenglamaning y^* xususiy yechimi

$$y^*=xQ_n(x)e^{\alpha x}=x(q_nx^n+q_{n-1}x^{n-1}+\cdots+q_1x+q_0)\,e^{\alpha x}$$

ko‘rinishda izlanadi. Undagi q_k (k=0,1,$\cdots$, n) koeffitsiyentlar yuqorida ko‘rsatilgan noma’lum koeffitsiyentlar usuli orqali aniqlanadi.

Misol sifatida $y''-7y'+6y=(x-2)e^x$ tenglamani qaraymiz. Bu tenglamada α=1 va $\lambda^2-7\lambda+6=0$ xarakteristik tenglamaning $\lambda_1=1$ va $\lambda_2=6$ ildizlarining birinchisiga teng. Shu sababli y^* xususiy yechimni

$$y^*=x(ax+b)\,e^x$$

ko‘rinishda izlaymiz. Undagi a va b sonlarni noma’lum koeffitsiyentlar usulida topamiz. Buning uchun y^* va uning

$$(y^*)'=[ax^2+(2a+b)x+b]e^x\ ,\ \ (y^*)''=[ax^2+(4a+b)x+2a+2b]e^x$$

hosilalarini berilgan tenglamaga qo‘yib,

$$(y^*)''-7(y^*)'+6y^*=[ax^2+(4a+b)x+2a+2b]e^x-7[ax^2+(2a+b)x+b]e^x+6x(ax+b)e^x=$$
$$=[-10ax+2a-5b]e^x=(x-2)\ e^x \Rightarrow\ -10ax+2a-5b=x-2$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Undan a va b quyidagi sistemadan aniqlanadi:

$$\begin{cases} -10a=1 \\ 2a-5b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1/10 \\ b=9/25 \end{cases}.$$

Shunday qilib, izlangan xususiy yechim

$$y^*=x(-\frac{1}{10}x+\frac{9}{25})e^x=\frac{x(18-5x)}{50}e^x$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

3-hol. α soni (17) xarakteristik tenglamaning o‘zaro teng bo‘lgan ildizlari bilan ustma-ust tushsin, ya’ni uning karrali ildizi bo‘lsin. Bu holda (1) differensial tenglamaning y^* xususiy yechimi

$$y^*=x^2\mathrm{Q_n}(x)e^{\alpha x}=x^2(q_nx^n+q_{n-1}x^{n-1}+\cdots+q_1x+q_0)\ e^{\alpha x}$$

ko‘rinishda izlanadi va undagi q_k (k=0,1,···, n) koeffitsiyentlar yana noma’lum koeffitsiyentlar usuli orqali aniqlanadi.

Endi (1) differensial tenglamaning o‘ng tomoni

$$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad (19)$$

ko‘rinishda bo‘lgan holni qisqacha ko‘rib o‘tamiz. Bu yerda $P_n(x)$ va $Q_m(x)$ mos ravishda qandaydir n va m- darajali ko‘phadlarni, α va β esa haqiqiy sonlarni ifodalaydi. Bunda ikki hol bo‘lishi mumkin.

I hol. $\alpha+i\beta$ kompleks son (17) xarakteristik tenglama ildizi emas. Bu holda (1) differensial tenglamaning y^* xususiy yechimi

$$y^*=V_r(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+U_r(x)e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad (20)$$

ko‘rinishda izlanadi. Bunda $V_r(x)$ va $U_r(x)$ qandaydir r-darajali [r=max(n,m)] ko‘phadlar bo‘lib, ularning koeffitsiyentlari yuqorida ko‘rsatilgan usulda topiladi.

II hol. $\alpha+i\beta$ kompleks son (17) xarakteristik tenglamaning ildizidir. Bu holda (1) differensial tenglamaning y^* xususiy yechimi

$$y^*=x[\mathrm{V_r}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+U_r(x)e^{\alpha x}\sin\beta x] \qquad (21)$$

ko‘rinishda izlanadi.

Shuni ta’kidlab o‘tish lozimki, agar (19) ifodada $P_n(x)$ va $Q_n(x)$ ko‘phadlardan biri aynan nolga teng , ya’ni

$$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ yoki } f(x)=Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

bo‘lganda ham y^* xususiy yechim I holda (20) va II holda (21) ko‘rinishda izlanadi.

Misol sifatida, $y''-3y'+2y=-4e^{2x}\sin3x$ differensial tenglamaning y^* xususiy yechimini topamiz. Bu yerda tenglamaning o‘ng tomoni

$$f(x)=P(x)e^{2x}\cos3x+Q(x)\ )e^{2x}\sin3x\ ,\ \ P(x)\equiv0\ ,\ \ Q(x)\equiv-4$$

ko‘rinishda bo‘lib, unda α=2, β=3 va $\alpha+i\beta$=2+3i kompleks son $\lambda^2-3\lambda+2=0$ xarakteristik tenglamaning λ_1=1 va λ_2=2 ildizlariga teng emas. Shu sababli y^* xususiy yechimni ham $f(x)$ kabi, ya’ni

$$y^*=e^{2x}(A\sin3x+B\cos3x)$$

ko‘rinishda deb olamiz. Bu yerda $P(x)$ va $Q(x)$ ko‘phadlar nolinchi darajali, ya’ni sonlardan iborat bo‘lgani uchun, $U(x)=A$ va $V(x)=B$ va deb olindi. Bu yerda

$$(y^*)'=[(3A+2B)\cos 3x+(2A-3B)\sin 3x]e^{2x} ,$$

$$(y^*)''=[(12A-5B)\cos 3x-(5A+12B)\sin x]e^{2x}$$

natijalar va berilgan tenglamadan foydalanib,

$$y''-3y'+2y=[(3A-9B)\cos 3x-(9A+3B)\sin 3x]e^{2x}=-4e^{2x}\sin 3x ,$$

$$(3A-9B)\cos 3x-(9A+3B)\sin 3x=-4\sin 3x$$

tenglikni hosil etamiz. Bu yerda $\sin 3x$ va $\cos 3x$ oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtirib,

$$\begin{cases} 9A+3B=4 \\ 3A-9B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2/5 \\ B=2/15 \end{cases}$$

natijani olamiz. Demak berilgan tenglama uchun

$$y^*=(\frac{2}{15}\cos 3x+\frac{2}{5}\sin 3x)e^{2x}=\frac{2}{15}(\cos 3x+3\sin 3x)e^{2x}$$

xususiy yechim bo‘ladi. Tegishli bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y}=C_1e^{x}+C_1e^{2x}$$

bo‘lgani uchun berilgan bir jinslimas differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y=\bar{y}+y^*=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+\frac{2}{15}(\cos 3x+3\sin 3x)e^{2x}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Differensial tenglamalarning amaliy tatbiqlarida (masalan, majburiy tebranishlarni o‘rganishda) o‘ng tomoni biz qarab chiqqan (19) funksiyaning xususiy holi bo‘lgan

$$y''+a_1y'+a_2y=M\cos\beta x+N\sin\beta x \qquad (22)$$

ko‘rinishdagi II tartibli bir jinslimas o‘zgarmas koeffitsiyentli differensial tenglamalar ko‘p uchraydi.

Bunday tenglamalarni integrallashda ham ikki hol bo‘ladi.

1) $i\beta$ soni (17) xarakteristik tenglamaning ildizi emas. Bu holda (22) tenglamaning xususiy yechimi

$$y^*=A\cos\beta x+B\sin\beta x$$

ko‘rinishda izlanadi.

Masalan, $y''+y'-2y=\cos x-3\sin x$ tenglamada $\beta=1$ bo‘lib, $i\beta=i$ soni $\lambda^2+\lambda-2=0$ xarakteristik tenglamaning $\lambda_1=-2$, $\lambda_1=1$ ildizlariga teng emas. Demak, xususiy yechimni $y^*=A\cos x+B\sin x$ ko‘rinishda izlanadi. Bu funksiyani berilgan tenglamaga qo‘yib, noma’lum koeffitsiyentlar usulida $A=0$, $B=1$ ekanligini topamiz.

Shu sababli bu tenglamaning xususiy yechimi $y^*=\sin x$, umumiy yechimi esa

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}+\sin x$$

bo‘ladi.

2) $i\beta$ soni (17) xarakteristik tenglamaning ildiziga teng. Bu holda (22) tenglamaning xususiy yechimi

$$y^*=x(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$$

ko‘rinishda izlanadi.

Masalan, $y''+4y=\cos 2x$ tenglamada $\beta=2$ va $i\beta=2i$ soni $\lambda^2+4=0$ xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘ladi. Shu sababli xususiy yechimni $y^*=x(A\cos 2x+B\sin 2x)$ ko‘rinishda izlab, noma’lum koeffitsiyentlar usulida $A=0$, $B=1/4$ ekanligini topamiz. Bundan $y^*=(x\sin 2x)/4$ berilgan tenglamaning xususiy yechimi, umumiy yechimi esa

$$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x$$

ekanligini ko‘ramiz.

4.5. II tartibli chiziqli differensial tenglamaning bir iqtisodiy tatbig‘i. Differensial tenglamalar iqtisodiy jarayonlarni nazariy o‘rganishda keng qo‘llaniladi. Oldin I tartibli differensial tenglamaning iqtisodiy tatbiqlariga doir masalalar ko‘rgan edik. Endi II tartibli bir jinslimas chiziqli differensial tenglama yordamida yechiladigan bir iqtisodiy masalani qaraymiz. Bu masalada mahsulotlar bozorida mahsulot narxi $p=p(t)$, unga talab va taklif funksiyalari $D(t)$ va $S(t)$ orasidagi (t-vaqt) munosabatlarni aniqlash talab etiladi. Bunda quyidagi shartlar bajariladi deb hisoblaymiz:

❖ Talab funksiyasi $D(t)$ narxning o‘zgarish sur’atiga, ya’ni narx funksiyasining II tartibli p'' hosilasiga to‘g‘ri proporsional bog‘langan. Ikkinchi tomondan $D(t)$ talab funksiyasi p narx va uning o‘zgarish tezligi p' bilan teskari proporsional bog‘langan bo‘ladi. Bu shartlarda $D(t)$ talab funksiyasi va narx funksiyasi $p=p(t)$ orasidagi bog‘lanish matematik ko‘rinishda quyidagicha ifodalanadi:

$$D(t) = a_1^2 p'' - b_1^2 p' - c_1^2 p + d \quad (d>0)\ . \qquad (23)$$

Bu yerda a_1^2, b_1^2, c_1^2, d -ma’lum bir musbat sonlardir.

❖ Taklif funksiyasi $S(t)$ ham narxning o‘zgarish sur’atiga to‘g‘ri proporsional bog‘langan bo‘lib, bu bog‘lanish talab funksiyasiga nisbatan kuchlidir. Bundan tashqari, talab funksiyasidan farqli ravishda, $S(t)$ taklif funksiyasi p narx va uning p' o‘zgarish tezligiga to‘g‘ri proporsional bog‘langan bo‘ladi. Shu sababli $S(t)$ taklif va $p=p(t)$ narx orasidagi bog‘lanishni

$$S(t) = a_2^2 p'' + b_2^2 p' + c_2^2 p + s \quad (a_2^2 > a_1^2\ ,\ s>0) \qquad (24)$$

ko‘rinishda deb olish mumkin. Bunda ham a_2^2, b_2^2, c_2^2, s -berilgan musbat sonlarni ifodalaydi.

Yuqoridagi shartlarda narxning vaqt o‘tishi bilan o‘zgarishini ifodalovchi $p=p(t)$ funksiyani topish talab etiladi. Buning uchun bozor muvozanatini ifodalovchi $D(t)=S(t)$ tenglikka murojaat etamiz. (23) va (24) munosabatlardan

$$a_1^2 p'' - b_1^2 p' - c_1^2 p + d = a_2^2 p'' + b_2^2 p' + c_2^2 p + s \Rightarrow$$

$$(a_2^2 - a_1^2) p'' + (b_2^2 + b_1^2) p' + (c_2^2 + c_1^2) p = s - d \qquad (25)$$

natijani olamiz. Bu izlanayotgan $p=p(t)$ narx funksiyasiga nisbatan II tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinslimas differensial tenglamadir. Bu tenglamaning umumiy yechimidagi C_1 va C_2 o‘zgarmaslarning qiymati $t=0$ vaqtda

$p=p(t)$ narx, $D=D(t)$ talab yoki $S=S(t)$ taklif funksiyalariga qo‘yiladigan boshlang‘ich shartlar orqali topiladi.

Masalan, talab va taklif funksiyalari

$$D(t)=4p''-3p'-3p+10\ ,\quad S(t)=5p''+p'+2p+4 \qquad (26)$$

ko‘rinishda bo‘lsin. Bu holda (25) tenglama

$$p''+4p'+5p=6 \qquad (27)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu tenglamani integrallash uchun dastlab unga mos keluvchi $p''+4p'+5p=0$ bir jinsli tenglamaning p_0 umumiy yechimini xarakteristik tenglama yordamida topamiz:

$$\lambda^2+4\lambda+5=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=-2\pm 3i \Rightarrow p_0=e^{-2t}(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)\ .$$

Bir jinslimas (27) tenglamaning xususiy yechimi sifatida o‘zgarmas $p^*=p_{st}$ statsionar narxni olamiz. Bunda $(p_{st})''=0$ va $(p_{st})'=0$ bo‘lgani uchun (27) tenglamadan $5p_{st}=6$ => $p_{st}=1.2$ ekanligini topamiz. Demak, $p^*=1.2$ va (27) tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$p(t)=p^*+p_0=1.2+e^{-2t}(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)\ . \qquad (28)$$

Narx o‘zgarishini ifodalovchi (28) formuladan t vaqt o‘tib borishi bilan, ya’ni $t\to\infty$ bo‘lganda, $p\to p_{st}$, ya’ni narx statsionar narxga yaqinlashib boradi.

Endi (28) umumiy yechimdan berilgan boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni topishga doir ikkita misol ko‘ramiz.

- **Koshi masalasi.** Bunda $t=0$ boshlang‘ich vaqtda narx p va uning o‘zgarish tezligi p' ma’lum deb olinadi. Masalan, $p(0)=3.2$ va $p'(0)=1.7$ bo‘lsin. Bu holda, (28) tenglikdan va

$$p'(t)=e^{-2t}[(3C_2-2C_1)\cos 3t-(2C_2+3C_1)\sin 3t] \qquad (29)$$

ekanligidan foydalanib, Koshi masalasining quyidagi yechimini olamiz:

$$\begin{cases} p(0)=1.2+C_1=3.2 \\ p'(0)=3C_2-2C_1=1.7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=2 \\ C_2=1.9 \end{cases} \Rightarrow p(t)=1.2+e^{-2t}(2\cos 3t+1.9\sin 3t)\,.$$

- **Aralash masala.** Bunda $t=0$ boshlang‘ich vaqtda narx p va taklif S yoki D ma’lum deb olamiz. Masalan, $p(0)=4.8$ va $S(0)=24$ bo‘lsin. Bu holda, (28) tenglikdan $p(0)=1.2+C_1=4.8$ => $C_1=3.6$ ekanligini topamiz. Ikkinchi C_2 noma’lumni topish uchun dastlab (29) va

$$p''(t)=e^{-2t}(13C_1\cos 3t-5(C_2-2C_1)\sin 3t]$$

tengliklardan

$$p'(0)=3C_2-2C_1=3C_2-7.2\ ,\ \ p''(0)=13C_1=46.8$$

ekanligini aniqlaymiz. Bu natijalarni $S(t)$ uchun (26) tenglikka qo‘yib va $S(0)=24$, $p(0)=4.8$ ekanligidan foydalanib,

$$S(0)=5p''(0)+p'(0)+2p(0)+4=234+3C_2-7.2+9.6=24 \Rightarrow C_2=-70.8$$

ekanligini topamiz. Demak, yuqoridagi shartlarda narx funksiyasi

$$p(t)=1.2+e^{-2t}(3.6\cos 3t-70.8\sin 3t)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

XULOSA

O‘ng tomoni aynan nolga teng bo‘lmagan II tartibli chiziqli differensial tenglamalar bir jinslimas deyiladi. Bu tenglamaning umumiy yechimi uning birorta xususiy yechimi bilan mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig‘indisiga teng bo‘ladi. Shu sababli bir jinslimas tenglamani umumiy integralini topish uchun uning biror xususiy yechimini aniqlash kifoyadir. Umumiy holda bu masala o‘zgarmaslarni variatsiyalash usulida hal etiladi. Bir jinslimas tenglamaning o‘ng tomoni ayrim xususiy hollarga ega bo‘lgan holda xususiy yechimlar ma’lum bir ko‘rinishda izlanadi va undagi parametrlar noma’lum koeffitsiyentlar usulida topiladi.

Bir jinslimas II tartibli chiziqli differensial tenglamalar mexanika, iqtisodiy nazariya, elektrotexnika, radiotexnika kabi juda ko‘p fanlarda keng qo‘llaniladi.

Tayanch iboralar

* II tartibli chiziqli bir jinslimas differensial tenglama * O‘zgarmaslarni variatsiyalash usuli * Qo‘shish teoremasi * Noma’lum koeffitsiyentlar usuli

Takrorlash uchun savollar

1. II tartibli bir jinslimas chiziqli differensial tenglama umumiy holda qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

2. II tartibli bir jinslimas chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimi qanday tuzilgan?

3. O‘zgarmaslarni variatsiyalash usuli nima maqsadda qo‘llaniladi?

4. O‘zgarmaslarni variatsiyalash usulining mohiyati nimadan iborat?

5. Qo‘shish teoremasi qanday mazmunga ega?

6. O‘ng tomoni qanday ko‘rinishda bo‘lgan differensial tenglamaning xususiy yechimi algebraik usulda topilishi mumkin?

7. Agar tenglamaning o‘ng tomoni $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$ ko‘rinishda bo‘lib, undagi α soni xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lmasa, xususiy yechim qanday ko‘rinishda izlanadi?

8. Oldingi savolda α soni xarakteristik tenglamaning oddiy ildizi bo‘lsa, xususiy yechim qanday ko‘rinishda izlanadi ? Karrali ildiz holdachi?

9. O‘ng tomoni $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ ko‘rinishdagi differensial tenglama xususiy yechimining ko‘rinishi nimaga bog‘liq bo‘ladi?

10. O‘ng tomoni $f(x)=M\cos\beta x+N\sin\beta x$ ko‘rinishda bo‘lgan II tartibli chiziqli differensial tenglama qanday integrallanadi?

11. II tartibli bir jinslimas chiziqli differensial tenglamani iqtisodiy nazariyada tatbiq etilishiga misol keltiring.

Testlardan namunalar

1. II tartibli chiziqli $y''+py'+qy=f(x)$ differensial tenglama qaysi shartda bir jinslimas deb ataladi?

A) $f(x)=0$; B) $f(x)\neq 0$; C) $f(x)>0$; D) $f(x)<0$; E) $f(x)\geq 0$.

2. II tartibli chiziqli $y''+py'+qy=f(x)$ differensial tenglama qaysi holda bir jinslimas bo‘lmaydi?

A) $f(x)=0$; B) $f(x)\neq 0$; C) $f(x)>0$; D) $f(x)<0$; E) $f(x)\geq 0$.

3. II tartibli bir jinslimas chiziqli $y''+py'+qy=f(x)$ differensial tenglamaning xususiy yechimi y^*, unga mos keluvchi bit jinsli tenglamaning umumiy yechimi y^0 bo‘lsa, bir jinslimas tenglamaning umumiy yechimi y qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

A) $y= y^*+ y^0$; B) $y= y^*/ y^0$; C) $y= y^*\cdot y^0$;
D) $y=y^0/ y^*$; E) $y= C_1y^*+ C_2 y^0$.

4. Agar II tartibli bir jinslimas chiziqli $y''+py'+qy=f(x)$ differensial tenglama mos keluvchi bir jinsli tenglamaning chiziqli erkli yechimlari y_1 va y_2 bo‘lsa, o‘zgarmaslarni variatsiyalash usulida bir jinslimas tenglamaning xususiy yechimi y^* qanday ko‘rinishda izlanadi?

A) $y=C_1(x)\,y_1\cdot C_2(x)\,y_2$; B) $y=C_1(x)\,y_1+ C_2(x)\,y_2$; C) $y=C_1(x)\,y_1/ C_2(x)\,y_2$;
D) $y=[C_1(x)+C_2(x)](y_1+y_2)$; E) $y=[C_1(x)–C_2(x)](y_1–y_2)$.

5. O‘zgarmaslarni variatsiyalash usulida $y''–4y'+3y=x\sin2x$ II tartibli chiziqli differensial tenglamaning xususiy yechimi y^* qanday ko‘rinishda izlanadi?

A) $y^*=C_1(x)e^{2x}+C_2(x)e^{–2x}$; B) $y^*=C_1(x)e^{x}+C_2(x)e^{–2x}$;
C) $y^*=C_1(x)e^{x}+C_2(x)e^{3x}$; D) $y^*=C_1(x)\sin2x+C_2(x)\cos2x$;
E) $y^*=C_1(x)e^{x}\sin2x+C_2(x)e^{3x}\cos2x$.

6. $y''–5y'+4y=xe^x$ differensial tenglamaning y^* xususiy yechimining ko‘rinishi qayerda to‘g‘ri ifodalangan?

A) $y^*=Axe^x$; B) $y^*=Ax^2e^x$; C) $y^*=(Ax+B)e^x$; D) $y^*=x(Ax+B)e^x$;
E) to‘g‘ri javob keltirilmagan.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. II tartibli bir jinslimas chiziqli $y''+(n+1)y'+ny=xe^{nx}$ differensial tenglamaning xususiy yechimini o‘zgarmaslarni variatsiyalash usulida toping va uning umumiy yechimini yozing.

2. II tartibli bir jinslimas chiziqli $y''+(n–1)y'–ny=x^2e^{nx}$ differensial tenglamaning xususiy yechimini noma’lum koeffitsiyentlar usulida toping va bu tenglamaning $y(0)=n$, $y'(0)=n+1$ boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini aniqlang .

XI BOB. QATORLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI

XVII asr matematiklarining ishlarida cheksiz
qatorlar nazariyasi rivojlantirilgan bo‘lsa,
XVIII asr matematiklari, ayniqsa Eyler
ishlarida qatorlar matematik tahlilning
eng kuchli va keng qirrali quroliga aylandi.
A.N. Kolmogorov

§1. SONLI QATORLAR VA ULARNING YAQINLASHUVI

- ***Sonli qatorlar va umumiy tushunchalar.***
- ***Sonli qator xossalari.***
- ***Sonli qator yaqinlashuvining zaruriy sharti.***

1.1. Sonli qatorlar va umumiy tushunchalar. Dastlab sonli qator tushunchasini kiritamiz.

1-TA’RIF: Agar $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ cheksiz sonli ketma – ketlik berilgan bo‘lsa, unda

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots\equiv\sum_{k=1}^{\infty}u_k \qquad (1)$$

ifoda ***sonli qator*** deyiladi. Bunda $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ – ***sonli qator hadlari***, u_n esa uning ***umumiy hadi*** deyiladi.

Bunda har qanday natural n soni uchun (1) sonli qatorning u_n umumiy hadi ma’lum deb hisoblanadi. Masalan, umumiy hadi

$$u_n=(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}, \quad n=1,2,3,\cdots$$

formula bilan ifodalangan sonli qator

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}-\frac{4}{2^4}+\cdots$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

2-TA’RIF: **Berilgan (1) sonli qatorning dastlabki *n* ta hadidan tuzilgan**

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n=\sum_{k=1}^{n}u_k, \quad n=1,2,3,\cdots, \qquad (2)$$

yig‘indi bu qatorning ***n – xususiy yig‘indisi*** deb ataladi.

(1) sonli qatorning n –xususiy yig‘indilari S_n (n=1,2,3, ⋯)

$$S_1=u_1,\ S_2=u_1+u_2,\ S_3=u_1+u_2+u_3,\cdots,\ S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n,\cdots$$

sonli ketma – ketlikni tashkil etadi va shu sababli uning limitini qarash mumkin.

3-TA’RIF: Agar S_n (n=1,2,3, ⋯) xususiy yig‘indilar ketma – ketligi chekli limitga ega va $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, $|S|<\infty$, bo‘lsa, unda (1) sonli qator ***yaqinlashuvchi***, S esa uning ***yig‘indisi*** deb aytiladi. Agar $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\pm\infty$ yoki mavjud bo‘lmasa, (1) sonli qator ***uzoqlashuvchi*** deyiladi.

(1) sonli qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi S ekanligi

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots\equiv\sum_{k=1}^{\infty}u_k=S$$

ko‘rinishda ifodalanadi.

Sonli qatorlarga doir asosiy masala uning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini tekshirishdan iborat bo‘ladi.

Misol sifatida

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} \qquad (3)$$

sonli qatorni tekshiramiz. Bu qatorning n-xususiy yig‘indisini qaraymiz:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=$$

$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}\ .$$

Bu yerdan

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1=S$$

natijani olamiz. Demak, berilgan (3) sonli qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi S=1 ekan.

Yana bir umumiyroq misol sifatida ushbu

$$b+bq+bq^2+\cdots+bq^{n-1}+\ldots \qquad (4)$$

sonli qatorni tekshiramiz. Bunda b va q parametrlar noldan farqli ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar juftligini ifodalaydi. Bu sonli qator birinchi hadi b va maxraji q bo‘lgan geometrik progressiya hadlaridan tuzilgan. Geometrik progressiyaning dastlabki n ta hadining yig‘indisi formulasidan foydalanib, $q\neq 1$ holda berilgan (4) sonli qatorning S_n xususiy yig‘indilarini

$$S_n=\frac{b-bq^n}{1-q}=\frac{b}{1-q}(1-q^n)$$

ko‘rinishda ifodalaymiz.

