ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

НАМАНГАН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

АМАЛИЙ МАТЕМАТИКА КАФЕДРАСИ

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

курси бўйича амалий машғулотлар учун услубий кўрсатма

НАМАНГАН-2016

Ушбу услубий кўрсатма дифференциал тенгламалар фани ўқитиладиган барча мутахасисликларнинг 1-курсларига мўлжаллаб тузилган.

Услубий кўрсатмада дифференциал тенгламаларнинг асосий тушунчалари намунавий масалалар ечиш ёрдамида кўрсатиб берилган.

Талабаларга амалий машғулотларда ва мустақил ишлашлари учун хар ҳил масалалар келтирилган.

Услубий кўрсатма кафедра мажлисида кўрилди ва маъқулланди (баённома №11 24.05.2016 й.)

Тузувчилар:

Доцент Б.Саматов
катта ўқит. Умаров Э.

Тақризчи: доц. Имомов А.

I-боб. Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар

Ноъмалум функция ҳосила ёки дифференциал белгиси остида қатнашган тенгламалар дифференциал тенгламалар дейилади. Ҳосиланинг энг юқори тартиби дифференциал тенглама тартиби дейилади. n-тартибли дифференциал тенглама

$$F(x, y, y^I, y^{II}, ..., y^{(n)}) = 0$$

тенглама билан берилиши мумкин.

Бу тенгламани айниятга айлантирувчи $y = \varphi(x)$ функция дифференциал тенглама ечими дейилади. Таркибида n та ўзгармас қатнашувчи $\Phi(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0$ функциялар оиласи дифференциал тенгламани қаноатлантирса, умумий ечим дейилади. Ўзгармасларнинг маълум бир қийматида хусусий ечимлар юзага келади. Маълум шартларда ечимни топиш Коши масаласи дейилади.

ξ1. Биринчи тартибли содда дифференциал тенгламалар

Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$ кўринишга эга. Бу тенгламани кўп ҳолларда $\frac{dy}{dx}$ га нисбатан ечиб $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ кўринишга келтирилади.

$\frac{dy}{dx} = f(x)$ кўринишдаги тенгламани $dy = f(x)dx$ кўринишда ёзиб, томонларни интегралласак $y = \int f(x)dx + c$ умумий ечим келиб чиқади.

Шунга ўхшаш $\frac{dy}{dx} = g(y)$ тенгламанинг умумий ечими $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{g(y)}$ дан $x(y) = \int \frac{dy}{g(y)} + c$ ёки $\int \frac{dy}{g(y)} = x + c$ кўринишда бўлади.

1.1. Ечими $x^2 + cy^2 = 2y$ бўлган дифференциал тенгламани тузинг.

Иккала томондан ҳосила оламиз:

$$2x + 2c \cdot y \cdot y^I = 2y^I$$

Бундан, $c = \frac{y^I - x}{yy^I}$. Берилган тенгламага қўйиб $x^2 + \frac{y^I - x}{yy^I} \cdot y^2 = 2y$ ни ҳосил қиламиз.

Соддалаштириб $x^2 y^I - xy = yy^I$ тенгламани ҳосил қиламиз.

1.2. $y = Cx^3$ функция $3y - xy^I = 0$ дифференциал тенглама ечими эканлигини текширинг ва P(1;1) нуқтадан ўтувчи хусусий ечимини топинг.

$y = Cx^3$ функциядан ҳосила олиб $y^I = 3Cx^2$ дифференциал тенгламага қўйсак, $3Cx^3 - x \cdot 3Cx^2 = 0$ айният ҳосил бўлади. Демак, $y = Cx^3$ умумий ечим экан. $x=y=1$ эканлигидан $C=1$, яъни $y=x^3$ функция $P(1;1)$ нуқтадан ўтувчи хусусий ечимдир.

1.3. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$, $x\in R$ тенгламанинг умумий ечимини, $y(1)=\pi$ шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

$dy=\frac{dx}{1+x^2}$ дан $y=arctgx+c$ умумий ечим. $x=1$ да $y=\pi$ эканлигидан $\pi=arctg1+c$, яъни $c=\frac{3\pi}{4}$.

Коши масаласи ечими $y=arctgx+\frac{3\pi}{4}$ дир.

1.4. Қуйидаги умумий ечимларга мос дифференциал тенгламаларни тузинг.

