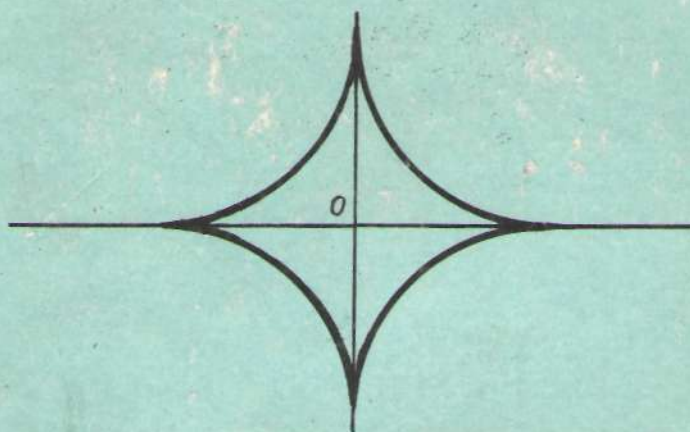


У35.2
517
М-39/1

Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами

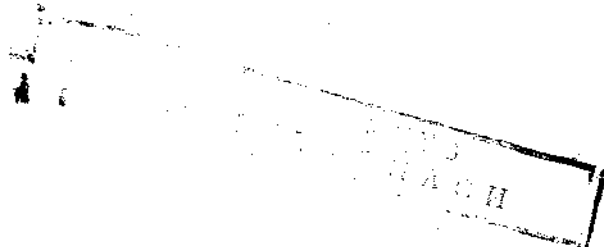
I



ОЛИЙ ЎҚУВ ЮРТЛАРИ УЧУН

Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами I

*Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги
университетлар талабалари учун
ўқув қўлланма сифатида
тавсия этган*



ТОШКЕНТ
«ЎЗБЕКИСТОН»
1993

22.161
М 131

Муаллифлар:
А. САЪДУЛЛАЕВ, Ҳ. МАНСУРОВ,
Г. ХУДОЙБЕРГАНОВ, А. ВОРИСОВ, Р. ҒУЛОМОВ

Тақризчилар: физика-математика фанлари доктори, профессор
А. АЎЗАМОВ
Самарқанд давлат университети математик анализ кафедраси

ISBN 5-640-01328-1

С 1602070000—76
М 351 (04)—93

© ЎЗБЕКИСТОН нашриёти, 1993 .

СУЗ БОШИ

Ўзбекистон жумҳуриятида тил ҳақидаги қонун қабул қилинганидан сўнг, деярли ҳамма фанлар бўйича ўзбек тилидаги адабиётларнинг тақчиллиги сезилиб қолди. Математик анализ бўйича Т. Азларов ва Ҳ. Мансуров томонидан ёзилган икки жилдлик китоб бу масалага маълум қадар жавоб бўлди. Шу билан бирга бу китобларга мос мисол ва масалалар тўплами яратиш эҳтиёжи туғилди.

Ушбу китоб Тошкент Давлат университети математика факультети ўқитувчиларининг бир гуруҳи томонидан тайёрланган бўлиб, у математика ихтисослиги бўйича мутахассислар тайёрлаш дастури ва юқорида қайд этилган китоблар асосида ёзилган.

Китобнинг бу қисмига дастлабки тушунчалар, сонли кетма-кетлик ва унинг лимити, функция ва унинг лимити, функция узлуксизлиги ва текис узлуксизлиги, функциянинг ҳосила ва дифференциали, дифференциал ҳисобнинг асосий теоремалари ва татбиқлари, аниқмас ва аниқ интеграллар, аниқ интегралларнинг баъзи бир татбиқлари ва сонли қаторлар мавзулари киритилган.

Қўлланмани ёзишда муаллифлар ҳар бир математик тушунча ва тасдиқларни мос мисол ва масалаларни тўлиқ ва синчиклаб таҳлил қилиб ечиш орқали ўқувчиларга етказишга ҳаракат қилдилар. Қўлланмада 244 та мисол ва масала батафсил ечиб кўрсатилган

бўлиб, 1502 та мисол ва масала мустақил ечиш учун тавсия этилган.

Ушбу китобни ёзишда Тошкент Давлат университетида кўп йиллар мобайнида математик анализ курси бўйича олиб борилган дарслар катта ёрдам берди. Шу билан бирга китоб қўлёзмаси тайёр бўлгач, у машқ дарсларида синовдан ўтказилди.

Китоб қўлёзмасини ўқиб, унинг яхшиланишига ўз ҳиссаларини қўшган профессор А. Аъзамов, доцентлар М. Зоҳиров, А. Назаров, А. Жалиловларга муаллифлар миннатдорчилик билдирадилар.

Қўлланмадаги камчиликларни бартараф этиш ва унинг сифатини яхшилаш борасидаги фикр-мулоҳазалар учун муаллифлар олдиндан ўз миннатдорчиликларини билдирадилар.

ДАСТЛАБКИ ТУШУНЧАЛАР

1-§. ТЎПЛАМ. ТЎПЛАМЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

Тўплам тушунчаси математиканинг бошланғич, аynи пайтда муҳим тушунчаларидан биридир. Тўпламни ташкил этган нарсалар (предметлар) унинг элементлари дейилади. Одатда тўпламлар бош ҳарфлар билан, унинг элементлари эса кичик ҳарфлар билан белгиланади. Тўпламлар элементларининг сони нуқтаи назаридан икки хил бўлади: 1) чекли тўпламлар, масалан, $A = \{2, 4, 6, 8\}$ тўплам, 2) чексиз тўпламлар, масалан, $N = \{1, 2, 4, \dots\}$ тўплам.

Иккита A ва B тўплам берилган бўлсин. Агар A тўпламнинг ҳар бир элементи B тўпламнинг ҳам элементи бўлса, A тўплам B тўпламнинг қисми ёки қисмий тўплами деб аталади ва $A \subset B$ каби ёзилади.

1-таъриф. Агар $A \subset B$ ва $B \subset A$ бўлса, у ҳолда A ва B тўпламлар бир-бирига тенг тўпламлар деб аталади ва $A = B$ каби ёзилади.

2-таъриф. A ва B тўпламларнинг барча элементларидан ташкил топган тўплам A ва B тўпламлар йиғиндисини (бирлашмаси) деб аталади ва $A \cup B$ каби ёзилади.

3-таъриф. A ва B тўпламларнинг умумий элементларидан ташкил топган тўплам A ва B тўпламлар қўпайтмаси (кесшимаси) деб аталади ва $A \cap B$ каби ёзилади.

4-таъриф. A тўпламнинг B тўпламга тегишли бўлмаган элементларидан тузилган тўплам A тўпламдан B тўпламнинг айирмаси деб аталади ва $A \setminus B$ каби ёзилади.

5-таъриф. A тўпламнинг B тўпламга тегишли бўлмаган элементларидан ва B тўпламнинг A тўпламга тегишли бўлмаган элементларидан тузилган тўплам A ва B тўпламларнинг симметрик айирмаси деб аталади ва $A \Delta B$ каби ёзилади.

6-таъриф. Биринчи элементи A тўпладан, иккинчи элементи B тўпладан олинган (a, b) ($a \in A, b \in B$) кўринишдаги жуфтликлардан тузилган тўпламга A ва B тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси ёки тўғри кўпайтмаси деб аталади ва $A \times B$ каби ёзилади.

1-мисол. $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 4\}$ бўлсин. У ҳолда
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}, A \cap B = \{2\};$
 $A \setminus B = \{1, 3\}, B \setminus A = \{4\}, A \Delta B = \{1, 3, 4\};$
 $A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4)\}$

бўлади.

7-таъриф. Агар A тўплам U тўпламнинг қисми, яъни $A \subset U$ бўлса, ушбу

$$U \setminus A = \{x: x \in U, x \notin A\}$$

тўплам A тўпламни U тўпламга тўлдирувчи тўплам деб аталади ва CA ёки $C_A A$ каби белгиланади.

Қуйидаги хоссалар ўринлидир:

- 1°. $C(CA) = A.$
 - 2°. $C(A \cup B) = CA \cap CB.$
 - 3°. $C(A \cap B) = CA \cup CB.$
 - 4°. $A \setminus CA = \emptyset, A \cup CA = U$ ($\emptyset$ -бўш тўплам).
- 2-мисол. Ушбу

$$A \setminus B = A \cap CB$$

тенглик ўринли эканини кўрсатинг.

Икки тўпламнинг бир-бирига тенг бўлиши таърифига асосан берилган тенгликнинг ўринли бўлишини кўрсатиш учун

$$A \setminus B \subset A \cap CB \text{ ва } A \cap CB \subset A \setminus B$$

муносабатларнинг бажарилишини кўрсатиш етарли.

$\forall a \in A \setminus B$ бўлсин, у ҳолда:

$$a \in A, a \notin B \Rightarrow a \in A, a \in CB \Rightarrow a \in A \cap CB.$$

Демак, $A \setminus B \subset A \cap CB.$

Энди $\forall a \in A \cap CB$ бўлсин:

$$a \in A \cap CB \Rightarrow a \in A, a \in CB \Rightarrow a \in A, a \notin B \Rightarrow a \in A \setminus B.$$

Демак, $A \cap CB \subset A \setminus B.$ Натижада

$$A \setminus B \subset A \cap CB, A \cap CB \subset A \setminus B \Rightarrow A \setminus B = A \cap CB$$

бўлишини топамиз.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги муносабатларнинг ўринли бўлишини кўрсатинг:

1. $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.
2. $A \cap (A \cup B) = A$.
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
5. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
6. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
7. $A \cup (CA \cap B) = A \cup B$.
8. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
9. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
10. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \cap (CA \cup CB)$.

2-§. ҲАҚИҚИЙ СОНЛАР

Q — барча рационал сонлардан иборат тўплам бўлсин.

6-таъриф. *Рационал сонлар тўплами Q нинг қисмлари A ва A' тўпламлар*

- 1) $A \neq \emptyset, A' \neq \emptyset$,
- 2) $A \cup A' = Q$,
- 3) $\forall a \in A, \forall a' \in A' \Rightarrow a < a'$

шартларни қаноатлантирсин. У ҳолда A ва A' тўпламлар Q тўпламда кесим бажаради дейилади ва бу кесим (A, A') каби белгиланади. A тўплам кесимнинг қуйи синфи, A' тўплам кесимнинг юқори синфи дейилади.

Q тўпламда бажарилган ҳар қандай кесим фақат икки турли бўлиши мумкин:

1) қуйи синфида энг катта элемент ёки юқори синфида энг кичик элемент мавжуд бўлган кесим. Бундай кесим **рационал кесим** деб аталади.

2) қуйи синфида энг катта элемент мавжуд бўлмаган ва юқори синфида энг кичик элемент мавжуд бўлмаган кесим. Бундай кесим **иррационал кесим** деб аталади.

Биз 1-турдаги кесимга унга мос энг катта ёки энг кичик рационал сонни мос қўямиз. Бу келишувга кўра 2-турдаги кесим учун бирор рационал сонни мос қўйиб бўлмайди.

7-таъриф. *Рационал сонлар тўплами Q да бажарилган иккинчи тур кесим (иррационал кесим) иррационал сонни аниқлайди дейилади.*

Берилган кесим (A, A') аниқлаган сон $\alpha = (A, A')$ кўринишда ҳам ёзилади. Рационал ва иррационал сонлар битта умумий ном билан **ҳақиқий сонлар** дейилади. Барча ҳақиқий сонлар тўплами R ҳарфи билан белгиланади.

Ҳақиқий сонлар тўплами қуйидаги хоссаларга эга:

- 1°. Ҳақиқий сонлар тўплами тартибланган тўпلام.
- 2°. Ҳақиқий сонлар тўплами зич тўпلام.
- 3°. Ҳақиқий сонлар тўплами тўлиқ (узлуксиз) тўпلام.
- 4°. Ҳақиқий сонлар устида арифметик амаллар бажарилади (қаранг: [1], 2-боб, 7-§).

3-мисол. Ушбу $x^3 = 2$ тенгламани қаноатлантирувчи ҳақиқий соннинг мавжудлигини кўрсатинг.

Қуйидаги рационал сонлар тўпламини оламиз:

$$A' = \{r : r \in Q, r^3 > 2\},$$

$$A = \{r : r \in Q, r^3 < 2\}.$$

Бу A, A' тўпلامлар Q да (A, A') кесим бажаради, чунки:

- 1) $1 \in A, 2 \in A' \Rightarrow A \neq \emptyset, A' \neq \emptyset$.
- 2) $\forall a \in A, \forall a' \in A' \Rightarrow a^3 < 2 < (a')^3 \Rightarrow a^3 < (a')^3 \Rightarrow a < a'$.
- 3) $A \cup A' = Q$.

Бу кесим бирор α ҳақиқий сонни аниқлайди:

$$\alpha = (A, A').$$

Энди A тўпلامда энг катта, A' тўпلامда эса энг кичик элемент (сон) мавжуд эмаслигини кўрсатамиз.

A' тўпلامда r_0 сонни ($r_0 > 1$) олиб, унинг ёрдамида ушбу $r_0 - \frac{1}{n}$ рационал сонни қараймиз. (Бунда n натурал сон $n > \frac{3r_0^2}{r_0^3 - 2}$ тенгсизликни қаноатлантирсин ($n = \left\lceil \frac{3r_0^2}{r_0^3 - 2} \right\rceil + 1$ деб олиш мумкин). Агар

$$\begin{aligned} \left(r_0 - \frac{1}{n}\right)^3 &= r_0^3 - \frac{3r_0^2}{n} + \frac{3r_0}{n^2} - \frac{1}{n^3} > r_0^3 - \frac{3r_0^2}{n} + \frac{3r_0}{n^2} - \\ &= r_0^3 - \frac{3r_0^2}{n} + \frac{3r_0 - 1}{n^2} > r_0^3 - \frac{3r_0^2}{n} > 2 \end{aligned}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда $\left(r_0 - \frac{1}{n}\right) \in A'$ бўлишини топамиз. Шундай қилиб $r_0 \in A'$ сон олинганда, бу сондан кичик бўлган шундай $r_0 - \frac{1}{n}$ сон мавжудки, $r_0 - \frac{1}{n} \in A'$ бўлади. Бу эса A' тўпلامнинг элементлари орасида энг кичиги мавжуд эмаслигини кўрсатади. Худди шу йўл билан A тўпلامнинг элементлари орасида энг каттаси мавжуд эмаслиги кўрсатилади. Демак, (A, A') иккинчи тур кесим бўлиб, у α иррационал сонни аниқлайди.

Ҳақиқий сонлар устида арифметик амаллар бажариш қондасидан фойдаланиб $\alpha^3 = 2$ эканлигини кўриш қийин эмас.

Юқорида кўрсатилган усул билан мураккаброқ ҳақиқий сонларга, масалан, $\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ сонларга мос кесимларни қуриш ҳам қийин эмас.

3-§. ҲАҚИҚИЙ СОННИНГ АБСОЛЮТ ҚИЙМАТИ

Бирор $x \in R$ ($x \neq 0$) сонни олайлик. Равшанки, x , $-x$ сонларидан бири албатта мусбат бўлади. Бу мусбат сон x соннинг абсолют қиймати деб аталади ва уни $|x|$ кўринишда белгиланади. Ноль соннинг абсолют қиймати деб ноль соннинг ўзи олинади. Демак,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса,} \\ -x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати қуйидаги хоссаларга эга:

1°. $\forall x \in R$ сон учун

$$|x| \geq 0, |x| = |-x|, x \leq |x|, -x \leq |x|$$

муносабатлар ўринлидир.

2°. Ушбу

$$|x| < a \Rightarrow -a < x < a, (a > 0)$$

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

муносабатлар ўринлидир.

3°. Ушбу

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$|x - y| \geq ||x| - |y||,$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|,$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0).$$

муносабатлар ўринлидир.

4-§. СОНЛИ ТЎПЛАМЛАРНИНГ ЧЕГАРАЛАРИ

Элементлари ҳақиқий сонлардан иборат тўплам сонли тўплам деб аталади. Масалан,

$$\{x: x \in R, a \leq x \leq b\} = [a, b], \quad (1)$$

$$\{x: x \in R, a < x < b\} = (a, b), \quad (2)$$

$$\{x: x \in R, a \leq x < b\} = [a, b), \quad (3)$$

$$\{x: x \in R, a < x \leq b\} = (a, b], \quad (4)$$

тўпламлар сонли тўпламлардир. (1) тўплам сегмент ёки кесма, (2) тўплам интервал, (3) ва (4) тўпламлар ярим интерваллар деб аталади.

Бирор E тўплам ($E \subset R$) берилган бўлсин.

8-таъриф. Агар шундай M сон (m сон) мавжуд бўлсаки, $\forall x \in E$ учун $x \leq M$ ($x \geq m$) тенгсизлик бажарилса, E тўплам юқоридан (қуйидан) чегараланган дейилади.

9-таъриф. Агар $\forall M$ сон ($\forall m$ сон) олинганда ҳам шундай $x_0 \in E$ топилсаки $x_0 > M$ ($x_0 < m$) тенгсизлик бажарилса, E тўплам юқоридан (қуйидан) чегараланмаган дейилади.

10-таъриф. Агар E тўплам ҳам қуйидан, ҳам юқоридан чегараланган бўлса, E тўплам чегараланган дейилади.

1-теорема. Ҳар қандай юқоридан чегараланган тўплам учун уни юқоридан чегараловчи сонлар ичида энг кичиги мавжуд.

11-таъриф. Юқоридан чегараланган E тўплам учун уни юқоридан чегараловчи сонларнинг энг кичиги тўпламнинг аниқ юқори чегараси дейилади ва $\sup E$ каби белгиланади.

Равшанки,

$$\sup E = a \iff \begin{cases} (1) \forall x \in E \text{ учун } x \leq a, \\ (2) \forall \varepsilon > 0 \text{ учун } \exists x_0 \in E, x_0 > a - \varepsilon. \end{cases}$$

2-теорема. Ҳар қандай қуйидан чегараланган тўплам учун уни қуйидан чегараловчи сонлар орасида энг каттаси мавжуд.

12-таъриф. Қуйидан чегараланган E тўплам учун уни қуйидан чегараловчи сонларнинг энг каттаси тўпламнинг аниқ қуйи чегараси деб аталади ва $\inf E$ каби белгиланади.

Равшанки,

$$\inf E = b \iff \begin{cases} (1) \forall x \in E \text{ учун } x \geq b \\ (2) \forall \varepsilon > 0 \text{ учун } \exists x_0 \in E, x_0 < b + \varepsilon. \end{cases}$$

4-мисол. Агар E тўплам ($E \subset R$) юқоридан чегараланган бўлиб, $E_1 \subset E$ бўлса, у ҳолда

$$\sup E_1 \leq \sup E$$

бўлишини кўрсатиш.

E тўплам юқоридан чегараланган, $E_1 \subset E$ бўлгани сабабли E_1 тўплам ҳам юқоридан чегаралангандир.

Демак, 1-теоремага кўра, $\sup E_1$ ва $\sup E$ лар мавжуд. Уларни мос равишда a ва b билан белгилайлик:

$$\sup E_1 = a, \sup E = b.$$

Энди $a \leq b$ бўлишини исботлаймиз. Тескарисини фараз қилайлик, яъни $a > b$ бўлсин. У ҳолда ҳар доим $a > \alpha > b$ тенгсизлиқни қаноатлантирувчи α рационал сонни топиш мумкин. $a = \sup E_1$ бўлгани учун, шундай $a^* \in E_1$ мавжудки, $a^* > \alpha$, демак, $a^* > b$ бўлади. Аммо $a^* \in E_1$ ва $E_1 \subset E$ бўлгани учун $a^* \leq b$. Шундай қилиб, $b < a^* \leq b$ тенгсизликларга эга бўлдик. Бу эса $\alpha > b$ тенгсизликка зид. Демак, $a \leq b$, яъни $\sup E_1 \leq \sup E$ бўлади.

Мисол ва масалалар

11. $\sqrt{3}$ сонни аниқловчи кесим тузинг.
 12. Ушбу $x^2 = 2$ тенглама рационал сонлар тўпламида ечимга эга эмаслигини кўрсатинг.
 13. Кесим ёрдамида $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$ эканини кўрсатинг.
 14. Кесим ёрдамида $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ эканини кўрсатинг.
 15. Кесим ёрдамида $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ бўлишини кўрсатинг.
 16. Ушбу $x^6 = 3$ тенгламани қаноатлантирувчи ҳақиқий соннинг мавжудлигини кўрсатинг.
- Берилган A ва B тўпламларга кўра $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ тўпламларни топинг.
17. $A = \{x \in R: x^2 - 5x + 6 \leq 0\}$,
 $B = \{x \in R: 2x^2 - 5x < 0\}$.
 18. $A = \{x \in R: |x| + |x - 1| \leq 3\}$,
 $B = \{x \in R: x^2 - 5|x| + 6 < 0\}$.
 19. $A = \{(x, y) \in R \times R: |x| + |y| \leq 1\}$,
 $B = \{(x, y) \in R \times R: x + y \geq 1\}$.
 20. $A = \{(x, y) \in R \times R: xy \leq 0\}$,
 $B = \{(x, y) \in R \times R: y \geq x^2\}$.
 21. $A = \{x \in R: 1 < |x - 3| \leq 2\}$,
 $B = \{x \in R: 2|x| < 3\}$.
 22. $A = \{(x, y) \in R \times R: x^3 > y^3\}$,
 $B = \{(x, y) \in R \times R: x^2 > y^2\}$.
 23. $A = \{(x, y) \in R \times R: \sin(x - y) = 0\}$,
 $B = \{(x, y) \in R \times R: \cos(x + y) = 0\}$.
 24. $A = \{(x, y) \in R \times R: |\cos xy| \geq 1\}$,
 $B = \{(x, y) \in R \times R: |\cos xy| \leq 1\}$.
 25. $A = \{(x, y) \in R \times R: x^2 + y^2 = 0\}$,
 $B = \{(x, y) \in R \times R: x^2 - y^2 = 0\}$.
 26. Агар $A \subset B$ бўлса, $\inf A \geq \inf B$ эканини кўрсатинг.

27. $A = \{x\}$ ва $B = \{y\}$ ҳақиқий сонлар тўплари берилган бўлиб, $\{x + y\}$ тўплам эса $\{x + y: x \in A, y \in B\}$ йиғиндилардан иборат тўплам бўлсин. Унда

$$\begin{aligned}\sup \{x + y\} &= \sup \{x\} + \sup \{y\}, \\ \inf \{x + y\} &= \inf \{x\} + \inf \{y\}\end{aligned}$$

бўлишини исботланг.

28. $A = \{x\}$ ва $B = \{y\}$ манфий бўлмаган ҳақиқий сонлар тўплалари берилган бўлиб, $\{x \cdot y\}$ тўплам эса $\{x \cdot y: x \in A, y \in B\}$ кўпайтмалардан иборат тўплам бўлсин. Унда

$$\begin{aligned}\sup \{x y\} &= \sup \{x\} \cdot \sup \{y\}, \\ \inf \{x y\} &= \inf \{x\} \cdot \inf \{y\}\end{aligned}$$

бўлишини исботланг.

29. $A = \{x\}$ ҳақиқий сонлар тўплами берилган бўлиб, $\{-x\}$ тўплам $-x$ сонлардан ($x \in A$) иборат тўплам бўлсин. Унда

$$\begin{aligned}\sup \{-x\} &= -\inf \{x\}, \\ \inf \{-x\} &= -\sup \{x\}\end{aligned}$$

бўлишини кўрсатинг.

30. Ушбу

$$\left\{ \frac{m}{n} \right\} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, m < n \right\}$$

тўпламнинг аниқ юқори чегараси $\sup \left\{ \frac{m}{n} \right\}$ ва аниқ қуйи чегараси $\inf \left\{ \frac{m}{n} \right\}$ ларни топинг.

II боб

СОНЛАР КЕТМА-КЕТЛИГИ ВА УНИНГ ЛИМИТИ

1-§. СОНЛАР КЕТМА-КЕТЛИГИ ТУШУНЧАСИ

Фараз қилайлик, f ҳар бир натурал сон $n \in \mathbb{N}$ га бирор ҳақиқий $x_n \in \mathbb{R}$ сонни мос қўювчи акслантириш бўлсин:

$$f: n \rightarrow x_n.$$

Бу акслантириш қийматларидан тузилган

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \quad (1)$$

ифода ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги (қисқача сонлар кетма-кетлиги) дейилади ($\{x_n\}$ кўринишда белгиланади).

x_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) сонлар (1) кетма-кетликнинг ҳадлари дейилади.

Мисоллар:

$$1) x_n = \frac{1}{n} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

$$2) y_n = (-1)^n : -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$$

$$3) z_n = \frac{(-1)^n}{n} : -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots$$

$$4) u_n = 1 : 1, 1, 1, \dots, 1, \dots$$

1-таъриф. Агар шундай ўзгармас M сони мавжуд бўлсаки, $\forall n \in N$ учун $x_n \leq M$ ($x_n \geq M$) бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ кетма-кетлик юқоридан (қуйидан) чегараланган дейилади.

Бу таърифни қисқача

$$\exists M \in R, \forall n \in N : x_n \leq M \text{ } (x_n \geq M)$$

каби ифодалаш мумкин. Масалан,

$$-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$$

кетма-кетлик юқоридан,

$$1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$$

кетма-кетлик эса қуйидан чегараланганлир.

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳам қуйидан, ҳам юқоридан чегараланган бўлса, у чегараланган кетма-кетлик дейилади.

2-таъриф. Агар шундай ўзгармас $M > 0$ сон мавжуд бўлсаки, $\forall n \in N$ учун $|x_n| \leq M$ бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ кетма-кетлик чегараланган дейилади.

Бу таърифни қисқача

$$\exists M > 0, \forall n \in N, |x_n| \leq M$$

каби ифодалаш мумкин. Масалан, ушбу

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

кетма-кетлик чегараланган кетма-кетликдир.

1-мисол. Ушбу

$$\frac{2}{1!}, \frac{4}{2!}, \frac{8}{3!}, \dots, \frac{2^n}{n!}, \dots$$

кетма-кетликнинг юқоридан чегараланганлигини исботланг.

Бу кетма-кетликнинг n -ва $(n+1)$ -ҳадлари

$$x_n = \frac{2^n}{n!}, \quad x_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

учун

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2}$$

тенглик ўринли бўлади. Агар ихтиёрий натурал n ($n \geq 1$) сон учун $\frac{n+1}{2} \geq 1$ эканини эътиборга олсак, унда

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} \geq 1 \Rightarrow x_n \geq x_{n+1}$$

бўлишини кўрамиз. Демак,

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \dots$$

Бундан эса ихтиёрий $n \geq 1$ учун

$$x_n! \leq x_1 = 2$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, шундай M сони, яъни $M = 2$ сон топилдики, $\forall n \in \mathbb{N}$ учун $x_n = \frac{2^n}{n!} \leq 2$ бўлди. Бу эса берилган кетма-кетлик юқоридан чегараланганлигини билдиради. $x_n \geq 0$ эканлигини назарга олсак, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чегараланганлигини кўрамиз.

2-мисол. Ушбу

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \dots, \sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}, \dots \quad (2)$$

n та илдиз

кетма-кетликнинг чегараланганлигини исботланг.

$$\text{Равшанки, } x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}} \text{ бўлиб, } \forall n \in \mathbb{N}$$

n та илдиз

учун $x_n \geq \sqrt{2}$ бўлади. Бу кетма-кетликнинг қуйидан чегараланганлигини билдиради.

Агар

$$2 = \sqrt{2+2} > \sqrt{2+\sqrt{2}} = x_2,$$

$$2 = \sqrt{2+\sqrt{2+2}} > \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = x_3,$$

$$2 = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + 2}}}}_{(n-1) \text{ та илдиз}} > \\ > \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ та илдиз}} = x_n$$

бўлишини эътиборга олсак, математик индукция усулидан фойдаланиб $\forall n \in N$ учун $x_n < 2$ эканини аниқлаймиз. Шундай қилиб, (2) кетма-кетликнинг ҳам қуйидан, ҳам юқоридан чегараланганлиги кўрсатилди. Демак, берилган кетма-кетлик чегаралангандир.

3-мисол. Ушбу $\{x_n\} = \{\sqrt[n]{n}\}$:

$$1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \dots, \sqrt[n]{n}, \dots$$

кетма-кетликнинг юқоридан чегараланмаганлигини кўрсатинг.

Ихтиёрий мусбат M сонни олайлик. Бу сонга кўра $n_0 = [M + 1]^2$ олинса, унда

$$x_{n_0} = \sqrt[n_0]{n_0} = \sqrt[M+1]{[M+1]^2} = [M+1] > M \quad (3)$$

бўлади. Бу эса $\{\sqrt[n]{n}\}$ кетма-кетликнинг юқоридан чегараланмаганлигини билдиради.

4-мисол. Ушбу

$$\{x_n\} = \left\{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$$

кетма-кетликнинг юқоридан чегараланмаганлигини исботланг. Равшанки,

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \\ > 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Демак,

$$x_n \geq \sqrt{n}.$$

Юқоридаги (3) муносабатдан фойдалансак, ҳар қандай M учун шундай $n_0 \in N$ мавжудки, бу n_0 учун

$$x_{n_0} > M$$

бўлади.

Демак,

$$M > 0, \exists n_0 \in N: x_{n_0} \geq \sqrt{n_0} > M.$$

Бу эса берилган кетма-кетликнинг юқоридан чегараланмаганлигини билдиради.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги кетма-кетликларнинг чегараланганлигини исботланг:

1. $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
2. $x_n = \sqrt{n^2 + (n-1) \sin n} - n$.
3. $x_n = \log_{(n+1)} 2$.
4. $x_n = \frac{\log_2 n}{n}$.
5. $x_n = \frac{n}{4+n^2}$.
6. $x_n = \frac{n^2}{2^n}$.
7. $x_n = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}, (n \geq 2)$.
8. $x_n = \sin 1 + \frac{\sin 2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{\sin n}{(n-1)n}, (n \geq 2)$.
9. $x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}, (\alpha \geq 2)$.
10. $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
11. $x_n = \underbrace{\sin \sin \dots \sin x}_{n \text{ та}}$.

Қуйидаги кетма-кетликларнинг чегараланмаганлигини] исботланг:

12. $x_n = \frac{3^n}{n^2}$.
13. $x_n = (-1)^n n$.
14. $x_n = \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{агар } n \text{ жуфт бўлса,} \\ \frac{1}{n}, & \text{агар } n \text{ тоқ бўлса.} \end{cases}$
15. $x_n = \begin{cases} \sqrt[3]{n}, & \text{агар } n = k^3 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } n \neq k^3 \text{ бўлса.} \end{cases}$

$$16. x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}, (\alpha \leq 1).$$

$$17. x_n = \log_2 (n^2 + n).$$

18. Агар $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ чегараланган кетма-кетликлар бўлса, у ҳолда $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n y_n\}$ кетма-кетликларнинг чегараланган эканлигини кўрсатинг.

19. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар чегараланмаган бўлса, $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$ кетма-кетликлар ҳақида нима дейиш мумкин?

20. Агар $\{x_n\}$ чегараланган, $\{y_n\}$ эса чегараланмаган кетма-кетлик бўлса, у ҳолда $\{x_n + y_n\}$ кетма-кетликнинг чегараланмаганлигини кўрсатинг.

21. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун $x_n + x_{n+1}$ йиғинди чегараланган бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чегараланган бўлиши шартми?

22. Агар $\{x_n\}$ чегараланган кетма-кетлик бўлса, у ҳолда $y_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ кетма-кетлик ҳам чегараланган эканлигини кўрсатинг. Тескариси ўринлими?

23. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун $\{x_n^2 - x_n\}$ айирма чегараланган бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чегараланган бўлишини кўрсатинг.

24. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун $x_n^2 + \frac{1}{x_n}$ йиғинди чегараланган бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ ва $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ кетма-кетликларнинг чегараланган бўлишини кўрсатинг.

25. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун $x_n > 0$ ва $x_{n+1} \leq x_n(1 - x_n)$, $n \geq 1$ шартлар [бажарилса, $\{nx_n\}$ кетма-кетликнинг чегараланган бўлишини кўрсатинг.

Фараз қилайлик,

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

кетма-кетлик берилган бўлсин.

3-таъриф. Агар $\forall n \in N$ учун

$$x_n \leq x_{n+1} (x_n < x_{n+1})$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ ўсувчи (қатъий ўсувчи) кетма-кетлик дейилади.

Агар $\forall n \in N$ учун

$$x_n \geq x_{n+1} (x_n > x_{n+1})$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ камаювчи (қатъий камаювчи) кетма-кетлик дейилади.

4-таъриф. Ўсувчи ва камаювчи кетма-кетликлар монотон кетма-кетликлар дейилади.

Масалан

1, 2, 2, 3, 3, 3, . . . , ўсувчи,

2, 2², 2³, . . . , 2ⁿ . . . , қатъий ўсувчи,

1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, . . . , $\frac{1}{n}$, . . . , қатъий камаювчи,

1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, . . . , $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n}$, . . . камаювчи

кетма-кетликлар бўлади.

Юқоридаги таърифдан бевосита, $\forall n \in N$ учун

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} \leq 1 (x_n > 0) \text{ ёки } x_n - x_{n+1} \leq 0$$

бўлганда $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ўсувчи,

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} \geq 1 (x_n > 0) \text{ ёки } x_n - x_{n+1} \geq 0$$

бўлганда эса кетма-кетликнинг камаювчи бўлиши келиб чиқади.

5-мисол. Ушбу $\{x_n\} = \left\{\frac{n}{2^n}\right\}$:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, \dots, \frac{n}{2^n}, \dots$$

кетма-кетликнинг камаювчи эканлигини кўрсатинг.

$$x_n = \frac{n}{2^n} \text{ ва } x_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

лар учун

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

бўлади. Бу тенгсизликдан эса

$$x_n \geq x_{n+1}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\forall n \in N$ учун

$$x_n \geq x_{n+1}$$

бўлади. Бу эса берилган кетма-кетликнинг камаювчи эканини билдиради.

6-мисол. Ушбу

$$\{x_n\} = \left\{ 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} \right\} \quad (n \geq 2)$$

кетма-кетликнинг ўсувчи эканлигини кўрсатинг.

Берилган кетма-кетликнинг

$$x_n = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n-1)},$$

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n+1)}$$

ҳадларини олиб, уларнинг айирмаси

$$x_{n+1} - x_n$$

ни қараймиз:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} - \\ &- \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \right) = \frac{1}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Равшанки, $\forall n \in N$ учун

$$\frac{1}{n(n+1)} > 0.$$

Демак, $\forall n \in N$ учун

$$x_{n+1} - x_n > 0 \Leftrightarrow x_{n+1} > x_n$$

бўлади ва бу берилган кетма-кетликнинг ўсувчи эканини билдиради.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги кетма-кетликларнинг ўсувчи ёки камаювчи бўлишини аниқланг:

26. $x_n = \frac{3^n}{n!}.$

27. $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 1 - \frac{1}{4x_n} \quad (n \geq 1).$

28. $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad x_1 > 0, \quad a > 0.$

$$29. x_{n+1} = x_n(2 - x_n), \quad 0 < x_n < 1 \quad (n \geq 1).$$

30. n_0 ни қандай танланса, $n \geq n_0$ лар учун қуйидаги кетма-кетликлар монотон бўлади:

$$a) x_n = \frac{3^n}{n^5}; \quad б) x_n = \frac{n^2}{2^n}; \quad в) x_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Қуйидаги кетма-кетликларнинг монотон ва чегараланганлигини кўрсатинг:

$$31. a) x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1};$$

$$б) y_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

32. $x_1 = 9$, $x_{n+1} = (x_n - 3)^2$ кетма-кетликнинг ўсувчи эканини исботланг.

2-§. СОНЛАР КЕТМА-КЕТЛИГИНИНГ ЛИМИТИ

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (1)$$

сонлар кетма-кетлиги ҳамда бирор a сон ($a \in R$) берилган бўлсин.

5-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай натурал $n_0 = n_0(\varepsilon)$ сон топилсаки, барча $n > n_0$ натурал сонлар учун

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи дейилади, a сон эса $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити деб аталади ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{ёки} \quad x_n \rightarrow a$$

каби белгиланади.

Бу таърифни қисқача

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N, \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

каби ифодалаш мумкин.

7-мисол. Ушбу

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}: \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \dots, \quad \frac{n}{n+1}, \quad \dots$$

кетма-кетликнинг лимити $a = 1$ бўлишини кўрсатинг.

Ихтиёрый мусбат ε сонни оламиз. Бу $\varepsilon > 0$ сонга кўра $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ дейилса, у ҳолда $\forall n > n_0$ учун

$$|x_n - a| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n_0+1} < \varepsilon$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

8-мисол. Ушбу

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right\}: -1, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \dots$$

кетма-кетликнинг лимити ноль бўлишини таърифга асосан исбот қилинг.

Ихтиёрый мусбат ε сонни олайлик. Унда бу $\varepsilon > 0$ сонга кўра шундай натурал n_0 ($n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$) сон топилишини кўрсатиш керакки, $n > n_0$ бўлган барча натурал n сонлар учун (демак, топилган n_0 сондан кейин келадиган натурал сонлар учун)

$$|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилсин. Юқорида айтилган n_0 сонни топиш, одатда $|x_n| < \varepsilon$ тенгсизликни ечиш орқали амалга оширилади:

$$|x_n| = \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| < \varepsilon.$$

Равшанки,

$$\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < \sqrt{n} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Демак, n_0 натурал сон сифатида $\left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1 = n_0$ олинса, унда $\forall n > n_0$ учун

$$\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

бўлади. Кетма-кетлик лимити таърифига биноан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$$

бўлади.

Эслатма. Шунинг таъкидлаш лозимки, кетма-кетлик лимити таърифдаги берилган $\varepsilon > 0$ га кўра топиладиган $n_0 = n_0(\varepsilon)$ натурал сонлар (яъни $\forall n > n_0$ учун $|x_n - a| < \varepsilon$ тенгсизлик бажариладиган) жуда кўп бўлади. Улардан бирини олиш етарлидир.

6-таъриф. Агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ ни чексиз кичик миқдор деб аталади. Масалан:

$$1) \{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}; \quad 2) \{x_n\} = \left\{-\frac{1}{n}\right\}; \quad 3) \{x_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$$

лар чексиз кичик миқдорлар бўлади.

7-таъриф. Агар $\forall E > 0$ сон олинганда ҳам шундай натурал n_0 сон топилсаки, $\forall n > n_0$ учун

$$|x_n| > E$$

бўлса, $\{x_n\}$ ни чексиз катта миқдор деб аталади.

Агар $\forall E > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ топилсаки, $\forall n > n_0$ учун $x_n > E$ ($x_n < -E$) бўлса, унда $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити $+\infty$ ($-\infty$) деб олинади ва $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$) каби белгиланади.

9-мисол. Ушбу

$$\{x_n\} = \{2^{\sqrt{n}}\}; \quad 2, 2^{\sqrt{2}}, 2^{\sqrt{3}}, \dots, 2^{\sqrt{n}}, \dots$$

кетма-кетликнинг лимити $+\infty$ эканини кўрсатинг.

Ихтиёрий $E > 0$ сонни олайлик. Унда бу сонга кўра шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ ($n_0 = n_0(E)$) сон топилишини кўрсатиш керакки, барча $n > n_0$ учун

$$x_n = 2^{\sqrt{n}} > E$$

тенгсизлик бажарилсин.

Олдинги мисолни ечиш жараёнида айтганимиздек, n_0 сон

$$2^{\sqrt{n}} > E \quad (4)$$

тенгсизлиكنи ечиш орқали аниқланади.

Равшанки,

$$2^{\sqrt{n}} > E \Leftrightarrow \log_2 2^{\sqrt{n}} > \log_2 E \Rightarrow \sqrt{n} > \log_2 E.$$

$0 < E \leq 1$ бўлганда, $n_0 = n_0(E) = 1$ дейилса, $E > 1$ бўлганда, $n_0 = [\log_2^2 E]$ дейилса, унда $\forall n > n_0$ учун ҳар доим (4) тенгсизлик бажарилади:

$$x_n = 2^{\sqrt{n}} > E.$$

Бу эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\sqrt{n}} = +\infty$$

эканини билдиради.

$\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар берилган бўлсин.

Қуйидаги

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots$$

$$x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n, \dots$$

$$x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \dots, x_n \cdot y_n, \dots$$

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \dots, \frac{x_n}{y_n}, \dots \quad (y_n \neq 0, n = 1, 2, \dots)$$

кетма-кетликлар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликларнинг мос равишда йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва нисбати деб аталади ва

$$\{x_n + y_n\}, \{x_n - y_n\}, \{x_n \cdot y_n\}, \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$$

каби белгиланади.

3-§. ЛИМИТГА ЭГА БУЛГАН КЕТМА-КЕТЛИКЛАР ҲАҚИДА ТЕОРЕМАЛАР

Айтайлик, $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар берилган бўлиб, улар чекли лимитга эга бўлсин:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b.$$

У ҳолда:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b;$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$$

бўлади.

4) агар $\forall n \in N$ учун $x_n \leq y_n$ бўлса, $a \leq b$ бўлади.

Эслатма. Агар $\forall n \in N$ учун $x_n < y_n$ бўлса, $a < b$ бўлиши шарт эмас. Масалан, $x_n = \frac{1}{n+1}$, $y_n = \frac{1}{n}$ кетма-кетликлар учун $x_n < y_n$ ва $a = b = 0$.

Лимитларга доир мисол ва масалалар кўпинча 1) — 3) қондалар ёрдамида ечилади.

10-мисол. Ушбу $\{x_n\} = \left\{\frac{5\sqrt[n]{n}}{n+1}\right\}$ кетма-кетликнинг лимитини топинг.

Бу кетма-кетликнинг лимити қуйидагича топилади:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt[n]{n}}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt[n]{n}/n}{(n+1)/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{\sqrt[n]{n}}}{1 + \frac{1}{n}} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{\sqrt[n]{n}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 0.\end{aligned}$$

Бу ерда биз фойдаланган $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{\sqrt[n]{n}} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ муносабатлар бевосита лимит таърифига кўра исбот қилинади.

11-мисол. Ушбу $\{x_n\} = \{\sqrt[n]{n}\}$:

$$1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \dots, \sqrt[n]{n}, \dots$$

кетма-кетликнинг лимитини топинг.

Равшанки, $\forall n \geq 2$ да $\sqrt[n]{n} > 1$ бўлади. Агар

$$\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n \Rightarrow \sqrt[n]{n} = (1 + \alpha_n)^n$$

дейилса, сўнг Бернулли тенгсизлигидан фойдаланилса (Азларов Т., Мансуров Х. «Математик анализ» I жилди, 66-бетга қаранг), унда

$$\sqrt[n]{n} = (1 + \alpha_n)^n > 1 + n\alpha_n > n\alpha_n$$

бўлишини топамиз. Кейинги тенгсизликдан

$$\alpha_n < \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

бўлиши келиб чиқади. Натижада ушбу

$$1 < \sqrt[n]{n} < \left(1 + \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 \quad (5)$$

тенгсизликка келамиз. Агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1$$

эканини ҳисобга олсак, у ҳолда 5) ва юқоридаги 4) қоида-га кўра

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

бўлишини топамиз.

5) $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ ва $\{z_n\}$ кетма-кетликлар берилган бўлсин. Агар $\forall n \in N$ учун $x_n \leq y_n \leq z_n$ бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$$

бўлса, у ҳолда $\{y_n\}$ кетма-кетликнинг лимити мавжуд бў-либ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$$

бўлади.

12-мисол. Ушбу $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \cos n \right\}$ кетма-кетликнинг лимитини топинг.

Равшанки, бир томондан, $x_n = \frac{1}{n} \cos n$ учун

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \cos n \leq \frac{1}{n}$$

тенгсизлик бажарилади, иккинчи томондан,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) = 0.$$

Унда $\{x_n\} = \left\{ \frac{\cos n}{n} \right\}$ кетма-кетлик ҳам лимитга эга бў-либ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos n = 0$$

бўлади.

6) Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи бўлиб, юқоридан че-гараланган бўлса, унинг чекли лимити мавжуд бўлади.

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик камаювчи бўлиб, қуйидан чега-ралangan бўлса, унинг чекли лимити мавжуд бўлади.

13-мисол. Биринчи ҳади $x_0 = 2$, кейинги ҳадлари эса $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right)$ қоида ёрдамида аниқланадиган кетма-кетликнинг лимити мавжуд эканлигини кўрсатинг ва шу ли-митни топинг.

Авалло $x_0 = 2$ ва $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right)$ ($n \geq 0$) бўлганлиги дан $x_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) бўлиши равшан.

Энди $x_{n+1} - x_n$ айирмани қараймиз:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{2} \left(x_n - x_{n-1} + \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(x_n - x_{n-1} + \frac{x_{n-1} - x_n}{x_{n-1} x_n} \right) \leq \frac{1}{2} (x_n - x_{n-1} + \\ &\quad + x_{n-1} - x_n) = 0. \end{aligned}$$

Демак,

$$x_{n+1} - x_n \leq 0 \Rightarrow x_n \geq x_{n+1}$$

тенгсизлик бажарилиб, бу берилган кетма-кетликнинг камаювчи бўлишини билдиради. Шундай қилиб, берилган кетма-кетлик камаювчи ва қуйидан чегараланган экан. Унда кетма-кетлик чекли лимитга эга бўлади. Бу лимитни c билан белгилаб

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right)$$

тенгликда лимитга ўтсак, у ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right) \Rightarrow c = \frac{1}{2} \left(c + \frac{1}{c} \right) \Rightarrow c^2 = 1$$

бўлиши келиб чиқади. Яқинлашувчи кетма-кетликларнинг хоссаларига кўра $x_n > 0$ бўлгани учун $c = 1$, яъни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

муносабатга эга бўламиз.

7) $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиши учун, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ сон мавжуд бўлиб, $\forall n > n_0$ ва $\forall m > n_0$ ларда ($n \neq m$)

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли (Коши критерийси).

14-мисол. Ушбу

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n!}{n(n+1)} \right\}$$

кетма-кетликнинг яқинлашувчи эканини исботланг.

Берилган кетма-кетлик учун ($n > m$)

$$x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n!}{n(n+1)},$$

$$x_m = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos m!}{m(m+1)}$$

бўлиб,

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \left| \frac{\cos(m+1)!}{(m+1)(m+2)} + \frac{\cos(m+2)!}{(m+2)(m+3)} + \dots + \right. \\ &+ \left. \frac{\cos n!}{n(n+1)} \right| \leq \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \dots + \\ &+ \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} \right) + \left(\frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3} \right) + \dots + \\ &+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{m+1} \end{aligned}$$

бўлади.

Агар $\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ дейилса, у ҳолда $n > m > n_0$ бўлганда

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{m+1} < \frac{1}{n_0+1} < \varepsilon$$

бўлади. Демак, Коши критерийсига кўра берилган кетма-кетлик чекли лимитга эга.

15-мисол. Ушбу

$$\{x_n\} = \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right\}$$

кетма-кетликнинг яқинлашувчи эмаслигини кўрсатинг.

Коши критерийсига кўра бу кетма-кетликнинг яқинлашувчи эмаслигини исботлаш учун шундай $\varepsilon_0 > 0$ сон ва ихтиёрый натурал n учун шундай $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ топилиб, $n_0 > n$ ва $m_0 > n$ бўлганда

$$|x_{n_0} - x_{m_0}| \geq \varepsilon_0$$

бажарилишини кўрсатиш керак.

$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}$, $n_0 = n + 1$, $m_0 = 2(n + 1)$ (равшанки $n_0 > n$, $m_0 > n$) бўлганда

$$\begin{aligned} |x_{2(n+1)} - x_n| &= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2(n+1)} \geq \\ &\geq \frac{n+1}{2(n+1)} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0 \end{aligned}$$

бўлади. Демак, берилган кетма-кетлик лимитга эга эмас.

Мисол ва масалалар

Сонлар кетма-кетлиги лимити таърифига кўра кўрсатилган сонлар берилган кетма-кетликларнинг лимити эканлигини исботланг:

$$33. x_n = \frac{(-1)^n}{2n+5}, \quad a = 0.$$

$$34. x_n = \frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}, \quad a = 0.$$

$$35. x_n = \frac{3^n}{n!}, \quad a = 0.$$

$$36. x_n = \frac{\log_2 n}{\sqrt{n}}, \quad a = 0.$$

$$37. x_n = \frac{n+1}{n}, \quad a = 1.$$

$$38. x_n = \frac{2n^2+3n+1}{4n^2-5n+6}, \quad a = \frac{1}{2}.$$

$$39. x_n = \sqrt[n]{2}, \quad a = 1.$$

Қуйидаги сонлар кетма-кетликларининг лимитини топинг:

$$40. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n+1}{n}}.$$

$$41. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-1}).$$

$$42. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^4+n+1} - \sqrt{n^4+1}).$$

$$43. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{13} + (n+2)^{10}}{(n-1)^{13} + 1}.$$

$$44. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2^n + \cos n}{2^n + \sin n}.$$

$$45. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a^n}, \quad (a \geq 0).$$

$$46. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + 3b^n}{5a^n + 7b^n}, \quad (a > 0, b > 0).$$

$$47. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right).$$

$$48. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4n^2-1} \right).$$

$$49. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)}{n^3}.$$

$$50. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \dots \cos \frac{x}{2^n} \right).$$

$$51. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + a^2 \cdot 2 + \dots + n \cdot a^n}{n a^{n+2}}, \quad (a > 1).$$

$$52. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3 + n + 1}.$$

$$53. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 5^n}.$$

$$54. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n \cdot 3^0 + 2^{n-1} \cdot 3 + \dots + 2^0 \cdot 3^n}.$$

$$55. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1^n + 2^n + \dots + n^n}.$$

$$56. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right).$$

$$57. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}} \right).$$

Коши критерийсидан фойдаланиб қуйидаги кетма-кетликларнинг чекли лимитга эга бўлишини кўрсатинг:

$$58. x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

$$59. x_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{n^n}.$$

$$60. x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

61. $x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$ учун $\alpha > 1$ бўлса яқинлашувчи, $\alpha \leq 1$ бўлса узоқлашувчи эканлигини кўрсатинг.

62. $\{x_n\}$ кетма-кетлик Коши критерийсини қаноатлантирса, $\{x_n^2\}$, $\{\sqrt{x_n}\}$ лар ҳам Коши критерийсини қаноатлантиришини кўрсатинг.

63. Агар $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ кетма-кетликлар Коши критерийсини қаноатлантирса, $\{x_n + y_n\}$ ($n \geq 1$), $\{x_n y_n\}$ ҳам Коши критерийсини қаноатлантиришини кўрсатинг.

64. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун $|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2^n}$ бўлса, $\{x_n\}$ Коши критерийсини қаноатлантиришини кўрсатинг.

4-§. КЕТМА-КЕТЛИКНИНГ ҚҰЙИ ВА ЮҚОРИ ЛИМИТЛАРИ

Фараз қилайлик, ихтиёрий

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

кетма-кетлик берилган бўлсин. Бу кетма-кетлик ҳадларидан тузилган ушбу $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$ ($n_1 < \dots < n_k < \dots$, $n_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \dots$) кетма-кетлик берилган $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги деб аталади.

$\{x_n\}$ кетма-кетликнинг яқинлашувчи қисмий кетма-кетлигининг limiti берилган кетма-кетликнинг қисмий limiti деб аталади.

$\{x_n\}$ кетма-кетлик қисмий limitларининг энг каттаси берилган кетма-кетликнинг юқори limiti деб аталади ва

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

каби белгиланади.

$\{x_n\}$ кетма-кетлик қисмий limitларининг энг кичиги берилган кетма-кетликнинг қуйи limiti деб аталади ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

каби белгиланади.

Кетма-кетликнинг юқори ва қуйи limitларини қуйидагича ҳам ифодалаш мумкин:

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = L &\iff \begin{cases} 1^\circ. \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 \Rightarrow x_n < L + \varepsilon \\ 2^\circ. \forall \varepsilon > 0, \forall N, \exists n > N \Rightarrow x_n > L - \varepsilon \end{cases} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l &\iff \begin{cases} 1^\circ. \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 \Rightarrow x_n > l - \varepsilon \\ 2^\circ. \forall \varepsilon > 0, \forall N, \exists n > N \Rightarrow x_n < l + \varepsilon \end{cases} \end{aligned}$$

16- мисол. Ушбу

$$\{x_n\} = \left\{ 1 + \cos \frac{n\pi}{2} \right\}$$

кетма-кетликнинг қуйи ва юқори limitларини топинг.

Берилган кетма-кетликнинг

$$\{x_{2m-1}\} \text{ ва } \{x_{2m}\}$$

қисмий кетма-кетликларини қараймиз.

Равшанки,

$$x_{2m-1} = 1 + \cos \frac{(2n-1)\pi}{2} = 1$$

бўлади. Демак, берилган кетма-кетликнинг

$$\{x_{2m-1}\}; \quad x_1, x_3, x_5, \dots, x_{2m-1}, \dots$$

қисмий кетма-кетлиги лимитга эга ва у 1 га тенг:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_{2m-1} = 1.$$

Энди $\{x_{2m}\}$ қисмий кетма-кетликни қараймиз:

$$x_{2m} = 1 + \cos m\pi.$$

Агар

$$\cos m\pi = \begin{cases} 1, & \text{агар } m = 2k, \\ -1 & \text{агар } m = 2k - 1 \end{cases}$$

эканини эътиборга олсак, унда

$$\{x_{2m}\} = \{1 + (-1)^m\} = \{0, 2, 0, 2, \dots\}$$

бўлишини кўрамиз. $\{x_{2m}\} = \{0, 2, 0, 2, \dots\}$ қисмий кетма-кетлик яқинлашувчи эмас. Бу кетма-кетликда

$$x_{4k} = 2, \quad x_{4(k-1)} = 0$$

бўлиб, 2 ва 0 сонлари қисмий лимит эканлигини кўрамиз.

Энди

$$\{x_{4k-2}\}; \quad x_2, x_6, x_{10}, \dots, x_{4k-2}, \dots$$

кетма-кетликларни қарайлик.

$\{x_{4k}\}$ кетма-кетлик учун $\forall k \in N$ да

$$x_{4n} < x_{4(k+1)} \quad \text{ва} \quad x_{4k} < 2$$

бўлади. Демак, $\{x_{4k}\}$ кетма-кетлик ўсувчи ва у юқоридан чегараланган. Унда бу кетма-кетликнинг лимити мавжуд ва

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{4k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4k}{4k+1}\right) = 2.$$

Шундай қилиб, берилган кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетликлари лимитлари орасида энг каттаси 2, энг кичиги эса 0 га тенг эканлигини кўриш қийин эмас. Демак,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \cos \frac{n\pi}{2}\right) = 2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \cos \frac{n\pi}{2}\right) = 0.$$

17- мисол. Агар $\alpha_n = \sup_{k > n} \{x_k\}$ бўлса, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ эканлиги кўрсатилсин.

Аввало $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ мавжудлигини кўрсатамиз:

$$\alpha_1 = \sup_{k \geq 1} \{x_k\}, \dots, \alpha_{n+1} = \sup_{k \geq n+1} \{x_k\}.$$

Бундан кўринадики, $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_{n+1} \dots$, яъни $\{\alpha_n\}$ кетма-кетлик монотон камаювчи экан. У ҳолда чекли ёки чексиз $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ мавжуд.

1-ҳол. $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$ бўлиб, α чекли сон бўлсин. У ҳолда $\forall \varepsilon > 0$, $n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$ топиладики, $\forall n > n_0$ учун $\alpha - \varepsilon < \alpha_n < \alpha + \varepsilon$ бўлади.

$\alpha_n = \sup_{k \geq n} x_k$ экани сабабли

$$\alpha - \varepsilon < \sup_{k \geq n} x_k < \alpha + \varepsilon.$$

Равшанки, барча $n \geq 1$ лар учун

$$x_n \leq \sup_{k \geq n} x_k < \alpha + \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N,$$

$$\forall n > n_0, x_n < \alpha + \varepsilon \quad (1)$$

эканлигини кўрамыз.

$\alpha_n = \sup_{k \geq n} x_k$ сабабли, ўша берилган $\forall \varepsilon > 0$ учун шундай $k \geq n$ $k(e) \in N$ топиладики, унинг учун

$$x_{k(e)} > \alpha_n - \varepsilon$$

бўлади. Аммо, барча $n \geq 1$ лар учун $\alpha_n \geq \alpha$, шу сабабли

$$x_{k(e)} > \alpha_n - \varepsilon \geq \alpha - \varepsilon \Rightarrow x_{k(e)} > \alpha - \varepsilon. \quad (2)$$

(1) ва (2) лардан кўринадики,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k.$$

2-ҳол. $\alpha = -\infty$ бўлсин. У ҳолда:

$$\forall E > 0, \exists n_0 = n_0(E) \in N, \forall n > n_0, \alpha_n < -E \Rightarrow \sup_{k \geq n} \{x_k\} < -E \Rightarrow x_n < -E.$$

Шу сабабли:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k = -\infty.$$

18-миқсол. а) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$.

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$$

эқанини кўрсатинг.

$\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликларнинг юқори ва қуйи лимитлари чекли сон бўлган ҳоли билан чекланамиз.

Юқорида келтирилган мисолларга асосан:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \{x_k\} + \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \{y_k\} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{k \geq n} \{x_k\} + \sup_{k \geq n} \{y_k\}) \geq \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \{x_k + y_k\} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{x_n + y_n\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [(x_n + y_n) + (-x_n)] \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n). \end{aligned}$$

Бундан: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$.

19- мисол. Агар $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ мавжуд бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\{y_n\}$ учун

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

эқанлигини кўрсатинг.

Юқорида келтирилган мисолларга асосан:

$$\text{а) } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$\text{б) } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Булардан

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \text{ эқани келиб чиқади.}$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги кетма-кетликларнинг юқори ва қуйи лимитларини топинг:

$$65. x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}.$$

$$66. x_n = n^{(-1)^n}.$$

$$67. x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}.$$

$$68. x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos^2 \frac{n\pi}{2}.$$

$$69. x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

$$70. x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}.$$

$$71. x_n = -n[2 + (-1)^n].$$

$$72. x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4}.$$

$$73. x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}.$$

$$74. x_n = \cos^n \frac{2n\pi}{3}.$$

Исботланг:

$$75. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

$$76. \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -\lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

77. $\{x_{n(k)}, k \geq 1\}, \{x_n\}$ кетма-кетликнинг ихтиёрий қисмий кетма-кетлиги бўлса, у ҳолда

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n(k)},$$

$$б) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_{n(k)} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

эканлигини кўрсатинг.

$$78. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{k \geq n} \inf \{x_k\} \text{ эканини кўрсатинг.}$$

$$79. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \max\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2, (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)^2\right)$$

эканлигини кўрсатинг.

$$80. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

эканлигини кўрсатинг.

$$81. \text{Агар } x_n \geq 0, y_n \geq 0 \text{ бўлса, } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq$$

$$\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

бўлишини кўрсатинг.

III боб

ФУНКЦИЯ ВА УНИНГ ЛИМИТИ

1-§. ФУНКЦИЯ ТУШУНЧАСИ

X ва Y ҳақиқий сонларнинг бирор тўпламлари бўлсин:

1-таъриф. Агар X тўпламдаги ҳар бир x сонга бирор қонда ёки қонунга кўра Y тўпламдан битта y сон мос қўйилса, X тўпламда функция берилган (аниқланган) деб аталади ва $f: x \rightarrow y$ ёки $y = f(x)$ каби белгиланади.

Бунда X — функциянинг аниқланиш тўплами (соҳаси), Y — функциянинг ўзгариш тўплами (соҳаси) деб аталади. x — эркин ўзгарувчи (функция аргументи), y эса эрксиз ўзгарувчи (x ўзгарувчининг функцияси) деб аталади.

Масалан: 1) f — ҳар бир ҳақиқий x сонга унинг бутун қисми $[x]$ ни мос қўювчи қонда бўлсин. Демак, $f: x \rightarrow [x]$ ёки $y = [x]$ функцияга эга бўламиз. Бу функциянинг аниқланиш тўплами $X = R$, ўзгариш тўплами эса $Y = Z$ бўлади.

2) Ҳар бир рационал сонга 1 ни, ҳар бир иррационал сонга 0 ни мос қўйиш натижасида функция ҳосил бўлади. Уни Дирихле функцияси дейилади ва $D(x)$ каби белгиланади:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \in R \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \in R \text{ иррационал сон бўлса.} \end{cases}$$

Дирихле функциясининг аниқланиш соҳаси $X = R$, ўзгариш соҳаси $Y = \{0, 1\}$ бўлади.

1-мисол. Ушбу

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

$\sqrt{1-x^2}$ ифода каср махражида эканлигини ҳисобга олиб, $1-x^2 > 0$ муносабатга эга бўламиз, яъни $|x| < 1$.

Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси $(-1, 1)$ интервалдан иборат.

2-мисол. Ушбу

$$y = \sqrt{\log_{1990} \sin x}$$

функциянинг аниқланиш соҳаси ва функция қийматлари тўпламини топинг.

$$\sqrt{\log_{1990} \sin x} \text{ ифода } \log_{1990} \sin x \geq 0$$

муносабатини қаноатлантирувчи x ларда маънога эга эканлигини ҳисобга олиб, $\sin x \geq 1$ тенгсизликка эга бўламиз.

$\sin x$ функциянинг энг катта қиймати 1 эканидан $\sin x = 1$, яъни $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ бўлади. Демак, функциянинг аниқланиш соҳаси $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ тўпладан иборат.

Энди k нинг ҳар бир $k \in \mathbb{Z}$ қийматида $\sin \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = 1$ бўлгани учун, функциянинг аниқланиш соҳасидан олинган ҳар қандай x да $\log_{1990} \sin x = 0$ бўлади. Шундай қилиб, қаралаётган функциянинг қийматлари тўплами $\{0\}$ тўпладан иборат.

$y = f(x)$ функция X тўпламда аниқланган бўлсин.

2- таъриф. Агар шундай ўзгармас M (ўзгармас m) сон топилсаки, $\forall x \in X$ учун

$$f(x) \leq M \text{ (} f(x) \geq m \text{)}$$

бўлса, $f(x)$ функция X тўпламда юқоридан (қуйидан) чегараланган деб аталади. Агар $f(x)$ функция ҳам юқоридан, ҳам қуйидан чегараланган бўлса, яъни шундай ўзгармас M ва m сонлар топилсаки, $\forall x \in X$ учун

$$m \leq f(x) \leq M$$

бўлса, $f(x)$ функция X тўпламда чегараланган деб аталади.

3- мисол. Ушбу

$$f(x) = 2^{\cos^2 x} + 3 \sin 2x$$

функциянинг чегараланганлигини кўрсатинг. Равшанки, бу функция $R = (-\infty, +\infty)$ да аниқланган;

$$|2^{\cos^2 x} + 3 \sin 2x| \leq |2^{\cos^2 x}| + 3 |\sin 2x| \leq 2 + 3 = 5.$$

Демак, функция R да чегараланган.

Функциянинг юқоридан (қуйидан) чегараланмаганлиги бундай таърифланади.

3- таъриф. Агар ихтиёрий M (ихтиёрий m) сон олинганда ҳам, шундай $x_0 \in X$ ($x'_0 \in X$) сон топилсаки,

$$f(x_0) > M \text{ (} f(x'_0) < m \text{)}$$

бўлса, $f(x)$ функция X тўпламда юқоридан (қуйидан) чегараланмаган дейилади.

4- мисол. Ушбу $f(x) = x^2$; $x \in (0, +\infty)$ функциянинг юқоридан чегараланмаганлигини кўрсатинг.

Бу функция юқоридан чегараланган бўлсин дейлик, яъни шундай M сони топилиб, барча $x \in (0, +\infty)$ лар учун $x^2 < M$ муносабат ўринли. Бу тенгсизликдан кўринадики, $M \geq 0$. Энди $x_0 = \sqrt{M+1}$ сонни қарайлик. Функциянинг бу нуқтадаги қиймати $f(x_0) = x_0^2 = (\sqrt{M+1})^2 = M + 2\sqrt{M+1}$ га тенг.

Паразимишга кўра $f(x) < M$, $f(x_0)$ эса $M + 2\sqrt{M+1}$ га тенг бўлиб, у ҳар доним M дан катта. Бу зиддият қаралаётган функциянинг юқоридан чегараланмаганлигини кўрсатади.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топинг:

$$1. f(x) = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}.$$

$$2. f(x) = \lg(1-x^2).$$

$$3. f(x) = 3 - 2\cos x.$$

$$4. f(x) = \sqrt{-\log_6(x-x^2)}.$$

$$5. f(x) = 5^x - 2^{x+1}.$$

$$6. f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{16-x^2}.$$

$$7. f(x) = \arcsin x + \sqrt{\frac{2}{nx-1}}.$$

$$8. f(x) = |x| - 2.$$

$$9. f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-2|x-1|}}.$$

$$10. f(x) = \log_{\cos x} \sin x.$$

$$11. f(x) = \sqrt{\cos x}.$$

$$12. f(x) = \ln \cos x.$$

$$13. f(x) = \arccos(3-x).$$

$$14. f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{1-|x|}}.$$

$$15. f(x) = \sqrt{x^2 - |x| - 2}.$$

$$16. f(x) = \log_{(x+1)}(x^2 - 3x + 2).$$

17. Аналитик усулда берилган, аниқланиш соҳаси фақат битта сондан иборат функцияга мисол келтиринг.

18. Аналитик усулда берилган, аниқланиш соҳаси $[1, 2]$ сегментнинг нуқталари бўлган функцияга мисол келтиринг.

Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳалари ва функция қийматлари тўпламларини топинг:

$$19. f(x) = \log_2(-x).$$

$$20. f(x) = \sqrt[3]{\lg \cos x} + 4.$$

$$21. f(x) = \frac{|x|}{x} e^{x^2}.$$

$$22. f(x) = 2^{\log_2 x}.$$

$$23. f(x) = ||x| - 1| - x.$$

$$24. f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

$$25. f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

$$26. f(x) = \cos \sqrt{x + 100}.$$

$$27. f(x) = \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{tg} x.$$

$$28. f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x.$$

29. Аналитик усулда берилган, қийматлар тўплами қуйидагича бўлган функцияларга мисоллар келтиринг:

а) фақат битта сондан иборат;

б) иккита сондан иборат;

в) натурал сонлардан иборат;

г) барча бутун сонлардан иборат;

д) $(0,1)$ интервал нуқталаридан иборат бўлсин.

Қуйидаги функцияларнинг чегараланганлигини кўрсатинг:

$$30. f(x) = \frac{1}{x - 10}, \quad x \in [0, 5].$$

$$31. f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$32. f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x^3 - 1|}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 1.$$

$$33. f(x) = \frac{2 \sin x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

$$34. f(x) = \frac{1}{x} \sin x.$$

35. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўпланда аниқланган бўлиб, чегараланган бўлса, у ҳолда

а) $f(x) + g(x)$;

б) $f(x) - g(x)$;

в) $f(x) \cdot g(x)$;

г) $|f(x)|$

функциялар ҳам X тўпلامда чегараланганлигини кўрсатинг;

д) қандай шарт бажарилса, $\frac{f(x)}{g(x)}$ функция ҳам X тўпلامда чегараланган бўлади?

36. $f(x)$ функция X тўпلامда аниқланган ва чегараланган бўлсин, у ҳолда ушбу функцияларнинг X да чегараланганлигини кўрсатинг:

а) $\sqrt[n]{f(x)}$;

д) $\arcsin f(x)$;

б) $a^{f(x)}$;

е) $\arccos f(x)$;

в) $\cos f(x)$;

ё) $\operatorname{arctg} f(x)$;

г) $\sin f(x)$;

ж) $\operatorname{arccotg} f(x)$.

Қуйидаги функцияларнинг ўз аниқланиш соҳаларида чегараланмаганлигини кўрсатинг:

37. $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

42. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot x$.

38. $f(x) = |x + 2|$.

43. $f(x) = x \sin x$.

39. $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$.

44. $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

40. $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

45. $f(x) = \frac{1}{\operatorname{ars} \operatorname{ctg} x}$.

41. $f(x) = |x| + |2x + 1|$.

46. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўпلامда аниқланган ва чегараланмаган бўлсин. $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг айирмаси X тўпلامда чегараланган бўлиши мумкинми? Мисоллар келтиринг.

47. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўпلامда аниқланган бўлиб, $f(x)$ функция X да чегараланган, $g(x)$ эса чегараланмаган бўлсин. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар орасида арифметик амаллар бажариш натижасида ҳосил бўлган функцияларнинг чегараланганлиги ҳақида нима дейиш мумкин? Мисоллар келтиринг.

48. Ихтиёрий функциянинг квадрати қуйидан чегараланганлигини исботланг.

4-таъриф. Агар $\forall x_1, x_2 \in X$ лар учун $x_1 < x_2$ бўлишидан $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$) бўлса, $f(x)$ функция X тўпلامда *ўсувчи* (*қатъий ўсувчи*) деб аталади.

Агар $\forall x_1, x_2 \in X$ лар учун $x_1 < x_2$ бўлишидан $f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) бўлса, $f(x)$ функция X тўпلامда *камаювчи* (*қатъий камаювчи*) деб аталади.

Ўсувчи ва камаювчи функция монотон функциялар деб аталади.

5-мисол. Ушбу

$$f(x) = x^3 \quad (x \in R)$$

функциянинг қатъий ўсувчи эканини исботланг.

$\forall x_1, x_2 \in R$ нуқталарни олиб, $x_1 < x_2$ бўлсин деб қарайлик. У ҳолда

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1 \cdot x_2 + x_1^2) = \\ &= (x_2 - x_1) \left[\left(x_2 + \frac{1}{2} x_1 \right)^2 + \frac{3}{4} x_1^2 \right] > 0 \end{aligned}$$

бўлади.

Демак, $\forall x_1, x_2 \in R, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
Бу эса $f(x) = x^3$ функциянинг R да қатъий ўсувчи эканини билдиради.

6-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

функциянинг $[0; +\infty) = X$ да камаювчи эканини кўрсатинг.

$\forall x_1, x_2 \in X$ нуқталарни олиб, $x_1 < x_2$ бўлсин деб қарайлик. У ҳолда $f_1(x) = x^2$ учун

$$f_1(x_2) - f_1(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0$$

бўлади. Демак,

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f_1(x_1) < f_1(x_2).$$

Бу эса $f_1(x) = x^2$ функциянинг, жумладан, $f_2(x) = x^2 + 1$ функциянинг қаралаётган ораликда ўсувчи эканини билдиради.

Энди $\forall x_1, x_2 \in X$ нуқталар учун $x_1 < x_2$ бўлган ҳолда $f(x_2) - f(x_1)$ айирмани қарайлик.

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{1+x_2^2} - \frac{1}{1+x_1^2} = \frac{1}{f_2(x_2)} - \frac{1}{f_2(x_1)}.$$

$f_2(x_2) > f_2(x_1)$ бўлганидан $\frac{1}{f_2(x_2)} - \frac{1}{f_2(x_1)} < 0$ эканини топамиз. Демак, $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$, яъни $f(x)$ функция X тўпламда камаювчи.

5-таъриф. Агар шундай ўзгармас T ($T \neq 0$) сони мавжуд бўлсаки, $\forall x \in x$ учун

$$\begin{aligned} x + T &\in X, \quad x - T \in X, \\ f(x + T) &= f(x) \end{aligned}$$

бўлса, $f(x)$ функция даврий функция дейилади ва бу шартларни қаноатлантирувчи мусбат T ларнинг энг кичиги (агар у мавжуд бўлса) функциянинг даври деб аталади.

7-мисол. Ушбу

$$f(x) = 3 \cos x + \cos 2x$$

функциянинг даврий функция эканини кўрсатинг.

Функциянинг аниқланиш соҳаси бутун сонлар ўқидан иборатдир. Фараз қилайлик, бирор $T > 0$ учун

$$3 \cos(x + T) + \cos(2(x + T)) = 3 \cos x + \cos 2x$$

муносабат ўринли бўлсин. $x = 0$ да

$$3 \cos T + \cos 2T = 4$$

тенгламага эга бўлиб,

$$\cos T \leq 1, \cos 2T \leq 1$$

тенгсизликларни эътиборга олсак,

$$3 \cos T + \cos 2T \leq 4$$

бўлади.

Демак, T қуйидаги тенгламалар системасини қаноатлантиради:

$$\begin{cases} \cos T = 1, \\ \cos 2T = 1. \end{cases}$$

Бу тенгламалар системасининг энг кичик мусбат ечими $T = 2\pi$ экани равшандир.

Энди $T = 2\pi$ сонни берилган функциянинг даври эканини текшириш қийин эмас: $\forall x \in \mathbb{R}$ учун

$$3 \cos(x + 2\pi) + \cos(2(x + 2\pi)) = 3 \cos x + \cos 2x$$

тенглик ўринлидир. Шундай қилиб, қаралаётган функция даврий бўлиб, унинг даври 2π га тенг экан.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг ўсувчи ёки камаювчи эканини аниқланг:

49. $f(x) = 2^{x^2+1}$.

50. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

51. $f(x) = \frac{1}{\cos x}$, $x \in [-\pi, \pi]$, $|x| \neq \frac{\pi}{2}$.