1) Agar $|q|<1$ bo‘lsa, unda

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{1-q}(1-q^n)=\frac{b}{1-q}\lim_{n\to\infty}(1-q^n)=\frac{b}{1-q}=S\ .$$

Demak, $|q|<1$ holda berilgan (4) sonli qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi $S=b/(1-q)$ bo‘ladi.

2) Agar $q>1$ bo‘lsa, unda

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{1-q}(1-q^n)=\frac{b}{q-1}\lim_{n\to\infty}(q^n-1)=+\infty,$$

$q<-1$ bo‘lganda esa $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ mavjud emas. Demak, $|q|>1$ holda (4) sonli qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Endi q=1 bo‘lgan holni qaraymiz. Bunda (4) sonli qator

$$b+b+\cdots+b+\cdots$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu holda $S_n=nb$, $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} nb = \infty$ ekanligidan (4) sonli qatorning uzoqlashuvchiligi kelib chiqadi.

Va nihoyat oxirgi $q=-1$ holni qaraymiz. Bu holda (4) sonli qator

$$b-b+b-b\cdot\cdot\cdot+(-1)^{n+1}b+\cdot\cdot\cdot$$

ko‘rinishda bo‘lib, uning $n-$xususiy yig‘indisi quyidagicha aniqlanadi:

$$S_n = \begin{cases} b\,, & \text{agar } n \text{ toq son bo'lsa;} \\ 0\,, & \text{agar } n \text{ juft son bo'lsa.} \end{cases}$$

Bu yerdan ko‘rinadiki

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} b = b\,, \quad \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0\,.$$

Demak, $q=-1$ holda $\lim_{n\to\infty} S_n$ mavjud emas va shu sababli bu holda ham (4) sonli qator uzoqlashuvchidir.

Shunday qilib, (4) sonli qator $|q|<1$ holda yaqinlashuvchi, $|q|\geq 1$ holda esa uzoqlashuvchi bo‘ladi.

1.2. Sonli qator xossalari. Endi sonli qatorlarning ayrim xossalarini ko‘rib chiqamiz.

1-TEOREMA: Agar berilgan (1) sonli qatorning chekli sondagi hadlarini tashlab yuborish bilan hosil qilingan sonli qator yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo‘lsa, unda (1) sonli qatorning o‘zi ham yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo‘ladi. Aksincha, agar berilgan sonli qator yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo‘lsa, uning bir nechta hadlarini tashlash bilan hosil qilingan sonli qator ham yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo‘ladi.

Isbot: Berilgan (1) sonli qatorning tashlab yuborilgan hadlari

$$u_{k_1}, u_{k_2}, \cdots, u_{k_m} \quad va \quad S(m) = u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_m}$$

bo‘lsin. Bu holda $n>k_m$ bo‘lganda (1) sonli qatorning n-xususiy yig‘indisini

$$S_n= S_n(m)+S(m) \qquad (5)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bu yerda $S_n(m)=S_n-S(m)$ bo‘lib, u (1) sonli qatorning yuqorida ko‘rsatilgan m hadini tashlab yuborishdan hosil bo‘lgan sonli qatorning xususiy yig‘indisini ifodalaydi. (5) tenglik va limit xossasiga asosan S_n va $S_n(m)$ xususiy yig‘indilar limiti bir-biridan o‘zgarmas $S(m)$ soniga farq qiladi. Demak, S_n va $S_n(m)$ xususiy yig‘indilarning limitlari bir paytda yoki chekli (bunda ikkala qator yaqinlashuvchi), yoki cheksiz yoki mavjud emas (bunda ikkala qator uzoqlashuvchi) bo‘ladi. Teorema isbot bo‘ldi.

Bu teoremadan sonli qatorning chekli sondagi hadlarini tashlab yuborish yoki unga chekli sondagi yangi hadlarni birlashtirish uning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchiligiga ta’sir etmasligi kelib chiqadi.

2-TEOREMA: Agar (1) sonli qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi S bo‘lsa, unda bu qatorning barcha hadlarini biror C o‘zgarmas songa ko‘paytirishdan hosil qilingan

$$Cu_1+ Cu_2+\cdot\cdot\cdot+ Cu_n+\cdot\cdot\cdot=\sum_{k=1}^{\infty} Cu_k \qquad (6)$$

sonli qator ham yaqinlashi va uning yig‘indisi $C\cdot S$ bo‘ladi.

Isbot: Agar (1) sonli qatorning n- xususiy yig‘indisi S_n bo‘lsa, (6) sonli qatorning n- xususiy yig‘indisi $C\cdot S_n$ bo‘ladi. Bu yerdan, limit xossasiga asosan,

$$\lim_{n\to\infty}(C\cdot S_n)=C\lim_{n\to\infty}S_n=C\cdot S$$

ekanligi kelib chiqadi.

Demak, yaqinlashuvchi sonli qator uchun C o‘zgarmas ko‘paytuvchini qator belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

4-TA’RIF: Berilgan $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ va $\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k$ sonli qatorlarning algebraik yig‘indisi deb ularning mos hadlarining algebraik yig‘indilaridan hosil etilgan sonli qatorga aytiladi.

Demak, ta’rifga asosan

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k\pm\sum_{k=1}^{\infty}v_k\equiv\sum_{k=1}^{\infty}(u_k\pm v_k)\ .$$

3-TEOREMA: Agar $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ (7) va $\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k$ (8) sonli qatorlar yaqinlashuvchi va yig‘indilari mos ravishda $S(u)$ va $S(v)$ bo‘lsa, u holda ularning algebraik yig‘indisi bo‘lmish $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_k\pm v_k)$ (9) sonli qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi va uning yig‘indisi $S(u\pm v)=S(u)\pm S(v)$ tenglikdan topilishi mumkin.

Isbot: $S_n(u)$, $S_n(v)$ va $S_n(u\pm v)$ orqali mos ravishda (7), (8) va (9) sonli qatorlarning n- xususiy yig‘indilarini belgilaymiz . Unda $S_n(u\pm v)= S_n(u)\pm S_n(v)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerdan, limit xossasi va sonli qator yig‘indisi ta’rifiga asosan, teorema tasdig‘idagi tenglikka ega bo‘lamiz:

$$\lim_{n\to\infty}S_n(u\pm v)=\lim_{n\to\infty}[S_n(u)\pm S_n(v)]=\lim_{n\to\infty}S_n(u)\pm\lim_{n\to\infty}S_n(v)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow S(u\pm v)=S(u)\pm S(v)\,.$$

Shuni ta’kidlab o‘tish lozimki, bu teorema tasdig‘iga teskari tasdiq har doim ham o‘rinli bo‘lmaydi. Masalan, (7) qatorda $u_n=1+0.5^n$ va (8) qatorda $v_n=1-0.5^n$ deb olamiz. Bunda hadlari $u_n-v_n=2\cdot 0.5^n$ bo‘lgan (9) qator yaqinlashuvchi va yig‘indisi $S(u-v)=2$, chunki uning hadlari maxraji $q=0.5$ va birinchi hadi $b=1$ bo‘lgan geometrik progressiyani tashkil etadi (yuqoridagi (4) misolga qarang). Ammo biz ko‘rayotgan holda (7) va (8) qatorlarning ikkalasi ham uzoqlashuvchi bo‘ladi. Haqiqatan ham bu holda

$$S_n(u)=\sum_{k=1}^{n}(1+0.5^k)=n+1-0.5^n\Rightarrow S(u)=\lim_{n\to\infty}S_n(u)=\lim_{n\to\infty}(n+1-0.5^n)=\infty\,,$$

$$S_n(v)=\sum_{k=1}^{n}(1-0.5^k)=n-1+0.5^n\Rightarrow S(v)=\lim_{n\to\infty}S_n(v)=\lim_{n\to\infty}(n-1+0.5^n)=\infty\,.$$

1.3. Sonli qator yaqinlashuvining zaruriy sharti. Endi berilgan sonli qatorning yaqinlashuvi va uzoqlashuvini aniqlashga imkon beradigan shartlarni ko‘rishga o‘tamiz.

4-TEOREMA: Agar (1) sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, unda uning umumiy hadi u_n uchun

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \qquad (10)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: (1) sonli qatorning yig‘indisi S bo‘lsin. Bu holda $u_n=S_n-S_{n-1}$ ekanligidan foydalanib, (10) tenglikni quyidagicha hosil qilamiz:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0\,.$$

Shunday qilib, sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun uning umumiy hadi albatta (10) shartni qanoatlantirishi lozim, ya’ni (10) ***qator yaqinlashuvining zaruriy shartini*** ifodalaydi. Bu shart bajarilmasa, sonli qator albatta uzoqlashuvchi bo‘ladi. Masalan, yuqorida ko‘rilgan qatorlarda $u_n=1+0.5^n$, $v_n=1–0.5^n$ va

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(1+0.5^n) = 1 \neq 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty}(1-0.5^n) = 1 \neq 0$$

bo‘lgani uchun bu qatorlar uzoqlashuvchi ekanligiga yana bir marta ishonch hosil qilamiz.

Ammo (10) shart sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun yetarli emas. Masalan, ***garmonik qator*** deb ataluvchi ushbu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \qquad (11)$$

sonli qatorning umumiy hadi $u_n=1/n$ bo‘lib, (10) shartni qanoatlantiradi. Ammo garmonik qator uzoqlashuvchi bo‘ladi. Buni teskarisini faraz qilish orqali isbotlaymiz. (11) sonli qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi S deb olamiz va S_n hamda S_{2n} xususiy yig‘indilarni qaraymiz. Unda bir tomondan sonli qator yig‘indisi ta’rifi va farazimizga asosan

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = S - S = 0 \qquad (12)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Ikkinchi tomondan esa

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

va, limit xossasiga asosan,

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) \geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0 \qquad (13)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. (12) va (13) bir-biriga qarama-qarshi tasdiqlarni ifodalaydi. Demak, (11) garmonik qator yaqinlashuvchi degan farazimiz noto‘g‘ri va bu qator uzoqlashuvchi ekan.

Shunday qilib, berilgan sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lishining yetarli shartini topish masalasi paydo bo‘ldi. Bu masala bilan keyingi paragraflarda shug‘ullanamiz.

XULOSA

Sonli ketma-ketlik hadlarini birin-ketin qo‘shib borishdan hosil bo‘ladigan yig‘indilarning limiti sonli qator bo‘ladi. Bu limit chekli sondan iborat bo‘lsa qator yaqinlashuvchi va limit qiymati uning yig‘indisi deyiladi. Aks holda bu qator uzoqlashuvchi deyiladi. Sonli qatorlarning chekli sondagi hadlarini tashlab yuborilganda uning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligi oʻzgarmay qoladi. Yaqinlashuvchi sonli qatorlarni oʻzgarmas songa koʻpaytirish yoki qoʻshish natijasida yana yaqinlashuvchi qator hosil boʻladi. Sonli qator yaqinlashuvining zaruriy sharti–uning umumiy hadining limiti nol boʻlishidan iboratdir. Ammo garmonik qator misolida bu shart qator yaqinlashuvi uchun yetarli emasligi koʻrinadi.

Tayanch iboralar

* Sonli qator * Sonli qator hadlari * *n*-xususiy yigʻindi * Yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) sonli qator * Sonli qator yigʻindisi * Qator yaqinlashuvining zaruriy sharti * Garmonik qator

Takrorlash uchun savollar

22.**Sonli qator deyilganda nima tushuniladi?**
23.**Sonli qator hadlari nima?**
24.**Sonli qatorning umumiy hadi deb nimaga aytiladi?**
25.**Sonli qatorning *n*-xususiy yigʻindisi qanday aniqlanadi?**
26.**Qachon sonli qator yaqinlashuvchi deyiladi?**
27.**Yaqinlashuvchi sonli qator yigʻindisi qanday aniqlanadi?**
28.**Qachon sonli qator uzoqlashuvchi deyiladi?**
29.**Sonli qatorlarning algebraik yigʻindisi qanday aniqlanadi?**
30.**Yaqinlashuvchi sonli qatorlarning algebraik yigʻindisi haqida nima deyish mumkin?**
31. **Sonli qator yaqinlashuvining zaruriy sharti nimadan iborat?**
32. **Garmonik qator qanday koʻrinishda boʻladi?**
33. **Garmonik qator qanday xususiyatga ega?**

Testlardan namunalar

1. Ushbu ifodalardan qaysi biri sonli qator boʻladi?
   A) $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \cdots \cdot u_n \cdot \cdots$; B) $u_1 : u_2 : u_3 : \cdots : u_n : \cdots$;
   C) $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$; D) $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$;
   E) keltirilgan barcha ifodalar sonli qator boʻladi.
2. Quyidagilardan qaysi biri $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ sonli qator uchun xususiy yigʻindi boʻladi?
   A) u_1; B) $u_1 + u_2$; C) $u_1 + u_2 + u_3 + u_3$; D) $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$;
   E) keltirilgan barcha ifodalar sonli qator uchun xususiy yigʻindi boʻladi.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ sonli qator uchun S_{10} xususiy yigʻindining qiymatini toping.

A) $\frac{1}{10}$; B) $\frac{1}{110}$; C) $\frac{10}{11}$; D) 1; E) $\frac{11}{12}$.

4. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\cdots$ sonli qatorning u_n umumiy hadini ko‘rsating.

A) $u_n=\frac{n+1}{n}$; B) $u_n=\frac{n-1}{n}$; C) $u_n=\frac{n}{n+1}$; D) $u_n=\frac{n}{n-1}$; E) $u_n=\frac{n-1}{n+1}$.

5. Umumiy hadi $u_n=1+\frac{1}{n}$ bo‘lgan sonli qatorni toping .

A) $1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots$; B) $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$; C) $\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\cdots$;

D) $1-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\cdots$; E) $\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\cdots$.

6. n-xususiy yig‘indisi S_n bo‘lgan sonli qator qaysi shartda yaqinlashuvchi deyiladi ?

A) $\lim_{n\to\infty} S_n \le C<\infty$; B) $\lim_{n\to\infty} S_n \ge C>-\infty$; C) $\lim_{n\to\infty} S_n = C, |C|<\infty$;

D) $\lim_{n\to\infty} S_n=\pm\infty$; E) $\lim_{n\to\infty} S_n$ mavjud emas.

7. n-xususiy yig‘indisi S_n bo‘lgan sonli qator qaysi shartda uzoqlashuvchi deyiladi ?

A) $\lim_{n\to\infty} S_n=-\infty$; B) $\lim_{n\to\infty} S_n=+\infty$; C) $\lim_{n\to\infty} S_n=\pm\infty$;

D) $\lim_{n\to\infty} S_n$ mavjud emas. E) ko‘rsatilgan barcha hollarda.

8. Quyidagilarning qaysi biri uchun sonli qator yaqinlashuvining zaruriy sharti bajarilmaydi ?

A) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k}$; B) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k}{k}$; C) $\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{1}{k}$; D) $\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{1}{k}$;

E) barcha qatorlar uchun qator yaqinlashuvining zaruriy sharti bajariladi.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Umumiy hadi $u_i=\frac{1}{(i+n)(i+n+1)}$, $i=1,2,3,\cdots$ bo‘lgan sonli qatorni yozing va uning yig‘indisini toping.

2. $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^i$ sonli qatorni yaqinlashuvchi ekanligini ko‘rsating va yig‘indisini toping

§2. MUSBAT HADLI SONLI QATORLAR VA ULARNING YAQINLASHISH ALOMATLARI

- ***Sonli qator yaqinlashuvining taqqoslash alomatlari.***
- ***Dalamber alomati.***
- ***Koshi alomati.***
- ***Integral alomati.***
- ***Umumlashgan garmonik qatorlar.***

2.1. Sonli qator yaqinlashuvining taqqoslash alomatlari. Oldingi paragrafda har qanday sonli qator yaqinlashuvining zaruriy sharti topilib, u yetarli shart bo‘la olmasligi ko‘rsatilgan edi. Bu yerda musbat hadli sonli qatorlar uchun ularning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini ifodalovchi yetarli shartlarni topish masalasi bilan shug‘ullanamiz.

1-TA’RIF: Agar $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ sonli qatorning barcha hadlari musbat ($u_n>0$, $n=1,2,3,\cdots$) bo‘lsa, u ***musbat hadli sonli qator*** deb ataladi.

Masalan, umumiy hadlari

$$u_n = \frac{1}{n}, \quad u_n = \frac{n}{a^n}\ (a>0), \quad u_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad u_n = \sin^{2n}\frac{1}{n}$$

ko‘rinishda bo‘lgan sonli qatorlar musbat hadlidir.

***1-TEOREMA (Taqqoslash alomati)*:** Berilgan $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ (1) va $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ (2) musbat hadli sonli qatorlar bo‘lib, ularning hadlari $u_n \le v_n$ ($n=1,2,3,\cdots$) shartni qanoatlantirsin. Bu holda quyidagi tasdiqlar o‘rinli :

I. Agar (2) sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, unda (1) sonli qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi. Bundan tashqari (1) va (2) sonli qatorlarning yig‘indisi mos ravishda $S(u)$ va $S(v)$ bo‘lsa, unda $S(u) \le S(v)$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi ;

II. Agar (1) sonli qator uzoqlashuvchi bo‘lsa, unda (2) sonli qator ham uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Isbot: I. (1) va (2) sonli qatorlarning n- xususiy yig‘indisini mos ravishda $S_n(u)$ va $S_n(v)$ deb belgilaymiz. Musbat hadli sonli qatorlarning n-xususiy yig‘indilari S_n ($n=1,2,3,\cdots$) monoton o‘suvchi ketma-ketlikni tashkil etadi. Haqiqatan ham, $u_{n+1}>0$ bo‘lgani uchun $S_{n+1}= S_n+ u_{n+1}> S_n$. Shu sababli musbat hadli sonli qator yaqinlashuvchi ekanligini ko‘rsatish uchun uning S_n ($n=1,2,3,\cdots$) xususiy yig‘indilari ketma-ketligi yuqoridan chegaralangan bo‘lishini ko‘rsatish kifoya, chunki bu holda (VI bob, §2, 2-teoremaga qarang) $\lim_{n\to\infty} S_n$ limit mavjud va chekli bo‘ladi. Bizning holda, teorema shartiga asosan, $\lim_{n\to\infty} S_n(v) = S(v)$ mavjud bo‘lgani uchun $S_n(v)$ ($n=1,2,3,\cdots$) yuqoridan chegaralangan. Unda , $S_n(u) \le S_n(v)$ bo‘lgani uchun, $S_n(u)$ ($n=1,2,3,\cdots$) monoton o‘suvchi sonli ketma-ketlik ham yuqoridan chegaralangan va shu sababli $\lim_{n\to\infty} S_n(u) = S(u)$ mavjuddir. Bundan tashqari ushbu tengsizlik ham o‘rinli bo‘ladi:

$$S_n(u) \le S_n(v) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n(u) \le \lim_{n\to\infty} S_n(v) \Rightarrow S(u) \le S(v).$$

II. $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ (2) sonli qator yaqinlashuvchi deb faraz qilamiz. Bu holda, teoremaning I qismiga asosan, (1) sonli qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi. Bu esa teorema shartiga zid. Demak, farazimiz noto‘g‘ri va (2) qator uzoqlashuvchidir.
Teorema to‘liq isbotlandi.

Misol sifatida umumiy hadi $u_n=1/(n+3^n)$ bo‘lgan musbat hadli sonli qatorni qaraymiz. Bunda

$$u_n = \frac{1}{n+3^n} < \frac{1}{3^n} = (\frac{1}{3})^n = v_n\ ,\ \sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{k=1}^{\infty}(1/3)^n = 1/2$$

bo‘lgani uchun berilgan sonli qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi 1/2 sonidan katta bo‘lmaydi.

Izoh: Oldingi paragrafdagi 1-teoremaga asosan qatorni chekli sondagi hadlarini tashlab yuborish uning yaqinlashuvchiligiga ta’sir etmaydi. Shu sababli (1) qator yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun taqqoslash alomatidagi $u_n \le v_n$ tengsizlik barcha $n=1,2,3,\cdots$ uchun bajarilishi shart bo‘lmasdan, biror N sonidan boshlab, ya’ni $n \ge N$ bo‘lganda bajarilishi kifoyadir. Ammo bunda $S(u) \le S(v)$ tengsizlik bajarilmasligi mumkin.

Masalan,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-7}{k^2-4k+5}$$

sonli qatorni qaraymiz. Uning umumiy hadi

$$u_n = \frac{2n-7}{n^2-4n+5} = \frac{2(n-4)+1}{(n-2)^2+1}$$

$n \ge 4$ bo‘lganda musbat bo‘ladi va shu sababli bu qatorning dastlabki uchta hadini tashlab yuborib, musbat hadli sonli qatorga ega bo‘lamiz. Bundan tashqari $n>10$ bo‘lganda $u_n > 2/n = v_n$ bo‘ladi. Haqiqatan ham, $n>4$ deb olsak, unda

$$u_n > \frac{2}{n} \Leftrightarrow \frac{2n-7}{n^2-4n+5} > \frac{2}{n} \Leftrightarrow 2n^2-7n > 2n^2-8n+10 \Leftrightarrow n > 10.$$

Bunda $v_n=2/n$ garmonik qatorni ikkiga ko‘paytirishdan hosil bo‘lgan uzoqlashuvchi qatorning umumiy hadini ifodalaydi. Demak, taqqoslash alomatining II qismiga asosan, qaralayotgan qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

***2-TEOREMA* (Limitik taqqoslash alomati):** Agar $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ (1) va $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ (2) musbat hadli sonli qatorlar bo‘lib, ularning umumiy hadlarining nisbati chekli $\lim_{n\to\infty}(u_n / v_n) = A$ limitga ega bo‘lsa, unda (1) va (2) sonli qatorlar bir paytda yoki yaqinlashuvchi, yoki uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Isbot: Sonli ketma-ketlik limiti ta'rifiga asosan (VII bob, §2, 4-ta'rifga qarang) har qanday ε>0 soni uchun (biz ε<*A* deb olamiz) shunday *N* soni topiladiki, barcha *n>N* uchun

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - A\right| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \frac{u_n}{v_n} - A < \varepsilon \Rightarrow (A-\varepsilon)v_n < u_n < (A+\varepsilon)v_n \ .$$

Bu yerdan ko'rinadiki, agar (2) sonli qator yaqinlashuvchi, ya'ni $\sum_{k=1}^{\infty} v_k < \infty$ bo'lsa, unda, taqqoslash teoremasi va yuqoridagi izohga asosan,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}(A+\varepsilon)v_k < \infty \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty,$$

ya'ni (1) sonli qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Xuddi shunday, agar (1) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, unda

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}(A-\varepsilon)v_k < \infty \Rightarrow \sum_{k=N+1}^{\infty} v_k < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} v_k < \infty \quad ,$$

ya'ni (2) sonli qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Teoremadagi (1) va (2) sonli qatorlardan birining uzoqlashuvchi ekanligidan ikkinchisining uzoqlashuvchi ekanligini kelib chiqishi haqidagi tasdiq ham xuddi shunday tarzda isbotlanadi va o'quvchiga mustaqil ish sifatida havola qilinadi.

Masalan,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2+1)3^k} \ \ (u_n = \frac{n^2}{(n^2+1)3^n}) \quad \text{va} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \ \ (v_n = \frac{1}{3^n})$$

sonli qatorlarni qaraymiz. Ularning ikkinchisi maxraji 1/3=*q*<1 bo'lgan geometrik progressiya hadlaridan tuzilganligi uchun yaqinlashuvchi qator bo'ladi. Ammo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \neq 0$$

bo'lgani uchun, limitik taqqoslash alomatiga asosan, bu qatorlarning birinchisi ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Taqqoslash alomatlarida berilgan musbat hadli $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ (1) sonli qatorning yaqinlashuvchi ekanligini tekshirish maqsadida hadlari $u_n \leq v_n$ ($n \geq N$) tengsizlikni qanoatlantiradigan boshqa bir musbat hadli $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ (2) sonli qator qaraladi. Bunda (2) qator (1) qator uchun ***majoranta qator*** deb ataladi.

2.2. Dalamber alomati. Yuqorida ko'rilgan taqqoslash alomatlaridan foydalanish uchun majoranta qatorni topishga to'g'ri keladi va bu masala har doim ham osonlik bilan yechilmaydi. Shu sababli ko'p hollarda berilgan $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ sonli qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini uning u_n (n=1,2,3, ···) hadlari orqali aniqlashga imkon beradigan alomatlardan foydalanishga to'g'ri keladi. Bunday alomatlardan biri farang matematigi J.Dalamber (1717-1783y.) tomonidan topilgan.