1. $y=e^{Cx}$
2. $y=(x-e)^3$
3. $y=Cx^3$
4. $y=\sin(x+C)$
5. $y^2+Cx=x^3$
6. $y=C(x-C)^2$
7. $Cy=\sin Cx$

1.5. Қуйидаги дифференциал тенгламалар ечилсин.

1. $y^I=3x^2$
2. $y^I=\cos x$
3. $y^I=3e^{3x}$
4. $y^I=y$
5. $y^I=\sin y$
6. $y^I=e^y$

1.6. Коши масаласиuÞyu ечимини топинг.

$$y^I=\sin x, \qquad y(0)=1$$

ξ2. Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламалар

$y^I=f(x)\cdot g(y)$ ёки $M(x)\cdot N(y)dx+P(x)\cdot Q(y)dy=0$ кўринишда ёзиладиган дифференциал тенгламалар ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламалар дейилади. Бундай тенгламаларни ечиш учун иккала томонни шундай ифодаларга бўлиш (кўпайтириш) керакки, натижада тенгламанинг бир томонида фақат y га, иккинчи томонида фақат x га боғлиқ ифодалар ҳосил бўлсин.

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx \qquad \text{ёки} \qquad \frac{Q(y)}{N(y)}dy=-\frac{M(x)}{P(x)}dx$$

Сўнгра иккала томонни интеграллаб умумий ечим ҳосил қилинади.

Иккала томон x,y қатнашган ифодаларга бўлинганда, бу ифодаларни нолга айлантирадиган хусусий ечимлар йўқолиши мумкин.

$y^I = f(ax+by+c)$ кўринишдаги дифференциал тенгламалар,

$z = ax+by+c$ янги ўзгарувчи киритиш ёрдамида ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламаларга келтирилади.

2.1. $xydx+(x+1)dy=0$ тенгламани ечинг.

$(x+1)dy=-xydx$ кўринишда ёзиб олиб, иккала томонни $y\cdot(x+1)$ га бўламиз. Бунда тенгламани қаноатлантирувчи $y=0,\quad x=-1$ ечимлар борлигини ёдда тутамиз.

Тенглама $\frac{dy}{y}=-\frac{x}{x+1}dx$ кўринишга келади. Иккала томонни интеграллаймиз:

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{x}{x+1}dx$$

$\ln|y|=-x+\ln|x+1|+\ln C$ яъни $y=C\cdot(x+1)\cdot e^{-x}$ умумий ечимдир.

2.2. $y^I\cdot ctgx+y=2$ тенгламанинг $y(\frac{\pi}{3})=0$ шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

$\frac{dy}{dx}\cdot ctgx=2-y$ кўринишда ёзиб, $\frac{dy}{2-y}=tgxdx$ кўринишга келтирамиз. Иккала томонни интеграллаб $-\ln|2-y|=-\ln|\cos x|-\ln C$ ёки $-2+y=C\cdot\cos x$ ечимга эга бўламиз.

Демак, $y=2+C\cdot\cos x$ умумий ечимдир.

Энди бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимни топамиз. $y(\frac{\pi}{3})=0$ дан $0=2+C\cdot\cos\frac{\pi}{3}$, яъни $0=2+C\cdot\frac{1}{2}$, $C=-4$.

Изланаётган ечим $y=2-4Cosx$ бўлади.

2.3. $y^I=y+2x-3$ тенгламани ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламага келтиринг ва ечинг.

$z=y+2x-3$ кўринишда янги ўзгарувчи киритамиз.

$y=z-2x+3$ дан $y^I=z^I-2$

$z^I-2=z$ кўринишдаги тенгламага эга бўламиз.

$\frac{dz}{z+2}=dx$ дан

$\ln|z+2|=x+\ln C$ ёки $z+2=C\cdot e^x$ келиб чиқади.

Эски ўзгарувчиларга қайтиб $y=C\cdot e^x-2x+1$ эканлигини топамиз.

2.4. Қуйидаги дифференциал тенгламаларни ечинг.

1. $xy^I-y=0$
2. $xy^I+y=0$
3. $yy^I+x=0$
4. $y^I=y$
5. $x^2y^I+y=0$
6. $x+xy+y^I(y+xy)=0$

7. $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$ 8. $2x^2yy^I + y^2 = 0$

9. $y^I - xy^2 = 2xy$ 10. $y^I = e^{x+y}$

2.5. Берилган бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимларни топинг.