52. $f(x) = \sqrt{x} \sin x$.

$$53. f(x) = \arccos |x|.$$

$$54. f(x) = \sin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$55. f(x) = \arctg x - x.$$

$$56. f(x) = \frac{x-1}{|x|-1}.$$

$$57. f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

$$58. f(x) = \frac{2 - \sin x}{2 + \sin x}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

$$59. f(x) = 2 \cdot 3^{1-x} - 9^{-x}.$$

$$60. f(x) = x - e \sin x \quad (0 < e \leq 1).$$

61. Агар $f(x)$ функция X тўпламда аниқланган бўлиб, монотон бўлса, у ҳолда $y = -f(x)$ функциянинг ҳам монотонлигини исботланг.

62. Агар $f(x) > 0$ тенгсизлик барча $x \in X$ лар учун ўриqli ва $f(x)$ монотон бўлса, у ҳолда $y = \frac{1}{f(x)}$ функциянинг ҳам монотонлигини исботланг.

63. Монотон функциялардан тузилган мураккаб функциянинг монотонлигини исботланг.

Қуйидаги функцияларнинг даврий функция эканини кўрсатинг.

$$64. f(x) = \operatorname{tg}(\sin x).$$

$$65. f(x) = \sqrt{\sin 3x}.$$

$$66. f(x) = 2^{|\sin x - \cos x|}.$$

$$67. f(x) = \lg \sin x - \lg \cos x.$$

$$68. f(x) = \sin^2 x.$$

$$69. f(x) = |\cos x|.$$

$$70. f(x) = \{2x\}.$$

$$71. f(x) = \cos \sqrt{2} x.$$

72. $f(x) = [2x + 5] - 2x$, бу ерда $[a]$ —қаралаётган a соннинг бутун қисмини билдиради.

$$73. f(x) = \cos(\sin x).$$

$$74. f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x.$$

75. $f(x)$ функция $X = R$ тўпламда аниқланган бўлиб, унинг графиги $x = a$, $x = b$ ($a \neq b$) чизикларга нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда унинг даврийлигини исботланг.

76. $f(x)$ функция X тўпламда аниқланган бўлиб, шундай $T \neq 0$ сони топилсаки, ҳар қандай $x \in X$ лар учун $x + T \in X$, $x - T \in X$ бўлиб, қуйидаги шартлардан биттаси bajarилса, унинг даврийлигини исботланг:

$$1) f(x+T) = -f(x);$$

$$2) f(x+T) = \frac{1}{f(x)};$$

$$3) f(x+T) = \frac{f(x)+a}{bf(x)-1};$$

$$4) f(x+T) = \frac{1}{1-f(x)};$$

$$5) f(x+T) = f(x).$$

77. $f(x) = \cos x + \sin ax$ даврий функция бўлса, a ҳолда a рационал сон эканлигини исботланг.

78. Бутун сонлар ўқидан битта нуқта чиқариб ташланган тўпلامда аниқланган функциянинг даврий эмаслигини исботланг.

$y = f(x)$ функция $X(X \subset R)$ тўпلامда аниқланган бўлиб, $\forall x \in X$ учун $-x \in X$ бўлсин.

6-таъриф. Агар $\forall x \in X$ учун $f(-x) = f(x)$ бўлса, $f(x)$ жуфт функция, $f(-x) = -f(x)$ бўлса, $f(x)$ функция тоқ функция деб аталади.

8-мисол. Ушбу

$$f(x) = \log_2(x + \sqrt{1+x^2})$$

функциянинг жуфт ёки тоқ функция эканини аниқланг.

$\forall x \in R$ ларда $x + \sqrt{1+x^2} > 0$ бўлгани учун функциянинг аниқланиш соҳаси R дан иборат.

$\forall x \in R$ учун $f(-x) = \log_2(-x + \sqrt{1+x^2}) =$
 $= \log_2\left(\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot (-x + \sqrt{1+x^2})\right) = \log_2 \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} =$
 $= \log_2(x + \sqrt{1+x^2})^{-1} = -\log_2(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x)$
 бўлади. Бу эса қаралаётган функциянинг тоқ эканини билдиради.

$y = f(x)$ функция X тўпلامда аниқланган бўлиб, Y эса функция қийматларидан иборат тўпلام бўлсин: $Y = \{f(x) : x \in X\}$. Шу билан бирга Y тўпلامдан олинган ҳар бир y га X тўпلامдан фақат битта x мос келсин, яъни $x_1 \neq x_2$ бўлганда $f(x_1) \neq f(x_2)$ бўлсин. Бу ҳолда Y тўпلامдан олинган ҳар бир y га X тўпلامда битта x мос қўйилишини ифодалайдиган функцияга келамиз. Бу функция $y = f(x)$ га нисбатан **тескари функция** дейилади ва $y = x = f^{-1}(y)$ каби белгиланади.

9-мисол. Ушбу $y = f(x) = 2x + 1$, $x \in [0, 1]$ функцияга нисбатан тескари функцияни топинг.

Бу функциянинг қийматлари тўплами [1, 3] оралиқни ташкил этади. [1, 3] оралиқда аниқланган $x = f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$ функция берилган $y = 2x + 1$ функцияга нисбатан тескари функция бўлади.

$y = f(x)$ функция X тўпланда аниқланган бўлиб, $z = \varphi(y)$ функция ўз навбатида $Y = \{f(x) : x \in X\}$ $\{f : X \rightarrow Y\}$ тўпланда аниқланган бўлсин:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\varphi} Z.$$

Натижада X тўпландан олинган ҳар бир x га битта $z \in Z$ сон мос қўйилади. Бундай ҳолда f ва φ функцияларнинг мураккаб функцияси берилган дейилади ва $z = \varphi(f(x))$ каби белгиланади.

10-мисол. Ушбу

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 2^x$$

функциялар ёрдамида мураккаб функциялар топинг.

Бу мураккаб функциялар қуйидагича бўлади:

$$f(g(x)) = [g(x)]^2 = (2^x)^2 = 2^{2x};$$

$$g(f(x)) = 2^{f(x)} = 2^{x^2};$$

$$f(f(x)) = [f(x)]^2 = (x^2)^2 = x^4;$$

$$g(g(x)) = 2^{g(x)} = 2^{2^x}.$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг жуфт ёки тоқлигини аниқланг:

79. $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}.$

80. $f(x) = x + \frac{1}{x}.$

81. $f(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x}}}.$

82. $f(x) = \sqrt{x^4 - |x|} \cdot \log_2 x^2.$

83. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ — рационал сон бўлса,} \\ -1, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса.} \end{cases}$

84. $f(x) = \sin \sqrt{x}.$

85. $f(x) = \arccos |x|.$

86. $f(x) = \frac{1 + \sin x}{\sin x}.$

$$87. f(x) = \frac{|\sin x|}{1 - \cos x}.$$

$$88. f(x) = (x-1)^2 \sin^2 x.$$

$$89. f(x) = \arcsin(\arccos x).$$

$$90. f(x) = \left\lfloor \frac{10^x + 1}{10^x - 1} \right\rfloor.$$

91. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар жуфт функциялар бўлса, улардан тузилган мураккаб функцияларнинг ҳам жуфт функция бўлишини исботланг.

92. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар тоқ функциялар бўлса, улардан тузилган мураккаб функцияларнинг тоқ функция бўлишини исботланг.

93. О нуқтага нисбатан симметрик бўлган X тўпلامда аниқланган ҳар қандай $f(x)$ функция жуфт ва тоқ функциялар йиғиндиси кўринишида ифодаланишини исботланг.

94. $f(x) = 2^x$ функцияни жуфт ва тоқ функциялар йиғиндиси кўринишида ифодаланг:

95. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса,} \\ x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса} \end{cases}$ функцияни жуфт ва тоқ функциялар йиғиндиси кўринишида ифодаланг.

96. Жуфт ва тоқ функциялардан тузилган мураккаб функцияларнинг жуфт ёки тоқлиги ҳақида нима дейиш мумкин?

Қуйидаги функцияларга нисбатан тескари бўлган функцияларни топинг:

$$97. f(x) = (x+1)^2, \quad x \in [-1; +\infty).$$

$$98. f(x) = \sin x, \quad x \in \left[-10; -\frac{11}{4}\pi\right].$$

$$99. f(x) = \frac{2x+1}{x}.$$

$$100. f(x) = -e^{\frac{1-x^2}{2}}, \quad x \in [0; +\infty).$$

$$101. f(x) = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \quad x \in (0; +\infty).$$

$$102. f(x) = \pi - \arcsin x, \quad x \in [-1; 1].$$

$$103. f(x) = 2^{x^2-2x}, \quad x \in (-\infty; 1].$$

104. a ва b ларнинг қандай қийматларида $f(x) = ax+b$ тескари функцияга эга бўлиб, $y = f(x)$ билан бир хил бўлади?

105. $\alpha \in \mathbb{R}$ нинг қандай қийматида $f(x) = x^\alpha, x > 0$ тескари функцияга эга бўлиб, $y = f(x)$ билан бир хил бўлади?

Қуйидаги функциялар бўйича шу функцияларнинг мураккаб функцияларини топинг:

$$106. f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}.$$

$$107. f(x) = \sqrt{1-x^2}, g(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

$$108. f(x) = x^5, g(x) = x + 5.$$

$$109. f(x) = e^x, g(x) = \ln x.$$

$$110. f(x) = \operatorname{sgn} x, g(x) = 1 + x^2.$$

$$111. f(x) = \operatorname{sgn} x, g(x) = 1 + x - [x].$$

$$112. f(x) = \ln x^2, g(x) = \sin x.$$

$$113. f(x) = \begin{cases} x, & \text{агар } x \in [0; +\infty) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \in (-\infty; 0) \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \in [0; +\infty) \text{ бўлса,} \\ x^2, & \text{агар } x \in (-\infty; 0) \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$114. f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \text{ бўлса, } f(f(\dots f(x))) \dots (n \text{ мар-})$$

та) ни топинг.

Текисликда Декарт координаталар системасини оламин. Текисликнинг $(x, f(x))$ каби аниқланган нуқталаридан иборат ушбу

$$\{(x, f(x))\} = \{(x, f(x)) : x \in X, y = f(x) \in Y\}$$

тўпдам $y = f(x)$ функциянинг **графики** деб аталади.

Мураккаб функцияларнинг графиги уларнинг ординаталари устида аналитик (қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариш, илдиз чиқариш, логарифмлаш ва ҳ.к.) амаллар бажариш ёрдамида тақрибан чизилади. Функцияларни тўлиқ текшириш, уларнинг аниқ графикларини ифодалаш билан биз кейинроқ батафсил шуғулланамиз.

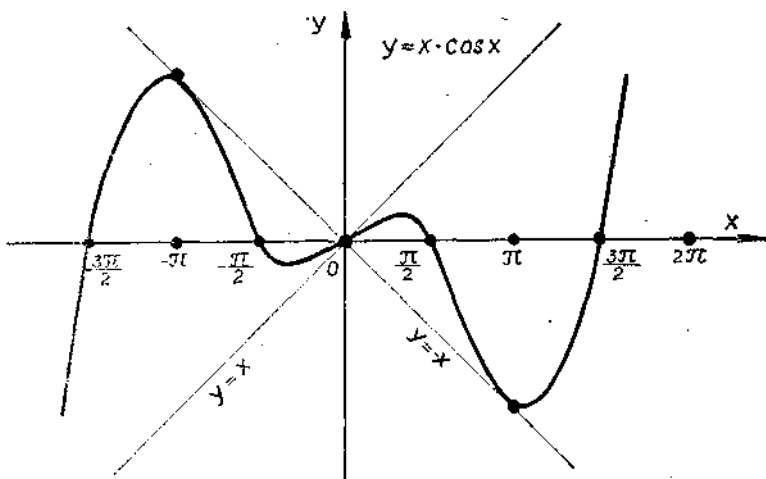
11-мисол. Ушбу

$$y = x \cos x, x \in R$$

функциянинг графигини чизинг.

Функция тоқ бўлгани учун, унинг графигини $[x \geq 0]$ лар учун яшаш етарли. Қаралаётган функциянинг ординаталари $y_1 = x$ ва $y_2 = \cos x$ функцияларнинг ординаталарини кўпайтириш натижасида ҳосил бўлади.

Функция графиги координаталар бошидан ўтиб, Ox ўқини $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in Z, \cos x = 0$) нуқталарда кесади. $-1 \leq \cos x \leq 1$ бўлгани учун, $x \geq 0$ ларда $-x \leq x \cos x \leq x$ бўлади. Демак, $y = x \cos x$ функциянинг графиги $y = x$ ва $y = -x$ чизиқлар орасида ётади. $x = 2k\pi$ нуқталарда $\cos x = 1$ бўлгани учун, функция графиги $y = x$ чизиқ билан $x = 2k\pi$ нуқталарда умумий қийматларга эга, $x = \pi + 2k\pi$ нуқталарда эса $y = -x$ чизиқ билан умумий нуқталарга эгадир ($\cos x = -1, x = \pi + 2k\pi, k \in Z$), $0 < x < \pi$ да $0 < x \cos x <$



1- чизма.

$< \cos x$, яъни $x \cos x < x$. Бу эса функция графиги $y = \cos x$ ва $y = x$ функцияларнинг графигидан пастда жойлашганлигини билдиради.

$x = 1$ да $y = x \cos x$ ва $y = \cos x$ функцияларнинг графиги кесишади. $y = \cos 1 \approx 0,54$. Агар $x > 1$ бўлса, $|x \cos x| > |\cos x|$. Шу маълумотларга асосланиб берилган функциянинг графигини чизамиз (1-чизма).

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг графикларини чизинг:

115. $f(x) = x \sin x$.

124. $f(x) = [x^2]$.

116. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

125. $f(x) = |x-1| + |x-2| - |x-3|$.

117. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

126. $f(x) = ||x||$.

118. $f(x) = \operatorname{sgn} \cos x$.

127. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$.

119. $f(x) = \ln \sin x$.

128. $f(x) = e^x \cos x$.

120. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

129. $f(x) = e^{-x} \cos x$.

121. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}$.

130. $f(x) = 2^{\lg x}$.

122. $f(x) = [x]$.

123. $f(x) = \left[\frac{1}{x} \right]$.

131. $f(x) = x + \sin x$.

2-§. ФУНКЦИЯНИНГ ЛИМИТИ

$X = \{x\}$ ҳақиқий сонлар тўплами берилган бўлиб, a нуқта унинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу тўпланда $y = f(x)$ функция аниқланган.

7-таъриф (Гейне таърифи). Агар X тўпламнинг нуқталаридан тузилган a га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ ($x_n \neq a$, $n = 1, 2, \dots$) кетма-кетлик олинганда ҳам мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт ягона b (чекли ёки чексиз) лимитга интилса, шу b га $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги (ёки $x \rightarrow a$ даги) лимити деб аталади ва уни $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ёки $x \rightarrow a$ да $f(x) \rightarrow b$ каби белгиланади.

12-мисол. Ушбу

$$f(x) = x^5$$

функциянинг $x \rightarrow 2$ даги лимити 32 га тенг эканини кўрсатинг.

2 га интилувчи ихтиёрий $\{x_n\}$ ($x_n \neq 2$, $n = 1, 2, \dots$) кетма-кетликни оламиз. Мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик қуйидаги $\{f(x_n)\} = \{x_n^5\}$ кўринишда бўлади. [Яқинлашувчи кетма-кетликлар устидаги арифметик амалларга биноан:

$$\lim_{x_n \rightarrow 2} f(x_n) = \lim_{x_n \rightarrow 2} x_n^5 = 2^5 = 32.$$

Демак, таърифга кўра

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 32.$$

13-мисол. Ушбу

$$f(x) = \cos \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

функциянинг $x \rightarrow 0$ да лимитга эга эмаслигини кўрсатинг.

Нолга интилувчи иккита турли

$$\{x'_n\} = \left\{ \frac{2}{(4n+1)\pi} \right\}, \quad \{x''_n\} = \left\{ \frac{1}{2n\pi} \right\}$$

кетма-кетликларни олайлик. У ҳолда

$$f(x'_n) = \cos \frac{(4n+1)\pi}{2} = 0,$$

$$f(x''_n) = \cos 2n\pi = 1$$

бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n) = 1$$

бўлади.

Бу эса $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ функциянинг $x = 0$ нуқтада limiti мавжуд эмаслигини кўрсатади.

8-таъриф (Коши таърифи). Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, аргумент x нинг $0 < |x-a| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, b сон $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги ($x \rightarrow a$ даги) limiti деб аталади.

14-мисол. Ушбу

$$f(x) = \sin x$$

функциянинг $x = \frac{\pi}{2}$ нуқтадаги limiti 1 га тенг экани кўрсатилсин.

$\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра δ ни $\delta = \varepsilon$ деб олсак, у ҳолда $|x - \frac{\pi}{2}| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x лар учун

$$\begin{aligned} |\sin x - 1| &= \left| \sin x - \sin \frac{\pi}{2} \right| = \\ &= \left| 2 \sin \frac{x - \frac{\pi}{2}}{2} \cdot \cos \frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} \right| \leq \\ &\leq \left| 2 \sin \frac{x - \frac{\pi}{2}}{2} \right| \leq \left| x - \frac{\pi}{2} \right| < \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

муносабат бажарилади. Бундан, таърифга кўра, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$

экани келиб чиқади.

$X = \{x\}$ ҳақиқий сонлар тўплами берилган бўлиб, a нуқта унинг ўнг (chap) limit нуқтаси бўлсин. Шу тўпланда $f(x)$ функция аниқланган.

9-таъриф (Гейне таърифи). Агар X тўпламнинг нуқталаридан тузилган ва ҳар бир ҳади a дан катта (кичик) бўлиб a га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт b га интилса, шу b ни $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги ўнг (chap) limiti деб аталади.

10-таъриф (Коши таърифи). Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta = \delta(\varepsilon)$ сон топилсаки, аргумент x нинг $a < x < a + \delta$ ($a - \delta < x < a$) тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча $x \in X$ қийматларида $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенг-

сизлик бажарилса, b сон $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги ўнг (чап) limiti деб аталади.

Функциянинг ўнг (чап) limitлари қуйидагича белгиланади:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b \text{ ёки } f(a+0) = b,$$

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b \text{ ёки } f(a-0) = b).$$

15-мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ \frac{\cos x}{2}, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

функциянинг $x=0$ нуқтадаги ўнг ва чап limitларини топинг.

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \sin x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Мисол ва масалалар

Функция limiti таърифларидан фойдаланиб қуйидаги муносабатларни исботланг:

$$132. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$$

$$133. \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0.$$

$$134. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} = 0.$$

$$135. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = 2.$$

$$136. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

$$137. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-3} = \infty.$$

$$138. \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0.$$

$$139. \lim_{x \rightarrow 3} x^4 = 81.$$

$$140. \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Қуйидаги функциялар a нуқтада лимитга эга эмаслигини исботланг:

$$141. f(x) = \frac{|x|}{x}, a = 0.$$

$$142. f(x) = \sin \frac{1}{x}, a = 0.$$

$$143. f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}, a = 0.$$

$$144. f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + x + 1, & \text{агар } x \geq 1 \text{ бўлса,} \\ 0 & \text{агар } x < 1 \text{ бўлса.} \end{cases} a = 1.$$

$$145. f(x) = x - [x], a = 2.$$

$$146. f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \\ b + x, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса,} \end{cases} a = 0, b \neq 1.$$

147. Дирихле функциясининг бирорта нуқтада ҳам лимити мавжуд эмаслигини исботланг.

148. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \end{cases}$
 функция қандай нуқталарда лимитга эга?

149. $f(x) = [x] \cdot \frac{1}{x}$ функциянинг $x \rightarrow 0$ даги лимити мавжудми?

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган нуқтадаги ўнг ва чап лимитларини топинг:

$$150. f(x) = \operatorname{th} \frac{1}{x}, a = 0.$$

$$151. f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ \cos x, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \end{cases} a = 0.$$

$$152. f(x) = \operatorname{sgn} x^2, a = 0.$$

$$153. f(x) = \operatorname{sgn} \cos x, a = \frac{\pi}{2}.$$

$$154. f(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{3 - x}}, a = 3.$$

$$155. f(x) = \frac{1}{x - [x]}, a = -1.$$

$$156. f(x) = x + [x^2], a = 10.$$

157. $f(x)$ функциянинг a нуқтада бир томонли лимитлар таърифлари инкорини Қоши ва Гейне бўйича келтиринг.

158. Функциянинг a нуқтада бир томонли лимитлари мавжуд бўлишидан унинг шу нуқтада лимитга эга бўлиши келиб чиқадими?

$X (X \subset R)$ тўплам берилган бўлиб, a унинг лимит нуқтаси бўлсин. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар a нуқтада чекли лимитга эга бўлиб,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$$

бўлсин. У ҳолда

$$1) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = b \pm c,$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = b \cdot c,$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}, \quad c \neq 0$$

бўлади.

16-мисол. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(10 \sin^2 x + 3 \cos^3 x + \frac{x-1}{x+2} \right)$$

ни топинг.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos^3 x = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x+2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x-1)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x+2)} = -\frac{1}{2}.$$

Демак,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(10 \sin^2 x + 3 \cos^3 x + \frac{x-1}{x+2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} 10 \sin^2 x + \\ &+ \lim_{x \rightarrow 0} 3 \cos^3 x + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x+2} = 0 + 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2 \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Функция лимитининг мавжудлиги ҳақида теоремалар

1°. Агар x нинг a нуқтанинг $U_\delta(a)$ атрофидан олинган қийматларида

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$$

бўлиб, $x \rightarrow a$ да $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар лимитга эга ҳамда

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция ҳам лимитга эга ва

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

бўлади.

2°. $X \subset R$ тўплам берилган бўлиб, a шу тўпламнинг лимит нуқтаси ва барча $x \in X$ лар учун $x \leq a$ бўлсин. Агар $f(x)$ функция X тўпламда ўсувчи (камаювчи) бўлиб, юқоридан (қуйидан) чегараланган бўлса, $f(x)$ функция a нуқтада чекли лимитга эга.

11-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta = \delta(\varepsilon)$ сон топилсаки, аргумент x нинг

$$0 < |x' - a| < \delta, \quad 0 < |x'' - a| < \delta$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий x' ва x'' ($x' \in X$, $x'' \in X$) қийматларида

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

бўлса, $f(x)$ функция учун a нуқтада Коши шарти бажарилади дейилади.

$f(x)$ функция a нуқтада чекли лимитга эга бўлиши учун унинг бу нуқтада Коши шартини қаноатлантириши зарур ва етарли (Коши критерийси).

17-ми сол. Ушбу

$$f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$$

функция учун $a = 0$ нуқтада Коши шартининг бажарилишини кўрсатинг.

Ҳақиқатан ҳам, $\forall \varepsilon > 0$ сон олиб, δ ни $\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ деб қаралса, x нинг

$$0 < |x' - a| = |x'| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}},$$

$$0 < |x'' - a| = |x''| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий x' , x'' қийматлари учун қуйидагига эга бўламиз:

$$|f(x'') - f(x')| = \left| x''^2 \cos \frac{1}{x''} - x'^2 \cos \frac{1}{x'} \right| \leq \left| x''^2 \cos \frac{1}{x''} \right| + \left| x'^2 \cos \frac{1}{x'} \right| \leq |x''^2| + |x'^2| < \varepsilon.$$

Бу эса қаралаётган функциянинг $x = 0$ нуқтада Коши шартининг бажарилишини кўрсатади.

Функцияларни таққослаш

$X \subset R$ тўламда $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар аниқланган бўлсин. Бирор a нуқтанинг $U_\delta(a)$ ($U_\delta(a) \subset X$) атрофида $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар қуйидагича таққосланади.

12-таъриф. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун шундай ўзгармас $\delta > 0$ ва $C > 0$ сонлар топилсаки, барча $x \in U_\delta(a)$ лар учун

$$|f(x)| \leq C |g(x)|$$

бўлса, у ҳолда $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция $g(x)$ функцияга нисбатан чегараланган дейилади ва $f(x) = O(g(x))$ каби белгиланади.

Агар $f(x) = O(g(x))$ ва $g(x) = O(f(x))$ бўлса, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $x \rightarrow a$ да бир хил тартибли функциялар дейилади.

Агар

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

бўлса, $x \rightarrow a$ да $g(x)$ ва $f(x)$ лар эквивалент функциялар деб аталади ва $f(x) \sim g(x)$ каби белгиланади.

18-мисол. Ушбу

$$f(x) = \sqrt[4]{|x| + \sqrt{|x|}} \text{ ва } g(x) = \sqrt[4]{|x|}$$

функцияларнинг $x \rightarrow 0$ да ўзаро эквивалентлигини кўрсатинг.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{|x| + \sqrt{|x|}}}{\sqrt[4]{|x|}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[4]{1 + \sqrt{|x|}} = 1.$$

Демак, қаралаётган функциялар ўзаро эквивалент.

13-таъриф. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун

$$f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$$

бўлиб, бунда $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ бўлса, у ҳолда $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция $g(x)$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик функция деб аталади ва $f(x) = o(g(x))$ каби белгиланади.

19-мисол. Ушбу $|x|^{5/2} = o(x^2)$ муносабат $x \rightarrow 0$ да ўринли эканини кўрсатинг. $|x|^{5/2} = \sqrt{|x|} \cdot x^2$ тенгликдан ва

$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ эканлигидан $|x|^{5/2} = o(x^2)$ эканлиги келиб чиқади.

Лимит ҳисоблашга онд бўлган мисолларда кўпинча қуйидаги ажойиб лимитлардан фойдаланилади:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0).$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

20-мисол. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \cdot \sin 2x)}{x^2}$$

лимитни ҳисобланг

Бу ифода $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликдир.

$x \rightarrow 0$ да $x \sin 2x \rightarrow 0$ эканини ҳисобга олиб топамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \sin 2x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x \sin 2x) \cdot \sin 2x}{x \cdot (\sin 2x) \cdot 2x} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \sin 2x)}{x \sin 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2. \end{aligned}$$

21-мисол. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x}$$

лимитни ҳисобланг.

$\frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x}$ ифоданинг кўринишини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\begin{aligned} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x} &= \frac{e^{x^2} - 1 + 1 - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{e^{x^2} - 1}{\sin^2 x} + 2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{e^{x^2} - 1}{\sin^2 x} + 2 \cdot \frac{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{e^{x^2} - 1}{\sin^2 x} + \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Бундан эса

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{x^2} - 1}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

22-мисол. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

лимитни ҳисобланг.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot 4}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.\end{aligned}$$

23-мисол. Агар $x \rightarrow 0$ да $f(x) \rightarrow 0$ бўлса, у ҳолда $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + f(x^2)] = 0$ эканини исботланг. Шартга кўра $x \rightarrow 0$ да $f(x) \rightarrow 0$. Бу эса Гейне таърифига кўра, ҳар қандай нолга интилувчи $\{x_n\}$ ($x_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$) кетма-кетликни [олганимизда] ҳам, мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳаммавақт ягона 0 лимитга интилишини англатади.

$y_n = x_n^2$ деб олсак, $n \rightarrow \infty$ да $y_n \rightarrow 0$ бўлиб, юқоридаги таърифга биноан $f(y_n) = f(x_n^2) \rightarrow 0$ муносабатга эга бўламиз. Демак, $f(x^2)$ функция ҳам $x \rightarrow 0$ да нолга интилар экан. Чекли лимитга эга бўлган функциялар устидаги арифметик амалларга кўра $f(x) + f(x^2)$ функциянинг $x \rightarrow 0$ да 0 га интилишини топамиз.

Энди $x \rightarrow 0$ да $f(x) + f(x^2) \rightarrow 0$ бўлсин. $x \rightarrow 0$ да $f(x)$ нинг нолга интилиши ҳақида нима дейиш мумкин?

Мисол сифатида ушбу

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^n, & \text{агар } x = \frac{1}{2^{2n}} \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \neq \frac{1}{2^{2n}} \text{ бўлса,} \end{cases}$$

функцияни қарайлик. У ҳолда

$$f(x^2) = \begin{cases} (-1)^{n+1}, & \text{агар } x = \frac{1}{2^{2^n}} \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \neq \frac{1}{2^{2^n}} \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлиб, $x \rightarrow 0$ да $f(x) + f(x^2) \rightarrow 0$ бўлади. Лекин $x \rightarrow 0$ да $f(x)$ функциянинг лимити мавжуд эмас. Шундай қилиб, исбот қилинган муносабатнинг тескарисини ҳар доим ўрнғили бўлиши шарт эмас экан.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги лимитларни топинг:

$$159. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} \quad (a > 0).$$

$$160. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^3-8}.$$

$$161. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x^3}-8}{\sqrt{x}-4}.$$

$$162. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n-1}{x^m-1} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

$$163. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

$$164. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{n}{1-x^n} - \frac{m}{1-x^m} \right) \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

$$165. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}.$$

$$166. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{4}{x}} - \sqrt[4]{1+\frac{3}{x}}}{1 - \sqrt[5]{1-\frac{5}{x}}}.$$

$$167. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[n]{1+ax} \cdot \sqrt[m]{1+bx}-1} \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

$$168. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n - (\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$169. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}.$$

$$170. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Қуйидаги лимитларни топинг:

$$171. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx^2}{nx^2}.$$

$$172. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}.$$

$$173. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 6x - \sin 7x}.$$

$$174. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x^3 - 1}{\sin^6 2x}.$$

$$175. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}.$$

$$176. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin 2x \cdot \sin x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right).$$

$$177. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi^2 - x^2}.$$

$$178. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos x}}{\operatorname{tg} x^2}.$$

$$179. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x}.$$

$$180. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}.$$

$$181. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\cos \frac{1}{x} - \cos \frac{3}{x} \right).$$

$$182. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \pi \sqrt{n^2 + 2n}.$$

$$183. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos^2 2x \cdot \cos^3 3x}{x^3}.$$

$$184. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{2}{n^2} + \dots + \sin \frac{n}{n^2} \right).$$

$$185. \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x^2 - a^2}}.$$

$$186. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{e^{2x}}.$$

$$187. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x}.$$

$$188. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{2x}}.$$

$$189. \lim_{x \rightarrow \infty} x (3^{\frac{1}{x}} - 1).$$

$$190. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{2x}}{\lg x}.$$

$$191. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$192. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$193. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin 4x - \cos 4x} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$194. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}.$$

195. $f(x) = \sin x$ функция $x \rightarrow +\infty$ да лимитга эга эмаслигини кўрсатинг.

196. $f(x) = \operatorname{sgn} \sin \frac{1}{x}$ функция $x \rightarrow 0$ да лимитга эга эмаслигини кўрсатинг.

197. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар a нуқтада лимитга эга бўлмаса, $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ функцияларнинг бу нуқтада лимити ҳақида нима дейиш мумкин? Мисоллар келтиринг.

$$198. \lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) + \frac{1}{|f(x)|} \right) = 0 \text{ бўлса, } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ ни топинг.}$$

199. Агар $f(x) > 0$ бўлиб, $\lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) = 2$ бўлса, у ҳолда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ эканини исботланг.

200. Агар $f(x)$ функция даврий бўлиб, $x \rightarrow \infty$ да $f(x) \rightarrow c$ бўлса, у ҳолда $f(x) = c$ эканлигини кўрсатинг.

201. Даврий функция $x \rightarrow -\infty$ да чексиз катта бўлиши мумкинми?

202. Даврий функция чегараланмаган бўлиши мумкинми?

203. $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2^3} \dots \cos \frac{x}{2^n}$ ни топинг.

204. $[0, +\infty)$ оралиқда аниқланган, қийматлар тўплами $[0, +\infty)$ оралиқдан иборат $f(x)$ функция $x=0$ нуқта атрофида чегараланган бўлиб, бу функция учун ихтиёрий $x \geq 0$, $y \geq 0$ ларда $f(x+y) = f(x) + f(y)$ муносабат ўринли бўлса, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ лимит мавжудлигини исботланг.

α ва β ларнинг қандай қийматларида $f(x)$ функция чексиз кичик бўлади?

$$205. f(x) = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2} - \alpha x - \beta, x \rightarrow \infty.$$

$$206. f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3} - \alpha x - \beta, x \rightarrow +\infty.$$

$$207. f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1} - \alpha x - \beta, x \rightarrow +\infty.$$

$$208. f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta}, x \rightarrow +0.$$

$$209. f(x) = (1 - x^\alpha)^{\beta}, x \rightarrow +0.$$

$$210. f(x) = \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}, x \rightarrow +0.$$

Қуйидаги муносабатларни исботланг:

$$211. o(o(f)) = o(f).$$

$$212. O(o(f)) = o(f).$$

$$213. O(O(f)) = O(f).$$

$$214. o(f) + O(f) = O(f).$$

$$215. o(f) \cdot O(f) = o(f).$$

IV боб

ФУНКЦИЯНИНГ УЗЛУКСИЗЛИГИ ВА ТЕКИС УЗЛУКСИЗЛИГИ

1-§. ФУНКЦИЯНИНГ УЗЛУКСИЗЛИГИ

$X \subset R$ тўпلامда $f(x)$ функция аниқланган бўлиб, $x_0 (x_0 \in X)$ тўпلامнинг лимит нуқтаси бўлсин.

1-таъриф (Коши таърифи). $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сон топилсаки, функция аргументи

$x \in X$ нинг $|x - x_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз дейилади.

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = \sqrt{x+11}$$

функциянинг $x_0 = 5$ нуқтада узлуксиз эканини кўрсатинг.

$\forall \varepsilon > 0$ сон олиб, бу ε сонга кўра $\delta > 0$ сонни $\delta = 4\varepsilon$ бўлсин деб қаралса, у ҳолда $|x - 5| < \delta$ бўлганда

$$\begin{aligned} |f(x) - f(5)| &= |\sqrt{x+11} - 4| = \\ &= \frac{|x-5|}{\sqrt{x+11} + 4} < \frac{|x-5|}{4} < \frac{\delta}{4} = \varepsilon \end{aligned}$$

бўлади.

Бу эса қаралаётган функциянинг $x_0 = 5$ нуқтада узлуксиз эканини билдиради.

2-таъриф (Гейне таърифи). Агар X тўпламининг элементларидан тузилган ва x_0 га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам функция қийматларидан тузилган мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт ягона $f(x_0)$ га интилса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз деб аталади.

2-мисол. Ушбу

$$f(x) = x \cdot D(x)$$

функциянинг $x_0 = 0$ нуқтадаги узлуксиз эканини кўрсатинг. Бу ерда $D(x)$ — Дирихле функцияси.

Ихтиёрий нолга интилувчи $\{x_n\}$ кетма-кетлик оламиз. У ҳолда мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик

$$f(x_n) = x_n \cdot D(x_n)$$

кўринишга эга бўлади.

Маълумки, Дирихле функцияси чегараланган. $\{x_n\}$ кетма-кетлик чексиз кичик бўлгани учун $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳам чексиз кичик бўлади. Демак, $n \rightarrow \infty$ да $f(x_n) \rightarrow 0$ бўлади. Бу эса қаралаётган функциянинг $x_0 = 0$ нуқтада узлуксиз эканини билдиради.

Агар $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

муносабат ўринли бўлса, ушбу

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

муносабат ҳам ўринли бўлади. Одатда $x - x_0$ айирма **аргумент орттирмаси**, $f(x) - f(x_0)$ эса **функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси** дейилади.

Улар мос равишда Δx ва Δy ($\Delta f(x_0)$) каби белгиланади:

$$\Delta x = x - x_0, \Delta y = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0).$$

Демак, $x = x_0 + \Delta x$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
Натижада, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ муносабат

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0$$

кўринишга эга бўлади.

Шундай қилиб, $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксизлиги, бу нуқтада аргументнинг чексиз кичик орттирмасига функциянинг ҳам чексиз кичик орттирмаси мос келиши сифатида ҳам таърифланиши мумкин.

3-мисол. Ушбу

$$f(x) = \cos x$$

функциянинг $\forall x_0 \in R$ нуқтада узлуксиз бўлишини кўрсатинг.

$\forall x_0 \in R$ нуқтани олиб, унга Δx орттирма берайлик. Натижада $f(x) = \cos x$ функция ҳам ушбу

$$\Delta y = \cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0$$

орттирмага эга бўлиб, $-\pi < \Delta x < \pi$ бўлганда

$$\begin{aligned} |\Delta y| &= |\cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0| = \\ &= \left| 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| \leq 2 \cdot \frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x| \end{aligned}$$

муносабатга эга бўламиз. Бундан эса $\Delta x \rightarrow 0$ да $\Delta y \rightarrow 0$ бўлиши келиб чиқади.

Демак, $f(x) = \cos x$ функция $x_0 \in R$ нуқтада узлуксиз.

3-таъриф. Агар $f(x)$ функция X тўпламининг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, функция X тўпланда узлуксиз деб аталади.

4-мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

функцияни $x_0 = 0$ нуқтада узлуксизликка текширинг.

Маълумки,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Лекин бу лимит қиймат функциянинг O нуқтадаги қиймати билан устма-уст тушмайди. Демак, бу функция $x_0 = 0$ нуқтада узлуксиз эмас.

1. $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда аниқланган бўлиб, $x_0 (x_0 \in X)$ тўпламнинг (ўнг ва чап) лимит нуқтаси бўлсин.

$x \rightarrow x_0$ да $f(x)$ функция учун қуйидаги 3 ҳолдан биттасигина бажарилади:

1°. Чекли $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ чап ва ўнг лимитлар мавжуд ва

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0) \quad (1)$$

тенгликлар ўринли.

Бу ҳолда $f(x)$ функция $x = x_0$ да узлуксиз бўлади.

2°. $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ лар мавжуд, лекин (1) тенгликлар бажарилмайди. У ҳолда $f(x)$ $x = x_0$ нуқтада 1-тур узилишга эга дейилади.

3°. $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ ларнинг бирортаси чексиз ёки мавжуд эмас. Бу ҳолда функция x_0 нуқтада 2-тур узилишга эга дейилади.*

4°. $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$ бўлса, бундай узилиш, бартараф қилиш мумкин бўлган узилиш дейилади.

5-мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция учун $x_0 = 0$ бартараф қилиш мумкин бўлган узилиш нуқтаси эканини кўрсатайлик.

Маълумки,

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \text{ бўлиб, } x \rightarrow 0 \text{ да}$$

$x \sin \frac{1}{x}$ функция 0 га интилади.

Демак, $x \rightarrow 0$ да $f(x)$ функция чекли лимитга эга, лекин бу лимит $f(0) = 1$ билан тенг эмас, яъни $x_0 = 0$ қаралаётган функция учун бартараф қилиш мумкин бўлган узилиш нуқтасидир. Бунда $f(0) = 0$ деб олиш билан, функция узилишидан қутулинади.

* Баъзан $f(x)$ функция x_0 нуқтада аниқланмаган ($x_0 \in X$) бўлиб, $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ ларнинг мавжуд ёки мавжудмаслигига қараб $f(x)x_0$ да биринчи ёки иккинчи тур узилишга эга, деган фикр ҳам ишлатилади.

6-мисол. Ушбу

$$f(x) = [x]$$

функциянинг $x_0 = 2$ нуқтада биринчи тур узилишга эга эканини кўрсатинг.

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} [x] = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} [x] = 2.$$

Демак, функция $x_0 = 2$ нуқтада биринчи тур узилишга эга.

Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ — рационал бўлса,} \\ -1, & \text{агар } x \text{ — иррационал бўлса.} \end{cases}$$

функциянинг $\forall x_0 \in R$ нуқтадаги лимити мавжуд эмас, демак, бу функция x_0 нуқтада иккинчи тур узилишга эга.

$f(x) = \operatorname{ctg} x$ функциянинг $x_0 = \pi$ нуқтадаги ўнг ва чап лимитлари

$$\lim_{x \rightarrow \pi+0} \operatorname{ctg} x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi-} \operatorname{ctg} x = +\infty$$

бўлади.

Демак, $f(x) = \operatorname{ctg} x$ функция $x_0 = \pi$ нуқтада иккинчи тур узилишга эга.

2. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўламда аниқланган бўлиб, $x_0 \in X$ нуқта X тўламининг лимит нуқтаси бўлсин.

Агар $f(x)$ ва $g(x)$ x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\begin{aligned} f_1(x) \pm g(x), \quad f_1(x) \cdot g(x), \\ \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0, \quad \forall x \in X) \end{aligned}$$

функциялар ҳам x_0 нуқтада узлуксиз бўлади.

7-мисол. Ушбу

$$f(x) = 3x^3 + \sin^2 x$$

функциянинг $X = R$ да узлуксизлигини кўрсатинг.

$\varphi(x) = x$, $g(x) = \sin x$ функциялар R да узлуксиз. $f(x)$ функцияни

$$f_1(x) = 3 \cdot x \cdot x \cdot x + \sin x \cdot \sin x$$

кўринишда ёзамиз. У ҳолда узлуксиз функциялар устидаги арифметик амалларга кўра $f(x)$ функциянинг R да узлуксизлиги келиб чиқади.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг узлуксизлигини кўрсатинг:

1. $f(x) = \sin x$.

2. $f(x) = x^4$.

3. $f(x) = \sqrt{x}$.

4. $f(x) = |x|$.

5. $f(x) = \operatorname{sh} x$.

6. $f(x) = xe^{\frac{\sin x}{x}}$.

7. $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада бир томондан (ўнгдан ва чапдан) узлуксиз бўлиши таърифларини келтиринг.

8. $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксиз бўлиши зарурий ва етарли шартларини ифодаланг.

9. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $|f(x)|$ функциянинг ҳам шу нуқтада узлуксиз бўлишини исботланг.

10. $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксизлигининг геометрик талқинини ифодаланг.

11. Агар $f(x)$ функция a нуқтада узлуксиз бўлса, $\varphi(x) = f(bx + c)$ ($b \neq 0$) функция $\frac{a-c}{b}$ нуқтада узлуксиз бўлишини исботланг.

Қуйидаги функцияларнинг узилиш нуқталарини аниқланг ва графикларини чизинг:

12. $f(x) = \frac{|x+2|}{x+2}$.

17. $f(x) = \frac{|x-1|}{x^2-x^3}$.

13. $f(x) = \operatorname{sgn}(e^x - 1)$.

18. $f(x) = \operatorname{sgn} \sin x$.

14. $f(x) = x - [x]$.

19. $f(x) = \frac{x}{\sin x}$.

15. $f(x) = \frac{1}{x - [x]}$.

20. $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

16. $f(x) = \left[\frac{1}{x} \right]$.

21. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.

22. $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ x^2, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$

23. Ҳеч бир нуқтада узлуксиз бўлмаган функцияга мисол келтиринг.

24. Фақат биргина $x_0 \in R$ нуқтада узлуксиз, бошқа нуқталарда узлуксиз бўлмаган функцияларга мисол келтиринг.

25. $f(x) + g(x)$ функция биринчи тур узилишга эга бўл-

са, у ҳолда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг камида биттаси биринчи тур узилишга эга бўлиши шартми?

26. $f(x) \cdot g(x)$ функция иккинчи тур узилишга эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг жуда бўлмаганда биттаси иккинчи тур узилишга эга бўлиши шартми?

3. $f(x)$ функция X тўпламда аниқланган бўлиб, $x_0 \in X$ нуқтада узлуксиз бўлсин. У ҳолда

1) x_0 нуқтанинг етарли кичик атрофида функция чегараланган бўлади.

2) Агар $f(x_0) \neq 0$ бўлса, x_0 нуқтанинг етарли кичик атрофида $f(x)$ ўз ишорасини сақлайди.

(Булар узлуксиз функцияларнинг локал хоссалари.)

$y = f(x)$ функция X тўпламда $z = \varphi(y)$ функция Y тўпламда аниқланган бўлиб, улар ёрдамида $z = \varphi(f(x))$ мураккаб функция тузилган бўлсин.

Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада, $z = \varphi(y)$ функция x_0 га мос келган $f(x_0)$ нуқтада узлуксиз бўлса, $z = \varphi(f(x))$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлади. (Мураккаб функция узлуксизлиги ҳақидаги теорема).

1-теорема (Больцано—Кошининг биринчи теоремаси). Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган узлуксиз бўлиб, сегментнинг четки нуқталарида ҳар хил ишорали қийматларга эга бўлса, у ҳолда шундай c ($a < c < b$) нуқта топиладики, у нуқтада функция нолга айланади: $f(c) = 0$.

2-теорема (Больцано—Кошининг иккинчи теоремаси). Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, унинг четки нуқталарида $f(a) = A$, $f(b) = B$ қийматларга эга ва $A \neq B$ бўлса, A ва B орасида ҳар қандай C сон олинганда ҳам a билан b орасида шундай c нуқта топиладики,

$$f(c) = C$$

бўлади.

3-теорема (Вейерштрасснинг биринчи теоремаси). Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса, у шу сегментда чегараланган бўлади.

4-теорема (Вейерштрасснинг иккинчи теоремаси). Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса, функция шу сегментда ўзининг аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи чегараларига эришади.

(Юқорида келтирилган Больцано—Кошининг ва Вейерштрасс теоремалари узлуксиз функцияларнинг глобал хоссаларидир).

8-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{|x| - x}{x^2}$$

функцияни узлуксизликка текширинг.

Маълумки,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса,} \\ -x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Бундан фойдаланиб, топамиз:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ -\frac{2}{x}, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$x = 0$ нуқтада функция аниқланмаган бўлиб,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = +\infty$$

муносабатлар ўринлидир.

Бу эса таърифга кўра $x = 0$ нуқта $f(x)$ функция учун иккинчи тур узилиш нуқтаси эканини билдиради.

9-мисол. Бутун сонлар ўқида аниқланган, $x = 1$, $x = -1$ нуқталарда узлуксиз, қолган барча нуқталарда узилишга эга бўлган функцияни тузинг.

Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{агар } x \text{ — рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик.

Бу функцияни

$$f(x) = (x^2 - 1)D(x)$$

Дирихле функцияси ёрдамида ҳам ёзиш мумкин.

Маълумки, Дирихле функцияси сонлар ўқининг ҳамма нуқталарида узилишга эга. 1 га интилувчи ихтиёрий $\{x_n\}$ кетма-кетлик олайлик, у ҳолда мос функция қийматларидан иборат бўлган $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик $n \rightarrow \infty$ да нолга интилади. Бу эса функциянинг $x = 1$ нуқтада узлуксиз эканини англатади.

Функциянинг $x = -1$ нуқтада узлуксизлиги худди шунга ўхшаш кўрсатилади.

Энди ихтиёрий $a \in R$, $a \neq \pm 1$ га интилувчи рационал сонлар ва иррационал сонлар кетма-кетлигини қарасак, мос функция қийматларидан иборат кетма-кетликлар $a^2 - 1$ га ва 0 га интилади. $a \neq \pm 1$ бўлгани учун $a^2 - 1 \neq 0$. Де-

мак, қаралаётган функция $x = 1$, $x = -1$ нуқталардан бошқа барча нуқталарда узилишга эга.

10-мисол. Ушбу

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$$

функцияни узлуксизликка текширинг ва унинг графигини чизинг.

$f(x)$ функциянинг $x = 0$, $x > 0$, $x < 0$ нуқталардаги қийматларини қарайлик:

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^0 - n^0}{n^0 + n^0} = 0.$$

$x > 0$ лар учун

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^{-2x}}{1 + n^{-2x}} = 1.$$

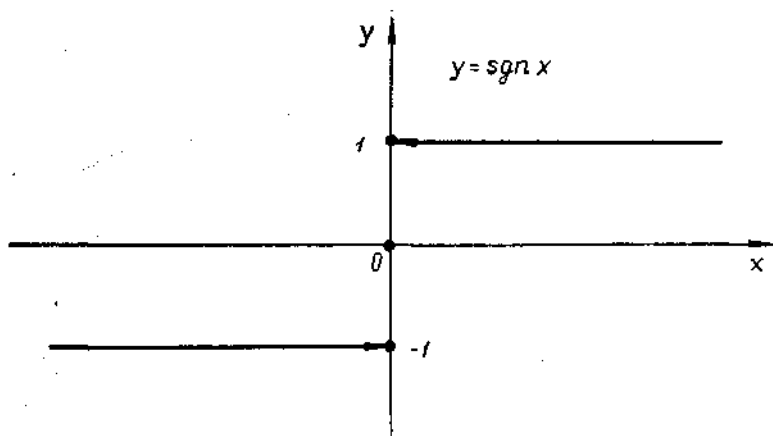
$x < 0$ лар учун эса

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^{-2x}}{1 + n^{-2x}} = -1$$

бўлади. Демак,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ -1, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Бу функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ бўлиб, маълумки у $x = 0$ нуқтада биринчи тур узилишга эга (2-чизма).



2- чизма.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларни узлуксизликка текширинг ва улар графикларини чизинг:

$$27. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n} \quad (x \geq 0). \quad 35. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + e^{nx}}{1 + xe^{nx}}.$$

$$28. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \quad (x \geq 0).$$

$$29. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}. \quad 36. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + (2 \sin x)^{2n}}.$$

$$30. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{1 + x^{2n}}. \quad 37. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^x x^{2x} + x^2 + 1}{x^{2n} + 1}.$$

$$31. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + e^{n(x+1)}}. \quad 38. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x \operatorname{arctg}(n \cdot \operatorname{ctg} x)).$$

$$32. f(x) = x^2 - [x^2]. \quad 39. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2n} x.$$

$$33. f(x) = \frac{1}{\sin x^2}. \quad 40. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}.$$

$$34. f(x) = \operatorname{sgn}\left(\cos \frac{1}{x}\right). \quad 41. f(x) = [x] \sin \pi x.$$

Қуйидаги функцияларни a нинг қандай қийматларида узлуксиз бўлишини аниқланг:

$$42. f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^n - 1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ a, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$43. f(x) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{ctg} x, & \text{агар } x \neq 0, |x| < \frac{\pi}{2} \text{ бўлса,} \\ a, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$44. f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ a, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases} \quad (c > 0)$$

$$45. f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} x}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ a, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$46. f(x) = \begin{cases} (1+x)^x, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ a, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$47. f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ a, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$48. f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \\ a+x, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

49. Монотон функциянинг узлуксизлиги ва узилиши ҳақидаги теоремаларни келтиринг.

50. Қуйидаги функциялардан тузилган мураккаб функцияларни узлуксизликка текширинг:

$$a) f(x) = \operatorname{sgn} x, \quad g(x) = 1 + x^2;$$

$$б) f(x) = \operatorname{sgn} x, \quad g(x) = -1 + x^2;$$

$$в) f(x) = \operatorname{sgn} x, \quad g(x) = 1 + x - [x].$$

51. $f(g(x))$ мураккаб функция x_0 нуқтада биринчи тур (иккинчи тур) узилишга эга бўлса, $g(x)$ нинг x_0 нуқтада албатта биринчи тур (иккинчи тур) узилишга эга бўлиши шартми?

52. Монотон, лекин узлуксиз бўлмаган функцияларга мисол келтиринг.

53. Вейерштрасс теоремаларида $[a, b]$ сегмент ўринга $[a, b]$ ёки $[a, b] \cup [c, d]$ қаралса, тасдиқ ўринли бўладими?

54. $[a, b]$ сегментда чегараланган ихтиёрий $f(x)$ функция узлуксиз бўладими?

55. Узлуксиз бўлмаган функциялар учун Вейерштрасс теоремалари ўринлими?

56. $xe^x = 1$ тенглама $(0, 1)$ оралиқда ҳеч бўлмаганда битта илдизга эга эканини кўрсатинг.

57. Агар $f(x)$ функция $\{x_1\}$ ва $\{x_2\}$ тўпламларда узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг $\{x_1\} \cup \{x_2\}$ тўпلامда узлуксизлиги ҳақида нима дейиш мумкин?

58. $f(x)$ функция узлуксиз бўлиб,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{2k+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^{2k+1}} = 1 \quad (k \in \mathbb{N})$$

муносабат бажарилса, у ҳолда шундай a нуқта топилиб, $f(a) = 0$ бўлишини кўрсатинг.

59. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$p(x) = \max_{\forall x \in [a, b]} \{f(x), g(x)\}, \quad q(x) = \min_{\forall x \in [a, b]} \{f(x), g(x)\}$$

функциялар ҳам $[a, b]$ да узлуксизлигини кўрсатинг.

60. $f(x)$ функция $[a, c]$ ва $[c, b]$ сегментларда узлуксиз бўлсин. $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлиши учун етарли шартни келтиринг ва исботланг.

61. Агар $f(x)$ функция $\forall [a, b] \subset X$ сегментда узлуксиз бўлса, у ҳолда у X тўпламда узлуксиз бўлишини исботланг ($a < b$).

62. Тескари функция мавжудлиги ва узлуксизлиги ҳақидаги теоремани келтиринг.

63. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган бўлиб, қатъий монотон бўлса, у ҳолда унга тескари функциянинг узлуксизлигини исботланг.

64. $f(x)$ функция $[0, 1]$ оралиқда аниқланган, монотон бўлиб, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ бўлсин. Агар $\forall x \in [0, 1]$ учун шундай $n \in \mathbb{N}$ топилсаки,

$$\underbrace{f(f(\dots f(f(x)) \dots))}_{n \text{ та}}} = x$$

муносабат бажарилса, $[0, 1]$ оралиқда $f(x) = x$ эканлини исботланг.

65. $f(x)$ функция R да узлуксиз бўлиб, $\forall x \in R$ учун $f(f(x)) = x$ муносабат бажарилса, у ҳолда шундай c нуқта топилиб, $f(c) = 0$ бўлишини исботланг.

66. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар узлуксиз ва бир хил даврли бўлсин. Агар

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 0$$

бўлса,

$$f(x) = g(x)$$

эканлигини исботланг.

2-§. ФУНКЦИЯНИНГ ТЕКИС УЗЛУКСИЗЛИГИ

Бирор $y = f(x)$ функция X тўпламда берилган бўлсин.

4-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta(\varepsilon) > 0$ сон топилсаки, X тўпламнинг $|x' - x''| < \delta$ тенгсизликлари қаноатлантирувчи ихтиёрий x' ва x'' ($x', x'' \in X$) нуқталарида

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция X тўпламда текис узлуксиз деб аталади.

Бу таърифни қисқача

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x', x'' \in X: |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

кўринишда ифодалаш мумкин.

11-мисол. Ушбу

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

функциянинг $X = [1, 2]$ тўпلامда текис узлуксизлигини кўрсатинг.

$\forall \varepsilon > 0$ сон учун $\delta(\varepsilon) > 0$ сонни $\delta = 3\varepsilon$ деб олсак, унда $|x' - x''| < \delta = 3\varepsilon$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall x', x'' \in [1, 2]$ ларда

$$\begin{aligned} \left| \sqrt[3]{x'} - \sqrt[3]{x''} \right| &= \frac{|x' - x''|}{\sqrt[3]{x'^2} + \sqrt[3]{x'x''} + \sqrt[3]{x''^2}} \leq \\ &\leq \frac{|x' - x''|}{3} < \frac{\delta}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

бўлишини топамиз. Бу эса, таърифга кўра, берилган $f(x) = \sqrt[3]{x}$ функциянинг $X = [1, 2]$ да текис узлуксиз эканини билдиради.

$f(x)$ функция X да текис узлуксиз эмаслигини тубандагича таърифлаш мумкин.

5-таъриф Шундай мусбат ε сони мавжуд бўлиб, $\forall \delta > 0$ сон олинганда ҳам $|x' - x''| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи шундай $x', x'' \in X$ нуқталар топилсаки

$$|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция X тўпلامда текис узлуксиз эмас дейилади.

Бу таърифни қисқача

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x' \in X, \exists x'' \in X: |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$$

кўринишда ифодалаш мумкин.

12-мисол. Ушбу

$$f(x) = x^2$$

функция $X = (0, +\infty)$ тўпلامда текис узлуксиз эмаслигини кўрсатинг. Ихтиёрий мусбат δ сонни олайлик. Агар $\varepsilon = 1$ ва $x' = \frac{1}{\delta}$, $x'' = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ деб олинса, унда

$$|x' - x''| = \left| \frac{1}{\delta} - \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right) \right| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

бўлиб,

$$|f(x') - f(x'')| = |x'^2 - x''^2| = \left| \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{\delta} \right)^2 \right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon.$$

Бу эса $f(x) = x^2$ функциянинг $X = (0, +\infty)$ тўпلامда текис узлуксиз эмаслигини билдиради.

5-теорема (Кантор теоремаси). Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса, у шу сегментда текис узлуксиз бўлади.

Масалан, ушбу

$$f(x) = \sqrt{x}$$

функция, $[0, 1]$ сегментда текис узлуксиз бўлади, чунки бу функция шу сегментда узлуксиздир.

13-мисол. Ушбу

$$f(x) = \ln x$$

функция $X = (0, 1)$ тўпلامда текис узлуксиз эмаслигини кўрсатинг.

Ихтиёрий мусбат δ сонни олиб, $\varepsilon = \frac{1}{2} \ln 2$ ва $x' = \frac{1}{n}$, $x'' = \frac{1}{2n}$ дейлик. n ни етарлича катта қилиб олиш ҳисобига

$$|x' - x''| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{2n} < \delta$$

тенгсизликка эришиш мумкин. Унда

$$|f(x') - f(x'')| = \left| \ln \frac{1}{n} - \ln \frac{1}{2n} \right| = \ln 2 > \frac{1}{2} \ln 2 = \varepsilon$$

бўлади. Бу эса $f(x) = \ln x$ функциянинг $(0, 1)$ да текис узлуксиз эмаслигини билдиради.

$f(x)$ функция X тўпلامда берилган бўлиб, δ ихтиёрий мусбат сон бўлсин.

6-таъриф. Ушбу $\omega(f; \delta) = \sup \{ |f(x') - f(x'')| : \forall x', x'' \in X : |x' - x''| \leq \delta \}$ $f(x)$ функциянинг X тўпلامдаги узлуксизлик модули деб аталади.

6-теорема. $f(x)$ функция X тўпلامда текис узлуксиз бўлиши учун

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(f; \delta) = 0$$

лимит муносабатнинг бажарилиши зарур ва старли.

14-мисол. Ушбу

$$f(x) = x^2 + 1$$

функциянинг $X = [0, 1]$ сегментдаги узлуксизлик модулини топинг ва $f(x)$ нинг X да текис узлуксизлигини кўрсатинг.

$X = [0, 1]$ да ихтиёрий x' нуқта олиб, x'' нуқтани эса $x'' = x' - \delta$ деб қарайлик ($0 < \delta < 1$). Равшанки, $2\delta - \delta^2 > 0$ ва

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &= |(x'^2 + 1) - (x''^2 + 1)| = \\ &= |2x'\delta - \delta^2| \leq 2\delta - \delta^2. \end{aligned}$$

Демак,

$$\begin{aligned} \omega(f; \delta) &= \sup \{ |f(x') - f(x'')| : \forall x', x'' \in X : \\ & : |x' - x''| \leq \delta \} \leq 2\delta - \delta^2. \end{aligned}$$

Агар $x' = 1$, $x'' = 1 - \delta$ нуқталар учун $|x' - x''| \leq \delta$ ва $|f(x') - f(x'')| = 2\delta - \delta^2$ бўлишини эътиборга олсак, унда $\omega(f; \delta) = 2\delta - \delta^2$ эканини топамиз. Бундан эса:

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(f; \delta) = \lim_{\delta \rightarrow +0} (2\delta - \delta^2) = 0.$$

Демак, берилган $f(x) = x^2 + 1$ функция $[0, 1]$ да текис узлуксиз.

15-мисол. Ушбу

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

функциянинг $X = (0, +\infty)$ тўпламдаги узлуксизлик модулини топинг ва $f(x)$ функцияни текис узлуксизликка текширинг.

Ихтиёрий мусбат δ сонни олайлик.

Равшанки,

$$|f(x') - f(x'')| = \left| \sin \frac{1}{x'} - \sin \frac{1}{x''} \right| \leq 2 \quad (x', x'' \in X).$$

Жумладан $|x' - x''| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий x' ва x'' лар учун ҳам

$$\left| \sin \frac{1}{x'} - \sin \frac{1}{x''} \right| \leq 2$$

бўлади. Демак,

$$\omega\left(\sin \frac{1}{x}; \delta\right) \leq 2.$$

Иккинчи томондан,

$$x'_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, \quad x''_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

дейилса, унда n ни етарлича катта қилиб олиш ҳисобига бу x'_n ва x''_n лар учун

$$|x'_n - x''_n| < \delta$$

тенгсизликка эришиш мумкин. Унда

$$\begin{aligned} \left| \sin \frac{1}{x'_n} - \sin \frac{1}{x''_n} \right| &= \left| \sin \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) \right| = 2 \end{aligned}$$

бўлади.

Демак,

$$\omega\left(\sin \frac{1}{x}; \delta\right) = 2.$$

Аммо

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega\left(\sin \frac{1}{x}; \delta\right) = 2 \neq 0$$

бўлгани сабабли $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ функция $(0; +\infty)$ да текис узлуксиз эмас.

16-мисол. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар бирор $\{x\}$ тўпلامда текис узлуксиз бўлса, $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$ функцияни текис узлуксизликка текширинг.

Аввало $\{x\} = [a, b]$ бўлган ҳолни қарайлик. Шартга кўра $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ да текис узлуксиз. $\forall x' \in [a, b], \forall x'' \in [a, b]$ нуқталарни олиб қуйидаги айирмани қараймиз:

$$\begin{aligned} \varphi(x') - \varphi(x'') &= f(x')g(x') - f(x'')g(x'') = f(x')g(x') - \\ &\quad - f(x'')g(x') + f(x'')g(x') - f(x'')g(x'') = \\ &= f(x')[g(x') - g(x'')] + g(x'')[f(x') - f(x'')]. \end{aligned}$$

Вейерштрасснинг иккинчи теоремасига биндан

$$A = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad B = \sup_{x \in [a, b]} |g(x)|$$

ларга эга бўламиз. Бундан эса

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq A |g(x') - g(x'')| + B \cdot |f(x') - f(x'')|$$

бўлади. Равшанки, $\varphi(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда текис узлуксизлиги учун, $f(x)$ ва $g(x)$ ларнинг бу сегментда текис узлуксизлиги кифоя.

Агар қаралаётган $[a, b]$ сегмент ўрнига $(-\infty; +\infty)$ оралиқни олсак, умуман айтганда, $\varphi(x)$ текис узлуксиз бўлмасдан қолиши мумкин. Масалан, $f(x) = x$, $g(x) = x$ функциялар бутун сонлар ўқида текис узлуксиз, лекин $f(x) \cdot g(x) = x^2$ функция қаралаётган оралиқда текис узлуксиз эмас.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларни текис узлуксизликка текширинг:

67. $f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (0 < x < \pi).$

68. $f(x) = x \cdot \sin x \quad (0 \leq x < +\infty).$

69. $f(x) = x^2 \quad (-e < x < e).$

70. $f(x) = e^x \quad (-\infty < x < +\infty).$

71. $f(x) = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{x} \quad (0 < x < 1).$

72. $f(x) = x \sin \frac{1}{x} \quad (0 < x < \pi).$

73. $f(x) = \sin \sqrt{x} \quad (1 \leq x < +\infty).$

74. $f(x) = e^{-\arcsin x} \quad (-1 \leq x \leq 1).$

75. $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ e^{-x}, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$

76. $f(x) = \sin |x|^\alpha, \quad \alpha > 0.$

Қуйидаги функцияларнинг берилган оралиқдаги узлуксизлик модулларини топинг ва текис узлуксизликка текширинг:

77. $f(x) = x^2 \quad (-e \leq x \leq e).$

78. $f(x) = \frac{1}{x} \quad (0 < a < x < +\infty).$

79. $f(x) = \sin x + \cos x \quad (0 \leq x \leq 2\pi).$

80. $f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (0 < x < 1).$

81. $f(x) = x^3 \quad (-\infty < x < +\infty).$

82. Агар $\delta_1 < \delta_2$ бўлса, $\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$ тенгсизлигини исботланг.

83. Агар $f(x)$ функция X тўпلامда чегараланган бўлса, у ҳолда $\forall \delta > 0$ учун $\omega(f; \delta) < +\infty$ эканини исботланг.

84. Агар $f(x)$ функция чегараланган X тўпلامда аниқланган бўлиб, чегараланмаган бўлса, у ҳолда $\forall \delta > 0$ учун $\omega(f; \delta) = +\infty$ эканлигини исботланг.

85. $f(x)$ функция a нуқтада текис узлуксиз, деган жумла маънога эгами?

86. (a, b) оралиқда текис узлуксиз функция чегараланган бўладими? (97-масалага қаранг.)

87. Функция текис узлуксизлигининг геометрик талқинини ифодаланг.

88. Агар $f(x)$ функция X тўпلامда узлуксиз бўлса, у берилган тўпلامда текис узлуксиз бўладими?

89. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ ва $[b, c]$ сегментларда текис узлуксиз бўлса, у ҳолда у $[a, c]$ сегментда ҳам текис узлуксизлигини исботланг.

90. Агар 89-мисолда $[b, c]$ сегмент ўрнига (b, c) оралиқ олинса, $f(x)$ функциянинг $[a, c]$ сегментда текис узлуксизлиги ҳақида нима дейиш мумкин?

91. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўпلامда текис узлуксиз бўлса, у ҳолда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ лар учун $\alpha f(x) + \beta g(x)$ функция ҳам X тўпلامда текис узлуксиз эканини исботланг.

92. Мураккаб функциянинг текис узлуксиз бўлиши учун бирорта етарли шарт келтиринг ва исботланг.

93. Агар $f(x)$ функция A ва B тўпلامларда текис узлуксиз бўлса, у ҳолда $A \cap B$ тўпلامда ҳам текис узлуксиз бўлишини исботланг.

94. Узлуксиз даврий функция текис узлуксиз бўлишини исботланг.

95. Интервалда (чекли ёки чексиз) узлуксиз, чегараланган монотон функциянинг текис узлуксизлигини исботланг.

96. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда текис узлуксиз бўлмаса, у ҳолда унинг ҳеч бўлмаганда $[a, b]$ оралиқдаги бирорта нуқтада узилишга эга эканлигини исботланг.

97. Чекли (a, b) оралиқда $f(x)$ функция текис узлуксиз бўлиши учун, унинг (a, b) оралиқда узлуксиз бўлиб, чекли

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x), \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$$

лимитларнинг мавжудлиги зарур ва етарлилигини исботланг.

98. $f(x)$ функция $[0; +\infty]$ оралиқда текис узлуксиз бўлса, у ҳолда $x \rightarrow +\infty$ да

$$f(x) = o(x)$$

эканлигини исботланг.

99. X тўпلامда α тартибли Гельдер шартини қаноатлантирувчи функциянинг текис узлуксизлигини исботланг.

100. $f(x)$ функция $[0, 1]$ сегментдаги барча рационал сонлар тўплами Q_0 да аниқланган бўлсин. $[0, 1]$ да узлуксиз $g(x)$ функция мавжуд бўлиб, $\forall x \in Q_0$ ларда $f(x) = g(x)$ тенглик бажарилиши учун, $f(x)$ функциянинг Q_0 да текис узлуксиз бўлиши зарур ва етарлилигини исботланг.

V боб

ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАРИ

1-§. ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛАСИ

1°. Функция ҳосиласининг таърифи. $y = f(x)$ функция x_0 нуқтанинг ($x_0 \in R$) бирор атрофида берилган бўлсин. Бу функциянинг x_0 нуқтадаги орттормаси

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad (1)$$

нинг аргумент орттормаси Δx га нисбати

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \quad (\Delta x \neq 0)$$

ни қараймиз.

1-таъриф. Агар $\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатнинг limiti

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (2)$$

мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $y = f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи деб аталади ва $f'(x_0)$ ёки $y'_{x=x_0}$

ёки $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0}$ кўринишларда белгиланади.

Демак,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

$y = f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи қуйидагича ҳам таърифланиши мумкин:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (3)$$

1- мисол. Ушбу $y = f(x) = x^2$ функциянинг $x = x_0$ тадаги ҳосиласини топинг.

Бу функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси (1) га кўра

$$\Delta f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

бўлади. Унда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

бўлади.

$$\text{Демак, } f'(x_0) = (x^2)'_{x=x_0} = 2x_0.$$

2- мисол. Ушбу $f(x) = e^x$ функциянинг $x_0 = 1$ нуқтадаги ҳосиласини топинг.

Юқоридаги (3) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} f'(1) &= (e^x)'_{x=1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e(e^{x-1} - 1)}{x - 1} = \\ &= e \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} = e \cdot \ln e = e. \end{aligned}$$

Демак,

$$f'(1) = (e^x)'_{x=1} = e.$$

3- мисол. Ушбу $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$, $f(0) = 0$ функция $x=0$ нуқтада ҳосилага эга эмас. Ҳақиқатан ҳам бу функция учун

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \cdot \sin \frac{1}{x}}{x} = \sin \frac{1}{x}$$

бўлиб, $x \rightarrow 0$ да

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin \frac{1}{x}$$

нисбат лимитга эга эмас. Демак, берилган функция $x=0$ нуқтада ҳосилага эга бўлмайди.

4- мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } x \text{ — рационал сон бўлса,} \\ -x^2, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса,} \end{cases}$$

функциянинг $x=0$ нуқтадаги ҳосиласи $f'(0) = 0$ бўлишини исботланг.

Берилган функция учун:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} x, & \text{агар } x \text{ — рационал сон бўлса,} \\ -x, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса,} \end{cases}$$

бўлиб, унинг лимити $x \rightarrow 0$ да 0 бўлади.

Демак,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

Бу эса

$$f'(0) = 0$$

бўлишини билдиради.

5-мисол. Агар $\varphi(x)$ функция $x = a$ нуқтада узлуксиз бўлса, ушбу

$$f(x) = (x - a) \cdot \varphi(x)$$

функциянинг $x = a$ нуқтадаги ҳосиласи $f'(a) = \varphi(a)$ бўлишини кўрсатинг.

Берилган функциянинг $x = a$ нуқтадаги орттормаси

$$\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) = (a + \Delta x - a) \cdot \varphi(a + \Delta x) - (a - a) \cdot \varphi(a) = \Delta x \cdot \varphi(a + \Delta x)$$

бўлади. Унда

$$\frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = \frac{\Delta x \cdot \varphi(a + \Delta x)}{\Delta x} = \varphi(a + \Delta x)$$

бўлиб,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(a + \Delta x)$$

бўлиши келиб чиқади. $\varphi(x)$ функциянинг $x = a$ нуқтада узлуксиз эканини эътиборга олиб, топамиз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(a + \Delta x) = \varphi(a).$$

Демак,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = \varphi(a).$$

Бу эса $f'(a) = \varphi(a)$ эканини билдиради.

2°. Бир томонли ҳосилалар

2-таъриф. Агар $\Delta x \rightarrow +0$ ($\Delta x \rightarrow -0$) да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбат-

нинг limiti

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\left(\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right)$$

мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ўнг (чап) ҳосиласи деб аталади ва уни $f'(x_0+0)$ ($f'(x_0-0)$) каби белгиланади.

Функциянинг ўнг ва чап ҳосилалари **бир томонли ҳосилалар** деб аталади.

6-мисол. Ушбу

$$f(x) = x^2 \cdot \cos \frac{1}{x}, \quad f(0) = 0$$

функциянинг $x = 0$ нуқтадаги ўнг ва чап ҳосилаларини топинг.

Бу функциянинг $x = 0$ нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = f(\Delta x) = \Delta x^2 \cdot \cos \frac{1}{\Delta x}$$

бўлиб,

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{\Delta x^2 \cdot \cos \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \Delta x \cdot \cos \frac{1}{\Delta x}$$

бўлади. Агар

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \Delta x \cdot \cos \frac{1}{\Delta x} = 0,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \Delta x \cdot \cos \frac{1}{\Delta x} = 0$$

эканлигини эътиборга олсак, унда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = 0,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = 0$$

бўлишини топамиз.

Демак, берилган функциянинг $x = 0$ нуқтадаги ўнг ҳосиласи $f'(0+0) = 0$, чап ҳосиласи $f'(0-0) = 0$ бўлади.

7-мисол. Ушбу $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$ функциянинг $x = 0$ нуқтадаги ўнг ва чап ҳосилаларини топинг. Бу функциянинг $x = 0$ нуқтадаги орттирмаси

$$\begin{aligned} \Delta f(0) &= f(0 + \Delta x) - f(0) = f(\Delta x) - f_0(0) = \\ &= \sqrt{1 - e^{-(\Delta x)^2}} - \sqrt{1 - e^{-0}} = \sqrt{1 - e^{-(\Delta x)^2}} \end{aligned}$$

бўлиб,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x} \cdot \sqrt{1 - e^{-(\Delta x)^2}} = \\ &= \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \cdot \sqrt{\frac{1 - e^{-(\Delta x)^2}}{(\Delta x)^2}} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \sqrt{\frac{1}{e^{\Delta x^2}} \cdot \frac{e^{\Delta x^2} - 1}{(\Delta x)^2}}\end{aligned}$$

бўлади. Агар

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{e^{0(\Delta x)^2}} \cdot \frac{e^{\Delta x^2} - 1}{(\Delta x)^2}} \sqrt{1 \cdot \ln e} = 1$$

эканини эътиборга олсак, унда

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \\ \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.\end{aligned}$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$f'(+0) = 1, \quad f'(-0) = -1.$$

8- мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ x \cos \frac{1}{x}, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $x=0$ нуқтадаги бир томонли ҳосилаларини топинг.