<u>3-TEOREMA</u> **(*Dalamber alomati*):** Berilgan $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ musbat hadli sonli qator uchun

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=d \qquad (3)$$

limit mavjud bo‘lsin. Bu holda $d<1$ bo‘lganda qator yaqinlashuvchi, $d>1$ bo‘lganda esa uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Isbot: Dastlab $d<1$ holni ko‘ramiz. Teoremadagi (3) shart va sonli ketma-ketlik limiti ta’rifiga asosan har qanday $\varepsilon>0$ soni uchun (biz $q=\varepsilon+d<1$ deb olamiz) shunday N soni topiladiki, barcha $n\geq N$ uchun

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-d\right|<\varepsilon\Rightarrow-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}-d<\varepsilon\Rightarrow d-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<\varepsilon+d\Rightarrow u_{n+1}<u_nq \qquad (4)$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. Oxirgi tengsizlikdan foydalanib, quyidagi tengsizliklarga ega bo‘lamiz:

$$u_{N+1}<u_Nq\,,\quad u_{N+2}<u_{N+1}q<u_Nq^2\,,$$
$$u_{N+3}<u_{N+2}q<u_Nq^3\,,\cdots,u_{N+m}<u_{N+m-1}q<u_Nq^m\,,\cdots\,.$$

Bu yerdan ko‘rinadiki $\sum_{k=N}^{\infty} u_k$ sonli qator uchun

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_Nq^k = u_N\sum_{k=1}^{\infty} q^k$$

sonli qator majoranta bo‘ladi. Bu majoranta qatorda $q<1$ bo‘lgani uchun u yaqinlashuvchi bo‘ladi. Unda, taqqoslash alomatiga ko‘ra, $\sum_{k=N}^{\infty} u_k$ qator yaqinlashuvchi ekanligini ko‘ramiz. Bu qatorga chekli sondagi u_1, u_2, $\cdots$, u_{N-1} hadlarni qo‘shish orqali berilgan $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ sonli qator yaqinlashuvchi ekanligini ko‘ramiz.

Endi $d>1$ holni qaraymiz. Bu holda $\varepsilon>0$ sonini shunday tanlaymizki, $d-\varepsilon>1$ bo‘lsin. Bu holda, yuqoridagi (4) tengsizlikka asosan, barcha $n\geq N$ uchun

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>d-\varepsilon>1\Rightarrow u_{n+1}>u_n$$

natijani olamiz. Bu yerdan ko‘rinadiki, barcha $n\geq N$ uchun qator hadlari u_n o‘suvchi va shu sababli $\lim_{n\to\infty} u_n\neq 0$ bo‘ladi. Demak, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ sonli qator uzoqlashuvchi, chunki uning uchun qator yaqinlashuvining zaruriy sharti $\lim_{n\to\infty} u_n=0$ bajarilmaydi.

Izohlar: 1. Agar $d=1$ bo‘lsa, qator yaqinlashuvchi ham, uzoqlashuvchi ham bo‘lishi mumkin va shu sababli bu holda boshqa alomatlardan foydalanishga to‘g‘ri keladi.

2. Agar $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$ bo‘lsa , qator uzoqlashuvchi bo‘ladi .

Misol sifatida

$$1)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^3}{3^k}\ , \qquad 2)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{3^k}\ , \qquad 3)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\ , \qquad 4)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$$

musbat hadli sonli qatorlarni Dalamber alomati yordamida tekshiramiz.

$$1)\ u_{n+1}=\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}, u_n=\frac{n^3}{3^n}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3 3^n}{n^3 3^{n+1}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^3=\frac{1}{3}.$$

Demak, bu qator uchun 1/3= d <1 va shu sababli qator yaqinlashuvchidir.

$$2)\quad u_{n+1}=\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}, u_n=\frac{n!}{3^n}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n(n+1)!}{3^{n+1}n!}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} n=\infty\ .$$

Demak, bu qator uzoqlashuvchi ekan.

$$3)\quad u_{n+1}=\frac{1}{n+1}, u_n=\frac{1}{n}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\ .$$

Bu yerda d=1 bo‘lgani uchun Dalamber alomati orqali bu qator yaqinlashuvi yoki uzoqlashuvi haqida xulosa chiqarib bo‘lmaydi. Ammo bu garmonik qator bo‘lgani uchun u uzoqlashuvchi bo‘ladi.

$$4)\quad u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}, u_n=\frac{1}{n(n+1)}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1\ .$$

Bu yerda ham d=1 bo‘lgani uchun Dalamber alomati yordamida bu qator haqida xulosa chiqarib bo‘lmaydi. Ammo oldin (§1, (3) misolga qarang) bu qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi S=1 ekanligi ko‘rsatilgan edi.

2.3. Koshi alomati. Musbat hadli sonli qatorlarning yaqinlashuvini aniqlashga yordam beradigan yana bir alomat bilan tanishamiz.

4-TEOREMA (***Koshi alomati***): Berilgan $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ musbat hadli sonli qator uchun

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=k \tag{5}$$

limit mavjud bo‘lsin. Bu holda k<1 bo‘lganda qator yaqinlashuvchi, k>1 bo‘lganda esa uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Bu teoremaning isboti ham Dalamber alomati isbotiga o‘xshash va shu sababli uni o‘quvchiga mustaqil ish sifatida qoldiramiz.

Izohlar: 1. Agar k=1 bo‘lsa, qator yaqinlashuvchi ham, uzoqlashuvchi ham bo‘lishi mumkin.

2. Agar $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\infty$ bo‘lsa , ko‘rilayotgan qator uzoqlashuvchi bo‘ladi .

Masalan, ushbu musbat hadli

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4n+3}\right)^n$$

sonli qator yaqinlashuvchidir. Haqiqatan ham bu qator uchun

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{4n+3}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4n+3}=\frac{1}{4}=k<1$$

va, Koshi alomatiga ko‘ra, qator yaqinlashuvchi.

2.4. Integral alomati. Koshi tomonidan musbat hadli sonli qatorlarni tekshirish uchun yana bir alomat kiritilgan. Unda integral tushunchasidan foydalanilganligi uchun integral alomati deb yuritiladi.

5-TEOREMA **(*Qator yaqinlashishining integral alomati*):** Berilgan $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ musbat hadli sonli qatorning hadlari o‘smovchi ketma-ketlikni tashkil etsin, ya’ni

$$u_1 \geq u_2 \geq \cdots \geq u_n \geq u_{n+1} \geq \cdots$$

shart bajarilsin. Bundan tashqari $x \geq 1$ sohada aniqlangan, uzluksiz, o‘smovchi va

$$f(1) = u_1, \quad f(2) = u_2, \cdots, f(n) = u_n, \cdots$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $f(x) \geq 0$ funksiya mavjud bo‘lsin. Bu holda berilgan $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun $\int_1^{\infty} f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Isbot: Teorema shartlaridan foydalanib, $k \leq x \leq k+1$ ($k=1,2,3, \cdots$) bo‘lganda quyidagi tengsizliklarni hosil etamiz:

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \Rightarrow u_{k+1} \leq f(x) \leq u_k \Rightarrow \int_k^{k+1} u_{k+1} dx \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} u_k dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq u_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} u_{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} u_k \Rightarrow$$

$$S_{n+1} - u_1 \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq S_n \Rightarrow S_{n+1} - u_1 \leq S_n(f) \leq S_n . \qquad (6)$$

Bu yerda S_n, $S_n(f)$ ($n=1,2,3, \cdots$) monoton o‘suvchi ketma-ketliklar bo‘lishini ta’kidlab o‘tamiz.

I. $\int_1^{\infty} f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi va uning qiymati $S(f)$ bo‘lsin. Unda , xosmas integral ta’rifiga asosan (VIII bob, §7, (2) ga qarang), $\lim_{n\to\infty} S_n(f) = S(f)$ mavjud va chekli bo‘ladi. Bu yerdan barcha $n=1,2,3, \cdots$ uchun $S_n(f) < S(f)$ ekanligi kelib chiqadi. Unda, (6) tengsizlikning chap tomoniga ko‘ra, $S_{n+1} \leq S_n(f) + u_1 < S(f) + u_1$ natijaga kelamiz. Bundan berilgan $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ sonli qatorning barcha xususiy yig‘indilari yuqoridan chegaralangan va shu sababli $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ mavjud hamda chekli ekanligi kelib chiqadi. Bu esa $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ sonli qatorni yaqinlashuvchi ekanligini ifodalaydi.

II. Endi $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ sonli qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi S bo‘lsin. Unda barcha $n=1,2,3, \cdots$ uchun $S_n < S$ tengsizlik bajariladi. Shu sababli, (6) tengsizlikning o‘ng tomoniga asosan, $S_n(f)\leq S_n < S$ ekanligini ko‘ramiz. Bu yerdan esa $\lim_{n\to\infty} S_n(f)=S(f)$ mavjud va chekli, ya'ni $\int_1^{\infty} f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi. Bu bilan teorema to‘liq isbotlandi.

Bu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

NATIJA: $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ sonli qator uzoqlashuvchi bo‘lishi uchun teoremadagi $\int_1^{\infty} f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi bo‘lishi zarur va yetarlidir.

2.5. Umumlashgan garmonik qatorlar. Integral alomatning tatbig‘iga misol sifatida ***umumlashgan garmonik qator*** deb ataluvchi ushbu

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p} \qquad (7)$$

musbat hadli qatorni tekshiramiz. Bu yerda p parametr ixtiyoriy haqiqiy qiymatni qabul qilishi mumkin deb olamiz. Bunda p=1 bo‘lganda (7) oldin ko‘rib o‘tilgan (§1, (11) misolga qarang) garmonik qatorni ifodalaydi.

Agar $p\leq 0$ bo‘lsa (7) sonli qator uzoqlashuvchi bo‘ladi, chunki bu holda $\lim_{n\to\infty} 1/n^p \neq 0$ bo‘lib, qator yaqinlashuvining zaruriy sharti bajarilmaydi.

$p>0$ holda (7) sonli qator uchun $f(x)=1/x^p$ $(x\geq 1)$ funksiya teoremadagi barcha shartlarni qanoatlantiradi. Shu sababli (7) sonli qatorning yaqinlashuvchi bo‘lishi

$$I_p=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchiligiga teng kuchlidir. Bu xosmas integral qiymatini uning ta'rifi bo‘yicha uch holda alohida-alohida hisoblaymiz.

- $0<p<1$. $I_p=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{b\to\infty}\left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^b=\frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}(b^{1-p}-1)=\infty$.

Demak, bu holda (7) sonli qator uzoqlashuvchi bo‘ladi. Jumladan,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{k}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{k}}$$

kabi qatorlar uzoqlashuvchidir.

- $p=1$. $I_1=\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\ln x\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\ln b=\infty$.

Bu yerdan garmonik qator uzoqlashuvchi ekanligiga yana bir marta ishonch hosil etamiz.

- $p>1$. $I_p=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{b\to\infty}\left.\frac{1}{(1-p)x^{p-1}}\right|_1^b=$

$$=\frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right)=\frac{1}{p-1}<\infty \ .$$

Demak, bu holda (7) sonli qator yaqinlashuvchi bo‘ladi. Xususan,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{k^4}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\varepsilon}}\ (\varepsilon>0)$$

sonli qatorlar yaqinlashuvchidir.

Shunday qilib, (7) umumlashgan garmonik qator $p\leq 1$ bo‘lganda uzoqlashuvchi, $p>1$ holda esa yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, (7) sonli qator yaqinlashuvini Dalamber va Koshi alomatlari orqali tekshirib bo‘lmaydi, chunki bu holda $d=1$ va $k=1$ bo‘ladi.

Umumlashgan garmonik qatorlar turli sonli qatorlarning yaqinlashuvchi ekanligini taqqoslash alomatlari yordamida aniqlashda majoranta qator sifatida keng qo‘llaniladi.

XULOSA

Qatorlar nazariyasining asosiy masalalaridan biri berilgan sonli qator yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlashdan iboratdir. Oldin bu masalani qisman yechib, qator yaqinlashuvining zaruriy shartini aniqlagan, ammo uni yetarli emasligini ko‘rgan edik. Shu sababli qator yaqinlashuvining zaruriy shartlarini topish masalasi paydo bo‘ladi. Barcha hadlari (yoki chekli sondagi hadlaridan tashqari barcha hadlari) musbat bo‘lgan qatorlar uchun bu masalani taqqoslash, Dalamber, Koshi va integral alomatlari yordamida hal etish mumkin. Umumlashgan garmonik qatorlar uchun ularning yaqinlashish sharti integral alomati orqali aniqlanadi Bu qator boshqa qatorlarning yaqinlashuvini taqqoslash alomati yordamida tekshirishda keng qo‘llaniladi.

Tayanch iboralar

* Musbat hadli sonli qator * Taqqoslash alomati * Limitik taqqoslash alomati
* Majoranta qator * Dalamber alomati * Koshi alomati * Integral alomati
* Umumlashgan garmonik qator

Takrorlash uchun savollar

1. **Qanday sonli qator musbat hadli deyiladi?**
2. **Musbat hadli sonli qatorlarga misollar keltiring.**
3. **Taqqoslash alomatining mohiyati nimadan iborat?**
4. **Limitik taqqoslash alomati qanday ifodalanadi?**
5. **Majoranta qator nima?**
6. **Dalamber alomati yordamida qator yaqinlashuvi qanday tekshiriladi?**
7. **Koshi alomati nimadan iborat?**
8. **Qator yaqinlashuvining integral alomati qanday ifodalanadi?**
9. **Umumlashgan garmonik qator qanday ko‘rinishda bo‘ladi?**
10. **Qaysi holda umumlashgan garmonik qator yaqinlashuvchi bo‘ladi?**
11. **Umumlashgan garmonik qatordan qanday foydalaniladi?**

Testlardan namunalar

1. Quyidagi qatorlardan qaysi biri musbat hadli bo‘ladi?

   A) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k}$; B) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k}{k}$; C) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^k}{k}$; B) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\ln\frac{1}{k}$;

   E) keltirilgan barcha qatorlar musbat hadli emas.

2. Musbat hadli $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ sonli qatorni Dalamber alomati orqali tekshirish uchun qaysi limit hisoblanadi?

   A) $\lim_{n\to\infty}u_{n+1}u_n$; B) $\lim_{n\to\infty}(u_{n+1}+u_n)$; C) $\lim_{n\to\infty}(u_{n+1}-u_n)$;

   D) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$; E) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$.

3. Musbat hadli $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ sonli qatorni Koshi alomati orqali tekshirish uchun qaysi limit hisoblanadi?

   A) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{u_n}$; B) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$; C) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_nu_{n+1}}$;

   D) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{u_{n+1}}{u_n}}$; E) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{u_n}{u_{n+1}}}$.

4. Musbat hadli $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ sonli qatorni integral alomati orqali tekshirish uchun tanlanadigan $f(x)$ funksiyaga qaysi shart qo‘yilmaydi?

   A) $f(x)\geq 0$; B) $f(x)$ funksiya $x\geq 1$ sohada aniqlangan;

   C) $f(n)=u_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$; D) $f(x)$ funksiya o‘smovchi;

   E) $f(x)$ funksiyaga keltirilgan barcha shartlar qo‘yiladi.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Musbat hadli $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i^n}{(n+1)^i}$ sonli qator yaqinlashuvini Dalamber alomati yordamida tekshiring.

2. Musbat $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{ni}{(n+1)i+1}\right)^i$ hadli sonli qator yaqinlashuvini Koshi alomati yordamida tekshiring.

3. Musbat hadli $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(i+1)\ln^{n+1}(i+1)}$ sonli qator yaqinlashuvini integral alomati yordamida tekshiring.

§3. ISHORASI NAVBATLANUVCHI VA O‘ZGARUVCHI SONLI QATORLAR

- *Ishorasi navbatlanuvchi sonli qatorlar.*
- *Ishorasi o‘zgaruvchi qatorlar.*
- *Absolut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar.*

Oldingi paragrafda barcha hadlari musbat bo‘lgan sonli qatorlar qaralgan edi. Bu yerda hadlari ham musbat, ham manfiy ishorali bo‘lgan sonli qatorlarning yaqinlashuvini aniqlash masalasini qaraymiz.

3.1. Ishorasi navbatlanuvchi sonli qatorlar. Dastlab hadlarining ishoralari turlicha bo‘lgan sonli qatorlarning maxsus bir holini ko‘rib chiqamiz.

1-TA’RIF: Barcha hadlari musbat bo‘lgan $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ sonli ketma-ketlikdan tuzilgan

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}u_k = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n+1}u_n + \cdots \quad (u_n > 0) \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi qator ***ishorasi navbatlashuvchi qator*** deb ataladi.

Masalan,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots \quad , \qquad (2)$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\cdots \; , \qquad (3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}+\cdots \qquad (4)$$

ishorasi navbatlanuvchi qatorlar bo‘ladi. Bunday qatorlar yaqinlashuvini quyidagi teorema yordamida tekshirish mumkin.

1-TEOREMA** (Leybnits alomati):** Ishorasi navbatlashuvchi (1) qatorning hadlari absolut qiymatlari bo‘yicha monoton kamayuvchi va nolga intiluvchi, ya’ni

$$u_1 > u_2 > u_3 > \cdots > u_n > \cdots \quad (5) \quad \text{va} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \quad (6)$$

shartlarni qanoatlantirsin. Unda bu qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi S uchun $0<S\leq u_1$ qo‘sh tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: (1) qatorning dastlabki $n=2m$ ta (m=1,2,3, $\cdots$) hadidan hosil qilingan S_{2m} xususiy yig‘indilar ketma-ketligini qaraymiz:

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2m-1} - u_{2m}) \; .$$

Teoremadagi (5) shartga asosan bu yig‘indida har bir qavs ichidagi ifoda musbatdir. Bu yerdan $S_{2m}>0$ va monoton o‘suvchi ekanligi kelib chiqadi. Endi S_{2m} xususiy yig‘indini quyidagi ko‘rinishda ifodalaymiz:

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m} \; .$$

Bunda, (5) shartga ko‘ra, har bir qavs ichidagi ifoda musbat va shu sababli $S_{2m}<u_1$ bo‘ladi. Shunday qilib, S_{2m} xususiy yig‘indilar ketma-ketligi monoton o‘suvchi va yuqoridan u_1 soni bilan chegaralangan. Bundan $\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$ limit mavjud va $0<S\leq u_1$ ekanligi kelib chiqadi. Bu bilan teorema tasdig‘i faqat n=2m hol uchun isbotlandi. Agar n=2m+1 bo‘lsa, unda teoremadagi (6) shart va oldingi natijadan foydalanib, ushbu tenglikka ega bo‘lamiz:

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2m} + \lim_{n\to\infty} u_{2m+1} = S + 0 = S \quad .$$

Demak, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ limit mavjud, ya’ni ishorasi navbatlanuvchi (1) sonli qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi $0<S\leq u_1$ bo‘ladi. Teorema isboti yakunlandi.

Masalan, yuqorida keltirilgan (2) va (3) ishorasi navbatlanuvchi qatorlar Leybnits alomatidagi ikkala shartni ham qanoatlantiradi va shu sababli ular yaqinlashuvchi bo‘lib, ularning yig‘indilari u_1=1 sonidan katta bo‘lmaydi. Kelgusida [§5, (22) ga qarang] (2) qator yig‘indisi S=ln2 , (3) qator yig‘indisi esa [§6, (7) ga qarang] S=π/4 ekanligini ko‘ramiz. Ishorasi navbatlanuvchi (4) qator uchun Leybnits alomatining (6) sharti bajariladi, ammo bu qator hadlari monoton kamayuvchi emas, ya’ni (5) shart bajarilmaydi. Shu sababli bu qator uchun Leybnits alomatini qo‘llab bo‘lmaydi. Bu qatorni tekshirish uchun uni quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(\sqrt{n+1}+1)-(\sqrt{n+1}-1)}{(\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n+1}+1)}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \ .$$

Bu yerdan ko‘rinadiki (4) qator uzoqlashuvchi, chunki u garmonik qatorni ikkiga ko‘paytirishdan hosil bo‘lgan.

3.2. Ishorasi o‘zgaruvchi qatorlar. Endi ishorasi navbatlanuvchi sonli qatorlarni xususiy hol sifatida o‘z ichiga oluvchi ishorasi o‘zgaruvchi qatorlarni qaraymiz.

2-TA’RIF: Agar sonli qatorning hadlari orasida musbat qiymatlilari ham, manfiy qiymatlilari ham bo‘lsa, u ***ishorasi o‘zgaruvchi qator*** deb ataladi.

Ishorasi o‘zgaruvchi sonli qatorlarni

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \qquad (7)$$

ko‘rinishda yozsak, unda u_n (n=1,2,3, · · ·) ishoralari ixtiyoriy bo‘lishini yana bir marta ta’kidlab o‘tamiz.

Masalan,

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots \ ,$$

$$\sin 1 + \frac{\sin 2}{2} + \frac{\sin 3}{3} + \cdots + \frac{\sin n}{n} + \cdots$$

ishorasi o‘zgaruvchi sonli qatorlar bo‘ladi.

Ishorasi o‘zgaruvchi (7) sonli qator yaqinlashuvini tekshirish uchun uning hadlarini absolut qiymatlaridan tuzilgan

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \qquad (8)$$

musbat hadli sonli qatorni qaraymiz. Bu holda (7) sonli qator yaqinlashuvining yetarli sharti ushbu teorema orqali ifodalanadi.

2-TEOREMA: **Agar (8) qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, unda (7) qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.**

Isbot: S_n **va** $\|S_n\|$ **orqali mos ravishda (7) va (8) sonli qatorlarning** n**-xususiy yig‘indilarini belgilaymiz. Bundan tashqari** S_n^+ **va** S_n^- **orqali mos ravishda** S_n **xususiy yig‘indiga kiruvchi musbat ishorali hadlar va manfiy ishorali hadlarning absolut qiymatlari yig‘indilarini belgilaymiz.** S_n^+ **va** S_n^- **(**n**=1,2,3, · · ·) musbat qiymatli va monoton o‘suvchi sonli ketma-ketliklarni tashkil etadi. Teorema shartiga ko‘ra** $\lim\limits_{n\to\infty}\|S_n\| = A$ **mavjud va chekli. Bu yerdan,** $\|S_n\| = S_n^+ + S_n^-$ **tenglikka asosan, monoton o‘suvchi** S_n^+ **va** S_n^- **(**n**=1,2,3, · · ·) ketma-ketliklar yuqoridan** A **musbat son bilan chegaralangan ekanligi kelib chiqadi. Bu xulosadan o‘z navbatida** $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^+ = S^+$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^- = S^-$ **limitlar mavjud va chekli ekanligini ko‘ramiz. Va nihoyat,** $S_n = S_n^+ - S_n^-$ **ekanligidan hamda limit xossalaridan foydalanib,**

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(S_n^+ - S_n^-) = \lim_{n\to\infty} S_n^+ - \lim_{n\to\infty} S_n^- = S^+ - S^-$$

natijani olamiz. Bundan, ta’rifga asosan, ishorasi o‘zgaruvchi (7) sonli qator yaqinlashuvchi ekanligiga ishonch hosil etamiz. Teorema isboti yakunlandi.

Misol sifatida

$$\cos\alpha + \frac{\cos 2\alpha}{2^3} + \frac{\cos 3\alpha}{3^3} + \cdots + \frac{\cos n\alpha}{n^3} + \cdots \quad (0<\alpha<\pi) \tag{9}$$

ishorasi o‘zgaruvchi sonli qatorning yaqinlashuvini tekshiramiz. Buning uchun uning hadlari absolut qiymatlaridan tuzilgan

$$|\cos\alpha| + \frac{|\cos 2\alpha|}{2^3} + \frac{|\cos 3\alpha|}{3^3} + \cdots + \frac{|\cos n\alpha|}{n^3} + \cdots \quad (0<\alpha<\pi) \tag{10}$$

sonli qatorni qaraymiz. Bu qatorda $|\cos n\alpha|\le 1$ekanligidan uning uchun

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} + \cdots$$

majoranta qator bo‘ladi. Bu qator parametri p=3>1 bo‘lgan umumlashgan garmonik qator sifatida yaqinlashuvchi. Demak (10) qator yaqinlashuvchi va shu sababli (9) qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.

3.3. Absolut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar. Yuqorida ko‘rib o‘tilgan 2-teoremadagi shart ishorasi o‘zgaruvchi (7) sonli qator yaqinlashuvi uchun yetarli, ammo zaruriy bo‘lmaydi. Demak (7) qator yaqinlashuvchi ekanligidan (8) qatorning yaqinlashuvchiligi har doim ham kelib chiqmaydi. Masalan,

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots \tag{11}$$

ishorasi navbatlanuvchi (demak ishorasi o‘zgaruvchi) sonli qator Leybnits alomatiga ko‘ra yaqinlashuvchi. Ammo uning hadlarining absolut qiymatlaridan tuzilgan

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$$

sonli qator parametri p=0.5<1 bo‘lgan umumlashgan garmonik qator sifatida uzoqlashuvchi bo‘ladi.

3-TA’RIF: Agar (8) qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, unda ishorasi o‘zgaruvchi (7) sonli qator ***absolut yaqinlashuvchi*** deyiladi. Agar (8) qator uzoqlashuvchi bo‘lib, ishorasi o‘zgaruvchi (7) sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, unda (7) ***shartli yaqinlashuvchi qator*** deb ataladi.

Masalan, (9) qator absolut , (11) qator esa shartli yaqinlashuvchidir.

Absolut yaqinlashuvchi $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ sonli qatorlar chekli $\sum_{k=1}^{n} u_k$ yig‘indilarga o‘xshash xususiyatlarga ega bo‘ladi. Masalan, ularni o‘zaro qo‘shganda, ayirganda yoki ko‘paytirganda yana absolut yaqinlashuvchi sonli qatorlar hosil bo‘ladi. Bundan tashqari ular uchun quyidagi teorema ham o‘rinlidir.

3-TEOREMA: $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ qator absolut yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi S bo‘lsin. Unda bu qator hadlarining o‘rinlarini ixtiyoriy ravishda almashtirishdan hosil bo‘lgan $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k$ sonli qator ham absolut yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi ham S bo‘ladi.

Bu teoremani isbotsiz qabul etamiz.

Ammo shartli yaqinlashuvchi sonli qatorlar uchun yuqoridagi teorema tasdig‘i o‘rinli bo‘lmaydi. Bu mashhur olmon matematigi G.Riman (1826–1866 y.) tomonidan isbotlangan ushbu teoremadan kelib chiqadi.