1. $2y^I\sqrt{x} = y;$ $y(4) = 1$
2. $y^I = (2y+1)ctgx;$ $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$
3. $x^2y^I + y^2 = 0;$ $y(-1) = 1$
4. $y^I = 2\sqrt{y}\ln x;$ $y(e) = 1$
5. $(x^2-1)y^I + 2xy^2 = 0;$ $y(0) = 1$
6. $xy^I + y = y^2;$ $y(1) = \frac{1}{2}$

2.6. Янги ўзгарувчи киритиб ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламага келтиринг ва ечинг.

1. $y^I = \sqrt{4x+2y-1}$
2. $y^I = \cos(y-1)$
3. $(x+2y)y^I = 1;$ $y(0) = -1$
4. $(2x-y+1)y^I = 1$

ξ3. Бир жинсли дифференциал тенгламалар

$M(x,y)dx + N(x,y)dx = 0$ тенгламада $M(\lambda x;\lambda y),$ $N(\lambda x;\lambda y)$ алмаштиришлар бажарганимизда тенглама кўриниши ўзгармаса, бундай тенглама бир жинсли дейилади. Бундай тенгламалар $\frac{dy}{dx} = \varphi(\frac{y}{x})$ кўринишга келади ва $\frac{y}{x} = u$ ёки $y = ux$ янги ўзгарувчи киритиш ёрдамида ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламага келтирилади.

$y^I = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right)$ кўринишдаги дифференциал тенгламалар кооринаталар бошини $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ ва $a\ x+by+c = 0$ тўғри чизиқлар кесишиш нуқтасига параллел кўчириш ёрдамида бир жинслига келтирилади. Агар бу тўғри чизиқлар кесишмаса, $a_1x+b_1y = k(ax+by)$

бажарилиб, $z = ax + by$ алмаштириш ёрдамида ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламага келади.

Баъзи тенгламаларда $y = z^m$ алмаштириш ёрдамида бир жинслига келтириб олинади. Бунинг учун m сонини дифференциал тенглама бир жинсли бўладиган қилиб танлаб олинади. Бундай m сони мавжуд бўлмаса, бу усул билан тенгламани бир жинслига келтириб бўлмайди.

3.1. $(x + 2y)dx - xdy = 0$ тенгламани ечинг.

$\lambda \neq 0$ учун $(\lambda x + 2\lambda y)dx - \lambda x dy = 0$ тенглама берилган тенгламанинг айнан ўзи, демак, тенглама бир жинсли $y = u \cdot x$ алмаштириш бажарамиз.

$y^I = u^I x + u, \quad dy = xdu + udx$ эканлигидан

$(x + 2 \cdot ux)dx - x \cdot (xdu + udx) = 0$

$x \cdot [(1 + 2u)dx - (xdu + udx)] = 0$ да $x = 0$ хусусий ечим бўлади. Қавс ичини ихчамлаб

$$(1 + u)dx = xdu$$

$$\int \frac{du}{1 + u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|1 + u| = \ln x + \ln C$$

$1 + u = C \cdot x$ га эга бўламиз.

$\frac{y}{x} = Cx - 1$ дан $y = x \cdot (Cx - 1)$ умумий ечим келиб чиқади.

3.2. $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$ тенгламани бир жинслига келтиринг ва ечинг.

$2x - 4y + 6 = 0$ ва $x + y - 3 = 0$ тўғри чизиқлар кесишиш нуқтаси P(1;2)дир. Демак, $X = x - 1, \quad Y = y - 2$ алмаштиришлар ўтказамиз.

$$[2(X + 1) - 4(Y + 2) + 6]dx + [(X + 1 + Y + 2 - 3)]dy = 0$$

$$(2X - 4Y)dX + (X + Y)dY = 0$$

ҳосил бўлган тенглама бир жинслидир.

$$(2x - 4 \cdot u \cdot x)dx + (x + u \cdot x)[udx + xdu] = 0$$

$x = 0,$ яъни $x - 1 = 0$ хусусий ечим бўлиши мумкин.

$$(2 - 4u)dx + (1 + u)(udx + xdu) = 0$$

$$\frac{1 + u}{(u - 1)(u - 2)} du = -\frac{dx}{x}$$

$$-\int \frac{2}{u - 1} du + \int \frac{3}{u - 2} du = -\int \frac{dx}{x}$$

$$-2\ln|u - 1| + 3\ln|u - 2| = -\ln x + \ln C$$

$$3\ln|u - 2| + \ln x = 2\ln|u - 1| + \ln C$$

$$(u - 2)^3 \cdot X = C(u - 1)^2$$

$u = \frac{Y}{X} = \frac{y - 2}{x - 1}$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$\left(\frac{y-2}{x-1}-2\right)^3\cdot(x-1)=C\left(\frac{y-2}{x-1}-1\right)^2$$

$(y-2x)^3(x-1)=C(y-x-1)^2$ умумий ечимдир.