Бу функция учун

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} &= \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \quad (\Delta x \leq 0) \\ \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} &= \cos \frac{1}{\Delta x} \quad (\Delta x > 0)\end{aligned}$$

бўлиб,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$$

бўлади. Демак, берилган функциянинг $x=0$ нуқтадаги чап ҳосиласи $f'(-0) = 1$ бўлади. Бироқ $\Delta x \rightarrow +0$ да $\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \cos \frac{1}{\Delta x}$ нисбат лимитга эга эмас. Демак, берилган функция $x=0$ нуқтада ўнг ҳосиллага эга эмас.

9-мисол. Ушбу $f(x) = x \cdot \cos \frac{1}{x}$ функциянинг $(f(0) = 0)$ $x=0$ нуқтадаги ўнг ва чап ҳосилаларининг мавжуд эмаслигини кўрсатинг.

Бу функциянинг $x=0$ нуқтадаги орттормаси

$$\Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = \Delta x \cdot \cos \frac{1}{\Delta x}$$

бўлиб,

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{\Delta x \cdot \cos \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \cos \frac{1}{\Delta x}$$

бўлади. $\Delta x \rightarrow \pm 0$ да

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \cos \frac{1}{\Delta x}$$

нисбат лимитга эга эмас.

Демак, берилган функция $x=0$ нуқтада ўнг ва чап ҳосилаларга эга эмас.

3°. Чексиз ҳосилалар.

$y = f(x)$ функция x_0 нуқтанинг ($x_0 \in R$) бирор атрофида берилган бўлиб, у x_0 нуқтада узлуксиз бўлсин.

3-таъриф. Агар $\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатнинг limiti

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$+\infty$ (ёки $-\infty$) бўлса, уни ҳам $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи дейилади. Бундай ҳосила чексиз ҳосила деб аталади.

Демак,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = +\infty \text{ (ёки } -\infty).$$

Бир томонли чексиз ҳосилалар ҳам худди шунга ўхшаш таърифланади.

10-мисол. Ушбу $f(x) = \sqrt[3]{x}$ функциянинг $x=0$ нуқтадаги ҳосиласини топинг.

Бу функциянинг $x=0$ нуқтадаги орттормаси

$$\Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = \sqrt[3]{\Delta x}$$

бўлиб,

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}$$

бўлади. Бундан эса

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = +\infty$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, берилган функциянинг $x = 0$ нуқтадаги ҳосиласи $+\infty$ бўлади.

11-мисол. Ушбу $f(x) = \sqrt[3]{\cos x}$ функциянинг $x = \frac{\pi}{2}$ нуқтадаги ҳосиласи топилсин. Бу функциянинг $x = \frac{\pi}{2}$ нуқтадаги орттирмиси

$$\begin{aligned} \Delta f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= f\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[3]{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right)} - \\ &- \sqrt[3]{\cos \frac{\pi}{2}} = \sqrt[3]{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right)} = \sqrt[3]{-\sin \Delta x} = \\ &= -\sqrt[3]{\sin \Delta x} \end{aligned}$$

бўлиб,

$$\frac{\Delta f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{-\sqrt[3]{\sin \Delta x}}{\Delta x} = -\sqrt[3]{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}$$

бўлади. Бундан эса

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[-\sqrt[3]{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} \right] = -\infty$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, берилган функциянинг $x = \frac{\pi}{2}$ нуқтадаги ҳосиласи $-\infty$ бўлар экан.

12-мисол. Ушбу $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ функциянинг $x = 0$ нуқтадаги ўнг ва чап ҳосилаларини топинг.

Бу функциянинг $x = 0$ нуқтадаги орттирмиси

$$\Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = \sqrt[3]{\Delta x^2}$$

бўлиб,

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x^2}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$$

бўлади. Равшанки,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} = +\infty$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} = -\infty$$

бўлади. Демак, берилган функциянинг $x = 0$ нуқтадаги ўнг ҳосиласи $f'(+0) = +\infty$, чап ҳосиласи $f'(-0) = -\infty$ экан.

13- мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 1 \text{ бўлса,} \\ \sqrt{x-1}, & \text{агар } x > 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $x = 1$ нуқтадаги ўнг ва чап ҳосилаларини топинг.

Бу функциянинг $x = 1$ нуқтадаги орттирмиси

$$\Delta f(1) = f(1 + \Delta x) - f(1) = \begin{cases} 0, & \text{агар } \Delta x < 0 \text{ бўлса,} \\ \sqrt{\Delta x}, & \text{агар } \Delta x > 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлиб,

$$\frac{\Delta f(1)}{\Delta x} = \begin{cases} 0, & \text{агар } \Delta x < 0 \text{ бўлса,} \\ \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}, & \text{агар } \Delta x > 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = +\infty,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} 0 = 0.$$

Берилган функциянинг $x = 1$ нуқтадаги ўнг ҳосиласи $f'(+1) = +\infty$, чап ҳосиласи $f'(-1) = 0$ дан иборат.

4°. Функция ҳосиласининг геометрик ва механик маънолари:

$f(x)$ функция (a, b) ораликда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $x_0 \in (a, b)$ нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда $f(x)$ функция графигига $M_0(x_0, f(x_0))$ нуқтада ўтказилган урунма мавжуд. Функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи $f'(x_0)$ эса бу уринманинг бурчак коэффициентини ифодалайди. Уринманинг тенгламаси

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (4)$$

кўринишда бўлади.

14- мисол. Ушбу $f(x) = \cos x$ функция графигига $M_0\left(\frac{\pi}{6}, f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ нуқтада ўтказилган уринма тенгламасини топинг.

Берилган функциянинг ҳосиласи $f'(x) = -\sin x$ га тенг. Агар

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда (4) формулага кўра $M_0\left(\frac{\pi}{6}, f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ нуқтадан ўтувчи уринма тенгламасини

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

эканини топамиз.

Агар $f'(x_0) = \pm \infty$ бўлса, $f(x)$ функция графигига $(x_0, f(x_0))$ нуқтадан ўтказилган уринма Ox ўққа перпендикуляр бўлади.

Моддий нуқтанинг тўғри чизиqli ҳаракати $s = f(t)$ функция билан ифодаланган бўлсин, бунда t — вақт, s шу вақт ичида ўтилган йўл (масофа).

$s = f(t)$ функциянинг t_0 нуқтадаги ҳосиласи $f'(t_0)$ ҳаракат қилаётган моддий нуқтанинг t_0 пайтдаги оний тезлигини билдиради.

5°. Тескари функциянинг ҳосиласи.

Агар $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада $f'(x_0) \neq 0$ ҳосиллага эга бўлса, бу функцияга тескари $x = f^{-1}(y)$ функция x_0 нуқтага мос бўлган $y_0 (y_0 = f(x_0))$ нуқтада ҳосиллага эга ва

$$(f^{-1}(y))'_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

бўлади.

15-мисол. Ушбу $y = \arcsin x$ функциянинг ҳосиласини топинг.

Равшанки, $y = \arcsin x$ функция $x = \sin y$ функцияга $\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$ тескари функциядир. Унда юқоридаги қондага кўра

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'}$$

бўлади. Маълумки, $(\sin y)' = \cos y$. Демак,

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

6°. Ҳосилалар жадвали.

Қуйида элементар функцияларнинг ҳосилаларини топиш формулаларини келтирамиз:

- 1) $(x^\mu)' = \mu \cdot x^{\mu-1}$, $(\mu > 0)$.
- 2) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $(a > 0, a \neq 1)$.
- 3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$ ($x > 0, a > 0, a \neq 1$).
- 4) $(\sin x)' = \cos x$.
- 5) $(\cos x)' = -\sin x$.
- 6) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- 7) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq k\pi$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- 8) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$.
- 9) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$.
- 10) $(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
- 11) $(\operatorname{arcc} \operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.
- 12) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$.
- 13) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.
- 14) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.
- 15) $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.
- 16) $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$, $(x \neq 0)$.

7°. Ҳосила ҳисоблашнинг содда қоидалари.

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $x \in (a, b)$ нуқтада $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) функциялар ҳам ҳосилага эга ва

- 1) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$;
- 2) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;
- 3) $\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$ ($g(x) \neq 0$)

бўлади.

16- мисол. Ушбу

$$y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$$

функциянинг ҳосиласини топинг.

Бу функциянинг ҳосиласини топишда юқоридаги қоидадан ҳамда ҳосилалар жадвалидан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} y' &= (x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})' = (x + x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}})' = \\ &= (x)' + (x^{\frac{1}{2}})' + (x^{\frac{1}{3}})' = 1 + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \\ &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad (x > 0). \end{aligned}$$

17- мисол. Ушбу

$$f(x) = x \cdot |x|$$

функциянинг ҳосиласини топинг:

а) $x > 0$ бўлсин. У ҳолда $f(x) = x \cdot |x| = x^2$ бўлиб, $f'(x) = 2x$ бўлади.

б) $x < 0$ бўлсин. У ҳолда $f(x) = x \cdot |x| = -x^2$ бўлиб, $f'(x) = -2x$ бўлади.

в) $x = 0$ бўлсин. У ҳолда, ҳосила таърифига кўра:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot |\Delta x|}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x| = 0. \end{aligned}$$

Демак, берилган функциянинг ҳосиласи:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \\ 2x, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

8° Мураккаб функциянинг ҳосиласи

$u = f(x)$ функция (a, b) оралиқда. $y = F(u)$ функция эса (c, d) оралиқда берилган бўлиб,

$$y' = F'(f(x))$$

мураккаб функцияга эга бўлайлик.

Агар $u = f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлиб, $y = F(u)$ функция эса x_0 нуқтага мос u_0 ($u_0 = f(x_0)$) нуқтада $F'(u_0)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда мураккаб функция $F(f(x))$ ҳам x_0 нуқтада ҳосилага эга ва

$$[F(f(x))]'_{x=x_0} = F'(u_0) \cdot f'(x_0) \quad (5)$$

бўлади.

18- мисол. Ушбу

$$y = \sin 5\sqrt{x}$$

функциянинг ҳосиласини топинг.

Равшанки, бу мураккаб функция бўлиб, уни

$$y = F(u) = \sin u, \quad u = f(x) = 5\sqrt{x}$$

деб қараш мумкин. (5) формулага кўра:

$$\begin{aligned} y' &= (\sin 5\sqrt{x})' = (\sin u)'_{u=5\sqrt{x}} \cdot (5\sqrt{x})' = \\ &= \cos 5\sqrt{x} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5 \cdot \cos 5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0) \end{aligned}$$

19- мисол. Ушбу

$$y = \ln(10x^4 + 2x^2 + 1)$$

функциянинг ҳосиласини топинг.

Равшанки,

$$y = F(u) = \ln u, \quad u = f(x) = 10x^4 + 2x^2 + 1.$$

(5) формулага кўра

$$\begin{aligned} y' &= (\ln(10x^4 + 2x^2 + 1))' = \\ &= (\ln u)'_{u=10x^4+2x^2+1} \cdot (10x^4 + 2x^2 + 1)' = \\ &= \frac{1}{10x^4 + 2x^2 + 1} \cdot (40x^3 + 4x) = \frac{4x(10x^2 + 1)}{10x^4 + 2x^2 + 1}. \end{aligned}$$

20- мисол. Ушбу

$$y = \arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

функциянинг ҳосиласини топинг. Бу функциянинг ҳосиласи қуйидагича топилади:

$$\begin{aligned} y' &= \left[\arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \right]' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \times \\ &= \frac{-(1+x^2) \cdot 2x - (1-x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^3} = \frac{-4x}{\sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2} \cdot (1+x^2)^3}} = \\ &= \frac{-4x}{2 \cdot |x| \cdot (1+x^2)}. \end{aligned}$$

Демак,

$$y' = \begin{cases} -\frac{2}{1+x^2}, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ \frac{2}{1+x^2}, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Берилган функция $x = 0$ нуқтада эса ҳосилага эга эмас.

Мисол ва масалалар

I Ҳосила таърифидан фойдаланиб қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

1. $f(x) = \sqrt{x}$.
2. $f(x) = 2^x \cdot \sin x$.
3. $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x}$.
4. $f(x) = 2^{x+1}$.
5. $f(x) = \ln x$.
6. $f(x) = \sin 5x$.
7. $f(x) = \operatorname{arctg} 3x$.
8. $f(x) = 2 \sin 3x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$.
9. $f(x) = 1 + \ln 2x$, $x_0 = 1$.
10. $f(x) = x + \operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.
11. $f(x) = 5|x+1|$, $x_0 = -2$.
12. $f(x) = x^3$, $x_0 = 0, 1$.
13. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 0$.
14. $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$
15. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|^5} \cdot \cos \frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$
16. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$

Ҳосила таърифидан фойдаланиб қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари мавжудлигини текширинг.

$$17. f(x) = |x|, x_0 = 0.$$

$$18. f(x) = |(x-1)(x-2)|, x_0 = 1, x_0 = 2.$$

$$19. f(x) = |x^3|, x_0 = 0$$

$$20. f(x) = x|x|, x_0 = 0.$$

$$21. f(x) = |\sin x|, x_0 = \pi.$$

$$22. f(x) = |x^2 - x|, x_0 = 1.$$

$$23. f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ x^4, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

$$x_0 = 0.$$

$$24. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса,} \\ x^2, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

$$25. f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos \frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

$$26. f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ e^{-\frac{1}{x}} \text{ агар } x > 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

$$x_0 = 0.$$

$$27. f(x) = \begin{cases} x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right|, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

$$x_0 = 0$$

$$28. f(x) = \begin{cases} x, & \text{агар } x \text{ — рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса,} \end{cases}$$

$$x_0 = 0.$$

$$29. \text{ Ушбу } f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } x \text{ — рационал сон бўлса,} \\ 2(x-1), & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса.} \end{cases}$$

Функциянинг ҳосилалари мавжуд бўлган нуқталарини аниқланг ва бу нуқталарда ҳосилаларни топинг.

II. Қуйидаги функцияларнинг ўнг ва чап ҳосилалари мавжудлигини текширинг.

$$30. f(x) = |2^x - 2|, x_0 = 1.$$

$$31. f(x) = \sqrt{\sin x^2}, \quad x_0 = 0, \quad x_0 = \sqrt{\pi}$$

$$32. f(x) = \arccos \frac{1}{x}, \quad x_0 = 1, \quad x_0 = -1.$$

$$33. f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \end{cases} \\ x_0 = 0.$$

$$34. f(x) = \begin{cases} x, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса,} \\ \sqrt[3]{x^4} \ln x, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \end{cases} \\ x_0 = 0.$$

$$35. f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \end{cases} \\ x_0 = 0.$$

$$36. f(x) = \begin{cases} \frac{|\sin x|}{|x|}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \end{cases} \\ x_0 = 0.$$

$$37. 37. f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x^2}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \end{cases} \\ x_0 = 0$$

$$38. f(x) = |x - 1| \cdot e^x, \quad x_0 = 1.$$

$$39. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \end{cases} \\ x_0 = 0,$$

$$40. f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \end{cases} \\ x_0 = 0, \quad x_0 = 1.$$

III. Қуйидаги функцияларнинг берилган нуқтадаги теккари функциялари ва уларнинг ҳосилаларини топинг:

$$41. y = 2x - \frac{\cos x}{2}, \quad y_0 = -\frac{1}{2}.$$

$$42. y = 2x^2 - x^4, x > 1, y_0 = 0.$$

$$43. y = 0,1x + e^{0,1x}, y_0 = 1.$$

$$44. \text{Агар } x = \operatorname{sh} y \text{ бўлса, } y'(x) \text{ ни топинг.}$$

45. Агар $y = x + \sin x$ бўлса, $x \in \mathbb{R}$ қандай нуқталарда бу функцияга тескари функция $+\infty$ ҳосилага эга бўлади?

IV. Ҳосалалар жадвали ва қондалари ёрдамида қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини ҳисобланг:

$$46. y = \frac{\ln 3}{x} + e^2.$$

$$47. y = 7x^{25} + 25x^{-7}$$

$$48. y = x^{\sqrt{2}} - x^{-\sqrt{2}}.$$

$$49. y = \frac{ax+b}{cx+d}, c \neq 0.$$

$$50. y = 5x \sin x.$$

$$51. y = (x+1) \operatorname{tg} x.$$

$$52. f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$53. y = (x^2 - 7x + 8)e^x$$

$$54. y = e^{ax} \cdot (a \sin bx - b \cos bx).$$

$$55. y = 2^x \ln |x|.$$

$$56. y = \log_x 2.$$

$$57. y = \log_x 2^x.$$

$$58. y = \operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x$$

$$59. y = \sqrt{x^2 - a^2}.$$

$$60. y = x \sqrt[3]{x^2 + 1}.$$

$$61. y = \sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}.$$

$$62. y = \sin^2(\cos x) + \cos^2(\sin x).$$

$$63. y = \sin(\sin(\sin x)).$$

$$64. y = 2^{\cos x + \operatorname{tg} x}.$$

$$65. y = e^x \cdot \sin x.$$

66. $y = e^{x^2} \cos 2x.$
67. $y = e^{e^x} + x^{e^x}.$
68. $y = x^x.$
69. $y = \ln(\ln(\ln x)).$
70. $y = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a}, a < 0,$
71. $y = \ln |x|.$
72. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}).$
73. $y = \ln \sin x.$
74. $y = \sin(\ln x).$
75. $y = \arcsin \frac{x}{a}.$
76. $y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x^2}.$
77. $y = \arccos \frac{1}{x}.$
78. $y = \arcsin(\sin x).$
79. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x).$
80. $y = \sin(\arcsin x).$
81. $y = \ln \frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \frac{a}{b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b}; a, b > 0.$
82. $y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}, a > 0$
83. $y = \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}.$
84. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} + \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}.$
85. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}.$
86. $y = \ln(e^x \sqrt{1+e^{2x}}).$
87. $y = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{1+x^2}).$
88. $y = (\sin x)^{\cos x}.$

$$89. y = \operatorname{sh}(\operatorname{tg} x).$$

$$90. y = \operatorname{th}(\cos x).$$

$$91. y = \ln(\operatorname{sh} x).$$

$$92. y = \lg(\operatorname{ch} x).$$

$$93. y = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x).$$

94. $f(x) = x(x-1)(x-2) \dots (x-1000)$; $f'(0)$ ни топинг.

95. Ушбу

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ f_{k1}(x) & \dots & f_{kn}(x) \\ f_{n1}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ f_{k1}(x) & \dots & f_{kn}(x) \\ f_{n1}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

муносабатни исботланг.

96. Бутун сонлар ўқида аниқланган ва никита нуқтада ҳосиллага эга бўлмаган функцияга мисол келтиринг.

97. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўпламда аниқланган бўлиб, $f(x)$ x_0 да ҳосиллага эга, $g(x)$ эса бу нуқтада ҳосиллага эга бўлмасин. У ҳолда

$$a) f(x) \pm g(x),$$

$$b) f(x) \cdot g(x)$$

функцияларнинг x_0 нуқтадаги ҳосилалари ҳақида нима дейиш мумкин? Мисоллар келтиринг.

98. Агар 97- мисолда $f(x)$ функция ҳам x_0 нуқтада ҳосиллага эга бўлмаса, у ҳолда $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ функцияларнинг x_0 нуқтадаги ҳосилалари ҳақида нима дейиш мумкин? Мисоллар келтиринг.

99. Бутун сонлар ўқида аниқланган ва фақат n та нуқтада ҳосиллага эга бўлган функцияга мисол келтиринг.

100. Ҳосиллага эга бўлган жуфт функциянинг ҳосиласи тоқ функция эканини исботланг.

101. Ҳосиллага эга бўлган тоқ функциянинг ҳосиласи жуфт функция эканини исботланг.

102. Ҳосиласи жуфт- функция бўлган, ўзи тоқ бўлмаган функцияга мисол келтиринг.

103. Агар $f(x)$ функциянинг ҳосиласи $f'(x)$ тоқ функция бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция жуфт эканини исботланг.

104. Агар ҳосиллага эга бўлган $f(x)$ функция даврий бўлиб, унинг даври T га тенг бўлса, у ҳолда $f'(x)$ ҳам дав-

рий бўлиб, унинг ҳам даври T га тенг бўлишини исботланг.

105. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлса, функция x_0 нуқтанинг бирор атрофида ҳосилага эга бўладими?

106. Бутун сонлар ўқида аниқланган бўлиб, ихтиёрий $x \in \mathbb{R}$ нуқтада ҳосилага эга бўлмаган, лекин квадрати $\forall x \in \mathbb{R}$ нуқтада ҳосилага эга бўлган функцияга мисол келтиринг.

107. x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлмаган $f(x)$ ва $g(x)$ функциялардан тузилган мураккаб функцияларнинг ҳосилалари ҳақида нима дейиш мумкин? Мисоллар келтиринг.

108. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $\left\{ n \left(f \left(x_0 + \frac{1}{n} \right) - f(x_0) \right) \right\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи эканини исботланг. Тасдиқнинг тескараси ўринлими?

109. Агар $f(x) < g(x)$ бўлса, бу тенгсизликдан ҳосила олиш ўринлими?

110. а) $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$;

б) $1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \dots + n^2x^{n-1}$;

в) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$;

г) $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$.

Йигиндиларни ҳисоблаш формулалари топилсин.

111. $y = |\sin^2 x|$ ва $y = [x] \sin^2 \pi x$ функцияларнинг ҳосилалари топилсин.

112. $f(x)$ функция бутун сонлар ўқида аниқланган ва $\forall x \in \mathbb{R}$ учун $f'(x)$ мавжуд бўлсин. Агар $|f'(x)| \leq M$ тенгсизлиги $\forall x \in \mathbb{R}$ учун ўринли бўлса, қандай $\delta > 0$ лар учун $|x| < \delta$ тенгсизликдан $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқади? ($\forall \varepsilon > 0$).

113. $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ функциялар X тўпламда аниқланган бўлиб, $x \in X$ нуқтада $f'_i(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин, $i = \overline{1, n}$. У ҳолда

$$(f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x))' = \sum_{k=1}^n f_1(x) \cdot \dots \cdot f_{k-1}(x) \cdot f'_k(x) \cdot f_{k+1}(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)$$

формулани исботланг.

114. Қандай нуқталарда $y = \frac{x+2}{x-2}$ функция графигига ўтказилган уринма Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан 135° ли бурчак ташкил этади?

115. $y = \sin x$ функция графиги абсциссалар ўқини қандай бурчақлар остида кесади?

Қандай нуқталарда қуйидаги $y = f(x)$ функциялар графигига ўтказилган уринмалар Ox ўққа параллел бўлади?

116. $y = (3 - x^2)e^x$.

117. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$.

118. $y = |x - 5| \cdot (x - 3)^2$.

Қандай нуқталарда қуйидаги $y = f(x)$ функциялар графигига ўтказилган уринмалар берилган тўғри чизиқларга параллел бўлади?

119. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, $y = 3x$.

120. $f(x) = x^2 - 7x + 3$, $5x + y - 3 = 0$.

121. $f(x) = \ln(4x - 1)$, $y = x$.

122. $f(x) = \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos 3x$, $y = -x$.

Қандай нуқталарда қуйидаги $y = f(x)$ функциялар графигига ўтказилган уринмалар берилган тўғри чизиқларга перпендикуляр бўлади?

123. $f(x) = x^3 + 2x - 1$, $x + y = 0$.

124. $f(x) = \sin x$, $x - 10 = 0$.

125. $f(x) = \ln x$, $2y + x + 1 = 0$.

126. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x + y = 0$.

127. $y = -\sqrt{2x^3}$, $4x - 3y + 2 = 0$.

$y = f(x)$ функция графигига берилган нуқтада ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг:

128. $y = \sqrt{5 - x^2}$, $x = 1$.

129. $y = \operatorname{arctg} 2x$, $x = 0$.

130. $y = \ln \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1}$, $x = 0$.

131. $y = 4 \operatorname{ctg} x - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

132. $y = |x - 1| \sqrt[3]{x + 2}$, $x = 6$.

133. $y = e^x$, $x = 1$.

Қуйидаги функцияларнинг графиклари қайси нуқталарда қандай бурчақ остида кесишишларини аниқланг:

134. $y_1 = \sqrt{2} \sin x$, $y_2 = \sqrt{2} \cos x$.

$$135. y_1 = \frac{1}{x}, y_2 = \sqrt{x}.$$

$$136. y_1 = \ln x, y_2 = \frac{x^2}{2e}.$$

$$137. y_1 = x^3, y_2 = \frac{1}{x^2}.$$

$$138. y_1 = x^2, x = y^2.$$

Қуйидаги функцияларнинг графикларига берилган нуқталарда ўтказилган бир томонли уринмалар орасидаги бурчакни топинг:

$$139. y = |x|, M(0, 0).$$

$$140. y = \sqrt[3]{x^3}, M(0, 0).$$

$$141. y = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{2x}{1+x^2}, M\left(1, \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right).$$

$$142. y = \sqrt{2x^2 + 9x^3}, M(0, 0).$$

$$143. y = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \end{cases} M(0, 0).$$

$$144. y = \sqrt{1 - e^{-a^2 x^2}}, M(0, 0).$$

145. Параметр n нинг қандай қийматида $y = \operatorname{arctg} nx$ ($n > 0$) чизик Ox ўқ билан 89° дан катта бурчак остида кесишади?

146. $y = |x|^\alpha$ чизик $0 < \alpha < 1$ бўлганда Oy ўққа, $1 < \alpha < +\infty$ бўлганда Ox ўққа уринишини исботланг.

2-§. ФУНКЦИЯНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛИ

1°. Функциянинг дифференциалланувчи бўлиш тушунчаси. $y = f(x)$ функция x_0 нуқтанинг ($x_0 \in R$) бирор атрофида берилган бўлсин. Бу функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

ни қарайлик. Равшанки, бу орттирма Δx га боғлиқдир.

4-таъриф. Агар $y = f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси Δy ни

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \quad (6)$$

(бунда A — ўзгармас, $\alpha = \alpha(\Delta x)$ бўлиб, $\Delta x \rightarrow 0$ да $\alpha(\Delta x) \rightarrow$

→ 0) кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи деб аталади.

(6) муносабатни қуйидагича

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = A \Delta x + o(\Delta x) \quad (7)$$

ёзиш ҳам мумкин.

$A \Delta x$ га функциянинг дифференциали дейилади. Функция дифференциали $dy = df(x_0)$ каби белгиланади: $df(x_0) = A \Delta x$ бўлиб, $\Delta x = dx$ ни эътиборга олсак, $df(x_0) = A dx$ бўлади.

21- мисол. Ушбу

$$f(x) = x^3 + x^2 + 1$$

функциянинг $x_0 (\forall x_0 \in R)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлишини кўрсатинг.

Бу функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмасини топамиз:

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 + (x_0 + \Delta x)^2 + \\ &+ 1 - (x_0^3 + x_0^2 + 1) = 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot \Delta x^2 + \\ &+ \Delta x^3 + 2x_0 \Delta x + \Delta x^2 = (3x_0^2 + 2x_0) \Delta x + \\ &+ (3x_0 \Delta x + \Delta x + \Delta x^2) \cdot \Delta x. \end{aligned}$$

Агар $A = 3x_0^2 + 2x_0$, $\alpha = \alpha(\Delta x) = (3x_0 + 1)\Delta x + \Delta x^2$ дейилса, у ҳолда

$$\Delta f(x_0) = A \Delta x + \alpha(\Delta x)$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса берилган функциянинг x_0 нуқтада дифференциалланувчи эканини билдиради.

22- мисол. Ушбу

$$f(x) = x \cdot \arctg \frac{1}{x}, \quad f(0) = 0$$

функция $x = 0$ нуқтада дифференциалланувчи бўладими?

Бу функциянинг $x = 0$ нуқтадаги орттирмасини топамиз:

$$\Delta f(0) = [f(0 + \Delta x) - f(0)] = \Delta x \cdot \arctg \frac{1}{\Delta x}.$$

Бу тенгликдан кўринадики, берилган функциянинг $x = 0$ нуқтадаги орттирмаси $\Delta f(0)$ ни (7) кўринишда ифодалаб бўлмайди. Демак, функция $x = 0$ нуқтада дифференциалланувчи бўлмайди.

23- мисол. Ушбу

$$f(x) = a^x$$

функциянинг x_0 нуқтада ($\forall x_0 \in R$) дифференциалланувчи бўлишини кўрсатинг.

Бу функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмасини топамиз:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1).$$

Агар

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a \Rightarrow \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a + \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^{\Delta x} - 1 = \Delta x \cdot \ln a + \alpha \cdot \Delta x$$

$$(\alpha = \alpha(\Delta x): \Delta x \rightarrow 0 \text{ да } \alpha \rightarrow 0)$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\Delta f(x_0) = a^{x_0}(\ln a \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x) =$$

$$= a^{x_0} \cdot \ln a \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x \cdot a^{x_0}$$

эканлиги аниқланади. Демак,

$$\Delta f(x_0) = A \Delta x + \alpha_1(\Delta x) \cdot \Delta x.$$

$$\text{бунда } A = a^{x_0} \ln a, \quad \alpha_1(\Delta x) = \alpha \cdot a^{x_0}.$$

Бу эса берилган функциянинг x_0 нуқтада ($\forall x_0 \in R$) дифференциалланувчи эканини билдиради.

1-теорема. $f(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлиши учун унинг шу нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосиллага эга бўлиши зарур ва етарли.

Функция дифференциалланувчи бўлса,

$$df(x_0) = f'(x_0)dx \quad (8)$$

эканлигини кўриш қийин эмас.

24-мисол. Ушбу

$$f(x) = \sqrt{1-x} \cdot \arcsin \sqrt{x}$$

функция $x_0 = \frac{1}{2}$ нуқтада дифференциалланувчи бўлади, чунки бу функция $x_0 = \frac{1}{2}$ нуқтада чекли ҳосиллага эга.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \sqrt{1-x} + \\ &+ \arcsin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot (-1) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\arcsin \sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}} \end{aligned}$$

бўлиб,

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} - \frac{\arcsin \sqrt{\frac{1}{2}}}{2 \sqrt{1 - \frac{1}{2}}} = \\ = (\sqrt{2})^{-1} \left(1 - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

бўлади.

Юқорида келтирилган теоремага кўра берилган функция $x_0 = \frac{1}{2}$ нуқтада дифференциалланувчи бўлади.

25-мисол. Ушбу

$$f(x) = x \cdot \cos \frac{1}{x}, \quad f(0) = 0$$

функция $x = 0$ нуқтада дифференциалланувчи бўлмайди, чунки бу функция $x = 0$ нуқтада ҳосилга эга эмас.

Бунини $\Delta x \rightarrow 0$ да

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{\Delta x \cdot \cos \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \cos \frac{1}{\Delta x}$$

нисбатнинг лимитга эга эмаслигидан топамиз.

26-мисол. Ушбу

$$x) = \sqrt[3]{x}$$

функция $x = 0$ нуқтада дифференциалланувчи бўлмайди, чунки бу функция $x = 0$ нуқтада чекли ҳосилга эга эмас.

27-мисол. Ушбу

$$y = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$$

функциянинг дифференциалини топим.

Бу функциянинг дифференциалини (8) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$dy = d\left(\ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}\right) = \left(\ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}\right)' \cdot dx = \\ = \left(\frac{1}{2} \left[\ln(1 - \sin x) - \ln(1 + \sin x)\right]\right)' dx = \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{-\cos x}{1 - \sin x} - \frac{\cos x}{1 + \sin x}\right) dx = -\frac{1}{\cos x} dx.$$

2°. Тақрибий формулалар.

$y = f(x)$ функция (a, b) оралиқда берилган бўлиб, $x_0 \in (a, b)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. Бу ҳолда

$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x$ бўлади. Равшанки, Δx етарлича кичик бўлганда ушбу

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x,$$

яъни

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \quad (9)$$

тақрибий формулага келамиз.

28- мисол. Ушбу

$$\sqrt{1,2}, \sqrt{1,02}, \sqrt{1,002}$$

миқдорларнинг тақрибий қийматларини топинг.

Ушбу

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

функцияни қарайлик. Бу функциянинг ҳосиласи

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad (x \neq -1)$$

эканлигини эътиборга олиб, сўнг (9) формуладан фойдаланиб, топамиз:

$$\sqrt{1+(x_0+\Delta x)} \approx \sqrt{1+x_0} + \frac{1}{2\sqrt{1+x_0}} \cdot \Delta x.$$

Агар $x_0 = 0$, $\Delta x = 0,2$ дейилса, унда

$$\sqrt{1+0,2} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,2$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\sqrt{1,2} \approx 1,1$.

Агар $x_0 = 0$, $\Delta x = 0,02$ дейилса, унда

$$\sqrt{1+0,02} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,02$$

бўлади. Демак, $\sqrt{1,02} \approx 1,01$.

Агар $x_0 = 0$, $\Delta x = 0,002$ дейилса, унда

$$\sqrt{1+0,002} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,002$$

бўлади. Демак, $\sqrt{1,002} \approx 1,001$.

29- мисол. Ушбу

$$\cos 60^\circ 6'$$

миқдорнинг тақрибий қийматини топинг.

(9) формулага кўра:

$$\cos(x_0 + \Delta x) \approx \cos x_0 + (-\sin x_0) \cdot \Delta x.$$

$x_0 = \frac{\pi}{3}$, $\Delta x = \frac{\pi}{1800}$ деб олинса, унда:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{1800}\right) &\approx \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\pi}{1800} = \\ &= 0,5 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{1800} \approx 0,4985.\end{aligned}$$

Демак,

$$\cos 60^\circ 6' \approx 0,4985.$$

Мисол ва масалалар

1. Қуйидаги функцияларни берилган нуқталарда дифференциалланувчанликка текширинг:

147. $f(x) = 2x^2 + 7x - 1$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

148. $f(x) = e^{2x}$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

149. $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x^2}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ x_0 = 0. \end{cases}$

150. $f(x) = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$, $x_0 = 0$, $x_0 = 1$.

151. $f(x) = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$, $x_0 = \frac{1}{\pi}$.

152. $f(x) = 3 \cos 2x - \sqrt{1 - \sin 2x} (\sin x + \cos 2x)$,
 $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

153. $f(x) = \ln(1 + \sin^2 x) - 2 \sin x \operatorname{arctg} \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

154. $f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$, $x_0 = 1$, $x_0 = -1$, $x_0 = 0$.

155. $f(x) = (\operatorname{ch} x)^{\operatorname{sh} x}$, $x_0 = 0$.

156. $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x + 1}$, $x_0 = 0$.

157. $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$158. f(x) = \max(7x - 6x^2, |x|^3), \quad x_0 = 0.$$

$$159. f(x) = \sqrt[3]{\arctg \sqrt[5]{\cos \ln^2 x}}, \quad x_0 = 1.$$

$$160. f(x) = (\sqrt{1 + 3^x})^{\ln x^2}, \quad x_0 = 1.$$

$$161. f(x) = \cos^4 x \cdot \cos nx, \quad \forall x_0 \in R.$$

$$162. f(x) = 2^{\sin^2 x^2}, \quad \forall x_0 \in R.$$

$$163. f(x) = 2^{\cos^2 x}, \quad \forall x_0 \in R.$$

2. Қуйидаги функцияларнинг дифференциаллини топинг.

$$164. f(x) = \ln \ln \left(\frac{x}{2} \right).$$

$$165. f(x) = \cos \frac{1}{\log_2 x}.$$

$$166. f(x) = 10^{\frac{x}{\log_2 x}}.$$

$$167. f(x) = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}.$$

$$168. f(x) = \ln \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} \cos x}{\sqrt{3} + \sqrt{2} \cos x}.$$

$$169. f(x) = \arctg e^{\frac{x}{2}} - \ln \sqrt{\frac{e^x}{e^x + 1}}.$$

$$170. f(x) = x^{x^2}.$$

$$171. f(x) = x^{e^x}.$$

$$172. f(x) = 5^{x^x}.$$

$$173. f(x) = |\sin x|^{\cos x}.$$

$$174. f(x) = \sqrt[x]{x}, \quad (x > 0).$$

$$175. f(x) = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}, \quad a > 0, x > 0.$$

$$176. f(x) = \frac{\log_x e}{e}.$$

$$177. f(x) = \ln^2(\sec 2 \sqrt[3]{x}).$$

$$178. f(x) = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x}).$$

$$179. f(x) = \ln \frac{1 + \sqrt{\sin x}}{1 - \sqrt{\sin x}} + 2 \arctg \sqrt{\sin x}.$$

$$180. f(x) = \arctg \frac{\ln x}{x}, \quad x_0 = \frac{1}{e}, \quad x_0 = e.$$

$$181. f(x) = \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{x+1}{x} \right), \quad x_0 = -1.$$

$$182. f(x) = \frac{x^2 2^x}{x^x}, \quad x_0 = 1, \quad x_0 = 2.$$

$$183. f(x) = \frac{(2x-1)\sqrt[3]{2+3x}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}, \quad x_0 = 1.$$

3. Қуйидаги функцияларнинг берилган нуқталарда тақрибий қийматларини топинг.

$$184. f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x = 65, \quad x = 125, 1324.$$

$$185. f(x) = \sin x, \quad x = 29^\circ, \quad x = 359^\circ.$$

$$186. f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x = 44^\circ 50'.$$

$$187. f(x) = \ln \operatorname{tg} x, \quad x = 47^\circ 15'.$$

$$188. f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}, \quad x = 0, 15.$$

$$189. f(x) = \cos x, \quad x = 151^\circ.$$

$$190. f(x) = \lg x, \quad x = 11.$$

3-§. ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАР

1°. Функциянинг юқори тартибли ҳосилалари

$y = f(x)$ функция x_0 нуқтанинг бирор атрофида берилган бўлиб, шу атрофда $f'(x)$ ҳосиллага эга бўлсин. Агар $f'(x)$ ҳам x_0 нуқтада ҳосиллага эга бўлса, уни $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги *иккинчи тартибли ҳосиласи* деб аталади ва

$$y''_{x_0} \text{ ёки } f''(x_0), \text{ ёки } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=x_0}$$

каби ёзилади. Демак,

$$y''_{x_0} = (y')'_{x=x_0}, \quad f''(x_0) = (f'(x))'_{x=x_0}.$$

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=x_0} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_0}.$$

$f(x)$ функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳ. к. тартибдаги ҳосилалари худди шунга ўхшаш таърифланади.

Умуман, агар $y = f(x)$ функциянинг $(n-1)$ -тартибли $f^{(n-1)}(x)$ ҳосиласи x_0 нуқтанинг бирор атрофида мавжуд бўлиб, бу $f^{(n-1)}(x)$ функция x_0 нуқтада ҳосиллага эга бўлса, уни $y = f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги n -тартибли ҳосиласи деб аталади ва

$$y_{x=x_0}^{(n)}, f^{(n)}(x_0), \left. \frac{d^n y}{dx^n} \right|_{x=x_0}$$

белгиларнинг бири орқали ёзилади.

Шундай қилиб,

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))', \\ \left(\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{(n-1)} y}{dx^{n-1}} \right) \right)$$

бўлади.

30-мисол. Ушбу $y = \ln \sin x$ функциянинг учинчи тартибли ҳосиласини топинг.

Функциянинг учинчи тартибли ҳосиласини топиш учун унинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топиш керак бўлади:

$$y' = (\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x,$$

$$y'' = (y')' = (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$y''' = (y'')' = \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right)' = -\frac{-2 \sin x \cos x}{\sin^4 x} = \frac{2 \cos x}{\sin^3 x}.$$

Демак,

$$y''' = \frac{2 \cos x}{\sin^3 x}.$$

31-мисол. Ушбу

$$y = \frac{x^2}{1-x}$$

функциянинг саккизинчи тартибли ҳосиласини топинг.

Аввало берилган функцияни

$$y = \frac{x^2}{1-x} = \frac{-(1-x^2)+1}{1-x} = -(1+x) + \\ + \frac{1}{1-x} = -(1+x) + (1-x)^{-1}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Шундан кейин унинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned}
 y' &= [-(1+x) + (1-x)^{-1}]' = -1 + (-1)(1-x)^{-2}, \\
 y'' &= [-1 + (-1)(1-x)^{-2}]' = 0 + (-1) \cdot (-2)(1-x)^{-3}, \\
 y''' &= [(-1)(-2)(1-x)^{-3}]' = (-1)(-2)(-3)(1-x)^{-4} = \\
 &= (-1)^3 \cdot 3! (1-x)^{-4}.
 \end{aligned}$$

Шу ёъл билан

$$y^8 = (-1)^8 \cdot 8! (1-x)^{-9} = 8! (1-x)^{-9}$$

бўлишини топамиз.

2°. Содда қоидалар ва асосий формулалар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар x_0 нуқтанинг бирор атрофида аниқланган бўлиб, улар шу атрофда $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда

$$\begin{aligned}
 1) [c \cdot f(x)]^{(n)} &= c \cdot f^{(n)}(x), \quad c = \text{const.} \\
 2) [f(x) \pm g(x)]^{(n)} &= f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x), \\
 3) [f(x) \cdot g(x)]^{(n)} &= f^{(n)}(x) \cdot g(x) + C_n^1 f^{(n-1)}(x) \cdot g'(x) + \\
 &+ C_n^2 f^{(n-2)}(x) \cdot g''(x) + \dots + C_n^{n-1} f'(x) \cdot g^{(n-1)}(x) + \\
 &+ f(x) \cdot g^{(n)}(x)
 \end{aligned}$$

(Лейбниц формуласи) бўлади.

Энди асосий формулаларни келтирамиз:

$$\begin{aligned}
 1) y &= a^x \text{ бўлса, } y^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a, \quad a > 0. \\
 2) y &= e^x \text{ бўлса, } y^{(n)} = e^x. \\
 3) y &= \sin x \text{ бўлса, } y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right). \\
 4) y &= \cos x \text{ бўлса, } y^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right). \\
 5) y &= \ln x \text{ бўлса, } y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}. \\
 6) y &= \frac{1}{x} \text{ бўлса, } y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}. \\
 7) y &= x^m \text{ бўлса, } y^{(n)} = m(m-1) \dots (m-n+1) x^{m-n}. \\
 8) y &= (1+x)^\alpha \text{ бўлса, } y^{(n)} = (\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.
 \end{aligned}$$

32-мисол. Ушбу

$$y = e^{2x} \sin^2 x$$

функциянинг n -тартибли ҳосиласини топинг.

Берилган функцияни

$$y = e^{2x} \sin^2 x = e^{2x} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} (e^{2x} - e^{2x} \cdot \cos 2x)$$

кўринишда ёзиб оламиз. Шундан кейин унинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$y' = 1 \cdot e^{2x} \cdot \left[1 - 2^{\frac{1}{2}} \cdot \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

Юқоридаги формулалардан фойдаланиб

$$y^{(n)} = 2^{n-1} e^{2x} \left[1 - 2^{\frac{n}{2}} \cos \left(2x + n \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

бўлиши топилади.

33-мисол. Ушбу $y = \sin ax$ функциянинг n -тартибли ҳосиласини топинг.

Равшанки,

$$y' = (\sin ax)' = \cos ax \cdot a = a \cdot \sin \left(ax + \frac{\pi}{2} \right).$$

Юқоридаги 3)-формуладан фойдаланиб

$$y^{(n)} = a^n \sin \left(ax + n \cdot \frac{\pi}{2} \right)$$

бўлишини топамиз.

34-мисол. Ушбу

$$y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

функциянинг n — тартибли ҳосиласи топилсин.

Берилган функцияни

$$y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Юқорида келтирилган содда қоида ва (8) формуладан фойдаланиб, топамиз:

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right)^{(n)} = \left(\frac{1}{x-2} \right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x-1} \right)^{(n)} = \\ &= [(x-2)^{-1}]^{(n)} - [(x-1)^{-1}]^{(n)} = (-1)(-1-1) \dots \\ &\dots (-1-n+1)(x-2)^{-1-n} - [(-1)(-1-1) \dots \\ &\dots (-1-n+1)(x-1)^{-1-n}] = (-1)^n \cdot n! [(x-2)^{-n-1} - \\ &- (x-1)^{-n-1}] = (-1)^n \cdot n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right]. \end{aligned}$$

Демак,

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right].$$

35-ми с ол. $y = x \cdot \cos ax$ функциянинг n -тартибли ҳосиласини топинг.

Бу функциянинг n -тартибли ҳосиласини топишда Лейбниц формуласидан фойдаланамиз. Лейбниц формуласида $f(x) = \cos ax$, $g(x) = x$ деймиз. Агар

$$f^{(n)}(x) = (\cos ax)^{(n)} = a^n \cos \left(ax + n \cdot \frac{\pi}{2} \right),$$

$$g'(x) = 1, g''(x) = g'''(x) = \dots = g^{(n)}(x) = 0.$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= (f(x) \cdot g(x))^{(n)} = (x \cdot \cos ax)^{(n)} = \\ &= x a^n \cos \left(ax + n \cdot \frac{\pi}{2} \right) + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cos \left(ax + (n-1) \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= x a^n \cos \left(ax + n \cdot \frac{\pi}{2} \right) + n a^{n-1} \cos \left(ax + \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= x a^n \cos \left(ax + n \cdot \frac{\pi}{2} \right) + n a^{n-1} \sin \left(ax + \frac{n\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$y^{(n)} = x a^n \cos \left(ax + n \cdot \frac{\pi}{2} \right) + n a^{n-1} \sin \left(ax + n \cdot \frac{\pi}{2} \right).$$

36-ми с ол. Агар $x = a$ нуқтанинг атрофида $\varphi(x)$ функция $(n-1)$ -тартибли узлуксиз ҳосиллага эга бўлса, у ҳолда

$$y = y(x) = (x-a)^n \cdot \varphi(x)$$

функциянинг $x = a$ нуқтадаги n -тартибли ҳосиласини топинг.

Айтайлик,

$$f(x) = (x-a)^n, \quad g(x) = \varphi(x)$$

бўлсин. У ҳолда

$$\begin{aligned} (f(x))^{(n-1)} &= [(x-a)^n]^{(n-1)} = \\ &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot (x-a) = n! (x-a), \\ [g(x)]^{(n-1)} &= \varphi^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

бўлади. Лейбниц формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned}
y^{(n-1)} &= [f(x) \cdot g(x)]^{(n-1)} = [(x-a)^n \cdot \varphi(x)]^{(n-1)} = \\
&= [(x-a)^n]^{(n-1)} \cdot \varphi(x) + C_{n-1}^1 [(x-a)^n]^{(n-2)} \cdot \varphi'(x) + \dots + \\
&\quad + C_{n-1}^{n-2} [(x-a)^n]' \cdot \varphi^{(n-2)}(x) + (x-a)^n \varphi^{(n-1)}(x) = \\
&= n! (x-a) \varphi(x) + (n-1)(n-1)n(n-2) \dots 2 \dots \\
&\quad \dots (x-a)^2 \varphi'(x) + \dots + (n-1)n(x-a)^{n-1} \varphi^{(n-2)}(x) + (x-a)^n \varphi^{(n-1)}(x).
\end{aligned}$$

Энди

$$y^{(n-1)} = n! (x-a) \varphi(x) + \alpha (x-a).$$

деб оламиз, бунда

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha = 0$$

бўлади. Равшанки,

$$y^{(n-1)}(a) = 0.$$

Шуни эътиборга олиб, сўнгра ҳосила таърифидан фойдаланиб, топамиз:

$$\begin{aligned}
y^{(n)}(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{y^{(n-1)}(x) - y^{(n-1)}(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{y^{(n-1)}(x)}{x-a} = \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{n! (x-a) \varphi(x) + \alpha (x-a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} [n! (x-a) \varphi(x) + \alpha] = \\
&= n! \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x).
\end{aligned}$$

Шартга кўра $\varphi(x)$ функция $x=a$ нуқтада узлуксиз.

Демак,

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \varphi(a).$$

Натижада берилган функциянинг $x=a$ нуқтадаги n -тартибли ҳосиласи

$$y^{(n)}(a) = n! \varphi(a).$$

бўлиши келиб чиқади.

3°. Функциянинг юқори тартибли дифференциалларини

$y = f(x)$ функция x_0 нуқтанинг бирор атрофида берилган бўлиб, шу атрофда икки марта дифференциалланувчи бўлсин. $f(x)$ функция дифференциали $dy = df(x)$ нинг дифференциали берилган функциянинг *иккинчи тартибли дифференциали* деб аталади ва

$$d^2y \text{ ёки } d^2f(x)$$

каби ёзилади. Демак, $d^2y = d(dy)$ ёки $d^2f(x) = d(df(x))$.
Юқорида келтирилган функциянинг иккинчи тартибли дифференциали қуйидагича изоҳланади;

а) dy фақат x нинг функцияси деб фараз қилинади, яъни $f'(x)dx$ нинг дифференциали ҳисобланганда dx ўзгармас кўпаявчи деб қаралади.

б) $f'(x)$ нинг дифференциали ҳисобланганда x нинг орттирмаси $\Delta x = dx$ ни биринчи тартибли дифференциал $dy = f'(x)dx$ ни ҳисоблагандаги dx нинг қийматига тенг деб қаралади.

$f(x)$ нинг учинчи, тўртинчи ва ҳ. к. тартибдаги дифференциаллари худди шунга ўхшаш таърифланади.

Умуман, $f(x)$ функциянинг n -тартибли дифференциали $d^n f(x)$ ни

$$d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x))$$

деб таърифланади.

Функциянинг ҳосилалари билан унинг дифференциаллари орасида

$$d^n y = y^{(n)} dx^n \quad \text{ёки} \quad d^n f(x) = f^{(n)}(x) dx^n \quad (10)$$

боғланиш мавжуд.

37-мисол. Ушбу $y = \ln x$ функциянинг 100-тартибли дифференциалини топинг.

а. (10) формулага кўра

$$d^{100}y = d^{100}(\ln x) = (\ln x)^{100} dx^{100}$$

бўлади. Агар

$$(\ln x)^{(100)} = \frac{(-1)^{100-1} (100-1)!}{x^{100}} = -\frac{99!}{x^{100}}$$

бўлишини ҳисобга олсак, унда

$$d^{100}y = -\frac{99!}{x^{100}} dx^{100}$$

эгани келиб чиқади.

4°. Содда қондалар ва асосий формулалар

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар x_0 нуқтанинг бирор атрофида аниқланган бўлиб, улар шу атрофда $f^{(n)}(x)$ ва $g^{(n)}(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда

$$1) d^n(c \cdot f(x)) = c \cdot d^n f(x), \quad c = \text{const},$$

$$2) d^n(f(x) \pm g(x)) = d^n f(x) \pm d^n g(x),$$

$$3) \quad d^n(f(x) \cdot g(x)) = d^n f(x) \cdot g(x) + C_n^1 d^{n-1} f(x) \cdot dg(x) + \\ + C_n^2 d^{n-2} f(x) \cdot d^2 g(x) + \dots + C_n^{n-1} df(x) d^{n-1} g(x) + \\ + f(x) d^n g(x)$$

(Лейбниц формуласи) бўлади.

Энди асосий формулаларни келтирамиз:

$$1) \quad y = a^x \text{ бўлса, } d^n y = a^x \ln^n a dx^n.$$

$$2) \quad y = e^x \text{ бўлса, } d^n y = e^x dx^n.$$

$$3) \quad y = \sin x \text{ бўлса, } d^n y = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) dx^n.$$

$$4) \quad y = \cos x \text{ бўлса, } d^n y = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) dx^n.$$

$$5) \quad y = \ln x \text{ бўлса, } d^n y = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n} dx^n.$$

$$6) \quad y = \frac{1}{x} \text{ бўлса, } d^n y = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} dx^n.$$

$$7) \quad y = x^m \text{ бўлса, } d^n y = m(m-1) \dots (m-n+1) \times \\ \times x^{m-n} dx^n,$$

$$8) \quad y = (1+x)^\alpha \text{ бўлса, } d^n y = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} dx^n.$$

38-мисол. Агар $y = f(x)$ функция n -тартибли ҳосиллага эга бўлса,

$$d^n f(ax+b) = a^n f^{(n)}(ax+b) dx^n$$

бўлишини кўрсатинг (a, b — ўзгармас сонлар).

(10) формулага кўра

$$d^n f(ax+b) = [f(ax+b)]^n dx^n$$

бўлади. Энди $f(ax+b)$ нинг n — тартибли ҳосиласини ҳисоблаймиз. Равшанки,

$$[f(ax+b)]' = f'(ax+b) \cdot (ax+b)' = a \cdot f'(ax+b),$$

$$[f(ax+b)]'' = [af'(ax+b)]' = a [f'(ax+b)]' = \\ = a \cdot f''(ax+b) \cdot (ax+b)' = a^2 f''(ax+b),$$

$$[f(ax+b)]''' = [a^2 \cdot f''(ax+b)]' = a^2 [f''(ax+b)]' = \\ = a^2 \cdot f'''(ax+b) \cdot (ax+b)' = a^3 f'''(ax+b).$$

Бу муносабатлардан фойдаланиб қаралаётган функциянинг n — тартибли ҳосиласи учун ушбу

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b) \quad (11)$$

формулани ёзамиз. Унинг тўғрилигини математик индукция усули ёрдамида кўрсатиш қийин эмас. Маълумки, $k=1$ да

$$[f(ax+b)]' = a \cdot f'(ax+b).$$

Энди (11) муносабат $k(k > 1)$ да ўринли, яъни

$$[f(ax+b)]^{(k)} = a^k \cdot f^{(k)}(ax+b)$$

бўлсин деб, унинг $k+1$ да ўринли бўлишини кўрсатамиз.

Таърифга кўра:

$$[f(ax+b)]^{(k+1)} = \{[f(ax+b)]^{(k)}\}'.$$

Шунинг учун

$$\begin{aligned} [f(ax+b)]^{(k+1)} &= \{[f(ax+b)]^{(k)}\}' = \\ &= [a^k \cdot f^{(k)}(ax+b)]' = a^k [f^{(k)}(ax+b)]' = \\ &= a^k \cdot f^{(k+1)}(ax+b)(ax+b)' = a^{k+1} \cdot f^{(k+1)}(ax+b) \end{aligned}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса (11) формула ихтиёрий n учун ўринли бўлишини билдиради.

Демак,

$$d^n f(ax+b) = [f(ax+b)]^{(n)} dx^n = a^n \cdot f^{(n)}(ax+b) dx^n.$$

39-мисол. Агар u — ўзгарувчи x нинг икки марта дифференциалланувчи функцияси экани маълум бўлса, унда ушбу

$$y = e^u$$

функциянинг иккинчи тартибли дифференциалини топинг.

Бу функциянинг дифференциалларини, юқорида келтирилган қондалардан фойдаланиб, кетма-кет ҳисоблаймиз:

$$dy = d(e^u) = e^u du,$$

$$\begin{aligned} d^2 y &= d(dy) = d(e^u du) = d(e^u) du + e^u d(du) = \\ &= e^u du du + e^u d^2 u = e^u (du)^2 + e^u d^2 u = e^u (du^2 + d^2 u). \end{aligned}$$

Мисол ва масалалар

1. Қуйидаги функцияларнинг иккинчи тартибли ҳосилаларини топинг:

$$191. y = x \sqrt{1+x^2}.$$

$$194. y = e^{-x^2}.$$

$$192. y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$195. y = \operatorname{tg}^2 x.$$

$$193. y = x \ln x.$$

$$196. y = [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)].$$

$$197. y = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x.$$

$$198. y = e^{\sqrt{x}}.$$

$$199. y = e^{\sin x} \cos(\sin x).$$

$$200. y = \cos^3 x.$$

$$201. y = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x.$$

$$202. y = x^x.$$

$$203. y = x(\cos \ln x + \sin \ln x).$$

2. Қуйидаги функцияларнинг n -тартибли ҳосилаларини топинг:

$$204. y = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n.$$

$$205. y = \sin^4 x + \cos^4 x.$$

$$206. y = \sin ax \cos bx.$$

$$207. y = \frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

$$208. y = (x-1)^{2x-1}.$$

$$209. y = \ln(x-1)^{2x}.$$

$$210. y = x \ln \frac{3+x}{3-x}.$$

$$211. y = x \cos^3 x.$$

$$212. y = \frac{x}{\sqrt{1-5x}}.$$

$$213. y = \frac{x^2}{\sqrt{1-2x}}.$$

$$214. y = e^{ax} \cos(bx + c).$$

$$215. y = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}.$$

$$216. y = x^{n-1} \ln x.$$

$$217. y = \operatorname{arctg} x.$$

$$218. y = x \sin x \cos 2x,$$

$$n = 100, x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$219. y = (x - \sin x)^3,$$

$$n = 16, x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$220. y = \operatorname{ch} ax \sin bx.$$

3. Қуйидаги функцияларнинг $x=0$ нуктада печанчи тартибли ҳосилаларга эга эканлигини аниқланг ва бу ҳосилаларни топинг.

$$221. f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \\ \ln(1+x) - x, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$222. f(x) = \begin{cases} 2x \cos x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \\ \sin 2x, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$223. f(x) = \begin{cases} x^{10}, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ -x^{10}, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса.} \end{cases}$$

$$224. f(x) = \begin{cases} x^{100} \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$225. f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

226. Қуйидаги формулани исботланг.

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left(\ln x - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} \right).$$

227. Қуйидаги формулани исботланг:

$$\left(x^{n-1} f \left(\frac{1}{x} \right) \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)} \left(\frac{1}{x} \right),$$

бу ерда $f^{(n)}(x)$ мавжуд деб ҳисобланади.

228. Агар $P_{n,m}(x) = \frac{d^n}{dx^n} (1-x^m)^n$ $m > 0$ бўлса, $P_{n,m}(1)$

ни топинг.

Агар du , d^2u , dv , d^2v лар мавжуд бўлса, қуйидаги функциялар учун d^2y ни топинг:

229. $y = e^{uv}$

234. $y = u \ln v$.

230. $y = \frac{2u+v}{u}$.

235. $y = u^v$.

231. $y = \operatorname{arctg} \left(\frac{v}{u} \right)$.

236. $y = \frac{u}{v}$.

232. $y = \ln \sqrt{u^2+v^2}$.

237. $y = \sqrt{u^2+v^2}$.

233. $y = u(2+v)$.

238. $y = u^{100} \cdot v^{101}$.

VI боб

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБНИНГ АСОСИЙ ТЕОРЕМАЛАРИ

1-§. ТЕОРЕМАЛАР

1°. Ферма теоремаси. $y = f(x)$ функция бирор x оралиқда аниқланган ва бу оралиқнинг ички c нуқтасида ўзининг энг катта (энг кичик) қийматига эришсин. Агар бу нуқтада функция чекли $f'(c)$ ҳосилга эга бўлса, у ҳолда

$$f'(c) = 0$$

бўлади.

2° Ролль теоремаси. $y = f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Агар бу функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилга эга бўлиб, $f(a) = f(b)$ бўлса, у ҳолда шундай $c (a < c < b)$ нуқта топиладики,

$$f'(c) = 0$$

бўлади.

3°. Лагранж теоремаси. $y = f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Агар бу функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда шундай $c (a < c < b)$ нуқта топиладики, бу нуқтада

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

бўлади.

4°. Коши теоремаси. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Агар бу функциялар (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлиб, $\forall x \in (a, b)$ учун $g'(x) \neq 0$ бўлса, у ҳолда шундай $c (a < c < b)$ нуқта топиладики,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

бўлади.

1-мисол. Ушбу $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$ функция $(-1, 1)$ интервалнинг ички $x = 0$ нуқтасида ўзининг энг кичик қийматига эришса ҳам, бу функция учун Ферма теоремасининг хулосаси ўринли эмас. Шунинг кўрсатинг.

Берилган функция $x = 0$ нуқтада ўзининг энг кичик қийматига эришади. Бироқ функция шу $x = 0$ нуқтада чекли ҳосилага эга эмас. Бу ушбу

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x^2} - 1}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$$

нисбатнинг $\Delta x \rightarrow 0$ да чекли лимитга эга эмаслигидан келиб чиқади. Демак, Ферма теоремасининг шarti бажарилмайди. Бинобарин, теореманинг хулосаси ўринли эмас.

2-мисол. Ушбу $f(x) = \sin x$ функция учун $[0, 2\pi]$ сегментда Ролль теоремасининг шартлари бажариладими?

Равшанки, $f(x) = \sin x$ функция $[0, 2\pi]$ сегментда узлуксиз ҳамда $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$ ҳосилага эга. Бу функциянинг $[0, 2\pi]$ сегментнинг четки нуқталаридаги қийматлари $f(0) = 0$, $f(2\pi) = 0$ бўлиб, улар бир-бирига тенг. Демак, берилган функция $[0, 2\pi]$ сегментда Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. $[0, 2\pi]$ сегментнинг $c_1 = \frac{\pi}{2}$, $c_2 = \frac{3}{2}\pi$ нуқталарида функциянинг ҳосилалари нолга айланади:

$$f'(c_1) = \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad f'(c_2) = \cos \frac{3}{2}\pi = 0.$$

3-мисол. Ушбу $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$, $f(0) = 0$ ($0 \leq x \leq 1$)

функция ҳосиласини нолга айлантирадиган нуқталардан тузилган $\{c_n\}$ кетма-кетликнинг лимити ноль бўлишини кўрсатинг.

Равшаники, берилган функция $[0,1]$ сегментда узлуксиз, $(0,1)$ интервалда ҳосилага эга ва $f(0) = f(1) = 0$. Демак, функция $[0,1]$ сегментда Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. $[0,1]$ сегментни қуйидаги

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], \dots, \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \dots$$

сегментчаларга ажратамиз. Ҳар бир $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ сегментда ($n = 1, 2, \dots$) $f(x)$ функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Бинобарин, $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ сегментда ($n = 1, 2, \dots$) шундай c_n нуқта $\left(\frac{1}{n+1} < c_n < \frac{1}{n}\right)$ топиладики, $f'(c_n) = 0$ бўлади.

Агар

$$\frac{1}{n+1} < c_n < \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$$

эгани келиб чиқади.

4-мисол. Агар $f(x)$ функция: 1) $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз, 2) (a, b) интервалда n -тартибли ҳосилага эга, 3) ушбу $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ ($a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$) нуқталарда

$$f(a) = f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_{n-1}) = f(b) = 0$$

бўлса, у ҳолда (a, b) да камида битта c нуқта топиладики,

$$f^{(n)}(c) = 0$$

бўлади. Шунини исботланг.

$[a, b]$ сегментни юқорида айtilган $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ нуқталар ёрдамида n та

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b]$$

сегментларга ажратамиз. $f(x)$ функция ҳар бир сегментда Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Унда Ролль теоремасига кўра шундай $c_1, c_2, \dots, c_n$ нуқталар ($a < c_1 < x_1, x_1 < c_2 < x_2, \dots, x_{n-1} < c_n < b$) топиладики,

$$f'(c_1) = f'(c_2) = \dots = f'(c_n) = 0$$

бўлади. Энди

$$[c_1, c_2], [c_2, c_3], \dots, [c_{n-1}, c_n]$$

сегментларни қарайлик. Бу сегментларнинг ҳар бирида $f'(x)$ функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Ролль теоремасига мувофиқ шундай $c'_1, c'_2, \dots, c'_{n-1}$ нуқталар ($c_1 < c'_1 < c_2, c_2 < c'_2 < c_3, \dots, c_{n-1} < c'_{n-1} < c_n$) топиладики,

$$f''(c'_1) = f''(c'_2) = \dots = f''(c'_{n-1}) = 0$$

бўлади. Энди

$$[c'_1, c'_2], [c'_2, c'_3], \dots, [c'_{n-2}, c'_{n-1}]$$

сегментларни қарайлик. Бу сегментларнинг ҳар бирида $f''(x)$ функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Ролль теоремасига кўра шундай $c''_1, c''_2, \dots, c''_{n-2}$ нуқталар ($c'_1 < c''_1 < c'_2, c'_2 < c''_2 < c'_3, \dots, c'_{n-2} < c''_{n-2} < c'_{n-1}$) топиладики,

$$f'''(c''_1) = f'''(c''_2) = \dots = f'''(c''_{n-2}) = 0$$

бўлади.

Шу жараёни давом эттириб $(n-1)$ -қадамдан кейин $[c_1^{(n-1)}, c_2^{(n-1)}]$ сегментга келамизки, бу сегментда $f^{(n-1)}(x)$ функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Унда Ролль теоремасига кўра шундай c нуқта ($c_1^{(n-1)} < c < c_2^{(n-1)}$) топиладики,

$$f^{(n)}(c) = 0 \quad \text{!}$$

бўлади.

5-мисол. Агар $f(x)$ функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлса, унинг шу интервалда текис узлуксиз бўлишини исботланг.

Модомики, $f'(x)$ чекли экан, унда шундай ўзгармас $M > 0$ сон топиладики, $\forall x \in (a, b)$ учун $|f'(x)| \leq M$ бўлади.

(a, b) интервалда ихтиёрий x_1 ва x_2 нуқталарни олайлик: $x_1, x_2 \in (a, b)$. Унда Лагранж теоремасига кўра

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(c)| \cdot |x_2 - x_1|$$

бўлади. Демак,

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq M \cdot |x_2 - x_1|.$$

Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам $\delta = \delta(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{M}$ дейилса,

у ҳолда

$$|x_2 - x_1| < \delta < \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

бўлади. Бу эса $f(x)$ функциянинг (a, b) да текис узлуксиз бўлишини билдиради.

6-мисол. Ушбу $f(x) = x^2 + 3$ функция $[-1, 2]$ сегментда Лагранж теоремасининг шартларини қаноатлантирадими?

Равшанки, берилган функция $[-1, 2]$ сегментда узлуксиз ва $(-1, 2)$ интервалда $f'(x) = 2x$ ҳосилага эга. Демак, $f(x) = x^2 + 3$ функция $[-1, 2]$ сегментда Лагранж теоремасининг шартларини қаноатлантиради. Лагранж теоремасига кўра шундай c нуқта $(-1 < c < 2)$ топиладики,

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = f'(c) = 2c$$

бўлади. Кейинги тенгликдан $c = \frac{1}{2}$ эканини топамиз.

7-мисол. Ушбу

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b} \quad (0 < b < a)$$

тенгсизликини исботланг.

$[b, a]$ сегментда $f(x) = \ln x$ функцияни қарайлик. Бу функция шу сегментда узлуксиз ва (b, a) интервалда $f'(x) = \frac{1}{x}$ ҳосилага эга. Унда Лагранж теоремасига кўра шундай c нуқта $(b < c < a)$ топиладики,

$$\frac{\ln a - \ln b}{a - b} = \frac{1}{c}$$

бўлади. Равшанки,

$$b < c < a \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{c} < \frac{1}{b}.$$

Демак,

$$\frac{1}{a} < \frac{\ln a - \ln b}{a - b} < \frac{1}{b}.$$

Кейинги тенгсизликлардан эса

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$$

бўлиши келиб чиқади.

8-мисол. Агар $x \geq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$$

тенгликни исботланг. Бунда

$$\frac{1}{4} \leq \theta(x) < \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \theta(x) = \frac{1}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \theta(x) = \frac{1}{2}$$

бўлишини ҳам кўрсатинг.

Ушбу

$$f(y) = \sqrt{y}$$

функцияни $[x, x+1]$ сегментда ($x \geq 0$) қарайлик. Бу функция шу сегментда узлуксиз, $(x, x+1)$ да $f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ ҳо

силага эга. Унда чекли орттирмалар формуласи

$$F(t+\Delta t) - F(t) = F'(t+\theta(t) \cdot \Delta t) \Delta t$$

га кўра

$$f(x+1) - f(x) = f'(x+\theta(x)) \cdot 1,$$

яъни

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$$

бўлади. Бу тенгликдан топамиз:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} &= \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}} \Rightarrow 2\sqrt{x+\theta(x)} = \\ &= \sqrt{x+1} + \sqrt{x} \Rightarrow 4(x+\theta(x)) = x+1 + x + \\ &+ 2\sqrt{x(x+1)} \Rightarrow 4\theta(x) = 1 + 2\sqrt{x(x+1)} - 2x \Rightarrow \\ &\Rightarrow \theta(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\sqrt{x(x+1)} - x). \end{aligned}$$

Кейинги тенгликдан эса

$$\lim_{x \rightarrow +0} \theta(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\sqrt{x(x+1)} - x) \right] = \frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{x(x+1)} - x}{2} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{4} + \frac{x^2 + x - x^2}{2(\sqrt{x(x+1)} + x)} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 2} \right] = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$\theta(x)$ функциянинг

$$\theta(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 2}$$

ифодасидан, унинг $(0, +\infty)$ оралиқда ўсувчи эканини топамиз. Демак,

$$\frac{1}{4} \leq \theta(x) < \frac{1}{2}$$

бўлади.

9-мисол. Ушбу

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

функциялар $[-3, 3]$ сегментда Коши теоремасининг шартларини қаноатлантирадими?

Берилган функциялар $[-3, 3]$ сегментда узлуксиз, $(-3, 3)$ да

$$f'(x) = e^x, \quad g'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

ҳосилаларга эга. Бироқ, $g'(0) = 0$. Демак, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар Коши теоремасининг шартларини қаноатлантирмайди.

10-мисол. Агар $f(x)$ функция $[x_1, x_2]$ сегментда $(x_1, x_2 > 0)$ дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда ушбу

$$\frac{1}{x_1 - x_2} \left| \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{matrix} \right| = f(c) - cf'(c)$$

$(x_1 < c < x_2)$ тенгликнинг ўринли бўлишини исботланг.

Иккита

$$\alpha(x) = \frac{f(x)}{x}, \quad \beta(x) = \frac{1}{x}$$

функцияларни олайлик. Модомики, $x_1 \cdot x_2 > 0$ экан, $x \neq 0 \notin [x_1, x_2]$ бўлади. Бу функциялар $[x_1, x_2]$ сегментда узлуксиз, (x_1, x_2) да

$$\alpha'(x) = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2}, \quad \beta'(x) = -\frac{1}{x^3}$$

ҳосилаларга эга ва $\beta(x) \neq 0$ ($x \in [x_1, x_2]$). Демак, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ функциялар Коши теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Унда Коши теоремасига кўра шундай c нуқта ($x_1 < c < x_2$) топилдики,

$$\frac{\alpha(x_2) - \alpha(x_1)}{\beta(x_2) - \beta(x_1)} = \frac{\alpha'(c)}{\beta'(c)}$$

бўлади. Кейинги тенгликдан топамиз:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{f(x_2)}{x_2} - \frac{f(x_1)}{x_1}}{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}} &= \frac{\frac{cf'(c) - f(c)}{c^3}}{-\frac{1}{c^3}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2} &= -[cf'(c) - f(c)] \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{x_1 - x_2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} &= f(c) - cf'(c). \end{aligned}$$

Мисол ва масалалар

1. $f(x) = x(x^2 - 1)$ функция учун $[-1, 1]$ ва $[0, 1]$ оралиқларда Ролль теоремасининг шартларини текширинг.

2. $f(x) = (x^2 - 1)(x - 2)$ функция учун $(-1, 1)$ ва $(1, 2)$ интервалларда шундай нуқталар топингки, бу нуқталарда функция графигига ўтказилган уринма абсциссалар ўқига параллел бўлсин.

3. Ҳақиқий коэффициентли кўпхад фақат ҳақиқий илдизларга эга бўлса, унинг ҳосилалари ҳам фақат ҳақиқий илдизларга эга эканини исботланг.

4. Шундай $\xi \in (a, b)$ мавжуд бўлиб, $f'(\xi) = 0$ бўлиши учун, Ролль теоремасининг шартлари зарур ва етарлими?

$$5. f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция учун $[-1, 1]$ оралиқда Лагранж теоремаси ўринлими?

Лагранж теоремасидан фойдаланиб қуйидаги тенгсизликларни исботланг:

$$6. \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \quad x > 0.$$

$$7. e^x > ex, \quad x > 1.$$

$$8. e^x > 1 + x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$9. |\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

$$10. |\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leq |a - b|.$$

$$11. x^\alpha |\ln x| < \frac{1}{2e}, \quad 0 < x < 1, \quad \alpha > 0.$$

12. $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ функциялар учун $[-1, 1]$ оралиқда Коши теоремаси ўринлими?

13. Агар $f(x)$ функция $x > 0$ нуқталарда дифференциалланувчи бўлиб, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ бўлса, у ҳолда $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ эканини исботланг.

14. Агар $f(x)$ функция $x > 0$ нуқталарда дифференциалланувчи бўлиб, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ бўлса, у ҳолда $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| = 0$ эканини исботланг.

15. Агар $f(x)$ функция чекли (a, b) интервалда дифференциалланувчи ва чегараланмаган бўлса, у ҳолда унинг ҳосиласи ҳам чегараланмаганлигини исботланг.

16. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда дифференциалланувчи бўлиб, $f(a) = f(b)$ бўлса, у ҳолда $\exists \xi \in (a, b)$ бўлиб, $f(a) - f(\xi) = \frac{1}{2} \xi f'(\xi)$ муносабат ўринлилигини исботланг.

2. §. ТЕЙЛОР ФОРМУЛАСИ

1°. Функциянинг Тейлор формуласи (локаль формула).

$y = f(x)$ функция x_0 нуқтанинг ($x_0 \in \mathbb{R}$) бирор атрофида берилган бўлсин. Агар функция x_0 нуқтанинг шу атрофида $f'(x)$, $f''(x)$, $\dots$, $f^{(n-1)}(x)$ ҳосилаларга эга бўлиб, x_0 нуқтада n -тартибли $f^{(n)}(x_0)$ ҳосиллага эга бўлса, у ҳолда

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \\ &+ o((x - x_0)^n) \quad (f^{(0)}(x) = f(x)) \end{aligned} \quad (1)$$

бўлади. Бу Тейлор формуласидир.