4-TEOREMA: $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ qator shartli yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi S bo‘lsin. Unda bu qator hadlarining o‘rinlarini shunday almashtirish mumkinki, natijada hosil bo‘lgan $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k$ sonli qator yig‘indisi oldindan berilgan ixtiyoriy $S_0 \neq S$ soniga teng bo‘ladi. Bundan tashqari $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k$ sonli qator uzoqlashuvchi bo‘lishiga ham erishish mumkin.

Bu teoremaning isboti ancha murakkab bo‘lgani uchun buni ham isbotsiz qabul etib, undagi tasdiqni ushbu misol orqali ko‘rsatish bilan chegaralanamiz. Bizga ma’lumki, oldin ko‘rib o‘tilgan (2) sonli qator

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

shartli yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi S=ln2. Bu qator hadlarining joylarini shunday almashtiramizki, bitta musbat haddan keyin ikkita manfiy had kelsin:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\cdots$$

Berilgan va hosil etilgan sonli qatorlarning n-xususiy yig‘indilarini mos ravishda S_n va $\tilde{S}_n$ kabi belgilaymiz. Bu holda quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz:

$$\tilde{S}_{3n} = (1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}) + (\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}) + \cdots + (\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}) =$$

$$= (\frac{1}{2}-\frac{1}{4}) + (\frac{1}{6}-\frac{1}{8}) + (\frac{1}{10}-\frac{1}{12}) + \cdots + (\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}) =$$

$$= \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2(n-1)}-\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2}S_{2n} \ .$$

Bu yerdan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{S}_{3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}S_{2n} = \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\ln 2\,,$$

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{S}_{3n+1} = \lim_{n\to\infty}(\tilde{S}_{3n}+\frac{1}{2n+1}) = \lim_{n\to\infty}\tilde{S}_{3n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln 2 + 0 = \frac{1}{2}\ln 2\,,$$

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{S}_{3n+2} = \lim_{n\to\infty}(\tilde{S}_{3n+1}-\frac{1}{4n+2}) = \lim_{n\to\infty}\tilde{S}_{3n+1} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n+2} = \frac{1}{2}\ln 2 - 0 = \frac{1}{2}\ln 2\ .$$

Demak, $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{S}_n = \frac{1}{2}\ln 2$, ya’ni hosil qilingan qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi berilgan qator yig‘indisining yarmiga teng.

XULOSA

Oldin ko‘rib o‘tilgan taqqoslash,Dalamber, Koshi va integral alomatlari faqat musbat hadli sonli qatorlar xarakterini aniqlashga imkon beradi. Endi bu masalani ixtiyoriy hadli sonli qatorlar uchun qaraymiz. Bunday qatorlarning xususiy holi bo‘lmish ishorasi navbatlanuvchi sonli qatorlarning yaqinlashuvi Leybnits alomati yordamida aniqlanadi. Bu alomat qator yig‘indisini baholash imkonini ham beradi.

Umumiy holda berilgan ishorasi o‘zgaruvchi sonli qatorni tekshirish uchun uning hadlarining absolut qiymatlaridan tuzilgan musbat hadli qatordan foydalaniladi. Agar bu qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, unda ishorasi o‘zgaruvchi sonli qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi va u absolut yaqinlashuvchi deyiladi. Ammo teskari tasdiq har doim ham o‘rinli bo‘lmaydi. Berilgan ishorasi o‘zgaruvchi qator yaqinlashuvchi bo‘lib, uning hadlarining absolut qiymatlaridan tuzilgan qator uzoqlashuvchi bo‘lishi mumkin. Bu holda berilgan qator shartli yaqinlashuvchi deb ataladi. Absolut yaqinlashuvchi sonli qatorda uning hadlari o‘rinlarini ixtiyoriy ravishda o‘zgartirganimizda, uning yig‘indisi o‘zgarmay qoladi. Bu xossa shartli yaqinlashuvchi qatorlar uchun bajarilmasligi Riman teoremasida ko‘rsatiladi.

Tayanch iboralar

* Ishorasi navbatlanuvchi sonli qator * Leybnits alomati * Ishorasi o‘zgaruvchi sonli qator * Absolut yaqinlashuvchi qator * Shartli yaqinlashuvchi qator * Riman teoremasi

Takrorlash uchun savollar

1. **Qachon sonli qator ishorasi navbatlanuvchi deb ataladi ?**
2. **Ishorasi navbatlanuvchi sonli qatorlarga misollar keltiring.**
3. **Leybnits alomatining mohiyati nimadan iborat ?**
4. **Leybnits alomatining shartlari nimadan iborat ?**
5. **Ishorasi o‘zgaruvchi sonli qatorlar qanday ta’riflanadi ?**
6. **Ishorasi o‘zgaruvchi sonli qatorlarga misollar keltiring .**
7. **Ishorasi o‘zgaruvchi qatorlar yaqinlashuvining yetarli sharti qanday ifodalanadi ?**
8. **Qachon sonli qator absolut yaqinlashuvchi deyiladi ?**
9. **Absolut yaqinlashuvchi sonli qatorga misollar keltiring .**
10. **Absolut yaqinlashuvchi qator qanday xossaga ega ?**
11. **Shartli yaqinlashuvchi sonli qator qanday ta’riflanadi ?**
12. **Shartli yaqinlashuvchi sonli qatorlarga qanday misollar bilasiz ?**
13. **Riman teoremasida nima tasdiqlanadi ?**

Testlardan namunalar

9. Qaysi shartda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sonli qator ishorasi navbatlanuvchi bo‘ladi ?

A) $u_n + u_{n+1} < 0$ $(n=1,2,3,\cdots)$; B) $u_n - u_{n+1} < 0$ $(n=1,2,3,\cdots)$;
C) $u_n \cdot u_{n+1} > 0$ $(n=1,2,3,\cdots)$; D) $u_n \cdot u_{n+1} < 0$ $(n=1,2,3,\cdots)$;
E) to‘g‘ri javob keltirilmagan .

10. Quyidagi qatorlarning qaysi biri ishorasi navbatlanuvchi bo‘ladi ?

A) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \sin k$; B) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cos k$; C) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-k}$; D) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k tgk$;
E) keltirilgan barcha qatorlar ishorasi navbatlanuvchidir .

11. Leybnits alomatida ishorasi navbatlanuvchi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun uning hadlariga quyidagi shartlardan qaysi biri qo‘yiladi ?

A) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$; B) $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = d < 1$; C) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k < 1$;
D) $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$; E) $\lim_{n\to\infty}(u_n - u_{n+1}) = 0$.

12. Leybnits alomatida ishorasi navbatlanuvchi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun uning hadlariga quyidagi shartlardan qaysi biri qo‘yiladi ?

A) $|u_{n+1}| > |u_n|$; B) $|u_{n+1}| \geq |u_n|$; C) $|u_{n+1}| < |u_n|$;

D) $|u_{n+1}| \leq |u_n|$; E) $|u_{n+1}| \neq |u_n|$.

13. Agar Leybnits alomatiga asosan ishorasi navbatlanuvchi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ $(u_n > 0\,,\, n = 1,2,3,\cdots)$ sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, uning yig‘indisi S uchun quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o‘rinli bo‘ladi ?

A) $S=u_1$; B) $S>u_1$; C) $S\geq u_1$; D) $S\leq u_1$; E) $S\neq u_1$.

14. Quyidagi ishorasi navbatlanuvchi sonli qatorlardan qaysi biri yaqinlashuvchi emas ?

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$; B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$; C) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\frac{1}{n}$; D) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n}$;

E) keltirilgan barcha qatorlar yaqinlashuvchi .

15. Quyidagilardan qaysi biri ishorasi o‘zgaruvchi qator bo‘lmaydi ?

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$; B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$; C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$; D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cos n$;

E) keltirilgan barcha qatorlar ishorasi o‘zgaruvchi bo‘ladi .

16. Ishorasi o‘zgaruvchi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1) sonli qator bo‘yicha musbat hadli $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ (2) qator tuzilgan. Qachon (1) qator shartli yaqinlashuvchi deb ataladi ?

A) Agar (1) qator yaqinlashuvchi bo‘lsa ;
B) Agar (2) qator yaqinlashuvchi bo‘lsa ;
C) Agar (1) qator yaqinlashuvchi, (2) qator esa uzoqlashuvchi bo‘lsa ;
D) Agar (1) va (2) qatorlarning ikkalasi ham yaqinlashuvchi bo‘lsa ;
E) Agar (1) va (2) qatorlarning birortasi yaqinlashuvchi bo‘lsa .

17. Quyidagi qatorlardan qaysi biri absolut yaqinlashuvchi bo‘ladi ?

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$; B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$; C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; D) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\frac{1}{n}$;

E) keltirilgan barcha qatorlar absolut yaqinlashuvchi bo‘ladi .

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Quyidagi ishorasi navbatlanuvchi qator yaqinlashuvini Leybnits alomati yordamida tekshiring. Qator yaqinlashuvchi bo‘lsa uning yig‘indisini baholang.

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{ni}\right)^{i}.$$

2. Ushbu ishorasi navbatlanuvchi sonli qatorni absolut yoki shartli yaqinlashuvchiligini aniqlang:

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-)^{i}\frac{i}{i^{n+1}+1}.$$

§4. FUNKSIONAL VA DARAJALI QATORLAR

- ***Funksional qatorlar.***
- ***Darajali qatorlar.***
- ***Yaqinlashish radiusi uchun Dalamber formulasi.***
- ***Yaqinlashish radiusi uchun Koshi formulasi.***
- ***Darajali qatorlarning xossalari.***

4.1. Funksional qatorlar. Oldingi paragrafda biz u_n (n=1,2,3,· · ·) cheksiz sonlar ketma-ketligidan tuzilgan $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ sonli qatorlar bilan tanishgan edik. Endi bu tushunchani umumlashtirib, funksional qator tushunchasini kiritamiz.

1-TA'RIF: Agar $u_n(x)$, n=0,1,2,3,· · · , biror D sohada aniqlangan funksiyalarning cheksiz ketma-ketligi bo'lsa, ulardan tuzilgan

$$u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x) \qquad (1)$$

qator ***funksional qator*** deb ataladi.

Masalan,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin kx}{(k+1)^2}\ (a), \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin^k x}{(k+1)^2}\ (b), \quad \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k\ (c), \quad \sum_{k=0}^{\infty}k!x^k\ (d)$$

funksional qatorlar bo'ladi.

Izoh: Agar $u_n(x)= u_n$=const. (n=0,1,2,3,· · ·) deb olsak (1) funksional qator sonli qatorga aylanadi.

2-TA'RIF: Agar $x=x_0$=const. holda (1) funksional qatordan hosil bo'ladigan

$$u_0(x_0)+u_1(x_0)+u_2(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x_0) \qquad (2)$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, unda (1) funksional qator $x=x_0$ nuqtada ***yaqinlashuvchi*** deyiladi , bunday nuqtalar to'plami esa uning ***yaqinlashish sohasi*** deb ataladi.

Masalan, yuqorida keltirilgan (a) va (b) funksional qatorlarning yaqinlashish sohasi (–∞ , ∞) bo'ladi, chunki ixtiyoriy $x= x_0$ uchun

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin kx_0}{(k+1)^2}\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}<\infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin^k x_0}{(k+1)^2}\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}<\infty \ .$$

Uchinchi (c) qatorning yaqinlashish sohasi $(-1,1)$, chunki $|x|=q<1$ holda bu qator maxraji $0<q<1$ bo‘lgan cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya hadlaridan tuzilgan qator bilan majorantalanadi. (d) funksional qator esa faqat $x=0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo‘lishiga Dalamber alomati yordamida ishonch hosil etish mumkin.

Agar (1) funksional qatorning yaqinlashish sohasi D bo‘lsa, unda har bir $x=x_0\in D$ uchun (2) sonli qatorning yig‘indisi biror $S(x_0)$ sonidan iborat bo‘ladi. Bundan ko‘rinadiki (1) funksional qator yaqinlashish sohasida biror $S(x)$ funksiyani aniqlaydi. $S(x)$ funksiya (1) ***funksional qatorning yig‘indisi*** deyilib,

$$S(x)=u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x)\,,\ x\in D\,, \qquad (3)$$

kabi ifodalanadi.

Masalan, $\sum_{k=0}^{\infty}x^k$ funksional qator hadlari birinchi hadi $b_1=1$, maxraji esa $q=x$ bo‘lgan geometrik progressiyani tashkil etadi. Shu sababli bu qator $|q|=|x|<1$, ya’ni $(-1,1)$ sohada yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi $S(x)=b_0/(1-q)=1/(1-x)$ funksiyadan iborat bo‘ladi.

(1) funksional qatorning dastlabki $n+1$ ta hadining yig‘indisini $S_n(x)$ deb belgilaymiz. Agar bu qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi $S(x)$ bo‘lsa, (3) tenglikka asosan, $S(x)= S_n(x)+ r_n(x)$ deb yozish mumkin. Bunda $r_n(x)$

$$r_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x) \qquad (4)$$

ko‘rinishda bo‘lib, (1) ***funksional qatorning qoldig‘i*** deyiladi. Agar $x\in D$ bo‘lsa, unda

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}r_n(x)=\lim_{n\to\infty}[S(x)-S_n(x)]=0\,, \qquad (5)$$

ya’ni yaqinlashuvchi funksional qator qoldig‘i $n\to\infty$ bo‘lganda nolga intiladi.

4.2. Darajali qatorlar. Endi (1) funksional qatorning xususiy holini qaraymiz.

<u>3-TA’RIF:</u> Ushbu ko‘rinishdagi funksional qator

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k \qquad (6)$$

darajali qator deb ataladi. Bu qatorda a_n ($n=0,1,2,3,\cdots$) o‘zgarmas sonlar bo‘lib, ular ***darajali qatorning koeffitsiyentlari*** deyiladi.

Har qanday darajali qator uchun $x=0$ uning yaqinlashish nuqtasi bo‘ladi, ya’ni uning yaqinlashish sohasi hech qachon bo‘sh to‘plam bo‘lmaydi. (6) darajali qatorning yaqinlashish sohasi atigi 27 yil umr ko‘rgan, ammo bu qisqa davrda matematika rivojlanishiga juda katta hissa qo‘shgan norvegiyalik matematik N.Abelning (1802–1829 y.) ushbu teoremasi yordamida topiladi.

<u>1-TEOREMA</u> (Abel teoremasi): *a*) Agar (6) darajali qator biror $x_0\neq0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo‘lsa, unda bu qator x o‘zgaruvchining $|x|<|x_0|$ shartni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida absolut yaqinlashuvchi bo‘ladi ;

b) agar (6) darajali qator biror x_0 nuqtada uzoqlashuvchi bo‘lsa, unda bu qator x o‘zgaruvchining $|x|>|x_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Isbot: *a*) Teorema shartiga asosan

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + ... + a_nx_0^n + ... = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$$

sonli qator yaqinlashuvchi shu sababli, qator yaqinlashuvining zaruriy shartiga ko‘ra, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$ bo‘ladi. Bu holda shunday $M>0$ soni mavjudki, (6) qatorning barcha hadlari uchun $\left|a_n x_0^n\right| < M$ (*) tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Qaralayotgan (6) darajali qatorni quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$a_0 + a_1x_0(\frac{x}{x_0}) + a_2x_0^2(\frac{x}{x_0})^2 + ... + a_nx_0^n(\frac{x}{x_0})^n + ... = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k (\frac{x}{x_0})^k . \quad (7)$$

Bu qator hadlarining absolut qiymatlaridan tuzilgan quyidagi

$$|a_0| + |a_1x_0| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right| + \left|a_2x_0^2\right| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + ... + \left|a_nx_0^n\right| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \left|a_k x_0^k\right| \left|\frac{x}{x_0}\right|^k \quad (8)$$

musbat hadli sonli qatorni qaraymiz. Yuqoridagi (*) tengsizlikka asosan bu qator uchun

$$M + M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right| + M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + ... + M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + ... = \sum_{k=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^k \quad (9)$$

majoranta qator bo‘ladi. Agar $|x|<|x_0|$ shart bajarilsa, unda (9) qator hadlari maxraji $q=|x/x_0|<1$ bo‘lgan geometrik progressiyani tashkil etadi va shu sababli yaqinlashuvchi bo‘ladi. Bu yerdan, $|x|<|x_0|$ shartda , (8) qator yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi. Unda, taqqoslash alomatiga ko‘ra, (7) yoki (6) darajali qator $|x|<|x_0|$ sohada absolut yaqinlashuvchi bo‘ladi.

b) (6) darajali qator $x=x_0$ nuqtada uzoqlashuvchi va $|x_1|>|x_0|$ bo‘lsin. Biz (6) qator $x=x_1$ nuqtada yaqinlashuvchi deb faraz qilamiz. Unda, teoremaning *a*) qismiga asosan, bu qator x o‘zgaruvchining $|x|<|x_1|$ shartni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida, jumladan $x=x_0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo‘ladi. Bu esa teorema shartiga ziddir. Demak, farazimiz noto‘g‘ri va $|x|>|x_0|$ shartda qator uzoqlashuvchi bo‘ladi. Teorema to‘liq isbotlandi.

Abel teoremasidan foydalanib (6) darajali qatorning yaqinlashish sohasi ko‘rinishi haqida quyidagi xulosaga kelamiz. Agar x_0 (6) qatorning yaqinlashish nuqtasi bo‘lsa, unda $(-|x_0|, |x_0|)$ oraliqdagi barcha nuqtalarda qator absolut yaqinlashuvchi bo‘ladi. Agar biror x_1 nuqtada (6) qator uzoqlashuvchi bo‘lsa, unda $[-|x_1|, |x_1|]$ kesmadan tashqaridagi barcha nuqtalarda qator uzoqlashuvchi bo‘ladi. Bundan kelib chiqadiki, shunday $R\geq 0$ soni mavjudki, $|x|<R$ holda (6) qator absolut yaqinlashuvchi, $|x|>R$ bo‘lganda esa – uzoqlashuvchi bo‘ladi. Shunday qilib, quyidagi teorema o‘rinli ekanligi isbotlandi:

2-TEOREMA: Har qanday (6) darajali qator $(-R, R)$, $R\geq 0$, ko‘rinishdagi koordinata boshiga nisbatan simmetrik biror oraliqda yaqinlashuvchi bo‘ladi .

3-TA’RIF: $(-R, R)$ darajali qatorning ***yaqinlashish oralig‘i*** , $R\geq 0$ esa– ***yaqinlashish radiusi*** deb ataladi.

Izoh: Yaqinlashish oralig‘ining chegaralarida, ya’ni $x=\pm R$ nuqtalarda (6) darajali qator yaqinlashuvchi ham, uzoqlashuvchi ham bo‘lishi mumkin.

Ba'zi darajali qatorlarning (oldin ko'rilgan (d) qatorga qarang) yaqinlashish sohasi faqat bitta x=0 nuqtadan iborat (R=0), ba'zilari esa barcha nuqtalarda ($R=\infty$) yaqinlashuvchi bo'lishi mumkin.

4.3. Yaqinlashish radiusi uchun Dalamber formulasi. Endi (6) darajali qatorning R yaqinlashish radiusini topish masalasi bilan shug'ullanamiz.

***3-TEOREMA* (Dalamber formulasi):** Agar (6) darajali qator uchun

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = d \neq 0$$

limit mavjud va chekli bo'lsa, unda bu qatorning yaqinlashish radiusi $R=d$ bo'ladi.

Isbot: (6) darajali qator hadlarining absolut qiymatlaridan tuzilgan ushbu qatorni qaraymiz:

$$|a_0| + |a_1|\cdot|x| + |a_2|\cdot|x|^2 + \ldots + |a_n|\cdot|x|^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}|a_k||x|^k \quad . \qquad (10)$$

Bu qatorni x o'zgaruvchining har bir qiymatida umumiy hadi

$$u_n=|a_n|\cdot|x|^n\ ,\ n=0,1,2,\cdots ,$$

bo'lgan musbat hadli sonli qator deb qarash mumkin. (10) qatorning yaqinlashishini Dalamber alomati yordamida tekshiramiz. Teorema shartiga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|\cdot|x|^{n+1}}{|a_n|\cdot|x|^n} = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right)^{-1} = |x|\cdot d^{-1}.$$

Bu yerdan, Dalamber alomatiga ko'ra, (10) qator $|x|\cdot d^{-1}<1 \Rightarrow |x|<d$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $|x|\cdot d^{-1}>1 \Rightarrow |x|>d$ holda esa uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi. Shu sababli, taqqoslash alomatiga asosan, $|x|<d$ bo'lganda (6) darajali qator absolut yaqinlashuvchi bo'ladi. Agar $|x|>d$ bo'lsa, (10) qator uzoqlashuvchi va bundan tashqari (Dalamber alomati isbotiga qarang) uning umumiy hadi uchun

$$\lim_{n\to\infty}|a_n||x^n| = \lim_{n\to\infty}|a_n x^n| \neq 0$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Bu yerdan (6) darajali qatorning umumiy hadi uchun

$$\lim_{n\to\infty} a_n x^n \neq 0$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, $|x|>d$ holda (6) uchun qator yaqinlashuvining zaruriy sharti bajarilmaydi va shu sababli u uzoqlashuvchi bo'ladi.

Demak, (6) darajali qator $|x|<d$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $|x|>d$ bo'lganda esa –uzoqlashuvchi. Bu yerdan, 3-ta'rifga asosan, bu qatorning yaqinlashish radiusi $R=d$ ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Shunday qilib (6) darajali qator yaqinlashish radiusi

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad (11)$$

Dalamber formulasi bilan topilishi mumkin.

Izoh: Agar teorema shartidagi limit qiymati d=0 yoki $d=\infty$ bo'lsa, unda mos ravishda R=0 yoki $R=\infty$ bo'ladi. Bu esa (6) darajali qator faqat x=0 nuqtada yoki butun $(-\infty, \infty)$ oralikda yaqinlashuvchi ekanligini ifodalaydi.

Misol sifatida

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusini topamiz. Bu yerda

$$a_n=(-1)^{n-1}/n\ ,\qquad a_{n+1}=(-1)^n/(n+1)$$

bo‘lgani uchun

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=1\ .$$

Demak bu qatorning yaqinlashish oralig‘i (–1, 1) bo‘ladi.

Bu qator yaqinlashuvini $x=\pm1$ chegaraviy nuqtalarda tekshiramiz. Agar $x=-1$ bo‘lsa, unda

$$-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots)$$

uzoqlashuvchi qatorga ega bo‘lamiz , chunki qavs ichidagi garmonik qator uzoqlashuvchidir. $x=1$ bo‘lsa,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

sonli qatorga ega bo‘lamiz. Bu qatorni, Leybnits alomatiga ko‘ra, yaqinlashuvchi ekanligini oldin ko‘rib o‘tgan edik. Demak, $x=1$ nuqtada berilgan darajali qator yaqinlashuvchi. Shunday qilib, qaralayotgan darajali qatorning yaqinlashish sohasi (–1, 1] yarim oraliqdan iborat.

4.4. Yaqinlashish radiusi uchun Koshi formulasi. Darajali qatorning yaqinlashish radiusini aniqlash uchun yana bir formulani keltiramiz.

***4-TEOREMA** (Koshi formulasi):* Agar (6) darajali qator uchun

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=k$$

limit mavjud bo‘lsa, unda bu qatorning yaqinlashish radiusi

$$R=\frac{1}{k}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \qquad (12)$$

Koshi formulasi bilan topilishi mumkin.

Bu teorema ham oldingi teorema singari isbotlanadi va shu sababli uning ustida to‘xtalib o‘tirmaymiz.

(12) formula yordamida

$$1+\frac{4}{11}x+(\frac{7}{15})^2x^2+\cdots+(\frac{3n+1}{6n+5})^nx^n+\cdots$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusini topamiz:

$$k=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{3n+1}{6n+5})^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{6n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+(1/n)}{6+(5/n)}=\frac{1}{2}\ .$$

Demak $R=2$ va darajali qatorning yaqinlashish oralig‘i (–2, 2) bo‘ladi. Bu qator $x=\pm2$ chegaraviy nuqtalarda uzoqlashuvchi ekanligini ko‘rsatish qiyin emas va buni o‘quvchiga mustaqil ish sifatida qoldiramiz.

(12) formula tatbig‘iga yana bir misol sifatida

$$x+2^2x^2+3^3x^3+\cdots+n^nx^n+\cdots$$

darajali qatorni qaraymiz:

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n}=0\,.$$

Demak, bu darajali qator faqat x=0 nuqtada yaqinlashuvchi.

4.5. Darajali qator xossalari. (6) darajali qator hadlari $u_n(x)=a_nx^n$ ko‘rinishdagi eng sodda, ya’ni natural ko‘rsatkichli darajali funksiyalardan, $S_n(x)$ xususiy yig‘indilari esa n-darajali ko‘phadlar ko‘rinishidagi nisbatan sodda funksiyalardan iborat funksional qatordir. Shu sababli darajali qatorlar, boshqa funksional qatorlardan farqli ravishda, ko‘phadlarga xos bir qator xossalarga ega bo‘ladi. Bu xossalarni quyidagi teoremalar ko‘rinishida isbotsiz keltiramiz.

5-TEOREMA: Agar darajali qatorning yaqinlashish oralig‘i $(-R\,,R)$ bo‘lsa, uning yig‘indisini ifodalovchi $S(x)$ funksiya $(-R\,,R)$ oraliq ichida joylashgan har qanday $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo‘ladi .