3.3. $x^3(y^I-x)=y^2$ тенгламани бир жинслига келтиринг.

$y=z^m,\quad y^I=mz^{m-1}\cdot z^I$ алмаштириш ўтказамиз.

$x^3(mz^{m-1}\cdot z^I-x)=z^{2m}$

Бу тенглама бир жинсли бўлиши учун

$3+m-1=4=2m$ тенгликлар бажарилиши, яъни $m=2$ бўлиши зарур.

Унда тенглама $x^3(2\cdot z\cdot z^I-x)=z^4$ кўринишдаги бир жинсли дифференциал тенгламага айланади.

3.4. Бир жинсли эканлигини текширинг ва ечинг.

1. $yy^I=2y-x$
2. $x^2+y^2-2xyy^I=0$
3. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$
4. $xy^I+2\sqrt{xy}=y$
5. $(x-y)dx+(x+y)dy=0$
6. $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$
7. $xy^I=y-x\cdot e^{\frac{y}{x}}$
8. $xy^I=y\cos Ln\frac{y}{x}$

3.5. Параллел кўчириш ёрдамида бир жинслига келтиринг ва ечинг.

1. $(2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy=0$
2. $(x+4y)y^I=2x+3y-5$
3. $(y+2)dx=(2x+y-4)dy$
4. $y^I=2\left(\frac{x+2}{x+y-1}\right)^2$
5. $(y^I+1)\ln\frac{y+x}{x+3}=\frac{y+x}{x+3}$

3.6. Янги ўзгарувчи киритиб бир жинслига келтиринг ва ечинг.

1. $2x^2y^I=y^3+xy$
2. $2xdy+(x^2y^4+1)ydx=0$
3. $ydx+x(2xy+1)dy=0$
4. $2y^I+x=4\sqrt{y}$
5. $y^1=y^2-\frac{2}{x^2}$
6. $2y+(x^2\cdot y+1)xy^I=0$

ξ4. Биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар

Ноъмалум функция ва унинг ҳосилалари биринчи даражада қатнашган дифференциал тенгламалар чизиқли дейилади.

Биринчи тартибли чизиқли тенглама $y^I + P(x)y = Q(x)$ кўринишда бўлади. Бундай тенгламани $y = u \cdot v$ алмаштириш ёрдамида ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламага келтириш мумкин. Ўзгармас сонни вариациялаш деб аталувчи иккинчи усулда бундай тенгламани ечиш учун дастлаб $y^I + P(x)y = 0$ тенглама умумий ечими олинади, ундаги ўзгармас С сони С(х) функция билан ўзгартирилади, берилган тенгламага қўйилиб ва С(х) функция топилади.

Бу хусусий ечим ва бир жинсли тенглама умумий ечими йиғиндиси берилган тенглама ечими ҳисобланади.

$y^I + P(x)y = Q(x) \cdot y^n \quad (n \neq 1)$ кўринишдаги тенглама Бернулли тенгламаси дейилади. Бу тенгламанинг иккала томони y^n га бўлиниб

$\frac{1}{y^{n-1}} = z$ алмаштириш ўтказилса, чизиқли тенгламага эга бўламиз.

$y^I + P(x)y + Q(x) \cdot y^2 = R(x)$ кўринишдаги тенглама Риккати тенгламаси дейилади. Бундай тенгламанинг бирор хусусий $y_0(x)$ ечими маълум бўлсагина, $y = y_0(x) + z$ алмаштириш ёрдамида Бернулли тенгламасига келтириш мумкин.

4.1. $y^I - \frac{2}{x} \cdot y = 2x^3$ чизиқли дифференциал тенгламани ечинг.

$y^I - \frac{2}{x} \cdot y = 0$ тенгламанинг умумий ечими $y = Cx^2$.