2°. Маклорен формуласи.

Агар (1) формулада $x_0 = 0$ деб олсак, унда ушбу

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \\ + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n) \quad (2)$$

формула ҳосил бўлади. Бу Маклорен формуласидир.

Ушбу $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = (1+x)^m$, $f(x) = \ln(1+x)$ функциялар учун (2) Маклорен формуласи қуйидагича бўлади:

$$1) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$2) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \\ + o(x^{2n}),$$

$$3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$4) (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots \\ + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

$$5) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \\ + o(x^n).$$

3°. Тейлор формуласи (оралиқ учун).

$y = f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда берилган бўлсин. Агар функция шу сегментда $f'(x)$, $f''(x)$, $\dots$, $f^{(n)}(x)$ ҳосилаларга эга бўлиб, x_0 нуқтада ($a < x_0 < b$) $f^{(n+1)}(x)$ ҳосиллага эга бўлса, у ҳолда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

бўлади. Бу Тейлор формуласидир. $R_n(x)$ ни Тейлор формуласининг қолдиқ ҳади дейилади. У қуйидаги кўринишларга эга:

$$1) R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} (1-\theta)^n \quad (\text{Коши кўриниши}). \\ (c = x_0 + \theta(x-x_0), \quad 0 < \theta < 1).$$

$$2) R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad (\text{Лагранж кўриниши}),$$

$$(c = x_0 + \theta(x-x_0), \quad 0 < \theta < 1).$$

11-мисол. Ушбу $f(x) = \sqrt{x}$ функцияни $x=1$ нинг манфий бўлмаган даражалари бўйича ёйилмасининг учта ҳадини топинг.

Бу ҳол учун (1) формула ушбу

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!} (x-1) + \frac{f''(1)}{2!} (x-1)^2 + 0((x-1)^3)$$

кўринишда бўлади. Берилган функциянинг ҳосилаларини топамиз:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}}.$$

Равшанки,

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = \frac{1}{2}, \quad f''(1) = -\frac{1}{4}.$$

Демак,

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + 0((x-1)^3).$$

12-мисол. Агар $x \rightarrow 0$ да

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + 0(x)$$

бўлса,

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = \sqrt[e]{e}$$

бўлишини исботланг.

Ушбу

$$y = [f(x)]^{\frac{1}{x}}$$

функцияни қарайлик. Уни қуйидагича

$$y = e^{\ln [f(x)]^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x} \ln f(x)}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Агар

$$\ln f(x) = \ln \left[1 + \frac{1}{2}x + 0(x) \right]$$

ҳамда

$$\ln \left[1 + \frac{1}{2}x + o(x) \right] = \frac{1}{2}x + o(x)$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$y = e^{\frac{1}{x} \left(\frac{1}{2}x + o(x) \right)} = e^{\frac{1}{2} + \frac{o(x)}{x}}$$

бўлишини топамиз. Кейинги тенгликдан

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{\frac{1}{2} + \frac{o(x)}{x}} \right) = \sqrt{e}$$

эканлиги келиб чиқади.

13-мисол. Тейлор формуласидан фойдаланиб ушбу

$$\alpha = \sin 36^\circ, \quad \beta = (1,2)^{1,1}$$

миқдорларни тақрибий ҳисобланг.

(3) формулага асосланиб

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

муносабатга ва ундан ушбу

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

тақрибий формулага келамиз. Бу тақрибий формуладан фойдаланиб, топамиз:

$$\alpha = \sin 36^\circ = \sin \frac{\pi}{5} \approx \frac{\pi}{5} - \frac{1}{6} \cdot \frac{\pi^3}{125} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{\pi^5}{5^5} \approx 0,588.$$

Демак,

$$\alpha \approx 0,588.$$

(3) формулага асосланган ҳолда

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$$

бўлишига эга бўламиз. Бундан эса

$$(1+x)^m \approx 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2$$

тақрибий формулага келамиз.

Энди шу формуладан фойдаланиб β миқдорни тақрибий ҳисоблаймиз:

$$\beta = (1,2)^{1,1} = 1,2 \cdot (1,2)^{0,1} = 1,2 \cdot (1 + 0,2)^{0,1} \approx \\ \approx 1,2(1 + 0,1 \cdot 0,2 + \frac{0,1 \cdot (-0,9)}{2} \cdot 0,2^2) \approx 1,121.$$

Демак,

$$\beta \approx 1,121.$$

14-мисол. (3) формулалардан фойдаланиб ушбу

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3},$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$$

лимитларни топинг.

а) да кўрсатилган лимитни топишда (3) формуланинг қуйида

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + 0(x^3),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + 0(x^5)$$

қолидан фойдаланамиз.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + 0(x^3) \right] \left[x - \frac{x^3}{3!} + 0(x^5) \right] - x(1+x)}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) x^3 + 0(x^3) - x - x^2}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} x^3 + 0(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Демак,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

б) да кўрсатилган лимитни топишда (3) формуланинг

$$\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{x} \right)^2 + 0 \left(\frac{1}{x^3} \right)$$

қолидан фойдаланамиз.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] = \frac{1}{2}.$$

Демак,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = \frac{1}{2}.$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларни Маклорен формуласи бўйича $O(x^2)$ ҳадгача ёйинг:

17. $f(x) = e^{tg x}$.

18. $f(x) = e^{\sqrt{1+2x}}$.

19. $f(x) = \ln \cos x$.

Қуйидаги функцияларни Маклорен формуласи бўйича $O(x^3)$ ҳадгача ёйинг:

20. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

21. $f(x) = \sqrt[3]{1+3 \sin x}$.

22. $f(x) = \ln(1 + \arcsin x)$.

23. $f(x) = \operatorname{arctg}(\sin x)$.

Қуйидаги функцияларни Маклорен формуласи бўйича $O(x^n)$ ҳадгача ёйинг:

24. $f(x) = e^{5x-1}$.

25. $f(x) = \sin(2x+3)$.

26. $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} + 2\right)$.

27. $f(x) = \ln(e^x + 2)$.

28. $f(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$.

29. $f(x) = 3^{2-x}$.

30. $f(x) = (x^2 - x)e^{-x}$.

31. $f(x) = \ln \frac{1+2x}{1-x}$.

32. $f(x) = \ln(2+x-x^2)$.

$$33. f(x) = \frac{x^2 + 3e^x}{e^{2x}}.$$

$$34. f(x) = \frac{x^3}{x-1}.$$

$$35. f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x - 3}.$$

$$36. f(x) = \frac{1 - 2x^2}{2 + x - x^2}.$$

Қуйидаги функцияларни Тейлор формуласи бўйича x_0 нуқтанинг атрофида $O((x - x_0)^2)$ ҳадгача ёйинги

$$37. f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 2.$$

$$38. f(x) = \sin(2x - 3), \quad x_0 = 1.$$

$$39. f(x) = xe^{2x}, \quad x_0 = -1.$$

$$40. f(x) = x^2 e^{-2x}, \quad x_0 = -1.$$

$$41. f(x) = (x^2 - 1)e^{2x}, \quad x_0 = -1.$$

$$42. f(x) = \sin(x + 1) \sin(x + 2), \quad x_0 = -1.$$

$$43. f(x) = \ln(2x + 1), \quad x_0 = \frac{1}{2}.$$

$$44. f(x) = \ln \sqrt[3]{7x - 2}, \quad x_0 = 1.$$

$$45. f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1} \ln x, \quad x_0 = 1.$$

$$46. f(x) = \frac{2x}{1 - x^2}, \quad x_0 = 2.$$

Қуйидаги лимитларни ҳисобланг:

$$47. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x) - x}{x^2}.$$

$$48. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

$$49. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}.$$

$$50. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}.$$

$$51. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \arcsin x}{x^3}.$$

$$52. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x}.$$

$$53. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+x)^x} - e}{x}.$$

$$54. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^2}.$$

$$55. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}.$$

$$56. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{tg} x) - x}{x^3}.$$

$$57. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - x \cos x}{\ln^3(1-x)}.$$

$$58. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left(\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x \right)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$59. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^3 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - x^2 + \frac{x}{2} \right).$$

$$60. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + 1 \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt[4]{x^{12} - x^9 + 2} \right).$$

$$61. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\sin \pi x)}{\ln(1 + \ln x)}.$$

$$62. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - e^{\operatorname{tg} x - 2x^2}}{\cos x}.$$

$$63. \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[(2e)^x + e^x - 2 \right].$$

$$64. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \operatorname{tg} x} \right).$$

$$65. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 - \frac{x}{2} - (x^3 + x + 1) \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right).$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБНИНГ БАЪЗИ ТАТБИҚЛАРИ

1-§. ФУНКЦИЯНИНГ ЎСУВЧИЛИГИ ҲАМДА КАМАЮВЧИЛИГИ

Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция X ораллиқда ($X \subset R$) берилган бўлсин. Маълумки,

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

бўлса, $f(x)$ функция X да ўсувчи,

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

бўлса, $f(x)$ функция X да камаювчи дейилар эди.

Функция ҳосиласи ёрдамида унинг ўсувчилигини ҳамда камаювчилигини аниқлаш мумкин.

1-теорема. $f(x)$ функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосиллага эга бўлсин. Бу функция шу интервалда ўсувчи бўлиши учун (a, b) да

$$f'(x) \geq 0$$

бўлиши зарур ва етарли.

2-теорема. $f(x)$ функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосиллага эга бўлсин. Бу функция шу интервалда камаювчи бўлиши учун (a, b) да

$$f'(x) \leq 0$$

бўлиши зарур ва етарли.

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{x^2}{10} - \ln x$$

функцияни ўсувчи ва камаювчи бўлишга текширинг.

Бу функция $(0, +\infty)$ да аниқлангандир. Унинг ҳосиласи

$$f'(x) = \frac{x}{5} - \frac{1}{x}$$

бўлади. Энди

$$f'(x) \geq 0, \quad \text{яъни} \quad \frac{x}{5} - \frac{1}{x} \geq 0$$

ёки

$$f'(x) \leq 0, \quad \text{яъни} \quad \frac{x}{5} - \frac{1}{x} \leq 0$$

бўлишга текшираимиз:

$$\frac{x}{5} - \frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 5}{5x} \geq 0 \Leftrightarrow x(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) \geq 0.$$

Бундан эса, $(\sqrt{5}, +\infty)$ да $f'(x) \geq 0$, $(0, \sqrt{5})$ да $f'(x) \leq 0$ бўлишини топамиз. Демак, берилган функция $(0, \sqrt{5})$ да камаювчи, $(\sqrt{5}, +\infty)$ да ўсувчи бўлади.

2-мисол. Ушбу

$$f(x) = \ln |x|$$

функциянинг ўсувчи ва камаювчи бўладиган оралиқларини топим.

Бу функция $R \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ да аниқланган. Унинг ҳосиласи

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

бўлади. Бундан эса, $x > 0$ бўлганда $f'(x) > 0$ бўлади, $x < 0$ бўлганда $f'(x) < 0$ бўлади. Демак, берилган функция $(-\infty, 0)$ да камаювчи, $(0, +\infty)$ да ўсувчи бўлади.

3-мисол. Ҳосиласи

$$f'(x) = \frac{5}{3-2x-x^2} - 1$$

бўлган $f(x)$ функциянинг ўсувчилиги ҳамда камаювчилиги тўғрисида нима дейиш мумкин.

Бу масалани ҳал қилиш учун

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{ёки} \quad f'(x) \leq 0$$

тенгсизликларни ечиш лозим.

Энди

$$f'(x) = \frac{5}{3-2x-x^2} - 1 < 0$$

тенгсизликни ечамиз:

$$\begin{aligned} \frac{5}{3-2x-x^2} - 1 < 0 &\Leftrightarrow \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x-3} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2+2x+1+1}{(x+3)(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2+1}{(x+3)(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x+3)(x-1) > 0. \end{aligned}$$

Демак, $(-\infty; -3) \cup (1, +\infty)$ да $f'(x) < 0$ бўлади. $(-3, 1)$ оралиқда эса $f'(x) > 0$ бўлади. Шундай қилиб, берилган функция $(-\infty - 3) \cup (1, +\infty)$ да камаювчи, $(-3, 1)$ оралиқда эса ўсувчи бўлади.

4-мисол. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар: 1) $[a, b]$ сегментда аниқланган ва шу сегментда чекли $f'(x)$, $g'(x)$ ҳосилаларга эга; 2) $f'(x) \geq g'(x)$ ($x \in [a, b]$); 3) $f(a) = g(a)$ бўлса, у ҳолда $[a, b]$ ярим интервалда $f(x) \geq g(x)$ бўлишини исботланг.

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар айирмасини $\varphi(x)$ билан белгилеймиз:

$$\varphi(x) = f(x) - g(x).$$

Унда $\varphi'(x) = f'(x) - g'(x)$ бўлиб, 2) шартга кўра $\varphi'(x) \geq 0$ бўлади. Демак, $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ да ўсувчи. Агар $\varphi(a) = f(a) - g(a) = 0$ бўлишини эътиборга олсак, унда $[a, b]$ ярим интервалда $\varphi(x) > 0$ эканлигини топамиз. Демак,

$$\varphi(x) > 0 \Rightarrow f(x) - g(x) > 0 \Rightarrow f(x) > g(x).$$

Шундай қилиб, (a, b) да

$$f(x) > g(x)$$

бўлади.

5-мисол. Ушбу

$$\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$$

тенгсизлиكنи исботланг.

Бу тенгсизлиكنи исботлашда 4-мисолда келтирилган шартлардан фойдаланамиз. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар сифатида

$$f(x) = \ln(1+x), \quad g(x) = x - \frac{x^2}{2}$$

функцияларни олайлик. Бу функциялар учун $(0, +\infty)$ оралиқда 4-мисолдаги шартлар бажарилади:

$$1) f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad g'(x) = 1-x;$$

2) $(0, +\infty)$ оралиқда

$$\frac{1}{1+x} > 1-x$$

бўлади (чунки $1-x^2 < 1 \Rightarrow (1-x)(1+x) < 1 \Rightarrow 1-x < \frac{1}{1+x}$);

3) $f(0) = \ln 1 = 0$, $g(0) = 0 \Rightarrow f(0) = g(0)$.
 Унда $f(x) > g(x)$, яъни

$$\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$$

бўлади.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг ўсувчи ва камаювчи бўлаган оралиқларини топинг.

1. $f(x) = 3x - x^3$.

2. $f(x) = \frac{2x}{1+2x}$.

3. $f(x) = x + \sin x$.

4. $f(x) = 8x^3 - x^4$.

5. $f(x) = (x-1)^3(2x+3)^3$.

6. $f(x) = xe^{-3x}$.

7. $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

8. $f(x) = x + |\sin 2x|$

9. $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$.

10. $f(x) = x^2 \ln x$.

11. $f(x) = e^{\pi x} \cos \pi x$.

12. $f(x) = x^2 2^{-x}$.

13. $f(x) = x^2 - \ln x^2$.

14. $f(x) = x^n e^{-x}$, ($n > 0$, $x \geq 0$).

15. $f(x) = x \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x \right)$, $x > 0$, $f(0) = 0$.

16. $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$.

17. $f(x) = x \sqrt{(x+1)^3}$.

18. $f(x) = \operatorname{arctg} x - \ln x$.

19. $f(x) = 3^{\frac{1}{x-3}}$.

20. $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + |\cos x|}$.

21. Агар $f(x)$ функция (a, b) интервалда ўсувчи бўлиб, $f'(x)$ мавжуд бўлса, $f'(x)$ нинг (a, b) да ўсувчилиги ҳақида нима дейиш мумкин?

Қуйидаги тенгсизликларни исботланг:

$$22. e^x \geq ex; \quad x \in R. \quad 23. e^x > 1 + x; \quad x \neq 0.$$

$$24. \ln(1+x) > \frac{x}{x+1}; \quad x > 0.$$

$$25. x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x; \quad x > 0.$$

$$26. e^x > 1 + \ln(1+x).$$

$$27. \frac{\ln x}{x-1} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad x > 0; \quad x \neq 1.$$

$$28. \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}; \quad x \in R.$$

$$29. \operatorname{ch} x \geq 1 + \frac{x^2}{2}, \quad x \in R.$$

$$30. \sin x + \operatorname{tg} x > 2x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

$$31. \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \geq \cos x, \quad 0 < |x| \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$32. \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y} \leq \sqrt[n]{x-y}, \quad x \geq y \geq 0.$$

$$33. \frac{x+y}{2} \leq \frac{x^n + y^n}{2}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad n \in N.$$

$$34. (x^\alpha + y^\alpha)^\alpha > (x^\beta + y^\beta)^\beta, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad 0 < \alpha < \beta.$$

$$35. \frac{2}{\pi}x < \sin x < x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

$$36. \frac{x-y}{x} < \ln \frac{x}{y} < \frac{x-y}{y}, \quad x > y > 0.$$

$$37. x^\alpha - 1 \leq \alpha(x-1), \quad x > 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

$$38. a) \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}, \quad x > 0;$$

$$б) \frac{x \ln x + y \ln y}{x+y} > \ln \frac{x+y}{2}.$$

$$39. \operatorname{ch} x \geq 1 + \frac{x^2}{2}, \quad x \in R.$$

2-§. ФУНКЦИЯНИНГ ЭКСТРЕМУМЛАРИ

$y = f(x)$ функция (a, b) интервалда берилган бўлиб, $x_0 \in (a, b)$ бўлсин.

1-таъриф. Агар x_0 нуқтанинг шундай атрофи

$$U_\delta(x_0) = \{x \in R: x_0 - \delta < x < x_0 + \delta; \delta > 0\} \subset (a, b)$$

мавжуд бўлсаки, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ учун

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга (минимумга) эришади дейилади. $f(x_0)$ қиймат $f(x)$ нинг максимум (минимум) қиймати дейилади ва

$$f(x_0) = \max_{x \in U_\delta(x_0)} \{f(x)\} \quad (f(x_0) = \min_{x \in U_\delta(x_0)} \{f(x_0)\})$$

каби белгиланади.

Функциянинг максимум ва минимуми умумий ном билан унинг экстремуми дейилади.

1°. Экстремумнинг зарурий шарти

Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада ($x_0 \in (a, b)$) чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлиб, бу нуқтада $f(x)$ функция экстремумга эришса, у ҳолда

$$f'(x_0) = 0$$

бўлади.

2° Экстремумнинг етарли шартлари

1) $x_0 \in (a, b)$ нуқтанинг

$$U_\delta^-(x_0) = \{x \in R: x_0 - \delta < x < x_0; \delta > 0\},$$

$$U_\delta^+(x_0) = \{x \in R: x_0 < x < x_0 + \delta; \delta > 0\}$$

чап ва ўнг атрофларини қараймиз.

Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлиб, $U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ да чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин.

а) Агар

$$\forall x \in U_\delta^-(x_0) \text{ учун } f'(x) > 0,$$

$$\forall x \in U_\delta^+(x_0) \text{ учун } f'(x) < 0$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга эришади.

б) Агар

$$\forall x \in U_\delta^-(x_0) \text{ учун } f'(x) < 0,$$

$$\forall x \in U_\delta^+(x_0) \text{ учун } f'(x) > 0$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эришади.

в) Агар

$$\forall x \in U_{\delta}^{-}(x_0) \text{ учун } f'(x) > 0,$$

$$\forall x \in U_{\delta}^{+}(x_0) \text{ учун } f'(x) > 0$$

ёки

$$\forall x \in U_{\delta}^{-}(x_0) \text{ учун } f'(x) < 0,$$

$$\forall x \in U_{\delta}^{+}(x_0) \text{ учун } f'(x) < 0$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эришмайди.

$f(x)$ функция x_0 нуқтада $f', f'', \dots, f^{(n)}$ ҳосилаларга эга бўлиб,

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

бўлсин.

г) Агар n жуфт сон бўлиб,

$$f^{(n)}(x_0) < 0$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга,

$$f^{(n)}(x_0) > 0$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эришади.

д) Агар n тоқ сон бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эришмайди.

6-мисол. Ушбу $f(x) = e^{-x^2}$ функция $x = 0$ нуқтада максимумга эришишини кўрсатинг ва максимум қийматини топинг.

$x = 0$ нуқтанинг $U_{\delta}(0) = \{x \in \mathbb{R} : -\delta < x < \delta; \delta > 0\}$ атрофидаги исталган x нуқта учун ($\forall x \in U_{\delta}(0)$)

$$f(x) = e^{-x^2} \leq e^0 = 1 = f(0)$$

бўлади. Демак, берилган функция $x = 0$ нуқтада максимумга эришади. Унинг максимум қиймати

$$\max \{f(x)\} = \max \{e^{-x^2}\} = f(0) = 1$$

бўлади.

7-мисол. Ушбу $f(x) = 3x^2 - 2x$ функцияни экстремумга текширинг.

Берилган функциянинг ҳосиласи

$$f'(x) = 6x - 2 = 2(3x - 1)$$

ни нолга тенглаймиз.

$$f'(x) = 2(3x - 1) = 0$$

ва бундан $x = \frac{1}{3}$ стационар нуқта эканлигини топамиз. Шу нуқта атрофида ҳосила ишорасининг ўзгаришини аниқлаймиз. Равшанки,

$$\forall x \in U_{\delta}^{-}\left(\frac{1}{3}\right) = \left\{x \in R : \frac{1}{3} - \delta < x < \frac{1}{3}; \delta > 0\right\}$$

учун

$$f'(x) = 2(3x - 1) = -6\left(\frac{1}{3} - x\right) < 0,$$

$$\forall x \in U_{\delta}^{+}\left(\frac{1}{3}\right) = \left\{x \in R : \frac{1}{3} < x < \frac{1}{3} + \delta; \delta > 0\right\}$$

учун

$$f'(x) = 2(3x - 1) = -6\left(\frac{1}{3} - x\right) > 0$$

бўлади. Демак, функциянинг ҳосиласи $x = \frac{1}{3}$ нуқтадан ўтишда ўз ишорасини манфий («—») дан мусбат («+») га ўзгартирар экан. Берилган функциянинг ўзи $x = \frac{1}{3}$ нуқтада улуксиз. Демак, $f(x) = 3x^2 - 2x$ функция $x = \frac{1}{3}$ нуқтада минимумга эришади. Унинг минимум қиймати

$$\min f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

8-мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни экстремумга текширинг.

Бу функциянинг ҳосиласи $f'(x) = 2x$ бўлиб, $x = 0$ нуқтанинг атрофида:

$$\forall x \in U_{\delta}^{-}(0) = \{x \in R : -\delta < x < 0; \delta > 0\} \text{ учун}$$

$$f'(x) = 2x < 0,$$

$$\forall x \in U_{\delta}^{+}(0) = \{x \in R : 0 < x < \delta; \delta > 0\} \text{ учун}$$

$$f'(x) = 2x > 0$$

бўлади, яъни функция ҳосиласи $x = 0$ нуқтани ўтишда ўз ишорасини «—» дан «+» га ўзгартиради. Бироқ, берилган

функция шу нуқтада минимумга эришмайди. Бунга сабаб, функциянинг $x = 0$ нуқтада узлуксиз эмаслигидир.

9-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$$

функцияни экстремумга текширинг.

Бу функциянинг

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - \frac{5}{2} \cdot 2x + 6 = x^2 - 5x + 6$$

ҳосиласини нолга тенглаймиз:

$$f'(x) = x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Бундан $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ ларнинг стационар нуқталар эканини топамиз.

Аввало $x_1 = 2$ нуқта атрофида функция ҳосиласининг ишорасини аниқлаймиз.

$\forall x \in U_\delta^-(2) = \{x \in R : 2 - \delta < x < 2; 0 < \delta < 1\}$ учун

$$f'(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) > 0,$$

$\forall x \in U_\delta^+(2) = \{x \in R : 2 < x < 2 + \delta; 0 < \delta < 1\}$ учун

$$f'(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) < 0.$$

бўлади. Берилган функция $x_1 = 2$ нуқтада узлуксиз. Демак, берилган функция $x_1 = 2$ нуқтада максимумга эришадигани унинг максимум қиймати

$$\max f(x) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{5}{2} \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 = 4 \frac{2}{3}$$

бўлади.

Худди шу йўл билан $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$ функциянинг $x_2 = 3$ нуқтада минимумга эришишини ва унинг минимум қиймати

$$\min f(x) = 4 \frac{1}{2}$$

га тенглиги топилади.

10-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{x^3}{e^{2x}}$$

функцияни экстремумга текширинг. Бу функция ҳосиласи

$$f'(x) = \frac{x^2}{e^{2x}} (3 - 2x)$$

ни нолга тенглаймиз:

$$f'(x) = \frac{x^2}{e^{2x}} (3 - 2x) = 0.$$

Бу тенгламадан $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{2}$ ларнинг стационар нуқталар эканини топамиз.

Энди функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$f''(x) = \frac{2x(2x^2 - 6x + 3)}{e^{2x}}.$$

$f(x)$ функциянинг берилишидан $x = 0$ нуқта экстремумга эга эмаслиги келиб чиқади.

$$f''\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{e^3} < 0,$$

демак, қаралаётган функция $x = \frac{3}{2}$ нуқтада максимумга эришади ва унинг максимум қиймати

$$\max f(x) = \frac{9}{4} e^{-3}$$

га тенг.

Изоҳ: а) Маълумки, $f(x) = |x|$ функциянинг $x = 0$ нуқтада ҳосиласи мавжуд эмас, лекин бу нуқтада минимумга эга бўлиши равшандир.

б) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ функция $x = 0$ нуқтада чексиз ҳосилага эга бўлиб, унинг бу нуқтада минимумга эга эканлигини кўриш қийин эмас. Демак, функция ҳосиласи мавжуд бўлмаган ёки чексизга айланадиган нуқталарда ҳам экстремум мавжуд бўлиши мумкин экан.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг экстремум қийматларини топинг:

40. $f(x) = 2x^2 - x^4.$

41. $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + 3.$

$$42. f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$43. f(x) = xe^{-x}.$$

$$44. f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}.$$

$$45. f(x) = \frac{1}{x^3 - x}.$$

$$46. f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

$$47. f(x) = e^x \sin x.$$

$$48. f(x) = |x|e^{-|x-1|}.$$

$$49. f(x) = |x^2 - 1|e^{|x|}.$$

$$50. f(x) = |x^2 - 4|e^{-|x|}.$$

$$51. f(x) = e^{-|x-1|} / (x+1).$$

$$52. f(x) = x + \sqrt{3-x}.$$

$$53. f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

$$54. f(x) = \ln \cos x - \cos x.$$

$$55. f(x) = x^x.$$

$$56. f(x) = x^{\frac{1}{x}}.$$

$$57. f(x) = |x-5|(x-3)^3.$$

$$58. f(x) = \sqrt[3]{x^2|2-x|}.$$

$$59. f(x) = \sin |x-3| + \cos x, \quad x \in (0, \pi)$$

$$60. f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ x^{x^2 \ln x}, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

3-§. ФУНКЦИЯ ГРАФИГИНИНГ ҚАВАРИҚЛИГИ ВА БОТИҚЛИГИ. ФУНКЦИЯ АСИМПТОТАЛАРИ

$y = f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, $a < x_1 < x_2 < b$ бўлсин. $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ нуқталарни қараймиз. Маълумки, бу нуқталардан ўтувчи тўғри чизик тенгламаси

$$y = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

кўринишда бўлади. Бу тенгламанинг ўнг томонидаги ифода-
ни $l(x)$ билан белгиласак, у ҳолда тенглама қисқача $y =$
 $= l(x)$ кўринишга эга бўлиб,

$$l(x_1) = f(x_1), \quad l(x_2) = f(x_2)$$

бўлиши равшандир.

2-таъриф. Агар ҳар қандай, $x_1, x_2 (a < x_1 < x_2 < b)$ ларда $\forall x \in (x_1, x_2)$ лар учун $f(x) \geq l(x)$ ($f(x) \leq l(x)$) тенг-
сизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция графиги (a, b) интер-
валда қавариқ (ботиқ) дейилади.

3-теорема. $y = f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган ва бу интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. $f(x)$ функциянинг (a, b) да қавариқ (ботиқ) бўли-
ши учун $f'(x)$ нинг (a, b) да қзмаювчи (ўсувчи) бўлиши зарур ва етарли.

4-теорема. $y = f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқ-
ланган ва бу интервалда иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосила-
га эга бўлиб, $\forall (\alpha, \beta) \subset (a, b)$ ($\alpha \neq \beta$) ларда $f''(x) \neq 0$
бўлсин. $f(x)$ функция (a, b) интервалда қавариқ (ботиқ)
бўлиши учун шу интервалда $f''(x) \leq 0$ ($f''(x) \geq 0$) тенг-
сизликининг бажарилиши зарур ва етарли.

11-мисол. Ушбу

$$f(x) = x^4 - 6x^3 - 6x + 1$$

функциянинг қавариқ ва ботиқлиги оралиқларини топинг.

Функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x - 6.$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1),$$

$$|x| > 1 \text{ да } f''(x) > 0, \quad |x| < 1 \text{ да } f''(x) < 0.$$

Демак, $(-1, 1)$ интервалда функция графиги қавариқ,
 $(-\infty, -1), (1, +\infty)$ интервалларда эса функция графиги
ботиқ бўлади.

$f(x)$ функция x_0 нуқтанинг $U_\delta(x_0)$ атрофида аниқланган
бўлсин.

3-таъриф. Агар $f(x)$ функция $U_\delta^-(x_0)$ оралиқда қа-
вариқ (ботиқ) бўлиб, $U_\delta^+(x_0)$ оралиқда эса ботиқ (қава-
риқ) бўлса, у ҳолда x_0 нуқта функциянинг (функция гра-
фигининг) эилиш нуқтаси деб аталади.

5-теорема. $y = f(x)$ функция x_0 нуқтанинг $U_\delta(x_0)$
атрофида аниқланган ва иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосилага
эга бўлсин. Агар $f''(x_0) = 0$ бўлиб, $U_\delta^-(x_0), U_\delta^+(x_0)$ ора-

лиқларда $f''(x)$ ҳосила турли ишорали бўлса, у ҳолда $(x_0, f(x_0))$ функция графиги учун эгилиш нуқтаси бўлади.
12-мисол. Ушбу

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

функциянинг эгилиш нуқтасини топинг.

Функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи

$$f''(x) = 2xe^{-x^2}(2x^2 - 3)$$

ни нолга тенглаб топамиз.

$$x = 0, x = \sqrt{\frac{3}{2}}, x = -\sqrt{\frac{3}{2}},$$

$(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$ ва $(0, \sqrt{\frac{3}{2}})$ интервалларда $f''(x) < 0$,

$(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$ ва $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$ интервалларда $f''(x) > 0$

эканини кўриш қийин эмас. Демак,

$$A(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}}), B(0, 0), C(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}})$$

нуқталар функция графигининг эгилиш нуқталаридир.

$y = f(x)$ функция a нуқтанинг бирор атрофида аниқланган бўлсин.

4-таъриф. Агар ушбу

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x), \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

лимитлардан бири ёки иккаласи чексиз бўлса, у ҳолда $x = a$ тўғри чизиқ $f(x)$ функция графигининг вертикал асимптотаси деб аталади.

Масалан, $y = \frac{1}{x-1}$ функция графиги учун $x = 1$ тўғри чизиқ вертикал асимптота бўлади.

5-таъриф. Шундай k ва b сонлари мавжуд бўлиб, $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) да $f(x)$ функция қуйидаги

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

кўринишида ифодаланса (бунда $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$), у ҳолда $y = kx + b$ тўғри чизиқ $y = f(x)$ функция графигининг оғма асимптотаси дейилади.

13-мисол, Ушбу

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 2}{x - 1}$$

функция графигининг оғма асимптотасини топинг.

Берилган функция кўринишини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$f(x) = 2x + 3 + \frac{1}{x-1}.$$

$x \rightarrow \pm \infty$ да $\alpha(x) = \frac{1}{x-1} \rightarrow 0$ бўлгани учун, $f(x)$ функцияни $f(x) = 2x + 3 + \alpha(x)$ кўринишда ифодалаш мумкин. Бундан эса $y = 2x + 3$ тўғри чизик функция графигининг оғма асимптотаси экани келиб чиқади.

6-теорема. $y = f(x)$ функция графиги $x \rightarrow +\infty$ да $y = kx + b$ оғма асимптотага эга бўлиши учун

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b$$

лимитларнинг ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Бу теорема $x \rightarrow -\infty$ да ҳам ўринлидир.

14-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{x^4}{(1-x)^3}$$

функция графигининг оғма асимптоталарини топинг.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4}{x(1+x)^3} = 1, \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^4}{(1+x)^3} - x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 - x(1+3x+3x^2+x^3)}{(1+x)^3} = -3. \end{aligned}$$

Демак, қаралаётган функция учун

$$y = x - 3$$

чизик оғма асимптота бўлади.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг қавариқлик ва ботиқлик оралиқларини топинг:

$$61. f(x) = x^\alpha, \quad \alpha > 1, \\ x > 0.$$

$$62. f(x) = e^x.$$

$$63. f(x) = \ln x.$$

$$64. f(x) = x^5 - 10x^2 + 3x.$$

$$65. f(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

$$66. f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}.$$

$$67. f(x) = e^{-x^2}.$$

$$68. f(x) = x + \sin x.$$

$$69. f(x) = x \sin \ln x, \\ x > 0.$$

$$70. f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}.$$

Қуйидаги функциялар графикларининг эгилиш нуқталарини топинг:

$$71. f(x) = \cos x.$$

$$72. f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$73. f(x) = e^{\frac{1}{x}}.$$

$$74. f(x) = (x^2 - 1)^3.$$

$$75. f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}.$$

$$76. f(x) = \frac{|x-1|}{x^2}.$$

$$77. f(x) = e^{\cos x}.$$

$$78. f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

$$79. f(x) = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}.$$

$$80. f(x) = e^{2x-x^2}.$$

$$81. f(x) = 2x^2 + \ln x.$$

$$82. f(x) = e^{-2x} \sin^{-2} x.$$

$$83. f(x) = \frac{ax}{x^2 + b^2}, \quad a \neq 0, \\ b \neq 0.$$

$$84. f(x) = \frac{x^4}{(1+x)^3}.$$

$$85. f(x) = \sqrt{1-x^3}.$$

4-§. ФУНКЦИЯЛАРНИ ТУЛИҚ ТЕКШИРИШ ВА ГРАФИКЛАРНИ ЧИЗИШ

Функцияларни текшириш ва уларнинг графикларини чизишни қуйидаги қоида бўйича амалга ошириш мақсадга мувофиқдир:

- 1°. Функциянинг аниқланиш тўпламини топиш;
- 2°. Функцияни узлуксизликка текшириш ва узилиш нуқталарини топиш;
- 3°. Функциянинг жуфт, тоқ ҳамда даврийлигини аниқлаш;
- 4°. Функцияни монотонликка текшириш;
- 5°. Функцияни экстремумга текшириш;
- 6°. Функция графигининг қавариқ ва ботиқлик ораликларини аниқлаш, эгилиш нуқталарини топиш;
- 7°. Функция графигининг асимптоталарини топиш;
- 8°. Агар имконияти бўлса, функциянинг Ox ва Oy ўқлар билан кесишадиган (агар улар мавжуд бўлса) нуқталарини топиш ва аргумент x нинг бир нечта характерли қийматларида функциянинг қийматларини ҳисоблаш.

15-мисол. Ушбу $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ функцияни тўлиқ текширинг ва графигини чизинг.

Берилган функция $\{(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)\}$ тўпلامда аниқланган. Бу функция учун $f(-x) = f(x)$ бўлганидан у жуфтдир. Демак, функциянинг графиги Oy ўққа нисбатан симметрик бўлади ва уни $[0, +\infty)$ оралиқда текшириш kifoya.

Функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари:

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}, \quad f''(x) = \frac{4(1+3x^2)}{(x^2-1)^3}.$$

Биринчи тартибли ҳосила $[0, +\infty)$ оралиқнинг $x=1$ нуқтасидан бошқа барча нуқталарида аниқланган ва $x=0$ нуқтада нолга айланади. Иккинчи тартибли ҳосиланинг $x=0$ нуқтадаги қиймати $f''(0) = -4 < 0$. Шунинг учун $f(x)$ функция $x=0$ нуқтада максимумга эга ва бу максимум қиймат $f(0) = -1$ бўлади.

Энди $(0, 1)$ ва $(1, +\infty)$ да $f'(x) < 0$ бўлганидан бу тўпلامда $f(x)$ нинг камаювчилиги келиб чиқади. Сўнгра

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty$$

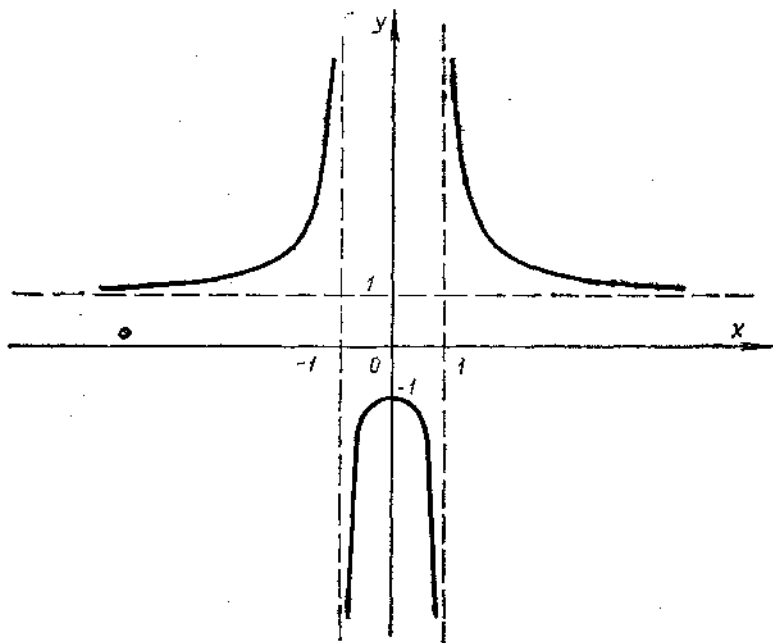
бўлгани учун $x = \pm 1$ (функциянинг иккинчи тур узилиш нуқталари) тўғри чизиқлар вертикал асимптоталар эканлигини ва

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{1}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$$

лимитларга кўра $y = 1$ горизонтал тўғри чизиқ $f(x)$ функция графигининг асимптотаси эканлигини ҳосил қиламиз.

Энди $1 + 3x^2 = 0$ тенглама ҳақиқий сонлар ўқида ечимга эга бўлмагани сабабли функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи нолга тенг бўлмаслиги, яъни эгилиш нуқтаси йўқлиги келиб чиқади. Иккинчи тартибли ҳосиланинг қийматлари: $(0, 1)$ да $f''(x) < 0$, $(1, +\infty)$ да $f''(x) > 0$. Демак, функция графиги $[0, 1)$ да қавариқ ва $(1, +\infty)$ да ботиқ бўлади (3-чизма).



3- чизма.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг графикларини чизинг:

86. $f(x) = 3x - x^3$.

87. $f(x) = -x^3 + 4x - 3$.

88. $f(x) = x(x-1)^3$.

89. $f(x) = (x+2)^2(x-1)^2$.

90. $f(x) = \frac{20x^2}{(x-1)^5}$.

91. $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$.

92. $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$.

93. $f(x) = \frac{x^4}{(1+x)^3}$.

94. $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4$.

95. $f(x) = \frac{x^5 - 8}{x^4}$.

96. $f(x) = \frac{x}{(1-x^2)^2}$.

97. $f(x) = \frac{(x-1)^5}{(x-2)^4}$.

98. $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$.

99. $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.

100. $f(x) = x^2\sqrt{x+1}$.

101. $f(x) = x(x+1)^{\frac{3}{2}}$.

102. $f(x) = \frac{8x}{\sqrt{x^2-4}}$.

103. $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^3+1}} - \frac{x}{2}$.

$$104. f(x) = (x^2 + 8x + 12)^{\frac{2}{3}}.$$

$$105. f(x) = |x| \sqrt{1-x^2}.$$

$$106. f(x) = \frac{1+x|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

$$107. f(x) = e^x - x.$$

$$108. f(x) = xe^{-2x}.$$

$$109. f(x) = x^2 e^{-x}.$$

$$110. f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

$$111. f(x) = \ln x - x + 1.$$

$$112. f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

$$113. f(x) = x^2 \ln x.$$

$$114. f(x) = x \ln^2 x.$$

$$115. f(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \frac{6}{x+1}.$$

$$116. f(x) = x - \sqrt{x^3 - 2x}.$$

$$117. f(x) = x^2 - 2 \ln x.$$

$$118. f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x.$$

$$[119. f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x.$$

$$120. f(x) = \sin x - \sin^3 x.$$

$$121. f(x) = \frac{\cos 2x}{\cos x}.$$

$$122. f(x) = \frac{x}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

$$123. f(x) = \frac{3}{2} x - \arccos \frac{1}{x}.$$

$$124. f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

$$125. f(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}.$$

$$126. f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

$$127. f(x) = e^{\cos x}.$$

$$128. f(x) = e^{-\arctg x}.$$

$$129. f(x) = \sin x - \ln \sin x.$$

$$130. f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

5-§. АНИҚМАСЛИКЛАРНИ ОЧИШ

(Лопиталь қондалари)

1°. $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликлар.

7-теорема. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун қуйидаги шартлар ўринли бўлсин:

1) $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар a нуқтанинг бирор атрофида аниқланган ва чекли ҳосиллага эга;

$$2) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0;$$

3) a нуқтанинг шу атрофида $g'(x) \neq 0$;

$$4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ чекли ёки чексиз.}$$

У ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

тенглик ўринли бўлади.

Изоҳ. Агар бу теореманинг шартлари a нуқтанинг чап (ёки ўнг) ярим атрофида бажарилса, у ҳолда теорема $\frac{f(x)}{g(x)}$ нинг a нуқтадаги чап (ёки ўнг) лимитига нисбатан ўринли бўлади.

16-мисол. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos \alpha x}{e^{\beta x} - \cos \beta x} \text{ лимитни ҳисобланг.}$$

Бу ҳолда $f(x) = e^{\alpha x} - \cos \alpha x$, $g(x) = e^{\beta x} - \cos \beta x$ бўлиб, улар учун теорема шартлари бажарилади:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x),$$

$$б) f'(x) = \alpha (e^{\alpha x} + \sin \alpha x), \quad g'(x) = \beta (e^{\beta x} + \sin \beta x),$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} + \sin \alpha x}{e^{\beta x} + \sin \beta x} = \frac{\alpha}{\beta},$$

у ҳолда теоремага кўра:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

8-теорема. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун қуйидаги шартлар ўринли бўлсин:

1) $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $(a, +\infty)$ да аниқланган ва чекли ҳосилага эга;

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0;$$

$$3) g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, +\infty);$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ — чекли ёки чексиз.}$$

У ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

тенглик ўринли бўлади.

17-мисол. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \text{ лимитни ҳисобланг.}$$

Бу ерда

$$f(x) = \pi - 2 \operatorname{arctg} x, \quad g(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

функциялар теореманинг 1) — 3) шартларини қаноатлантиришини текшириш қийин эмас.]

Равшанки,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 \frac{1}{1+x^2}}{\frac{x}{1+x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{1+x^2}}{\frac{1}{(1+x)x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1+x^2} (1+x)x = 2. \end{aligned}$$

Демак, 4) шарт ҳам бажарилади. Шунинг учун теоремага кўра:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 2.$$

$2^\circ \frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликлар.

9-теорема. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялари учун қуйидаги шартлар ўринли бўлсин:

1) бу функциялар a нуқтанинг бирор атрофида аниқланган ва чекли ҳосилага эга

$$2) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty;$$

3) a нуқтанинг шу атрофида $g'(x) \neq 0$;

$$4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ — чекли ёки чексиз.}$$

У ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

тенглик ўринли бўлади.

18-мисол. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\lg x} \text{ лимит ҳисоблансин.}$$

Бу ерда

$$f(x) = \ln\left(x - \frac{\pi}{2}\right), g(x) = \lg x$$

бўлиб, улар теореманинг 1) — 3) шартларини қаноатлантиради ва

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{x - \frac{\pi}{2}}.$$

Кейинги лимит $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмаслик бўлиб,

$$f_1(x) = \cos^2 x, g_1(x) = x - \frac{\pi}{2}$$

функциялар 7-теореманинг барча шартларини қаноатлантиради. Шу теоремага асосан:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x (-\sin x)}{1} = 0.$$

Демак, 9-теоремага кўра,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \left(x - \frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{tg} x} = 0.$$

3°. Бошқа кўринишдаги аниқмасликлар
Маълумки,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \text{ бўлса, } f(x) \cdot g(x)$$

кўпайтма $0 \cdot \infty$ кўринишдаги аниқмаслик бўлиб, уни

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

кўринишда ифодалаш орқали $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликка келтириш мумкин.

Шунингдек, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ бўлса, $f(x) - g(x)$ айирма $\infty - \infty$ кўринишдаги аниқмаслик бўлиб, уни ҳам

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}}$$

кўринишда ифодалаб, $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликка келтириш мумкин.

Шундай қилиб, функция ҳосилалари ёрдамида $0 \cdot \infty$ ва $\infty - \infty$ кўринишдаги аниқмасликларни очинишда, уларни $\frac{0}{0}$

ёки $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликка келтириб, сўнгра юқоридаги теоремалар қўлланилади.

Маълумки, $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция 1, 0 ва ∞ га, $g(x)$ функция эса мос равишда ∞ , 0 ва 0 га интилганда

$[f(x)]^{g(x)}$ даражали — кўрсаткичли ифодада 1^∞ , 0^∞ , ∞^0 кўринишдаги аниқмасликлар келиши мумкин. Бу кўринишдаги аниқмасликларни очиниш учун аввало

$$y = [f(x)]^{g(x)}$$

ифода логарифмланади:

$$\ln y = g(x) \ln f(x).$$

$x \rightarrow a$ да $g(x) \ln f(x)$ ифода $0 \cdot \infty$ кўринишдаги аниқмасликни ифодалаши равшан.

Изоҳ. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциянинг $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилалари ҳам $f(x)$ ва $g(x)$ лардек юқорида келтирилган теоремаларнинг барча шартларини қаноатлантирса, у ҳолда

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

тенгликлар ўринли бўлади, яъни бу ҳолда Лопиталь қондасини такрор қўллаш мумкин бўлади.

19-мисол. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$$

лимитни ҳисобланг.

Бу лимит 1^∞ кўринишдаги аниқмаслик бўлиб, юқорида айтилганларга асосан:

$$y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$$

ифодани логарифмлаш натижасида

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \ln y = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{(\operatorname{tg} 2x)^{-1}}$$

$\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликка келади.

Энди Лопиталь қондасини қўлласак:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\ln \operatorname{tg} x)'}{[(\operatorname{tg} 2x)^{-1}]'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{2}{\cos^2 2x}} = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin 2x = -1.$$

Демак,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = \frac{1}{e}$$

экан.

Мисол ва масалалар

$$131. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^3}.$$

$$132. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{tg} 4x - 12 \operatorname{tg} x}{3 \sin 4x - 12 \sin x}.$$

$$133. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}.$$

$$134. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1) - 2(e^x - 1)}{x^3}.$$

$$135. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}.$$

$$136. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}.$$

($a > 0$).

$$137. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3}.$$

$$138. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^e} \quad (e > 0).$$

$$139. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1},$$

($\beta \neq 0$).

$$140. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x}.$$

$$141. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2m+1)x}{\cos(2n+1)x},$$

$$m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}.$$

$$142. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x - x^x}.$$

$$143. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}.$$

$$144. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha \ln^\beta x}{e^{\alpha x}}.$$

$$145. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha \ln^\beta x}.$$

$$146. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x^q}.$$

$$147. \lim_{x \rightarrow +0} (x^x - 1) \ln x.$$

$$148. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right).$$

$$149. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\alpha}{1-x^\alpha} - \frac{\beta}{1-x^\beta} \right),$$

$$\alpha, \beta \neq 0.$$

$$150. \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}.$$

$$151. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^x.$$

$$152. \lim_{x \rightarrow +0} (1+x)^{\ln x}.$$

$$153. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\pi - 2x)^{\cos x}.$$

$$154. \lim_{x \rightarrow +0} |\ln x|^{2x}.$$

$$155. \lim_{x \rightarrow 0} x^{x^x - 1}.$$

$$156. \lim_{x \rightarrow 0} (x^{x^x} - 1).$$

$$157. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}, \quad (a > 0).$$

$$158. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{th} x)^x.$$

$$159. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$160. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}.$$

$$161. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - e}{x}.$$

$$162. \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{\ln \sinh x}}.$$

$$163. \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x}.$$

$$164. \lim_{x \rightarrow +0} (a \operatorname{resin} x)^{\operatorname{tg} x}.$$

165. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}}.$
166. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x} \right).$
167. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{\frac{7}{8}} - x^{\frac{6}{7}} \ln^2 x \right).$
168. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right).$
169. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\ln^3 (1+x)}.$
170. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha a^x, \alpha > 0,$
 $a \neq 1.$

VIII бoб

АНИҚМАС ИНТЕГРАЛЛАР

1-§. АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ ТУШУНЧАСИ

$f(x)$ функция бирор (a, b) (чекли ёки чексиз) интервалда аниқланган бўлсин.

1-таъриф. Агар (a, b) интервалда $f(x)$ функция $(f(x) dx$ ифода) шу интервалда дифференциалланувчи $F(x)$ функциянинг ҳосиласига (дифференциалига) тенг бўлса, яъни ушбу

$F'(x) = f(x)$ ($dF(x) = f(x) dx$), $x \in (a, b)$ тенгелик ўринли бўлса, у ҳолда $F(x)$ функция (a, b) интервалда $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси дейилади.

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

функциянинг $(-\infty; +\infty)$ интервалда бошланғич функцияси

$$F(x) = \ln(1+x^2)$$

бўлади, чунки

$$F'(x) = [\ln(1+x^2)]' = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = f(x).$$

$F(x)$ ва $\Phi(x)$ функцияларнинг ҳар бири (a, b) интервалда битта $f(x)$ функция учун бошланғич функция бўлсин:

$$F'(x) = f(x), \quad \Phi'(x) = f(x), \quad x \in (a, b).$$

Демак,

$$F'(x) = \Phi'(x).$$

Бундан эса

$$F(x) = \Phi(x) + C \quad (C — \text{const})$$

тенглик келиб чиқади.

Демак, (a, b) интервалда берилган $f(x)$ функциянинг бошланғич функциялари бир-биридан ўзгармас сонга фарқ қилар экан, яъни бу функциянинг (a, b) интервалда бирор бошланғич функцияси $F(x)$ бўлса, унинг исталган бошланғич функцияси ушбу

$$F(x) + C \quad (C — \text{const})$$

кўринишда ифодаланади.

2-таъриф. (a, b) интервалда берилган функция бошланғич функцияларининг умумий ифодаси $F(x) + C$ ($C — \text{const}$), $f(x)$ функциянинг аниқмас интеграли деб аталади ва

$$\int f(x) dx$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (C — \text{const}).$$

2-мисол. Ушбу

$$\int 3x^2 dx$$

интегрални ҳисобланг.

Равшанки, $f(x) = 3x^2$ функциянинг бошланғич функцияси $F(x) = x^3$ бўлади.

Аниқмас интеграл таърифидан

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

бўлишни топамиз.

1. Аниқмас интегралнинг содда хоссалари:

1°. $d \left[\int f(x) dx \right] = f(x) dx$.

2°. $\int dF(x) = F(x) + C$ ($C — \text{const}$).

3°. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар бошланғич функцияларга эга бўлса, у ҳолда $f(x) \pm g(x)$ функциялар ҳам бошланғич функцияга эга ва

$$\int \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

муносабат ўринлидир.

4°. Агар $f(x)$ функция бошланғич функцияга эга бўлса, у ҳолда $k f(x)$ ($k = \text{const}$) функция ҳам бошланғич функцияга эга ва

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \neq 0)$$

муносабат ўринлидир.

2. Элементар функцияларнинг аниқмас интеграллари.

Элементар функцияларнинг ҳосилалари жадвалидан ҳамда бошланғич функция таърифидан фойдаланиб, элементар функциялар учун аниқмас интеграллар жадвалини келтирамиз.

$$1. \int 0 dx = C, \quad C = \text{const.}$$

$$2. \int 1 dx = x + C.$$

$$3. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$$

$$4. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \quad (x \neq 0).$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1).$$

$$6. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$7. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$8. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \neq n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$11. \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arctg} x + C. \end{cases}$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arsin} x + C, \\ -\operatorname{arccos} x + C, \end{cases} \quad -1 < x < 1.$$

$$13. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$14. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$15. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

3-миёол. Ушбу

$$\int \frac{x^3 + x + 1}{\sqrt{x}} dx$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги функцияни

$$\frac{x^3 + x + 1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Натижада

$$\int \frac{x^3 + x + 1}{\sqrt{x}} dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$$

тенгликка келамиз.

Аниқмас интегралнинг содда хоссалари ва юқорида келтирилган жадвалдан фойдаланиб, топамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x + 1}{\sqrt{x}} dx &= \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx + 2 \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \\ &= \frac{x^{\frac{\frac{3}{2}+1}{2}+1}}{\frac{\frac{3}{2}+1}} + \frac{x^{\frac{\frac{1}{2}+1}{2}+1}}{\frac{\frac{1}{2}+1}} + 2\sqrt{x} + C = \frac{2 \cdot x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \\ &+ 2\sqrt{x} + C = \frac{2x^{\frac{5}{2}}\sqrt{x}}{5} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + 2\sqrt{x} + C = \\ &= 2\sqrt{x} \left(\frac{x^2}{5} + \frac{x}{3} + 1 \right) + C. \end{aligned}$$

2-§. ИНТЕГРАЛЛАШ УСУЛЛАРИ

1°. Ўзгарувчини алмаштириш усули

Агар $\varphi(t)$ функция (c, d) интервалда бошланғич функция $\Phi(t)$ га эга бўлиб, $g(x)$ функция (a, b) интервалда дифференциалланувчи ҳамда $x \in (a, b)$ қийматларда $g(x) \in (c, d)$ бўлса, у ҳолда

$$\int \varphi(g(x)) g'(x) dx = \Phi(g(x)) + C$$

формула ўринлидир.

Демак, $\int \varphi(g(x)) g'(x) dx$ интегрални ҳисоблаш $t = g(x)$ алмаштириш ёрдамида $\int \varphi(t) dt$ интегрални ҳисоблашга келтирилган экан. Бундай усул ўзгарувчини алмаштириш усули деб аталади.

4- мисол. Ушбу

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$$

интегрални ҳисобланг.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \\ &= \int \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} dx = - \int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Охирги интегралдан кўринадики, ўзгарувчини $\frac{1}{x} = t$ деб алмаштириш мақсадга мувофиқдир. Янги ўзгарувчи t орқали интеграл қуйидаги кўринишга келади: $I = - \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ айнитни ҳособга олиб, $t = \operatorname{sh} z$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда

$$dt = \operatorname{ch} z dz, \quad \sqrt{1+t^2} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 z} = \operatorname{ch} z$$

бўлиб,

$$I = - \int \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{ch} z} dz = - \int dz = -z + C$$

натижани оламиз. Берилган интегралнинг x ўзгарувчи орқали ифодаси

$$I = -\ln \left| \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \right| + C$$

бўлиши равшандир.

5- мисол. Ушбу

$$\int e^{\operatorname{arctg} x} \frac{dx}{1+x^2}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $\operatorname{arctg} x = t$ алмаштиришни бажарамиз.
Натижада $\frac{dx}{1+x^2} = dt$ бўлиб,

$$\int e^{\operatorname{arctg} x} \frac{dx}{1+x^2} = \int e^t dt = e^t + C = e^{\operatorname{arctg} x} + C$$

бўлади.

6- мисол. Ушбу

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$$

интеграл ҳисоблансин. Бу интегралда $x = \operatorname{tg} t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ алмаштиришни бажарамиз. Натижада

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

бўлиб,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} = \int \frac{\cos^3 t}{\cos^2 t} dt = \int \cos t dt = \sin t + C = \sin(\operatorname{arctg} x) + C$$

бўлади.

7- мисол. Ушбу

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $\ln(\ln x) = t$ алмаштиришни бажариш натижасида $\frac{dx}{x \ln x} = dt$ бўлиб,

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{[\ln(\ln x)]^2}{2} + C$$

бўлади.

Мисол ва масалалар

Ўзгарувчини алмаштириш усулидан фойдаланиб қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

1. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

5. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}}.$

2. $\int x\sqrt{1-x^2} dx.$

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

3. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$

7. $\int \frac{dx}{e^{x/2} + e^x}.$

4. $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}.$

8. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx.$

9. $\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx.$
10. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}.$
12. $\int xe^{-x^2} dx.$
13. $\int \frac{\ln^{100} x}{x} dx.$
14. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx.$
15. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}.$
16. $\int \frac{dx}{\sin x}.$
17. $\int \frac{dx}{x^4 + 1}.$
18. $\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx.$
19. $\int \frac{2^x 3^x}{9^x - 4^x} dx.$
20. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{(1+x^2)^3}}.$
21. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}.$
22. $\int \sqrt{1-x^2} dx.$
23. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx.$
24. $\int \frac{\sin x \cdot \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx.$
25. $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}.$

2°. Бўлаклаб интеграллаш усули

Фараз қилайлик, $u(x)$ ва $v(x)$ функциялар (a, b) интервалда дифференциалланувчи бўлиб, $v(x) \cdot u'(x)$ функция бу интервалда бошланғич функцияга эга бўлсин. У ҳолда $u(x)v'(x)$ функция ҳам бошланғич функцияга эга ва

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx$$

тенглик ўринлидир. Бу тенглик бўлаклаб интеграллаш формуласи дейилади. Бўлаклаб интеграллаш формуласини

$$\int u(x) dv(x) = u(x) v(x) - \int v(x) du(x)$$

кўринишда ёзиш ҳам мумкин.

8- мисол. Ушбу

$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги ифодани $u = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$, $dv = dx$ лар кўпайтмаси деб оламиз. У ҳолда $du = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, $v = x$ бўлади. Бўлаклаб интеграллаш формуласига кўра:

$$I = \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx = x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \int \frac{x dx}{2\sqrt{x}(1+x)} =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{x} dx}{1+x}.$$

$\int \frac{\sqrt{x} dx}{1+x}$ интегралда $\sqrt{x} = t$ деб олаимиз. Натижада $x = t^2$, $dx = 2t dt$ бўлиб,

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{1+x} = \int \frac{t \cdot 2t}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{t^2 dt}{1+t^2} =$$

$$= 2 \left[\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2} \right] = 2t - 2 \operatorname{arctg} t + C = 2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C.$$

Шундай қилиб, берилган интеграл қуйидагига тенг бўлади:

$$I = x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C =$$

$$= (x+1) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + C.$$

9- мисол. Ушбу

$$I = \int \sin(\ln x) dx$$

интегрални ҳисобланг.

$u = \sin(\ln x)$, $dv = dx$ деб олаимиз. У ҳолда $du = \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$, $v = x$ бўлади.

Бўлаклаб интеграллаш формуласидан топамиз:

$$I = x \cdot \sin(\ln x) - \int x \frac{\cos(\ln x)}{x} dx =$$

$$= x \cdot \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx.$$

$I_1 = \int \cos(\ln x) dx$ интегралда худди юқоридаги каби бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланамиз:

$$I_1 = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx.$$

Демак, қаралаётган интеграл қуйидагича кўринишга эга бўлади:

$$I = x \sin(\ln x) - x \cos \ln x - \int \sin(\ln x) dx =$$

$$= x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - I.$$

Шундай қилиб, I га нисбатан чизиқли тенглама ҳосил бўлди, бундан

$$I = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$$

эканини топамиз.

10-мисол. Ушбу

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

интегрални ҳисобланг.

Аввало бу интегралда $n = 1$ бўлган ҳолни қарайлик.
Бу ҳолда

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

муносабатга эга бўламиз.

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

интегралда

$$u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}, \quad dv = dx$$

деб олсак,

$$du = -\frac{2nx dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}, \quad v = x$$

бўлиб, бўлаклаб интеграллаш формуласига кўра

$$I_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx$$

бўлади.

$$\frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} \text{ ифоданинг кўриниши}$$

$$\frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} - a^2 \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n+1}}$$

каби ўзгартирилиши натижасида

$$I_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$$

тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликдан эса

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{a^2} I_n$$

рекуррент формула келиб чиқади. Бу рекуррент формуладан ва $n = 1$ бўлган ҳолдаги интеграл ҳисобга олиниб, $n \geq 2$ лар учун интеграллар топилади. Масалан:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^2} I_1 = \\ &= \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

Мисол ва масалалар

Бўлаклаб интеграллаш усулидан фойдаланиб қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

- | | |
|--|--|
| 26. $\int x \cdot \sin x dx.$ | 36. $\int e^{ax} \cdot \cos bx dx.$ |
| 27. $\int x \cdot e^{-x} dx.$ | 37. $\int e^{ax} \cdot \sin bx dx.$ |
| 28. $\int x^n \ln x dx (n \neq -1).$ | 38. $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx.$ |
| 29. $\int \arcsin x dx.$ | 39. $\int e^{2x} \sin^2 x dx.$ |
| 30. $\int x^3 e^{-x^2} dx.$ | 40. $\int x (\operatorname{arctg} x)^2 dx.$ |
| 31. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx.$ | 41. $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$ |
| 32. $\int \operatorname{arctg} x dx.$ | 42. $\int x^2 \operatorname{sh} x dx.$ |
| 33. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$ | 43. $\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx.$ |
| 34. $\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x) dx.$ | 44. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx.$ |
| 35. $\int \cos(\ln x) dx.$ | 45. $\int \frac{\operatorname{arctg}(e^x)}{e^x} dx.$ |

3-§. РАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}, m=1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

қўринишдаги касрлар содда касрлар деб аталади, бунда A, B, C, a, p, q лар ўзгармас сонлар, $x^2 + px + q$ квадрат учхад эса ҳақиқий илдизга эга эмас.

Ушбу

$$\frac{p(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_lx^l} \quad (2)$$

кўринишдаги каср рационал функция дейилади, бунда $a_0, \dots, a_n$ ва $b_0, b_1, \dots, b_l$ ўзгармас сонлар, $n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$. Агар $n < l$ бўлса, бу каср тўғри каср деб аталади.

Ҳар қандай тўғри каср содда касрлар орқали ифодаланади (қ. Т. Азларов, Х. Мансуров. «Математик» анализ», 1-жилд, 262-бет). Демак, (2) кўринишдаги рационал касрларни интеграллаш масаласи (1) кўринишдаги содда касрларни интеграллаш орқали ҳал қилинади.

1. $\frac{A}{x-a}$ содда касрнинг аниқмас интеграли:

$$\int \frac{A dx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln |x-a| + C.$$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^m} dx$ ($m > 1$) интеграл ҳам осон ҳисобланади:

$$\begin{aligned} \int \frac{A}{(x-a)^m} dx &= A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^m} = A \int (x-a)^{-m} d(x-a) = \\ &= \frac{A}{1-m} \cdot \frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C. \end{aligned}$$

3. $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ содда касрнинг интегралини ҳисоблаш учун x^2+px+q квадрат учҳадни

$$x^2+px+q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

кўринишда ифодалаймиз (x^2+px+q квадрат учҳад ҳақиқий илдизга эга бўлмаганидан $q - \frac{p^2}{4} > 0$). У ҳолда

$$I = \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Bx+C}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2} dx; \quad a^2 = q - \frac{p^2}{4}$$

бўлади. Бу интегралда $x + \frac{p}{2} = t$ алмаштиришни бажарамиз:

$$\begin{aligned} I &= B \int \frac{t dt}{t^2 + a^2} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \\ &= \frac{B}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{t^2 + a^2} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \cdot \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{B}{2} \ln(t^2 + a^2) + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C_1 = \\
&= \frac{B}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2C - Bp}{2\left(q - \frac{p^2}{4}\right)} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C_1. \\
&\text{Демак, } I = \int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q} dx = \\
&= \frac{B}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2(2C - Bp)}{4q - p^2} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + 2C_1.
\end{aligned}$$

4. $\frac{Bx + c}{(x^2 + px + q)^m}$ ($m > 1$) содда касрни интеграллаш учун худди 3-ҳолдаги каби ўзгарувчини алмаштиришдан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned}
I_m &= \int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m} dx = \frac{B}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^m} + \\
&+ \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m} = \frac{B}{2} \frac{1}{1-m} \cdot \frac{1}{(t^2 + a^2)^{m-1}} + \\
&+ \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}.
\end{aligned}$$

Бу муносабатдаги $\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}$ интеграл 10-мисолда келтирилган бўлиб, у рекуррент формула орқали ҳисобланади.

11-мисол. Ушбу

$$I = \int \frac{x dx}{(x+1)(2x-1)(x^2+1)}$$

интегрални ҳисобланг.

$\frac{x}{(x+1)(2x-1)(x^2+1)}$ касрни содда касрларга ёйиш натижасида у қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{x}{(x+1)(2x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги касрларни умумий махражга келтириб, суратдаги кўпхадларнинг тенглигидан фойдалансак, ушбу

$$\begin{cases} -A + B - D = 0, \\ 2A + B - C + D = 1, \\ -A + B + C + 2D = 0, \\ 2A + B + 2C = 0 \end{cases}$$

системага келамиз. Бу системани ечиб,

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{4}{15}, \quad C = -\frac{3}{10}, \quad D = \frac{1}{10}$$

ёқанини топамиз. Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{xdx}{(x+1)(2x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{4}{15} \int \frac{dx}{2x-1} + \\ &+ \int \frac{-\frac{3}{10}x + \frac{1}{10}}{x^2+1} dx = \frac{1}{6} \ln|x+1| + \frac{4}{30} \ln|2x-1| - \\ &- \frac{3}{20} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{1}{10} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{6} \ln|x+1| + \\ &+ \frac{4}{30} \ln|2x-1| - \frac{3}{20} \ln(x^2+1) + \frac{1}{10} \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

Бу мисолда рационал касрларни интеграллаш учун умумий бўлган, содда касрларга ёйиш усули етарлича мураккаб бўлган тенгламалар системасига олиб келишини кўрдик. Шунинг учун интеграл остидаги функция кўринишига қараб иложи борица соддароқ усуллар билан интеграллаш маъқулдир.

12- мисол. Ушбу

$$\int \frac{dx}{x^4+1}$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги ифода кўринишини ўзгартириш натижасида топамиз:

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}; \quad d\left(\frac{1}{x}+x\right) - d\left(x-\frac{1}{x}\right) = -\frac{2dx}{x^2}.$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x^4+1} = \int \frac{\frac{dx}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right) - d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^2+\frac{1}{x^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^2 - 2}, \quad z = x + \frac{1}{x}.$$

$\frac{1}{z^2 - 2}$ функцияни содда касрларга ёямиз:

$$\frac{1}{z^2 - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{z - \sqrt{2}} - \frac{1}{z + \sqrt{2}} \right),$$

Натижада

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{z^2 - 2} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dz}{z - \sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dz}{z + \sqrt{2}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{z - \sqrt{2}}{z + \sqrt{2}} \right| + C \text{ бўлади.} \end{aligned}$$

Демак,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}}{x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

46. $\int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$

53. $\int \frac{dx}{x^4 - 1}.$

47. $\int \frac{x dx}{x^2 - 3x + 2}.$

54. $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$

48. $\int \left(\frac{x}{x^2 - 3x + 2} \right)^2 dx.$

55. $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}.$

49. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}.$

56. $\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}} dx.$

50. $\int \frac{dx}{x^3 + 1}.$

57. $\int \frac{1 - x^7}{x(1+x^2)} dx.$

51. $\int \frac{x}{x^3 - 1} dx.$

58. $\int \frac{x^{11}}{x^8 + 3x^4 + 2} dx.$

52. $\int \frac{x dx}{(x+1)(x^2+1)}.$

59. $\int \frac{dx}{x^6 + 1}.$

60. $\int \frac{dx}{x^9 - 1}.$

Қуйидаги формулаларни исботланг:

$$1. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0).$$

$$2. \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (a \neq 0).$$

$$3. \int \frac{x}{a^2 \pm x^2} dx = \pm \frac{1}{2} \ln |a^2 \pm x^2| + C.$$

$$4. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (a > 0).$$

$$6. \int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C \quad (a > 0).$$

$$7. \int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

$$8. \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (a > 0).$$

4-§. БАЎЗИ ИРРАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

1°. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ кўринишдаги интегрални қарайлик $\left(\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}\right)$, бунда $R(x, \varphi(x))$ x ва $\varphi(x)$ ларнинг рационал функцияси дир.

Бу интегралда

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

алмаштиришни бажариб, рационал функцияни интеграллашга келамиз.

13-мисол. Ушбу

$$I_n = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги функция кўринишини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} = \frac{1}{(x-a)(x-b)\sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}}}.$$

$$\sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}} = t \text{ алмаштиришни бажарсак, у ҳолда } x = \frac{a-bt^n}{1-t^n}, \quad dx = \frac{nt^{n-1}(a-b)}{(1-t^n)^2} dt, \quad (x-a)(x-b) = \frac{(a-b)^2 t^n}{(1-t^n)^2}$$

бўлади.

Натижада берилган интеграл учун

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{nt^{n-1}(a-b)(1-t^n)^2}{(1-t^n)^2 t (a-b)^2 t^n} dt = \\ &= \frac{n}{a-b} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{n}{b-a} \cdot \frac{1}{t} + C = \frac{n}{b-a} \sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}} + C \end{aligned}$$

эканини топамиз.

2°. Қуйидаги

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right) dx$$

интегрални қарайлик $\left(\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}\right)$; $r_1, r_2, \dots, r_n$ — рационал сонлар. Бу $r_1, r_2, \dots, r_n$ рационал сонларнинг умумий махражини топамиз, у m га тенг бўлсин. Агар қаралаётган интегралда $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ алмаштириш бажарилса, интегрални ҳисоблаш рационал функцияни интеграллашга келади.

14-мисол. Ушбу

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $t = \sqrt[6]{x}$ алмаштиришни бажарамиз. Натижада

$$\begin{aligned} I &= 6 \int \frac{t^3}{t+1} dt = 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = \\ &= 6 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| \right) + C = \\ &= 6 \left(\frac{\sqrt[6]{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} - \ln|\sqrt[6]{x} + 1| \right) + C = \\ &= 2\sqrt[6]{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C \end{aligned}$$

эканлигини топамиз.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

- | | |
|---|---|
| 61. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$ | 66. $\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx$ |
| 62. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x+1}$ | 67. $\int \frac{x^3 \sqrt[3]{2+x}}{x + \sqrt[3]{2+x}} dx$ |
| 63. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x}$ | 68. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$ |
| 64. $\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx$ | 69. $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} \quad (a > 0)$ |
| 65. $\int \frac{dx}{(1 + \sqrt[4]{x})^3 \sqrt{x}}$ | 70. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{1+x}}$ |

3°. Қуйидаги

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

интегрални қарайлик, бунда a, b, c — ўзгармас сонлар, $ax^2 + bx + c$ квадрат учҳад тенг илдизларга эга эмас ($a \neq 0$, $b^2 - 4ac \neq 0$).

а) Агар $ax^2 + bx + c$ квадрат учҳад ҳақиқий илдизларга эга бўлмаса, у ҳолда унинг ишораси билан a нинг ишораси бир хил бўлиши маълумдир. Шунинг учун $a > 0$ деб фараз қиламиз. Бу ҳолда қаралаётган интегралда

$$t = \sqrt{a} x + \sqrt{ax^2 + bx + c} \quad (1)$$

$$(\text{ёки } t = -\sqrt{a} x + \sqrt{ax^2 + bx + c})$$

алмаштириш натижасида интеграл рационал функцияларни интеграллашга келтирилади.

б) Агар $ax^2 + bx + c$ квадрат учҳад ҳар хил x_1 ва x_2 ҳақиқий илдизларга эга бўлса, у ҳолда

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} \quad \text{бўлиб,}$$

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1) \quad (2)$$

алмаштириш натижасида интеграл остидаги функция t ўзгарувчининг рационал функциясига келтирилади.

Одатда (1) ва (2) алмаштиришлар Эйлери алмаштиришлари деб аталади.

15-мисол. Ушбу

$$\int \frac{1 - \sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}} dx$$

интегрални ҳисобланг.

Эйлер алмаштиришларидан фойдаланиб,

$$\sqrt{1+x+x^2} = tx + 1$$

десак, натижада

$$x = \frac{2t-1}{1-t^2}, \quad dx = 2 \cdot \frac{1-t+t^2}{(1-t^2)^2} dt,$$

$$\sqrt{1+x+x^2} = \frac{1-t+t^2}{1-t^2}, \quad t = \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$$

бўлади.

Топилган муносабатлардан фойдалансак,

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - \sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}} dx &= - \int \frac{2tdt}{1-t^2} = \\ &= \ln |1-t^2| + C = \ln \left| 1 - \left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} \right)^2 \right| + C \end{aligned}$$

ҳосил бўлади.

Кўп ҳолларда Эйлер алмаштиришлари мураккаб ҳисоблашларга олиб келади. Қуйида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ интегрални ҳисоблашнинг яна бир усулини келтирамыз.