Masalan, geometrik progressiya yordamida

$$1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^k \qquad (13)$$

darajali qatorning yaqinlashish oralig‘i (–1, 1) va yig‘indisi $S(x)=1/(1+x)$ funksiyadan iborat ekanligini ko‘rsatish mumkin va buni o‘quvchiga mustaqil ish sifatida qoldiramiz. Bu funksiya (–1, 1) oraliqda uzluksizligi ravshandir.

6-TEOREMA: Darajali qatorni uning $(-R\,,R)$ yaqinlashish oralig‘i ichida joylashgan har qanday $[a, b]$ kesma bo‘yicha hadlab integrallash mumkin, ya’ni

$$S(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\ ,\ x\in(-R,R),\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_a^b S(x)dx=\int_a^b a_0dx+\int_a^b a_1xdx+\int_a^b a_2x^2dx+\ldots+\int_a^b a_nx^ndx+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\int_a^b a_kx^kdx\ . \qquad (14)$$

Masalan, (13) darajali qatorni $[0,t]\subset(-1,1)$ kesma bo‘yicha hadlab integrallab,

$$\int_0^t\frac{dx}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t(-1)^kx^kdx\ \Rightarrow\ \ln(1+t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{k+1}}{k+1},\quad t\in(-1,1)\,,$$

natijani olamiz. Oxirgi tenglikda t o‘zgaruvchini x bilan almashtirib, yangi

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots,\ \ -1<x<1,\quad (15)$$

darajali qatorga ega bo‘lamiz. Bunda x=–1 holda uzoqlashuvchi garmonik qator, x=1 holda esa Leybnits alomati shartlarini qanoatlantiruvchi va shu sababli yaqinlashuvchi bo‘lgan ishorasi navbatlanuvchi sonli qator hosil bo‘ladi. Demak, (15) darajali qatorning yaqinlashish sohasi (–1, 1] bo‘lib, undan x=1 holda

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} \qquad (16)$$

tenglikni olamiz.

7-TEOREMA: Yaqinlashish oralig‘i (– R , R) bo‘lgan darajali qatorni hadlab differensiallash mumkin va bunda hosil bo‘ladigan darajali qatorning yaqinlashish sohasi yana (– R , R) oraliqdan iborat bo‘ladi, ya’ni

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\,, \quad x \in (-R, R), \quad \Rightarrow \quad (17)$$

$$\Rightarrow S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_{n+1} x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}\,,\ x \in (-R, R)\,. \quad (18)$$

Masalan, (13) darajali qatorni hadlab differensiallab va hosil bo‘lgan tenglikni (–1) soniga ko‘paytirib, ushbu darajali qatorga kelamiz:

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - \cdots + (-1)^{n+1} n x^{n-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k x^{k-1}\,,\ -1 < x < 1\,.$$

(18) darajali qatorga yana 7-teoremani qo‘llash mumkin va bu jarayonni istalgan marta takrorlash mumkin. Bundan esa ushbu teorema o‘rinli ekanligi kelib chiqadi:

8-TEOREMA: Agar (17) darajali qator (– R , R) oraliqda yaqinlashuvchi bo‘lsa, uning yig‘indisini ifodalovchi $S(x)$ funksiya bu oraliqda ixtiyoriy marta differensiallanuvchi bo‘ladi. Bunda $S^{(m)}(x)$, m=1,2,3, ··· , hosilalar (17) darajali qatorni ketma-ket m marta hadlab differensiallash orqali topiladi. Bunda hosil bo‘ladigan barcha darajali qatorlarning yaqinlashish sohasi (– R , R) oraliqdan iborat bo‘ladi .

Ko‘rib o‘tilgan

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad (6)$$

darajali qator bilan birga

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k \qquad (19)$$

ham ***darajali qator*** deb ataladi. Bunda c=0 bo‘lsa, (6) darajali qator hosil bo‘ladi. (13) qator x–c=X belgilash orqali (6) ko‘rinishdagi darajali qatorga keltiriladi. Bu holda ham R yaqinlashish radiusi (11) yoki (12) formula orqali topilib, (13) darajali qatorning yaqinlashish oralig‘i x=c nuqtaga nisbatan simmetrik bo‘lgan (c – R, c+R) oraliqdan iborat bo‘ladi. Masalan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin^3 \frac{1}{n+1} (x-4)^n$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusini (11) Dalamber alomati yordamida topamiz:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin^3 \dfrac{1}{n+1}}{\sin^3 \dfrac{1}{n+2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin \dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n+1}} \right)^3 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\dfrac{1}{n+2}}{\sin \dfrac{1}{n+2}} \right)^3 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^3 = 1\ .$$

Bu yerda $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)/x=1$ ko‘rinishdagi I ajoyib limitdan (VII bob,§3 ga qarang) foydalanildi. Demak, berilgan darajali qatorda c=4 bo‘lgani uchun, uning yaqinlashish oralig‘i ($c-R$, $c+R$)=(3, 5) bo‘ladi.

Bundan tashqari (19) darajali qator uchun ham 5-8 teoremalar o‘rinli bo‘ladi.

XULOSA

Sonli qatorlar tushunchasini bevosita umumlashtirish orqali funksional qator aniqlanadi. Bu qatorning hadlari funksiyalardan iborat bo‘ladi. Funksional qatorlar ham matematikaning nazariy va amaliy masalalarini qarashda hosil bo‘ladi.

Argumentning har bir mumkin bo‘lgan qiymatida funksional qator sonli qatorga aylanadi. Bu sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, funksional qator argumentning bu qiymatida yaqinlashuvchi deyiladi. Bunday nuqtalar to‘plami funksional qatorning yaqinlashish sohasi deyiladi. Yaqinlashish sohasida funksional qatorning yig‘indisi biror funksiyani ifodalaydi.

Funksional qatorlarning muhim bir xususiy holi bo‘lib darajali qatorlar hisoblanadi. Bu qator argumentning natural darajalaridan tuzilgan bo‘ladi. Abel teoremasidan darajali qatorning yaqinlashish sohasi ($-R$, R) ko‘rinishdagi simmetrik oraliqdan iborat ekanligi kelib chiqadi. Uning $x=\pm R$ chegaralarida qator yaqinlashuvchi ham, uzoqlashuvchi ham bo‘lishi mumkin. Bunda $R\geq 0$ bo‘lib, u darajali qatorning yaqinlashish radiusi deyiladi. Berilgan darajali qatorning yaqinlashish radiusi Dalamber yoki Koshi alomatlari yordamida aniqlanishi mumkin.

Darajali qatorlarning muhim xossalari shundan iboratki, ularni yaqinlashish oralig‘ida hadlab differensiallash va integrallash mumkin. Bundan darajali qatorning yig‘indisi bo‘lmish funksiya uchun ixtiyoriy tartibli hosila mavjudligi kelib chiqadi.

Tayanch iboralar

* Funksional qator * Yaqinlashish nuqtasi * Yaqinlashish sohasi * Funksional qatorning yig‘indisi * Funksional qatorning qoldig‘i * Darajali qator * Darajali qator koeffitsiyentlari *Abel teoremasi *Yaqinlashish radiusi * Yaqinlashish oralig‘i * Dalamber formulasi * Koshi formulasi

Takrorlash uchun savollar

1. Funksional qator ta’rifi qanday ifodalanadi?
2. Funksional qatorning yaqinlashish nuqtasi nima?
3. Funksional qatorning yaqinlashish sohasi deb nimaga aytiladi?
4. Funksional qatorning yig‘indisi qanday aniqlanadi?
5. Funksional qatorning qoldig‘i nima?
6. Yaqinlashuvchi funksional qatorning qoldig‘i qanday xossaga ega?
7. Darajali qator qanday ta’riflanadi?
8. Darajali qatorning koeffitsiyentlari deb nimaga aytiladi?
9. Abel teoremasi qanday ifodalanadi?

10. Abel teoremasining ahamiyati nimadan iborat?
11. Darajali qatorning yaqinlashish radiusi nima?
12. Darajali qatorning yaqinlashish sohasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
13. Yaqinlashish radiusi Dalamber va Koshi formulalari orqali qanday topiladi?
14. Qachon darajali qator yig‘indisi uzluksiz funksiya bo‘ladi?
15. Qaysi shartda darajali qatorlarni hadlab integrallash mumkin?
16. Darajali qatorlarni hadlab differensiallash mumkinmi?
17. Darajali qator yig‘indisini ifodalovchi funksiya qanday xususiyatga ega?

Testlardan namunalar

1. Quyidagilardan qaysi biri funksional qator emas?

A) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{(n+1)^2}$; B) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{(n+1)^2}$; C) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx + \sin nx}{(n+1)^2}$;

D) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^2 nx + \sin^2 nx}{(n+1)^2}$; E) keltirilgan barcha qatorlar funksionaldir.

2. Quyidagi x_0 nuqtalardan qaysi birida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n+1} x^n$ funksional qator yaqinlashuvchi bo‘ladi?

A) $x_0 = -1$; B) $x_0 = \frac{1}{2}$; C) $x_0 = \frac{1}{4}$; D) $x_0 = 1$; E) $x_0 = -\frac{1}{2}$.

3. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\cos x^k}{(k+1)^2}$ funksional qatorning yaqinlashish sohasini aniqlang.

A) $(-\infty, \infty)$; B) $\pi n < x < \pi(n+1), n = 0,1,2,\cdots$; C) $x \neq \pi n, n = 0,\pm1,\pm2,\cdots$;

D) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n = 0,\pm1,\pm2,\cdots$; E) $x>0$.

4. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{-k} x^k$ funksional qatorning yaqinlashish sohasini toping.

A) $(-\infty, \infty)$; B) $(0, \infty)$; C) $(-2, 2)$; D) $(-\infty, 0)$; E) $(-1/2, 1/2)$.

5. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \cos^k x$ funksional qatorning $[\pi/6, \pi/2]$ kesmadagi yig‘indisini toping.

A) $\frac{1}{1-\sin x}$; B) $\frac{1}{1+\sin x}$; C) $\frac{1}{1-\cos x}$; D) $\frac{1}{1+\cos x}$; E) $\frac{1}{\cos x}$.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{i^2} x^i$ darajali qatorning yaqinlashish radiusini Koshi formulasi yordamida toping.

2. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{x^i}{(n+1)^{\sqrt{i}}}$ darajali qatorning yaqinlashish oralig‘ini Dalamber formulasi yordamida toping. Oraliq chegaralarida bu qatorni yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlang.

§5. TEYLOR VA MAKLOREN QATORLARI

- ***Teylor va Makloren qatorlari.***
- ***Ayrim funksiyalarning Makloren qatorlari .***

5.1. Teylor va Makloren qatorlari. Ma’lumki berilgan ushbu

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k \qquad (1)$$

darajali qatorning yig‘indisi (x_0–R, x_0+R) yaqinlashish oralig‘ida ixtiyoriy marta differensiallanuvchi biror $S(x)$ funksiyani aniqlaydi. Endi bu masalani teskarisini, ya’ni yig‘indisi berilgan $f(x)$ funksiyaga teng bo‘lgan (1) darajali qatorni topish masalasini qaraymiz. Albatta bunda $f(x)$ funksiya biror x=x_0 nuqta va uning qandaydir atrofida ixtiyoriy marta differensiallanuvchi deb hisoblanadi. Bu muammo juda ko‘p nazariy va amaliy masalalarni yechishda paydo bo‘ladi va ularning ayrimlarini keyinchalik ko‘rib o‘tamiz. Buning uchun x=x_0 nuqtaning biror atrofida

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots \qquad (2)$$

tenglik o‘rinli deb faraz qilamiz. Bu tenglikdagi a_n (n=0,1,2,$\cdots$) koeffitsiyentlarni topamiz. Dastlab (2) darajali qatorda x=x_0 deb a_0=$f(x_0)$=$f^{(0)}(x_0)$ ekanligini ko‘ramiz. Endi (2) darajali qatorni hadlab differensiallab,

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\cdots$$

tenglikka ega bo‘lamiz va undan a_1=$f'(x_0)$= $f^{(1)}(x_0)$ natijani olamiz. Oxirgi darajali qatorni yana bir marta differensiallab,

$$f''(x)=2\cdot 1a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}+\cdots$$

darajali qatorni hosil etamiz va unda x=x_0 deb a_2=$f''(x_0)/(2\cdot1)$= $f^{(2)}(x_0)/2!$ ekanligini ko‘ramiz. Bu jarayonni davom ettirib, (2) darajali qator koeffitsiyentlari uchun

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n=0,1,2,\cdots \qquad (3)$$

formulani hosil qilamiz.

(3) formula orqali topiladigan a_n koeffitsiyentlardan foydalanib, ushbu darajali qatorni hosil etamiz:

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots\ . \qquad (3)$$

1-TA’RIF: (3) darajali qator $f(x)$ funksiya uchun ***Teylor qatori*** deb ataladi.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, (3) qatorga o‘xshash qatorlar dastlab 1694 yilda shveytsariyalik buyuk matematik I. Bernulli tomonidan qaralgan, ammo (3) ko‘rinishda ingliz matematigi B.Teylor (1685–1731 y.) tomonidan 1812 yilda chop etilgan.

Berilgan $f(x)$ bo‘yicha hosil qilingan (3) Teylor qatorini qarayotganimizda quyidagi uch hol bo‘lishi mumkin:

- (3) darajali qator $x=x_0$ nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda uzoqlashuvchi ;
- (3) qator yaqinlashuvchi, ammo uning yig‘indisi berilgan $f(x)$ funksiyadan farqli boshqa bir funksiyadan iborat. Bunga misol sifatida

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}\ , & x\neq 0, \\ 0\,, & x=0 \end{cases} \qquad (4)$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya ixtiyoriy marta differensiallanuvchi va uning barcha hosilalari $x_0=0$ nuqtada $f^{(n)}(0)=0$ ($n=0,1,2,\cdots$) shartni qanoatlantirishini ko‘rsatish mumkin. Shu sababli (4) funksiyaning Teylor qatori $\sum_{k=0}^{\infty} 0\cdot x^k$ ko‘rinishda bo‘lib, uning yig‘indisi $S(x)=0\neq f(x)$ funksiyadan iboratdir;

- (3) qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi berilgan $f(x)$ funksiyaga teng .

Biz uchun oxirgi hol bo‘lishi maqsadga muvofiq va buning uchun $f(x)$ funksiya qanday shartni qanoatlantirishi kerakligini aniqlaymiz. Bu maqsadda $f(x)$ funksiya va uning (3) Teylor qatori bo‘yicha hosil qilingan ushbu funksiyani qaraymiz:

$$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\ . \qquad (5)$$

<u>2-TA’RIF:</u> (5) funksiya $f(x)$ funksiya Teylor qatorining ***n-qoldiq hadi*** deyiladi.

(3) va (5) tengliklardan bevosita quyidagi teorema kelib chiqadi:

<u>1-TEOREMA:</u> Berilgan $f(x)$ funksiyaning (3) Teylor qatori $x=x_0$ nuqtaning biror atrofida yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi $f(x)$ funksiyaga teng bo‘lishi uchun uning (5) qoldiq hadi shu atrofdagi barcha x nuqtalarda

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0 \qquad (6)$$

shartni qanoatlantirishi zarur va yetarlidir.

Shunday qilib, (6) shart bajarilganda

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

yoki , qisqacha qilib yozganda,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad (7)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Agar $f(x)$ funksiya (1) ko‘rinishdagi biror darajali qatorga yoyilsa, bu qator albatta (7) Teylor qatoridan iborat bo‘lishi tushunarlidir. Bundan $f(x)$ funksiya darajali qatorga yoyilsa, bu qator yagona ravishda aniqlanishi kelib chiqadi.

(6) shartni bevosita tekshirish qiyin va shu sababli Teylor qatorining (5) qoldiq hadini

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,, \quad c\in(x_0,x) \qquad (8)$$

ko‘rinishda yozish mumkinligidan foydalanamiz (bu tasdiqni isbotsiz qabul etamiz).

3-TA’RIF: (8) tenglik $f(x)$ funksiya uchun Teylor qatorining ***Lagranj ko‘rinishidagi n-qoldiq hadi*** deyiladi.

Teylor qatorining Lagrang ko‘rinishidagi (8) qoldiq hadidan foydalanib, (6) shart bajarilishi uchun yetarli shartni topamiz.

2-TEOREMA: Agar $f(x)$ funksiya va uning hosilalari biror $[x_0-\alpha,\ x_0+\alpha]$ kesmada yuqoridan bir xil son bilan chegaralangan, ya’ni biror musbat M soni uchun

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M \ (n=0,1,2,\cdots)\,, \quad x\in[x_0-\alpha\,,\,x_0+\alpha\,]\,, \qquad (9)$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘lsa, unda (6) shart bajariladi .

Isbot: (9) shart bajarilganda, (8) formulaga asosan, (5) qoldiq hadni quyidagicha baholash mumkin:

$$\left|R_n(x)\right|=\frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}\le\frac{M}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}\le\frac{M}{(n+1)!}\alpha^{n+1}\ .$$

Bu yerdan (6) shart bajarilishi uchun

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n}{n!}=0 \qquad (10)$$

ekanligini ko‘rsatish kifoya. Agar $0\le\alpha\le1$ bo‘lsa, (10) tenglik bajarilishi ravshan va shu sababli $\alpha>1$ holni qarash yetarli. Bu holda $u_n=\alpha^n/n!$ deb belgilasak, unda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{n+1}=0$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerdan biror N soni uchun $n>N$ bo‘lganda $u_{n+1}< u_n$, ya’ni u_n monoton kamayuvchi ketma-ketlik ekanligini ko‘ramiz. Bundan tashqari $u_n>0$, ya’ni bu ketma-ketlik quyidan chegaralangan. Shu sababli monoton ketma-ketlik limiti haqidagi teoremaga asosan $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A\ge0$ limit mavjud . Bu holda

$$A=\lim_{n\to\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to\infty}(u_n\cdot\frac{\alpha}{n+1})=\lim_{n\to\infty}u_n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{n+1}=A\cdot0=0\,.$$

Demak, haqiqatan ham (10) tenglik o‘rinli va shu sababli (6) shart bajariladi.

Odatda Teylor qatorida $x_0=0$ bo‘lgan hol, ya’ni

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \qquad (11)$$

darajali qator keng qo‘llaniladi.

4-TA’RIF: (11) darajali qator $f(x)$ funksiyaning ***Makloren qatori*** deb ataladi.

Makloren qatori uchun qoldir hadning Lagranj ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\,, \quad c\in(0,x) \quad .$$

5.2. Ayrim funksiyalarning Makloren qatorlari . Dastlab bir nechta $f(x)$ elementar funksiyalar uchun Makloren qatorlarini yozib, ularning yaqinlashish sohasini va berilgan $f(x)$ funksiyaga yaqinlashuvini tekshiramiz.

• $f(x)=\sin x$. Bu funksiya uchun ixtiyoriy tartibli hosila mavjud va ularni birin-ketin topamiz:

$$f'(x)=\cos x\,,\ f''(x)=-\sin x\,,\quad f'''(x)=-\cos x\,,\quad f^{(4)}(x)=\sin x\,,\cdots,$$
$$f^{(n+4)}(x)=f^{(n)}(x)\,,\quad n=0,1,2,\cdots\ .$$

Bu yerdan quyidagi tengliklarga ega bo‘lamiz:

$$f(0)=,\ f'(0)=1\,,\quad f''(0)=0\,,\quad f'''(0)=-1\,,\quad f^{(4)}(0)=0\,,\cdots,$$
$$f^{(2n)}(0)=0\,,\quad f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n\quad .$$

$f(x)=\sin x$ funksiya Makloren qatorining qoldiq hadini baholash uchun uning hosilalarini, keltirish formulalariga asosan,

$$f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2}n)$$

ko‘rinishda yozish mumkinligidan foydalanamiz. Bu yerdan ixtiyoriy x uchun $|f^{(n)}(x)|\le 1$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, 2-teoremaga asosan, $f(x)=\sin x$ funksiyaning Makloren qatori $(-\infty,\ \infty)$ oraliqda yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi shu funksiyaning o‘ziga teng, ya’ni

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\ . \quad (12)$$

• $f(x)=\cos x$. Bu funksiya uchun ham ixtiyoriy tartibli hosila mavjud va ular

$$f'(x)=-\sin x\,,\ f''(x)=-\cos x\,,\quad f'''(x)=\sin x\,,\quad f^{(4)}(x)=\cos x\,,\cdots,$$
$$f^{(n+4)}(x)=f^{(n)}(x)\,,\quad n=0,1,2,\cdots$$

tengliklar bilan aniqlanadi. Bu yerdan quyidagi tengliklarga ega bo‘lamiz:

$$f(0)=,\ f'(0)=1\,,\quad f''(0)=0\,,\quad f'''(0)=-1\,,\quad f^{(4)}(0)=0\,,\cdots,$$
$$f^{(2n)}(0)=0\,,\quad f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n\quad .$$

$f(x)=\cos x$ funksiya uchun ham uning hosilalarini

$$f^{(n)}(x)=\cos(x+\frac{\pi}{2}n)$$

ko‘rinishda yozish mumkinligidan foydalanib, ixtiyoriy x uchun $|f^{(n)}(x)|\le 1$ ekanligini ko‘ramiz. Demak, 2-teoremaga asosan, $f(x)=\cos x$ funksiyaning Makloren qatori $(-\infty,\ \infty)$ oraliqda yaqinlashuvchi va

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (13)$$

tenglik o‘rinlidir.

• $f(x)=e^x$. Bu funksiyaning ixtiyoriy tartibli hosilasi mavjud va $f^{(n)}(x)=e^x$ va $f^{(n)}(0)=1$ ($n=0,1,2,\cdots$) bo‘ladi. Bundan tashqari, ixtiyoriy A musbat soni uchun $[-A,\ A]$ kesmada $f^{(n)}(x)<e^A$ ($n=0,1,2,\cdots$), ya’ni (9) shart bajariladi. Bulardan, $f(x)=e^x$ funksiyaning Makloren qatori $(-\infty,\ \infty)$ oraliqda yaqinlashuvchi va

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \quad (14)$$

ko‘rinishda bo‘lishi kelib chiqadi.

- $f(x)=\text{sh}x$. ***Giperbolik sinus*** deb ataladigan bu funksiyaning Makloren qatorini topish uchun dastlab (14) qatorda x o‘zgaruvchini $-x$ bilan almashtiramiz:

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k!}\ . \quad (15)$$

(14) va (15) Makloren qatorlarni hadma-had ayirish orqali $(-\infty,\infty)$ oraliqda o‘rinli bo‘lgan

$$\text{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (16)$$

natijani olamiz.

- $f(x)=\text{ch}x$. ***Giperbolik kosinus*** deb ataladigan bu funksiyaning Makloren qatorini topish uchun (14) va (15) qatorlarni hadlab qo‘shamiz:

$$\text{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\ . \quad (17)$$

Bu qatorning ham yaqinlashish oralig‘i $(-\infty,\infty)$ bo‘ladi.

- $f(x)=(1+x)^{\alpha}$. Bunda α- ixtiyoriy o‘zgarmas sonni ifodalaydi. Bu funksiyaning hosilalarini topamiz:

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\quad f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},\ \cdots\ ,$$

$$f^{(m)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-m+1)(1+x)^{\alpha-m}\ ,\quad m=0,1,2,\cdots\ .$$

Berilgan $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ funksiyaning Makloren qatori $(-1,1)$ oraliqda yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi funksiyani o‘ziga teng bo‘lishini ko‘rsatish mumkin, ya’ni

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k \quad (18)$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi. Bu darajali qator ***binomial qator*** deb ataladi.

Izoh: Agar (15) qatorda $\alpha=n=1,2,3,\cdots$, ya’ni natural songa teng bo‘lsa, unda $m>n$ holda $f^{(m)}(x)=0$ bo‘ladi. Natijada (15) qator chekli yig‘indiga aylanib, undan

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k\ ,\quad C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

ya’ni Nyuton binomi (I bob, §3, (5) ga qarang) kelib chiqadi.

Binomial qatorning kelgusida qo‘llaniladigan ikkita xususiy holini qaraymiz:

$$(1+x)^{-1}=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^{n+1}x^n+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n x^k\ ; \quad (19)$$

$$(1+x)^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots+$$

$$+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n}x^n+\cdots=\sum_{k-0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^k\ . \quad (20)$$

(20) Makloren qatorida $(2k-1)!!$ belgi $2k-1$ va ungacha bo‘lgan toq sonlar, $(2k)!!$ esa $2k$ va ungacha bo‘lgan juft sonlar ko‘paytmasini ifodalaydi .

- $f(x)=\ln(1+x)$. (19) qatorda x o‘zgaruvchini t bilan almashtirib va bu qatorni (0, x) oraliqda ($|x|<1$) hadlab integrallab, ushbu Makloren qatorini hosil etamiz:

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t}=\int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^k dt=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^x t^k dt=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \quad . \qquad (21)$$

(21) darajali qator sifatida x=1 nuqtada ham yaqinlashuvchi bo‘lishi oldin (§4, (16) ga qarang) ko‘rsatilgan edi. Endi x=1 nuqtada bu qatorning yig‘indisi S=ln2 bo‘lishini, ya’ni

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k+1} \qquad (22)$$

tenglik o‘rinli ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun

$$\frac{1}{1+x}\equiv 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}$$

ayniyatni [0, 1] kesma bo‘yicha hadlab integrallaymiz:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=\int_0^1 dx-\int_0^1 xdx+\int_0^1 x^2dx-\int_0^1 x^3dx+\cdots+(-1)^n\int_0^1 x^n dx+(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}+R_n=S_n+R_n \ .$$

Bu yerdan (22) tenglik quyidagicha keltirib chiqariladi:

$$|R_n|=\left|\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx\right|\le\int_0^1 x^{n+1}dx=\frac{1}{n+2}\Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n=\ln 2 .$$

Demak, (21) Makloren qatorining yaqinlashish sohasi (–1,1] yarim oraliqdan iboratdir.