$y = C(x) \cdot x^2$ деб оламиз ва берилган тенгламага қўямиз

$$C^I(x) \cdot x^2 + 2x \cdot C(x) - \frac{2}{x} \cdot C(x)x^2 = 2x^3$$

соддалаштириб $C^I(x) = 2x,$ яъни $C(x) = x^2$ эканлигини топамиз. Хусусий ечим $y = x^4$ экан. Берилган тенгламанинг умумий ечими $y = Cx^2 + x^4$ кўринишда бўлади.

4.2. $y^I - \frac{1}{x} y = \frac{x}{y^2}$ Бернулли тенгламасини ечинг.

$n = -2$ эканлигидан $z = \frac{1}{y^{-2-1}} = y^3$ алмаштириш ўтказамиз. $y = z^{\frac{1}{3}}$,

$y^I = \frac{1}{3} z^{-\frac{2}{3}} \cdot z^I$ эканлигидан $\frac{1}{3} z^{-\frac{2}{3}} \cdot z^I - \frac{1}{x} \cdot z^{\frac{1}{3}} = \frac{x}{z^{\frac{2}{3}}}$ келиб чиқади.

Томонларни $3z^{\frac{2}{3}}$ га кўпайтириб,

$z^I - \frac{3}{x} z = 3x$ чизиқли тенгламани ҳосил қиламиз.

$z^I - \frac{3}{x} z = 0$ нинг умумий ечими $z = C \cdot x^3$.

$z = C(x) \cdot x^3$ деб оламиз ва берилган тенгламага қўямиз.

$C^I = \frac{3}{x^2}$ дан $C(x) = -\frac{3}{x}$. Хусусий ечим $z = -3x^2$ кўринишда, умумий ечим эса $z = C \cdot x^3 - 3x^2$ дир. Эски ўзгарувчига қайтиб $y^3 = Cx^3 - 3x^2$

Бернулли тенгламаси ечими эканлигини топамиз.

4.3. $y^I - 2xy + y^2 = 5 - x^2$ Риккати тенгламасининг хусусий ечими $y_1 = x + 2$ маълум бўлса, умумий ечимини топинг.

$y = x + 2 + z,\ y^I = 1 + z^I$ алмаштириш бажарамиз

$1 + z^I - 2x(x + 2 + z) + (x + 2 + z)^2 = 5 - x^2$.

Соддалаштириб

$z^I + 4z = -z^2$ Бернулли тенгламасига эга бўламиз.

$\frac{1}{z^{2-1}} = t$, $z = \frac{1}{t}$, $z^I = -\frac{1}{t^2} \cdot t^I$ алмаштириш ёрдамида $t^I - 4t = 1$ чизиқли тенгламага келамиз.

$t^I - 4t = 0$ тенглама ечими $t = C \cdot e^{4x}$,

$t^I - 4t = 1$ тенглама ечими эса $t = \frac{4Ce^{4x} - 1}{4}$ эканлигини топиш мумкин.

Мос Бернулли тенгламасини ечими $z = \frac{4}{4Ce^{4x} - 1}$ кўринишда, Риккати тенгламаси умумий ечими эса $y = x + 2 + \frac{4}{4Ce^{4x} - 1}$ кўринишда бўлади.

4.4. Чизиқли тенгламаларни ечинг.

1. $y^I - \frac{3y}{x} = x$
2. $(2x + 1)y^I = 4x + 2y$
3. $y^I + ytgx = \frac{1}{\cos x}$
4. $(xy + e^x)dx - xdy = 0$
5. $2x(x^2 + y)dx = dy$
6. $x^2 \cdot y^I + (x + 1)y = 3x^2 \cdot e^{-x}$

4.5. Изланаётган функция ва боғлиқсиз ўзгарувчи «ролларини» алмаштиринг, ҳосил бўлган тенгламаларни ечинг.

1. $y = (2x + y^3) \cdot y^I$
2. $(x + y^2)dy = ydx$
3. $(2 \cdot e^y - x)y^I = 1$
4. $(\sin^2 y + xctgy) \cdot y^I = 1$

4.6. Бернулли тенгламаларини ечинг.