$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ функцияни алгебраик алмаштиришлар ёрдамида ҳар доим қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин:

$$\frac{R_1(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + R_2(x),$$

бу ерда $R_1(x)$ ва $R_2(x)$ рационал касрлардир. Рационал касрларни интеграллаш масаласи юқорида кўрилганини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\int R_1(x) \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

интегрални ҳисоблашга келамиз. Маълумки, $R_1(x)$ рационал каср $P_n(x)$ кўпхад ва элементар (соғда) касрлар йиғиндисини кўринишида ифодалангани. Шундай қилиб,

$$\int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (3)$$

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m \sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad p^2 - 4q < 0 \quad (5)$$

интегралларга келтирамиз.

(3) интегрални ҳисоблаш учун

$$\int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = Q(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \\ + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (6)$$

формуладан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Бу ерда λ бирор сон, $Q(x)$ тартиби $(n-1)$ дан катта бўлмаган кўпхад. Охириги формулада тенгликнинг ҳар иккала томонидан ҳосила олиш ёрдамида ҳосил бўлган тенгликдан λ ва $Q(x)$ кўпхаднинг коэффициентлари топилади.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \text{ интеграл эса ўзгарувчини алмаштириш}$$

усули билан ҳисобланади.

(4) формула билан ифодаланган интегрални $t = \frac{1}{x - \alpha}$ алмаштириш ёрдамида (3) кўринишга келтириш мумкинлигини кўриш қийин эмас.

(5) кўринишдаги интегрални ҳисоблаш учун $ax^2 + bx + c$, $x^2 + px + q$ квадрат учхадларда $p = \frac{b}{a}$ бўлса, қаралаётган интегралларни

$$\int \frac{(2x + p) dx}{(x^2 + px + q)^{\frac{2m+1}{2}}} \quad \text{ва} \quad \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^{\frac{2m-1}{2}}}$$

интеграллар йиғиндиси орқали ифодалаб, биринчи интегралда $u = x^2 + px + q$, иккинчи интегралда эса

$$t = (\sqrt{x^2 + px + q})' = \frac{2x + p}{2 \sqrt{x^2 + px + q}}$$

алмаштириш бажарилади (Абель алмаштириши).

Агар $p \neq \frac{b}{a}$ бўлса,

$$x = \frac{\alpha t + \beta}{t + 1}$$

алмаштириш ёрдамида (5) интеграл

$$\int \frac{P(t) dt}{(t^2 + \lambda)^m \sqrt{st^2 + r}}$$

кўринишга келтирилади, бу ерда $P(t)$, $(2m - 1)$ — тартибли кўпхад ва λ мусбат сондир. Юқоридаги алмаштиришда α ва β лар шундай танланадики, $x^2 + px + q$ ва $ax^2 + bx + c$ квадрат учхадларда t нинг биринчи даражаси қатнашган ҳадлар йўқолади.

$\frac{P(t)}{(t^2 + \lambda)^m}$ тўғри касрни содда касрларга ёйиш натижасида юқоридаги интеграл қуйидаги интегралларга келтирилади:

$$\int \frac{tdt}{(t^2 + \lambda)^k \sqrt{st^2 + r}}, \int \frac{dt}{(t^2 + \lambda)^k \sqrt{st^2 + r}}.$$

Бу интегралларнинг биринчиси $u^2 = st^2 + r$, иккинчиси эса

$$v = (\sqrt{st^2 + r})' = \frac{st}{\sqrt{st^2 + r}} \text{ Абель алмаштиришлари ёрдамида}$$

ҳисобланади.

16-мисол. Ушбу

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2) \sqrt{x^2 + 1}}$$

интегрални ҳисобланг.

Абель алмаштиришидан фойдаланамиз. Натижада

$$v = (\sqrt{x^2 + 1})' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

$$v^2 (x^2 + 1) = x^2, \quad x^2 + 2 = \frac{2 - v^2}{1 - v^2},$$

$$v \sqrt{x^2 + 1} = x, \quad dv \sqrt{x^2 + 1} + v^2 dx = dx,$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{dv}{1 - v^2} \text{ муносабатлар ҳосил бўлади.}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2) \sqrt{x^2 + 1}} = \int \frac{dv}{2 - v^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + v}{\sqrt{2} - v} + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{\sqrt{2} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}} + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2x^2 + 2} + x}{\sqrt{2x^2 + 2} - x} + C.$$

17-мисол. Ушбу

$$I = \int \frac{dx}{(2x+1)^2 \sqrt{4x^2+4x+5}}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегрални ҳисоблаш учун $2x+1 = 2 \operatorname{sh} t$ алмаштиришни бажарамиз. Натижада

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8} \int \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t} = -\frac{1}{8} \operatorname{cth} t + C = \\ &= -\frac{1}{8} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}}{\operatorname{sh} t} + C = -\frac{1}{8} \frac{\sqrt{4x^2+4x+5}}{(2x+1)} + C \end{aligned}$$

бўлади.

18-мисол. Ушбу

$$I = \int x \sqrt{x^2-2x+2} dx$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интеграл қуйидагича ҳисобланади:

$$\begin{aligned} I &= \int x \sqrt{x^2-2x+2} dx = \int x \sqrt{(x-1)^2+1} dx = \\ &= \int (x-1) \sqrt{(x-1)^2+1} dx + \int \sqrt{(x-1)^2+1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int [(x-1)^2+1]^{\frac{1}{2}} d[(x-1)^2+1] + \\ &+ \int \sqrt{(x-1)^2+1} d(x-1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{[(x-1)^2+1]^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \\ &+ \frac{x-1}{2} \sqrt{(x-1)^2+1} + \frac{1}{2} \ln |(x-1) + \sqrt{(x-1)^2+1}| + \\ &+ C = \frac{1}{3} (x^2-2x+2)^{3/2} + \frac{x-1}{2} \sqrt{x^2-2x+2} + \\ &+ \frac{1}{2} \ln |(x-1) + \sqrt{x^2-2x+2}| + C. \end{aligned}$$

4°. Биномиял дифференциалларни интеграллаш

Ушбу

$$x^m (ax^n + b)^p dx$$

ифода биномиял дифференциал деб аталади.

Бу ерда a, b — ҳақиқий сонлар, m, n, p лар эса раціонал сонлар бўлиб, $a \neq 0, b \neq 0, m \neq 0, n \neq 0, p \neq 0$. Ушбу

$$\int x^m (ax^n + b)^p dx$$

интеграллар қуйидаги уч ҳолда рационал функцияларни интеграллашга келтирилади:

1) Агар p — бутун сон бўлса, $x = t^N$ алмаштириш бажарилади, бу ерда N, m ва n касрларнинг умумий махражидир.

2) Агар $\frac{m+1}{n}$ бутун сон бўлса, $ax^n + b = t^s$ алмаштириш бажарилади, бу ерда s, p касрнинг махражидир.

3) Агар $\frac{m+1}{n} + p$ бутун сон бўлса, $a + bx^{-n} = t^s$ алмаштириш бажарилади, бу ерда ҳам s, p касрнинг махражидир.

19-мисол. Ушбу

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги ифода учун

$$a = b = 1, m = 0, n = 4, p = -\frac{1}{4} \text{ бўлиб,}$$

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \text{ бўлади.}$$

Демак, $1 + x^{-4} = t^4$ алмаштиришни бажариш лозим. Натижада:

$$x = (t^4 - 1)^{-\frac{1}{4}}, \quad \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \frac{(t^4 - 1)^{\frac{1}{4}}}{t},$$

$$dx = -t^3 (t^4 - 1)^{-\frac{5}{4}} dt.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = - \int \frac{t^3 dt}{t^4 - 1} = -\frac{1}{2} \left(\int \frac{dt}{t^2 - 1} + \int \frac{dt}{t^2 + 1} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + 4}{\sqrt[4]{1+x^4} - 4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C.$$

20-мисол. Ушбу

$$\int x^3 (x^4 - 27)^{\frac{1}{9}} dx$$

интегрални ҳисобланг.

$$\begin{aligned} \int x^3 (x^4 - 27)^{\frac{1}{9}} dx &= \frac{1}{4} \int (x^4 - 27)^{\frac{1}{9}} d(x^4 - 27) = \\ &= \frac{9 (x^4 - 27)^{\frac{10}{9}}}{40} + C. \end{aligned}$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$71. \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}} dx.$$

$$82. \int \frac{dx}{(1+x^2) \sqrt{1-x^2}}.$$

$$72. \int \frac{dx}{(x+1) \sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$83. \int \frac{dx}{(1-x^2) \sqrt{1+x^2}}.$$

$$73. \int \frac{dx}{(1-x)^2 \sqrt{1+x^2}}.$$

$$84. \int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1} dx.$$

$$74. \int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} dx.$$

$$85. \int \frac{ux}{(x^2+x+1) \sqrt{x^2+x-1}}.$$

$$75. \int \frac{x dx}{(1+x) \sqrt{1-x-x^2}}.$$

$$86. \int \frac{(x+1) dx}{(x^2+x+1) \sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$76. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2+1}}.$$

$$87. \int \frac{dx}{(x^2+2) \sqrt{2x^2-2x+5}}.$$

$$77. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

$$88. \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$78. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}}.$$

$$89. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1-2x-x^2}}.$$

$$79. \int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^3+4x+3}} dx.$$

$$90. \int \frac{x - \sqrt{x^2+3x+2}}{x + \sqrt{x^2+3x+2}} dx.$$

$$80. \int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2+2x}}.$$

$$91. \int x \sqrt{x^2-2x+2} dx.$$

$$81. \int \frac{x dx}{(x^2-1) \sqrt{x^2-x-1}}.$$

$$92. \int \frac{dx}{(1 + \sqrt{x(1+x)})^2}.$$

93. $\int \frac{x^6}{\sqrt{x^2+1}} dx.$
94. $\int \frac{dx}{x \sqrt{5x^2-2x+1}}, x > 0.$
95. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$
96. $\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{x^2-1}}.$
97. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1+2x+2x^2}}.$
98. $\int \frac{dx}{(x^2+4x+7)^{3/2}}.$
99. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^{5/2}}.$
100. $\int \frac{(x+1)}{(x^2+x+1)^{3/2}} dx.$
101. $\int \frac{xdx}{(2x^2+1) \sqrt{3x^2+5}}.$
102. $\int \frac{(x+3) dx}{(x^2+1) \sqrt{x^2+x+1}}.$
103. $\int \frac{dx}{(x^2-x+1) \sqrt{x^2+x+1}}.$
104. $\int \frac{x^2+x+1}{x \sqrt{x^2-x+1}} dx,$
 $x > 0.$
105. $\int \frac{x + \sqrt{1+x+x^2}}{1+x + \sqrt{1+x+x^2}} dx.$
106. $\int \left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} \right)^2 \times$
 $\times \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}.$
107. $\int x^{-\frac{1}{3}} (1-x^{\frac{1}{6}})^{-1} dx.$
108. $\int x^{\frac{1}{2}} (1+x^{\frac{1}{3}})^{-2} dx.$
109. $\int x^{\frac{2}{3}} (1+x^{\frac{1}{3}})^{-3} dx.$
110. $\int x^{\frac{1}{2}} (1+x^{\frac{1}{4}})^{-10} dx.$
111. $\int x^2 \sqrt[3]{(x+1)^2} dx.$
112. $\int \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}} dx.$
113. $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$
114. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}} dx.$
115. $\int \frac{dx}{x \sqrt[6]{x^6+1}}.$
116. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^3}}}$
117. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[3]{(2+x^3)^5}}.$
118. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{2-x^2}}.$
119. $\int \sqrt[3]{x-x^2} dx.$
120. $I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$
 $a \neq 0, n \in N, n > 1,$
интеграл учун

$$I_n = \frac{1}{na} \left(x^{n-1} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \right. \\ \left. - \frac{b}{2} (2n-1) \cdot I_{n-1} - c(n-1) I_{n-2} \right)$$

рекуррент формулани исботланг.

5-§. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

$R(\sin x, \cos x)$ орқали $\sin x$ ва $\cos x$ ларнинг рационал функцияси белгиланган бўлсин.

$\int R(\sin x, \cos x) dx$ интегрални қарайлик. Бу интегралда

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad (-\pi < x < \pi)$$

алмаштириш бажарилса, у ҳолда интеграл остидаги ифода t ўзгарувчининг рационал функциясига айланади:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ алмаштириш тригонометрик функцияларни интеграллашда умумий алмаштириш бўлиб, ундан фойдаланиш кўп ҳолларда мураккаб ҳисоблашларга олиб келади. Шунинг учун интеграл остидаги функция кўринишига қараб (масалан, $t = \sin x$, $t = \cos x$ ва ҳ. к.) алмаштириш танлангани маъқулдир.

21-мисол. Ушбу

$$I = \int \frac{dx}{1 + e \cos x}$$

а) $0 < e < 1$; б) $e > 1$ интеграл ҳисоблансин.

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ алмаштириш натижасида

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+e \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1+e+(1-e)t^2}$$

ҳисил бўлади.

$1-e$ ифоданинг ишораси e га боғлиқ бўлиб, а) ҳол, яъни $0 < e < 1$ да мусбат б) ҳол, яъни $e > 1$ да эса манфий бўлади. Демак, $0 < e < 1$ да

$$I = \frac{2}{1-\varepsilon} \int \frac{dt}{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} + t^2} = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} t + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C$$

бўлади, $\varepsilon > 1$ бўлганда эса

$$I = \frac{2}{1-\varepsilon} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon-1}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon-1}} - t}{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon-1}} + t} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \left| \frac{1+\varepsilon + t^2(\varepsilon-1) - 2t\sqrt{\varepsilon^2-1}}{1+\varepsilon + t^2(\varepsilon-1)} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \left| \frac{\varepsilon + \cos x - \sqrt{\varepsilon^2-1} \sin x}{1 + \varepsilon \cos x} \right| + C.$$

бўлади.

22-мисол. Ушбу

$$\int \cos^5 x dx$$

интегрални ҳисобланг.

Агар бу интеграл остидаги ифода учун $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ алмаштириш бажарсак натижада

$$\int \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^5 \frac{2dt}{1+t^2}$$

интеграл ҳосил бўлади. Интеграл остидаги функция t нинг рационал функцияси бўлса-да, уни интеграллаш мураккаб ҳисоблашлардан иборат эканини кўриш қийин эмас. Агар интеграл остидаги функция кўринишини қуйидагича ўзгартирсак:

$$\cos^5 x = \cos^4 x \cdot \cos x = (1 - \sin^2 x)^2 \cos x.$$

У ҳолда берилган интеграл осон ҳисобланади:

$$\int \cos^5 x dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) =$$

$$= \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) d(\sin x) =$$

$$= \sin x - 2 \cdot \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

23-мисол. Ушбу

$$I = \int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5}$$

интегрални ҳисобланг.

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ алмаштириш натижасида:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \quad \text{Бу муносабат-}$$

лардан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \frac{dt}{6t+4(1-t^2)+5(1+t^2)} = 2 \int \frac{dt}{t^2+6t+9} = \\ &= 2 \cdot \int (t+3)^{-2} dt = -\frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{3 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C. \end{aligned}$$

24-мисол. Ушбу

$$\int \sin x \cdot \sin 3x \, dx.$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги функция кўринишини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\sin x \sin 3x = \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 4x).$$

Натижада

$$\begin{aligned} \int \sin x \cdot \sin 3x \, dx &= \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 4x \, dx = \\ &= \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 4x}{8} + C \end{aligned}$$

бўлади.

25-мисол. Ушбу

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги функциянинг кўринишини ўзгартирамиз:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a \sin x + b \cos x} &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{1}{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{1}{\sin(x + \gamma)}. \end{aligned}$$

Бунда $\gamma = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $a^2 + b^2 \neq 0$.

Демак, қаралаётган интеграл қуйидаги кўринишга келади:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \int \frac{dx}{\sin(x+\gamma)} = (t = x + \gamma) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \left[\int \frac{\sin \frac{t}{2}}{2 \cos \frac{t}{2}} dt + \int \frac{\cos \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \left(\ln \left| \sin \frac{t}{2} \right| - \ln \left| \cos \frac{t}{2} \right| \right) + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x+\gamma}{2} \right| + C, \\ \gamma &= \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{aligned}$$

26-мисол. Ушбу

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^5 x \cdot \cos x}} \text{ интегрални ҳисобланг.}$$

$t = \sin x$ алмаштириш натижасида интеграл қуйидаги кўринишга олади:

$$I = \int t^{-\frac{5}{3}} (1-t^2)^{-\frac{2}{3}} dt.$$

Интеграл остидаги ифода биномиал дифференциал бўлиб,

унда $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-\frac{5}{3}+1}{2} - \frac{2}{3} = -1$. Бу ҳолда $-1+t^{-2} =$
 $= u^3$ алмаштиришни бажариш лозимдир. Лекин қаралаётган
 интегрални $I = \int \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\sin^5 x}{\cos^3 x}}} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$ кўринишда ифодаляб,

соддароқ $\operatorname{tg} x = t$ алмаштиришни бажарсак, у ҳолда

$$I = \int (\operatorname{tg} x)^{-\frac{5}{3}} d(\operatorname{tg} x) = -\frac{3}{2} (\operatorname{tg} x)^{-\frac{2}{3}} + C$$

бўлади.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$121. \int \sin^6 x \cdot dx.$$

$$122. \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \, dx.$$

$$123. \int \sin^5 x \cdot \cos^5 x \, dx.$$

$$124. \int \frac{\sin 3x}{\cos^4 x} \, dx.$$

$$125. \int \frac{dx}{\cos^3 x}.$$

$$126. \int \frac{dx}{\sin^3 x}.$$

$$127. \int \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

$$128. \int \frac{dx}{\sin^4 x}.$$

$$129. \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$$

$$130. \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}.$$

$$131. \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^4 x}.$$

$$132. \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}}.$$

$$133. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}.$$

$$134. \int \cos x \cdot \cos 4x \, dx.$$

$$135. \int \sin 2x \cdot \cos 4x \, dx.$$

$$136. \int \sin^2 x \cdot \cos (3x+1) \, dx.$$

$$137. \int \cos^2 2x \cdot \cos^2 3x \, dx.$$

$$138. \int \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} 7x \, dx.$$

$$139. \int \frac{\cos 3x}{\sin^5 x} \, dx.$$

$$140. \int \frac{\cos^2 x}{\sin 4x} \, dx.$$

$$141. \int \cos^3 x \, dx.$$

$$142. \int \cos^3 x \cdot \cos 2x \, dx.$$

$$143. \int \cos^5 2x \cdot \sin^2 2x \, dx.$$

$$144. \int \operatorname{sh}^3 x \cdot \operatorname{ch} 2x \, dx.$$

$$145. \int \frac{\sin x}{(3 \cos x - 1)^3} \, dx.$$

$$146. \int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} \, dx.$$

$$147. \int \frac{dx}{\sin x (1 + \cos x)}.$$

$$148. \int \frac{\sin 2x}{3 + 4 \sin^2 x} \, dx.$$

$$149. \int \frac{|\cos x - \cos 3x|}{1 - \sin^4 x} \, dx.$$

$$150. \int \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - 3} \, dx.$$

$$151. \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \, dx.$$

$$152. \int \frac{dx}{\cos 2x - \sin 2x}.$$

$$153. \int \frac{dx}{5 + \cos^2 x}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

$$154. \int \frac{dx}{2 + 3 \sin 2x - 4 \cos^2 x}.$$

$$155. \int \frac{dx}{4 + 3 \operatorname{sh}^2 x}.$$

$$156. \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x}.$$

$$157. \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

$$158. \int \frac{dx}{a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x}, \quad b > 0.$$

- $$\begin{aligned}
 159. & \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} \\
 160. & \int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x} dx \\
 161. & \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \\
 162. & \int \frac{dx}{(a \sin x + a \cos x)^2} \\
 163. & \int \frac{dx}{7\cos x - 4\sin x + 8} \\
 164. & \int \frac{\cos x + 2\sin x}{4\cos x + 3\sin x - 2} dx \\
 165. & \int \frac{1 - \cos(x-a)}{1 - \cos(x+a)} dx \\
 166. & \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x + \sqrt{2}} dx \\
 167. & \int \frac{2\cos x + \sin x - 3}{2\cos x - \sin x - 3} dx \\
 168. & \int \frac{1 + \sin x}{\sin 2x + 2\sin x} dx \\
 169. & \int \frac{dx}{\sin 2x + 4\sin x - 4\sin^2 x} \\
 170. & \int \frac{dx}{(1 - \cos x + \sin x)^2} \\
 171. & \int \sin^6 x \cdot \sqrt[3]{\cos x} dx \\
 172. & \int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^3} \\
 173. & \int \frac{\sin x}{\cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}} dx \\
 174. & \int \frac{dx}{(1 + e \cos x)^2}, \\
 & 0 < e < 1. \\
 175. & \int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx \\
 176. & \int \sin^n x dx \\
 177. & \int \cos^n x dx \\
 178. & \int \frac{dx}{\sin^n x} \\
 179. & \int \frac{dx}{\cos^n x} \\
 180. & \int \sin^n x \cdot \cos^m x dx, \\
 & m, n \in N.
 \end{aligned}$$

6-§. ТУРЛИ ХИЛДАГИ ИНТЕГРАЛЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

27-мисол. Ушбу

$$I = \int e^{x+e^x} dx$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги функцияни $e^{x+e^x} = e^x \cdot e^{e^x}$ кўринишида ифода қилиб $e^x = t$ алмаштиришни бажарамиз. Натижада

$$I = \int e^{e^x} \cdot e^x dx = \int e^t \cdot dt = e^t + c = e^{e^x} + c$$

бўлади.

28-мисол. Ушбу

$$I_1 = \int e^{ax} \cdot \cos bx dx,$$

$$I_2 = \int e^{ax} \cdot \sin bx dx$$

интегралларни ҳисобланг.

Бу интегралларни ҳисоблаш учун I_2 ни $i = \sqrt{-1}$ га қўпайтириб I_1 га қўшамиз. Натижада $I_1 + iI_2 = \int e^{ax} \cdot e^{ibx} dx$ бўлади. Энди $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} I_1 + iI_2 &= \int e^{(a+ib)x} dx = \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} + C = \\ &= \frac{e^{ax} \cdot e^{ibx}}{a+ib} + C = \frac{e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)}{a^2 + b^2}(a - ib) + C = \\ &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos bx + b \sin bx + i(a \sin bx - b \cos bx)) + C. \end{aligned}$$

Комплекс сонларнинг тенглиги ҳақидаги тасдиққа кўра топамиз:

$$\begin{aligned} I_1 &= e^{ax} \cdot \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} + C, \\ I_2 &= e^{ax} \cdot \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} + C. \end{aligned}$$

29-мисол. Ушбу

$$I = \int x^x(1 + \ln x) dx$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги функция учун $F(x) = x^x$ бошланғич функция эканини кўриш қийин эмас. $x^x = t$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда $x^x(1 + \ln x) dx = dt$ бўлиб,

$$I = \int dt = t + C$$

бўлади.

Демак.

$$I = \int x^x(1 + \ln x) dx = x^x + C.$$

30-мисол. Ушбу

$$I = \int x(1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} e^{\operatorname{arctg} x} dx$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги ифодани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$x(1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} e^{\operatorname{arctg} x} dx = x e^{\operatorname{arctg} x} \frac{dx}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}.$$

$\operatorname{arctg} x = t$ алмаштириш натижасида

$$x = \operatorname{tg} t, \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos t}, \frac{dx}{1+x^2} = dt$$

бўлиб,

$$I = \int \operatorname{tg} t \cdot e^t \cdot \frac{dt}{(\cos t)^{-1}} = \int e^t \sin t dt \text{ бўлади.}$$

Бу $\int e^t \sin t dt$ интеграл 28-мисолда ҳисобланган. Демак,

$$\begin{aligned} I &= \int e^t \sin t dt = e^t \cdot \frac{\sin t - \cos t}{2} + C = \\ &= e^{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{x-1}{2\sqrt{x^2+1}} + C. \end{aligned}$$

31-мисол. Ушбу

$$I = \int x^3 \arcsin x dx$$

интегрални ҳисобланг.

Бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланамиз:

$$u = \arcsin x, du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$x^3 dx = dv, v = \frac{1}{4} x^4.$$

$$\begin{aligned} I &= \int x^3 \arcsin x dx = \frac{x^4}{4} \cdot \arcsin x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \frac{x^4}{4} \arcsin x - \frac{1}{4} \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$

$I_1 = \int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx$ интегралда $x = \sin t$ алмаштиришни ба-
жариб ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \sin^4 t dt = \int (\sin^2 t)^2 dt = \int \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2 dt = \\ &= \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2} \right) dt = \frac{1}{4} \left(t - \sin 2t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} t + \frac{\sin 4t}{8} \right) + C. \end{aligned}$$

$t = \arcsin x$ эканини ҳисобга олган ҳолда

$$I = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3}{32} \right) \arcsin x + \frac{1}{32} (2x^3 + 3x) \sqrt{1-x^2} + C$$

эканини топамиз.

32-мисол. Ушбу

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)^2 \sqrt{x^2+3x+1}}$$

интегрални ҳисобланг.

Аввало бу интегралда $t = \frac{1}{x-1}$ алмаштиришни бажарамиз. Натижада $dx = -\frac{1}{t^2} dt$ бўлиб, интеграл қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$I = - \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}.$$

Бу интегрални ҳисоблаш учун (6) формуладан фойдаланамиз:

$$\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}} = (At+B) \cdot \sqrt{5t^2+5t+1} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}.$$

Бу тенгликни дифференциаллаб, ҳосил бўлган касрларни умумий махражга келтириш натижасида t нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб топамиз:

$$A = \frac{1}{10}, \quad B = -\frac{3}{20}, \quad \lambda = \frac{11}{40}.$$

У ҳолда

$$\begin{aligned} I &= - \left(\frac{1}{10}t - \frac{3}{20} \right) \sqrt{5t^2+5t+1} - \frac{11}{40} \int \frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}} = \\ &= - \left(\frac{1}{10}t - \frac{3}{20} \right) \cdot \sqrt{5t^2+5t+1} - \frac{11}{40\sqrt{5}} \int \frac{d\left(t + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{20}}} = \\ &= - \left(\frac{1}{10}t - \frac{3}{20} \right) \sqrt{5t^2+5t+1} - \frac{11}{40\sqrt{5}} \cdot \ln \left| t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2+t+\frac{1}{5}} \right| + C = \\ &= \frac{3x-5}{20(x-1)^3} \sqrt{x^2+3x+1} - \frac{11}{40\sqrt{5}} \cdot \ln \left| \frac{(x+1)\sqrt{5}+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1} \right| + C. \end{aligned}$$

33-мисол. Ушбу

$$I = \int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^2}$$

интегрални ҳисобланг.

Аввал қуйидаги умумийроқ интегралларни қараймиз:

$$I_{m,n} = \int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Бу интегралда $t = \frac{x+a}{x+b}$ алмаштиришни бажарсак, у ҳолда

$$dx = \frac{b-a}{(1-t)^2} dt, \quad x+a = \frac{t(b-a)}{1-t}, \quad x+b = \frac{b-a}{1-t}$$

бўлади.

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int \frac{(1-t)^m (1-t)^n (b-a)}{(b-a)^{m+n} t^n (1-t)^2} dt = \\ &= \frac{1}{(b-a)^{m+n-1}} \int \frac{(1-t)^{m+n-2}}{t^n} dt. \end{aligned}$$

Юқорида қаралаётган интеграл учун

$$m=2, \quad n=3, \quad a=-2, \quad b=3.$$

Демак,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{5^4} \int \frac{(1-t)^3}{t^3} dt = \frac{1}{625} \left(-\frac{1}{t} + 3t - \frac{t^2}{2} - 3 \ln |t| \right) + \\ &+ C = \frac{1}{625} \left(-\frac{x+3}{x-2} + 3 \cdot \frac{x-2}{x+3} - \frac{1}{2} \left(\frac{x-2}{x+3} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 3 \ln \left| \frac{x-2}{x+3} \right| \right) + C. \end{aligned}$$

34-мисол. Ушбу

$$I = \int \frac{dx}{1+x^4+x^8}$$

интегрални ҳисобланг.

$1+x^4+x^8 = (x^4+1)^2 - x^4$ тенгликдан фойдаланиб, интеграл остидаги функция кўринишини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^4+x^8} &= \frac{1}{(x^4+1)^2 - x^4} = \frac{1}{(x^4+1+x^2)(x^4+1-x^2)} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} + \frac{1-x^2}{x^4-x^2+1} \right). \end{aligned}$$

У ҳолда

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1-x^2}{x^4-x^2+1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 3} - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \cdot \operatorname{sgn} x + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \\ &\cdot \ln \left| \frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2 + x\sqrt{3} + 1}{x^2 - x\sqrt{3} + 1} \right| + \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \Big) + C.$$

35-мисол. Ушбу

$$I = \int |x| dx$$

интегрални ҳисобланг.

а) $x > 0$ бўлсин. У ҳолда

$$I = \int |x| dx = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1;$$

$$б) x < 0 \text{ да } \int |x| dx = - \int x dx = - \frac{x^2}{2} + C_2;$$

$x = 0$ да $C_2 = C_1 = C$ бўлгани учун

$$I = \int |x| dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{sgn} x + C \text{ бўлади.}$$

36-мисол. Ушбу

$$I = \int e^{-|x|} dx$$

интегрални ҳисобланг.

$$x \geq 0, x < 0$$

ҳолларни худди 35-мисолга ўхшаш қараймиз:

$$x \geq 0 \text{ да } \int e^{-|x|} dx = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C_1.$$

$$x < 0 \text{ да}$$

$$\int e^{-|x|} dx = \int e^x dx = e^x + C_2.$$

$$x = 0 \text{ да } -e^0 + C_1 = e^0 + C_2$$

бўлгани учун $C_1 = 2 + C_2$ бўлади.

Демак,

$$\int e^{-|x|} dx = \begin{cases} 2 - e^{-x} + C, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса,} \\ e^x + C, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг.

181. $\int e^{ax} \sin^3 bx dx.$

184. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x} - 2}.$

182. $\int x^2 e^x \cos^2 x dx.$

185. $\int \ln^n x dx.$

183. $\int \frac{dx}{1 + e^{x/2} + e^{x/3} + e^{x/6}}.$

186. $\int \frac{\arccos x}{(1-x^2)^{3/2}} dx.$

187. $\int x \operatorname{arctg} x \cdot \ln(1+x^2) dx.$
188. $\int x \arccos \frac{1}{x} dx.$
189. $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{3/2}} dx.$
190. $\int x \ln(4+x^4) dx.$
191. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$
192. $\int x \sqrt{x^2+1} \ln \sqrt{x^3-1} dx.$
193. $\int \frac{ax^2+b}{x^3-1} \cdot \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx.$
194. $\int \frac{x^3 \cdot \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$
195. $\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$
196. $\int \sqrt{th^2 x + 1} dx.$
197. $\int x |x| dx.$
198. $\int (x + |x|)^2 dx.$
199. $\int \max(1, x^2) dx.$
200. $\int \{ |1+x| - |1-x| \} dx.$
201. $\int \frac{dx}{(x+1)^5 \sqrt{x^2+2x}}$
202. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^6+4}\sqrt{x}}.$
203. $\int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}.$
204. $\int \frac{dx}{(1-\sqrt{1-x^2})^2}.$
205. $\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^4-1} dx.$
206. $\int \frac{dx}{(1+x^4)^{1/4} \sqrt{1+2x}}.$
207. $\int \left(\frac{\sin x}{e^x} \right)^2 dx.$
208. $\int \frac{x \ln |x|}{(1-x^2)\sqrt{x^2-1}} dx.$
209. $\int \frac{dx}{x^{2n}-a^{2n}}, n \in N,$
 $a > 0.$
210. $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{b^2-x^2}}.$
 $a, b \neq 0.$
211. $\int \frac{dx}{1+2a \cos x + a^2}.$
212. $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^n+a}},$
 $a \neq 0, n \in N.$
213. $\int \frac{dx}{ae^x + be^{-x}},$
 $a \cdot b \neq 0.$
214. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+be^x}}, a \cdot b \neq 0.$
215. $\int \ln |x^2+a| dx.$
216. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x+a}} dx.$
217. $\int \frac{\ln |x+\sqrt{x^2+a}|}{x^3} dx.$
218. $\int x^{a-1} \ln^{b-1} x (a \ln x +$
 $+ b) dx.$
219. $\int \frac{\ln x \cdot \cos \ln x}{x} dx.$
220. $\int \cos \operatorname{arctg} \sin x dx.$

АНИҚ ИНТЕГРАЛ

1-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛ ТАЪРИФЛАРИ

1. $[a, b]$ сегментнинг бўлиниши

Бирор $[a, b] \subset R$ сегмент берилган бўлсин. $[a, b]$ сегментнинг

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

муносабатда бўлган ихтиёрий чекли сондаги $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ нуқталар системаси $[a, b]$ сегментнинг бўлиниши деб аталади ва у $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ каби белгиланади.

Ҳар бир $x_k (k = 1, 2, 3, \dots, n)$ нуқта P бўлинишнинг бўлувчи нуқтаси, $[x_k, x_{k+1}]$ сегмент эса бўлиниш оралиғи дейилади.

P бўлиниш оралиқларининг узунлиги $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) нинг энг каттаси, яъни

$$\lambda_P = \max_{1 \leq k \leq n} \{ \Delta x_k \} = \max \{ \Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_{n-1} \}$$

миқдор P бўлинишнинг диаметри деб аталади. Масалан, $[a, b] = [0, 1]$ бўлсин. Нуқталарнинг

$$0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \dots, \frac{9}{10}, 1,$$

$$0, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, \frac{8}{10}, 1$$

системалари $[0, 1]$ сегментнинг

$$P_1 = \left\{ 0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}, 1 \right\},$$

$$P_2 = \left\{ 0, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, \frac{8}{10}, 1 \right\}$$

бўлинишлари бўлиб, уларнинг диаметрлари мос равишда

$\lambda_{P_1} = \frac{1}{10}$, $\lambda_{P_2} = \frac{1}{5}$ бўлади. $[a, b]$ сегмент берилган ҳолда

унинг турли усуллар билан исталган сондаги бўлинишларини тузиш мумкин. Бу бўлинишлардан иборат тўплам $\mathcal{P}$ бўлсин: $\mathcal{P} = \{P\}$.

2. Интеграл йиғинди

$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва чегараланган бўлсин. $[a, b]$ сегментнинг P бўлинишини қарайлик ($a < b$), бу бўлинишга мос келувчи ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, n-1$) оралиқда ихтиёрий $\xi_k (\xi_k \in [x_k, x_{k+1}])$ нуқта олиб, қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k, \quad (x_{k+1} - x_k = \Delta x_k).$$

Одатда бу йиғинди $f(x)$ функциянинг интеграл йиғиндиси ёки Риман йиғиндиси деб аталади.

3. Аниқ интегралнинг таърифи

1-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ берилганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ мавжуд бўлсаки, диаметри $\lambda_p < \delta$ бўлган $[a, b]$ оралиғининг ҳар қандай P бўлинишида ($P \in \mathcal{P}$) ҳамда $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқдан олинган ихтиёрий $\xi_k (\xi_k \in [x_k, x_{k+1}])$ нуқталарда

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k - I \right| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда I сонини $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги аниқ интеграли деб аталади ва уни

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

каби белгиланади.

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = x$$

функциянинг $[a, b]$ сегментдаги интегралини ҳисобланг.

Маълумки, $f(x)$ функция учун $[a, b]$ сегментда интеграл йиғинди

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \Delta x_k$$

кўринишда бўлиб, бунда

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k,$$

$$x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1}.$$

Бу тенгсизликдан, $\Delta x_k > 0$ бўлгани учун топамиз:

$$x_k \Delta x_k \leq \xi_k \Delta x_k \leq x_{k+1} \Delta x_k,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \Delta x_k \leq \sigma \leq \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \Delta x_k.$$

Энди $\sum_{k=0}^{n-1} x_k \Delta x_k$ ва $\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \Delta x_k$ йиғиндиларни қуйидагича ўзгартириб ёзиб оламиз:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} x_k \Delta x_k &= \sum_{k=0}^{n-1} x_k (x_{k+1} - x_k) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}^2 - x_k^2) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)^2 = \\ &= \frac{1}{2} (x_n^2 - x_0^2) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 = \frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2. \end{aligned}$$

Агар $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \Delta x_k = \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2$$

бўлади.

Демак,

$$\frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 \leq \sigma \leq \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2.$$

Бу муносабатдан

$$\left| \sigma - \frac{b^2 - a^2}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2$$

теңсизлик келиб чиқади. Сўнгра $\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2$ учун

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 \leq \lambda_p \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \lambda_p \cdot \frac{b-a}{2}$$

($\lambda_p = \max \{ \Delta x_k \}$) бўлишидан $\lambda_p \rightarrow 0$ да

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 \rightarrow 0 \text{ бўлади.}$$

Демак,

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma = \frac{b^2 - a^2}{2}, \text{ яъни } \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

2-мисол. Ушбу

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса.} \end{cases}$$

Дирихле функцияси учун $[0, 1]$ сегментда интеграл мавжудликка текширинг.

Бу функция учун қаралаётган оралиқда интеграл йиғинди қуйидагича бўлади:

$$\sigma = \begin{cases} 1, & \text{агар барча } \xi_k \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар барча } \xi_k \text{ иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

Равшанки, $\lambda_p \rightarrow 0$ да σ йиғинди лимитга эга эмас.

Демак, Дирихле функцияси $[0, 1]$ сегментда интегралланувчи эмас.

4. Дарбу йиғиндилари. Аниқ интегралнинг бошқача таърифи.

$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган бўлиб, чегараланган бўлсин. $[a, b]$ оралиқнинг бирор

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}$$

бўлинишини олайлик. Тўпламнинг аниқ чегаралари ҳақидаги теоремага кўра

$$m_k = \inf \{f(x), x \in [x_k, x_{k+1}]\},$$

$$M_k = \sup \{f(x), x \in [x_k, x_{k+1}]\} \quad (k = 0, n-1)$$

лар мавжуд ва ихтиёрий $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ учун

$$m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$$

тенгсизликлар ўринлидир.

2-таъриф. Ушбу

$$s_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \quad S_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

Йиғиндилар мос равишда Дарбунинг қуйи ҳамда юқори йиғиндилари деб аталади.

Дарбу йиғиндилари учун қуйидаги муносабатлар ўринлидир: (қ. [1], 279-бет).

$$1) \quad s_p(f) \leq \sigma_p(f) \leq S_p(f).$$

$$2) \quad m(b-a) \leq s_p(f) \leq S_p(f) \leq M(b-a).$$

$$M = \sup\{f(x)\}, \quad m = \inf\{f(x)\}, \quad x \in [a, b].$$

■ Демак, 2) муносабат Дарбу йиғиндилари тўпламларининг чегараланганлигини билдиради.

3-таъриф. $\{s_p(f)\}$ тўпламнинг аниқ юқори чегараси $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги қуйи интеграли деб аталади ва

$$\underline{I} = \int_a^b f(x) dx$$

каби белгиланади.

$\{S_p(f)\}$ тўпламнинг аниқ қуйи чегараси $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги юқори интеграли деб аталади ва

$$\bar{I} = \int_a^b f(x) dx$$

каби белгиланади.

4-таъриф. Агар $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги қуйи ва юқори интеграллари бир-бирига тенг бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи дейилади ва уларнинг умумий қиймати

$$\underline{I} = \bar{I} = I$$

$f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги аниқ интеграли (Риман интеграли) дейилади ва у

$$\int_a^b f(x) dx$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Агар

$$\int_a^b f(x) dx \neq \int_a^b f(x) dx$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи эмас дейилади.

3-мисол. Ушбу

$$f(x) = x$$

функция 4-таъриф ёрдамида $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи эканини кўрсатинг.

$[a, b]$ оралиқнинг ихтиёрий P бўлинишини оламиз ва $f(x) = x$ учун Дарбу йиғиндиларини тузамиз. Ҳар бир

$$[x_k, x_{k+1}] \quad (k = \overline{0, n-1})$$

оралиқда $m_k = x_k$, $M_k = x_{k+1}$ эканини ҳисобга олсак,

$$s_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \Delta x_k = \frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2,$$

$$S_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \cdot \Delta x_k = \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2$$

ифодаларни топамиз.

Бу муносабатлардан

$$\sup \{s_p(f)\} = \frac{b^2 - a^2}{2},$$

$$\inf \{S_p(f)\} = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

эканини кўриш қийин эмас.

Демак,

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}, \quad \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

бўлиб, $f(x) = x$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи ва

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

4-мисол. Ушбу

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса.} \end{cases}$$

Дирихле функциясини $[0, 1]$ оралиқда 4-тариф ёрдамида интегралланувчиликка текширинг.

$[0, 1]$ оралиқнинг ихтиёрий P бўлинишини қараймиз ва унга нисбатан Дарбу йиғиндиларини тузамиз:

$$s_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = 0,$$

$$S_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = 1.$$

Бундан

$$\sup \{s_p(f)\} = 0,$$

$$\inf \{S_p(f)\} = 1$$

экани келиб чиқади. Демак, Дирихле функциясининг $[0, 1]$ оралиқда қуйи ва юқори интеграллари мавжуд. Лекин

$$\int_0^1 \chi(x) dx \neq \int_0^1 \chi(x) dx$$

бўлгани сабабли у $[0, 1]$ оралиқда интегралланувчи эмас.

Аниқ интегралнинг 1- ва 4-таърифлари ўзаро эквивалентдир.

2-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ МАВЖУДЛИГИ. ИНТЕГРАЛЛАНУВЧИ ФУНКЦИЯЛАР СИНФИ

1-теорема. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва чегараланган бўлсин. Бу функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиши учун $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сон топилиб, $[a, b]$ оралиқнинг диаметри $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай p бўлинишга нисбатан

$$S_p(f) - s_p(f) < \varepsilon \quad (1)$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Агар аввалгидек $f(x)$ функциянинг $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, n-1$) оралиқдаги тебранишини ω_k орқали белгиласак, у ҳолда (1) тенгсизлик

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon \quad (2)$$

кўринишга эга бўлади.

2-теорема. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлса, у шу оралиқда интегралланувчи бўлади.

3-теорема. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда чегараланган ва монотон бўлса, функция шу оралиқда интегралланувчи бўлади.

4-теорема. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда чегараланган ва бу оралиқнинг чекли сондаги нуқталарида узилишга эга бўлиб, қолган барча нуқталарида узлуксиз бўлса, функция шу оралиқда интегралланувчи бўлади.

5-мисол. Ушбу

$$I = \int_a^b x^2 dx$$

интегрални ҳисобланг.

$f(x) = x^2$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлгани учун 2-теоремага кўра у қаралаётган оралиқда интегралланувчи бўлади.

Демак, бу функциянинг $[a, b]$ оралиқ бўйича интегрални таърифга кўра ҳисоблашда $[a, b]$ оралиқнинг бўлинишини ҳамда ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ бўлакда ξ_k нуқталарини интеграл йиғинди ва унинг лимитини ҳисоблашга қулай қилиб олиш имкониятига эга бўламиз.

Шуни эътиборга олган ҳолда $[a, b]$ оралиқни n та тенг бўлакка бўлиб, ξ_k ($k = 0, n-1$) нуқталар сифатида $[x_k, x_{k+1}]$ сегментларнинг чап четки нуқталарини оламиз.

Натижада

$$\begin{aligned} \sigma_p(f) &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right)^2 = \\ &= \frac{b-a}{n} \left[na^2 + \frac{2a(b-a)}{n} (1 + 2 + \dots + (n-1)) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2) \right] = \\ &= \frac{b-a}{n} \left[na^2 + \frac{2a(b-a)}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right]. \end{aligned}$$

$\lambda_p \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) да лимитга ўтиб, топамиз:

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma_p(f) = \frac{1}{3} (b^3 - a^3).$$

Демак,

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3} (b^3 - a^3).$$

6-мисол. Ушбу

$$\int_0^1 a^x dx \quad (a > 0)$$

интегрални ҳисобланг.

Худди юқоридаги 5-мисолга ўхшаш $[0,1]$ сегментни тенг n та бўлакка бўламиз ва ξ_k нуқталар сифатида $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = \overline{0, n-1}$) сегментларнинг чап четки нуқталарини оламиз. Натижада

$$\sigma_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{a-1}{a^{1/n}-1}$$

бўлади.

$a > 0$ эканини ҳисобга олган ҳолда $n \rightarrow \infty$ да лимитга ўтиб, топамиз:

$$\int_0^1 a^x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a-1}{a^{1/n}-1}}{\frac{1}{n}} = \frac{a-1}{\ln a}.$$

Хусусан $a = e$ бўлса, $\int_0^1 e^x dx$ интеграл $e - 1$ га тенг бўлади.

7-мисол. Ушбу

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} \quad (0 < a < b)$$

интегрални ҳисобланг.

Фараз қилайлик, $P[a,b]$ сегментнинг ихтиёрий бўлиниши бўлсин. ξ_k нуқталар сифатида қуйидагиларни оламиз:

$$\xi_k = \sqrt{x_k x_{k+1}} \quad (k = \overline{0, n-1}).$$

Натижада

$$\begin{aligned} \sigma_p(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta x_k}{x_k x_{k+1}} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} \right) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \end{aligned}$$

ҳосил бўлади.

Демак,

$$\int_a^b \frac{b}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

8-мисол. Ушбу

$$\int_a^b x dx$$

интегрални $[a, b]$ сегментнинг иккита турлича бўлинишларида ва ξ_k нуқталарнинг ҳар хил танланишларида ҳисобланг.

а) $[a, b]$ сегментни $n+1$ та тенг бўлакка бўлиб, ξ_k нуқталар сифатида $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = \overline{0, n}$) ораликларнинг чап четки нуқталарини оламиз. Натижада

$$\begin{aligned}\sigma_p(f) &= \frac{b-a}{n+1} \sum_{k=0}^n \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n+1} \right) = \\ &= \frac{b-a}{n+1} \left[(n+1)a + \frac{b-a}{n+1} (1+2+\dots+n) \right] = \\ &= \frac{b-a}{n+1} \left[(n+1)a + \frac{b-a}{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right]\end{aligned}$$

ҳосил бўлади.

$n \rightarrow \infty$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

б) $[a, b]$ сегментни n та тенг бўлакка бўлиб, ξ_k нуқталар сифатида ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = \overline{0, n-1}$) ораликларнинг ўртасида ётувчи $\frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ нуқталарни оламиз. Натижада

$$\begin{aligned}\sigma_p(f) &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = \frac{b-a}{n} \left(\frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{x_1 + x_2}{2} + \right. \\ &+ \dots + \left. \frac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2} \right) = \frac{b-a}{n} \left(\frac{x_0 + x_n}{2} + x_1 + \dots + \right. \\ &+ \left. x_{n-1} \right) = \frac{b-a}{n} \left(\frac{a+b}{2} + (n-1)a + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \right)\end{aligned}$$

бўлади.

$n \rightarrow \infty$ да лимитга ўтиб, топамиз:

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Мисол ва масалалар

1. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлса, унинг шу сегментда чегараланган эканлигини исботланг.

2. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлиши учун $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топилиб, диаметрлари δ дан кичик бўлган $[a, b]$ сегментнинг ихтиёрий P_1 ва P_2 бўлинишларида

$$|\sigma_{P_1}(f) - \sigma_{P_2}(f)| < \varepsilon$$

тенгсизлиkning бажарилиши зарур ва етарли эканини исботланг.

3. Интеграл йиғиндининг лимити таърифини Гейне бўйича келтиринг.

4. Ушбу

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx, \quad \text{б) } \int_a^b x^3 \, dx, \quad \text{в) } \int_a^b \sqrt{x} \, dx, \\ \text{г) } \int_a^b \frac{dx}{x} \quad (0 < a < b), \quad \text{д) } \int_a^b x^n \, dx, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq -1 \end{aligned}$$

интегралларни таъриф ёрдамида ҳисобланг.

3-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ ХОССАЛАРИ

1°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у исталган $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ оралиқда ҳам интегралланувчи бўлади.

2°. Агар $f(x)$ функция $[a, c]$ ва $[c, b]$ оралиқларда интегралланувчи бўлса, у ҳолда функция $[a, b]$ оралиқда ҳам интегралланувчи бўлади ва ушбу

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

формула ўринли бўлади.

3°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $C \cdot f(x)$ ($C = \text{const}$) ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади ва ушбу

$$\int_a^b C f(x) \, dx = C \int_a^b f(x) \, dx$$

формула ўринли бўлади.

4°. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x) \pm g(x)$ функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади ва ушбу

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

формула ўринли бўлади.

1-натижа. Агар $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда ушбу

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \dots + C_n f_n(x) \quad (C_i = \text{const}, i = \overline{1, n})$$

функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи ва

$$\begin{aligned} \int_a^b [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \dots + C_n f_n(x)] dx = \\ = C_1 \int_a^b f_1(x) dx + \dots + C_n \int_a^b f_n(x) dx \end{aligned}$$

формула ўринли бўлади.

5°. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x) \cdot g(x)$ функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади.

2-натижа. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, $\forall n \in \mathbb{N}$ учун $[f(x)]^n$ функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади.

6°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ лар учун $f(x) \geq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad (a > b).$$

бўлади.

3-натижа. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ лар учун $f(x) \leq g(x)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда ушбу

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

тенгсизлик ҳам ўринли бўлади.

7°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $|f(x)|$ функция ҳам шу ораликда интегралланувчи бўлади ва

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

$f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда аниқланган ва чегараланган бўлсин. У ҳолда $[a, b]$ ораликда $m = \inf \{f(x)\}$, $M = \sup \{f(x)\}$ мавжуд ва $\forall x \in [a, b]$ лар учун

$$m \leq f(x) \leq M$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

8°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда интегралланувчи бўлса, у ҳолда шундай ўзгармас μ ($m \leq \mu \leq M$) сон мавжудки, ушбу $\int_a^b f(x) dx = \mu(b - a)$ тенглик ўринли бўлади.

(Бу ўрта қиймат ҳақидаги теорема.)

4-натижа. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда узлуксиз бўлса, у ҳолда бу ораликда шундай c ($c \in [a, b]$) нуқта топиладики,

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

тенглик ўринли бўлади.

9°. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ ораликда интегралланувчи бўлиб, $g(x)$ функция шу ораликда ўз ишорасини ўзгартирмаса, у ҳолда шундай ўзгармас μ ($m \leq \mu \leq M$) сон мавжудки

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx$$

тенглик ўринли бўлади.

5-натижа. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда узлуксиз булса, у ҳолда $[a, b]$ ораликда шундай c ($c \in [a, b]$) нуқта топиладики,

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$$

тенглик ўринли бўлади.

$f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда интегралланувчи бўлсин. У ҳолда аниқ интегралланг 1°-хоссасига кўра $f(x)$ функция исталган $[a, x] \subset [a, b]$ ($a \leq x \leq b$) ораликда ҳам интегралланувчи бўлади. Равшанки,

$$\int_a^x f(t) dt$$

интеграл x га боғлиқ бўлади. Уни $F(x)$ деб белгилаймиз:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

10°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда интегралланувчи бўлса, $F(x)$ функция шу ораликда узлуксиз бўлади.

11°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда интегралланувчи бўлиб, $x_0 \in (a, b)$ нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $F(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлади ва

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

тенглик ўринлидир.

6-натижа. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда узлуксиз бўлса, у ҳолда $\forall x \in [a, b]$ лар учун

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

бўлади.

Энди юқорида келтирилган аниқ интегралнинг хоссаларидан баъзиларини таҳлил қиламиз.

4°-хоссага кўра $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x) \pm g(x)$ функция ҳам шу ораликда интегралланувчи бўлади.

Фараз қилайлик, $f(x) \pm g(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлсин, у ҳолда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар доим $[a, b]$ сегментда интегралланувчи экани келиб чиқадими?

Мисол сифатида ушбу

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса,} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

функцияларни қарайлик. Маълумки, бу функциялар $[a, b]$ сегментда интегралланувчи эмас, лекин $f(x) + g(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчидир. Агар $f(x)$ функция кўринишини ўзгартирмасдан $g(x)$ функция сифатида ушбу

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ -1, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарасак $f(x) + g(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлмайди.

5°- хоссага кўра $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x) \cdot g(x)$ функция ҳам $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлади.

$f(x) \cdot g(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлишидан $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг $[a, b]$ сегментда ҳар доим интегралланувчи бўлиши келиб чиқадими, деган савол туғилади.

Мисол сифатида ушбу

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ -1, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

функцияларни қарасак, $f(x) \cdot g(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда интегралланувчи эканини кўриш қийин эмас, лекин $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлмайди.

Худди шу $f(x)$ функция ёрдамида 7°- хоссани ҳам таҳлил қилиш мумкин. Равшанки, $|f(x)| = 1$ функция ҳар доим $[a, b]$ сегментда интегралланувчи, лекин $f(x)$ функция бу оралиқда интегралланувчи эмас.

4-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

1. Ньютон — Лейбниц формуласи.

5-теорема. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг ихтиёрий бошланғич функцияси $F(x)$ учун

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

формула ўринлидир.

Одатда бу формула *Ньютон-Лейбниц формуласи* дейилади.

9-мисол. Ушбу

$$\int_{\text{sh}1}^{\text{sh}2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

интегрални ҳисобланг.

$$\int_{\text{sh}1}^{\text{sh}2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_{\text{sh}1}^{\text{sh}2} = \ln \frac{\text{sh}2 + \sqrt{1+\text{sh}^2 2}}{\text{sh}1 + \sqrt{1+\text{sh}^2 1}} =$$

$$= \ln \frac{\text{sh} 2 + \text{ch} 2}{\text{sh} 1 + \text{ch} 1} = \ln \frac{e^2 + e^{-2} + e^2 - e^{-2}}{e + e^{-1} + e - e^{-1}} = \ln e = 1.$$

2. Аниқ интегралларни ҳисоблаш усуллари
1°. Ўзгарувчини алмаштириш усули

Фараз қилайлик $\int_a^b f(x) dx$ интегралда ўзгарувчи x ушбу
 $x = \varphi(t)$ формула билан алмаштирилган бўлиб, қуйидаги
шартлар бажарилсин:

а) $\varphi(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз,
 t ўзгарувчи $[\alpha, \beta]$ сегментда ўзгарганда функция қийматлари
 $[a, b]$ оралиқдан чиқмайди;

б) $\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b,$

в) $\varphi(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ оралиқда узлуксиз ҳосилага эга.

У ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

тенглик ўринли бўлади.

Одатда бу формула ўзгарувчини алмаштириб интеграл-
лаш формуласи дейилади.

10-мисол. Ушбу

$$\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

интегрални ҳисобланг.

$x = a \sin t$ алмаштириш натижасида

$$\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cdot \cos^3 t dt =$$

$$= \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt =$$

$$= \frac{a^4}{8} \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4}{16}$$

бўлади.

2°. Бўлаклаб интеграллаш усули

$u(x)$ ва $v(x)$ функцияларнинг ҳар бири $[a, b]$ оралиқда узлуксиз $u'(x)$, $v'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда

$$\int_a^b u(x) dv(x) = (u(x)v(x)) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x)$$

формула ўринлидир.

Одатда бу формула аниқ интегрални *бўлаклаб интеграллаш формуласи* деб аталади.

11-мисол. Ушбу

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интеграл $n = 0$, $n = 1$ да хусусий ҳолларда содда ҳисобланади:

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1.$$

$n \geq 2$ бўлганда берилган интегрални

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x d(-\cos x)$$

қўринишда ёзиб, бўлаклаб интеграллаш формуласини қўлаймиз. Натижада

$$\begin{aligned} I_n &= (-\sin^{n-1} x \cos x) \Big|_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx - \\ &\quad - (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \end{aligned}$$

бўлиб, ундан

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

рекурент формула келиб чиқади.

Бу формула ёрдамида $n = 2, 3, \dots$ да берилган интегралнинг қийматларини кетма-кет ҳисоблаш мумкин.

$n = 2m$ жуфт сон бўлсин, у ҳолда

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-1} \cdot \dots \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

бўлади.

$n = 2m+1$ тоқ сон бўлсин, у ҳолда

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \dots \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

бўлади.

12-мисол. Агар $f(x)$ функция $[0, 1]$ сегментда узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$$

муносабатни исботланг.

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ лар учун } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

эканини ҳисобга олиб топамиз:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx &= \int_0^{\pi/2} f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] dx = - \int_0^{\pi/2} f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \right. \right. \\ &\left. \left. - x\right)\right] d\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \int_0^{\pi/2} f(\sin t) dt \quad \left(t = \frac{\pi}{2} - x\right). \end{aligned}$$

Демак,

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx.$$

$$\text{Хусусан } \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx \text{ эканлигини топамиз.}$$

13-мисол. $[-1, 1]$ сегментда узлуксиз $f(x)$ функция учун

а) агар $f(x)$ жуфт функция бўлса,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \cdot \int_0^1 f(x) dx,$$

б) агар $f(x)$ тоқ функция бўлса,

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 0$$

муносабатларни исботланг.

$\int_{-l}^l f(x) dx$ интегрални аниқ интегралнинг 1°, 2°-хоссаларидан фойдаланиб қуйидагича ёзамиз:

$$\int_{-l}^l f(x) dx = \int_{-l}^0 f(x) dx + \int_0^l f(x) dx.$$

$\int_{-l}^0 f(x) dx$ интегралда $x = -t$ алмаштириш натижасида топамиз:

$$\int_{-l}^0 f(x) dx = \int_l^0 f(-t) dt = \int_0^l f(-x) dx.$$

Шундай қилиб,

$$\int_{-l}^l f(x) dx = \int_{-l}^0 f(x) dx + \int_0^l f(-x) dx = \int_0^l [f(x) + f(-x)] dx.$$

Агар $f(x)$ жуфт бўлса, у ҳолда $f(x) = f(-x)$ бўлиб,
 $\int_{-l}^l f(x) dx = 2 \cdot \int_0^l f(x) dx$ муносабатга эга бўламиз.

Агар $f(x)$ тоқ бўлса, у ҳолда $f(-x) = -f(x)$ бўлиб,
 $\int_{-l}^l f(x) dx = 0$ муносабатга эга бўламиз.

14-мисол. Агар $f(x)$ функция $(-\infty, \infty)$ оралиқда аниқланган, узлуксиз, даврий бўлиб, унинг даври T га тенг бўлса,

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx, \quad \forall a \in \mathbb{R},$$

муносабатни исботланг.

Аниқ интегралнинг 1°, 2°-хоссаларидан фойдаланиб,
 $\int_a^{a+T} f(x) dx$ интегрални қуйидагича ёзамиз:

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^T f(x) dx + \int_T^{T+a} f(x) dx.$$

$f(x)$ функция учун $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$ эканлигини ҳисобга олиб, топамиз:

$$\int_T^{a+T} f(x) dx = \int_T^{a+T} f(x-T) dx = \int_T^{a+T} f(x-T) d(x-T).$$

Энди
$$\int_T^{a+T} f(x-T) d(x-T)$$

интегралда $x-T = z$ алмаштиришни бажарамиз. Натижада

$$\int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(z) dz \text{ бўлади.}$$

Демак,

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(x) dx &= \int_a^T f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \\ &+ \int_a^T f(x) dx = \int_0^T f(x) dx. \end{aligned}$$

15-мисол. Ушбу

$$I = \int_{e-2\pi n}^1 \left| \left(\cos \ln \frac{1}{x} \right)' \right| dx, \quad n \in N,$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги ифода кўринишини қуйидагича ўзгартирамиз;

$$\left| \left(\cos \ln \frac{1}{x} \right)' \right| dx = |(\cos(\ln x))'| dx = \left| -\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \right| dx.$$

$-\ln x = t$ алмаштириш натижасида

$$I = \int_0^{2\pi n} |\sin t| dt = 2n \int_0^{\pi} \sin t dt = 4n$$

бўлади.

16-мисол. Ушбу

$$I = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}$$

интегрални ҳисобланг.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \\ &= - \int_{-2}^{-1} \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}} = - \arcsin \frac{1}{x} \Big|_{-2}^{-1} = \\ &= -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

17-мисол. Ушбу

$$I = \int_1^e (x \ln x)^2 dx$$

интегрални ҳисобланг.

Аниқ интегралда бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиб, топамиз:

$$u = \ln^2 x, \quad du = 2 \ln x \cdot \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^3}{3}.$$

$$I = \frac{x^3}{3} \ln^2 x \Big|_1^e - \frac{2}{3} \int_1^e x^2 \ln x \, dx = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} \int_1^e x^2 \ln x \, dx$$

$I_1 = \int_1^e x^2 \ln x \, dx$ интегралга яна бўлаклаб интеграллаш формуласини қўллаш натижасида

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 \, dx = \frac{e^3}{3} - \frac{x^3}{9} \Big|_1^e = \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9} \end{aligned}$$

бўлади.

Демак,

$$I = \frac{e^3}{3} - \frac{4e^3}{27} - \frac{2}{27} = \frac{5e^3 - 2}{27}.$$

18-мисол. Ушбу

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

интегрални ҳисобланг.

$x = \sin t$ алмаштириш натижасида

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n t \cdot \cos t}{\cos t} dt = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$$

бўлади. 11-мисолга кўра:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt = \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{агар } n = 2k \text{ бўлса,} \\ \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & \text{агар } n = 2k+1 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

19-мисол. Ушбу

$$I = \int_0^{1000} [x] dx$$

интегрални ҳисобланг.

Интегралланувчи функциялар синфига оид теоремага кўра $[x]$ функция $[0, 1000]$ сегментда интегралланувчидир, чунки у $[0, 1000]$ сегментда чекли сондаги (999 та) нуқталардан бошқа барча нуқталарда узлуксиз. Аниқ интеграл хоссаларидан фойдаланиб, топамиз:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{1000} [x] dx = \int_0^1 [x] dx + \int_1^2 [x] dx + \dots + \int_{999}^{1000} [x] dx = \\ &= 1 + 2 + \dots + 999 = \frac{999 \cdot 1000}{2} = 49950. \end{aligned}$$

20-мисол. Ушбу

$$I = \int_0^6 [x] \sin\left(\frac{\pi}{6} x\right) dx$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги функция $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ нуқта-ларда узилишга эга. Демак, қаралаётган интеграл мавжуд.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx + \int_1^2 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx + \int_2^3 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx + \\ &+ \int_3^4 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx + \int_4^5 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx + \int_5^6 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx = \\ &= \frac{6}{\pi} \left[\left(\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} \right) + 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{2} \right) + 3 \left(\cos \frac{\pi}{2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos \frac{2\pi}{3} \right) + 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{5\pi}{6} \right) + 5 \left(\cos \frac{5\pi}{6} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos \pi \right) \right] = \frac{6}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} + 2 \cos \frac{\pi}{3} + 3 \cos \frac{\pi}{3} - \right. \\ &\quad \left. - 4 \cos \frac{\pi}{3} + 4 \cos \frac{\pi}{6} - 5 \cos \frac{\pi}{6} + 5 \right) = \frac{30}{\pi}. \end{aligned}$$

21-мисол. Ушбу

$$I = \int_0^{\pi} x \operatorname{sgn}(\cos x) dx$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги функция $[0, \pi]$ оралиқда $\cos x = 0$ бў-ладиган $\left(x = \frac{\pi}{2}\right)$ нуқтадан бошқа барча нуқталарда узлук-сиз. Демак қаралаётган интеграл мавжуд.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sgn}(\cos x) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} x \operatorname{sgn}(\cos x) dx = \int_0^{\pi/2} x dx - \\ &- \int_{\pi/2}^{\pi} x dx = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2} = -\frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

22-мисол. $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^{10} x dx$, $I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$ интеграл-

лардан қайси бири катта эканини аниқланг.¹

Маълумки,

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ лар учун } \sin^2 x > \sin^{10} x$$

тенгсизлик ўринли.

$x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ нуқталарда $\sin^2 x = \sin^{10} x$

тенглик бажарилиб, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ларда $f(x) = \sin^2 x - \sin^{10} x >$
 > 0 бўлади. Аниқ интегралнинг 6° хоссасига кўра $\int_0^{\pi/2} f(x) dx >$
 > 0 , яъни $I_2 > I_1$ тенгсизлик ўринлидир.

23-мисол. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан фойдаланиб

$$\int_a^b \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx, \quad (0 < a < b)$$

интегрални баҳоланг.

Аниқ интегралнинг 9° хоссасига кўра

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}} \sin x dx = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \int_a^b \sin x dx = \frac{1}{\sqrt{\xi}} (\cos a - \cos b)$$

бўлади. $0 < a < b$ да $\frac{1}{\sqrt{\xi}} < \frac{1}{\sqrt{a}}$ ва $|\cos a - \cos b| \leq 2$

бўлишини ҳисобга олсак, у ҳолда берилган интеграл учун

$$\left| \int_a^b \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \right| \leq \frac{2}{\sqrt{a}}$$

баҳога эга бўламиз.

24-мисол. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t} dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t} dt}$$

лимитни ҳисобланг.

$\sqrt{\operatorname{tg} x}$ ва $\sqrt{\sin x}$ функциялар қаралаётган оралиқларда узлуксиз бўлгани учун аниқ интегралнинг 11° хоссасига кўра $\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t} dt$ ва $\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t} dt$ интегралларни юқори чегаранинг функцияси сифатида дифференциаллаш мумкин. Қаралаётган ифода $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмаслик бўлиб, унга

Лопиталь қондасини қўллаш мумкинлигини кўриш қийин эмас.

Демак,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\lg t} \, dt}{\int_0^{\lg x} \sqrt{\sin t} \, dt} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\cos x \cdot \sqrt{\lg(\sin x)}}{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \sqrt{\sin(\lg x)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \cos^3 x \sqrt{\frac{\lg(\sin x)}{\sin(\lg x)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \cos^3 x \sqrt{\frac{\lg(\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\lg x} \cdot \frac{\lg x}{\sin(\lg x)}} = 1.\end{aligned}$$

25-мисол. Ушбу

$$S_n = \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} \quad (p > 0)$$

йигинди лимитини аниқ интеграл ёрдамида ҳисобланг.

S_n йигиндининг кўринишини қуйндагича ўзгартирамиз:

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^p \right] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p.\end{aligned}$$

Бу йигинди $f(x) = x^p$ функция учун $[0, 1]$ сегментда (бу сегментни тенг n та бўлакка бўлиш натижасида ҳосил бўлган) интеграл (Риман) йигинди эканини кўриш осон.

Демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 x^p \, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

26-мисол. Ушбу

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}}$$

лимитни аниқ интеграл ёрдамида ҳисобланг.

Етарлича катта n лар учун $\sin \frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{n}$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}}$$

бўлади.

Энди лимит остида турган ифода $f(x) = \frac{1}{2 + \cos x}$ функция учун $[0, \pi]$ ораликда (бу оралик тенг n та бўлакка бўлинган ҳолда тузилган) интеграл йиғинди экани равшанлир. Демак,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos x} = \int_0^{\pi} \frac{\frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{3 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 2 \int_0^{\pi} \frac{d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}{3 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Мисол ва масалалар

5. Нуқтада узлуксиз ва бу нуқтани ўз ичига олувчи ҳар қандай сегментда интегралланувчи бўлмаган функцияга мисол келтиринг.

6. Бирор $[a, b]$ сегментда чегараланган $f(x)$ функция бу сегментда интегралланувчи бўлиши учун ихтиёрий $\varepsilon > 0$ олинганда ҳам функциянинг барча узилиш нуқталарини ўз ичига олувчи чекли ёки саноқли сондаги интерваллар системаси мавжуд бўлиб, уларнинг узунликлари йиғиндиси ε дан кичик бўлиши зарур ва етарли эканини исботланг.

7. Ушбу

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса,} \\ \frac{1}{n}, & \text{агар } x = \frac{m}{n} \text{ бўлса} \end{cases}$$

$(m, n \in \mathbb{N}, \frac{m}{n} \neq 0 \text{ — қисқармайдиган каср})$.

Риман функцияси ихтиёрий $[a, b]$ сегментда интегралланувчи эканини исботланг.

8. $f(x) = \operatorname{sgn} \left(\sin \frac{\pi}{x} \right)$ функциянинг $[0, 1]$ сегментда интегралланувчи эканини исботланг.

9. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right], & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $[0, 1]$ сегментда интегралланувчи эканини исботланг.

10. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи, $\forall x \in [a, b]$ лар учун $c \leq f(x) \leq d$ бўлиб, $g(x)$ функция $[c, d]$ сегментда узлуксиз бўлса, у ҳолда $g(f(x))$ функциянинг $[a, b]$ сегментда интегралланувчи эканини исботланг.

11. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар интегралланувчи бўлса, $f(g(x))$ функция ҳам интегралланувчи бўлиши шартми? Мисоллар келтиринг.

12. Агар $f(x)$ функция $[A, B]$ сегментда интегралланувчи бўлса, у ҳолда

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0, [a, b] \subset [A, B]$$

муносабатни исботланг.

13. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f^2(x) dx = 0$$

тенглик бажарилиши учун $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги барча узлуксиз бўлган нуқталарида нолга тенг бўлиши зарур ва етарли эканини исботланг.

14. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлсин. $\frac{1}{f(x)}$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлиши учун бирорта етарли шарт келтиринг ва исботланг.

15. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b |f(x) g(x)| dx \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}$$

Коши-Буняковский тенгсизлигини исботланг.

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$16. \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$17. \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$18. \int_0^2 |1-x| dx.$$

$$19. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 2x \cos \alpha + 1} \\ (0 < \alpha < \pi).$$

$$20. \int_{-\pi/4}^0 \frac{dx}{\cos^3 x}.$$

$$21. \int_2^9 \sqrt[3]{x-1} dx.$$

$$22. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + e \cos x} \\ (0 \leq e < 1).$$

$$23. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \\ (a, b \neq 0).$$

$$24. \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6} dx.$$

$$25. \int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$26. \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx.$$

$$27. \int_0^2 \operatorname{sh}^3 x dx.$$

$$28. \int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 2x - 8}.$$

$$29. \int_{3/4}^2 \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$$

$$30. \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx.$$

$$31. \int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}.$$

$$32. \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

$$33. \int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg}^4 x dx.$$

$$34. \int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^2(x-1)} dx.$$

$$35. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

$$36. \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}.$$

$$37. \int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx.$$

$$38. \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$39. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 + 2\sin^2 x}.$$

$$40. \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x}{\sin^2 x} dx.$$

$$41. \int_1^2 x \ln x dx.$$

$$42. \int_0^e \sin(\ln x) dx.$$

$$43. \int_0^{1/2} \arcsin x dx.$$

$$44. \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx.$$

$$45. \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt[3]{\sin x} dx.$$

$$46. \int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2} \sin x dx.$$

$$47. \int_{-1}^1 \cos x \ln x dx.$$

$$48. \int_{-1}^1 (e^x + e^{-x}) \operatorname{tg} x dx.$$

$$49. \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$50. \int_0^2 e^{x^2} \cdot x dx.$$

$$51. \int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx.$$

$$52. \int_1^{\sqrt[3]{e}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$$

$$53. \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{1 + \ln x}}.$$

$$54. \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{3 + \cos x}.$$

$$65. a) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \frac{dx}{a \cos^2 x + 2b \cos x \sin x + c \sin^2 x}, \quad ac - b^2 > 0.$$

$$55. \int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} dx.$$

$$56. \int_0^1 x^{15} \sqrt{1+3x^8} dx.$$

$$57. \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x dx.$$

$$58. \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx.$$

$$59. \int_1^{\pi} x^n \ln x dx.$$

$$60. \int_0^1 x (2-x^2)^{1/2} dx.$$

$$61. \int_{1/e}^e |\ln x| dx.$$

$$62. \int_0^{\pi} \frac{dx}{a + b \cos x}, \quad |b| < a.$$

$$63. \int_{1/2}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + \frac{1}{x}} dx.$$

$$64. \int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx.$$

$$6) I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx. \text{ в) } I_n = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n} x dx.$$

$$г) I_{m,n} = \int_0^1 x^m (\ln x)^n dx, m, n \in N.$$

$$д) I_n = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \right)^{2n+1} dx.$$

$$66. I_n = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \operatorname{ch}^n x dx.$$

Қуйндаги муносабатларни исботланг:

$$67. \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cdot \cos^n x dx = \\ = \begin{cases} \frac{(m-1)!! (n-1)!!}{(m+n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{агар } m, n \text{ жуфт бўлса,} \\ \frac{(m-1)!! (n-1)!!}{(m+n)!!}, & m \text{ ва } n \text{ тоқ бўлса.} \end{cases}$$

$$68. \int_0^a (a^2 - x^2)^n dx = a^{2n+1} \frac{2n!!}{(2n+1)!!}, n \in N.$$

$$69. \int_0^a (a^2 - x^2)^{(2n-1)/2} dx = a^{2n} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, n \in N.$$

$$70. \int_0^{\pi/2} \cos^n x \cdot \sin nx dx = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}, n \in N.$$

$$71. \int_0^{\pi/2} \cos^n x \cdot \cos nx dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}, n \in N.$$

$$72. \int_0^{\pi/2} \cos^m x \cos (m+2) x dx = 0, m \in N.$$

$$73. \int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin (m+2) x dx = \frac{1}{m+1}, m \in N.$$

$$74. \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cdot \cos (m+2) x dx = -\frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m+1}, m \in N.$$

$$75. \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cdot \sin (m+2) x dx = \frac{1}{m+1} \cos \frac{m\pi}{2}, m \in N.$$

$$76. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ax} \cos^{2n+1} x dx = \\ = 2 \operatorname{ch} \frac{a\pi}{2} \cdot \frac{(n+1)!}{(a^2+1)(a^2+3^2) \dots (a^2+(2n+1)^2)}.$$

$$77. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin nx}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2} - 2 \cos \frac{\pi n}{2} \cdot \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx (n=0, 1, \dots).$$

$$78. \int_0^{\pi/2} f(\sin 2x) \cos x dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos^2 x) \cos x dx, f(x) \in C[0, 1].$$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$79. \int_0^3 \operatorname{sgn} (x - x^2) dx.$$

$$80. \int_0^2 [e^x] dx.$$

$$81. \int_0^1 \operatorname{sgn} (\sin (\ln x)) dx.$$

$$82. \int_1^{n+1} \ln [x] dx.$$

83. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлсин. Агар $\forall x \in [a, b]$ лар учун $f(x) > 0$ бўлса, у ҳолда шундай $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ топилиб, $\inf_{[\alpha, \beta]} f(x) > 0$ бўлишини исботланг.

84. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ лар учун $f(x) \geq 0$ бўлсин.

$$\int_a^b f(x) dx > 0$$

бўлиши учун шундай $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ сегмент топилиб,
 $\forall x \in [\alpha, \beta]$ ларда $f(x) \neq 0$ муносабатнинг бажарилиши зарур
 ва етарлилигини исботланг.

85. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлиб,
 $\int_a^b |f(x)| dx = 0$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ учун

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$$

бўлишини исботланг.

Аниқ интеграл ёрдамида қуйидаги лимитларни топинг:

$$86. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n+1}{n^2} \right).$$

$$87. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^3}{n^4} + \frac{2^3}{n^4} + \dots + \frac{(4n-1)^3}{n^4} \right).$$

$$88. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right).$$

$$89. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right).$$

$$90. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right).$$

$$91. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} \right).$$

$$92. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right).$$

$$93. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

$$94. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right) \right]$$

($f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи).

$$95. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n} \right) \sin \frac{k\pi}{n^2}.$$

$$96. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}, x > 0.$$

$$97. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2^{k/n}}{n + \frac{1}{k}}.$$

$$98. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos x^2 dx}{x}.$$

$$99. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctg t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$100. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^3} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^3} dt}.$$

Қуйидаги интегралларнинг қайси бири катта эканини аниқланг:

$$101. \int_0^1 e^{-x} dx \quad \text{ёки} \quad \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

$$102. \int_0^{\pi} e^{x^2} \cos^2 x dx \quad \text{ёки} \quad \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx.$$

$$103. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{ёки} \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

$$104. \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad \text{ёки} \quad \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$105. \int_0^1 e^{-x} \sin x dx \quad \text{ёки} \quad \int_0^1 e^{-x^2} \sin x dx.$$

$$106. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{ёки} \quad \int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

Қуйидаги функцияларнинг берилган оралиқдаги ўрта қийматларини топинг.

$$107. f(x) = x^2, \quad x \in [0, 1].$$

$$108. f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, 100].$$

$$109. f(x) = 10 + 2 \sin x + 3 \cos x, x \in [0, 2\pi].$$

$$110. f(x) = \sin x \cdot \sin(x + \varphi), x \in [0, 2\pi].$$

Ўрта қиймат ҳақидаги теоремалардан фойдаланиб, қуйидаги интегралларни баҳоланг:

$$111. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0,5 \cos x}.$$

$$112. \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx.$$

$$113. \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx.$$

$$114. \int_{100\pi}^{203\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

$$115. \int_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x} \sin x dx \quad (0 < a < b, \alpha \geq 0).$$

$$116. \int_a^b \sin x^2 dx \quad (0 < a < b).$$

$$117. \int_1^e \frac{dx}{\ln x + 2}.$$

$$118. \int_1^2 2^{x^2} dx.$$

$$119. \int_{1,2}^2 \frac{4^x}{x} dx.$$

$$120. \int_0^{\pi} x^2 \sqrt{\sin x} dx.$$

АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ БАЪЗИ ТАТБИҚЛАРИ

1-§. ЕЯ УЗУНЛИГИНИ ҲИСОБЛАШ

Маълумки, эгри чизиқ ёйининг узунлиги шу эгри чизиққа чизилган синиқ чизиқ периметрининг лимити сифатида таърифланади. Синиқ чизиқ периметри йиғиндига (интеграл йиғиндига) келади ва унинг лимити аниқ интегрални ифода-лайди.

1°. Фараз қилайлик, $\overline{AB}$ ёй

$$y = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

тенглама билан аниқлансин. Бунда $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган узлуксиз ва узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин.

$\overline{AB}$ ёйининг узунлиги

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \, dx \quad (1)$$

бўлади.

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \quad (a > 0)$$

тенглама билан аниқланган чизиқнинг (занжир чизиқнинг) $[-a, a]$ ораликдаги узунлигини топинг.

Бу эгри чизиқнинг узунлигини (1) формуладан фойдала-ниб топамиз. Равшанки,

$$f'(x) = \left(\frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \right)' = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

Унда

$$1 + f'^2(x) = 1 + \frac{1}{4} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)^2$$

бўлиб,

$$\sqrt{1 + f'^2(x)} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

бўлади. (1) формулага кўра:

$$l = \int_{-a}^a \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) dx = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) \Big|_{-a}^a = a \left(e - \frac{1}{e} \right).$$

Демак, берилган эгри чизиқнинг узунлиги

$$l = a \left(e - \frac{1}{e} \right)$$

га тенг.

2-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{x^2}{2p}$$

параболанинг $[0, a]$ оралиқдаги қисмининг узунлигини то-
пинг ($a > 0$).

Аввал $f(x)$ функциянинг ҳосиласини ҳисоблаб

$$\sqrt{1 + f'^2(x)}$$

ни топамиз:

$$f'(x) = \frac{2x}{2p} = \frac{x}{p},$$

$$1 + f'^2(x) = 1 + \frac{x^2}{p^2} = \frac{p^2 + x^2}{p^2},$$

$$\sqrt{1 + f'^2(x)} = \sqrt{\frac{p^2 + x^2}{p^2}} = \frac{1}{p} \sqrt{x^2 + p^2}.$$

(1) формулага кўра қаралаётган эгри чизиқнинг узунлиги

$$l = \frac{1}{p} \int_0^a \sqrt{x^2 + p^2} dx$$

бўлади.

Энди ушбу

$$\int \sqrt{x^2 + p^2} dx$$

аниқмас интегрални ҳисоблаймиз. Агар

$$u = \sqrt{x^2 + p^2}, \quad dv = dx$$

дейилса, унда

$$du = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + p^2}}, \quad v = x$$

бўлиб,

$$\int \sqrt{x^2 + p^2} dx = x \sqrt{x^2 + p^2} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + p^2}}$$

бўлади. Бу тенгламанинг ўнг томонидаги интеграл қуйидагича ҳисобланади:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + p^2}} &= \int \frac{x^2 + p^2 - p^2}{\sqrt{x^2 + p^2}} dx = \int \frac{x^2 + p^2}{\sqrt{x^2 + p^2}} dx - \\ &- p^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + p^2}} = \int \sqrt{x^2 + p^2} dx - p^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + p^2}} = \\ &= \int \sqrt{x^2 + p^2} dx - p^2 \ln |x + \sqrt{x^2 + p^2}|. \end{aligned}$$

Демак,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + p^2} dx &= x \sqrt{x^2 + p^2} - \int \sqrt{x^2 + p^2} dx + \\ &+ p^2 \ln |x + \sqrt{x^2 + p^2}|. \end{aligned}$$

Бу тенгликдан:

$$2 \int \sqrt{x^2 + p^2} dx = x \sqrt{x^2 + p^2} + p^2 \ln |x + \sqrt{x^2 + p^2}|,$$

бўлиб,

$$\int \sqrt{x^2 + p^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + p^2} + \frac{1}{2} p^2 \ln |x + \sqrt{x^2 + p^2}|$$

бўлиши келиб чиқади.

Натижада

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{p} \int_0^a \sqrt{x^2 + p^2} dx = \\ &= \frac{1}{p} \left[\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + p^2} + \frac{1}{2} p^2 \ln |x + \sqrt{x^2 + p^2}| \right]_0^a = \\ &= \frac{1}{2p} a \sqrt{a^2 + p^2} + \frac{p}{2} \ln |a + \sqrt{a^2 + p^2}| - \frac{p}{2} \ln p \end{aligned}$$

ни топамиз.

2°. Фараз қилайлик, $\widetilde{AB}$ ёй

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

тенгламалар системаси билан аниқлансин. (Бу ҳолда эгри чизиқ параметрик ҳолда берилган дейилади.) Бунда $x = x(t)$,

$y = y(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да аниқланган, узлуксиз ва узлуксиз $x'(t)$, $y'(t)$ ҳосилаларга эга.

$\overline{AB}$ ёйнинг узунлиги

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \quad (2)$$

бўлади.

3-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

тенгламалар системаси билан аниқланган эгри чизиқнинг (циклоиданинг) узунлигини топинг.

Аввал $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ функцияларнинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$x'(t) = a(1 - \cos t), \quad y'(t) = a \sin t.$$

Унда

$$x'^2(t) + y'^2(t) = a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = a^2 \cdot 2(1 - \cos t)$$

бўлиб,

$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = a \sqrt{2(1 - \cos t)}$$

бўлади.

(2) формулага кўра изланаётган эгри чизиқнинг узунлиги

$$l = \int_0^{2\pi} a \sqrt{2(1 - \cos t)} dt$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} a \sqrt{2(1 - \cos t)} dt &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cdot \sin^2 \frac{t}{2}} dt = \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 4a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = \\ &= -4a \cdot \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a. \end{aligned}$$

Демак,

$$l = 8a.$$

3°. Фараз қилайлик, $\overline{AB}$ эгри чизиқ кутб координата системасида

$$\rho = \rho(\theta) \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$$

функция билан берилган бўлсин. Бунда $\rho = \rho(\theta)$ функция $[\alpha, \beta]$ сегментда узлуксиз ва узлуксиз $\rho'(\theta)$ ҳосилага эга. Бу ҳолда $\overline{AB}$ эгри чизиқнинг узунлиги

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)} d\theta \quad (3)$$

бўлади.

5-мисол. Ушбу

$$\rho = a \cdot \theta \quad (a = \text{const}, 0 \leq \theta \leq \alpha)$$

эгри чизиқ ёйининг узунлигини топинг.

Равшанки,

$$\sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)} = \sqrt{(a \cdot 1)^2 + (a \cdot \theta)^2} = a \sqrt{1 + \theta^2}.$$

(3) формулага кўра изланаётган эгри чизиқнинг узунлиги

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\alpha} a \sqrt{1 + \theta^2} d\theta = a \int_0^{\alpha} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta = a \left[\frac{\theta}{2} \sqrt{1 + \theta^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \ln(\theta + \sqrt{1 + \theta^2}) \right] \Big|_0^{\alpha} = \frac{a}{2} [\alpha \sqrt{1 + \alpha^2} + \ln(\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2})] \end{aligned}$$

бўлади. Демак,

$$l = \frac{a}{2} [\alpha \sqrt{1 + \alpha^2} + \ln(\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2})].$$

6-мисол. Ушбу

$$\rho = a \cdot \sin^3 \frac{\varphi}{3} \quad (a > 0)$$

тенглама билан берилган ёпиқ эгри чизиқнинг узунлигини топинг.

Модомики, $\rho \geq 0$ бўлиши керак экан, унда $\sin \frac{\varphi}{3} \geq 0$

бўлади. Бундан эса $0 \leq \frac{\varphi}{3} \leq \pi$, яъни $0 \leq \varphi \leq 3\pi$ бўлишини топамиз.

φ ўзгарувчи 0 дан $3 \cdot \frac{\pi}{2}$ гача ўзгарганда ρ ўса бориб 0 дан a гача ўзгаради, φ ўзгарувчи $3 \cdot \frac{\pi}{2}$ дан 3π гача ўзгарганда ρ камая бориб a дан 0 гача ўзгаради (4-чизма).

Берилган функциянинг ҳосиласи:

$$\rho' = a \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3}$$

бўлиб,

4-чизма.

$$\sqrt{\rho'^2 + \rho^2} = \sqrt{a^2 \cdot \sin^4 \frac{\varphi}{3} \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{3} + a^2 \sin^6 \frac{\varphi}{3}} = a \sin^2 \frac{\varphi}{3}$$

бўлади. (3) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{3\pi} a \sin^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi = a \int_0^{3\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2 \frac{\varphi}{3}) d\varphi = \\ &= \frac{a}{2} \left[\int_0^{3\pi} (1 - \cos 2 \frac{\varphi}{3}) d\varphi \right] = \frac{a}{2} \left(\varphi - \frac{3}{2} \sin 2 \frac{\varphi}{3} \right) \Big|_0^{3\pi} = \\ &= \frac{a}{2} \left(3\pi - \frac{3}{2} \sin \frac{2}{3} \cdot 3\pi \right) = \frac{3a\pi}{2}. \end{aligned}$$

Демак, қаралаётган эгри чизиқнинг узунлиги

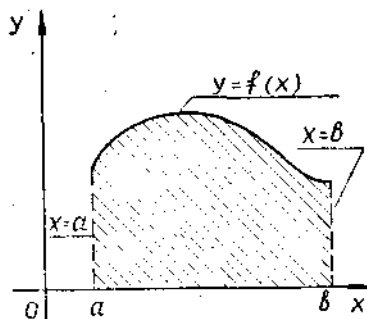
$$l = \frac{3a\pi}{2}$$

га тенг бўлади.

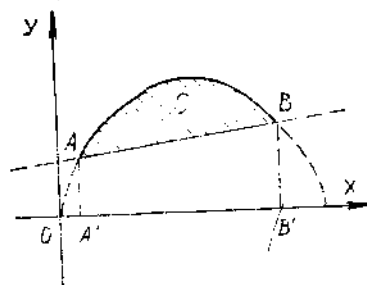
2-§. ТЕКИС ШАКЛНИНГ ЮЗИ

1. Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ да $f(x) \geq 0$ бўлсин.

Юқоридан $f(x)$ функция графиги, ён томонлардан $x = a$, $x = b$ вертикал чизиқлар, пастдан Ox абсциссалар ўқи билан чегараланган шаклнинг (одатда бундай шаклни эгри чизиқли



5-чизма.



6-чизма.

трапеция дейилади) юзи

$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (4)$$

бўлади (5-чизма).

7-мисол. Ушбу

$$4y = 8x - x^2 \text{ ва } 4y = x + 6$$

чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини топинг.

Бу чизиқлардан бири парабола, иккинчиси тўғри чизиқ бўлиб, улар бир-бири билан $A(1; \frac{7}{4})$ ва $B(6; 3)$ нуқта-ларда кесишади (6-чизма).

Изланаётган шаклнинг юзи S , $A'ABB'$ эгри чизиқли трапеция юзи S_1 дан $A'ABB'$ трапециянинг юзи S_2 нинг айир-масига тенг:

$$S = S_1 - S_2.$$

$A'ABB'$ эгри чизиқли трапециянинг юзи (4) формулага кўра

$$S_1 = \frac{1}{4} \int_1^6 (8x - x^2) dx = \frac{1}{4} \left(4x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^6 = \frac{205}{12}$$

бўлади.

$A'ABB'$ трапециянинг юзи эса

$$S_2 = \frac{A'A + B'B}{2} \cdot A'B' = \frac{\frac{7}{4} + 3}{2} \cdot 5 = \frac{95}{8}$$

бўлади. Демак, қаралаётган шаклнинг юзи:

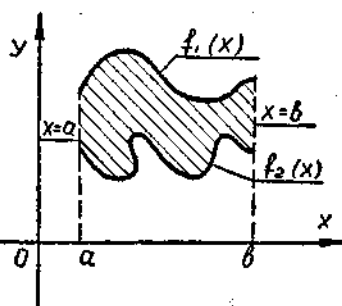
$$S = \frac{205}{12} - \frac{95}{8} = 5 \frac{5}{24} \text{ кв. бир.}$$

Энди текисликда

$$y = f_1(x), y_2 = f_2(x),$$

$$x_1 = a, x = b$$

чизиқлар билан чегараланган шаклни қарайлик. Бунда $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар $[a, b]$ да аниқланган узлуксиз ва $\forall x \in [a, b]$ учун $f_1(x) \geq f_2(x) \geq 0$ (7-чизма). Бундай шаклнинг юзи



7-чизма.

$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx \quad (5)$$

бўлади.

8-мисол. Ушбу

$$(y-x)^2 = x^3, x = 1$$

чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини топинг.

Берилган чизиқ тенгламаси $(y-x)^2 = x^3$ ни

$$y-x = \pm \sqrt{x^3} = \pm x\sqrt{x}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бундан

$$y_1(x) = x + x\sqrt{x}, y_2(x) = x - x\sqrt{x}$$

бўлиши келиб чиқади.

Равшанки, $x \geq 0$ да

$$y_1(x) \geq y_2(x)$$

бўлади.

Юқорида келтирилган (5) формулага кўра қаралаётган шаклнинг юзи

$$S = \int_0^1 [y_1(x) - y_2(x)] dx$$

бўлади. Бу интегрални ҳисоблаб, топамиз:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 [x + x\sqrt{x} - (x - x\sqrt{x})] dx = \int_0^1 2x\sqrt{x} dx = \\ &= 2 \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \bigg|_0^1 = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Демак, $S = \frac{4}{5}$ кв. бирлик.

Эслатма. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз бўлиб, унда ишора сақламаса, Ox ўқининг юқорисидаги шаклнинг юзи мусбат ишора билан, Ox ўқининг пастидаги шаклнинг юзи манфий ишора билан олинади.

2. Айтайлик, текисликдаги шаклни ўраб турувчи эгри чизиқ

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлсин.

а) $x = x(t)$, $y = y(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз, $\forall t \in [\alpha, \beta]$ да $x(t) \geq 0$, $y(t) \geq 0$ ва $x(t)$ функция узлуксиз, манфий бўлмаган $x'(t)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда шаклнинг юзи

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt \quad (6)$$

бўлади.

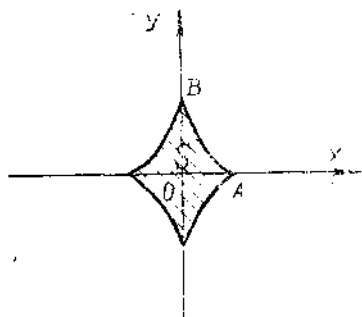
б) $x = x(t)$, $y = y(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз, $\forall t \in [\alpha, \beta]$ да $x(t) \geq 0$, $y(t) \geq 0$ ва $y(t)$ функция узлуксиз, манфий бўлмаган $y'(t)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда шаклнинг юзи

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} x(t) \cdot y'(t) dt \quad (7)$$

бўлади.

9-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x = a \sin^2 t, \\ y = b \cos^2 t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$



8-чизма.

чизиқ билан чегараланган шаклнинг юзини топинг.

Бу чизиқ билан чегараланган шакл 8-чизмада тасвирланган. Қаралаётган ёпиқ чизиқ Ox ва Oy координата ўқларига нисбатан симметрик. У чегаралаб турган шаклнинг юзи S тўртта AOB эгри чизиқли учбурчак юзи S_{AOB} га тенг бўлади:

$$S = 4S_{AOB}.$$

Энди эгри чизикли учбурчак юзи S_{AOB} ни (6) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} S_{AOB} &= \int_0^{\pi/2} y(t) \cdot x'(t) dt = \int_0^{\pi/2} y(t) \cdot dx(t) = y(t) \cdot x(t) \Big|_0^{\pi/2} - \\ &- \int_0^{\pi/2} x(t) \cdot y'(t) dt = b \cos^3 t \cdot a \sin^3 t \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x(t) \cdot y'(t) dt = \\ &= - \int_0^{\pi/2} x(t) \cdot y'(t) dt. \end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} S_{AOB} &= \int_0^{\pi/2} y(t) \cdot x'(t) dt, \\ S_{AOB} &= - \int_0^{\pi/2} x(t) \cdot y'(t) dt \end{aligned}$$

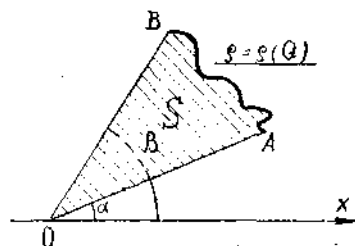
бўлишини топамиз. Бу тенгликларни ҳадлаб қўшиб,

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [y(t) \cdot x'(t) - x(t) \cdot y'(t)] dt$$

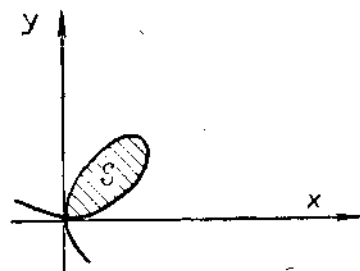
тенгликка келамиз.

Энди интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} S_{AOB} &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [b \cos^3 t \cdot a \cdot 3 \sin^2 t \cdot \cos t - a \sin^3 t \cdot b \cdot 3 \cos^2 t \cdot (-\sin t)] dt = \\ &= \frac{3ab}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cdot \cos^3 t (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \\ &= \frac{3ab}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt = \frac{3ab}{2 \cdot 4} \int_0^{\pi/2} 4 \sin^2 t \cos^2 t dt = \\ &= \frac{3ab}{8} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \frac{3ab}{8} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \\ &= \frac{3ab}{16} \left[t - \frac{\sin 4t}{4} \right] \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3ab\pi}{32}. \end{aligned}$$



9- чизма.



10- чизма.

Қаралаётган шаклнинг юзи

$$S = 4 \cdot S_{AOB} = 4 \cdot \frac{3ab\pi}{32} = \frac{3ab\pi}{8}$$

бўлади.

3. Қутб координаталар системасида

$$\rho = \rho(\theta) \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$$

функция тасвирланган $\widetilde{AB}$ ёй ҳамда $\overline{OA}$ ва $\overline{OB}$ радиус-векторлар билан чегараланган шакл — эгри чизиқли секторни қарайлик (9- чизма).

Бунда $\rho = \rho(\theta)$ функция $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз ва ихтиёрый θ ($\theta \in [\alpha, \beta]$) да $\rho(\theta) \geq 0$ бўлсин.

Қаралаётган секторнинг юзи

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta \quad (8)$$

бўлади.

10- мисол. Ушбу

$$\rho = \frac{3a \cos \varphi \cdot \sin \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}, \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$$

чизиқ билан чегараланган шаклнинг юзини топинг. Одатда бу чизиқ декарт япроғи дейилади. Декарт япроғи ва у билан чегараланган шакл 10- чизмада тасвирланган.

Қаралаётган шаклнинг юзини (8) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{3a \cos \varphi \cdot \sin \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi} \right]^2 d\varphi = \frac{9a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi}{[\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi]^2} d\varphi.$$

Энди бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 \varphi \cdot \sin^2 \varphi}{(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi)^2} d\varphi &= \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)^2} d\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} (1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)^{-2} d(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi) = \\ &= -\frac{1}{3} (1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)^{-1} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Демак,

$$S = \frac{9a^2}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3a^2}{2}.$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги чизиқларнинг берилган оралиқлардаги ёйи узунлигини ҳисобланг:

1. $y = a \cdot \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2}$, $(0 \leq x \leq b, a < b)$.
2. $y = \ln \cos x$, $\left(0 \leq x \leq a < \frac{\pi}{2}\right)$.
3. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y$, $(1 \leq y \leq e)$.
4. $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$, $(0 < b \leq y \leq a)$.
5. $y = \ln(x^2 - 1)$, $(2 \leq x \leq 5)$.
6. $y = 2 \sqrt{1 + e^{\frac{x}{2}}}$, $(\ln 9 \leq x \leq \ln 64)$.
7. $y = \arcsin e^x$, $(-\ln 7 \leq x \leq -\ln 2)$.
8. $y = \sqrt{x^2 - 32} + 8 \ln(x + \sqrt{x^2 - 32})$, $(6 \leq x \leq 9)$.
9. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$, $\left(0 \leq x \leq \frac{9}{16}\right)$.
10. $y = \sqrt{\frac{x}{3}}(1 - x)$, $(0 \leq x_0 \leq x \leq 1)$.
11. $y = -\frac{3}{2} \left(x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{3}}\right)$, $(1 \leq x \leq 8)$.
12. $y = \operatorname{sh}^2 x$, $(|x| \leq a)$.

$$13. y = \ln \operatorname{th} \left(\frac{x}{2} \right), \quad (0 < a \leq x \leq b).$$

$$14. x = \frac{2}{3} \sqrt{(y-1)^3}, \quad (0 \leq x \leq 2\sqrt{3}).$$

$$15. x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t), \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

$$16. x = a(\operatorname{sh} t - t), \quad y = a(\operatorname{ch} t - 1), \quad (0 \leq t \leq T).$$

$$17. x = \operatorname{ch}^3 t, \quad y = \operatorname{sh}^3 t, \quad (0 \leq t \leq T).$$

$$18. x = \frac{t}{\sqrt{a^2+1}} \cos(a \ln t), \quad y = \frac{t}{\sqrt{a^2+1}} \sin(a \ln t), \quad (t_1 \leq t \leq t_2).$$

$$19. x = t - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t, \quad y = 2 \operatorname{ch} t, \quad (0 \leq t \leq t_0).$$

$$20. x = a \left(\cos t + \operatorname{Intg} \left(\frac{t}{2} \right) \right), \quad y = a \sin t, \quad (0 < t_0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}).$$

$$21. x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \quad y = (t^2 - 2) \cos t - 2t \sin t, \\ (0 \leq t \leq \pi).$$

$$22. x = \cos^4 t, \quad y = \sin^4 t, \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}).$$

$$23. x = \sin^4 t, \quad y = \cos^2 t, \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}).$$

$$24. x = a \cos^5 t, \quad y = a \sin^5 t, \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

$$25. x = \int_0^t \cos \varphi^2 d\varphi, \quad y = \int_0^t \sin \varphi^2 d\varphi.$$

$$(0 \leq t \leq t_0) \text{ (клотоида)}.$$

$$26. x = \int_1^t \frac{\sin \varphi}{\varphi} d\varphi, \quad y = \int_1^t \frac{\cos \varphi}{\varphi} d\varphi, \quad (1 \leq t \leq t_0).$$

$$27. r = a \cdot e^{m\varphi}, \quad (m > 0), \quad (a > r > 0).$$

$$28. r = \frac{\rho}{1 + \cos \varphi}, \quad (|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}).$$

$$29. r = a \operatorname{th} \frac{\varphi}{2}, \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

$$30. \varphi = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right), \quad (1 \leq r \leq 3).$$

$$31. \varphi = \sqrt{r}, \quad (0 \leq r \leq 5).$$

$$32. \varphi = \int_0^r \frac{\operatorname{sh} \rho}{\rho} d\rho, \quad (0 \leq r \leq R).$$

$$33. r = 1 + \cos t, \quad \varphi = t - \operatorname{tg} \frac{t}{2}, \quad (0 \leq t \leq T < \pi).$$

$$34. r = 2(1 + \cos \varphi), (r \leq 1).$$

$$35. r = a(1 - \sin \varphi) \left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{6} \right).$$

$$36. r = a\varphi^2, (0 \leq \varphi \leq 4).$$

$$37. r = a\varphi^4, (0 \leq \varphi \leq 3).$$

$$38. \varphi = \arccos \frac{r^2 + a \cdot b}{(a+b)r}, (a \leq r \leq b).$$

Қуйидаги чизиқларнинг ёй узунликларини ҳисобланг:

$$39. x^2 = 5y^3, x^2 + y^2 = 6.$$

$$40. y^2 = \frac{16}{27} \left(x - \frac{1}{2} \right)^3, y^2 = x.$$

$$41. (y - \arcsin x)^2 = 1 - x^2.$$

$$42. \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}.$$

$$43. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$44. x = t^2, y = t \left(\frac{1}{3} - t^2 \right).$$

$$45. x = 2t^3(1-t^2), y = \sqrt{15}t^4.$$

$$46. x = a(t^2 - 1), y = \frac{2a}{\sqrt{3}} \left(t^3 - \frac{t}{4} \right).$$

$$47. x = \cos^4 t, y = \sin^4 t.$$

$$48. y = a \cos^3 \left(\frac{\varphi}{3} \right).$$

$$49. r = a \sin^4 \left(\frac{\varphi}{4} \right).$$

$$50. r = a \cos^5 \left(\frac{\varphi}{5} \right).$$

$$51. r = a \sin^n \left(\frac{\varphi}{n} \right), n \in \mathbb{N}.$$

$$1^\circ. n=2k. \quad 2^\circ. n=2k+1.$$

Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган шаклларнинг юзларини ҳисобланг.

$$52. ax = y^2, ay = x^2.$$

$$53. y = 2x - x^2, x + y = 0.$$

$$54. y = 2^x, y = 2, x = 0.$$

$$55. y = (x+1)^3, x = \sin^2 \pi y, y = 0 (0 \leq y \leq 1).$$

$$56. y = x, y = x + \sin^2 x, (0 \leq x \leq \pi).$$

$$57. y = e^{-x} \cdot |\sin x|, y = 0, (x \geq 0).$$

58. $y = x - \frac{\pi}{2}, y = \cos x, x = 0.$
59. $y = \sin x, y = \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$
60. $y = \ln(1+x), y = -xe^{-x}, x = 1.$
61. $y = x, y = \frac{\pi}{2} \sin x, x \geq 0.$
62. $y = \frac{6}{x+5}, y = |x|, x \geq -2.$
63. $y = |x|^3 e^{-x^2}, |x| = a, a > 0.$
64. $x^2 + y^2 = 2, y^2 = 2x - 1, x \geq \frac{1}{2}.$
65. $y = 2^{x-3} + 1, y = 2^{3-x} + 1, y = 1.5.$
66. $y = x, y = \frac{1}{x}, y = \frac{10}{3} - x, x \geq 1.$
67. $y = 4^{-x}, y = -\log_4 x, y = 0, x = 0.$
68. $2y = x^2, x^2 + y^2 = 4y, 2y \geq x^2.$
69. $y = x^\alpha, y = x^{\frac{1}{\alpha}}, x \geq 0, \alpha > 1.$
70. $y = x^\alpha, y = x^{-\alpha}, y = 0, x = b, \alpha > 0, \alpha \neq 1, b > 1.$
71. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), (0 \leq t \leq 2\pi), y = 0.$
72. $x = 2t - t^2, y = 2t^2 - t^3.$
73. $x = a \cos t, y = \frac{a \sin^2 t}{2 + \sin t}.$
74. $x = a \cos t, y = b \sin t.$
75. $x = a(1 - \cos t) \cos t, y = a(1 - \cos t) \sin t.$
76. $x = a\left(\frac{2}{\pi}t - \sin t\right), y = a(1 - \cos t), a > 0.$
77. $x = a \sin 2t, y = a \sin t, a > 0.$
78. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (лемниската).
79. $r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$ (парабола), $\varphi = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{2}.$
80. $r = 3 + 2 \cos \varphi.$
81. $r = \frac{1}{\varphi}, r = \frac{1}{\sin \varphi}, \left(0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$
82. $r^2 + \varphi^2 = 1.$
83. $\varphi = \sin(\pi r), (0 \leq r \leq 1).$
84. $\varphi = r - \sin r, \varphi = \pi.$
85. $r = 2 - \cos \varphi, r = \cos \varphi.$

$$86. r = a |\operatorname{tg} \varphi|, r = b |\cos \varphi|, 0 < b < a.$$

$$87. r = b + a \cos \varphi, a \geq b > 0.$$

$$88. r = 2a \cos \varphi, r = a \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}, \varphi = 0.$$

$$89. r = 2a \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi}, r = \frac{2b}{\sin \varphi}, 0 < b < a.$$

$$90. r^2 = a^2 \cos 4 \varphi.$$

3-§. АЙЛАНМА СИРТНИНГ ЮЗИ

$y = f(x)$ функция $[a, b]$ да аниқланган ва узлуксиз ҳамда узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ учун $f(x) \geq 0$ бўлсин. Бу функция графигининг $(a, f(a))$ ва $(b, f(b))$ нуқталар орасидаги $\widehat{AB}$ ёни Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сиртнинг юзи

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad (9)$$

бўлади.

11-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right), 0 \leq x \leq a, (a > 0)$$

занжир чизиқни Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланиш сиртнинг юзини топинг.

Равшанки, берилган $f(x)$ функциянинг ҳосиласи

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

бўлади. (9) формуладан фойдаланиб, изланаётган айланиш сиртнинг юзини топамиз:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_a^b \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)^2} dx = \\ &= \frac{\pi a}{2} \int_0^a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)^2 dx = \frac{\pi a}{2} \int_0^a \left[e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}} \right] dx = \\ &= \frac{\pi a}{2} \left[\frac{a}{2} e^{\frac{2x}{a}} + 2x - \frac{a}{2} e^{-\frac{2x}{a}} \right]_0^a = \frac{\pi a^2}{4} [e^2 - e^{-2} + 4]. \end{aligned}$$

Демак,

$$S = \frac{\pi a^2}{4} (e^2 - e^{-2} + 4),$$

$\overline{AB}$ эгри чизиқ юқори яримтекисликда ($y \geq 0$) жойлашган бўлиб, у

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлсин. Бунда $x = x(t)$ ва $y = y(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз ва узлуксиз $x'(t)$, $y'(t)$ ҳосилаларга эга бўлсин. Бу эгри чизиқни Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланиш сиртининг юзи

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \quad (10)$$

бўлади.

11-мисол. Ушбу

$$x^2 + (y - 2)^2 = 1$$

айланани Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланиш сиртининг (тор) юзини топинг.

Берилган айлананинг тенгламасини

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 2 + \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

параметрик формада ёзиб оламиз. Изланаётган айланиш сиртининг юзини (10) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{2\pi} (2 + \sin t) \cdot \sqrt{(\cos t)^2 + (2 + \sin t)^2} dt = \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} \cdot (2 + \sin t) dt = \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} (2 + \sin t) dt = 2\pi(2t - \cos t) \Big|_0^{2\pi} = 8\pi^2. \end{aligned}$$

Демак,

$$S = 8\pi^2.$$

4-§. АЙЛАНМА ЖИСМИНИНГ ҲАЖМИ

1. Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция $[a, b]$ да аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ да $f(x) \geq 0$ бўлсин.

Юқоридан $f(x)$ функция графиги, ён томонлардан $x=a$, $x=b$ вертикал чизиқлар, пастдан Ox ўқдаги $[a, b]$ сегмент билан чегараланган шаклни Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (11)$$

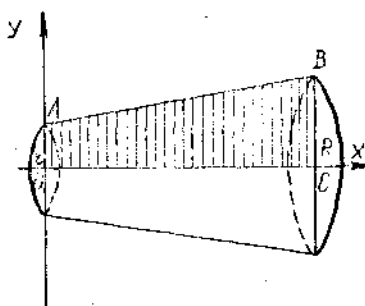
бўлади.

12-мисол. Асосларининг радиуси r ва R , баландлиги h бўлган кесик конуснинг ҳажмини топинг.

Масалада айтилган кесик конус юқоридан

$$f(x) = r + \frac{R-r}{h} x, \\ (0 \leq x \leq h)$$

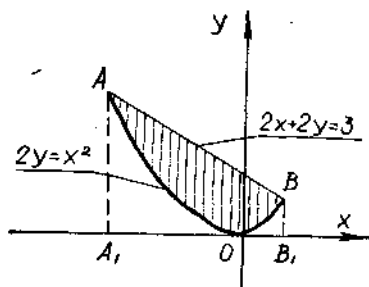
функция графиги, ён томонлардан $x=0$, $x=h$ вертикал тўғри чизиқлар, пастдан $[0, h]$ сегмент билан чегараланган $OABC$ трапециянинг Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм бўлади (11-чизма).



11-чизма.

(11) формуладан фойдаланиб кесик конуснинг ҳажмини топамиз:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^h f^2(x) dx = \pi \int_0^h \left(r + \frac{R-r}{h} x \right)^2 dx = \\ &= \pi \int_0^h \left[r^2 + 2r \cdot \frac{R-r}{h} x + \left(\frac{R-r}{h} \right)^2 x^2 \right] dx = \\ &= \pi \left[r^2 x + 2r \cdot \frac{R-r}{h} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{(R-r)^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^h = \\ &= \pi \left[r^2 h + r \cdot \frac{R-r}{h} \cdot h^2 + \left(\frac{R-r}{h} \right)^2 \cdot \frac{h^3}{3} \right] = \\ &= \pi h \left(r^2 + Rr - r^2 + \frac{1}{3} (R^2 - 2Rr + r^2) \right) = \\ &= \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2). \end{aligned}$$



12- чизма.

Демак,

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2).$$

13- мисол. Ушбу

$$2y = x^2, \quad 2x + 2y = 3$$

чизиқлар билан чегараланган шаклни Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланиш жисмининг ҳажмини топинг.

Аввало $2y = x^2$ парабола билан $2x + 2y - 3 = 0$ тўғри чизиқнинг кесишиш нуқталарини топамиз:

$$x^2 = 3 - 2x.$$

Бундан $x_1 = 1$, $x_2 = -3$ бўлиши келиб чиқади. Демак, чизиқларнинг кесишиш нуқталари $A(-3; \frac{9}{2})$, $B(1; \frac{1}{2})$ бўлиб, улар ҳосил қилган шакл 12-чизмада тасвирланган.

Изланаётган айланиш жисмининг ҳажми

$$V = V_1 - V_2$$

бўлади, бунда $V_1 - A_1ABB_1$ трапециянинг Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмининг ҳажми, V_2 эса A_1AOBB_1 эгри чизиқли трапециянинг Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмининг ҳажми. Бу жисмларнинг ҳажмини (11) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_{-3}^1 \left[\frac{1}{2} (3 - 2x) \right]^2 dx = \pi \int_{-3}^1 \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 d \left(x - \frac{3}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \pi \left(x - \frac{3}{2} \right)^3 \Big|_{-3}^1 = \frac{91}{3} \pi. \end{aligned}$$

$$V_2 = \pi \int_{-3}^1 \left(\frac{1}{2} x^2 \right)^2 dx = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_{-3}^1 = \frac{\pi}{20} (1 + 243) = \frac{61}{5} \pi.$$

Демак,

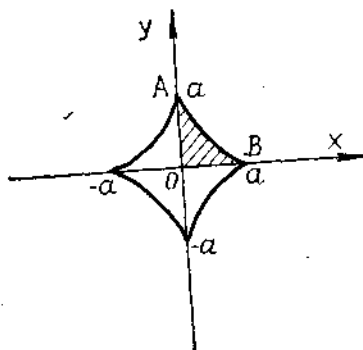
$$V = V_1 - V_2 = \frac{91\pi}{3} - \frac{61\pi}{5} = 18 \frac{2}{15} \pi.$$

Фараз қилайлик, эгри чизиқ

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлсин. Бунда $x = x(t)$ функция узлуксиз ҳамда узлуксиз манфий бўлмаган $x'(t)$ ҳосилага эга, $y(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз ҳамда $\forall t \in [\alpha, \beta]$ да $y(t) \geq 0$.

Бундай чизик билан чегараланган шаклни Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми



13- чизма.

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t) x'(t) dt \quad (12)$$

бўлади

15- мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

параметрик тенгламалар билан аниқланган чизик (астроида) ҳосил қилган шаклнинг Ox ўқ атрофида айлантиришдан юзага келган жисмнинг ҳажмини топинг (13- чизма).

13- чизмада кўрсатилган OAB шаклни Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми (12) формулага кўра топилади:

$$\begin{aligned} V_0 &= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 y^2(t) \cdot x'(t) dt = -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^6 t \cdot a \cdot 3 \cos^2 t \cdot \\ &\quad \cdot (-\sin t) dt = -3\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t)^3 \cos^2 t d(\cos t) = \\ &= -3\pi a^3 \left[\frac{1}{3} \cos^3 t - \frac{3}{5} \cos^5 t + \frac{3}{7} \cos^7 t - \frac{1}{9} \cos^9 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16\pi a^3}{105}. \end{aligned}$$

Демак, изланаётган жисмнинг ҳажми:

$$V = 2V_0 = \frac{32\pi a^3}{105}.$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги чизикларни айлантиришдан ҳосил бўлган айла-
ниш сиртларининг юзalarини ҳисобланг:

91. $y = a \cos \frac{\pi x}{2b}$, ($|x| \leq b$), Ox ўқ атрофида.

92. $y = \operatorname{tg} x$, ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$), Ox ўқ атрофида.

93. $y = e^{-x}$, ($0 \leq x \leq a$), Ox ўқ атрофида.

94. $2ay = a^2 + x^2$, ($0 \leq x \leq a$), Ox ўқ атрофида.

95. $x = \ln(y - \sqrt{y^2 - 1})$, ($\frac{5}{4} \leq y \leq \frac{5}{3}$), Oy ўқ атро-
фида.

96. $x = a \cdot \arcsin \sqrt{\frac{y}{a} + \sqrt{y(a-y)}}$, ($\frac{a}{4} \leq y \leq \frac{3a}{4}$), Oy
ўқ атрофида.

97. $4x + 2 \ln y = y^2$, ($e^{-1} \leq y \leq e$), Oy ўқ атрофида.

98. $y^2 = 2(x-1)$, ($0 \leq y \leq 1$), Oy ўқ атрофида.

99. $y = (\arcsin x - x \sqrt{1-x^2})/2$, ($0 \leq x \leq 1$). Oy ўқ ат-
рофида.

100. $y = a \operatorname{ch} \left(\frac{x}{a} \right)$, ($a \leq x \leq b$), Oy ўқ атрофида.

101. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, ($0 \leq t \leq 2\pi$),
1) Ox ўқ, 2) Oy ўқ, 3) $y = 2a$ чизик атрофида.

102. $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$,
 Ox ўқ атрофида.

103. $x = 2\sqrt{3} \cos t$, $y = \sin 2t$, Ox ўқ атрофида.

104. $x = \frac{t^3}{3}$, $y = 4 - \frac{t^2}{2}$, ($|t| \leq 2\sqrt{2}$), Ox ўқ атрофида.

Қуйидаги чизиклар билан чегараланган шаклларни Ox ўқ
атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланиш жисмларининг
ҳажмларини топинг:

105. $y^2 = 2px$, $y = 0$, $x = a$.
106. $xy = a^2$, $y = 0$, $x = a$, $x = 2a$.
107. $\frac{y}{b} = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$, $y = 0$, $x = a$, $(x \geq 0)$.
108. $y = \sin 2x$, $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$, $y = 0$.
109. $y = \sqrt{x} e^{-x}$, $y = 0$, $x = a$.
110. $y = (\ln x)/x$, $(1 \leq x \leq e)$, $y = 0$, $x = e$.
111. $y = \sin \sqrt{x}$, $(0 \leq x \leq \pi^2)$, $y = 0$.
112. $y = e^{ax} \sin \pi x$, $(n-1 \leq x \leq n)$, $y = 0$, $n \in \mathbb{N}$.
113. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
114. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, $|x| = h$.
115. $y^2 = 2x$, $y = 2$, $x = 0$.
116. $y = \sin^2 x$, $y = x \sin x$, $(0 \leq x \leq \pi)$.
117. $2py = x^2$, $2qx = y^2$, $p > 0$, $q > 0$.
118. $y = e^{-x} \sqrt{\sin x}$, $(0 \leq x < +\infty)$.
119. $y = e^x + 6$, $y = e^{2x}$, $x = 0$.
120. $y = x$, $y = x + \sin^2 x$, $(0 \leq x \leq \pi)$.
121. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $y = 0$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$.
122. $x = 2t - t^2$, $y = 4t - t^3$.
123. $x = \frac{a}{t^2 + 1}$, $y = a \frac{t^3 - t}{t^2 + 1}$.
124. $x = a \operatorname{ch}^3 t$, $y = a \cdot \operatorname{sh}^3 t$, $x = 2\sqrt{2}a$.
125. $x = \frac{2at^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2at^3}{1+t^2}$, $x = a$.
126. $x = a(1 + \cos t)$, $y = a(\operatorname{tg} t + \sin t)$, $x = \frac{3a}{2}$.

5-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ МЕХАНИК МАСАЛАЛАРГА ТАТБИҚИ

1. Статик момент. Оғирлик маркази.

Маълумки, эгри чизиқнинг Ox ва Oy ўқларига нисбатан статик моментлари қуйидаги формулалар билан ифодаланади:

$$K_x = \int_0^s y ds, \quad K_y = \int_0^s x ds,$$

бу ерда $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ эгри чизиқ ёйининг дифференциали бўлиб, s эса берилган эгри чизиқ узунлиги.

Берилган эгри чизиқнинг оғирлик марказлари эса қуйдаги формулалар билан ҳисобланади:

$$\bar{x} = \frac{K_y}{s}, \quad \bar{y} = \frac{K_x}{s}.$$

Амалий жиҳатдан бу формулаларда s ни эгри чизиқнинг аналитик тасвирида эркин ўзгарувчи ролини ўйнаган t , x ёки θ ўзгарувчилар орқали ифодаланади.

16-мисол. Тенгламаси $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ бўлган тўғри чизиқнинг координата ўқлари орасига жойлашган қисми учун, унинг Ox ва Oy ўқларига нисбатан статик моментларини топинг.

$$K_x = \int_0^a b \left(1 - \frac{x}{a}\right) ds.$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} dx = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} dx.$$

$$\begin{aligned} K_x &= \frac{b\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = \frac{b\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \cdot a - \\ &- \frac{b\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^a = b\sqrt{a^2 + b^2} - \frac{b\sqrt{a^2 + b^2}}{2} = \\ &= \frac{b\sqrt{a^2 + b^2}}{2}; \end{aligned}$$

$$K_y = \int_0^a x \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} dx = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \int_0^a x dx = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{2};$$

17-мисол. Тенгламаси $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ билан берилган астроиданинг биринчи чоракда ётган қисмининг Ox ва Oy ўқларига нисбатан статик моментларини ҳамда унинг оғирлик марказини топинг.

Равшанки, бу астроиданинг параметрик тенгламаси $x = a \cos^3 \varphi$, $y = a \sin^3 \varphi$ бўлади. У ҳолда

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \\ = \sqrt{(-3a \cos^2 \varphi \sin \varphi)^2 + (3a \sin^2 \varphi \cos \varphi)^2} d\varphi = \\ = 3a \cos \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi;$$

$$K_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 \varphi \cdot 3a \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi = \\ = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi d(\sin \varphi) = 3a^2 \cdot \frac{1}{5} \sin^5 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{5}.$$

Худди шунга ўхшаш

$$K_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x ds = \frac{3a^2}{5}.$$

Оғирлик маркази $\bar{x} = \frac{K_y}{s}$, $\bar{y} = \frac{K_x}{s}$ бўлиб, бу ерда

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \cos \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi = \\ = -3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d(\cos \varphi) = -3a \frac{\cos^2 \varphi}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}; \\ \bar{x} = \frac{3a^2}{5} : \frac{3a}{2} = \frac{2a}{5}; \quad \bar{y} = \frac{3a^2}{5} : \frac{3a}{2} = \frac{2a}{5}.$$

Демак, $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{2a}{5}; \frac{2a}{5}\right)$.

2. Геометрик фигураларнинг статик моментлари. Оғирлик маркази.

Агар геометрик фигура юқоридан $y = y(x)$, пастдан Ox ўқи, ён томонидан $x = a$ ва $x = b$ вертикал чизиклар билан чегараланган бўлса, бундай фигуранинг Ox ва Oy ўқларига нисбатан статик моментлари ва оғирлик маркази қуйидаги формулалар билан ҳисобланади:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx, \quad M_y = \int_a^b xy dx, \quad (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{S}, \frac{M_x}{S}\right).$$

Бу ерда $S = \int_a^b y(x) dx$ геометрик фигуранинг юзи.

18-мисол. $y = a - x$, $y = 0$, $x = 0$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг Ox , Oy ўқларига нисбатан статик моментлари ва оғирлик марказининг координаталарини топинг.

Юқорида келтирилган формулаларга асосан:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^a y^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^a (a-x)^2 dx = -\frac{1}{2 \cdot 3} (a-x)^3 \Big|_0^a = \frac{a^3}{6};$$

$$\begin{aligned} M_y &= \int_0^a (a-x) x dx = \int_0^a ax dx - \int_0^a x^2 dx = \\ &= a \cdot \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{6}; \end{aligned}$$

$$S = \int_0^a (a-x) dx = \int_0^a a dx - \int_0^a x dx = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2};$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{S}, \frac{M_x}{S} \right) = \left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3} \right).$$

19-мисол. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоиданинг бир тармоғи ва Ox ўқ билан чегараланган фигуранинг оғирлик марказини топинг.

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} y^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dx = \\ &= \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - 3\cos^3 t) dt = \\ &= \frac{a^3}{2} \cdot 2\pi + \frac{3a^3}{4} \cdot 2\pi = \pi a^3 + 3 \cdot \frac{1}{2} \pi a^3 = \frac{5\pi a^3}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \int_0^{2\pi} xy dx = \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) a^2 (1 - \cos t)^2 dt = \\ &= a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) (1 - \cos t)^2 dt = 3\pi^2 a^3. \end{aligned}$$

$$S = \int_0^{2\pi} y dx = \int_0^{2\pi} y(t) x'_t dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = 3\pi a^2,$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{S}, \frac{M_x}{S} \right) = \left(\pi a, \frac{5a}{6} \right).$$

3. Кучнинг бажарган иши.

Агар ўзгарувчи $F(x)$ куч Ox ўқ бўйлаб таъсир этаётган бўлса, у ҳолда бу кучнинг $[a, b]$ сегментда бажарган иши

$A = \int_a^b F(x) dx$ формула орқали ифодаланади.

20-мисол. Агар 5 кг куч пружинани 25 см га чўзса, у ҳолда пружинани 60 см га чўзиш учун қандай иш бажариш керак?

Гук қонунига биноан:

$$F(x) = k \cdot x, \quad 5 \text{ кг} = k \cdot 0,25 \text{ м} \Rightarrow k = 20 \Rightarrow F = 20 \cdot x.$$

$$A = \int_0^{0,6} 20x dx = \frac{20 \cdot x^2}{2} \Big|_0^{0,6} = 10 \cdot 0,36 = 3,6 \text{ кг} \cdot \text{м}.$$

21-мисол. Цилиндрда диаметри 20 см ва узунлиги 80 см бўлган поршень ҳаракат қилади. Бу цилиндр $P_0 = 10 \text{ кг/см}^2$ сосим остида буғ билан тўлдирилган бўлса, температурани ўзгартмай қандай иш бажарилганда, буғнинг ҳажми икки баробар камаяди?

Жараён изотермиклиги сабабли, Бойль-Марриот қонунига биноан: $P \cdot V = P_0 \cdot V_0$ бўлиб,

$$A = \int_{v_0}^{2v_0} P dv = \int_{v_0}^{2v_0} \frac{P_0 \cdot v_0}{v} dv = P_0 v_0 \ln 2.$$

Бундан: $v_0 = 10^2 \pi \cdot 80 = 8000 \pi \text{ см}^2$ ва $P_0 = 10 \text{ кг/см}^2$ сабабли,

$$A = 80000 \pi \cdot \ln 2 \text{ кг} \cdot \text{см} = 800 \pi \ln 2 \text{ кг} \cdot \text{м}$$

бўлади.

XI боб

СОНЛИ ҚАТОРЛАР

1-§. АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР. СОДДА ТЕОРЕМАЛАР

Бирор

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги берилган бўлсин.

1-таъриф. Қуйидаги

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

ифода қатор (сонли қатор) деб аталади. Уни қисқача $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ каби белгиланади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

$a_1, a_2, a_3, \dots$ лар (1) қаторнинг ҳадлари, a_n эса қаторнинг умумий ҳади дейилади.

Ушбу

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1, \\ A_2 &= a_1 + a_2, \\ A_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\dots \\ A_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\ &\dots \end{aligned}$$

йиғиндилар (1) қаторнинг қисмий йиғиндилари дейилади. Бу қисмий йиғиндилардан иборат

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$$

кетма-кетликни қараймиз.

2-таъриф. Агар $n \rightarrow \infty$ да $\{A_n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга, яъни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$$

бўлса, у ҳолда (1) қатор яқинлашувчи дейилади, A сон шу қаторнинг йиғиндисини дейилади.

Бу ҳолда

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

каби ёзилади.

Агар $n \rightarrow \infty$ да $\{A_n\}$ кетма-кетликнинг лимити чексиз бўлса, ёки бу лимит мавжуд бўлмаса, у ҳолда (1) қатор узоқлашувчи дейилади.

Шундай қилиб, таърифга кўра $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлишини аниқлаш учун унинг қисмий йиғиндилар кетма-кетлигини $\{A_n\}$ нинг лимитини қараш керак экан. Қисмий йиғинди A_n нинг лимитини топишда унинг ифодасини қулайроқ шаклда ёзиб олиш лозим. Кўпгина ҳолларда қуйида келтирилаётган формулалардан фойдаланиш мақсадга мувофиқ бўлади:

$$B_n(x) = x + \dots + x^n = \begin{cases} \frac{x}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}, & \text{агар } x \neq 1 \text{ бўлса,} \\ n, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} C_n(x) &= 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{(n-1)x^n - nx^{n+1}}{(1-x)^3}, & \text{агар } x \neq 1 \text{ бўлса,} \\ \frac{n(n+1)}{2}, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса.} \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_n(x) &= x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2n-1} = \\ &= \begin{cases} \frac{x}{1-x^2} - \frac{x^{2n+1}}{1-x^2}, & \text{агар } x \neq \pm 1 \text{ бўлса,} \\ \pm n, & \text{агар } x = \pm 1 \text{ бўлса.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_n(x) &= 1 + 3x^2 + 5x^4 + \dots + (2n-1)x^{2n-2} = \\ &= \begin{cases} \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{(2n+1)x^{2n+2} - (2n-1)x^{2n}}{(1-x^2)^3}, & \text{агар } x \neq \pm 1, \\ \pm n^2, & \text{агар } x = \pm 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Бу формулаларни келтириб чиқариш қийин эмас. Биз улардан бирини, масалан, учинчисининг тўғрилигини кўрсатамиз. Равшанки, $x = \pm 1$ бўлганда

$$\begin{aligned} D_n(1) &= 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n, \quad D_n(-1) = \\ &= -1 - 1 - 1 - \dots - 1 = -n \end{aligned}$$

бўлади.

Энди $x \neq \pm 1$ бўлсин. Бу ҳолда тенгликнинг ҳар икки томонини x га кўпайтириб, топамиз:

$$\begin{aligned} x \cdot D_n(x) &= x(x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2n-1}) = \\ &= x^2 + x^4 + \dots + x^{2n}. \end{aligned}$$

Агар

$$x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2n} = x^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^2)^n = \\ = x^2 \frac{1 - (x^2)^n}{1 - x^2} = x^2 \frac{1 - x^{2n}}{1 - x^2}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда ушбу

$$x \cdot D_n(x) = x^2 \frac{1 - x^{2n}}{1 - x^2}$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан эса

$$D_n(x) = \frac{x - x^{2n+1}}{1 - x^2} = \frac{x}{1 - x^2} - \frac{x^{2n+1}}{1 - x^2}$$

бўлиши келиб чиқади.

1-мисол. Ушбу

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Берилган қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$A_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$$

бўлади. Бу A_n ни юқорида келтирилган (2) формуладан фойдаланиб бундай ёзиб оламиз:

$$A_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \\ = \frac{1}{\frac{2}{3}} + \left[\frac{-\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \right] = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} - \\ - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

$n \rightarrow \infty$ да лимитга ўтиб, топамиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] = \frac{2}{3}.$$

Демак, берилган қатор яқинлашувчи, унинг йиғиндиси

$$A = \frac{2}{3}.$$

2-мисол. Ушбу

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг. Бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$A_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} = \frac{1}{2} \left(1 + 3 \cdot \frac{1}{2} + \right. \\ \left. + 5 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + (2n-1) \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \right)$$

бўлади. Уни (2) формуладан фойдаланиб, бундай ёзиб оламиз:

$$A_n = \frac{1}{2} \left[1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4 + \dots + \right. \\ \left. + (2n-1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{2n-2} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + \frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2} \right)^2} + \right. \\ \left. + \frac{(2n+1) \cdot \frac{1}{2^{n+2}} - (2n+1) \cdot \frac{1}{2^n}}{\left(1 - \frac{1}{2} \right)^3} \right] = \frac{1}{2} \left(6 - \frac{2n+3}{2^{n-1}} \right).$$

Натижада

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(6 - \frac{2n+3}{2^{n-1}} \right) = 3$$

бўлишини топамиз. Демак, қатор яқинлашувчи, унинг йиғиндиси

$$A = 3.$$

3-мисол. Ушбу

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$$

қаторни яқинлашшига текширинг. Бу қаторнинг қисмий йиғиндисини ҳисоблаб, унинг лимитини топамиз:

$$A_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \\ = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \dots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right), \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right) = \frac{1}{3}.$$

Демак, берилган қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси

$$A = \frac{1}{3}$$

4-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг. Бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$A_n = (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + \sqrt{1}) + (\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}) +$$

$$+ \dots + (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

бўлади. Уни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$A_n = [(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{1} - \sqrt{2})] + [(\sqrt{4} - \sqrt{3}) +$$

$$+ (\sqrt{2} - \sqrt{3})] + [(\sqrt{5} - \sqrt{4}) + (\sqrt{3} - \sqrt{4})] +$$

$$+ \dots + [(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) + (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})] =$$

$$= [(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2})] + [(\sqrt{4} - \sqrt{3}) -$$

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})] + [(\sqrt{5} - \sqrt{4}) - (\sqrt{4} - \sqrt{3})] + \dots +$$

$$+ [(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})] = 1 - \sqrt{2} +$$

$$+ (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}.$$

Натижада

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \right) = 1 - \sqrt{2}.$$

бўлишини топамиз. Демак, қатор яқинлашувчи, унинг йиғиндиси $A = 1 - \sqrt{2}$.

5-мисол. Ушбу

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n + \dots$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг. Бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$A_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n$$

бўлади. Юқорида келтирилган (2) формуладан фойдаланиб (бу формулада $x = -1$ деб) A_n ни ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{[1-(-1)]^2} + \frac{(n-1)(-1)^n - n(-1)^{n-1}}{[1-(-1)]^2} = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{(n-1)(-1)^n - n(-1)^{n-1}}{4} = \frac{1}{4} [1 + \\ &\quad + 2n(-1)^n + (-1)^{n+1}]. \end{aligned}$$

Агар $n = 2k$ бўлса,

$$A_{2k} = \frac{1}{4} (1 + 4k - 1) = k,$$

агар $n = 2k - 1$ бўлса,

$$A_{2k-1} = \frac{1}{4} (1 - 2(2k - 1) + 1) = \frac{1}{4} (4 - 4k) = 1 - k$$

бўлади.

Бундан эса

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_{2k} = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A_{2k-1} = -\infty$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, қатор узоқлашувчи.

Содда теоремалар

Бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

қатор берилган бўлсин. Бу қаторнинг дастлабки m та ҳадини ташлаш натижасида юзага келган

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots \quad (6)$$

қатор (1) қаторнинг қолдиғи дейилади.

1-теорема. Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлса, унинг исталган (6) қолдиғи ҳам яқинлашувчи бўлади ва, аксинча, (6) қолдиқнинг яқинлашувчи бўлишидан берилган (1) қаторнинг яқинлашувчи бўлиши келиб чиқади.

2-теорема. Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси A га тенг бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \dots + ca_n + \dots$$

қатор ҳам яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $c \cdot A$ га тенг бўлади ($c \neq 0$ ўзгармас сон).

3-теорема. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots$$

қаторлар яқинлашувчи бўлиб, уларнинг йиғиндиси мос равишда A ва B га тенг бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) + \dots$$

қатор ҳам яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $A + B$ га тенг бўлади.

4-теорема. Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлса, $n \rightarrow \infty$ да қаторнинг умумий ҳади a_n нолга интилади. (Бу теорема қатор яқинлашувчи бўлишининг зарурий шартини ифодалайди.)

6-мисол. Ушбу

$$0,001 + \sqrt{0,001} + \sqrt[3]{0,001} + \dots + \sqrt[n]{0,001} + \dots$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Берилган қаторнинг умумий ҳади $a_n = \sqrt[n]{0,001}$ бўлади. Агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{0,001} = 1 \neq 0$$

бўлишини эътиборга олсак, унда берилган қатор учун қатор яқинлашишининг зарурий шартининг бажарилмаслигини кўрамиз. Демак, берилган қатор узоқлашувчи.

7-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$$

қатор яқинлашувчи бўладими?

Бу қаторнинг умумий ҳади учун

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} = \frac{1}{(\ln n)^{1/n}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{n} \ln \ln n}} = \frac{1}{e^{\frac{\ln \ln n}{n}}} \rightarrow 1$$

бўлганлиги сабабли қатор узоқлашувчи бўлади.

2-§. МУСБАТ ҲАДЛИ ҚАТОРЛАР. СОЛИШТИРИШ ТЕОРЕМАЛАРИ

Бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

қатор берилган бўлсин.

Агар (1) қаторда $a_n \geq 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) бўлса, у ҳолда (1) қатор *мусбат ҳадли қатор* ёки қисқача *мусбат қатор* деб аталади.

5-теорема. Мусбат қатор $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ нинг яқинлашувчи бўлиши учун унинг қисмий йиғиндилари кетма-кетлиги $\{A_n\}$ нинг юқоридан чегараланган бўлиши зарур ва етарли.

8-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \dots \quad (\alpha > 1)$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$A_n = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha}}$$

бўлади. Равшанки, $\{A_n\}$ — ўсувчи кетма-кетликдир.

Иккинчи томондан,

$$\begin{aligned} A_{2n+1} &= 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^{\alpha}} = \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(2n)^{\alpha}} + \frac{1}{(2n+1)^{\alpha}} \right) < \\ &< 1 + \frac{2}{2^{\alpha}} + \frac{2}{4^{\alpha}} + \dots + \frac{2}{(2n)^{\alpha}} = \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} \left(1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha}} \right) = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} A_n$$

бўлиб, ундан

$$A_n < 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} A_n$$

бўлиши келиб чиқади. Кейинги тенгсизликдан топамиз:

$$A_n < \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1} (n = 1, 2, 3, \dots, \alpha > 1).$$

Демак, $\{A_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланган. Юқоридан келтирилган теоремага кўра берилган қатор яқинлашувчи бўлади.

Одатда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ қаторни *умумлашган гармоник қатор*

деб юритилади.

Шундай қилиб умумлашган гармоник қатор $\alpha > 1$ бўлганда яқинлашувчи бўлади. Бу қатор $\alpha \leq 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.

9-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Бу қаторнинг умумий ҳади

$$a_n = a^{\ln n}$$

ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\begin{aligned} a^{\ln n} &= e^{\ln a \cdot \ln n} = e^{\ln n \cdot \ln a} = (e^{\ln n})^{\ln a} = \\ &= n^{\ln a} = \frac{1}{n^{-\ln a}} \end{aligned}$$

Натижада берилган қатор ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-\ln a}}$$

кўринишга келади.

Агар $-\ln a > 1$ бўлса, қатор яқинлашувчи бўлади.

$$-\ln a > 1 \Rightarrow \ln \frac{1}{a} > \ln e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} > e \Rightarrow a < \frac{1}{e}.$$

Демак, берилган қатор $a < \frac{1}{e}$ бўлганда яқинлашувчи бўлади.

($a \geq \frac{1}{e}$ бўлганда қатор узоқлашувчи бўлади.)

Энди мусбат қаторларни солиштириш теоремаларини қараймиз.

Иккита

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots$$

мусбат қаторлар берилган бўлсин.

6-теорема. Агар n нинг бирор $n_0 (n_0 \geq 1)$ қийматидан бошлаб барча $n \geq n_0$ лар учун

$$a_n \leq b_n$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг яқин-

лашувчи бўлишидан $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг ҳам яқинлашувчи

бўлиши ёки $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг узоқлашувчи бўлишидан $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг ҳам узоқлашувчи бўлиши келиб чиқади.

7-теорема. Агар $n \rightarrow \infty$ да $\frac{a_n}{b_n}$ нисбат ушбу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \quad (0 \leq k \leq +\infty)$$

лимитга эга бўлса,

а) $k < \infty$ бўлганда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлишидан $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлиши;

б) $k > 0$ бўлганда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг узоқлашувчи бўли-

шидан $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг ҳам узоқлашувчи бўлиши келиб чиқади.

Натижа. Агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$$

лимит ўринли бўлиб, $0 < k < \infty$ бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторлар бир вақтда ёки яқинлашувчи, ёки узоқлашувчи бўлади.

8-теорема. Агар n нинг бирор n_0 қийматидан бошлаб барча $n \geq n_0$ лар учун

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлишидан $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг ҳам яқинлашувчи бўлиши ёки $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг узоқлашувчи бўлишидан $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг ҳам узоқлашувчи бўлиши келиб чиқади.

10-мисол. Ушбу

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

қаторнинг яқинлашувчилигини кўрсатинг.

Математик индукция усули билан кўрсатиш мумкинки,

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad (n \geq 1)$$

бўлади. Маълумки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

геометрик қатор $\left(q = \frac{1}{2} < 1\right)$ яқинлашувчи. Демак, 6-теоремага кўра берилган қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

11-мисол. Ушбу

$$\frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \dots + \frac{1}{1000 \cdot n + 1} + \dots$$

қаторнинг узоқлашувчи эканлигини кўрсатинг.

Равшанки,

$$1000 \cdot n + 1 < 1000n + 1000 = 1000(n+1).$$

Бундан эса

$$\frac{1}{1000(n+1)} < \frac{1}{1000n+1} \left(\frac{1}{n+1} < \frac{1000}{1000n+1} \right)$$

бўлиши келиб чиқади.

Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

қаторнинг узоқлашувчи эканини эътиборга олсак, унда 6-теоремага кўра берилган қаторнинг узоқлашувчи бўлишини аниқлаймиз.

12-мисол. Ушбу

$$\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \dots$$

қаторнинг узоқлашувчи бўлишини кўрсатинг.

Энг олдин қуйидаги тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$(2n-1)(2n+1) < (2n+1)(2n+1) < (2n+2)(2n+2) = 4(n+1)^2,$$

$$\frac{1}{2(n+1)} > \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}.$$

Маълумки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

қатор узоқлашувчи. Демак, 6-теоремага кўра, берилган қатор узоқлашувчи бўлади.

13-мисол. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \geq 0; n = 1, 2, 3, \dots)$$

қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлишини кўрсатинг.

Қатор яқинлашувчининг зарурий шартидан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

бўлади. Демак, шундай $n_0 \in N$ сонни топиш мумкинки, барча $n > n_0$ лар учун

$$0 \leq a_n < 1$$

бўлади. Унда $n > n_0$ учун

$$a_n^2 \leq a_n$$

бўлади. 6-теоремадан фойдаланиб берилган қаторнинг яқинлашувчи бўлишини топамиз.

14-мисол. Агар $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) бўлиб

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$$

бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$$

қаторлар ҳақида нима дейиш мумкин?

Равшанки,

$$\begin{aligned} \max(a_n, b_n) &\geq a_n, \\ \max(a_n, b_n) &\geq b_n. \end{aligned}$$

Шу сабабли $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$ қатор ҳаммавақт узоқлашувчи бўлади.

Аммо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$$

қатор яқинлашувчи бўлиши мумкин.

Масалан,

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & \text{агар } n \text{ жуфт сон бўлса,} \\ \frac{1}{n}, & \text{агар } n \text{ тоқ сон бўлса,} \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{агар } n \text{ жуфт сон бўлса,} \\ \frac{1}{n^2}, & \text{агар } n \text{ тоқ сон бўлса} \end{cases}$$

бўлганда

$$\min(a_n, b_n) = \frac{1}{n^2}$$

бўлади.

Равшанки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

қатор яқинлашувчи.

15-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

Бу қаторни гармоник қатор $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ билан солиштирамыз.

Равшанки, бу икки қатор умумий ҳадлари нисбатининг лимити

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^{1+\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

бўлади. Юқорида келтирилган натижага кўра берилган қатор узоклашувчи бўлади.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашувчилигини кўрсатинг ва йиғиндиларини топинг:

$$1. \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) + \dots$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}.$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+3)}.$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{n(n+1)(n+3)}.$
8. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{2}{n(n+1)} \right).$
9. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{n^2-1}{n^2+1}.$
10. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}.$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\alpha}{2^{n+1}} \cdot \sin \frac{3\alpha}{2^{n+1}}.$
12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}.$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^n} \cdot \cos \frac{3}{2^n}.$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}.$$

Қуйидаги қаторлар учун қатор яқинлашувчилигининг зарурий шарти бажарилмаслигини кўрсатинг:

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,02}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^3-2}{3n^3+4} \right)^{n^2}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\ln^2(n+1)}.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} (n^2+2) \ln \frac{n^2+1}{n^2}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \operatorname{arctg} \frac{1}{n+2}.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{n+1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} (n^2+9) \arcsin \frac{1}{n^2+5}.$$

Солиштириш (таққослаш) аломатларидан фойдаланиб қуйидаги қаторларни яқинлашишга текширинг: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$25. a_n = \frac{\sin^2 3n}{n\sqrt{n}}.$$

$$26. a_n = \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2 + 1}.$$

$$27. a_n = \frac{\cos \frac{\pi}{4n}}{\sqrt[5]{2n^5 - 1}}.$$

$$28. a_n = \frac{\ln n + \sin n}{n^2 + 2 \ln n}.$$

$$29. a_n = \frac{\arcsin \frac{n-1}{n+1}}{n\sqrt{\ln(n+1)}}.$$

$$30. a_n = \frac{\operatorname{arctg}(n^2 + 2n)}{3^n + n^2}.$$

$$31. a_n = \frac{n^2}{e^n}.$$

$$32. a_n = (3n + n^2)e^{-\sqrt{n}} \cdot \ln n.$$

$$33. a_n = \frac{\left(3 - 2\cos^2 \frac{\pi n}{3}\right) \cdot e^n}{n^2 \cdot 2^n}.$$

$$34. a_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

$$35. a_n = \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

36. $a_n \geq 0$ бўлиб, $\{a_n\}$ кетма-кетлик чегараланган бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ қатор яқинлашувчилигини исботланг.

3-§. МУСБАТ ҚАТОРЛАР УЧУН ЯҚИНЛАШУВЧИЛИК АЛОМАТЛАРИ

Бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

мусбат қатор берилган бўлсин.

1°. Коши аломати. Агар (1) қаторда $n \in N$ нинг бирор $n_0 (n_0 \geq 1)$ қийматидан бошлаб барча $n \geq n_0$ қийматлари учун

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \quad \left(\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \right)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, (1) қатор яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлади.

Агар (1) қатор учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

лимит мавжуд бўлиб, $k < 1$ бўлса, у ҳолда (1) қатор яқинлашувчи, $k > 1$ бўлса, (1) қатор узоқлашувчи бўлади.

2°. Даламбер аломати. Агар (1) қаторда $n \in N$ нинг бирор $n_0 (n_0 \geq 1)$ қийматларидан бошлаб барча $n \geq n_0$ қийматлари учун

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \quad \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \right)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, (1) қатор яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлади.

Агар (1) қатор учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$$

лимит мавжуд бўлиб, $d < 1$ бўлса, у ҳолда (1) қатор яқинлашувчи, $d > 1$ бўлса, (1) қатор узоқлашувчи бўлади.

3°. Раабе аломати. Агар (1) қаторда $n \in N$ нинг бирор $n_0 (n_0 \geq 1)$ қийматларидан бошлаб барча $n \geq n_0$ қийматлари учун

$$n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \geq r > 1 \quad \left(n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) < 1 \right)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, (1) қатор яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлади.

Агар (1) қатор учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \rho \quad (\rho = \text{const})$$

лимит мавжуд бўлиб, $\rho > 1$ бўлса, у ҳолда (1) қатор яқинлашувчи, $\rho < 1$ бўлса, (1) қатор узоқлашувчи бўлади.

4°. Кошининг интеграл аломати. Агар $f(x)$ функция $[1, +\infty]$ да аниқланган, узлуксиз ва ўсмайдиган

бўлиб, $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ шу функция учун бошланғич функция ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(x)}$$

бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x f(t)dt$$

лимит мавжуд ва чекли бўлганда (1) қатор яқинлашувчи, бу лимит мавжуд бўлмаганда ёки чексиз бўлганда (1) қатор узоқлашувчи бўлади.

5°. Гаусс аломати. Агар (1) қатор учун

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}} \quad (|\theta_n| < c, \varepsilon > 0)$$

бўлса у ҳолда:

- а) $\lambda > 1$ бўлганда (1) қатор яқинлашувчи,
- б) $\lambda < 1$ бўлганда (1) қатор узоқлашувчи,
- в) $\lambda = 1$ бўлиб, $\mu > 1$ бўлганда (1) қатор яқинлашувчи,
- г) $\lambda = 1$ бўлиб, $\mu \leq 1$ бўлганда (1) қатор узоқлашувчи бўлади.

16-мисол. Ушбу

$$\frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \dots + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \dots (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \dots (4n-2)} + \dots$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Бу қаторни текширишда Даламбер аломатидан фойдаланамиз.