- $f(x)$=arctg$x$. (19) darajali qatorda x o‘zgaruvchini t^2 bilan almashtirib va bu qatorni (0, x) oraliqda ($|x|<1$) hadlab integrallab,

$$\text{arctg}x=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k} dt=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^x t^{2k} dt=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad (23)$$

Makloren qatoriga ega bo‘lamiz. Bu darajali qator $x=\pm1$ chegaraviy nuqtalarda Leybnits shartlarini qanoatlantiruvchi va shu sababli yaqinlashuvchi bo‘lgan ishorasi navbatlanuvchi sonli qatorga aylanadi. Yuqoridagiga o‘xshab, $x=\pm1$ bo‘lganda uning yig‘indisi S=arctg(±1)= ±π/4 bo‘lishini ko‘rsatish mumkin. Shu sababli (23) Makloren qatorining yaqinlashish sohasi [–1, 1] kesmadan iboratdir.

- $f(x)$=arcsin$x$. (20) darajali qatorda x o‘zgaruvchini $-t^2$ bilan almashtirib va hosil bo‘lgan qatorni (0, x) oraliqda ($|x|<1$) hadlab integrallab, berilgan funksiyaning ushbu

$$\arcsin x=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}t^{2k}dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\int_0^x t^{2k}dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad (24)$$

Makloren qatorini hosil qilamiz. Bu qator $x=\pm1$ nuqtalarda ham yaqinlashuvchi va yig‘indisi $\arcsin(\pm1)=\pm\pi/2$ bo‘lishini ko‘rsatish mumkin. Demak, (24) Makloren qatorining yaqinlashish sohasi $[-1, 1]$ kesmadan iboratdir.

Bu qatorlardan foydalanib boshqa funksiyalarning Makloren qatorlarini topish mumkin. Misol sifatida $f(x)=\cos^2 x$ funksiyaning Makloren qatorini aniqlaymiz. Buning uchun uni

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos 2x) \qquad (25)$$

ko‘rinishda yozamiz. Endi $y=\cos x$ funksiyaning (13) Makloren qatorida x o‘zgaruvchini $2x$ bilan almashtirib, $y=\cos 2x$ funksiya Makloren qatorini hosil etamiz:

$$\cos 2x=1-\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\frac{2^6x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}x^{2k}}{(2k)!}\ .$$

Bu natijani (25) tenglikka qo‘yib, berilgan funksiyaning Makloren qatoriga ega bo‘lamiz:

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)=1-\frac{2x^2}{2!}+\frac{2^3x^4}{4!}-\frac{2^5x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

XULOSA

Yig‘indisi berilgan ixtiyoriy marta differensiallanuvchi funksiyaga teng bo‘ladigan darajali qatorlarning mavjudligi va ularni topish masalasi Teylor va uning xususiy holi bo‘lgan Makloren qatorlari yordamida o‘rganiladi. Bunda berilgan funksiya bo‘yicha tuzilgan darajali qatorning yaqinlashish oralig‘ini topish va bu qator yig‘indisini berilgan funksiyaga teng bo‘lish shartlarini aniqlash masalalari qaraladi. Bunda Makloren qatorining Lagranj ko‘rinishidagi qoldiq hadi muhim ahamiyatga ega bo‘ladi. Asosiy elementar va ayrim elementar funksiyalarning Makloren qatorlari topilib, ularning yaqinlashish sohasi aniqlanadi.

Tayanch iboralar

* Teylor qatori * Qoldiq had * Teylor qatorining yaqinlashishi * Qoldiq hadning Lagranj ko‘rinishi * Makloren qatori * Binomial qator

Takrorlash uchun savollar

1. Funksiyaning Teylor qatori qanday aniqlanadi?
2. Teylor qatorining yaqinlashishi to‘g‘risida nima deyish mumkin?
3. Teylor qatorining qoldiq hadi deb nimaga aytiladi?
4. Teylor qatorining yaqinlashishi uchun zaruriy va yetarli bo‘lgan shart nimadan iborat?
5. Teylor qatorining qoldiq hadi Lagranj ko‘rinishida qanday ifodalanadi?
6. Teylor qatori yaqinlashishining yetarli sharti nimadan iborat?

7. Makloren qatori qanday ta’riflanadi?
8. sin$x$ va cos$x$ funksiyalarning Makloren qatori qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
9. e^x, giperbolik sinus va cosinus funksiyalarning Makloren qatorini yozing.
10. Binomial qator deb nimaga aytiladi?
11. ln(1+x) funksiyaning Makloren qatori qanday topiladi?
12. arcsin$x$ va arctg$x$ funksiyalarning Makloren qatori qanday ifodalanadi?

Testlardan namunalar

1. Teylor qatori qayerda to‘g‘ri ifodalangan?

A) $f(0)+\frac{f'(0)}{1!}(x-a)+\frac{f''(0)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-a)^n+\cdots$;

B) $f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$;

C) $f(a)+\frac{f'(a)}{1!}x+\frac{f''(a)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n+\cdots$;

D) $a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$;

E) $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$.

2. Berilgan $f(x)$ funksiyaning $x–x_0$ darajalari bo‘yicha Teylor qatorining yaqinlashuvi haqidagi quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o‘rinli bo‘la oladi?

A) qator faqat $x=x_0$ nuqtada yaqinlashuvchi;

B) qator biror oraliqda yaqinlashuvchi, ammo uning yig‘indisi $f(x)$ funksiyaga teng emas;

C) qator biror oraliqda yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi $f(x)$ funksiyaga teng;

D) keltirilgan barcha tasdiqlar o‘rinli bo‘la oladi;

E) keltirilgan barcha tasdiqlar o‘rinli bo‘la olmaydi.

3. Agar $R_n(x)$ berilgan $f(x)$ funksiya Teylor qatorining qoldiq hadi bo‘lsa, bu qatorning yig‘indisi (a,b) oraliqda $f(x)$ funksiyaga teng bo‘lishi uchun qaysi shart zarur va yetarli?

A) (a,b) oraliqda $R_n(x)$ yuqoridan chegaralangan;

B) (a,b) oraliqda $R_n(x)$ quyidan chegaralangan;

C) (a,b) oraliqda $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$;

D) (a,b) oraliqda $R_n(x)$ monoton o‘suvchi;

E) (a,b) oraliqda $R_n(x)$ monoton kamayuvchi.

4. Berilgan $f(x)$ funksiyaning $x–x_0$ darajalari bo‘yicha Teylor qatorining $R_n(x)$ qoldiq hadi Lagranj ko‘rinishida qanday ifodalanadi?

A) $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, c\in(x_0,x)$;

B) $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(c-x_0)^{n+1}, c\in(x_0,x)$;

C) $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}, c\in(x_0,x)$;

D) $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, c\in(x_0,x)$; E) $R_n(x)=\dfrac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)!}, c\in(x_0,x)$.

5. Berilgan $f(x)$ funksiyaning $x–x_0$ darajalari bo‘yicha Teylor qatorining yig‘indisi (a,b) oraliqda shu funksiyaning o‘ziga teng bo‘lishi uchun qanday shart yetarli bo‘ladi?

A) (a,b) oraliqda biror chekli M soni uchun $|f(x)|\le M$;
B) (a,b) oraliqda biror chekli M soni uchun $|f(x)|\ge M$;
C) (a,b) oraliqda biror chekli M soni va barcha n=0,1,2, $\cdots$ uchun $|f^{(n)}(x)|\le M$;
D) (a,b) oraliqda biror chekli M soni va barcha n=0,1,2, $\cdots$ uchun $|f^{(n)}(x)|\ge M$;
E) to‘g‘ri javob keltirilmagan.

6. Berilgan $f(x)$ funksiyaning Makloren qatori qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?

A) $f(0)+\dfrac{f'(0)}{1!}(x-a)+\dfrac{f''(0)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-a)^n+\cdots$;

B) $f(a)+\dfrac{f'(a)}{1!}(x-a)+\dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$;

C) $f(a)+\dfrac{f'(a)}{1!}x+\dfrac{f''(a)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n+\cdots$;

D) $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$;

E) $f(0)+\dfrac{f'(0)}{1!}x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$.

7. $1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots$, $|x|<1$ darajali qator yig‘indisi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?

A) cos2x; B) $\dfrac{1}{1+x^2}$; C) $\dfrac{1}{1-x^2}$; D) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$; E) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Ushbu $y=f(x)$ funksiyalarning Makloren qatorlarini toping:
a) $f(x)=\sin nx+\cos nx$; *b)* $f(x)=\ln(n+x)$; *c)* $f(x)=(1+nx)^{-1}$.

2. Quyidagi Makloren qatorining yig‘indisini ifodalovchi $y=f(x)$ funksiyani toping:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{ix^{i-1}}{n^i}, \quad |x|<n .$$

§6. DARAJALI QATORLARNING TATBIQLARI

- ***Ildizlarning taqribiy qiymatini topish.***
- ***Funksiya qiymatlarini taqribiy hisoblash.***
- ***Limitlarni hisoblash.***
- ***Elementar bo‘lmagan boshlang‘ich funksiyalarni topish.***
- ***Differensial tenglamalarni yechish.***

Makloren qatorlari nazariy va amaliy masalalarni yechishda keng qo‘llaniladi. Bu tatbiqlardan ayrimlarini qarab chiqamiz.

6.1. Ildizlarning taqribiy qiymatini topish. **Turli $\sqrt[m]{a}$ ko‘rinishdagi ildizlarning taqribiy qiymatini berilgan ε>0 aniqlikda topish uchun binomial qatorlardan foydalaniladi. Buni $\sqrt[6]{68}$ ildiz qiymatini ε=0.0001 aniqlikda hisoblash misolida namoyish etamiz. Buning uchun dastlab $\sqrt[6]{68}$ ildizni bizga qulay ko‘rinishda quyidagicha ifodalaymiz:**

$$\sqrt[6]{68}=\sqrt[6]{64+4}=\sqrt[6]{64(1+\frac{1}{16})}=2\sqrt[6]{1+\frac{1}{16}}=2(1+\frac{1}{16})^{1/6} \quad .$$

Bu yerdan ko‘rinadiki, berilgan ildizni hisoblash uchun binomial qatorda α=1/6 , x=1/16 deb olishimiz kerak. Bu holda ushbu ishorasi navbatlanuvchi sonli qatorga ega bo‘lamiz:

$$\sqrt[6]{68}=2(1+\frac{1}{16})^{1/6}=2[1+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{16}+\cdots+\frac{\frac{1}{6}(\frac{1}{6}-1)\cdots(\frac{1}{6}-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{16^n}+\cdots] \ .$$

Bu qator hadlarini 5 xona aniqlikda hisoblab,

$$\sqrt[6]{68}=2(1+\frac{1}{16})^{1/6}=2[1+0.010417-0.000271+0.000010+\cdots]\approx 2.02031$$

taqribiy tenglikni olamiz. Bunda yo‘l qo‘yilgan xatolik, Leybnits alomatidan kelib chiqadigan natijaga asosan, 0.00002 sonidan katta emas va shu sababli ε=0.0001 aniqlik bilan $\sqrt[6]{68}\approx 2.0203$ bo‘ladi.

6.2. Funksiya qiymatlarini taqribiy hisoblash. Makloren qatorlari yordamida berilgan $y=f(x)$ funksiyaning biror $x=x_0$ nuqtadagi taqribiy qiymatini talab etilgan ε>0 aniqlikda hisoblash mumkin. Buning uchun $y=f(x)$ funksiyaning Makloren qatori $x=x_0$ nuqtani o‘z ichiga oluvchi biror $(–R, R)$ oraliqda yaqinlashuvchi va bu yerda uning qoldiq hadi $R_n(x)$ uchun (6) shart bajariladi, ya’ni $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$ deb olamiz. Bu holda

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\ , \quad x\in(-R,R)$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bu tenglikdan foydalanib

$$f(x_0)\approx S_n(x_0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x_0^k\ , \quad x_0\in(-R,R)\,,$$

taqribiy formulani hosil etamiz. Bunda n qiymati, umumiy holda,

$$\left|R_n(x_0)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x_0^{n+1}\right| < \varepsilon\,, \quad c \in (0, x_0)\,,$$

tengsizlikdan topiladi.

Bunga misol sifatida ixtiyoriy natural sonning logarifmini hisoblash formulasini topish masalasini ko'ramiz. Bu maqsadda oldin ko'rilgan

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} \qquad (1)$$

Makloren qatorida x o'zgaruvchini $-x$ bilan almashtirib,

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - ... - \frac{x^{n+1}}{n+1} - \cdots = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}\,, \quad x \in (-1,1)\,, \quad (2)$$

Makloren qatoriga ega bo'lamiz. (1) va (2) Makloren qatorlari yordamida faqat (0,2] yarim oraliqda yotgan sonlarni logarifmini hisoblash mumkinligini ta'kidlab o'tamiz. Bundan tashqari (1) yoki (2) darajali qatorlardan mos ravishda x=1 yoki x=–1 chegaraviy nuqtalarda hosil bo'ladigan sonli qatorlar o'zlarining S=ln2 yig'indisiga juda sekin yaqinlashadi. Masalan, (1) darajali qatorda x=1 deb hosil qilinadigan sonli qator yordamida ln2 qiymatini 0.001 aniqlikda hisoblash uchun bu qatordagi kamida 1000 ta qo'shiluvchi yig'indisini topish kerak.

Shu sababli bu yerda boshqacha yo'l tutamiz. (1) va (2) Makloren qatorlarini hama-had ayirib, ushbu natijaga kelamiz:

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right]. \quad (3)$$

Bu yerda x=1/(2m+1) , m=1,2,3,··· , holda 0<x<1 va

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{2(m+1)}{2m} = \frac{m+1}{m}$$

bo'ladi. Bu holda (3) Makloren qatoridan ushbu sonli qatorga ega bo'lamiz:

$$\ln\frac{m+1}{m} = 2\left[\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{3(2m+1)^3} + \frac{1}{5(2m+1)^5}\cdots + \frac{1}{(2n+1)(2m+1)^{2n+1}} + \cdots\right].$$

Bu yerdan natural sonlarning logarifmlarini hisoblash uchun quyidagi rekurrent formulaga ega bo'lamiz:

$$\ln(m+1) = \ln m + 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2m+1)^{2k+1}}\,, \quad m = 1,2,3,\cdots\,. \qquad (4)$$

Masalan, bu formulada m=1 deb olsak

$$\ln 2 = 2\left[\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + ... + \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}} + \cdots\right] \qquad (5)$$

tenglik hosil bo'ladi. Bunda ln2 qiymatini 0.001 aniqlikda hisoblash uchun nechta qo'shiluvchini olish kerakligini aniqlash maqsadida (5) musbat hadli sonli qatorning R_n qoldiq hadini baholaymiz:

$$R_n = 2\left[\frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+3)3^{2n+3}} + \frac{1}{(2n+5)3^{2n+5}} + \cdots\right] <$$

$$< 2\left[\frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+1)3^{2n+3}} + \frac{1}{(2n+1)3^{2n+5}} + \cdots\right] =$$

$$= \frac{2}{(2n+1)3^{2n+1}}[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \cdots] = \frac{2}{(2n+1)3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{1-3^{-2}} = \frac{1}{4(2n+1)3^{2n-1}} \quad .$$

Demak, (28) qatorning qoldiq hadi uchun

$$R_n < \frac{1}{4(2n+1)3^{2n-1}} \tag{6}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Undan

$$R_1 < \frac{1}{36} \approx 0.02778 > 0.001, \quad R_2 < \frac{1}{540} \approx 0.0018 > 0.001,$$

$$R_3 < \frac{1}{6804} \approx 0.0001 < 0.001,$$

ya’ni ln2 qiymatini 0.001 aniqlikda hisoblash uchun (5) qatorda atigi uchta qo‘shiluvchini olish kifoya ekanligini ko‘ramiz. Demak,

$$\ln 2 \approx 2\left[\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5}\right] = 0.693004... \ .$$

Jadvaldan 5 xona aniqlikda ln2=0.69315 ekanligini ko‘rish mumkin. Bundan yuqoridagi ln2 uchun taqribiy tenglik uch xona aniqlikda ekanligi kelib chiqadi.

6.3. Limitlarni hisoblash. **Darajali qatorlarni limitlarni hisoblashga ham tatbiq etish mumkin. Buni quyidagi ikkita misolda namoyish qilamiz.**

1) $L = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x}$ **. Bu limitni hisoblash uchun *f*(*x*)=sin*x* va *f*(*x*)=*e*^{x} funksiyalarni ularning Makloren qatorlari bilan almashtiramiz:**

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{2(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots) - 2 - 2x - x^2}{x - (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots)}{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + - + \cdots} = \lim_{x\to 0}\frac{2(\frac{1}{3!} + \frac{x}{4!} + \cdots)}{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + - \cdots} = \frac{\frac{2}{3!}}{\frac{1}{3!}} = 2 \ .$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{e^x - 1 - x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots)}{(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots) - 1 - x} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\cdots}{\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\cdots}{\frac{1}{2!}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+\cdots}=\frac{\frac{1}{2!}}{\frac{1}{2!}}=1\ .$$

6.4. Elementar bo‘lmagan boshlang‘ich funksiyalarni topish. Bizga ma’lumki, berilgan $y=f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi $y=F(x)$ aniq integral yordamida

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

formula orqali topilishi mumkin. Ammo har doim ham bu aniq integral elementar funksiyalarda ifodalanmaydi. Bunday hollarda $F(x)$ boshlang‘ich funksiya darajali qatorlar orqali ifodalanishi mumkin. Buning uchun integral ostidagi $f(t)$ funksiyaning Makloren qatorini topamiz va uni hadlab integrallaymiz. Buni quyidagi ikkita misolda ko‘rib chiqamiz.

❖ Dastlab ***integral sinus*** deb ataluvchi ushbu funksiyaning ifodasini topamiz:

$$\mathrm{Si}(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt\quad .$$

Buning uchun $f(x)=\sin x$ funksiyaning Makloren qatorida x o‘zgaruvchini t orqali belgilab va hosil bo‘lgan qatorni t ga bo‘lib, $(-\infty, \infty)$ oraliqda yaqinlashuvchi ushbu darajali qatorni hosil etamiz:

$$\frac{\sin t}{t}=1-\frac{t^2}{3!}+\frac{t^4}{5!}-\frac{t^6}{7!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{t^{2k}}{(2k+1)!}\ .$$

Bu darajali qatorni $(0, x)$ oraliq bo‘yicha hadlab integrallab, integral sinus uchun $(-\infty, \infty)$ oraliqda yaqinlashuvchi ushbu darajali qatorga ega bo‘lamiz:

$$\mathrm{Si}x=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^x\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{t^{2k}}{(2k+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}\int_0^x t^{2k}dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}\ .$$

❖ Endi ***Laplas funksiyasi*** deb ataladigan ushbu integralni qaraymiz:

$$\Phi(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt\ .$$

Bu funksiyani darajali qator orqali ifodalash uchun $f(x)=e^x$ funksiyaning Makloren qatorida x o‘zgaruvchini t^2 bilan almashtiramiz va hosil bo‘lgan qatorni hadlab integrallaymiz:

$$\Phi(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt=\int_0^x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{k!}dt=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x\frac{t^{2k}}{k!}dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!}\ .$$

6.5. Differensial tenglamalarni yechish. **Agar berilgan differensial tenglamaning y umumiy yechimini aniq topish usuli bizga noma’lum yoki u elementar funksiyalarda ifodalanmasa, ayrim hollarda bu yechimni darajali qatorlar yordamida topish mumkin. Buning uchun bu yechim**

$$y=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n+\cdots \qquad \textbf{(9)}$$

darajali qator ko‘rinishida izlanadi. Bu yerdagi noma’lum C_n (n=0,1,2, ···) koeffitsiyentlar darajali qatorni berilgan differensial tenglamaga qo‘yish va hosil bo‘lgan tenglikning ikki tomonidagi x o‘zgaruvchining bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtirish orqali topilishi mumkin. Bu usulni I tartibli ushbu

$$y' + xy = 0 \Rightarrow y' = -xy \qquad \textbf{(10)}$$

differensial tenglamaning umumiy yechimini topish misolida namoyish etamiz. Bu yechimni (9) darajali qator ko‘rinishida ifodalab va bu qatorni hadlab differensiallab, berilgan tenglamaga ko‘ra ushbu tenglikni hosil etamiz:

$$C_1 + 2C_2x + \cdots + nC_nx^{n-1} + \cdots = -x(C_0 + C_1x + \cdots + C_nx^n + \cdots) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1 + 2C_2x + \cdots + nC_nx^{n-1} + \cdots = -C_0x - C_1x^2 - \cdots - C_nx^{n+1} + \cdots .$$

Bu yerdan C_1=0 va qolgan koeffitsiyentlar uchun ushbu tengliklarga ega bo‘lamiz:

$$nC_n = -C_{n-2}\,, \quad n = 2,3,4,\cdots .$$

Bu tengliklardan birin-ketin C_n koeffitsiyentlarni topib, ular uchun

$$C_n = \begin{cases} (-1)^m \dfrac{C_0}{(2m)!!}\,, & n = 2m\,, \\ 0\,, & n = 2m-1 \end{cases} \qquad (m = 1,2,3,\cdots)$$

formulaga ega bo‘lamiz. Demak, berilgan I tartibli differensial tenglama umumiy yechimi

$$y = C_0\left(1 - \frac{x^2}{2!!} + \frac{x^4}{4!!} - \frac{x^6}{6!!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!!} + \cdots\right) = C_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!!} \qquad \textbf{(11)}$$

darajali qator orqali ifodalanishini ko‘ramiz. Bu yerda C_0 ixtiyoriy chekli sonni ifodalaydi. Dalamber alomati yordamida (11) qator (–∞, ∞) oraliqda yaqinlashuvchi ekanligini o‘quvchi mustaqil ravishda tekshirib ko‘rishi mumkin.

Yuqorida ko‘rib o‘tilgan $f(x)=e^x$ funksiyaning Makloren qatorida x o‘zgaruvchini $-x^2/2$ bilan almashtirib

$$e^{-x^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2/2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^k\,k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!!}$$

natijani olamiz. Bundan foydalanib (10) differensial tenglamaning (11) umumiy yechimini $y = C_0e^{-x^2/2}$ ko‘rinishda bo‘lishini topamiz.

Darajali qator yordamida Koshi masalasini ham yechish mumkin. Bunda yechim

$$y = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

ko‘rinishdagi darajali qator ko‘rinishida topiladi. Bu qatordagi x_0 va $y^{(n)}(x_0)$, n=0,1,2,··· , Koshi masalasining boshlang‘ich shartlari va differensial tenglama orqali birin-ketin aniqlanadi. Misol sifatida

$$y' = x - 2y\,, \quad y(0) = 0 \qquad \textbf{(12)}$$

Koshi masalasi yechimini darajali qator yordamida topamiz. Dastlab boshlang'ich shart va berilgan differensial tenglamadan

$y(0)=0\,,\quad y'(0)=0-2y(0)=0$

ekanligini ko'ramiz.

Endi berilgan tenglamani ikkala tomonini differensiallab va oldingi natijalardan foydalanib,

$y''=(x-2y)'=1-2y'\Rightarrow y''(0)=1-2y'(0)=1$

ekanligini topamiz. Xuddi shunday tarzda davom ettirib,

$y'''(0)=-2y''(0)=-2\,,\ y^{(4)}(0)=-2y'''(0)=(-2)^2,\cdots,\ y^{(n)}(0)=(-2)^{n-2}$

natijalarga erishamiz. Demak, (12) Koshi masalasining yechimi

$$y=\frac{x^2}{2!}-\frac{2x^3}{3!}+\frac{2^2x^4}{4!}-\frac{2^3x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{2^{n-2}x^n}{n!}+\cdots=\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{(2x)^k}{4\cdot k!}\qquad \textbf{(13)}$$

darajali qator orqali ifodalanadi. Bu darajali qator ham (–∞, ∞) oraliqda yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

***f*(*x*)=*e*^{x} funksiyaning Makloren qatorida *x* o'zgaruvchini –*x*/2 bilan almashtirishdan hosil bo'ladigan darajali qatordan foydalanib, (13) yechimni**

$y=\frac{1}{4}(e^{-2x}-1+2x)$

ko'rinishda ifodalash mumkin. Bu o'quvchiga mustaqil ish sifatida havola etiladi.

XULOSA

Darajali qatorlar, jumladan Makloren qatorlari juda ko'p amaliy tatbiqlarga ega. Bularga misol sifatida darajali qatorlar yordamida turli taqribiy hisoblashlarni bajarish, limitlarning qiymatini aniqlash, murakkab funksiyalardan olingan integrallarni hisoblash, elementar bo'lmagan funksiyalarni ifodalash, differensial tenglamalar va ular uchun Koshi masalasini yechish kabilarni ko'rsatish mumkin.

Darajali qatorlar nazariy tadqiqotlarda ham keng qo'llaniladi. Masalan, binomning natural darajalari uchun topilgan natija Nyuton tomonidan binomial qator ko'rinishida ixtiyoriy daraja uchun umumlashtirildi.

Takrorlash uchun savollar

1. Ildizlarning taqribiy qiymatini topish uchun qaysi darajali qatordan foydalaniladi?
2. Darajali qator yordamida funksiyaning taqribiy qiymati qanday topiladi?
3. Limitlarni hisoblashda darajali qatordan qanday foydalaniladi?
4. Integral darajali qator yordamida qanday hisoblanadi?
5. Differensial tenglamaning umumiy yechimi darajali qator orqali qanday topiladi?
6. Makloren qator yordamida Koshi masalasining yechimi qanday topiladi?