1. $x^2 y^I - xy = y^2$ 2. $y^I - xy = -y^3 \cdot e^{-x^2}$

3. $y^I x + y = -xy^2$ 4. $xydy = (y^2 + x)dx$

5. $xy^I + 2y + x^5 y^3 \cdot e^x = 0$ 6. $y^I x^3 \sin y = xy^I - 2y.$

4.7. Хусусий ечими берилган Риккати тенгламаларини ечинг.

1. $x^2 y^I + xy + x^2 y^2 = 4$ $\quad y_0 = \dfrac{2}{x}$

2. $3y^I + y^2 + \dfrac{2}{x^3} = 0$ $\quad y_0 = \dfrac{1}{x}$

3. $xy^I - (2x+1)y + y^2 = -x^2$ $\quad y_0 = x$

4. $y^I + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$ $\quad y_0 = e^x$

ξ5. Тўла дифференциал тенгламалар

$P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0$ тенглама чап томони бирор $F(x;y)$ функциянинг тўла дифференциали бўлса, бу тенглама тўла дифференциал тенглама дейилади.

Масалан, $xdy + ydx = 0$ ва $\dfrac{xdy - ydx}{x^2} = 0$ тенгламалар чап томони мос равишда $F(x;y) = x \cdot y$ ва $F(x;y) = \dfrac{y}{x}$ функцияларнинг тўла дифференциали бўлиб, умумий ечимлари $x \cdot y = C$ ва $\dfrac{y}{x} = C$ кўринишда бўлади.

$P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0$ тенглама чап томони тўла дифференциал бўлиши учун $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ шарт бажарилиши зарур. Бу шарт бажарилса, $dF = F_x^I dx + F_y^I dy = Pdx + Qdy = 0$ дан $F_x^I = P$, $F_y^I = Q$ келиб чиқади.

$F = \int P(x;y)dx + \varphi(y)$ десак, (ўзгармас сон ўрнига $\varphi(y)$ оламиз.)

$F_y^I = \left(\int P(x;y)dx\right)_y^I + \varphi_y^I(y) = Q(x;y)$ дан $\varphi(y)$, яъни $F(x;y)$ топилади.

Агар $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ бўлса, баъзи ҳолларда шундай $\mu Pdx + \mu Qdy = 0$ тенглама тўла дифференциал тенглама бўлади. Бу кўпайтувчи интегралловчи кўпайтувчи дейилиб, қуйидаги ҳолларда осон топилади:

1) $\dfrac{P_y^I - Q_x^I}{Q} = \phi(x)$ бўлса, $\ln \mu = \int \phi(x)dx$.

2) $\dfrac{Q_x^I - P_y^I}{P} = \phi_1(y)$ бўлса, $\ln \mu = \int \phi_1(y)dy.$

Дастлабки параграфлардаги дифференциал тенгламаларнинг ҳар бири тўла ёки тўла дифференциал тенгламага бирор интеграллловчи кўпайтувчи ёрдамида келтирилувчи тенгламалардир. Масалан, $y^I + a(x)y = b(x)$ чизиқли тенглама учун интеграллловчи кўпайтувчи

$$\mu(x) = e^{\int a(x)dx}$$

кўринишда бўлади.

5.1. $y\cos xdx + \sin xdy = \cos 2xdx$ тенгламани тўла дифференциалга келтириб ечинг.

Тенглама чап томонини $d(y\sin x)$,

ўнг томонини $d\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)$ дейиш мумкин.

Бундан $d(y\sin x - \frac{\sin 2x}{2}) = 0.$

Умумий ечим $y\sin x - \sin x\cos x = C$ ёки $y = \cos x + \frac{C}{\sin x}$ кўринишда бўлади.

5.2. $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$. Тўла дифференциал тенглама эканлигини текширинг ва ечинг.

$P = \frac{y}{x}$, $Q = y^3 + \ln x$ учун $P_y^I = Q_x^I = \frac{1}{x}.$

Демак, берилган тенглама тўла дифференциал тенгламадир.

$F_x^I = \frac{y}{x}$, $F_y^I = y^3 + \ln x$.

$F(x;y) = \int \frac{y}{x}dx + \varphi(y) = y\ln x + \varphi(y)$.

$F_y^I(x;y) = \ln x + \varphi_y^I(y) = y^3 + \ln x$ тенгликдан $\varphi_y^I(y) = y^3$, яъни $\varphi(y) = \frac{y^4}{4}$.

Демак, умумий ечим $y\ln x + \frac{y^4}{4} = C$ кўринишда бўлади.