Равшанки,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4n-2)}, \\ a_{n+1} &= \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n+1)(3n+4)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4n-2)(4n+2)}, \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{3n+4}{4n+2}. \end{aligned}$$

Кейинги тенгликда $n \rightarrow \infty$ да лимитга ўтиб, топамиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{4n+2} = \frac{3}{4} < 1.$$

Демак, берилган қатор яқинлашувчи.

17-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Берилган қатор учун:

$$a_n = \frac{n^5}{2^n + 3^n}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^5}{2^{n+1} + 3^{n+1}}.$$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^5}{2^{n+1} + 3^{n+1}} \cdot \frac{2^n + 3^n}{n^5} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 \cdot \frac{3^n \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{3^{n+1} \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]} = \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 \cdot \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}. \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 \cdot \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} = \frac{1}{3} < 1$$

бўлганлиги сабабли, Даламбер аломатига кўра, берилган қатор яқинлашувчи

18-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{2})^n}$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Агар

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n(\sqrt{2})^n}, \\ \sqrt[n]{a_n} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}, \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

бўлишини эътиборга олсак, унда Коши аломатига кўра, берилган қаторнинг яқинлашувчи бўлишини топамиз.

19-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Равшанки,

$$a_n = \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}, \quad a_{n+1} = \frac{3+(-1)^{n+1}}{2^{n+2}},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3+(-1)^{n+1}}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{3+(-1)^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3+(-1)^{n+1}}{3+(-1)^n}.$$

Агар $n = 2k$ бўлса,

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{4}.$$

агар $n = 2k-1$ бўлса,

$$\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3+1}{3-1} = 1$$

бўлади. Демак, $n \rightarrow \infty$ да $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ нинг limiti мавжуд эмас.

Бинобарин, Даламбер аломатига кўра берилган қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлиши тўғрисида бирор қарорга келиб бўлмайди.

Аммо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{2}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Демак, Коши аломатига кўра берилган қатор яқинлашувчи бўлади.

20-мисол. Ушбу $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

$$a_n = (2-\sqrt[n]{a})(2-\sqrt[n]{a}) \dots (2-\sqrt[n]{a}), \quad a > 0$$

қаторни яқинлашишга текширинг.

$\frac{a_n}{a_{n+1}}$ нисбатни қарайлик. Бунда $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2-\sqrt[n]{a}}$ эканини кўриш қийин эмас.

$$\sqrt[n+1]{a} = e^{\frac{\ln a}{n+1}} = 1 + \frac{\ln a}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{\ln^2 a}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= 1 + \frac{\ln a}{n} + \frac{\gamma_n}{n^2}, \quad |\gamma_n| < C$$

муносабатдан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{1 - \frac{\ln a}{n} - \frac{\gamma_n}{n^2}} = 1 + \frac{\ln a}{n} + \frac{\gamma_n^*}{n^2},$$

бу ерда $|\gamma_n^*| < M$.

Гаусс аломатига кўра $\ln a > 1$, яъни $a > e$ бўлганда қатор яқинлашувчи, $\ln a \leq 1$, яъни $a \leq e$ бўлганда эса узоқлашувчи бўлади.

Агар қаралаётган мисолда Даламбер аломатидан фойдаланадиган бўлсак, у ҳолда қатор яқинлашувчилиги ёки узоқлашувчилиги ҳақида бирор қарорга келиб бўлмайди, чунки:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Бундан ташқари яқинлашувчи $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ва узоқлашувчи

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ қаторларга нисбатан $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ эканини кўриш қийин эмас.

Мисол ва масалалар

Коши ва Даламбер аломатларидан фойдаланиб қуйидаги қаторларни яқинлаштишга текширинг:

$$37. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}.$$

$$38. \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}.$$

$$39. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}.$$

$$40. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an}{n+2}\right)^n, \quad a > 0.$$

$$41. \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}.$$

$$42. \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2+4n+5}.$$

$$43. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(3n^2+2n+1)^{(n+3)/2}}.$$

$$44. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3} \right)^{n^{3/2}}.$$

$$45. \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}.$$

$$46. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n^2}, \quad a > 0.$$

$$47. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! a^n}{n^n}, \quad a \neq e, \quad a > 0.$$

$$48. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

$$49. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(3n+4) 3^n}.$$

$$50. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{3^n \cdot n!}.$$

$$51. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 6 \cdots (3n)}{(n+1)!} \arcsin \frac{1}{2^n}.$$

$$52. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n!} \operatorname{arctg} \frac{1}{3^n}.$$

Рабе ва Гаусс аломатларидан фойдаланиб қуйидаги қаторларни яқинлаштишга текширинг!

$$53. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p \frac{1}{n^q}.$$

$$54. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{p+1}}.$$

$$55. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

$$56. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdots \ln (n+1)}{\ln (2+a) \ln (3+a) \cdots \ln (n+1+a)}, \quad a > 0.$$

$$57. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{(a + \sqrt{2})(a + \sqrt{3}) \cdots (a + \sqrt{n+1})}, \quad a > 0.$$

$$58. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1) \cdots (p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q}.$$

$$59. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{p(p+1) \cdots (p+n-1)}{q(q+1) \cdots (q+n-1)} \right]^a \quad (p > 0, q > 0).$$

Қуйндаги қаторларни яқинлашишга текширинг $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$:

$$60. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}.$$

$$61. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^p (\ln \ln n)^q}.$$

$$62. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n+2} - \sqrt[n]{n-2}}{n^a}.$$

$$63. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)},$$

$$64. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}.$$

$$65. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$$

$$66. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot e^{-\sqrt[3]{n}}$$

$$67. \sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1).$$

$$68. \sum_{n=1}^{\infty} (n^{n^{\alpha}} - 1).$$

$$69. a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sin \frac{\pi}{n}.$$

$$70. a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right).$$

$$71. a_n = e^{\sqrt{n}/(n^2+1)} - 1.$$

$$72. a_n = \operatorname{tg} \frac{1}{n} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n}.$$

$$73. a_n = \frac{n^n}{(n!)^2}.$$

$$74. a_n = \frac{(2n+2)!}{\pi^n (n!)^2}.$$

$$75. a_n = \frac{1}{n \sqrt{\ln(n+1)}}.$$

$$76. a_n = \frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}.$$

$$77. a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

$$78. a_n = \int_0^{1/n} \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4} dx.$$

$$79. a_n = \frac{1}{\int_0^n \sqrt{1+x^4} dx}.$$

$$80. a_n = \int_n^{n+2} e^{-\sqrt[4]{x}} dx.$$

$$81. a_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{x \sin^3 x}{1+x^2} dx.$$

$$82. a_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(2n)!}.$$

83. Агар $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = a$ бўлиб, $a \neq 0$ бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлишини исботланг.

84. Агар $a_n > 0$, $\forall n \in N$ ларда $a_{n+1} \leq a_n$ бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлса, $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ эканини исботланг.

85. Агар $a_n \geq 0$ бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор хусусий йиғиндилари кетма-кетлигининг бирорта қисмий кетма-кетлиги юқоридан чекланган бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчилигини исботланг.

86. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ қаторлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$$

қаторлар ҳам яқинлашувчи бўлишини исботланг.

87. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор ($a_n \geq 0$) берилган бўлиб, $n \geq n_0$ ларда $(1 - \sqrt[n]{a_n}) \frac{n}{\ln n} \geq p > 1$ бўлса, берилган қатор яқинлашувчи,

$n \geq n_0$ ларда $\left(1 - \sqrt[n]{a_n}\right) \frac{n}{\ln n} \leq 1$ бўлса узоқлашувчи эканини исботланг.

88. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор ($a_n > 0$) берилган бўлсин. Шундай $\alpha > 0$

мавжуд бўлиб, $n \geq n_0$ ларда $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq 1 + \alpha$ бўлса, қатор

яқинлашувчи, $n \geq n_0$ ларда $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq 1$ бўлса, қатор узоқлашувчи эканини исботланг. (Логарифмик аломат.)

4-§. ИХТИЁРИЙ ҲАДЛИ ҚАТОРЛАР, КОШИ ТЕОРЕМАСИ.

АБСОЛЮТ ВА ШАРТЛИ ЯҚИНЛАШУВЧИ ҚАТОРЛАР

Бирор $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ қатор берилган бўлсин.

8-теорема (Коши теоремаси). Ихтиёрий $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ сон мавжуд бўлиб, барча $n > n_0$ ва $m = 1, 2, 3, \dots$ лар учун

$$|A_{n+m} - A_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon$$

тенгсизлиkning бажарилиши зарур ва етарли.

Ихтиёрий $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор билан бирга бу қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қаторни қарайлик.

9-теорема. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

3-таъриф. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор яқинлашувчи бўлса, у

ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор абсолют яқинлашувчи қатор деб аталади.

4-таъриф. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор шартли яқинлашувчи қатор дейилади.

21-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$$

қаторнинг яқинлашувчилигини Коши критерийси ёрдамида кўрсатинг.

$|A_{n+m} - A_n|$ ифодани қарайлик.

$$\begin{aligned} |A_{n+m} - A_n| &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{\sin kx}{k(k+1)} \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+m} < \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Демак, $\forall n \in N$ ва $\forall m \in N$ ларда

$$|a_{n+1} + \dots + a_{n+m}| < \frac{1}{n+1}$$

тенгсизлик ўринли.

Энди $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ эканини ҳисобга олган ҳолда, $\forall \varepsilon > 0$ га кўра, шундай $n_0 \in N$ мавжуд бўлиб, барча $n > n_0$ га $\forall m \in N$ лар учун $|A_{n+m} - A_n| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли эканини кўраимиз. Бундан эса $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ қаторнинг яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади.

22-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

гармоник қатор узоқлашувчилигини Коши теоремаси ёрдамида кўрсатинг.

$|A_{n+m} - A_n|$ муносабатда $\forall k \in N$ учун $n = k, m = k$ деб олсак,

$$|A_{n+m} - A_n| = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{k+k} > \\ > k \cdot \frac{1}{2 \cdot k} = \frac{1}{2}.$$

Бундан кўринадики, $|A_{n+m} - A_n| < \varepsilon$ тенгсизлик $\varepsilon < \frac{1}{2}$ учун бажарилмайди. Демак, қаралаётган қатор узоқлашувчи.
23-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \operatorname{arctg} \frac{\cos^3 n}{\sqrt[3]{n}}$$

қаторнинг абсолют яқинлашувчилиги кўрсатилсин.

Маълумки, $x \geq 0$ ларда $0 \leq \ln(1+x) \leq x$ тенгсизлик, $x \in R$ ларда $|\operatorname{arctg} x| \leq |x|$ тенгсизлик ўринли. У ҳолда

$$|a_n| \leq \frac{1}{n} \left| \frac{\cos^3 n}{\sqrt[3]{n}} \right| \leq \frac{1}{n^{4/3}}$$

бўлиб, бу $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг абсолют яқинлашувчилигини билдиради.

Қуйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots,$$

$$(a_n \geq 0 \text{ ёки } a_n \leq 0)$$

қатор ҳадларининг ишоралари навбат билан ўзгариб келадиган қатор деб аталади.

Лейбниц аломати. Агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

бўлиб, $\forall n \in N$ ларда $0 < a_{n+1} \leq a_n$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлади.

Ушбу $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ қатор Лейбниц аломатларининг барча шартларини қаноатлантиради, яъни $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ монотон камайиб нолга интилади. Демак, қатор яқинлашувчидир.

Айни вақтда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор узоқлашувчи, чунки $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ қатор узоқлашувчи.

Шундай қилиб, қаралаётган қатор шартли яқинлашувчидир.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашувчилигини Коши теоремаси ёрдамида исботланг:

$$89. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}.$$

$$90. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x^n}{n^2}.$$

$$91. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos (n+1)x}{n}.$$

$$92. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{10^n} \quad (|C_n| < 10).$$

$$93. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3 nx}{(n+1)(n+3)}.$$

Қуйидаги қаторларнинг узоқлашувчилигини Коши теоремаси ёрдамида исботланг:

$$95. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}.$$

$$96. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

$$97. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+4}.$$

$$98. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

$$99. 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Қуйидаги қаторларнинг абсолют яқинлашувчилигини исботланг:

$$100. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \left(2n + \frac{\pi}{4} \right)}{n \sqrt[3]{n+2}}.$$

$$101. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} (-n)^n}{\sqrt[4]{2n^3+3n+1}}.$$

$$102. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln^2 n}{2^n}.$$

$$103. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}} \arcsin \frac{\pi}{4n}.$$

$$104. \sum_{n=1}^{\infty} \cos^3 n \cdot \operatorname{arctg} \frac{n+1}{n^3+2}.$$

$$105. \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \cdot \sin n e^{-\sqrt{n}}.$$

$$106. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(2n)!}.$$

$$107. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 (n+1)}{n \sqrt{n+1}}.$$

$$108. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(n+1)^n}.$$

$$109. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n+1)/2} \frac{2^n + n^2}{3^n + n^3}.$$

$$110. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n \sin \frac{1}{n}} - \cos \frac{1}{n} \right) \cos \pi n.$$

【Куйдаги қаторларни яқинлашишга текширинг:

$$111. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}.$$

$$112. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{\sqrt{n}}.$$

$$113. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}} \right).$$

$$114. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+1}}.$$

$$115. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{\sqrt{n^2+4}} \arctg \frac{\pi}{\sqrt{n}}.$$

$$116. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \left(n + \frac{\pi}{4} \right)}{\ln^2 (n+1)}.$$

$$117. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}}.$$

$$118. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt[n]{n+1}}.$$

$$119. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}}{\sqrt[n]{n}} \cdot \sin 2n.$$

$$120. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n.$$

$$121. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[n]{n + \sin n}}.$$

$$122. \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[n]{n}}\right).$$

$$123. \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}).$$

$$124. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\ln \ln(n+1)}.$$

$$125. \sum_{n=1}^{\infty} \sin n^3.$$

$$126. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[ln n]}}{n}.$$

$$127. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}.$$

Қуйдаги қаторларни абсолют [ва шартли] яқинлашишга текширинг:

$$128. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}.$$

$$129. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{p + \frac{1}{n}}.$$

$$130. \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right].$$

$$131. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^n x}{n}.$$

$$132. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}}.$$

$$133. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{n}}.$$

$$134. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n^{100}}{2^n}.$$

$$135. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}.$$

$$136. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p.$$

$$137. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n}.$$

ЖАВОБЛАР ВА ҚЎРСАТМАЛАР

I б о б

1, 2, 3, 4-мисолларда тенгликнинг чап томонидаги тўпلامнинг ихтиёр элементини ўнг томондаги тўпламга тегишли ва аксинчасини кўрсатиш керак. 5. $A \setminus (B \cap C) = A \cap (\overline{B \cap C})$ ва $(\overline{A \cap C}) = (\overline{B \cup C})$ муносабатлардан фойдаланинг. 6. $A \setminus (B \cup C) = A \cap (\overline{B \cup C})$ ва $(\overline{B \cup C}) = (\overline{B} \cap \overline{C})$ муносабатлардан фойдаланинг. 7. 4-мисолдан ва $A \cup \overline{A} = U$ ва $U \cap X = X$ муносабатлардан фойдаланинг. 8. $A \setminus (B \setminus C) = A \cap (\overline{B \setminus C}) = A \cap (\overline{B \cap \overline{C}}) = A \cap (\overline{B} \cup \overline{\overline{C}}) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$. 27. $\sup \{x + y\} = \sup \{x\} + \sup \{y\}$ эканини кўрсатиллик. [Фараз] қилайлик, $\sup \{x\} = a$ ва $\sup \{y\} = b$ бўлсин. У ҳолда $\forall x \in \{x\}, \forall y \in \{y\}$ учун $x \leq a$ ва $y \leq b$ бўлади. Бундан $x + y \leq a + b$ га эга бўламиз. Иккинчидан, $\forall \varepsilon > 0, \exists x'_\varepsilon \in \{x\}, \exists y'_\varepsilon \in \{y\}$ топилиб, $x'_\varepsilon > a - \frac{\varepsilon}{2}$ ва $y'_\varepsilon > b - \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади. Бундан $x'_\varepsilon + y'_\varepsilon > a + b - \varepsilon$ га эга бўламиз. Аммо $x'_\varepsilon + y'_\varepsilon \in \{x + y\}$. Демак, $\sup \{x + y\} = a + b = \sup \{x\} + \sup \{y\}$ экан. 28, 29-машқлар ҳам юқоридагига ўхшаш исботланади. 30. $m < n$ ва $m, n \in \mathbb{N}$ бўлгани сабабли $0 < \frac{m}{n} < 1$. Энди $\sup \left\{ \frac{m}{n} \right\} = 1, \inf \left\{ \frac{m}{n} \right\} = 0$ эканини кўрсатиш қийин эмас.

II б о б

1-§. 19. $x_n = n, y_n = -n$ чегараланган. $x_n = \sqrt{n+1}, y_n = \sqrt{n}, x_n - y_n$ чегараланган. Аммо $\{x_n \cdot y_n\}$ чегараланмаган бўлади. Ҳақиқатан, $\forall E > 0, \exists n'_E \in \mathbb{N} \mid x'_{n'_E} > \sqrt{E}$ ва $n''_E \in \mathbb{N} \mid y'_{n''_E} > \sqrt{E}$. Агар $n_E = \max \{n'_E, n''_E\}$ деб олсак, у ҳолда $(\forall E > 0) \exists n_E \in \mathbb{N}$ топилиб $|x_{n_E} \cdot y_{n_E}| > E$ бўлади. 21. Шарт эмас. $x_n = (-1)^n \sqrt{n}$. 22. Фа-

раз қилайлик, барча $n \in N$ лар учун $|x_n| \leq M$ бўлсин. У ҳолда $y_n = \frac{|x_1 + \dots + x_n|}{n} \leq \frac{|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|}{n} \leq \frac{M + M + \dots + M}{n} = \frac{n \cdot M}{n} = M$. Тескарисин ҳар доим ўринли эмас. Масалан, $x_n =$

$\begin{cases} \sqrt[3]{n}, & n = k^3 \\ 0, & n \neq k^3 \end{cases}$ бўлса, у ҳолда $(\forall k) \in N \ k^3 \leq n \leq (k+1)^3$ лар учун

$y_n = \frac{1+2+\dots+k}{n}$; $n \geq k^3$ бўлгани сабабли $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{k^3}$. У ҳолда

$y_n \leq \frac{1+2+\dots+k}{k^3} = \frac{k(k+1)}{2k^3} \leq 1$. Аммо биз биламизки, x_n чега-

раланган эмас. 40. 2. 41. $\frac{1}{2}$; 42. $\frac{1}{2}$; 43. 1; 44. 1; 45. $0 \leq a \leq 1$

бўлса, 0; $a > 1$ бўлса, 1; $a = 1$ бўлса, $\frac{1}{2}$ 46. Агар $a = b$ бўлса, $\frac{1}{3}$;

$a > b$ бўлса, $\frac{1}{6}$; $a < b$ бўлса, $\frac{3}{7}$. 47. 1. 48. $\frac{1}{2}$. Кўрсатма.

$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$ 49. $\frac{1}{3}$. Кўрсатма. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (1+2+3+\dots+n) =$
 $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$. 50. $\frac{\sin x}{x}$. Кўрсатма. 2^n .

$\sin \frac{x}{2^n} \cdot S_n = \sin x$, $S_n = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^n}$. 51. $\frac{1}{a(a-1)}$;

52. 1. Кўрсатма. $1 < \sqrt[n]{n^3+n+1} < \sqrt[n]{3n^3} = \sqrt[n]{3} \cdot (\sqrt[n]{n})^3$.

53. 5. Кўрсатма. $5 < \sqrt[n]{2^n+5^n} < 5 \sqrt[n]{2}$. 54. 3. Кўрсатма. $3 <$

$< \sqrt[n]{2^n 3^0 + \dots + 2^0 3^n} < 3 \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \dots + \left(\frac{2}{3}\right) + 1} <$

$< 3 \sqrt[n]{n}$. 55. 1. Кўрсатма. $1 < \sqrt[n]{1^n + \dots + n^n} < \sqrt[n]{n^n + n^n + \dots + n^n} =$

$\sqrt[n]{n \cdot n^n} = (\sqrt[n]{n})^{n+1}$. 56. 1. 57. 1. 58. $|x_{n+m} - x_n| < \frac{1}{n(n+1)} +$

$+\dots + \frac{1}{(n+m)(n+m-1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} < \frac{1}{n}$; $N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, $0 < \varepsilon < 1$

деб олсак, у ҳолда $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) (\forall n) (n > N(\varepsilon))$ ва $(\forall m) \in N$, $|x_{n+m} - x_n| < \varepsilon$. 61. Агар $\alpha > 1$ бўлса, барча натурал $n > 1$ учун

$\frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{n^3} < \frac{1}{n(n-1)}$ бўлади. Фараз қилайлик, $\alpha \leq 1$ бўлсин. У ҳолда

$\forall \varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0$, ихтиёрый натурал N учун $\exists n_N = N + 1 > N$ ва $\exists m_N =$
 $= N + 1$ топилдики, улар учун $|x_{n_N + m_N} - x_{n_N}| \geq \frac{1}{2}$ бўлади. Ҳақиқатан,
 $|x_{n+m} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(n+m)^\alpha} > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} +$
 $+ \dots + \frac{1}{n+m} > \frac{m}{n+m}$. Хусусан, $|x_{n_N + m_N} - x_{n_N}| > \frac{N+1}{(n_N+1) + (N+1)} =$
 $= \frac{1}{2}$. 62. $|x_{n+m}^2 - x_n^2| = |x_{n+m} - x_n| |x_{n+m} + x_n| \leq |x_{n+m} -$
 $- x_n| (|x_{n+m}| + |x_n|) \leq 2c |x_{n+m} - x_n|$, чунки $\forall n \in N$ учун
 $|x_n| \leq c \sqrt{|x_{n+m}|} - \sqrt{|x_n|} = \frac{|x_{n+m}| - |x_n|}{\sqrt{|x_{n+m}|} + \sqrt{|x_n|}} \geq \frac{|x_{n+m} - x_n|}{\sqrt{|x_{n+m}|} + \sqrt{|x_n|}}$.
 65. 1; 0. 66. $+\infty$; 0. 67. 1; 0; 70. 1; $-\frac{1}{2}$. 71. $-\infty$. 72. $e+1$; $-$
 $-\left(e + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 73. 2; 1. 74. 1; 0.

III боб

1. $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$. 2. $(-1, 1)$. 3. R . 4. $(0, 1)$. 5. R . 6. $\{x \in [-4, 4],$
 $x \neq \pm \sqrt{16 - \frac{\pi^2}{4}}\}$. 7. $n \in \{-1, 0, 1\}$ бўлганда $x = \emptyset$; $n > 1$ бўл-
 ганда $X = \left(\frac{1}{n}; 1\right]$; $n < -1$ бўлса, $X = \left[-1, \frac{1}{n}\right)$. 8. R . 9. $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$.
 10. $\left\{x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \mid n \in Z\right\}$ 11. $\left\{x \in \left[2\pi n - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right] \mid n \in Z\right\}$
 12. $\left\{x \in \left(2\pi n - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \mid n \in Z\right\}$. 13. $[2, 4]$. 14. $R \setminus \{-1; 1\}$. 15.
 $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. 16. $(-1; 0) \cup (0; 1) \cup (2; +\infty)$. 17. $f(x) =$
 $= \sqrt{-x^2}$, $x = \{0\}$ ёки $g(x) = e^{\sqrt{x-4}}$, $\sqrt{4-x}$, $x = \{4\}$. 20. $x =$
 $= \{2\pi k, k \in Z\}$, $J = \{4\}$. 21. $X = (-\infty, 0) \cup (0; +\infty)$; $Y = (-\infty, -$
 $-1) \cup (1, +\infty)$. 22. $X = (0, +\infty)$, $Y = (0, +\infty)$. 23. $X = |R|$, $Y =$
 $= [-1, +\infty)$. 24. $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $Y = (-\infty, -2] \cup [2, +$
 $+\infty)$. 25. $X = |R|$, $Y = [0; 1)$. 26. $X = [-100, +\infty)$, $Y = [-1; 1]$. 27.
 $x = |R \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z\right\} \cup \{\pi k, k \in Z\}|$, $Y = \{1\}$ 28. $X = |R|$, $y = [-$
 $-2; 2]$. 49. $|R$ да ўсувчи. 50. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ тўпلامда камаюв-
 чи, $[-1; 0) \cup [1; +\infty)$ тўпلامда ўсувчи. 51. $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$

- да камаювчи, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ да ўсувчи. 55. R да камаювчи. 57. $(-\infty; -1]$ да ўсувчи; $[1, +\infty)$ да камаювчи. 58. $\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ да камаювчи; $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ да ўсувчи. 59. $(-\infty; -1]$ да ўсувчи; $[-1; +\infty)$ да камаювчи. 60. K да ўсувчи. 79. Тоқ. 80. Тоқ. 81. Тоқ. 82. Жуфт. 83. Жуфт. 84. Жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас. 85. Жуфт. 86. Жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас. 87. Жуфт. 88. Жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас. 89. Жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас. 90. Жуфт. 100. $y = \sqrt{1 - 2 \ln(-x)}$, $x \in [-\sqrt{e}; 0)$. 101. $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in (0; +\infty)$. 102. $y = \sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. 103. $y = 1 - \sqrt{\log_2 2x}$, $x \geq 1/2$. 104. $a = 1$, $b = 0$ ва $a = -1$, $b = 0$. 105. $\alpha = \pm 1$. 106. $f(x) \circ g(x) = x$, $x \geq 0$ $g \circ f(x) = |x|$, $x \in R$. 107. $f \circ g(x) = g \circ f(x) = |x|$, $x \in [-1; 1]$. 108. $f \circ g(x) = (x+5)^5$, $x \in R$ $g \circ f(x) = x^5 + 5$, $x \in R$. 109. $f \circ g(x) = x$, $g \circ f(x) = x$. 110. $f \circ g(x) = 1$, $g \circ f(x) = 1 + (\operatorname{sgn} x)^2$. 111. $f \circ g(x) = 1$, $g \circ f(x) = 1$. 112. $f \circ g(x) = \ln \sin^2 x$, $x \pm \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $g \circ f(x) = \sin \ln x^2$, $x \neq 0$. 113. $f \circ g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, +\infty), \\ x^2, & x \in (-\infty, 0), \end{cases}$ $g \circ f(x) = 0$ $x \in R$. 114. Агар $a^2 \neq 1$ бўлса, $f(f(\dots f(x)) \dots) = \frac{x}{\sqrt{a^{2n} + \frac{a^{2n}-1}{a^2-1} x^2}}$, агар $a^2 = 1$ бўлса, $f(f(\dots f(x)) \dots) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. 149. Мавжуд эмас. 150. 1; -1. 151. 1; 1. 152. 0; 0. 153. -1; 1. 154. $\frac{1}{3}$; 0. 155. $+\infty$; 1. 156. 110; 109. 159. $2\sqrt{a}$. 160. 0. 161. 3. 162. $\frac{n}{m}$. 163. $\frac{n}{m}$. 164. $\frac{n-m}{2}$. 165. 3. 166. $\frac{7}{12}$. 167. $\frac{mn}{am+bn}$. 168. $2n$. 169. 1. 170. $\frac{n(n+1)}{2}$. 171. $\frac{m}{n}$. 172. 1. 173. -1. 174. $-\frac{9}{128}$. 175. $\cos a$. 176. $\frac{1}{2}$. 177. $\frac{1}{2\pi}$. 179. 5. 180. $-\frac{7}{2}$. 181. 4. 182. 1. 183. 18. 184. $\frac{1}{2}$. 185. e^{2atga} , $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$. 186. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 187. 1. 188. $\sqrt{e}$. 189. $\ln 3$. 190. 5. 191. $e^{3/2}$. 192. $\sqrt{ab}$. 193. 0. 194. $\sqrt{2}$. 203. $\frac{\sin x}{x}$. 205. $\alpha =$

$\frac{1}{2} > 0$, ихтиёрый натурал N учун $\exists n_N = N + 1 > N$ ва $\exists m_N =$
 $= N + 1$ топиладики, улар учун $|x_{n_N+m_N} - x_{n_N}| \geq \frac{1}{2}$ бўлади. Ҳақиқатан,
 $|x_{n+m} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(n+m)^\alpha} > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} +$
 $+ \dots + \frac{1}{n+m} > \frac{m}{n+m}$. Хусусан, $|x_{n_N+m_N} - x_{n_N}| > \frac{N+1}{(n_N+1) + (N+1)} =$
 $= \frac{1}{2}$. 62. $|x_{n+m}^2 - x_n^2| = |x_{n+m} - x_n| |x_{n+m} + x_n| \leq |x_{n+m} -$
 $- x_n| (|x_{n+m}| + |x_n|) \leq 2c |x_{n+m} - x_n|$, чунки $\forall n \in \mathbb{N}$ учун
 $|x_n| \leq c \sqrt{|x_{n+m}|} = \sqrt{|x_n|} \Rightarrow \frac{|x_{n+m} - x_n|}{\sqrt{|x_{n+m}|} + \sqrt{|x_n|}} \geq \frac{|x_{n+m} - x_n|}{\sqrt{|x_{n+m}|} + \sqrt{|x_n|}}$.
 65. 1; 0. 66. $+\infty$; 0. 67. 1; 0. 70. 1; $-\frac{1}{2}$. 71. $-\infty$. 72. $e+1$; $-$
 $-\left(e + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 73. 2; 1. 74. 1; 0.

III боб

1. $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$. 2. $(-1, 1)$. 3. R . 4. $(0, 1)$. 5. R . 6. $\{x \in [-4, 4],$
 $x \neq \pm \sqrt{16 - \frac{\pi^2}{4}}\}$. 7. $n \in \{-1, 0, 1\}$ бўлганда $x = \emptyset$; $n > 1$ бўл-
 ганда $X = \left(\frac{1}{n}, 1\right]$; $n < -1$ бўлса, $X = \left[-1, \frac{1}{n}\right)$. 8. R . 9. $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$.
 10. $\left\{x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ 11. $\left\{x \in \left[2\pi n - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right] \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$
 12. $\left\{x \in \left(2\pi n - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$. 13. $[2, 4]$. 14. $R \setminus (-1; 1)$. 15.
 $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. 16. $(-1; 0) \cup (0; 1) \cup (2; +\infty)$. 17. $f(x) =$
 $= \sqrt{-x^2}$, $x = \{0\}$ ёки $g(x) = e^{\sqrt{x-4}}$, $\sqrt{4-x}$, $x = \{4\}$. 20. $x =$
 $= \{2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$, $J = \{4\}$. 21. $X = (-\infty, 0) \cup (0; +\infty)$; $Y = (-\infty, -$
 $-1) \cup (1, +\infty)$. 22. $X = (0, +\infty)$, $Y = (0, +\infty)$. 23. $X = |R|$, $Y =$
 $= [-1, +\infty)$. 24. $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $Y = (-\infty, -2] \cup [2, +$
 $+\infty)$. 25. $X = |R|$, $Y = \{0; 1\}$. 26. $X = [-100, +\infty)$, $Y = [-1; 1]$. 27.
 $x = |R \setminus \left\{\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{\pi k, k \in \mathbb{Z}\}\right\}|$, $Y = \{1\}$ 28. $X = |R|$, $y = [-$
 $-2; 2]$. 49. $|R$ да ўсувчи. 50. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ тўпلامда камаюв-
 чи, $[-1; 0) \cup \{1; +\infty)$ тўпلامда ўсувчи. 51. $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$

да камаювчи, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ да ўсувчи. 55. R да камаювчи. 57.
 $(-\infty; -1]$ да ўсувчи; $[1, +\infty)$ да камаювчи. 58. $\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
да камаювчи; $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ да ўсувчи. 59. $(-\infty; -1]$ да ўсувчи; $[-1; +\infty)$ да камаювчи. 60. K да ўсувчи. 79. Тоқ. 80. Тоқ. 81. Тоқ.
82. Жуфт. 83. Жуфт. 84. Жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас. 85. Жуфт. 86.
Жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас. 87. Жуфт. 88. Жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас.
89. Жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас. 90. Жуфт. 100. $y = \sqrt{1 - 2 \ln(-x)}$,
 $x \in [-\sqrt{e}; 0)$. 101. $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in (0; +\infty)$. 102. $y = \sin x$,
 $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. 103. $y = 1 - \sqrt{\log_2 2x}$, $x \geq 1/2$. 104. $a = 1$, $b = 0$ ва
 $a = -1$, $b = 0$. 105. $\alpha = \pm 1$. 106. $f(x) \circ g(x) = x$, $x \geq 0$ $g \circ f(x) =$
 $= |x|$, $x \in R$. 107. $f \circ g(x) = g \circ f(x) = |x|$, $x \in [-1; 1]$. 108.
 $f \circ g(x) = (x + 5)^5$, $x \in R$ $g \circ f(x) = x^5 + 5$, $x \in R$. 109. $f \circ g(x) = x$,
 $g \circ f(x) = x$. 110. $f \circ g(x) = 1$, $g \circ f(x) = 1 + (\operatorname{sgn} x)^3$. 111. $f \circ g(x) =$
 $= 1$, $g \circ f(x) = 1$. 112. $f \circ g(x) = \ln \sin^2 x$, $x \pm \pi n$, $n \in Z$, $g \circ f(x) =$
 $= \sin \ln x^2$, $x \neq 0$. 113. $f \circ g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, +\infty), \\ x^2, & x \in (-\infty, 0), \end{cases}$ $g \circ f(x) = 0$ $x \in R$.
114. Агар $a^2 \neq 1$ бўлса, $f(f(\dots f(x)) \dots) = \frac{x}{\sqrt{a^{2n} + \frac{a^{2n}-1}{a^2-1} x^2}}$,
агар $a^2 = 1$ бўлса, $f(f(\dots f(x)) \dots) = \frac{x}{\sqrt{1 + nx^2}}$. 149. Мавжуд
эмас. 150. 1; -1. 151. 1; 1. 152. 0; 0. 153. -1; 1. 154. $\frac{1}{3}$; 0. 155.
 $+\infty$; 1. 156. 110; 109. 159. $2\sqrt{a}$. 160. 0. 161. 3. 162. $\frac{n}{m}$. 163. $\frac{n}{m}$.
164. $\frac{n-m}{2}$. 165. 3. 166. $\frac{7}{12}$. 167. $\frac{mn}{am+bn}$. 168. $2n$. 169. 1. 170.
 $\frac{n(n+1)}{2}$. 171. $\frac{m}{n}$. 172. 1. 173. -1. 174. $-\frac{9}{128}$. 175. $\cos a$. 176.
 $\frac{1}{2}$. 177. $\frac{1}{2\pi}$. 179. 5. 180. $-\frac{7}{2}$. 181. 4. 182. 1. 183. 18. 184. $\frac{1}{2}$.
185. $e^{2\operatorname{arctg} \alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$. 186. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 187. 1. 188. $\sqrt{e}$. 189. $\ln 3$.
190. 5. 191. $e^{3/2}$. 192. $\sqrt{ab}$. 193. 0. 194. $\sqrt{2}$. 203. $\frac{\sin x}{x}$. 205. $\alpha =$

$= 1, \beta = -3$. 206. $\alpha = -1, \beta = \frac{1}{3}$. 207. $\alpha = 1, \beta = 0$. 208. $\alpha > 0$, β — нхтиёрний; $\alpha \leq 0, \beta < 0, \alpha > \beta$. 209. $\alpha + \beta > 0$. 210. $\alpha > \beta$.

IV боб

12. $x = -2$. 13. $x = 0$. 14. $x \in Z$. 15. $x \in Z$. 16. $x = \frac{1}{n}$, $n \in Z$.
17. $x = 0, x = 1$. 18. $x = n\pi, n \in Z$. 19. $x = n\pi, n \in Z$. 20. $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z$. 21. $x = 0$. 22. $x = 0$. 42. $a = n$. 43. $a = 1$. 44. $a = \ln c$. 45. $a = 1$. 46. $a = e$. 47. $a = 0$. 48. $a = 1$. 67. Текис узлуксиз. 68. Текис узлуксиз эмас. 69. Текис узлуксиз. 70. Текис узлуксиз эмас. 71. Текис узлуксиз. 72. Текис узлуксиз. 73. Текис узлуксиз. 74. Текис узлуксиз. 75. Текис узлуксиз. 77. Агар $\delta \geq e$ бўлса, $\omega(\delta) = e^2$; агар $0 < \delta < e$ бўлса, $\omega(\delta) = \delta(2\delta - \delta)$. 78. $\omega(\delta) = \frac{\delta}{a(a+\delta)}$.
80. $\forall \delta > 0$ учун $\omega(\sigma, f) = +\infty$. 81. $\forall \delta > 0$ учун $\omega(\delta, f) = +\infty$.

V боб

1. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, ($x > 0$). 2. $f'(x) = 2^x(\ln 2 \sin x + \cos x)$. 3. $f'(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^{\sqrt{x}}$. 4. $f'(x) = 2^{x+1} \ln 2$. 5. $f'(x) = \frac{1}{x}$, ($x > 0$). 6. $f'(x) = 5 \cos 5x$. 7. $f'(x) = \frac{3}{(1+9x^2)}$. 8. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$. 9. $f'(1) = 1$.
10. $f'(\pi/4) = 3$. 11. $f'(-2) = -5$. 12. $f'(0,1) = 0,03$ (ўнг ҳосила).
13. $f'(0) = +\infty$, 14. $f'(0) = 0$. 15. $f'(x) = \left\{ \begin{array}{l} (5/2)|x|^{3/2} \cos \frac{1}{x} \operatorname{sgn} x + \\ + |x|^{1/2} \sin \frac{1}{x}, \text{ агар } x \neq 0 \text{ бўлса. } 0, \text{ агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{array} \right.$ 16. Мавжуд. эмас.
17. Мавжуд эмас. 18. Мавжуд эмас. 19. $f'(0) = 0$. 20. $f'(0) = 0$. 21. Мавжуд эмас. 22. Мавжуд эмас. 23. $f'(0) = 0$. 24. $f'(0) = 0$. 25. Мавжуд эмас. 26. Мавжуд эмас. 27. $f'(0) = 0$. 28. $f'(0) = 0$. 29. Мавжуд эмас. 30. $f'_+(1) = \ln 4$, $f'_-(1) = -\ln 4$. 31. $f'_+(0) = 1$; $f'_-(0) = -1$; $f'_-(\sqrt{\pi}) = -\infty$, $f'_+(\sqrt{\pi})$ — мавжуд эмас. 32. $f'_-(-1) = f'_+(1) = +\infty$, $f'_+(-1)$ ва $f'_-(1)$ мавжуд эмас. 33. $f'(0) = 0$. 34. $f'_-(0) = 1$; $f'_+(0) = 0$. 35. $f'(0) = -\infty$, $f'_+(0) = 0$. 36. Мавжуд эмас. 37. Мав-

- жуд эмас. 38. $f'_-(1) = -e$, $f'_+(1) = e$. 39. $f'_-(0) = -0$; $f'_+(0) = 4 + \infty$. 40. $f'(0) = \frac{1}{2}$; $f'(1) = \sin 1 + \cos 1 - 1$. 41. $x' \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.
42. $x'(0) = -\frac{\sqrt{2}}{8}$. 43. $x'(1) = 5$. 44. $y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. 45. $y_k = (2k+1)\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. 46. $y' = -\frac{\ln 3}{x^2}$. 47. $y' = 175(x^{24} - x^{-8})$. 48. $y' = \sqrt{2}(x^{\sqrt{2}-1} + x^{-\sqrt{2}-1})$. 49. $y' = \frac{ad - cb}{(cx + d)^2}$. 50. $y' = 5(\sin x + x \cos x)$. 51. $y' = \operatorname{tg} x + \frac{x+1}{\cos^2 x}$. 52. $y' = \begin{cases} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, & \text{арав} \\ 0, & \text{арав} \end{cases}$
- $\begin{cases} x \neq 0 \text{ б\ddot{y}лса,} \\ x = 0 \text{ б\ddot{y}лса,} \end{cases}$ 53. $y' = (x^2 - 5x + 1)e^x$. 54. $y' = (a^2 + b^2)e^{ax} \sin bx$. 55. $y' = \left(\ln 2 \cdot \ln |x| + \frac{1}{x}\right)2^x$, $x \neq 0$. 56. $y' = -\frac{1}{x \ln x \log_2 x}$, $x > 0$; $x \neq 1$. 57. $y' = \frac{\ln x - 1}{\ln x \log_2 x}$, $x > 0$; $x \neq 1$. 58. $y' = 0$.
59. $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$. 60. $y' = \sqrt[3]{x^2 + 1} + \frac{2x^2}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$.
61. $y' = \frac{1+2\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\sqrt{x} + \sqrt{x}}{8\sqrt{x}\sqrt{x} + \sqrt{x}\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x}}$.
62. $y' = -2(\sin(\cos x) \cdot \cos(\cos x) \sin x + \cos(\sin x) \sin(\sin x) \cos x)$. 63. $y' = \cos x \cos(\sin x) \cos(\sin(\sin x))$.
64. $y' = \ln 2 \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x\right)2^{\cos x + \operatorname{tg} x}$. 65. $y' = e^x(\sin x + \cos x)$. 66. $y' = 2e^{x^2}(x \cos 2x - \sin 2x)$. 67. $y' = e^x(e^{e^x} + x e^x \left(\frac{1}{x} + \ln x\right))$.
68. $y' = x^x(1 + \ln x)$. 69. $y' = \frac{1}{x(\ln x) \ln(\ln x)}$; $(x > e)$. 70. $y' = \frac{1}{x^2 - a^2}$. 71. $y' = \frac{1}{x}$; $(x \neq 0)$. 72. $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$. 73. $y' = \operatorname{ctg} x$.
- $(2k\pi < x < (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z})$. 74. $y' = \frac{\cos \ln x}{x}$. 75. $y' = \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$; $(|x| < |a|)$. 76. $y' = \frac{1}{1 + (1-x)^2}$. 77. $y' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$, $(|x| > 1)$.
78. $y' = \operatorname{sgn}(\cos x)$, $\left(x \neq \frac{2k-1}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$. 79. $y' = 1$. 80. $y' = 1$, $(|x| < 1)$. 81. $y' = \frac{a^2 + b^2}{(x+a)(x^2 + b^2)}$. 82. $y' = \sqrt{a^2 - x^2}$. 83. $y' = -$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\arccos x}{x^2}, \quad (0 < |x| < 1). \quad 84. y' = \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)^{3/2}} \quad (x > 1). \quad 85. y' = \\
 & = \frac{x \arcsin x}{(1 - x^2)^{3/2}}, \quad (|x| < 1). \quad 86. y' = \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^{2x}}}. \quad 87. y' = \frac{1}{2(1 + x^2)}. \\
 & 88. y' = (\sin x)^{1 + \cos x} (\operatorname{ctg}^2 x - \ln(\sin x)). \quad (2k\pi < x < (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}) \\
 & 89. y' = \frac{\operatorname{ch}(tg x)}{\cos^2 x}. \quad 90. y' = -\frac{\sin x}{\operatorname{ch}^2(\cos x)}. \quad 91. y' = \operatorname{cth} x. \quad 92. y' = \\
 & = \frac{\operatorname{th} x}{\ln 10}. \quad 93. y' = \frac{1}{\operatorname{ch} 2x}. \quad 94. f'(0) = 1000! \quad 109. \text{Хар доим ўринли эмас.}
 \end{aligned}$$

$$110. a) \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2};$$

$$b) \frac{1+x - (n+1)^2 x^n + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} - n^2 x^{n+2}}{(1-x)^3};$$

$$в) \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}; \quad г) \frac{\sin \frac{nx \cos \frac{n+1}{2} x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

$$\begin{aligned}
 & 111. 1) y' = 2/3 \sin 2x |\sin x|; \quad 2) y' = \pi \{x\} \sin 2\pi x. \quad 112. \delta = e/m. \\
 & 114. A = (0, -1); B(4, 3). \quad 115. x = 2k\pi \quad \text{да} \quad \varphi = 45^\circ, k \in \mathbb{Z}; x = \\
 & = (2k + 1)\pi \quad \text{да} \quad \varphi = 135^\circ. \quad k \in \mathbb{Z}. \quad 116. (1, 2e); (-3, -6e^{-3}). \quad 117. \\
 & (-1, 14); (2, -13). \quad 118. (3, 0); (9/2, 27/16). \quad 119. (1 + \sqrt{2}, -\sqrt{2}); \\
 & (1 - \sqrt{2}, \sqrt{2}). \quad 120. (1, -3). \quad 121. (5/4, \ln 4). \quad 122. (1/3(\pi/3 - \\
 & - 2k\pi), 1/\sqrt{3}), (1/3(-2\pi/3 - 2m\pi), -1/\sqrt{3}), k, m \in \mathbb{Z}. \quad 123. \mathbb{R}. \\
 & 124. (\pi/2 + k\pi, 1), (k \in \mathbb{Z}). \quad 125. (1/2, -\ln 2). \quad 126. (k\pi, 0), (k \in \mathbb{Z}). \\
 & 127. (1/8, -1/16). \quad 128. x + 2y - 5 = 0. \quad 129. 2x - y = 0. \quad 130. y + \\
 & + 3x = 0. \quad 131. 3x + y - \frac{3\pi}{2} = 0. \quad 132. 29x - 12y - 54 = 0. \quad 133. \\
 & ex - y = 0. \quad 134. (\pi/4 + k\pi, (-1)^k), (k \in \mathbb{Z}), \varphi = \frac{\pi}{2}. \quad 135. (1, 1);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \varphi = \arctg 3. \quad 136. (\sqrt{e}, 1/2), \varphi = 0. \quad 137. (1, 1); \varphi = \frac{5\pi}{4}. \quad 138. (0, 0); \\
 & \varphi = \pi/2. \quad (1, 1); \varphi = \arctg 3/4. \quad 139. \varphi = \pi/2. \quad 140. \varphi = 2\pi/3. \quad 141. \\
 & \varphi = \arctg 3/4. \quad 142. \varphi = \frac{3\pi}{4}. \quad 144. \varphi = 2 \arctg(1/|a|). \quad 145. n > 57,3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 147. \text{Дифференциалланувчи.} \quad 148. \text{Дифференциалланувчи.} \quad 149. \text{Дифференциалланувчи эмас.} \quad 150. \text{Дифференциалланувчи.} \quad 151. \text{Дифференциалланувчи.} \\
 & 152. \text{Дифференциалланувчи.} \quad 153. \text{Дифференциалланувчи.} \quad 154. x_0 = 1, x_1 = -1 \quad \text{да дифференциалланувчи; } x_0 = 0 \quad \text{да дифференциалланувчи эмас.} \\
 & 155. \text{Дифференциалланувчи.} \quad 156. \text{Дифференциалланувчи.} \quad 157. \text{Дифференциалланувчи.} \quad 158. \text{Дифференциалланувчи эмас.} \quad 159. \text{Дифференциалланувчи.} \\
 & 160. \text{Дифференциалланувчи.} \quad 161. \text{Дифференциалланувчи.} \quad 162. \text{Дифференциалланувчи.} \quad 163. \text{Дифференциалланувчи.} \quad 164. \frac{dx}{x \ln(x/2)}, \quad x > 2.
 \end{aligned}$$

165. $\frac{\sin(1/\log_2 x)}{(x \log_2^2 x) \ln 2} dx$. 166. $\frac{(\ln x - 1) \ln 10}{\ln x \log_3 x} \cdot 10^{\log_3 x} dx$. 167. $-\frac{1}{(1+x) \sqrt{1-x^2}}$
 $e^{\sqrt{(1-x)/(1+x)}} dx$. 168. $2 \sqrt[6]{\frac{\sin x}{(3-2 \cos^2 x)}} dx$. 169. $\frac{1}{2} \frac{e^{x/2} - 1}{e^x + 1} dx$.
170. $x^{1+x^2} (1 + 2 \ln x) dx$. 171. $e^x x^{e^x} (1/x + \ln x) dx$. 172. $(\ln 5)$
 $5^{x^2} x^2 (1 + \ln x) dx$. 173. $[\sin x]^{\cos x} (\cos x \operatorname{ctg} x - \sin x \ln |\sin x|) dx$. 174.
 $x^{1/(x-2)} (1 - \ln x) dx$. 175. $[x^{a-1} x^{x^a} (1 + a \ln x) + a^x x^{a^x} (1/x + \ln a$
 $\ln x) + x^x a^{x^x} \ln a (1 + \ln x)] dx$. 176. $-\frac{1}{ex} (\log_x e)^2 dx$.
177. $\frac{2^{1+\sqrt[3]{x}} \ln 2 \sin(2\sqrt[3]{x}) \ln(\sec 2\sqrt[3]{x})}{3 \sqrt[3]{x^2} \cos^2 2 \sqrt[3]{x}} dx$.
178. $-\frac{\sin 2x}{\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x}} \left(1 - \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1 + \cos^4 x}}\right) dx$.
179. $\frac{2 dx}{\sqrt{\sin x \cos x}}$. 180. $\frac{2e^2 dx}{e^2 + 1}$; 0. 181. $-(1/2) dx$.
182. $(2 + \ln 4) dx$; 0. 183. Мавжуд эмас. 184. 4,0208; 5,00177.
 185. 0,485; -0,017. 186. 0,9942. 187. 0,079; 188. 0,925; 189. -0,8747;
190. 1,043. 191. $\frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}$. 192. $\frac{3x}{(1-x^2)^2} + \frac{(1+2x^2) \arcsin x}{(1-x^2)^{5/2}}$,
 $(|x| < 1)$. 193. $1/x$ ($x > 0$). 194. $2e^{-x^2} (2x^3 - 1)$. 195. $\frac{2 \sin x}{\cos^3 x} \left(x \neq \frac{2k+1}{2} \pi, k \in \mathbb{Z}\right)$. 196. $-\frac{2}{x^2} \cos(\ln x)$, ($x > 0$). 197. $\frac{2x}{1+x^2} +$
 $+ 2 \arctg x$. 200. $-2 \cos 2x$. 201. $4 \operatorname{ch} 2x$. 202. $(x(1 + \ln x)^2 +$
 $+ 1) x^{x-1}$. 203. $-(2 \sin(\ln x))/x$. 204. $a^n n!$. 205. $4^{n-1} \cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right)$.
206. $\frac{(a-b)^n}{2} \sin\left[(a-b)x + \frac{n\pi}{2}\right] + \frac{(a+b)^n}{2} \sin\left[(a+b)x + \frac{n\pi}{2}\right]$. 207. $n! ((1-x)^{-n-1} + (-1)^n (1+x)^{-n-1})$. 208.
 $(\ln^{n-1} 2) 2^{x-1} (\ln 2) (x-1) + n$. 209. $(-1)^n 2(n-2)! (x-n)(x-1)^{-n}$,
 $(n > 1)$. 210. $(n-2)! ((3n-x)(3-x)^{-n} + (-1)^n (3n+x)(3+x)^{-n})$,
 $n > 1$. 211. $f'(x) = \cos^2 x - x \sin 2x$. 1) $n = 4k - 3$, $k = 2, 3, 4, \dots$
 $f^{(n)}(x) = -2^{n-1} x \sin 2x + 2^{n-2} n \cos 2x$; 2) $n = 4k - 2$, $k = 1, 2, 3,$
 $\dots$ $f^{(n)}(x) = -2^{n-1} x \cos 2x - 2^{n-2} n \sin 2x$; 3) $n = 4k - 1$, $k = 1,$
 $2, 3, \dots$, $f^{(n)}(x) = 2^{n-1} x \sin 2x - 2^{n-2} n \cos 2x$; 4) $n = 4k$, $k = 1,$
 $2, 3, \dots$ $f^{(n)}(x) = 2^{n-1} x \cos 2x + 2^{n-2} n \sin 2x$. 212. $\frac{5^{n-1} (2n-3)!}{2^n}$
 $(2n-5x)(1-5x)^{-(2n+1)/2}$, ($n > 1$). 213. $(2n-5)! (3x^2 - 2nx +$

$$\begin{aligned}
& + n^2 - n)(1 - 2x)^{-(2n+1)/2} \quad (n > 2). \quad 214. \quad e^{ax} (a^2 + b^2)^{n/2} \cos(bx + c + \\
& + n\varphi), \quad \cos \varphi = a/\sqrt{a^2 + b^2}; \quad \sin \varphi = b/\sqrt{a^2 + b^2}. \quad 215. \quad (-1)^n \\
& x^{-n-1} e^{1/x}. \quad 216. \quad (n-1)^{1/x}. \quad 217. \quad (-1)^{n-1} (n-1)! (1+x^2)^{-n/2} \sin \\
& (n \arctg x). \quad 218. \quad -\frac{\pi}{2} (1+3^{100}). \quad 219. \quad \left(16 - \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{2}. \quad 220. \quad (a^2 + b^2)^{n/2} \\
& (\operatorname{ch} ax \cos\left(n\varphi - \frac{\pi n}{2}\right) \sin\left(bx + \frac{\pi n}{2}\right) + \operatorname{sh} ax \sin\left(n\varphi - \frac{\pi n}{2}\right) \cos bx + \\
& \frac{\pi n}{2}) \cos \varphi = a/\sqrt{a^2 + b^2}; \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad 221. \quad f'(0) = 0; \quad f''(0) = \\
& -\text{мавжуд эмас.} \quad 222. \quad f'(0) = 2; \quad f''(0) = 0; \quad f'''(0) = -\text{мавжуд эмас.} \quad 223. \\
& f'(0) = 0; \quad f''(0) = -\text{мавжуд эмас.} \quad 224. \quad f^{(n)}(0) = 0, \quad n \leq 50, \quad f_{(0)}^{(51)} \text{ мавжуд} \\
& \text{эмас.} \quad 225. \quad f^{(n)}(0) = 0, \quad n \in N. \quad 228. \quad (-1)^n m^n n! \quad 229. \quad e^{uv} u^v \left(\frac{v}{u} du^2 + \right. \\
& \left. + \ln u dv^2 + \left\{2 \cdot \left(u^{v-1} + \frac{1}{u}\right) v \ln u + \frac{2}{4}\right\} dudv + (u^v v + v - 1) \frac{v}{u^2} du^2 + \right. \\
& \left. + (u^v + 1) \ln^2 u dv^2\right). \quad 230. \quad \frac{1}{a^3} (u^3 d^2 v - u v d^3 u - 2 u du dv + 2 v du^2). \\
& 231. \quad \frac{(u^3 + v^3)(ud^3 v - v d^3 u) + 2 uv du^2}{(u^2 + v^2)^2} + \frac{2(v^2 - u^2) du dv - 2 uv dv^2}{(u^2 + v^2)^2}. \\
& 232. \quad \frac{1}{(u^2 + v^2)^2} ((u^2 + v^2)(u d^2 u + v d^2 v) + (v^2 - u^2) du^2 - 4 uv du dv + \\
& + (u^2 - v^2) dv^2). \quad 233. \quad (v+2) d^2 u + 2 du dv + u d^2 v. \quad 234. \quad \ln v d^2 u + \\
& + \frac{2}{v} du dv + \frac{u}{v} d^2 v - \frac{u}{v^2} dv^2. \quad 235. \quad u^v \left(\frac{v}{u} d^2 u + \ln u dv^2 + \frac{v(v-1)}{u^2} du + \right. \\
& \left. + \frac{2(v \ln u + 1)}{u} du dv + \ln^2 u dv^2\right). \quad 236. \quad \frac{v d^2 u - u d^2 v}{v^2} - \frac{2 dv(v du - \\
& - u dv)}{v^3}. \quad 237. \quad \frac{1}{(u^2 + v^2)^{3/2}} ((u^2 - v^2)(u d^2 u + v dv) + (v du - u dv)^2). \\
& 238. \quad u^{99} v^{99} \{[9900 v^2 du^2 + 20200 uv dudv + 10100 u^2 dv^2] + uv(100 v d^2 u + \\
& + 101 u d^2 v)\}
\end{aligned}$$

VI б о б

2. $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$ 4. Роль теоремасининг шартлари етарли, лекин зарур эмас. Масалан, $(a, b) = (0, 2)$, $f(x) = x^3 - 3x$ функция учун $f'(1) = 0$, лекин Роль теоремасининг шартлари бажарилмайди. 5. Йўқ, чунки $f'(0)$ мавжуд эмас. 12. Йўқ, чунки $g'(0) = 0$. 13. Функция лимитининг Гейне таърифи ва Лагранж теоремасидан фойдаланинг. 14. $\frac{f(x)}{x}$ ва $\frac{1}{x}$ функцияларга Коши теоремасини қўлланг. 15. Лагранж теоремасидан

фойдаланинг. Тескари тасдиқ тўғри эмас, яъни функция ҳосиласининг чегараланмаганлигидан ҳар доим ҳам функциянинг чегараланмаганлиги келиб чиқармайди. Масалан, $f(x) = \sqrt{x}$, $0 < x < a$. 17. $1 + x +$

$$+ \frac{1}{2} x^2 + 0 (x^2). \quad 18. e + ex + 0 (x^2). \quad 19. -\frac{x^2}{2} + 0 (x^2). \quad 20. e - \frac{e}{2} x +$$

$$+ \frac{11}{24} ex^2 - \frac{7e}{16} x^3 + 0 (x^3). \quad 21. 1 + x - x^2 + \frac{3}{2} x^3 + 0 (x^3). \quad 22. x -$$

$$- \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + 0 (x^2). \quad 23. x - \frac{1}{2} x^3 + 0 (x^3). \quad 24. \sum_{k=0}^n \frac{5^k}{e \cdot k!} x^k + 0 (x^n).$$

$$25. \sum_{k=0}^n \frac{2^k \sin\left(3 + k \frac{\pi}{2}\right)}{k!} + 0 (x^n). \quad 26. \sum_{k=0}^n \frac{\cos\left(2 + k \frac{\pi}{2}\right)}{2^k \cdot k!} x^k + 0 (x^n).$$

$$27. \ln 2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{e}{2}\right)^k x^k + 0 (x^n). \quad 28. \sum_{k=0}^n (k+1) x^k + 0 (x^n).$$

$$29. \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{9 (\ln 3)^k}{k!} x^k + 0 (x^n). \quad 30. -x + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k k}{(k-1)!} x^k +$$

$$+ 0 (x^n). \quad 31. \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} 2^k + 1}{k} x^k + 0 (x^n). \quad 32. \ln 2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} 2^{-k}}{k} x^k + 0 (x^n). \quad 33. 3 + \sum_{k=1}^n [3 + k(k-1) 2^{k-2}]$$

$$\frac{(-1)^k}{k!} x^k + 0 (x^n). \quad 34. -\sum_{k=3}^n x^k + 0 (x^n). \quad 35. -\frac{1}{3} - \frac{2}{9} x -$$

$$- \frac{13}{12} \sum_{k=2}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot x^k + 0 (x^n). \quad 36. \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} - 7 \cdot 2^{-(k+1)}}{3} x^k +$$

$$+ 0 (x^n). \quad 37. \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} (x-2)^k + 0 ((x-2)^n).$$

$$38. \sum_{k=0}^n \frac{2^k \sin\left(\frac{k\pi}{2} - 1\right)}{k!} (x-1)^k + 0 ((x-1)^n). \quad 39. -e^{-2} +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \frac{e^{-2} 2^{k-1} (k-2)}{k!} (x+1)^k + 0 ((x+1)^n).$$

$$\begin{aligned}
40. & \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k e^2 2^{k-2}}{k!} (k^2 + 3k + 4) (x+1)^k + 0 ((x+1)^n). \\
41. & \sum_{k=0}^n \frac{e^{-2} 2^{k-2} (k-5)}{(k-1)!} (x+1)^k + 0 ((x+1)^n). \quad 42. \\
& \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^{k-1} \cos 1 \cdot 2^{2k-1}}{(2k)!} (x+1)^{2k} + \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{\sin 1 (-1)^k 2^{2k}}{(2k+1)!} (x+ \\
& + 1)^{2k+1} + 0 ((x+1)^n). \quad 43. \ln 2 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (-1)^{k-1} \left(x - \frac{1}{2}\right)^k + \\
& + 0 \left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^n\right). \quad 44. \frac{\ln 5}{3} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left(\frac{7}{5}\right)^k - \frac{(x-1)^k}{3k} + 0 ((x- \\
& - 1)^n). \quad 45. 3 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (k-2)}{k(k+1)} (x-1)^k + 0 ((x-1)^n). \quad 46. \sum_{k=0}^n (- \\
& - 1)^{k+1} (1 + 1/3^{k+1}) (x-2)^k + 0 ((x-2)^n). \quad 47. -1/2. \quad 48. 1/2. \\
49. 1/24. \quad 50. 1/2. \quad 51. 0. \quad 52. -2. \quad 53. -e/2. \quad 54. 1. \quad 55. 1/2. \quad 56. \\
1/2. \quad 57. -1/2. \quad 58. 1. \quad 59. 1/3. \quad 60. 17/21. \quad 61. -\pi. \quad 62. -\pi. \quad 63. \\
2 + \ln 2. \quad 64. 1/3. \quad 65. -4/3.
\end{aligned}$$

VII 606

1. Функция $-\infty < x < -1$ да камаювчи, $-1 < x < 1$ да ўсувчи, $1 < x < \infty$ да камаювчи. 2. Функция $-\infty < x < -1$ да камаювчи, $-1 < x < 1$ да ўсувчи, $1 < x < \infty$ да камаювчи. 3. Функция ўсувчи, 4. $(-\infty, 6)$ да $\nearrow$, $(6, +\infty)$ да $\searrow$. 5. $(-\infty, -3/2) \cup (-1/2, +\infty)$ да $\nearrow$, $(-3/2, -1/2)$ да $\searrow$. 6. $(-\infty, 1/3)$ да $\nearrow$, $(1/3, +\infty)$ да $\searrow$. 7. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ да $\nearrow$, $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ да $\searrow$. 8. $\left(\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ да $\nearrow$, $\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$ да $\searrow$ ($k = 0; \pm 1, \pm 2, \dots$). 9. $\left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right) \cup \left(-\frac{1}{2k+1}, -\frac{1}{2k+2}\right)$ да $\nearrow$, $\left(\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1}\right) \cup \left(-\frac{1}{2k}, -\frac{1}{2k+1}\right)$ да $\searrow$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). 10. $(0, 1/\sqrt{e})$ да $\searrow$, $(1/\sqrt{e}, +\infty)$ да $\nearrow$. 11. $(2k - 3/4, 2k + 1/4)$ да $\nearrow$, $(2k + 1/4, 2k + 5/4)$ да $\searrow$ ($k \in \mathbb{Z}$). 12. $(-\infty, 0) \cup (2/\ln 2, +\infty)$ да $\searrow$, $(0, 2/\ln 2)$ да $\nearrow$. 13. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

да $\searrow$, $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ да $\nearrow$. 14. $(0, n)$ да $\nearrow$, $(n, +\infty)$ да $\searrow$.
 15. $(e^{-\frac{7\pi}{12}} + 2k\pi, e^{\frac{13\pi}{12}} + 2k\pi)$ да $\nearrow$, $(e^{\frac{17\pi}{12}} + 2k\pi, e^{\frac{13\pi}{12}} + 2k\pi)$ да $\searrow$, $(k \in \mathbb{Z})$.
 16. $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ да $\nearrow$. 17. $(-1, -2/3)$ да $\searrow$,
 $(-2/5, +\infty)$ да $\nearrow$. 18. $(0, +\infty)$ да $\searrow$. 19. $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$
 да $\searrow$. 20. $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ да $\nearrow$, $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$
 да $\searrow$, $(k \in \mathbb{Z})$. 21. $f'(x)$ функция (a, b) да ўсувчи бўлиши шарт эмас.
 Мисалан, $f(x) = x + \sin x$ функция $x \in \mathbb{R}$ да ўсувчи, лекин $f'(x) = \cos x$
 ўсувчи эмас. 40. $x = 0$ да $\min y = 0$; $x = \pm 1$ да $\max y = 1$. 41. $x = 2$
 да $\max y = 1$; $x = 1$ ва $x = 3$ а $\min y = 3/4$. 42. $x = 0$ да $\max y = 2$.
 43. $x = 1$ да $\max y = e^{-1} \approx 0,368$. 44. $x = 1$ да $\min y = 0$; $x = e^2 \approx$
 $\approx 7,389$ да $\max y = \frac{4}{e^2} \approx 0,541$. 45. $x = 1/2$ да $\max y = -4$. 46. $x =$
 $= -1$ да $\max y = -2$; $x = 1$ да $\min y = 2$. 47. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ да
 $\min y = \frac{-\sqrt{2}}{2} e^{-\pi/4 + 2k\pi}$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ да $\max y =$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}$ $k \in \mathbb{Z}$. 48. $x = -1$ да $\max y = e^{-2} \approx 0,135$,
 $x = 0$ да $\min y = 0$; $x = 1$ да $\max y = 1$. 49. $x = \pm (1 - \sqrt{2})$ да $\max y =$
 $= 2(\sqrt{2} - 1)e^{\sqrt{2}-1}$, $x = \pm 1$ да $\min y = 0$. 50. $x = \pm (1 + \sqrt{5})$ да
 $\max y = 2(\sqrt{5} + 1)e^{-1-\sqrt{5}}$, $x = 0$ да $\max y = 4$, $x = \pm 2$ да $\min y = 0$.
 51. $x = 1$ да $\max y = 1/2$; $x = 0$ да $\min y = 1/e$. 52. $x = \frac{11}{4}$ да $\max y =$
 $= \frac{\sqrt{13}}{4}$; $x = 3$ да бир томонли $\min y = 3$. 53. $x = 1$ да $\max y = \frac{\pi}{4} -$
 $- 1/2 \ln 2 \approx 0,439$. 54. $x = 2k\pi$ да $\max y = -1$ ($k \in \mathbb{Z}$). 55. $x = e$ да
 $\min y = e^{\frac{1}{e}}$. 56. $x = e$ да $\max y = e^{\frac{1}{e}}$. 57. $x = 9/2$ да $\max y = \frac{27}{16}$;
 $x = 5$ да $\min y = 0$. 58. $x = 4/3$ да $\max y = \frac{2\sqrt[3]{4}}{3}$; $x = 0$ ва $x = 2$ да
 $\min y = 0$. 59. $x = \frac{6-\pi}{4}$ да $\max y = 2\sin \frac{\pi+6}{4}$; $x = 3$ да $\min y =$
 $= \cos 3$. 60. $x = \frac{1}{e}$ да $y = e^{\frac{1}{e^x}}$; $x = 1$ да $\min y = 1$. 61. Ботиқ, 62. Бо-
 тиқ. 63. Ботиқ. 64. $(-\infty, 1)$ да қавариқ; $(1, +\infty)$ да ботиқ. 65. $(-\infty,$

— 1) ва $(1, +\infty)$ да қавариқ; $(-1, 1)$ да ботиқ. 66. $\left(0, \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$
 да қавариқ; $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$ да ботиқ. 67. $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ва
 $\left(1/\sqrt{2}, +\infty\right)$ да ботиқ; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ да қавариқ. 68. $(2k\pi,$
 $(2k+1)\pi)$ да қавариқ; $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$ да ботиқ, $k \in \mathbb{Z}$.
 69. $\left(e^{\frac{\pi(8k-3)}{4}}, e^{\frac{\pi(8k+1)}{4}}\right)$ да ботиқ, $\left(e^{\frac{\pi(8k+1)}{4}}, e^{\frac{\pi(8k+5)}{4}}\right)$ да қавариқ
 70. $(-\infty, 1/2)$ да ботиқ; $(1/2, +\infty)$ да қавариқ. 71. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
 $(k \in \mathbb{Z})$. 72. $x = 0, x = \pm 3$. 73. $x_1 = -1/2$. 74. $x = \pm 1, x =$
 $= \pm 1/\sqrt{5}$. 75. $x = \frac{-\sqrt[3]{2}}{2}$. 76. $x = 3$. 77. $x = 2k\pi \pm \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2},$
 $k \in \mathbb{Z}$. 78. $x = e^{8/3}$. 79. $x = 1/\sqrt{3}; x = -1/\sqrt{3}$. 80. $x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$.
 81. $x = 1/2$. 82. $x = \frac{(6k + (-1)^k)\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$. 83. $x = 0, x = \pm b\sqrt{3}$
 84. Эгилиш нуқталари йўқ. 85. $x = 0; x = 1$. [86.] Координата бошига
 нисбатан симметрик. Функциянинг ноллари: $x = 0$ ва $x = \pm \sqrt[3]{3} \approx$
 $\approx 1,73, x = -1$ да $\min y = -2$; $x = 1$ да $\max y = 2$ $x = 0, y = 0$
 эгилиш нуқтаси. 87. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари:
 $(1, 0), \left(\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}, 0\right), (0, -3), x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ да $\min y = -$
 $-\frac{16\sqrt{3}}{9} - 3; x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ да $\max y = \frac{16\sqrt{3}}{9} - 3; (0, -3)$ эгилиш
 нуқтаси. 88. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(0, 0), (1, 0);$
 $x = \frac{1}{4}$ да $\min y = -\frac{27}{256}$. Эгилиш нуқталари: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\right), (1, 0).$
 89. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари. $(-2, 0), (1, 0),$
 $(0, 4); x = -2$ ва $x = 1$ да $\min y = 0; x = -\frac{1}{2}$ да $\max y = \frac{81}{16}$.
 Эгилиш нуқталари: $(0, 4), (-1, 4)$. 90. Аниқланиш соҳаси: $x \neq 1$. Ко-
 ордината ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(0, 0)$. Асимптоталари: $y = 0$
 ва $x = 1$. $x = 0$ да $\max y = 0; x = -2$ да $\min y = -\frac{80}{27}$. Эгилиш нуқ-
 талари: $x_1 = -2 \pm \sqrt{5}$. 91. Аниқланиш соҳаси: $x \neq 1$. Координата
 ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(0, 0)$. Асимптота: $x = 1; x = 3/2$

да $\max u = \frac{27}{4}$. Эгилиш нуқталари: $(0, 0)$. 92. Аниқланиш соҳаси:

$x \neq -1$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(1; 0)$, $(0; 1)$. Асимптоталари: $y = 0$ ва $x = -1$. $x = 1$ да $\min u = 0$; $x = 5$ да

$\max u = \frac{2}{27}$. Эгилиш нуқталари: $x = 5 \pm 2\sqrt{3}$. 93. Аниқланиш соҳаси

$x \neq -1$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқтаси $(0; 0)$. Асимпто-

талари: $y = x - 3$ ва $x = -1$. $x = 0$ да $\min u = 0$; $x = -4$ да $\max u =$

$-\frac{256}{27}$. 94. Аниқланиш соҳаси: $x \neq 1$. Координата ўқлари билан

кесишиш нуқталари: $(-1; 0)$, $(0; 1)$. Асимптоталари: $y = 1$ ва $x = 1$.

$x = -1$ да $\min u = 0$. Эгилиш нуқтаси: $(-4; \frac{81}{625})$. 95. Аниқланиш

соҳаси: $x \neq 0$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(\sqrt[5]{8};$

$0) \approx (1,52; 0)$. Асимптотаси $y = x$. $x = -2$ да $\min u = -2,5$. 96. Ко-

ордината бошига нисбатан симметрик. Экстремум йўқ. Эгилиш нуқтаси:

$(0, 0)$. Асимптоталари: $x = -1$, $x = 1$ ва $y = 0$. 97. Аниқланиш со-

ҳаси: $x \neq 2$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(1; 0)$;

$(0; -\frac{1}{16})$. Асимптоталари: $y = x + 3$, $x = 2$. $x = 6$ да $\min u = \frac{55}{44}$.

Эгилиш нуқтаси $(1; 0)$. 98. Аниқланиш соҳаси: $x \geq 0$. Ноллари: $x = 0$

ва $x = 3$. $x = 1$ да $\max u = -2$; $x = 0$ да чегаравий $\max u = 0$. Қава-

риқ. 99. Функциянинг ноли $x = 2$. $x = -0,5$ да $\min u = -\sqrt[3]{5} \approx -$

$2,24$. Эгилиш нуқталари: $x = -\frac{3 \pm \sqrt{41}}{8}$. Асимптоталари: $x \rightarrow -\infty$

да $y = -1$ ва $x \rightarrow +\infty$ да $y = 1$. 100. Аниқланиш соҳаси: $x \geq -1$.

Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(-1; 0)$ ва $(0; 0)$, $x =$

-1 ; $x = 0$ да $\min u = 0$. $x = -\frac{4}{5}$ да $\max u = \frac{16}{25\sqrt{5}} \approx 0,29$. Эгил-

иш нуқтаси: $x = \frac{\sqrt{5} - 5}{5} \approx -0,55$, $y = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{5\sqrt[3]{5}} \approx 0,21$ 101.

Аниқланиш соҳаси: $x \geq -1$. $x = 2/5$ да $\min u \approx \frac{-6\sqrt{15}}{125} \approx -0,19$.

Эгилиш нуқтаси: $(-4/5; -4/25\sqrt[3]{5})$. 102. Аниқланиш соҳаси: $|x| > 2$.

Координата бошига нисбатан симметрик. Асимптоталари: $y = 8$, $x = \pm 2$,

$(-\infty, -2)$ ва $(2, +\infty)$ ораликларда функция қатъий камаювчи.