Testlardan namunalar

1. Darajali qator yordamida quyidagi masalalardan qaysi birini yechib bo‘lmaydi?
   A) ildizlarning taqribiy qiymatini hisoblash;
   B) funksiyaning taqribiy qiymatini hisoblash;
   C) noelementar boshlang‘ich funksiyani topish;
   D) funksiyaning davriyligini aniqlash;
   E) differensial tenglamaning umumiy yecimini topish.

2. $\sqrt[3]{9}$ ildiz taqribiy qiymatini tegishli binomial qatorning dastlabki uchta hadini qo‘shish orqali toping.
   A) $\frac{643}{312}$; B) $\frac{435}{211}$; C) $\frac{377}{183}$; D) $\frac{599}{288}$; E) $\frac{243}{115}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{\cos x-1}$ qiymatini darajali qator yordamida hisoblang.
   A) 0; B) 1; C) –1; D) ∞; E) 1/3.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^2\sin x}$ qiymatini darajali qator yordamida hisoblang.
   A) 0; B) 1/2; C) –1/2; D) ∞; E) 1/3.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{arctg}x}{x(1-\cos x)}$ qiymatini darajali qator yordamida hisoblang.
   A) 0; B) 1/3; C) –1/3; D) ∞; E) 1/2.

6. $\int\limits_0^x\frac{e^t-1}{t}dt$ integralni darajali qator ko‘rinishida ifodalang.
   A) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2}$; B) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k}$; C) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k\cdot k!}$;
   D) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k\cdot k!}$; E) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$.

7. $y'=x^2+y^2$, $y(0)=1$, Koshi masalasining yechimini ifodalovchi darajali qatorning 4-hadini yozing :
   A) $\frac{8x^3}{3!}$; B) $-\frac{8x^3}{3!}$; C) $\frac{6x^3}{3!}$; D) $-\frac{6x^3}{3!}$; E) $\frac{2x^3}{3!}$.

<u>Mustaqil ish topshiriqlari</u>

1. Darajali qator yordamida $\sqrt{n^2+\frac{1}{10}}$ ildizning taqribiy qiymatini hisoblang.

2. $\int \frac{\sin nx}{x} dx$ aniqmas integralni darajali qator orqali ifodalang.

3. $y' = \sin(y+nx)$, $y(0)=0$ Koshi masalasi yechimini ifodalovchi darajali qatorning dastlabki 5 ta hadini yozing.

ADABIYOTLAR

1. **НАСРИДДИНОВ Ғ.Н.** Математик экономика элементлари. Тошкент, «Ўқитувчи», 1984 й.

2. **НАСРИДДИНОВ Ғ.Н., АБДУРАИМОВ М.** Иқтисодчилар учун математика.(Ўқув қўлланма). Тошкент, «Университет», 2003 й.

3. **САИДНАЗАРОВ Ш. А., ОРТИҚОВА М.Т.** Бошланғич молиявий математика асослари. Тошкент, ТДИУ, 2002 й.

4. **SHARAHMETOV SH., NAIMJONOV A.** Iqtisodchilar uchun matematika.(Darslik). Toshkent, «Fan va texnologiya», 2007 y.

5. **КРЕМЕР Н.Ш., ПУТКО Б.А., ТРИШИН И.М.** Математика для экономистов: от арифметики до эконометрике. Москва, «Высшее образование», 2007 г.

6. **КРЕМЕР Н.Ш.** Математика для экономистов. Практикум. Москва, «ЮНИТИ», 2006 г.

7. **КРЕМЕР Н.Ш., ПУТКО Б.А., ТРИШИН И.М., ФРИДМАН М.Н.** Высшая математика для экономистов. Москва, «ЮНИТИ», 2000 г.

8. **ЕРМАКОВ В.И.** и др. Общий курс высшей математики для экономистов. Москва. «ИНФРА», 2006 г.

9. **КАСТРИЦА О.А.** Высшая математика для экономистов. Минск, «Новое знание», 2006 г.

10. **ЛУКАНКИН Г.Л., ЛУКАНКИН А.Г.** Высшая математика для экономистов. Москва, «Экзамен», 2006 г.

11. **БЕЛЬКО И.В., КУЗЬМИЧ К.К.** Высшая математика для экономистов. Экспресс–курс. Минск, «Новое знание», 2006 г.

12. **БАБАЙЦЕВ В.А., БРАИЛОВ А.В., ВИНЮКОВ И.А., РЯБОВ П.Е.** Математика для экономистов. Руководство к решению задач. Москва, 2003 г.

13. **КЛИМЕНКО Ю.И.** Высшая математика для экономистов в примерах и задачах. Москва, «Экзамен», 2006 г.

Internet manbaalari:

1. http: // www. finansce-book.ru /catalog/50/
2. http: // books.google. com / books?q=mathematics+for+finance &btnG= Search+Books&ct=title

ASOSIY TAYANCH IBORALARNING IZOHLI LUG'ATI

№	TAYANCH IBORA	TAYANCH IBORA MAZMUNI
1	**Matematika**	Haqiqiy olamning miqdoriy munosabatlari va fazoviy formalari haqidagi fan
2	**Model**	O‘rganilayotgan ob’yektning ma’lum bir muhim xususiyatlarini ifodalovchi moddiy yoki ideal ko‘rinishdagi qurilma
3	**Iqtisodiy-matematik model**	Iqtisodiy jarayonlarni soddalashtirilgan, formallashtirigan ko‘rinishda ifodalovchi matematik modellar
4	**To‘plam**	Biror xususiyati bo‘yicha umumiylikga ega bo‘lgan ob’yektlar majmuasi
5	**To‘plamlar birlashmasi**	A va B to‘plamlardan kamida bittasiga tegishli bo‘lgan elementlar to‘plami va $A \cup B$ kabi belgilanadi.
6	**To‘plamlar kesishmasi**	A va B to‘plamlarning ikkalasiga ham tegishli bo‘lgan elementlar to‘plami va $A \cap B$ kabi belgilanadi.
7	**To‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi**	$a \in A$ va $b \in B$ elementlardan tuzilgan (a,b) juftliklar to‘plami va $A \times B$ kabi belgilanadi.
8	**Chekli to‘plam**	Elementlar soni chekli bo‘lgan to‘plam.
9	**Cheksiz to‘plam**	Chekli bo‘lganmagan to‘plam.
10	**Ekvivalent to‘plamlar**	O‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatib bo‘ladigan to‘plamlar.
11	**Sanoqli to‘plam**	Natural sonlar to‘plamiga ekvivalent bo‘lgan to‘plam.
12	**Sanoqsiz to‘plam**	Sanoqli bo‘lmagan cheksiz to‘plam.
13	**Kontinuum quvvatli to‘plam**	[0,1] kesmaga ekvivalent bo‘lgan to‘plam.
14	**Kombinatorik masala**	Chekli to‘plamning turli qism to‘plamlarini hosil qilish bilan bog‘liq masalalar.
15	**Kombinatorika**	Matematikaning kombinatorik masalalar bilan shug‘ullanadigan bo‘limi.
16	**Matritsa**	m ta satr va n ta ustun shaklida joylashtirilgan $m \cdot n$ ta sondan iborat jadval.
17	**Birlik matritsa**	Barcha diagonal elementlari $a_{ii}=1$, qolgan elementlari $a_{ij}=0$ $(i \neq j)$ bo‘lgan kvadrat matritsa.
18	**Nol matritsa**	Barcha elementlari $a_{ij}=0$ bo‘lgan matritsa.
19	**Determinant**	Kvadrat matritsaning elementlaridan ma’lum bir qoida asosida hosil qilinadigan son.
20	**Chiziqli tenglamalar sistemasi**	Noma’lumlar birinchi darajada, chiziqli ko‘rinishda qatnashgan n noma’lumli m ta tenglamalardan iborat sistema.
21	**Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi**	Barcha ozod hadlari nolga teng bo‘lgan chiziqli tengamalar sistemasi.
22	**Trivial yechim**	Bir jinsli sistemaning faqat nollardan iborat yechimi.
23	**Fundamental yechimlar**	Sistemaning barcha yechimlari ularning chiziqli kombinatsiyasi kabi ifodalanishi mumkin bo‘lgan chiziqli bog‘liqmas yechimlar.
24	**Leont’ev modeli**	Ko‘p tarmoqli xalq xo‘jaligining tarmoqlararo balans munosabatlarini ifodalovchi chiziqli tenglamalar sistemasi.
25	**Skalyar**	Sonli qiymati bilan to‘liq aniqlanadigan miqdor

26	**Vektor**	Ham sonli qiymati, ham yo‘nalishi bilan aniqlanadigan kattalik.
27	**Vektorning moduli**	Vektorning sonli qiymati, uzunligi.
28	**Nol vektor**	Boshi va uchi bitta nuqtada bo‘lgan vektor.
29	**Kollinear vektorlar**	Bir to‘g‘ri chiziq yoki parallel to‘g‘ri chiziqlarda joylashgan vektorlar.
30	**Ort vektorlar (ortlar)**	Koordinata o‘qlarida joylashgan, musbat yo‘nalgan va modullari birga teng bo‘lgan vektorlar.
31	**Vektorning koordinatlari**	Vektor yoyilmasidagi ortlar oldidagi sonli koeffitsiyentlar.
32	**Komplanar vektorlar**	Bitta yoki parallel tekisliklarda joylashgan uch va undan ortiq vektorlar.
33	**n o‘lchovli vektor**	Tartiblashtirilgan *n* ta sondan iborat matematik ifoda.
34	**Vektor fazo**	Vektorlar to‘plami va unda aniqlangan chiziqli amallardan iborat tizim.
35	**Operator**	R^n vektor fazoni R^m vektor fazoga akslantirish.
36	**Chiziqli operator**	$A(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=A(\boldsymbol{x}_1)+A(\boldsymbol{x}_2)$ va $A(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda A(\boldsymbol{x})$ (λ-const.) shartlarni qanoatlantiruvchi operator.
37	**Operatorning xususiy soni**	$A(\boldsymbol{x})=\lambda A(\boldsymbol{x})$ tenglik o‘rinli bo‘ladigan λ sonlar.
38	**Operatorning xususiy vektori**	$A(\boldsymbol{x})=\lambda A(\boldsymbol{x})$ tenglik o‘rinli bo‘ladigan $\boldsymbol{x}$ vektorlar.
39	**Operatorning xarakteristik tenglamasi**	A matritsali chiziqli operator uchun $\|A-\lambda E\|=0$ (E– birlik matritsa) tenglama.
40	**Kvadratik forma**	$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$ ko‘rinishdagi yig‘indi
41	**Geometrik ob’yekt tenglamasi**	Geometrik ob’yektga tegishli nuqtalarining koordinatalari uchun o‘rinli bo‘ladigan tenglik .
42	**Aylana**	Markaz deb ataluvchi O nuqtadan bir xil *R* masofada joylashgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o‘rni. *R* aylana radiusi deyiladi.
43	**Ellips**	Fokuslar deb ataluvchi ikkita F_1 va F_2 nuqtalargacha masofalarining yig‘indisi o‘zgarmas son bo‘lgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o‘rni.
44	**Giperbola**	Fokuslar deb ataluvchi ikkita F_1 va F_2 nuqtalargacha masofalar ayirmasining absolut qiymati o‘zgarmas son bo‘lgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o‘rni.
45	**Parabola**	Berilgan *l* to‘g‘ri chiziq bilan berilgan *F* nuqtadan teng uzoqlikda joylashgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o‘rni. Bunda *l*-direktrisa, *F*-fokus deyiladi.
46	**Sonli to‘plam**	Elementlari sonlardan iborat to‘plam.
47	**Natural sonlar to‘plami**	$N=\{1,2,3,\ \ldots,\ n,\ \ldots\}$ sonli to‘plam.
48	**Butun sonlar to‘plami**	$Z=\{\ldots,\ -2,\ -1,0,1,2,\ldots\}$ sonli to‘plam.
49	**Ratsional sonlar to‘plami**	$Q=\{m/n,\ m\in Z,\ n\in N\}$ ko‘rinishdagi sonlar to‘plami.
50	**Irratsional sonlar to‘plami**	Ratsional bo‘lmagan sonlar to‘plami. Masalan, $\sqrt{2}$.
51	**Haqiqiy sonlar to‘plami**	Ratsional va irratsional sonlar birlashmasi.
52	**Nuqta atrofi**	Berilgan nuqtani oz ichiga olgan ixtiyoriy bir oraliq.
53	**Sonning absolut qiymati**	Har qanday *x* soni uchun bu sondan koordinata boshigacha bo‘lgan masofani ifodalovchi va $\|x\|$ kabi belgilanuvchi nomanfiy son.

54	**Sonli ketma-ketlik**	$a_1, a_2, a_3,\ldots, a_n,\ldots$ ko‘rinishda yozilgan haqiqiy sonlarning cheksiz qatori.
55	**Sonli ketma-ketlik limiti**	$\{a_n\}$ sonli ketma-ketlikning a_n umumiy hadi $n\to\infty$ bo‘lganda cheksiz yaqinlashib boradigan biror A soni. $\{a_n\}$ ketma-ketlik limiti $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ kabi yoziladi.
56	**Funksiya**	O‘zgaruvchi $x\in$D qiymatiga ikkinchi bir $y\in$E o‘zgaruvchining aniq bir qiymatini mos qo‘yish. Bunda x erkli o‘zgaruvchi yoki argument, y erksiz o‘zgaruvchi yoki funksiya deyiladi va $y=f(x)$ kabi ifodalanadi.
57	**Funksiyaning aniqlanish sohasi**	x argumentning $y=f(x)$ funksiya ma’noga ega bo‘ladigan qiymatlari to‘plami va D$\{f\}$kabi belgilanadi.
58	**Funksiyaning qiymatlar sohasi**	$y=f(x)$ funksiyada $x\in$D$\{f\}$ bo‘lganda y funksiya qabul etadigan qiymatlarining E$\{f\}$ to‘plami.
59	**Monoton funksiyalar**	O‘suvchi (kamaymovchi) va kamayuvchi (o‘smovchi) funksiyalar birgalikda monoton funksiyalar bo‘ladi.
60	**Juft (toq) funksiya**	$f(-x)=f(x)$ $[f(-x)=-f(x)]$ shartni qanoatlantiruvchi $y=f(x)$ funksiya.
61	**Davriy funksiya**	Biror T>0 soni va barcha $x\in$D$\{f\}$uchun $f(x+\mathrm{T})= f(x)$ shartni qanoatlantiruvchi $y=f(x)$ funksiya.
62	**Murakkab funksiya**	$y=f(x)$ va $y=\varphi(x)$ funksiyalardan hosil qilinadigan $y=f(\varphi(x))$ funksiya. f-tashqi, φ-ichki funksiya deyiladi.
63	**Teskari funksiya**	$y=f(x)$ funksiya bo‘yicha x o‘zgaruvchini y o‘zgaruvchi orqali ifodalovchi $x= \varphi(y)$ funksiya. $f(x)$ funksiyaga teskari funksiya $f^{-1}(x)$ kabi belgilanadi.
64	**Asosiy elementar funksiyalar**	Darajali $y=x^{\alpha}$ ($\alpha\in$R), ko‘rsatkichli $y=a^x$ (a>0, $a\neq1$), logarifmik $y=\log_a x$ (a>0, $a\neq1$), trigonometrik $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}x$, $y=\mathrm{ctg}x$ va teskari trigonometrik $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arctg}x$, $y=\mathrm{arcctg}x$ funksiyalar asosiy elementar funksiyalar deyiladi.
65	**Elementar funksiyalar**	Chekli sondagi asosiy elementar funksiyalar ustida arifmetik amallar va murakkab hamda teskari funksiya olish orqali hosil qilingan funksiyalar.
66	**Funksiyaning limiti**	$y=f(x)$ funksiyada argument x berilgan a soniga cheksiz yaqinlashib borganda ($x\to a$) funksiya biror A soniga cheksiz yaqinlashib borsa ($y\to A$), unda A soni funksiyaning limiti deyiladi va $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ kabi ifodalanadi.
67	**Cheksiz kichik miqdor**	Argument $x\to a$ bo‘lganda limiti nolga teng bo‘lgan funksiya.
68	**I ajoyib limit**	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
69	**II ajoyib limit**	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e = 2{,}718281...$
70	**Funksiyaning nuqtadagi uzluksizligi**	Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ shart bajarilsa,unda funksiya $x=a$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

71	**Funksiyaning uzilish nuqtalari**	$y=f(x)$ funksiya uchun $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ shart bajarilmaydigan nuqtalar.
72	**Argument orttirmasi**	Argument qiymati x berilgan x_0 qiymatdan qancha farqlanishini ifodalovchi $x-x_0=\Delta x$ ayirma.
73	**Funksiya orttirmasi**	Argument qiymati x_0 dan x ga o‘zgarganda $y=f(x)$ funksiyaning o‘zgarishini ifodalovchi $\Delta f= f(x)-f(x_0)$ ayirma.
74	**Funksiya hosilasi**	Δf funksiya orttirmasini Δx argument orttirmasiga nisbatining Δx nolga intilgandagi limiti.
75	**Funksiya differensiali**	Agar funksiya orttirmasi $\Delta f=\mathrm{A}\Delta x+o(\Delta x)$ ko‘rinishda bo‘lsa, funksiya differensiali $df=\mathrm{A}\Delta x$ kabi aniqlanadi.
76	***n* - tartibli hosila**	Funksiyadan ketma-ket n marta hosila olish natijasida hosil bo‘ladigan funksiya. $f^{(n)}(x)$ kabi belgilanadi va $f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'$ rekkurent formula bilan aniqlanadi.
77	**Funksiyaning monotonlik sohasi**	Funksiya o‘suvchi yoki kamayuvchi bo‘ladigan sohalar.
78	**Funksiyaning lokal maksimumi (minimumi)**	Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning biror x_0 nuqta atrofidagi barcha x nuqtalar uchun $f(x)<f(x_0)$ $[f(x)>f(x_0)]$ shart bajaraladigan $f(x_0)$ qiymati.
79	**Lokal ekstremumlar**	Funksiyaning lokal maksimum yoki lokal minimumlari.
80	**Kritik nuqta**	Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi $f'(x)$ nolga teng yoki mavjud bo‘lmagan nuqtalar.
81	**Funksiya grafigining botiqlik (qavariqlik) sohasi**	Berilgan $y=f(x)$ funksiya grafigi o‘zining urinmalaridan pastda (yuqorida) joylashadigan x nuqtalar to‘plami.
82	**Burilish nuqtasi**	Funksiya grafigining botiqlik va qavariqlik sohalarini ajratib turuvchi nuqta.
83	**Funksiya grafigining og‘ma asimptotasi**	Argument $x\to\pm\infty$ bo‘lgan holda $y=f(x)$ funksiya grafigi cheksiz yaqinlashib boradigan og‘ma to‘g‘ri chiziq.
84	**Funksiya grafigining vertikal asimptotasi**	Argument $x\to a$ bo‘lgan holda $y=f(x)$ funksiya grafigi cheksiz yaqinlashib boruvchi $x=a$ vertikal to‘g‘ri chiziq
85	**Global maksimum (minimum)**	Funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi barcha x nuqtalar uchun $f(x)\leq f(x_0)$ $[f(x)\geq f(x_0)]$ shartni qanoatlantiradigan $f(x_0)$ qiymati.
86	**Global ekstremumlar**	Funksiyaning global maksimum va minimumlari.
87	**Boshlang‘ich funksiya**	Differensiallanuvchi va hosilasi berilgan $f(x)$ funksiyaga teng bo‘lgan $F(x)$ funksiya.
88	**Aniqmas integral**	Berilgan $f(x)$ funksiyaning barcha boshlang‘ich funksiyalari sinfi. $\int f(x)dx$ kabi belgilanadi va $F(x)$+C kabi aniqlanadi. Bunda $F(x)$- birorta boshlang‘ich funksiya, C- ixtiyoriy o‘zgarmas son.
89	**Ko‘phad**	$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ko‘rinishdagi funksiya. Bunda a_k berilgan sonlar bo‘lib, ko‘phadning koeffitsiyentlari, n esa ko‘phadning darajasi deyiladi.

90	**Ratsional kasr (ratsional funksiya)**	Ikkita $P_n(x)$ va $Q_m(x)$ ko'phadlarning $P_n(x)/Q_m(x)$ nisbatidan iborat funksiya.
91	**Mavhum birlik**	$i=\sqrt{-1}$ tenglik bilan aniqlanadigan ifoda .
92	**Kompleks son**	Mavhum birlik i va ixtiyoriy x, y haqiqiy sonlar orqali $z=x+iy$ ko'rinishda aniqlanadigan ifoda.
93	**Qo'shma kompleks son**	$z=x\pm iy$ ko'rinishdagi kompleks sonlar.
94	**Irratsional funksiya**	x erkli o'zgaruvchining kasr darajalari qatnashgan algebraik ifodadan iborat funksiya.
95	**Aniq integral**	$[a,b]$ kesma bo'yicha $f(x)$ funksiyaning aniq integral $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi va $S_n(f)$ integral yig'indining $n\to\infty$, $\max\Delta x_i\to 0$ bo'lgandagi chekli limiti kabi aniqlanadi.
96	**Nyuton-Leybnis formulasi**	Aniq integral qiymatini ifodalaydigan $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big\vert_a^b = F(b)-F(a)$ formula. Bunda $F(x)$- integral ostidagi $f(x)$ funksiya uchun biror boshlang'ich funksiya.
97	**I tur xosmas integral**	Quyi yoki yuqori chegaralaridan kamida bittasi cheksiz bo'lgan aniq integral.
98	**II tur xosmas integral**	$[a,b]$ kesmada chegaralanmagan funksiyaning aniq integrali.
99	**Evklid fazosi**	Masofa tushunchasi kiritilgan chiziqli fazo.
100	***n* o'zgaruvchili funksiya**	n o'lchovli R^n Evklid fazosidagi biror D sohaning har bir $(x_1, x_1, \ldots, x_n)$ nuqtasiga biror z sonni mos qo'yadigan f akslantirish.
101	**Xususiy hosilalar**	$\Delta_x f$ $(\Delta_y f)$ xususiy orttirmaning Δx (Δy) argument orttirmasiga nisbatining $\Delta x\to 0$ $(\Delta y\to 0)$ bo'lgandagi limiti.
102	**Gradient**	Funksiyaning berilgan nuqtadagi eng katta tezlik bilan o'zgaradigan yo'nalishni ifodalovchi vektor.
103	**Yuqori tartibli xususiy hosilalar**	Funksiyadan biror argumenti bo'yicha ikki yoki undan ortiq marta ketma-ket olingan xususiy hosila.
104	**Aralash hosilalar**	Funksiyadan ketma-ket turli argumentlar boyicha olingan hosila.
105	**Differensiallanuvchi funksiya**	To'la orttirmasini $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$ ko'rinishda ifodalab bo'ladigan funksiya. Bunda Ava B Δx, Δy argument orttirmalariga bog'liq bo'lmagan ifodalar, α va β esa $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ bo'lganda cheksiz kichik miqdorlardir.
106	**To'la differensial**	$f(x,y)$ funksiya $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$ to'la orttirmasining chiziqli $A\Delta x + B\Delta y$ qismi.
107	**Yuqori tartibli differensiallar**	$d^n f = d[d^{n-1} f]$ rekurrent formula bilan aniqlanadigan differensiallar.
108	**Bog'lanish tenglamasi**	Ikki o'zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyaning argumentlari orasidagi bog'lanishni ifodalovchi $\varphi(x,y)=0$ tenglama.
109	**Shartli lokal ekstremum**	Ikki o'zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyaning argumentlari $\varphi(x,y)=0$ bog'lanish tenglamasini qanoatlantirgan holdagi lokal ekstremumlari..

110	**Eng kichik kvadratlar usuli**	Tajriba yoki kuzatuv natijasida topilgan empirik formuladagi noma'lum parametrlarni baholash usuli.
112	**Differensial tenglama**	Noma'lum $y=y(x)$ funksiyaning hosilalari qatnashgan tenglama.
113	**Boshlang'ich shartlar**	n-tartibli differensial tenglamaning $y=y(x)$ yechimi va uning hosilalariga berilgan x_0 nuqtada qo'yiladigan $y^{(i)}(x_0)=y_{0i}$ $(i=0,1,\dots,n-1)$ ko'rinishdagi shartlar.
114	**Koshi masalasi**	Differensial tenglamaning berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi.
115	**Umumiy yechim**	n-tartibli differensial tenglamaning ixtiyoriy n ta o'zgarmas sonlar qatnashadigan yechimlari .
116	**Xususiy yechim**	Umumiy yechimdan o'zgarmas sonlarning aniq bir qiymatlarida hosil bo'ladigan yechim.
117	**I tartibli chiziqli differensial tenglama**	$y'+P(x)y=Q(x)$ ko'rinishdagi I tartibli differensial tenglama. $Q(x)\equiv 0$ holda bir jinsli, aks holda bir jinslimas tenglama deyiladi.
118	**II tartibli chiziqli differensial tenglama**	$a_0y''+a_1y'+a_2y=f(x)$ ko'rinishdagi differensial tenglama. Unda a_0, a_1 va a_2 berilgan funksiyalar yoki o'zgarmas sonlar.
119	**II tartibli bir jinsli chiziqli tenglama**	$a_0y''+a_1y'+a_2y=0$ ko'rinishdagi chiziqli differensial tenglama.
120	**Xarakteristik tenglama**	O'zgarmas koeffitsiyentli $a_0y''+a_1y'+a_2y=0$ bir jinsli tenglama bo'yicha tuziladigan $a_0\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$ kvadrat tenglama
121	**Sonli qator**	$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$ cheksiz sonli ketma-ketlik hadlaridan tuzilgan $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$ ko'rinishdagi ifoda.
122	***n*-xususiy yig'indi**	$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$ sonli qatorning dastlabki n ta hadidan tuzilgan $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$ yig'indi.
123	**Yaqinlashuvchi sonli qator**	Xususiy yig'indisi $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S\ (\lvert S\rvert<\infty)$ shartni qanoatlantiradigan sonli qator. Bunda S-qator yig'indisi deyiladi.
124	**Garmonik qator**	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+$ ko'rinishdagi qator.
125	**Umumlashgan garmonik qator**	$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+$ ko'rinishdagi qator.
126	**Ishorasi navbatlanuvchi sonli qator**	Ketma-ket kelgan ikki hadi qarama-qarshi ishorali bo'lgan qatorlar.
127	**Absolut yaqinlashuvchi qator**	Hadlarining absolut qiymatlaridan tuzilgan qator yaqinlashuvchi bo'lgan ishorasi o'zgaruvchi sonli qator
128	**Shartli yaqinlashuvchi qator**	Hadlarining absolut qiymatlaridan tuzilgan qator uzoqlashuvchi, ammo o'zi yaqinlashuvchi bo'lgan ishorasi o'zgaruvchi sonli qator .
129	**Funksional qator**	Hadlari $u_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ funksiyalardan iborat qator.
130	**Funksional qatorning yaqinlashish sohasi**	Funksional qator yaqinlashuvchi bo'lgan nuqtalar to'plami.