5.3. $(x\cdot\sin y + y)dx + (x^2 \cdot\cos y + x\ln x)dy = 0$ тенглама учун интеграллловчи кўпайтувчи топинг ва ечинг.

$P_y^I = x\cos y + 1;$ $Q_x^I = 2x\cos y + \ln x + 1.$

$$\frac{P_y^I - Q_x^I}{Q} = \frac{-x\cos y - \ln x}{x^2\cos y + x\ln x} = -\frac{1}{x}.$$

$\ln\mu = \int(-\frac{1}{x})dx = -\ln x$ дан $\mu(x) = \frac{1}{x}.$

Демак, $(\sin y+\frac{y}{x})dx+(x\cos y+\ln x)dy=0$ тенглама тўла дифференциал тенглама бўлади. Ҳақиқатан, ҳосил бўлган тенглама учун $P_y^I=\cos y+\frac{1}{x}=Q_x^I$

$F_x^I=\sin y+\frac{y}{x}$; $F_y^I=x\cos y+\ln x$.

$F(x;y)=\int(\sin y+\frac{y}{x})dx=x\sin y+y\ln x+\varphi(y)$

$F_y^I(x,y)=x\cos y+\ln x+\varphi_y^I(y)=x\cos y+\ln x$

Бундан. $\varphi_y^I(y)=0,\ \varphi=C.$

Демак, умумий ечим $x\sin y+y\ln x=C_1$ кўринишда бўлади.

5.4. Тўла дифференциал тенгламага келтириб ечинг.

1. $x^2dy+xydy=dx$
2. $y^2xdy-y^3dx=x^2dy$
3. $ydx+(x-y^3)dy=0$
4. $ydx-(x-y^3)dy=0$
5. $x^2y^2+1+x^3yy^I=0$
6. $xdy-ydx=x^2dx$
7. $xy^I+tgy=\frac{2x}{\cos y}$
8. $y(y\cdot e^{-\frac{x}{2}}+1)=x\cdot y^I$

5.5. Тўла дифференциал тенглама эканлигини текширинг ва ечинг.

1. $(4-\frac{y^2}{x^2})dx+\frac{2y}{x}dy=0$
2. $3x^2e^ydx+(x^3\cdot e^y-1)dy=0$
3. $e^{-y}dx+(1-xe^{-y})dy=0$
4. $2x\cos^2 ydx\_+(2y-x^2\sin 2y)dy=0$
5. $(3x^2y-4xy^2)dx+(x^3-4x^2y+12y^3)dy=0$
6. $(x\cos 2y+1)dx-x^2\sin 2ydy=0$
7. $3x^2(1+\ln y)dx=(2y-\frac{x^3}{y})dy$
8. $2x(1+\sqrt{x^2-y})dx-\sqrt{x^2-y}dy=0$

5.6. Интегралловчи кўпайтувчини топинг ва ечинг.

1. $(x^2-y)dx+xdy=0$
2. $2xtgydx+(x^2-2\sin y)dy=0$
3. $(e^{2x}-y^2)dx+ydy=0$
4. $(\sin x+e^y)dx+\cos xdy=0$

5. $(1+3x^2 \cdot \sin y)dx - xctgydy = 0$

6. $x(\ln y + 2nx - 1)dy = 2ydx$

7. $(x^2 - y)dx + x(y+1)dy = 0$

8. $y^2(ydx - 2xdy) = x^3(xdy - 2ydx)$

ξ6. Ҳосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар. Лагранж ва Клеро тенгламалари

Ҳосилага нисбатан ечилмаган $F(x, y, y^I) = 0$ тенглама асосан $y^I = \frac{dy}{dx} = p$ параметр киритиш усули билан ечилади. Тенгламани $y = f(x, p)$ кўринишда ёзиб, иккала томондан тўлиқ дифференциал оламиз.

$dy = pdx$ эканлигидан

$M(x, p)dx + N(x, p)dp = 0$ кўринишдаги тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенглама ечими $x = \varphi(p)$ бўлса, берилган тенглама ечими $y = f(\varphi(p), p)$ бўлади.

Дифференциал тенглама $x = f(y, y^I)$ кўринишга келса ҳам, шу усулда умумий ечимдан ташқари махсус ечимларни $F(x, y, p) = 0$, $F_p^I(x, y, p) = 0$ тенгламаларда р ни йўқотиб топиш мумкин.