103. Аниқланиш соҳаси: $R(0; 0)$ — симметрия маркази. Асимптоталари:

$x \rightarrow -\infty$ да $y = -\frac{x+8}{2}$ ва $x \rightarrow +\infty$ да $y = -\frac{x-8}{2}$. Координа-

та ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(0, 0)$; $(0, \pm 3\sqrt[3]{7})$. $x = -\sqrt[3]{7}$

да $\min y = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$; $x = \sqrt{3}$ да $\max y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Эгилиш нуқтаси:

(0, 0). 104. Аниқланиш соҳаси R . $x = -4$ тўғри чизик симметрия ўқи. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(-6; 0)$; $(-2; 0)$; $(0; 2\sqrt[3]{18})$. $x = -6$ ва $x = -2$ да $\min y = 0$; $x = -4$ да $\max y = 2\sqrt[3]{2} \approx 2,5$. Эгилиш нуқталари: $x_{1,2} = -4 \pm 2\sqrt[3]{3}$, $y(x_1) = y(x_2) = 4$. Функция $(x_1; -6)$; $(-6; -2)$; $(-2; x_2)$ оралиқда қавариқ. 105. Аниқланиш соҳаси: $|x| \leq 1$. Ординаталар ўқиға нисбатан симметрик. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(-1; 0)$, $(0; 0)$,

$(1; 0)$; $x = 0$ да $\min y = 0$; $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ да $\max y = 1/2$. 106. Аниқ-

ланиш соҳаси: $x > 0$, $x = 1/2$ да $\min y = \frac{3}{2}\sqrt[3]{3} \approx 2,60$. Қавариқ

Асимптоталари: $y = x + \frac{3}{2}$ ва $x = 0$. 107. Асимптотаси: $x \rightarrow -\infty$ да

$y = -x$; $x = 0$ $\min y = 1$. Ботиқ. 108. Координата ўқлари билан кесишиш нуқтаси: $(0; 0)$. Асимптотаси: $x \rightarrow +\infty$ да $y = 0$; $x = 0,5$ да $\max y = \frac{1}{2e} \approx 0,2$. Эгилиш нуқтаси: $(1, e^{-2})$. 109. Аниқланиш соҳаси:

R . Асимптотаси: $x \rightarrow +\infty$ да $y = 0$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқтаси: $(0; 0)$. $x = 0$ да $\min y = 0$; $x = 2$ да $\max y = 4 \cdot e^{-2} \approx 0,54$.

Эгилиш нуқталари: $x_1 = \sqrt{3} - 1$, $y(x_1) = 0,3$; $x_2 = \sqrt{3} + 1$, $y(x_2) \approx 0,47$. (x_1, x_2) оралиқда қавариқ. 110. Аниқланиш соҳаси: $x \neq 1$. Асимптоталари: $x = 1$ ва $x \rightarrow +\infty$ да $y = 0$. $x = 0$ да $\max y = 1$, $x > 1$

да қавариқ; $x < 1$ да ботиқ. 111. Аниқланиш соҳаси: $x > 0$. Асимптотаси: $x \rightarrow +0$ да $x = 0$. $x = 1$ да $\max y = 0$. Қавариқ. 112. Аниқланиш соҳаси: $x > 0$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқтаси $(1; 0)$. Асимптоталари: $x \rightarrow +\infty$ да $y = 0$ ва $x \rightarrow +0$ да $x = 0$; $x = e$ да

$\max y = \frac{1}{e}$. Эгилиш нуқтаси: $(e^{3/2}, 1,5 e^{-3/2})$. 113. Аниқланиш соҳаси: $x > 0$; $y(+0) = 0$, $y'(+0) = 0$, координата ўқлари билан кесишиш нуқтаси $(1, 0)$ $x = \sqrt{e}$ да $\min y = -e \ln 2$. Эгилиш нуқтаси

$(e^{-3/2}, -\frac{3}{2e^3})$. 114. Аниқланиш соҳаси: $x > 0$. $y(+0) = 0$. $y'(+0) = +\infty$. $x = \frac{1}{e^2}$ да $\max y = \frac{4}{e^2}$, ва $x = 1$ да $\min y = 0$. Эгилиш нуқтаси: $(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$. 115. Аниқланиш соҳаси: $x \neq \pm 1$. Асимптоталари: $x = -1$, $x = 1$. $y = 0$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(\approx 0,9; 0)$; $(\approx 1,2; 0)$; $(0; 6)$, $x = 2$ да $\max y = 2 - \ln 3$. Эгилиш нуқталари: $(0,5; 4 - \ln 3)$. $(3; 1,5 - \ln 2)$. 116. Аниқланиш соҳаси: $x \leq 0$

ва $x \geq 2$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқтаси: $(0, 0)$. Асимптоталари: $x \rightarrow +\infty$ да $y = 1$ ва $x \rightarrow -\infty$ да $y = 2x - 1$, $x \leq 0$ да функция $\nearrow$ ва $x \geq 2$ да $\searrow$. Ботиқ. 117. Аниқланиш соҳаси: $x > 0$. Асимптотаси: $x = 0$; $(y \rightarrow +\infty)$ $x = 1$ да $\min y = 1$. Ботиқ. 118. Функциянинг даври 2π га тенг ва координата ўқлари билан кесишиш нуқта-

лари: $(0; 1)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$. $x = \frac{\pi}{6}$ да $\max y = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ва $x = \frac{5\pi}{6}$ да $\min y = \frac{-3\sqrt{3}}{4}$. Эгилиш нуқталари: $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$; $(\pi + \arcsin 1/4, \frac{-3\sqrt{15}}{16})$; $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$; $\left(2\pi - \arcsin 1/4, \frac{3\sqrt{15}}{16}\right)$.

119. Функциянинг даври 2π га тенг, графиги координата бошига нисбатан симметрик. $x = \frac{\pi}{3}$ да $\max y = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ва $x = -\frac{\pi}{3}$ да $\min y = \frac{-3\sqrt{3}}{4}$. Эгилиш нуқталари: $(-\pi; 0)$, $\left(-\pi + \arccos \frac{1}{4}, \frac{-3\sqrt{15}}{16}\right)$, $(0, 0)$, $\left(\pi - \arccos 1/4, \frac{3\sqrt{15}}{16}\right)$, $(\pi, 0)$. 120. Функциянинг даври

2π га тенг; $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y(\pi) = 0$ $x = \frac{\pi}{6}$ ва $x = \frac{5\pi}{6}$ да $\max y = \frac{1}{4}$; $x = \frac{\pi}{2}$ да $\min y = 0$. $x = \frac{3\pi}{2}$ да $y = -2$. Эгилиш нуқталари: $x = \arcsin \frac{1+\sqrt{33}}{8}$, $x = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{33}-1}{8}$, $x = \pi - \arcsin \frac{1+\sqrt{33}}{8}$,

$x = 2\pi - \arcsin \frac{\sqrt{33}-1}{8}$. 121. Аниқланиш соҳаси: $x \neq -\frac{\pi}{2} +$

$+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ Даври 2π га тенг. Асимптоталари: $y = \frac{\pi}{2} + \pi k$,

$k \in \mathbb{Z}$, $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right)$ оралиқда $x = 0$ нуқтада $\max y = 1$, $x = \pi$

да $\min y = -1$. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ва $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ да $\searrow$; $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ ва $\left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$

да $\nearrow$. 122. Координата бошига нисбатан симметрик. Асимптоталари:

$y = \frac{x-\pi}{2}$, агар $x \rightarrow +\infty$ бўлса ва $y = \frac{x+\pi}{2}$ агар $x \rightarrow -\infty$ бўл-

са, $x = \frac{2-\pi}{4}$ да $\max y = 1$ ва $x = \frac{\pi-2}{4}$ да $\min y = -1$, Эгилиш

нуқтаси: $(0; 0)$. 123. Аниқланиш соҳаси: $|x| \geq 1$; $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ — симметрия маркази. Асимптотаси: $x \rightarrow \infty$ да $y = \frac{3x - \pi}{2}$ $x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$ да $\max y = \frac{-6\sqrt{3} - 5\pi}{6} \approx -4,4$ $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ да $\min y = \frac{6\sqrt{3} - \pi}{6} \approx 1,2$; $(-\infty, -1)$ оралиқда қавариқ. 124. Аниқланиш соҳаси R ; графиги ординаталар ўқиғига нисбатан симметрик. Асимптотаси: $y = \pi$. $x > 0$ да $\nearrow$. $y' (+0) = 2$. 125. Аниқланиш соҳаси: R . Асимптоталари: $x \rightarrow -\infty$ да $y = \frac{1}{\pi}$ ва $x \rightarrow +\infty$ да $y = x$. Координата ўқлари билан кесилиш нуқтаси $\left(0; \frac{2}{\pi}\right)$. Ботиқ. 126. Аниқланиш соҳаси $|R|$; координаталар бошига нисбатан симметрик. Асимптотаси: $y = 0$, $x = 1$ да $\max y = \frac{\pi}{2}$; $x = -1$ да $\min y = -\frac{\pi}{2}$; $y' (1-0) = 1$ $y' (1+0) = -1$. Эгилиш нуқтаси: $(0; 0)$. 127. Даври 2π ; ординаталар ўқиғига нисбатан симметрик. $x = 0$ да $\max y = e$ ва $x = \pi$ да $\min y = \frac{1}{e}$. Эгилиш нуқталари: $x = \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ва $x = 2\pi - \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 128. Асимптоталари: $x \rightarrow -\infty$ да $y = e^{\pi/2}$ x ва $x \rightarrow +\infty$ да $y = e^{-\pi/2}$. Функция $\searrow$. Эгилиш нуқтаси: $\left(-\frac{1}{2}, e^{\arctg 1/2}\right)$. 129. Аниқланиш соҳаси: $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, $k \in Z$. Даври 2π . Асимптоталари: $x = k\pi$. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ да $\min y = 1$, $k \in Z$. 130. Аниқланиш соҳаси: $x > -1$; $x \neq 0$; $y (-0) = y (+0) = e$. Асимптоталари: $x = -1$, $y = 1$ Ботиқ. 131. $-\frac{1}{3}$. 132. -2 . 133. $1/3$. 134. $1/6$. 135. $1/2$. 136. $1/6 \cdot \ln a$. 137. 1 . 138. 0 . 139. α/β . 140. 1 . 141. $\frac{(-1)^{m-n} (2m+1)}{2n+1}$. 142. $1/2$. 143. 1 . 144. $\alpha \cdot \beta \cdot \forall \cdot \gamma > 0$ бўлса, 0 ; ($\alpha < 0$, $\beta \cdot \forall$, $\alpha = 0$, $\beta < 0$) бўлиб, $\gamma = 0$ бўлса, 0 ; $+\infty$, агар $\gamma < 0$ ($\alpha \cdot \beta = \forall$) ёки $\gamma = 0$ ($\alpha > 0$, $\beta = \forall$; $\alpha = 0$, $\beta > 0$) бўлса. $+\infty$; агар $\alpha = \beta = \gamma = 0$ бўлса. 1 . 145. Агар $\alpha > 1$ ёки $\alpha = 1$, $\beta > -1$ бўлса, 0 ; агар $\alpha = 1$, $\beta = -1$ бўлса, 1 ; агар $\alpha < 1$ ёки $\alpha = 1$, $\beta < -1$ бўлса. $+\infty$. 146. 0 . 147. 0 . 148. 0 . 149. $\frac{\alpha - \beta}{2}$. 150. e .

151. $e^{-2/\pi}$. 152. 1. 153. 1. 154. 1. 155. 1. 156. -1. 157. $1/a$. 158. 1
 159. $e^{1/3}$. 160. 0. 161. $-\frac{e}{2}$. 162. e . 163. 1. 164. 1. 165. $e^{-2/\pi}$. 166. 0.
 167. $+\infty$. 168. $\frac{-2}{\pi}$. 169. $1/3$. 170. 0. Arap $0 < a < 1$ ($\alpha = \forall$) бѣла-
 ца, 0; arap $a > 1$ ($\alpha = \forall$) бѣлаца. $+\infty$.

VIII 606

1. $-\sqrt{1-x^2}$. 2. $-\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}$. 3. $\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2$. 4. $\ln |\ln(\ln x)|$.
 5. $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. 6. $-\arcsin \frac{1}{|x|}$. 7. $-x - 2e^{-x/2} + 2\ln(1+e^{x/2})$.
 8. Arap $x > 1$ бѣлаца, $\sqrt{x^2-1} - 2\ln(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1})$ arap $x <$
 < -1 бѣлаца, $-\sqrt{x^2-1} + 2\ln(\sqrt{-x+1} + \sqrt{-x-1})$. 9. $\left(\frac{2}{3} - \right.$
 $\left. - \frac{4}{7} \sin^2 x + \frac{2}{11} \sin^4 x\right) \sqrt{\sin^3 x}$. 10. $2 \operatorname{arctg} \sqrt{x}$. 11. $2 \operatorname{sgn} x \times$
 $\times \ln(\sqrt{|x|} + \sqrt{|1+x|})$, ($x(x+1) > 0$). 12. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$. 13. $\frac{\ln^{101} x}{101}$.
 14. $\frac{3}{2} \sqrt{1-\sin^2 x}$. 15. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$. 16. $\ln \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right|$.
 17. $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$. 18. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$
 $\ln \frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}$. 19. $\frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln \left|\frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x}\right|$.
 20. $2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$. 21. $2 \operatorname{arctg} e^x$. 22. $\frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x$.
 23. $-\sqrt{1+x^2} + \arcsin x$. 24. $-\frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{2} (\ln(1+\cos^2 x))$.
 25. $(\operatorname{arctg} \sqrt{x})^3$. 26. $-x \cos x + \sin x$. 27. $-(x+1)e^{-x}$.
 28. $\frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) (n \neq -1)$. 29. $x \arcsin x + \sqrt{1+x^2}$. 30.
 $-\frac{x^2+1}{2} e^{-x^2}$. 31. $-\frac{\arcsin x}{x} - \ln \left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|$. 32. $x \operatorname{arctg} x -$
 $-\frac{1}{2} \ln(1+x^2)$. 33. $x \ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$. 34. $\ln \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| -$
 $-\cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)$. 35. $\frac{x}{2} [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$. 36. $\frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} \times$

$$\begin{aligned}
& \times e^{ax}. \quad 37. \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax}. \quad 38. \frac{2}{3} x^{3/2} \left(\ln^2 x - \frac{4}{3} \ln x + \right. \\
& \left. + \frac{8}{9} \right). \quad 39. \frac{e^{2x}}{8} (2 - \sin 2x - \cos 2x). \quad 40. \frac{1+x^2}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 - \\
& - x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2). \quad 41. x - \frac{1-x^2}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x}. \\
& 42. (x^2+2) \operatorname{ch} x - 2x \operatorname{sh} x. \quad 43. -\frac{1}{2x^2} (\ln^3 x + 3/2 \ln^2 x + 3/2 \ln x + 3/4). \\
& 44. x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x|. \quad 45. -x + \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) - e^{-x} \operatorname{arctg} e^x. \quad 46. \\
& \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^2} \right|. \quad 47. -\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right|. \quad 48. -\frac{5x+6}{x^2-3x+2} + \\
& + 4 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right|. \quad 49. \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{4} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2+1}. \quad 50. \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}. \quad 51. \frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}. \quad 52. \\
& \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - 1/4 \ln \frac{(x+1)^2}{x^2+1}. \quad 53. 1/4 \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x. \quad 54. \\
& \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}. \quad 55. -\frac{1}{6(1+x)} + \frac{1}{6} \ln \frac{(1+x)^2}{1-x+x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \\
& - \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}. \quad 56. -\frac{1}{96(x-1)^{96}} - \frac{3}{97(x-1)^{97}} - \frac{3}{98(x-1)^{98}} - \\
& - \frac{1}{99(x-1)^{99}}. \quad 57. \frac{1}{7} \ln \frac{|x^7|}{(1+x^2)^2}. \quad 58. \frac{x^4}{4} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4+1}{(x^4+2)^4}. \quad 59. \\
& \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{6} \operatorname{arctg} x^3. \quad 60. \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+ \right. \\
& \left. + x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right]. \\
& 61. 2\sqrt{x} - 2 \ln(1+\sqrt{x}). \quad 64. 6t - 3t^2 - 2t^3 + \frac{3}{2}t^4 + \frac{6}{5}t^5 - \frac{6}{7}t^7 + \\
& + 3 \ln(1+t^2) - 6 \operatorname{arctg} t, \quad \text{бунда} \quad t = \sqrt[6]{x+1} \quad 65. \frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2} - \\
& - \frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}. \quad 66. \frac{x^2}{2} - \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2} \ln |x+\sqrt{x^2-1}|. \quad 67. \frac{3}{4}t^4 - \\
& - \frac{3}{2}t^2 - 3/4 \ln |t-1| + \frac{15}{8} \ln(t^2+t+2) - \frac{27}{8\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{7}}, \\
& \text{бунда} \quad t = \sqrt[3]{2+x}. \quad 68. \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}. \quad 69. -\frac{at^3}{1+t^4} + \frac{a}{4\sqrt{2}} \ln \frac{1+t\sqrt{2}+t^2}{1-t\sqrt{2}+t^2} + \\
& + \frac{a}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{1-t^2}{t\sqrt{2}}, \quad \text{бунда} \quad t = \sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}. \quad 70. \frac{x}{2} + \sqrt{x} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\sqrt{x(1+x)} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}). \quad 71. -\frac{3-2x}{4}\sqrt{1+x+x^2} - \\
& -\frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{2} + x + \sqrt{1+x+x^2}\right). \quad 72. -\ln\left|\frac{2-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|. \quad 73. \\
& \frac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2}. \quad 74. R + \ln(x+1+R) - \sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{2}R}{x}\right|, \text{ где } R = \sqrt{x^2+2x+2}. \quad 75. \arcsin\frac{1+2x}{\sqrt{5}} + \ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right|. \\
& 76. -\frac{1}{2x^2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}\right). \quad 77. -\frac{19+5x+2x^2}{6} \times \\
& \times \sqrt{1+2x-x^2} - 4\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2}}. \quad 78. \frac{2x^2+1}{3x^3} \cdot \sqrt{x^2-1}. \quad 79. \left(\frac{x^2}{3} - \frac{14x}{3} + \right. \\
& \left. + 37\right) \cdot \sqrt{x^2+4x+3} - 66\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}|. \quad 80. \frac{3x+5}{8(x+1)^2} \cdot \\
& \cdot \sqrt{x^2+2x} - \frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|x+1|}, \text{ где } x < -2 \text{ или } x > 0. \quad 81. \frac{1}{2}\arcsin \\
& \frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right|. \quad 82. \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}. \\
& 83. \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2+x}\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2-x}\sqrt{2}}\right|. \quad 84. \ln(x+\sqrt{x^2+2}) - \\
& -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}. \quad 85. \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(2x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x-1)}}\right|. \quad 86. \frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}. \\
& 87. \frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(x+1)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(x+1)} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}. \\
& 88. \frac{3}{2(2z+1)} + \frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{|2z+1|^3}, \text{ где } z = x + \sqrt{x^2+x+1}. \quad 89. \ln\left|\frac{z-1}{z}\right| - \\
& -2\operatorname{arctg} z, \text{ где } z = \frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}. \quad 90. -\frac{5}{18(z+1)} - \frac{1}{6(z+1)^2} + \\
& + \frac{3}{4}\ln|z-1| - \frac{16}{27}\ln|z-2| - \frac{17}{108}\ln|z+1|, \text{ где } z = \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}. \\
& 91. \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{3}[(z-1)^3+(z-1)^{-3}] + [(z-1)^2-(z-1)^{-2}] + [(z-1) + \right. \\
& \left. (z-1)^{-1}]\right\} + \frac{1}{2}\ln|z-1|, \text{ где } z = x + \sqrt{x^2-2x+2}. \quad 92. \\
& \frac{2(3-4z)}{5(1-z-z^2)} + \frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+1+2z}{\sqrt{5}-1-2z}\right|, \text{ где } z = -x + \sqrt{x(1+x)}. \quad 93. \\
& \left(\frac{x^5}{6} - \frac{5x^3}{24} + \frac{5x}{16}\right)\sqrt{x^2+1} - \frac{5}{16}\ln(x+\sqrt{x^2+1}). \quad 94. \ln\frac{x}{1-x+\sqrt{5x^2-2x+1}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times e^{ax}. \quad 37. \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax}. \quad 38. \frac{2}{3} x^{3/2} \left(\ln^2 x - \frac{4}{3} \ln x + \right. \\
& \left. + \frac{8}{9} \right). \quad 39. \frac{e^{2x}}{8} (2 - \sin 2x - \cos 2x). \quad 40. \frac{1+x^2}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 - \\
& - x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2). \quad 41. x - \frac{1-x^2}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x}. \\
& 42. (x^2+2) \operatorname{ch} x - 2x \operatorname{sh} x. \quad 43. -\frac{1}{2x^2} (\ln^3 x + 3/2 \ln^2 x + 3/2 \ln x + 3/4). \\
& 44. x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x|. \quad 45. -x + \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) - e^{-x} \operatorname{arctg} e^x. \quad 46. \\
& \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3} \right|. \quad 47. -\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right|. \quad 48. -\frac{5x+6}{x^2-3x+2} + \\
& + 4 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right|. \quad 49. \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{4} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2+1}. \quad 50. \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}. \quad 51. \frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}. \quad 52. \\
& \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - 1/4 \ln \frac{(x+1)^2}{x^2+1}. \quad 53. 1/4 \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x. \quad 54. \\
& \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}. \quad 55. -\frac{1}{6(1+x)} + \frac{1}{6} \ln \frac{(1+x)^2}{1-x+x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \\
& - \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}. \quad 56. -\frac{1}{96(x-1)^{96}} - \frac{3}{97(x-1)^{97}} - \frac{3}{98(x-1)^{98}} - \\
& - \frac{1}{99(x-1)^{99}}. \quad 57. \frac{1}{7} \ln \frac{|x^2|}{(1+x^2)^2}. \quad 58. \frac{x^4}{4} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4+1}{(x^4+2)^4}. \quad 59. \\
& \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{6} \operatorname{arctg} x^3. \quad 60. \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+ \right. \\
& \left. + x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right]. \\
& 61. 2\sqrt{x} - 2 \ln(1+\sqrt{x}). \quad 64. 6t - 3t^2 - 2t^3 + \frac{3}{2}t^4 + \frac{6}{5}t^5 - \frac{6}{7}t^7 + \\
& + 3 \ln(1+t^2) - 6 \operatorname{arctg} t, \quad \text{бунда} \quad t = \sqrt[3]{x+1}. \quad 65. \frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2} - \\
& - \frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}. \quad 66. \frac{x^2}{2} - \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2} \ln |x+\sqrt{x^2-1}|. \quad 67. \frac{3}{4}t^4 - \\
& - \frac{3}{2}t^2 - 3/4 \ln |t-1| + \frac{15}{8} \ln(t^2+t+2) - \frac{27}{8\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{7}}, \\
& \text{бунда} \quad t = \sqrt[3]{2+x}. \quad 68. \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}. \quad 69. -\frac{at^3}{1+t^4} + \frac{a}{4\sqrt{2}} \ln \frac{1+t\sqrt{2}+t^3}{1-t\sqrt{2}+t^3} + \\
& + \frac{a}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{1-t^2}{t\sqrt{2}}, \quad \text{бунда} \quad t = \sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}. \quad 70. \frac{x}{2} + \sqrt{x} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\sqrt{x(1+x)} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}), \quad 71. -\frac{3-2x}{4}\sqrt{1+x+x^2} - \\
& -\frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{2} + x + \sqrt{1+x+x^2}\right), \quad 72. -\ln\left|\frac{2-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|, \quad 73. \\
& \frac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2}, \quad 74. R + \ln(x+1+R) - \sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{2R}}{x}\right|, \text{ бунда} \\
& \text{да } R = \sqrt{x^2+2x+2}, \quad 75. \arcsin\frac{1+2x}{\sqrt{5}} + \ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right|, \\
& 76. -\frac{1}{2x^2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}\right), \quad 77. -\frac{19+5x+2x^2}{6} \times \\
& \times \sqrt{1+2x-x^2} - 4\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2}}, \quad 78. \frac{2x^2+1}{3x^3} \cdot \sqrt{x^2-1}, \quad 79. \left(\frac{x^2}{3} - \frac{14x}{3} + \right. \\
& \left. + 37\right) \cdot \sqrt{x^2+4x+3} - 66\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}|, \quad 80. \frac{3x+5}{8(x+1)^2} \cdot \\
& \cdot \sqrt{x^2+2x} - \frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|x+1|}, \text{ бунда } x < -2 \text{ ёки } x > 0, \quad 81. \frac{1}{2}\arcsin \\
& \frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right|, \quad 82. \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}, \\
& 83. \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|, \quad 84. \ln(x+\sqrt{x^2+2}) - \\
& -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}, \quad 85. \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(2x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x-1)}}\right|, \quad 86. \frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}, \\
& 87. \frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(x+1)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(x+1)} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}, \\
& 88. \frac{3}{2(2z+1)} + \frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{|2z+1|^3}, \text{ бунда } z = x + \sqrt{x^2+x+1}, \quad 89. \ln\left|\frac{z-1}{z}\right| - \\
& -2\operatorname{arctg} z, \text{ бунда } z = \frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}, \quad 90. -\frac{5}{18(z+1)} - \frac{1}{6(z+1)^2} + \\
& + \frac{3}{4}\ln|z-1| - \frac{16}{27}\ln|z-2| - \frac{17}{108}\ln|z+1|, \text{ бунда } z = \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}, \\
& 91. \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{3}[(z-1)^3+(z-1)^{-3}]+[(z-1)^3-(z-1)^{-3}]+[(z-1)+(z-1)^{-1}]\right\} + \\
& + \frac{1}{2}\ln|z-1|, \text{ бунда } z = x + \sqrt{x^2-2x+2}, \quad 92. \\
& \frac{2(3-4z)}{5(1-z-z^2)} + \frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+1+2z}{\sqrt{5}-1-2z}\right|, \text{ бунда } z = -x + \sqrt{x(1+x)}, \quad 93. \\
& \left(\frac{x^5}{6} - \frac{5x^3}{24} + \frac{5x}{16}\right)\sqrt{x^2+1} - \frac{5}{16}\ln(x+\sqrt{x^2+1}), \quad 94. \ln\frac{x}{1-x+\sqrt{5x^2-2x+1}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 95. \left(\frac{x^3}{4} - \frac{7x^2}{6} + \frac{95x}{24} - \frac{145}{12} \right) \sqrt{x^2+4x+5} - \frac{5}{16} \ln(x + \sqrt{x^2+1}). \quad 96. \\
& \frac{1}{8} \left(x^7 + \frac{7x^5}{6} + \frac{35x^3}{24} + \frac{35}{16}x \right) \sqrt{x^2-1} + \frac{35}{128} \ln |x + \sqrt{x^2-1}|. \quad 97. \\
& \frac{3x-1}{2x^2} \sqrt{2x^2+2x+1} - \frac{1}{2} \ln \frac{x+1+\sqrt{2x^2+2x+1}}{x}. \quad 9. \quad \frac{x+2}{3\sqrt{x^2+4x+7}}. \\
& 99. \frac{8(2x+1)}{9\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{2}{27} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} \right)^3. \quad 100. \frac{1}{\sqrt{14}} \ln \frac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{6x^2+10} + \sqrt{7}}. \\
& 101. \frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}. \quad 102. 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2(x^2+x+1)}}{1-x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+x+\sqrt{2(x^2+x+1)}}{1+x-\sqrt{2(x^2+x+1)}} \right|. \\
& 103. \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3(x^2+x+1)} - \sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{x^2-x+1}} \right| + \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{2}(1-x)}. \quad 104. \sqrt{x^2-x+1} + \frac{3}{2} \ln \left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2-x+1} \right) - \ln \frac{2-x+2\sqrt{x^2-x+1}}{x}. \\
& 105. \sqrt{1+x+x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2}. \quad 106. \quad 2. \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x} + \\
& + \ln |2\sqrt{1+x+x^2}+1+2x|. \quad 107. 6x^{1/6}+3x^{1/3}+2x^{1/2}+6 \ln |x^{1/6}-1|. \\
& 108. \quad 6/5 x^{5/6} - 4x^{1/2} + 18 x^{1/6} + 3x^{1/6} (1+x^{1/3})^{-1} - 2 | \operatorname{arctg} (x^{1/6}). \\
& 109. -\frac{3}{2} (1+x^{1/3})^{-2}. \quad 110. \frac{4}{9} (1+x^{1/4})^{-9}. \quad 111. \frac{3}{11} (x+1)^{11/3} - \\
& - 3/4 \cdot (x+1)^{1/3} + \frac{3}{5} (x+1)^{5/3}. \quad 112. \frac{12}{13} (1+x^{1/4})^{13/3} - \\
& - \frac{18}{5} (1+x^{1/4})^{10/3} + \frac{36}{7} (1+x^{1/4})^{7/3} - 3(1+x^{1/4})^{4/3}. \quad 113. \frac{12}{7} (1+x^{1/4})^{7/3} - 3(1+x^{1/4})^{4/3}. \\
& 114. \frac{6}{7} (1+x^{1/3})^{7/2} - \frac{18}{5} (1+x^{1/3})^{5/2} + 6x^{1/3}(1+x^{1/3})^{1/2}. \quad 115. \frac{1}{6} \ln \frac{t-1}{t+1} + \frac{1}{2} \ln \frac{t^2-t+1}{t^2+t+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}}, \text{ бунда } t = \sqrt[6]{x^2+1}. \quad 116. \frac{3}{5} (1+x^{2/3})^{5/2} + (1-2x^{2/3})(1+x^{2/3})^{1/2}. \\
& 117. -\frac{3x^3+4}{8x^3(2+x^3)^2}. \quad 118. -\frac{\sqrt[3]{(2-x^2)^2}}{4x^3}. \quad 119. \frac{t}{2(t^2+1)} - \\
& - \frac{1}{12} \ln \frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}}, \text{ бунда } t = \sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
121. & \frac{5}{16}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x. \quad 122. \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48}. \\
123. & -\frac{\cos 2x}{64} + \frac{\cos^3 2x}{96} - \frac{\cos^5 2x}{320}. \quad 124. \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}. \quad 125. \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \\
& + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|. \quad 126. -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|. \quad 127. \\
& \operatorname{tg} x - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}. \quad 128. -\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \operatorname{ctg} x. \quad 129. -8\operatorname{ctg} 2x - \frac{8}{3}\operatorname{ctg}^3 2x. \quad 130. \\
& \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{3\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + 3\ln|\operatorname{tg} x|. \quad 131. \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|. \\
132. & -2\sqrt{\operatorname{ctg} x} + \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}. \quad 133. \frac{1}{4}\ln\frac{(z^2+1)^2}{z^2-z^2+1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2z^2-1}{\sqrt{3}}, \\
& \text{бывает } z=\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}. \quad 134. \frac{\sin 5x}{10} + \frac{\sin 3x}{6}. \quad 135. \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 6x}{12}. \quad 136. - \\
& -\frac{\sin(x+1)}{4} + \frac{\sin(3x+1)}{6} - \frac{\sin(5x+1)}{20}. \quad 137. \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{16} + \\
& + \frac{\sin 4x}{16} + \frac{\sin 6x}{24} + \frac{\sin 10x}{80}. \quad 138. \frac{\operatorname{sh} 8x}{16} - \frac{\operatorname{sh} 6x}{12}. \quad 139. \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{4\sin^4 x}. \\
140. & \frac{1}{8}\ln(\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x). \quad 141. \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}. \quad 142. \sin x \cdot \cos^2 x + \frac{2\sin^5 x}{5}. \quad 143. \\
& \frac{\sin^6 2x}{16} - \frac{\sin^{10} 2x}{10} + \frac{\sin^{12} 2x}{24}. \quad 144. \frac{2}{5}\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{ch}^3 x + \operatorname{ch} x. \quad 145. \frac{1}{6(3\cos x - 1)^2}. \\
146. & \frac{\cos x}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{1-\sqrt{2}\cos x}{1+\sqrt{2}\cos x}\right|. \quad 147. \frac{1}{4}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \frac{1}{2(1+\cos x)}. \\
148. & \frac{1}{4}\ln(3+4\sin^2 x). \quad 149. \ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} - 2\operatorname{arctg}(\sin x). \quad 150. \\
& \frac{x+3\ln|\sin x-3\cos x|}{10}. \quad 151. \ln|\sin x+\cos x|. \quad 152. \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x+1+\sqrt{2}}{\operatorname{tg} x+1-\sqrt{2}}\right|. \\
153. & \frac{1}{\sqrt{30}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\operatorname{tg} x\right). \quad 154. \frac{1}{2\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg} x+3-\sqrt{13}}{2\operatorname{tg} x+3+\sqrt{13}}\right|. \\
155. & \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{th} x-2}{\operatorname{th} x+2}\right|. \quad 156. \frac{1}{68}(17\ln|\sin x| - \ln|\sin x+4\cos x|-4x). \\
157. & \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}\right). \quad 159. \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}\right). \quad 160. -\frac{1}{5}(2\sin x+ \\
& +\cos x) + \frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg}^2}{2}\right)\right|. \quad 161. \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{a\operatorname{tg} x}{b}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 162. - \frac{\cos x}{a(a \sin x + b \cos x)} \quad 163. \ln \left| \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 5}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 3} \right| \quad 164. \frac{2}{5}x - \frac{1}{5} \ln |4 \cos x + \\
& \left| + 3 \sin x - 2 \right| + \frac{4}{5\sqrt{21}} \ln \left| \frac{2\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{3} + \sqrt{7}}{2\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{3} - \sqrt{7}} \right| \quad 165. (\cos 2a) \cdot \\
& \cdot x - 2(\sin 2a) \cdot \ln \left| \sin\left(\frac{x+a}{2}\right) \right| - 2(\sin^2 a) \operatorname{ctg}\left(\frac{x+a}{2}\right) \quad 166. \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(\cos x + \\
& + \sin x + \sqrt{2}) - \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \quad 167. \frac{3}{5}x - \frac{4}{5} \ln |2 \cos x - \sin x - \\
& - 3| + \frac{6}{5} \operatorname{arctg}\left(\frac{5 \operatorname{tg}(x/2) + 1}{2}\right) \quad 168. \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + \\
& + \frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \right| \quad 169. \frac{1}{6} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{5}{6} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 3 \right| - \\
& - \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \right| \quad 170. \frac{1}{1 + \operatorname{tg}(x/2)} + \ln \left| \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}(x/2)} \right| \quad 171. \\
& - \frac{3}{80} (\cos x)^{4/3} \cdot (20 - 16 \cos^2 x + 5 \cos^4 x) \quad 172. \frac{2 \sin x - \cos x}{10 (\sin x + 2 \cos x)^2} + \\
& + \frac{1}{10\sqrt{5}} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right) \right| \quad 173. \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \sin^2 x}}{|\cos x|} \right) \quad 174. \\
& - \frac{e \sin x}{(1 - e^2)(1 + e \cos x)} + \frac{2}{(1 - e^2)^{3/2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \quad 175. \\
& - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{4} \ln \left(\frac{2 + \sin x}{2 - \sin x} \right) \quad 176. J_n = \frac{\cos x (\sin x)^{n-1}}{n} + \\
& + \frac{n-1}{n} J_{n-2} \quad 177. K_n = \frac{\sin x (\cos x)^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n} K_{n-2} \quad 178. J_n = \\
& = - \frac{\cos x}{(n-1) (\sin x)^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} J_{n-2} \quad 179. K_n = \frac{\sin x}{(n-1) (\cos x)^{n-1}} + \\
& + \frac{n-2}{n-1} K_{n-2} \quad 180. J_{n,m} = \frac{(\sin x)^{n+1} (\cos x)^{m-1}}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} J_{n,m-2} \quad 181. \\
& \frac{e^{ax}}{4} \left[3 \frac{(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} - \frac{a \sin bx - 3b \cos bx}{a^2 + 9b^2} \right] \quad 182. \frac{e^x}{2} [x^2 \cdot (\sin x + \\
& + \cos x) - 2x \sin x + (\sin x - \cos x)] \quad 183. x - 3 \ln \{ (1 + e^{x/6}) \sqrt{1 + e^{x/3}} \} - \\
& - 3 \operatorname{arctg} e^{x/6} \quad 184. \ln(e^x - 1) \quad 185. x [\ln^n x - n \ln^{n-1} x + (n-1)n \ln^{n-2} x + \\
& + \dots + (-1)^{n-1} n(n-1) \dots 2 \ln x + (-1)^n n!] \quad 186. \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} -
\end{aligned}$$

$$-\ln \sqrt{1-x^2}. \quad 187. \quad x - \operatorname{arctg} x + \left(\frac{1+x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} \right) \cdot [\ln(1+x^2)-1].$$

$$188. \quad -\frac{\operatorname{sgn} x}{2} \sqrt{x^2-1} + \frac{x^2}{2} \arccos \frac{1}{x}. \quad 189. \quad -\ln \sqrt{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot$$

$$\cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2}). \quad 190. \quad -x^2 + \frac{x^2}{2} \ln(4+x^4) + 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{x^2}{2} \right). \quad 191. \quad -$$

$$-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \arcsin x + \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 + \ln |x| \quad (0 < |x| < 1). \quad 192.$$

$$-\frac{x^2+7}{9} \sqrt{x^2+1} + \frac{(x^2+1)^{3/2}}{3} \cdot \ln \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}; \quad (|x| >$$

$$> 1). \quad 193. \quad a(x \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \ln |x^2-1|) + \frac{a+b}{4} \cdot \ln^2 \left| \frac{x-1}{x+2} \right|. \quad 194.$$

$$-\frac{6x+x^3}{9} - \frac{2+x^2}{9} \cdot \sqrt{1-x^2} \arccos x, \quad (|x| < 1). \quad 195. \quad -\frac{x^2}{6} -$$

$$-\left(x - \frac{x^3}{3}\right) \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 + \frac{2}{3} \ln(1+x^2). \quad 196. \quad -2 \ln(\operatorname{th} x +$$

$$+ \sqrt{1+\operatorname{th}^2 x}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \ln \frac{\sqrt{1+\operatorname{th}^2 x} + \sqrt{2} \operatorname{th} x}{\sqrt{1+\operatorname{th}^2 x} - \sqrt{2} \operatorname{th} x}. \quad 197. \quad \frac{x^2 |x|}{3}. \quad 198.$$

$$\frac{2x^2}{3} (x + |x|). \quad 199. \quad \text{Арап } |x| \leq 1 \text{ бӱлсә, } x, \text{ арап } |x| > 1$$

$$\text{бӱлсә, } \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \operatorname{sgn} x. \quad 200. \quad \frac{(1+x)|1+x|}{2} + \frac{(1-x)|1-x|}{2}. \quad 201.$$

$$\frac{3x+5}{8(x+1)^2} \cdot \sqrt{x^2+2x} - \frac{3}{8} \arcsin \frac{1}{|x+1|}, \text{ буида } x < -2 \text{ ёки } x > 0. \quad 202.$$

$$6\sqrt[6]{x} - 12 \operatorname{arctg} (\sqrt[6]{x/2}). \quad 203. \quad \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2} +$$

$$+x\sqrt{2}}{-x\sqrt{2}} \right|. \quad 204. \quad (3t^2-1)/(6t^3), \text{ буида } t = (1-\sqrt{1-x^2})/x. \quad 205.$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt[4]{x^4+1} - \sqrt{2} x}{\sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt{2} x} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x^4+1}{2x^2}}. \quad 206.$$

$$\frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+2x^4} + x}{\sqrt[4]{1+2x^4} - x} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{1+2x^4}}{x}. \quad 207. \quad \frac{1}{8} (\cos 2x - \sin 2x - 2)e^{-2x}.$$

$$208. \quad \ln |x| / \sqrt{x^2-1} + \arcsin(1/x). \quad 209. \quad \frac{1}{2na^{2n-1}} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| +$$

$$\sum_{k=1}^{n-2} \left(\cos \frac{2k\pi}{n} \ln(x^2 - 2ax \cos \frac{k\pi}{n} + a^2) - 2 \sin \frac{k\pi}{n} \operatorname{arctg} \frac{x - a \cos \left(\frac{k\pi}{n} \right)}{a \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right)} \right).$$

210. Агар $a^2 < b^2$ бўлса, $\frac{1}{|a|\sqrt{b^2-a^2}} \cdot \ln \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{|\sqrt{b^2-a^2} \cdot x + a|\sqrt{b^2-x^2}}$;
агар $a^2 = b^2$ бўлса, $-\frac{x}{b^2\sqrt{b^2-x^2}}$, агар $a^2 > b^2$ бўлса, $\frac{1}{|a|\sqrt{a^2-b^2}}$
 $\arccos \frac{\sqrt{a^2-b^2} \cdot x}{|b|\sqrt{a^2-x^2}}$. 211. Агар $a \neq \pm 1$ бўлса, $\frac{2}{a^2-1} \operatorname{arctg} \left(\frac{a-1}{a+1} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)$
 $a = 1, \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. агар $a = -1; |x| < \pi$ бўлса, $-\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$. 213.
Агар $ab > 0$ бўлса, $\frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} e^x \right)$; агар $ab < 0$ бўлса, $\frac{1}{2\sqrt{-ab}}$
 $\ln \left| \frac{b + \sqrt{-abe^x}}{b - \sqrt{-abe^x}} \right|$. 214. Агар $a > 0$ бўлса, $\frac{1}{\sqrt{a}} \ln \frac{\sqrt{a+be^x} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+be^x} + \sqrt{a}}$
агар $a < 0$ бўлса, $\frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a+be^x}}{\sqrt{-a}}$. 215. Агар $a > 0$ бўлса,
 $x \ln |x^2 + a| - 2x + 2\sqrt{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a}}$, агар $a \leq 0$ бўлса, $x \ln |x^2 + a| -$
 $- 2x + \sqrt{-a} \ln \left| \frac{x + \sqrt{-a}}{x - \sqrt{-a}} \right|$. 216. $2(\ln x - 2) \sqrt{x+a} + 2\sqrt{a} \ln \frac{\sqrt{x+a} +$
 $+\sqrt{a}}{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}}$, $a \geq 0$. $2(\ln x - 2) \sqrt{x+a} + 4\sqrt{-a} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{-a}}$, $a < 0$. 217.
 $-\frac{\ln(x + \sqrt{x^2+a})}{x} + \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \frac{\sqrt{x^2+a} + \sqrt{a}}{|x|}$, $a > 0$. $-\frac{\ln|x + \sqrt{x^2+a}|}{x} +$
 $+\frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{-a}}$ $a < 0$; $-\frac{1 + \ln(2x)}{x}$; $a = 0$. 218. $x^a \ln^b x$. 219.
 $(\ln x) \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$. 220. $(\sin x) \operatorname{arctg}[(\sin x) - \frac{1}{2} \ln(1 + \sin^2 x)]$.

IX боё

4. а) 1; б) $\frac{b^4 - a^4}{4}$; в) $\frac{2}{3}(b^{3/2} - a^{3/2})$; г) $\ln \frac{b}{a}$; д) $\frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$.
11. $g(x)$ — функция сифатида 7-мисолдаги Рيمان функцияси, $f(x)$ функ-
ция сифатида эса $f(x) = \begin{cases} \text{агар } x=0, \text{ бўлса, } 0, \\ \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса, } 1 \end{cases}$ функция қаралсин.
16. $\frac{\pi}{3}$. 17. $\frac{\pi}{6}$. 18. 1. 19. $\frac{\pi}{2 \sin \alpha}$. 20. 1. 21. $45/4$. 22. $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$.
23. $\frac{\pi}{2|ab|}$. 24. $\frac{\pi}{12}$. 25. $\ln \frac{3}{2}$. 26. π . 27. $\frac{1}{3}(2 - 3 \operatorname{ch} 2 + \operatorname{ch}^3 2)$.

28. $\frac{1}{6} \ln \left(\frac{2}{5} \right)$. 29. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 30. $\frac{1}{2}(e - e^{1/4})$. 31. $\frac{\pi}{4}$. 32. $\operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}$.
 33. $\frac{\pi}{6} + \frac{8\sqrt{3}}{27}$. 34. $2 \ln \frac{4}{3} - \frac{1}{2}$. 35. $\ln \frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$. 36. $4 - 2 \ln 3$. 37.
 $\sin 1$. 38. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. 39. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 40. $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}$. 41. $2 \ln 2 - \frac{3}{4}$. 42.
 $\frac{e(\sin 1 - \cos 1)}{2}$. 43. $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$. 44. $\frac{(e^{\pi} - 2)}{5}$. 45. 0. 46. 0.
 47. 0. 48. 0. 49. $\frac{\pi}{16}$. 50. $\frac{e^4 - 1}{2}$. 51. 4π . 52. $\frac{\pi}{6} - \sqrt{3} + 1$. 53.
 $2(\sqrt{2} - 1)$. 54. $\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{6}} \right) / \sqrt{2}$. 55. $-\frac{468}{7}$. 56. $\frac{29}{270}$.
 57. $1/6$. 58. $\frac{3}{5}(e^{\pi} - 1)$. 59. $\frac{n^{n+1}}{n+1} \ln n - \frac{n^{n+1} - 1}{(n+1)^2}$. 60. $\frac{8191}{26}$.
 61. $2(1 - e^{-1})$. 62. $\frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$. 63. $\frac{3}{2}e^{5/2}$. 64. $200\sqrt{2}$. 65. $(-1)^n \left[\frac{\pi}{4} - \right.$
 $\left. - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right) \right]$. 66. $I_n = \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \left(n + \right.$
 $\left. + \frac{1}{n} \right)^{n-1} + \dots + \left(1 - \frac{1}{n} \right) I_{n-2}$, $n > 2$. 79. -1 . 80. $14 - \ln(7!)$.
 81. $-\operatorname{th} \frac{\pi}{2}$. 82. $\ln(n!)$. 86. $1/2$. 87. 16. 83. $\ln 2$. 89. $\pi/4$. 50. $\frac{2}{\pi}$.
 91. $\frac{\pi}{6}$. 92. $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$. 93. $1/e$. 94. $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. 95. $\frac{5}{6}\pi$.
 96. $x + \frac{1}{2}$. 97. $\frac{1}{\ln 2}$. 98. 1. 99. $\frac{\pi^2}{4}$. 100. 0. 101. Иккинчиси. 102.
 Биринчиси. 103. Иккинчиси. 104. Биринчиси. 105. Биринчиси. 106. Ик-
 кинчиси. 107. $1/3$. 108. $6\frac{2}{3}$. 109. 10. 110. $\frac{1}{2} \cos \varphi$.

Х 6 0 6

1. $a \ln \frac{a+b}{a-b} - b$. 2. $\operatorname{Intg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right)$. 3. $\frac{e^2 + 1}{4}$. 4. $a \ln \frac{a}{b}$. 5.
 $2(1 + \ln 1.5)$. 6. $\ln 3$. 7. $\ln(2 + \sqrt{3})$. 8. $a \ln(a/x_0)$. 9. $1/\sqrt{2}$. 10. $\sqrt{3}(2 -$
 $- \sqrt{x_0} - \sqrt{x_0^3})$. 11. 10.8. 12. $\operatorname{sh} 2a$. 13. $\ln \left(\frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} a} \right)$. 14. $14/3$. 15. $2\pi^2 a$.
 16. $2 \left(\operatorname{ch} \frac{T}{2} \sqrt{\operatorname{ch} T} - 1 \right) - \sqrt{2} \ln \frac{\sqrt{2} \operatorname{ch} \frac{T}{2} + \sqrt{\operatorname{ch} T}}{1 + \sqrt{2}}$. 17. $\frac{1}{2} (\operatorname{ch}^{3/2} 2T - 1)$.

210. Агар $a^2 < b^2$ бўлса, $\frac{1}{|a|\sqrt{b^2-a^2}} \cdot \ln \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{|\sqrt{b^2-a^2} \cdot x + a|\sqrt{b^2-x^2}}$;
агар $a^2 = b^2$ бўлса, $-\frac{x}{b^2\sqrt{b^2-x^2}}$, агар $a^2 > b^2$ бўлса, $\frac{1}{|a|\sqrt{a^2-b^2}}$
 $\arccos \frac{\sqrt{a^2-b^2} x}{|b|\sqrt{a^2-x^2}}$. 211. Агар $a \neq \pm 1$ бўлса, $\frac{2}{a^2-1} \operatorname{arctg} \left(\frac{a-1}{a+1} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)$
 $a = 1, \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. агар $a = -1; |x| < \pi$ бўлса, $-\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$. 213.
Агар $ab > 0$ бўлса, $\frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} e^x \right)$; агар $ab < 0$ бўлса, $\frac{1}{2\sqrt{-ab}}$
 $\ln \left| \frac{b + \sqrt{-abe^x}}{b - \sqrt{-abe^x}} \right|$. 214. Агар $a > 0$ бўлса, $\frac{1}{\sqrt{a}} \ln \frac{\sqrt{a+be^x} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+be^x} + \sqrt{a}}$
агар $a < 0$ бўлса, $\frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a+be^x}}{\sqrt{-a}}$. 215. Агар $a > 0$ бўлса,
 $x \ln |x^2 + a| - 2x + 2\sqrt{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a}}$, агар $a \leq 0$ бўлса, $x \ln |x^2 + a| -$
 $- 2x + \sqrt{-a} \ln \left| \frac{x + \sqrt{-a}}{x - \sqrt{-a}} \right|$. 216. $2(\ln x - 2) \sqrt{x+a} + 2\sqrt{a} \ln \frac{\sqrt{x+a} +$
 $+\sqrt{a}}{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}}$, $a \geq 0$. $2(\ln x - 2) \sqrt{x+a} + 4\sqrt{-a} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{-a}}$, $a < 0$. 217.
 $-\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + a})}{x} + \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \frac{\sqrt{x^2 + a} + \sqrt{a}}{|x|}$, $a > 0$. $-\frac{\ln|x + \sqrt{x^2 + a}|}{x} +$
 $+\frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + a}}{\sqrt{-a}}$ $a < 0$; $-\frac{1 + \ln(2x)}{x}$; $a = 0$. 218. $x^a \ln^b x$. 219.
 $(\ln x) \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$. 220. $(\sin x) \operatorname{arctg}(\sin x) - \frac{1}{2} \ln(1 + \sin^2 x)$.

IX боё

4. а) 1; б) $\frac{b^4 - a^4}{4}$; в) $\frac{2}{3}(b^{3/2} - a^{3/2})$; г) $\ln \frac{b}{a}$; д) $\frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$.
11. $g(x)$ — функция сифатида 7-мисолдаги Риман функцияси, $f(x)$ функ-
ция сифатида эса $f(x) = \begin{cases} \text{агар } x=0, \text{ бўлса, } 0, \\ \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса, } 1 \end{cases}$ функция қаралсин.
16. $\frac{\pi}{3}$. 17. $\frac{\pi}{6}$. 18. 1. 19. $\frac{\pi}{2 \sin \alpha}$. 20. 1. 21. $45/4$. 22. $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$.
23. $\frac{\pi}{2|ab|}$. 24. $\frac{\pi}{12}$. 25. $\ln \frac{3}{2}$. 26. π . 27. $\frac{1}{3}(2 - 3 \operatorname{ch} 2 + \operatorname{ch}^3 2)$.

28. $\frac{1}{6} \ln \left(\frac{2}{5} \right)$. 29. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 30. $\frac{1}{2}(e - e^{1/4})$. 31. $\frac{\pi}{4}$. 32. $\operatorname{arctge} - \frac{\pi}{4}$.
 33. $\frac{\pi}{6} + \frac{8\sqrt{3}}{27}$. 34. $2\ln \frac{4}{3} - \frac{1}{2}$. 35. $\ln \frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$. 36. $4 - 2\ln 3$. 37.
 $\sin 1$. 38. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. 39. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 40. $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}$. 41. $2\ln 2 - \frac{3}{4}$. 42.
 $\frac{e(\sin 1 - \cos 1)}{2}$. 43. $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$. 44. $\frac{(e^{\pi} - 2)}{5}$. 45. 0. 46. 0.
 47. 0. 48. 0. 49. $\frac{\pi}{16}$. 50. $\frac{e^4 - 1}{2}$. 51. 4π . 52. $\frac{\pi}{6} - \sqrt{3} + 1$. 53.
 $2(\sqrt{2} - 1)$. 54. $\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{6}} \right) / \sqrt{2}$. 55. $-\frac{468}{7}$. 56. $\frac{29}{270}$.
 57. $1/6$. 58. $\frac{3}{5}(e^{\pi} - 1)$. 59. $\frac{\pi^{n+1}}{n+1} \ln n - \frac{n^{n+1} - 1}{(n+1)^2}$. 60. $\frac{8191}{26}$.
 61. $2(1 - e^{-1})$. 62. $\frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$. 63. $\frac{3}{2}e^{5/2}$. 64. $200\sqrt{2}$. 65. $(-1)^n \left[\frac{\pi}{4} - \right.$
 $\left. - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right) \right]$. 66. $I_n = \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \left(n + \right.$
 $\left. + \frac{1}{n} \right)^{n-1} + \dots + \left(1 - \frac{1}{n} \right) I_{n-2}$. $n > 2$. 79. -1 . 80. $14 - \ln(71)$.
 81. $-\operatorname{th} \frac{\pi}{2}$. 82. $\ln(n!)$. 86. $1/2$. 87. 16. 83. $\ln 2$. 89. $\pi/4$. 50. $\frac{2}{\pi}$.
 91. $\frac{\pi}{6}$. 92. $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$. 93. $1/e$. 94. $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. 95. $\frac{5}{6}\pi$.
 96. $x + \frac{1}{2}$. 97. $\frac{1}{\ln 2}$. 98. 1. 99. $\frac{\pi^2}{4}$. 100. 0. 101. Иккинчиси. 102.
 Биринчиси. 103. Иккинчиси. 104. Биринчиси. 105. Биринчиси. 106. Ик-
 кинчиси. 107. $1/3$. 108. $6\frac{2}{3}$. 109. 10. 110. $\frac{1}{2} \cos \varphi$.

Х 6 0 6

1. $a \ln \frac{a+b}{a-b} - b$. 2. $\operatorname{Intg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right)$. 3. $\frac{e^2 + 1}{4}$. 4. $a \ln \frac{a}{b}$. 5.
 $2(1 + \ln 1.5)$. 6. $\ln 3$. 7. $\ln(2 + \sqrt{3})$. 8. $a \ln(a/x_0)$. 9. $1/\sqrt{2}$. 10. $\sqrt{3}(2 -$
 $- \sqrt{x_0} - \sqrt{x_0^3})$. 11. 10,8. 12. $\operatorname{sh} 2a$. 13. $\ln \left(\frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sha}} \right)$. 14. $14/3$. 15. $2\pi^2 a$.
 16. $2 \left(\operatorname{ch} \frac{T}{2} \sqrt{\operatorname{ch} T} - 1 \right) - \sqrt{2} \ln \frac{\sqrt{2} \operatorname{ch} \frac{T}{2} + \sqrt{\operatorname{ch} T}}{1 + \sqrt{2}}$. 17. $\frac{1}{2} (\operatorname{ch}^{3/2} 2T - 1)$.

18. $t_2 - t_1$. 19. $\operatorname{sh} t_0$. 20. $-a \ln \sin t_0$. 21. $\frac{\pi^3}{3}$. 22. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(1 + \sqrt{2})$.
 23. $(2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5}))/4$. 24. $2a \left(5 + \frac{5}{2\sqrt{3}} \ln(2 + \sqrt{3}) \right)$. 25. t_0 . 26. $\ln t_0$.
 27. $a\sqrt{1+m^2}/m$. 28. $p[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$. 29. $a(2\pi - \operatorname{th} \pi)$. 30. $2 + \frac{1}{2} \ln 3$. 31. $6\frac{1}{3}$. 32. $\operatorname{sh} R$. 33. T . 34. $8(2 - \sqrt{3})$. 35. $2a$. 36. $8a(5\sqrt{5} - 1)/3$. 37. $1423a/15$. 38. $\pi(b-a)/2$. 39. $134/27$. 40. $(3\sqrt{3} - 1)$. 41. 8. 42. $\frac{a}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2} + 1) + a$. 43. $4aE\left(\frac{\pi}{2}, e\right) = 4aE(e)$, $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, бу ерда E эллиптик интеграл. 44. $4/3\sqrt{3}$. 45. 8. 46. $a/\sqrt{3}$.
 47. $1 + \frac{\ln(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2}}$. 48. $3\pi a/2$. 49. $16a/3$. 50. $15\pi a/8$. 51. 1) $2a$.
 2) $\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}$, $n = 2k$. 2) $\pi a \cdot \frac{(2k+1)!!}{(2k)!!}$, $n = 2k+1$. 52. $a^2/3$. 53. 4, 5.
 54. $2 - \frac{1}{\ln 2} \approx 0,56$. 55. $\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \approx 0,97$. 56. $\pi/2$. 57. $\frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi}{2} \approx 0,546$. 58. $1 + \frac{\pi^2}{8}$. 59. $\sqrt{2} - 1$. 60. $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{8}$. 61. $\ln 4 - 2e^{-1}$.
 62. $6 \ln 2 - 2,5$. 63. $1 - e^{-a^2}(1 + a^2)$. 64. $\pi/2 - \frac{1}{3}$. 65. $(1 - \ln 2)/\ln 2$. 66. $\frac{20}{9} - \ln 3$. 67. $\log_4 e - 1/4$. 68. $\frac{16}{3} + 2\pi$. 69. $(\alpha - 1)/(\alpha + 1)$.
 70. $\frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} + \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. 71. $\frac{a^2}{3}(4\pi^2 + 3\pi)$. 72. $8/15$. 73. $\pi a^2 \left(\frac{16}{\sqrt{3}} - 9 \right)$.
 74. πab . 75. $3\pi a^2/2$. 76. $a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \right)$. 77. $4a^2/3$. 78. a^2 . 79. $\frac{b^2}{6}(3 + 4\sqrt{2})$. 80. 11π . 81. $1/\pi$. 82. $2/3$. 83. $1/\pi$. 84. $\pi \left(1 + \frac{\pi^2}{6} \right)$. 85. $17\pi/4$. 86. $a^2 \arcsin \frac{b}{a} - b\sqrt{a^2 - b^2}$. 87. $\pi(a^2 + 2b^2)/2$. 88. $a^2(3\pi + 4)/12$. 89. $6a^2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{b}{a-b}} - 2(2b + 3a)\sqrt{b(a-b)}$. 90. a^2 . 91. $2a\sqrt{\pi^2 a^2 + \sqrt{1 + 4b^2} + \frac{8b^2}{\pi} \ln \frac{\pi a + \sqrt{\pi^2 a^2 + 4b^2}}{2b}}$. 92. $\pi \left[(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + \ln \frac{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{5} - 1)}{2} \right]$.
 93. $\pi \left(\sqrt{2} - e^{-a} \sqrt{1 + e^{-2a}} - \ln \frac{e^{-a} + \sqrt{1 + e^{-2a}}}{1 + \sqrt{2}} \right)$. 94. $\left(\frac{\pi a^2}{8} \right) \cdot \left(3 \ln(\sqrt{2} + 1) + 7\sqrt{2} \right)$. 95. $\pi(-5 - 9 \ln 2 + 16 \ln 3)/6$. 96. $\frac{\pi a^2}{6} (11 - a\sqrt{3} +$

$+2\pi(2\sqrt{3}-1))$. 97. $\pi(\operatorname{sh} 4 - 4e^{-2})/8$. 98. $\pi(11\sqrt{2} + 7 \ln(\sqrt{2} + 1))/8$.
 99. $2\pi(2\sqrt{2}-1)/3$. 100. $2\pi a \left(a + b \operatorname{sh} \frac{b}{a} - a \operatorname{ch} \frac{b}{a} \right)$. 101. 1) $\frac{64}{3} \pi a^2$;
 2) $16 \pi^2 a^2$; 3) $\frac{32}{3} \pi a^2$. 102. $128 \pi a^2/5$. 103. $\frac{15\pi}{8} (4 + \ln 5)$. 104. $59,2 \pi$.
 105. $\pi p a^2$. 106. $\pi a^3/2$. 107. $3\pi a b^2/7$. 108. $\pi^2/4$. 109. $\frac{\pi}{4} (1 - e^{-2a}(1 +$
 $+ 2a))$. 110. $\pi(2 - 5/e)$. 111. $\frac{\pi^3}{2}$. 112. $\frac{\pi^3 \operatorname{sh} a}{2a(\pi^2 + a^2)} e^{(2\pi-1)a}$. 113. $4/3 \pi a b^2$.
 114. $(2\pi b^2/3a^2)\pi(\pi^2 + 3a^2)$. 115. 4π . 116. $\pi^2(4\pi^2 - 15)/24$. 117. $\frac{12\pi p q}{5} \sqrt{p q^2}$.
 118. $\pi/(5(1 - e^{-2\pi}))$. 119. $4\pi(2 + 9 \ln 3)$. 120. $\frac{\pi^3}{2} + \frac{3\pi^2}{8}$. 121. $5\pi^2 a^3$.
 122. $\frac{32}{105} \pi a b^2$. 123. $\pi a^3(6 \ln 2 - 4)/3$. 124. $(26/\sqrt{2} + 16) \pi a^3/105$. 125.
 $8\pi a^2(3 \ln 2 - 2)/3$. 126. $(\pi a^2/24)(24 \ln 4 - 1)$.

X I Б о б

1. $3/2$. 2. 1. 3. $1/4$. 4. $1/18$. 5. $1/60$. 6. $5/36$. 7. $-1/36$. 8. $-\ln 3$.
9. $\ln 2/3$. 10. $3/4$. 11. $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$. 12. 1. 13. $1/2 \sin 2$. 14. $\pi/4$. 15. $1/8$.
25. Яқинлашувчи. 26. Яқинлашувчи. 27. Узоқлашувчи. 28. Яқинлашувчи.
29. Узоқлашувчи. 30. Яқинлашувчи. 31. Яқинлашувчи. 32. Яқинлашувчи.
33. Узоқлашувчи. 34. Яқинлашувчи. 35. Яқинлашувчи. 37. Яқинлашувчи.
38. Яқинлашувчи. 39. Яқинлашувчи. 40. $0 < a < 1$ да яқинлашувчи, $a \geq 1$ да узоқлашувчи.
41. Узоқлашувчи. 42. Яқинлашувчи. 43. Яқинлашувчи.
44. Яқинлашувчи. 45. Яқинлашувчи. 46. Яқинлашувчи. 47. $a < e$ да яқинлашувчи, $a > e$ да узоқлашувчи.
48. Узоқлашувчи. 49. Узоқлашувчи.
50. Яқинлашувчи. 51. Узоқлашувчи. 52. Яқинлашувчи. 53. $\frac{p}{2} + q > 1$ да яқинлашувчи.
54. $p > 3/2$ да яқинлашувчи. 55. Узоқлашувчи. 56. Узоқлашувчи.
57. Яқинлашувчи. 58. $q > p$ да яқинлашувчи. 59. $\alpha(q-p) > 1$ да яқинлашувчи.
60. $p > 1$ да яқинлашувчи. 61. $\forall q, p > 1$ да яқинлашувчи, $p=1, q > 1$ да яқинлашувчи.
62. $\alpha > \frac{1}{2}$ да яқинлашувчи.
63. Узоқлашувчи. 64. Узоқлашувчи. 65. Яқинлашувчи. 66. Яқинлашувчи.
67. Яқинлашувчи. 68. $\alpha < -1$ да яқинлашувчи. 69. Яқинлашувчи.
70. Узоқлашувчи. 71. Яқинлашувчи. 72. Яқинлашувчи. 73. Яқинлашувчи.
74. Яқинлашувчи. 75. Узоқлашувчи. 76. $\alpha > 2$ да яқинлашувчи, $\alpha \leq 2$ да узоқлашувчи.
77. Узоқлашувчи. 78. Яқинлашувчи. 79. Яқинлашувчи.
80. Яқинлашувчи. 81. Яқинлашувчи. 82. Яқинлашувчи. 111. Яқин-

лашувчи. 112. Яқинлашувчи. 113. Яқинлашувчи. 114. Узоқлашувчи. 115. Яқинлашувчи. 116. Яқинлашувчи. 117. Яқинлашувчи. 118. Яқинлашувчи. 119. Яқинлашувчи. 120. Яқинлашувчи. 121. Узоқлашувчи. 122. Яқинлашувчи. 123. Яқинлашувчи. 124. Яқинлашувчи. 125. Узоқлашувчи. 126. Узоқлашувчи. 127. Яқинлашувчи. 128. $p > 1$ да абсолют яқинлашувчи, $0 < p \leq 1$ да шартли яқинлашувчи. 129. $p > 1$ да абсолют яқинлашувчи, $0 < p \leq 1$ да шартли яқинлашувчи. 130. $p > 1$ да абсолют яқинлашувчи, $\frac{1}{2} < p \leq 1$ да шартли яқинлашувчи. 131. $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$ да абсолют яқинлашувчи. $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ да шартли яқинлашувчи. 132. $p > 1$ да абсолют яқинлашувчи, $\frac{1}{2} < p \leq 1$ да шартли яқинлашувчи. 133. Шартли яқинлашувчи. 134. Абсолют яқинлашувчи. 135. Узоқлашувчи. 136. $p > 2$ да абсолют яқинлашувчи, $0 < p \leq 2$ да шартли яқинлашувчи. 137. Шартли яқинлашувчи.

АДАБИЁТЛАР

1. Азларов Т. А., Мансуров Х. Математик анализ, 1-қисм,—Т., «Ўқитувчи», 1986.

2. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.—М.: Наука, 1977 ва бошқа йиллардаги нашрлари.

3. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. Л. Д. Кудрявцев таҳрири остида.—М.: Наука, 1984.

4. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Интегралы, Ряды. Л. Д. Кудрявцев таҳрири остида.—М., Наука, 1986.

5. Ю. С. Богданов, О. А. Кастрица. Начала анализа в задачах и упражнениях. Минск. Высшая школа. 1988.

6. Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И. Задачи по математике. Начала анализа.—М.: Наука, 1990.

лашувчи. 112. Яқинлашувчи. 113. Яқинлашувчи. 114. Узоқлашувчи. 115. Яқинлашувчи. 116. Яқинлашувчи. 117. Яқинлашувчи. 118. Яқинлашувчи. 119. Яқинлашувчи. 120. Яқинлашувчи. 121. Узоқлашувчи. 122. Яқинлашувчи. 123. Яқинлашувчи. 124. Яқинлашувчи. 125. Узоқлашувчи. 126. Узоқлашувчи. 127. Яқинлашувчи. 128. $p > 1$ да абсолют яқинлашувчи, $0 < p \leq 1$ да шартли яқинлашувчи. 129. $p > 1$ да абсолют яқинлашувчи, $0 < p \leq 1$ да шартли яқинлашувчи. 130. $p > 1$ да абсолют яқинлашувчи, $\frac{1}{2} < p \leq 1$ да шартли яқинлашувчи. 131. $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$ да абсолют яқинлашувчи. $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ да шартли яқинлашувчи. 132. $p > 1$ да абсолют яқинлашувчи, $\frac{1}{2} < p \leq 1$ да шартли яқинлашувчи. 133. Шартли яқинлашувчи. 134. Абсолют яқинлашувчи. 135. Узоқлашувчи. 136. $p > 2$ да абсолют яқинлашувчи, $0 < p \leq 2$ да шартли яқинлашувчи. 137. Шартли яқинлашувчи.

АДАБИЁТЛАР

1. Азларов Т. А., Мансуров Х. Математик анализ, 1-қисм.—Т., «Ўқитувчи», 1986.
2. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.—М.: Наука, 1977 ва бошқа йиллардаги нашрлари.
3. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. Л. Д. Кудрявцев таҳрири остида.—М.: Наука, 1984.
4. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Интегралы. Ряды. Л. Д. Кудрявцев таҳрири остида.—М., Наука, 1986.
5. Ю. С. Богданов, О. А. Кастрица. Начала анализа в задачах и упражнениях. Минск. Высшая школа. 1988.
6. Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И. Задачи по математике. Начала анализа.—М.: Наука, 1990.

М У Н Д А Р И Ж А

Сўз боши	3
I боб. Дастлабки тушунчалар	
1-§. Тўплам. Тўпламлар устида амаллар	5
2-§. Ҳақиқий сонлар	7
3-§. Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати	9
4-§. Сонли тўпламларнинг чегаралари	9
II боб. Сонлар кетма-кетлиги ва унинг limiti	
1-§. Сонлар кетма-кетлиги тушунчаси	12
2-§. Сонлар кетма-кетлигининг limiti	20
3-§. Limitга эга бўлган кетма-кетликлар ҳақида теоремалар	23
4-§. Кетма-кетликнинг қуйи ва юқори limitлари	30
III боб. Функция ва унинг limiti	
1-§. Функция тушунчаси	35
2-§. Функция limiti	48
IV боб. Функциянинг узлуксизлиги ва текис узлуксизлиги	
1-§. Функциянинг узлуксизлиги	60
2-§. Функциянинг текис узлуксизлиги	71
V боб. Функциянинг ҳосила ва дифференциаллари	
1-§. Функциянинг ҳосиласи	78
2-§. Функциянинг дифференциали	98
3-§. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар	105
VI боб. Дифференциал ҳисобнинг асосий теоремалари	
1-§. Теоремалар	115
2-§. Тейлор формуласи	123
VII боб. Дифференциал ҳисобнинг баъзи татбиқлари	
1-§. Функциянинг ўсувчилиги ҳамда камаювчилиги	131
2-§. Функциянинг экстремумлари	136
3-§. Функция графигининг қавариқлиги ва ботиқлиги. Функция асимптоталари	141
4-§. Функцияларни тўлиқ текшириш ва графикларини чизиш	145
5-§. Аниқмасликларни очиш. (Лопиталь қондалари)	149

VIII боб. Аниқмас интеграллар	
1-§. Аниқмас интеграл тушунчаси	156
2-§. Интеграллаш усуллари	159
3-§. Рационал функцияларни интеграллаш	165
4-§. Баъзи иррационал функцияларни интеграллаш	170
5-§. Тригонометрик функцияларни интеграллаш	180
6-§. Турли хилдаги интегралларни ҳисоблаш	185
IX боб. Аниқ интеграл	
1-§. Аниқ интеграл таърифлари	192
2-§. Аниқ интегралнинг мавжудлиги. Интегралланувчи функциялар синфи	198
3-§. Аниқ интегралнинг хоссалари	202
4-§. Аниқ интегрални ҳисоблаш	206
X боб. Аниқ интегралнинг баъзи бир татбиқлари	
1-§. Ёй узунлигини ҳисоблаш	226
2-§. Текис шаклнинг юзи	231
3-§. Айланма сиртнинг юзи	241
4-§. Айланма жисмнинг ҳажми	242
5-§. Аниқ интегралнинг механик масалаларга татбиқи	247
XI боб. Сонли қаторлар	
1-§. Асосий тушунчалар. Содда теоремалар	251
2-§. Мусбат ҳадли қаторлар. Солиштириш теоремалари	259
3-§. Мусбат қаторлар учун яқинлашувчилик аломатлари	268
4-§. Ихтиёрий ҳадли қаторлар. Коши теоремаси. Абсолют ва шартли яқинлашувчи қаторлар	278
Жавоблар ва кўрсатмалар	286
I боб.	286
II боб.	286
III боб.	288
IV боб.	290
V боб.	290
VI боб.	294
VII боб.	296
VIII боб.	303
IX боб.	310
X боб.	311
XI боб.	313
Адабиётлар	315

На узбекском языке

*Азимбой Саъдуллаев, Ҳожиакбар Мансуров,
Гулмирза Худойбергандов, Азизжон Ворисов, Рустам Ғуломов*

**СБОРНИК ПРИМЕРОВ И ЗАДАЧ ПО КУРСУ
«МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА»**

I

Учебное пособие для студентов университетов

Издательство «Ўзбекистон»—1993, 700129, Ташкент, Навоий, 30

Мухаррир И. Аҳмаджонов
Муқова расмони Д. Собирова
Бадвий муҳаррир И. Кучанкова
Техн. муҳаррир А. Бахтияров
Мусахҳиҳ М. Раҳимбекова

Теринга берилди 17.11.92. Босишга рухсат этилди 16.09.93. Формати 84×108/64.
Босма қоғозиға «Литературная» гарнитурода юқори босма усулида босилди.
Шартли б. т. 16.8. Напр т. 17.06. Нусхаси 15000. Буюртма № 438. Баҳоси
шартнома асосида

«Ўзбекистон» нашриёти. 700129. Тошкент, Навоий, 30. Шартнома № 126—92.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитаси ижарадаги Тошкент матбаа
компаниясида босилди. 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30.

Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами: Ун-тлар талабалари учун ўқув қўлл.
/А. Саъдуллаев, Х. Мансуров, Т. Худойберганов
ва бошқ./ I К.— Т.: Ўзбекистон, 1993—317 б.

ISBN 5-640-01328-1

Қўлланма университетлар ҳамда педагогика институтлари, шунингдек, олий техника ўқув юр்தларининг олий математика чуқур дастур асосида ўқитиладиган факультетлари талабалари учун мўлжалланган.

Қўлланма математик анализга кириш, дифференциал ва интеграл ҳисоб мавзуларини ўз ичига олади. Қўлланмада 1500 дан зиёд мисол ва масалалар келтирилган бўлиб, уларнинг аксарияти батафсил ечим билан таъминланган.

I. Саъдуллаев А. ва бошқ.

Сборник примеров и задач по курсу «Математического анализа». Учебное пособие для студ. ун-тов.

ББК 22.161я73

№ 500—93

Навойи номли
Ўзбекистон Республикаси
давлат кутубхонаси.

С 1602070000—78 93
М 351 (04) 93