131	**Funksional qatorning yig‘indisi**	Funksional qator orqali aniqlanadigan funksiya.
132	**Darajali qator**	Hadlari $u_n(x)=a_nx^n$ (n=0,1,2,···) darajali funksiyalardan iborat funksional qator.
133	**Darajali qatorning yaqinlashish radiusi**	Darajali qator $\|x\|<R$ holda yaqinlashuvchi, $\|x\|>R$ holda esa uzoqlashuvchi bo‘ladigan $R\geq 0$ soni.
134	**Teylor (Makloren) qatori**	$y=f(x)$ funksiya bo‘yicha tuzilgan $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ ko‘rinishdagi darajali qator. x_0=0 bo‘lgan xususiy holda Makloren qatori deyiladi.

T E C T L A R N I N G J A V O B L A R I															
I BOB. TO‘PLAMLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI															
§1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	**§2**	1	2	3
	C	D	D	E	A	C	E	A	B	D	D		D	C	E
4	5	**§3**	1	2	3	**§4**	1	2	3	4	5	6	7	8	
C	B		E	D	C		E	D	C	B	D	E	D	C	
II BOB. CHIZIQLI ALGEBRA															
§1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**§2**	1	2	3	4	5
	D	B	B	E	B	C	E	C	B		D	B	B	E	B
6	7	8	9	**§3**	1	2	3	4	5	6	7	8	**§4**	1	2
C	E	C	B		B	B	C	A	A	D	B	E		E	B
3	4	5													
E	B	D													
III BOB. VEKTORLAR ALGEBRASI VA FAZOLARI															
§1	1	2	3	4	5	6	7	8	**§2**	1	2	3	4	**§3**	1
	B	C	D	D	D	B	A	A		B	D	E	E		D
2	3	4	**§4**	1	2	3	4	5	**§5**	1	2	3	4	5	
E	C	B		A	B	A	C	D		C	D	E	E	B	
§6	1	2	3	4	5	6	7	**§7**	1	2	3	4			
	E	C	A	D	E	C	B		C	B	D	A			
IV BOB. TEKISLIKDA ANALITIK GEOMETRIYA															
§1	1	2	3	4	5	**§2**	1	2	3	4	5	6	7	8	
	A	D	C	B	A		E	B	A	C	D	D	B	E	
§3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	**§4**	1	2	3
	C	D	A	A	D	B	C	C	C	E	D		A	D	C
4	5	6	7	8	9	10									
D	B	C	D	E	C	D									
V BOB. FAZODA ANALITIK GEOMETRIYA															
§1	1	2	3	§2	1	2	3	4	5	6	7	§3	1	2	3
	A	E	D		E	C	D	D	E	C	A		D	C	B
4	5	6	7	§4	1	2	3	4	§5	1	2	3	4	5	
C	E	B	B		B	E	D	D		B	D	B	C	D	
VI BOB. MATEMATIK TAHLILGA KIRISH															
§1	1	2	3	**§2**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	B	E	B		E	D	E	B	E	B	E	D	D	C	A
§3	1	2	3	4	5	**§4**	1	2	3	4	5	6	**§5**	1	2
	C	D	B	E	D		D	C	D	D	C	D		E	D

3	4	5	6												
D	E	B	A												
VII BOB. DIFFERENSIAL HISOB															
§1	1	2	3	4	5	6	7	8	**§2**	1	2	3	4	5	
	C	B	D	E	C	C	A	B		D	C	E	C	D	
§3	1	2	3	4	5	**§4**	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	C	C	D	C	D		D	E	D	C	D	B	E	D	C
10	**§5**	1	2	3	4	5	6	**§6**	1	2	3	4	5	6	
B		A	E	A	B	B	D		C	E	D	D	D	A	
VIII BOB. INTEGRAL HISOB															
§1	1	2	3	4	**§2**	1	2	3	4	5	6	**§3**	1	2	3
	D	C	C	E		A	D	D	D	D	C		C	E	C
4	5	6	7	8	**§4**	1	2	3	**§5**	1	2	3	4	5	6
C	B	C	D	E		D	D	E		D	D	C	E	D	E
7	8	9	**§6**	1	2	3	4	**§7**	1	2	3	4	5	6	7
C	E	E		D	B	B	A		D	B	D	C	E	B	C
§8	1	2	3	4	5	6	7								
	E	E	D	B	C	D	A								
IX BOB. KO‘P O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR															
§1	1	2	3	4	5	6	7	8	**§2**	1	2	3	4	5	6
	D	C	C	D	E	D	D	C		D	B	C	E	D	D
§3	1	2	3	4	5	6									
	C	C	D	B	C	C									
X BOB. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR															
§1	1	2	3	4	5	6	7	§2	1	2	3	4	5	6	
	C	D	B	B	A	B	C		C	C	D	C	B	B	
§3	1	2	3	4	§4	1	2	3	4	5	6				
	D	D	D	A		B	A	A	B	C	D				
XI BOB. QATORLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI															
§1	1	2	3	4	5	6	7	8	**§2**	1	2	3	4	**§3**	1
	C	E	C	C	C	C	E	D		C	D	B	E		D
2	3	4	5	6	7	8	9	**§4**	1	2	3	4	5	**§5**	1
C	A	C	D	C	C	C	B		D	C	A	C	C		B
2	3	4	5	6	7	**§6**	1	2	3	4	5	6	7		
D	C	A	C	E	B		D	D	C	E	B	C	A		

MUNDARIJA

So‘z boshi …….. 3
Matematika va iqtisodiy-matematik modellar..5

I BOB. To‘plamlar nazariyasi elementlari
§1. To‘plamlar va ular ustida amallar……10
1.1. To‘plamlar va ularga doir tushunchalar……………..………………10
1.2. To‘plamlar ustida amallar va ularning xossalari………..…………………….. 11
§2. Chekli va cheksiz to‘plamlar……..… 17
2.1. Chekli to‘plamlar ……………..… 17
2.2. Cheksiz to‘plamlar……….......... 18
2.3. Sanoqli to‘plamlar……………….… 19
2.4. Sanoqsiz to‘plaml………………… 20
§3. Kombinatorika 23
3.1. Kombinatorika va uning asosiy qoidalari……………………………... 23
3.2. O‘rin almashtiri………………….... 24
3.3. Kombinatsiyalar…………………... 25
3.4. Nyuton binomi va binomial koeffitsientlar……………..…………… 25
3.5. Orinlashtirishlar………………….... 26

II BOB. Chiziqli algebra
§1. Matritsalar va ular ustida amallar…....29
1.1. Matritsalar va ularning turlari………………...……………..… 29
1.2. Matritsalar ustida amallar……….... 31
1.3. Matritsalarning iqtisodiy tatbiqlari………..…………………... 34
§2. Determinantlar va ularning xossalari 38
2.1. Determinantlar va ularni hisoblash………………………………..38
2.2. Determinantlarning asosiy xossalari…………………..........……40
§3. Teskari matitsa. Matritsaning rangi …..48
3.1. Teskari matritsa ……………….…….....48
3.2. Matritsaning rangi…………………......51
§4. Chiziqli tenglamalar sistemasi ……....55
4.1. Chiziqli tenglamalar sistemasi va ularning yechimi…………..……………..55
4.2. Matritsalar usuli………….………...57
4.3. Kramer (determinantlar) usuli.............58
4.4. Gauss (noma’lumlarni yo‘qotish) usuli…………………………..…………61
4.5. *n* noma’lumli *m* ta chiziqli tenglamalar sistemasi…………………………………..64
4.6. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi……….……………………….68
4.7. Chiziqli tenglamalar sistemasining iqtisodiy tatbiqlari……..……………..…...70
4.8. Leont’evning tarmoqlararo balans modeli………..………………………..73

III BOB. Vektorlar algebrasi va fazolari
§1. Vektorlar va ular ustida amallar …..... 79
1.1. Vektorlar va ular bilan bog'liq tushunchalar…………………….……….…79
1.2. Vektorlar ustida amallar…………..…....80
1.3. Vektorlarning koordinatalari ………...82
§2. Vektorarning skalyar ko'paytmasi, uning xossalari va tatbiqlari………………….…89
2.1. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi va uning xossalari…………………...……89
2.2. Skalyar ko'paytmaning koordinatalardagi ifodasi……….............90
2.3. Skalyar ko'paytmaning tatbiqlari……90
§3. Vektorial ko'paytma, uning xossalari va tatbiqlari 94
3.1. Vektorial ko'paytma va uning xossalari……………………...…………94
3.2. Vektorial ko'paytmaning koordinatalardagi ifodasi...……………...95
3.3. Vektorial ko'paytmaning tatbiqlari…96
§4. Vektorarning aralash ko'paytmasi, uning xossalari va tatbiqlari …………………..…..99
4.1. Vektorlarning aralash ko'paytmasi va uning xossalari……..…………..……...99
4.2. Aralash ko'paytmaning koordinatalardagi ifodasi...……………100
4.3. Aralash ko'paytmaning tatbiqlari…100
§5. Vektor va chiziqli fazolar ……….....104
5.1. Vektor fazolar……………………….104
5.2. Chiziqli fazolar…………………..…...105
§6. Chiziqli operatorlar 110
6.1. Chiziqli operatorlar va ular bilan bog'liq tushunchalar…………..……...110
6.2. Xalqaro savdo modeli……………..113
§7. Kvadratik formalar 117

IV BOB. Tekislikda analitik geometriya
§1. To'g'ri chiziq va uning tenglamalari …......................................122
1.1. Tekislikda analitik geometriya predmeti va asosiy masalalari……………………122
1.2. Tekislikdagi to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi …………..……………….... 123
1.3. Tekislikdagi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi………………..125
1.4. Tekislikdagi to'g'ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi………....……125
1.5. Tekislikdagi to'g'ri chiziqning normal tenglamasi ……………………….……..126
1.6. Tekislikdagi to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi………………………...…128
1.7. Tekislikdagi to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi……………….……128
§2. To'g'ri chiziqqa doir ayrim masalalar ……….................................131
2.1. To'g'ri chiziqlarga doir masalalar……………………………...…131
2.2. To'gri chiziq tenglamalarining iqtisodiy tatbiqlari…...……………………………137
§3. Ikkinchi tartibli chiziqlar. Aylana va ellips 140
3.1. II tartibli tenglama va chiziqlar ……140
3.2. Aylana va uning tenglamalari…….140
3.3. Ellips va uning kanonik tenglamasi …………………...………..141
3.4. Ellipsning xarakteristikalari……..…144
§4. Giperbola va parabola. II tartibli umumiy tenglama tahlili ....………148
4.1. Giperbola va uning kanonik tenglamasi………..…………………..148
4.2. Giperbola xarakteristikalari………...150
4.3. Parabola, uning kanonik tenglamasi va xarakteristikalari …………………….152
4.4. Dekart koordinatalar sistemasini almashtirish…………………….…………154
4.5. II tartibli tenglamalarning umumiy holdagi tahlili…………………..…..…...156

V BOB. Fazoda analitik geometriya
§1. Tekislik va uning tenglamalari …....161
1.1. Fazoda analitik geometriya predmeti va asosiy masalalari……………………….161
1.2. Tekislik va uning umumiy tenglamasi……………………….……..162
1.3. Tekislikning kesmalardagi tenglamasi…………………………..…163
1.4. Tekislikning normal tenglamasi……164
§2. Tekislikka doir asosiy masalalar……168
§3. Fazodagi to'g'ri chiziq tenglamalari..174
3.1. Fazodagi to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi…………………………………174
3.2. Fazodagi to'g'ri chiziqning parametrik

tenglamasi……………………………..……175
3.3. Fazodagi to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi…………………………..……....175
§4. Fazodagi to‘g‘ri chiziqlarga doir masalalar 180
§5. Fazodagi to‘g‘ri chiziq va tekislikka doir aralash masalalar 184

VI BOB. Matematik tahlilga kirish

§1. Sonli to‘plamlar. Sonning absolyut qiymati 189
1.1. Sonli to‘plamlar va ularning turlari……………………...…………189
1.2. Sonning absolyut qiymati va uning xossalari…..……………………………191
§2. Sonli ketma-ketlk va uning limiti ….194
2.1. Sonli ketma-ketlik va uning limiti…194
2.2. Sonli ketma-ketlik limitini hisoblash qoidalari……….………………...…..196
2.3. Sonli ketma-ketlikka doir bir iqtisodiy masala………….…………………….....198
§3. Funksiya va unga doir tushunchalar...201
3.1. Funksiya va u bilan bog‘liq tushunchalar……………….…………..201
3.2. Funksiya grafigi…………...…..…….202
3.3. Funksiyani berilish usullari………..203
3.4. Funksiya ko‘rinishlari…………..….204
3.5. Murakkab va teskari funksiya……...205
3.6. Asosiy elementar va elementar funksiyalar……………………….........206
3.7. Funksiyalarning ayrim iqtisodiy tatbiqlari………………………….…….207
§4. Funksiya limiti va uning asosiy xossalari 210
4.1. Funksiya limiti …………………....210
4.2. Cheksiz kichik miqdorlar va ularning xossalari………..........…….212
4.3. Cheksiz katta miqdorlar…………....213
4.4. Funksiya limitini hisoblash qoidalari……………………………….214
4.5. Funksiya limitining mavjudlik shartlari…………………………...….215
4.6. Ajoyib limitlar……………….…….216
4.7. Funksiya limitining bir iqtisodiy tatbig‘i…………………………..……216
§5. Uzluksiz va uzlukli funksiyalar…….219
5.1. Uzluksiz funksiyalar va ularning xossalari……………………...............…219
5.2. Kesmada uzluksiz funksiyalar uchun asosiy teoremalar…...………………..……221
5.3. Funksiyaning uzilish nuqtalari va ularning turlari…..……………………224

VII BOB. Differensial hisob

§1. Funksiya hosilasi, uning mexanik, geometrik va iqtisodiy ma’nosi……..….229
1.1. Hosila tushunchasiga olib keladigan amaliy masalalar……….…....229
1.2. Hosila ta’rifi va unung amaliy ma’nolari……………………….………231
1.3. Differensiallanuvchi funksiya va uning uzluksizligi 233
1.4. Hosilaning iqtisodiy tatbiqlari……...234
§2. Funksiyani differensiallash qoidalari. Hosilalar jadvali 237
2.1. Hosilani hisoblash algoritmi……….237
2.2. Differensiallash qoidalari……….…238
2.3. Logarifmik differensiallash usuli ….242
2.4. Hosilalar jadvali…………….……..243
§3. Differensiallanuvchi funksiyalar haqidagi asosiy teoremalar 246
3.1. Roll teoremasi……………………..…246
3.2. Lagranj teoremasi………………....247
3.3. Koshi teoremasi……………….…...248
§4. Funksiya differensiali. Yuqori tartibli hosila va differensiallar ……..…………251
4.1. Differensial va uni hisoblash……....251
4.2. Differensialni taqribiy hisoblashlarda qo‘llanilishi …………….....253
4.3. Yuqori tartibli hosila va differensiallar…………………………..254
4.4. Parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyalarni differensiallash………..….255
§5. Funksiyani hosila yordamida tekshirish 259
5.1. Funksiyaning monotonlik oraliqlari…………………………….…259
5.2. Funksiyaning lokal ekstremumlari…260
5.3. Funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik sohalari ………….........……264
5.4. Botiqlik va qavariqlikning iqtisodiy

tatbiqlari……………………………..
…265
5.5. Funksiya grafigining burilish nuqtalari……..……………………
....267
5.6. Logistik funksiya………………..…....268
5.7. Funksiya grafiginig asimptotalari…269
5.8. Funksiyani tekshirishning umumiy sxemasi………………………………...
.…271
5.9. Funksiyaning global ekstremumlari ……
……………………272
§6. Aniqmasliklar va Lopital qoidalari.. 275
6.1. Aniqmasliklar va ularni ochish…….275
6.2. Lopitalning I qoidasi va uning tatbiqlari…………………….……….275
6.3. Lopitalning II qoidasi……………..…..277
6.4. Turli aniqmasliklarni ochish……….279

VIII BOB. Integral hisob

§1. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral. Integrallar jadvali 284
1.1. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral…………………...…...284
1.2. Aniqmas integral xossalari………....286
1.3. Integrallar jadvali………………….. 288
§2. Aniqmas integralni hisoblash usullari. Kvadrat uchhadli ayrim integrallarni hisoblash 291
2.1. Yoyish usuli……………………….291
2.2. Differensial belgisi ostiga kiritish usuli……………………..………..…292
2.3. O'zgaruvchilarni almashtirish usuli………...…………………...…293
2.4. Bo'laklab integrallash usuli………..294
2.5. Kvadrat uchhadli integrallarni hisoblash……………………………296
§3. Ratsional kasrlar va ularni integrallash 301
3.1. Ratsional funksiyalar…………….....301
3.2. Eng sodda ratsional funksiyalar va ularni integrallash…..…………….....302
3.3. Kompleks sonlar haqida tushunchalar…………………...………306
3.4. Ratsional funksiyalarni integrallash ….……………..………..…306
§4. Ayrim irratsional va trigonometrik ifodalarni integrallash 314
4.1. Irratsional funksiyalarni integrallash…………..……….……….314
4.2. Eyler almashtirmalari.......................317
4.3. Trigonometrik ifodali integrallar…..319
§5. Aniq integral va uning xossalari …...324
5.1. Aniq integral tushunchsiga olib keluvchi masalalar…………………...324
5.2. Aniq integralning ta'rifi va mavjudlik sharti…………………………..….327
5.3. Aniq integralning xossalari………..329
§6. Aniq integralni hisoblash usullari…..337
6.1. Aniq integralni ta'rif bo'yicha hisoblash……………………..……337
6.2. Nyuton – Leybnits formulasi……....338
6.3. Bo'laklab integrallash usuli………..341
6.4. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish usuli………..…………....341
6.5. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash ……………………….....…342
§7. Aniq integralning ayrim tatbiqlari 348
7.1. Tekislikdagi geometrik shakllarning yuzalarini hisoblash……...348
7.2. Tekislikdagi egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash………………...…350
7.3. Aniq integral yordamida jismlar hajmini hisoblash……………………....352
7.4. Aniq integralni mexanika masalalariga tatbiqlari…………………………...…354
7.5. Aniq integralni ayrim iqtisodiy tatbiqlari……..…………………………...355
§8. Xosmas integrallar 361
8.1. I tur xosmas integrallar …………...361
8.2. II tur xosmas integrallar….……..…366
8.3. Aralash turli xosmas integrallar…...368

IX BOB. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar

§1. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ta'rifi, limiti va uzluksizligi 371
1.1. Ko'p o'zgaruvchili funksiya tushunchasiga olib keluvchi masalalar …371
1.2. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar va ular bilan bog'liq tushunchalar………..372
1.3. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning limiti…………………………………...375
1.4. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning zluksizligi……………………………...379
1.5. Ikki o'zgaruvchili uzluksiz funksiyalarning xossalari……………....381
§2. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning hosila

va differensiallari 386
2.1. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari……………………….....386
2.2. Yo‘nalish bo‘yicha hosila va gradient…..…………………….………389
2.3. Ikki o‘zgaruvchili funksiya differensiallari va ularning tatbiqlari ……………………….………391
2.4. Yuqori tartibli differensiallar……....395
§3. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning ekstremumlari 399
3.1. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning lokal ekstremumlari…………………...399
3.2. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning shartli ekstremumlari…....………./…….403
3.3. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning global ekstremumlari……………..…..406
3.4. Eng kichik kvadratlar usuli………408

X BOB. Differensial tenglamalar
§1. I tartibli differensial tenglamalar 413
1.1. Differensial tenglamalar va ular bilan bog‘liq tushunchalar……………......413
1.2. Ayrim I tartibli differensial tenglamalar va ularni integrallash……..415
1.3. I tartibli differensial tenglamalarning ayrim iqtisodiy tatbiqlari ……..………....421
§2. II tartibli differensial tenglamalar. Tartibni pasaytirish usuli 426
2.1. II tartibli differensial tenglamalar va ular bilan bog‘liq tushunchalar ...……...426
2.2. II tartibli differensial tenglamalar uchun tartibni pasaytirish usuli ………...427
§3. II tartibli chiziqli o‘zgarmas koeffitsientli bir jinsli differensial tenglamalar 431
3.1. II tartibli chiziqli differensial tenglamalar…………...…………… …..431
3.2. Chiziqli bog‘liq va erkli yechimlar..……………..…………… ….432
3.3. Bir jinsli chiziqli tenglamaning umumiy yechimi……………….……..435
3.4. Fundamental yechimlar va xarakteristik tenglamalar……………..…...435
§4. II tartibli chiziqli o‘zgarmas koeffitsientli bir jinslimas differensial tenglamalar ……......................................440
4.1. II tartibli bir jinslimas chiziqli tenglamaning umumiy yechimi ……..….440
4.2. O‘zgarmaslarni variatsiyalash usuli…………………………........... …441
4.3. Qo‘shish usuli……………….……442
4.4. O‘ng tomoni maxsus ko‘rinishda bo‘lgan tenglamalar………….…..……..443
4.5. II tartibli chiziqli differensial tenglamaning bir iqtisodiy tatbiqi ……...447

XI BOB. Qatorlar nazariyasi elementlari
§1. Sonli qatorlar va ularning yaqinlashuvi 451
1.1. Sonli qatorlar va umumiy tushunchalar…………..………...….…451
1.2. Sonli qator xossalari……………..…453
1.3. Sonli qator yaqinlashuvining zaruriy sharti……..…………….……454
§2. Musbat hadli sonli qatorlar va ularning yaqinlashish alomatlari 458
2.1. Sonli qator yaqinlashuvining taqqoslash alomatlari……...……………………..458
2.2. Dalamber alomati…………………460
2.3. Koshi alomati…………………...462
2.4. Integral alomati………………….....463
2.5. Umumlashgan garmonik qatorlar…464
§3. Ishorasi navbatlanuvchi va o‘zgaruvchi sonli qatorlar ……...............467
3.1. Ishorasi navbatlanuvchi sonli qatorlar……..……………………………467
3.2. Ishorasi o‘zgaruvchi qatorlar……....468
3.3. Absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar…………..….......469
§4. Funksional va darajali qatorlar……...474
4.1. Funktsional qatorlar……………..…474
4.2. Darajali qatorlar………………..…...475
4.3. Yaqinlashish radiusi uchun Dalamber formulasi…………..…..…476
4.4. Yaqinlashish radiusi uchun Koshi formulasi ………………....……..478
4.5. Darajali qatorlarning xossalari.……479

§5. Teylor va Makloren qatorlari ……....483
5.1. Teylor va Makloren qatorlari……...483
5.2. Ayrim funksiyalarning Makloren qatorlari ……………………...485
§6. Darajali qatorlarning tatbiqlari 492
6.1. Ildizlarning taqribiy qiymatini topish……………………………….. ….492
6.2. Funksiya qiymatlarini taqribiy hisoblash………………...……492
6.3. Limitlarni hisoblash………………..…494
6.4. Elementar bo'lmagan boshlang'ich funksiyalarni topish ……………………...495
6.5. Differensial tenglamalarni yechish...495
Adabiyortlar ………...............................499
Asosiy tayanch iboralarning izohli lug'ati..500
Testlarning javoblari 506

Rasulov Ne‘mat Po‘latovich, Safarov Ismoil Ibragimovich,
Muhitdinov Ramazon To‘xtayevich

Oliy matematika

Oliy o‘quv yurtlarining iqtisod va muhandis –texnolog
yo‘nalishi bakalavrlari uchun darslik

Muharrir:	Ahmedov H.H.
Badiiy muharrir:	Ismatov H.B.
Sahifalovchi:	Ergasheva G.R.
Tehnik muharrirlar:	Qurbonov M.H.
	Shermatov E.Y.

O’zbekiston Respublikasi Presidenti Devoni ishlar Boshqarmasi bosmahonasida
chop etildi Buyurtma № 259.Adadi 500 dona.