$y = xf(y^I) + \varphi(y^I)$ тенглама Лагранж тенгламаси дейилиб, $y^I = p$ алмаштиришдан қуйидаги

$$p = f(p) + \left[xf^I(p) + \varphi^I(p)\right]\frac{dp}{dx}$$

х га нисбатан чизиқли тенгламани ҳосил қиламиз.

$y = px + \varphi(p)$ тенглама Клеро номи билан юритилиб, Лагранж тенгламаси хусусий ҳолидир. Бундай тенгламалар махсус ечимга ҳам эгадир.

6.1. $y(y^I)^3 + x = 1$ тенгламани ечинг.

y^I га нисбатан ечамиз: $y^I = -\sqrt[3]{\frac{x-1}{y}}$

Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама ҳосил бўлди. Унинг умумий ечими

$y^{\frac{4}{3}} + (x-1)^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}C$ кўринишда бўлади.

6.2. $(y^I)^2 + xy = y^2 + xy^I$ тенгламани y^I га нисбатан ечинг, сўнгра умумий ечимини топинг.

$(y^I)^2 - xy^I + xy - y^2 = 0$ тенглама y^I га нисбатан квадрат тенгламадир.

$(y^I)_{1,2} = \dfrac{x \pm \sqrt{x^2 - 4(xy - y^2)}}{2} = \dfrac{x \pm (x - 2xy)}{2}$ дан

а) $y^I = x - y$ (чизиқли)

б) $y^I = y$ (ўзгарувчилари ажраладиган)

Бу тенгламалар мос равишда $y = C \cdot e^{-x} + x - 1,\quad y = Ce^x$ умумий ечимларга эгадир.

6.3. $y = (y^I)^2 + 2(y^I)^3$ тенгламани параметр киритиб ечинг.

$y^I = p$ белгиси киритсак, $y = p^2 + 2p^3$ дан $p = 2p \cdot p^I + 6p^2 \cdot p^I$ Томонларни $p \neq 0$ га қисқартирсак $1 = 2p^I + 6pp^I$ ёки $x^I = 2 + 6p$. Бунда $x^I = \dfrac{dx}{dp}$. Демак, $x = 2p + 3p^2 + C,\ y = p^2 + 2p^3.$

$p = 0$ бўлган ҳолда $y^I = 0,$ яъни $y = C$ дан $y = 0$ махсус ечим бўлади.

6.4. $y = xy^I - (y^I)^2$ Клеро тенгламасини ечинг.

$y^I = p$ белгилаш киритиб, $p = x \cdot p^I + p - 2pp^I$ га эгамиз. Ундан $p^I(x - 2p) = 0$ келиб чиқади. Агар $p^I = 0$ бўлса $y^I = C$ ёки $y = Cx + C_1$, $x - 2p = 0$ дан $y^I = \dfrac{x}{2}$ ёки $4y = x^2 + 4c$ га эга бўламиз.

6.5. Тенгламаларни барча ечимларини топинг.

1. $(y^I)^2 - y^2 = 0$	2. $8(y^I)^3 = 27y$
3. $(y^I + 1)^3 = 27(x + y)^2$	4. $y^2((y^I)^2 + 1) = 1$
5. $(y^I)^2 - 4y^3 = 0$	6. $x(y^I)^2 = y$

6.6. y^I га нисбатан ечиб, сўнгра умумий ечимларини топинг.

1. $xy^I(xy^I + y) = 2y^2$	2. $x(y^I)^2 - 2yy^I + x = 0$
3. $x(y^I)^2 = y(2y^I - 1)$	4. $(y^I)^2 + x = 2y$
5. $(y^I)^2 - 2xy^I = 8x^2$	6. $(xy^I + 3y)^2 = 7x$

6.7. Янги параметр киритиб ечинг.

1. $x = (y^I)^3 + y^I$	2. $x((y^I)^2 - 1) = 2y^I$
3. $(y^I)^4 - (y^I)^2 = y^2$	4. $(y^I)^2 - (y^I)^3 = y^2$
5. $5y + (y^I)^2 = x(x + y^I)$	6. $y = 2xy^I + y^1 \cdot (y^I)^3$

6.8. Лагранж ва Клеро тенгламаларини ечинг.

1. $y = xy'^2 + y'^2$ 2. $y = 2xy' + \frac{1}{y'^2}$

3. $2y = \frac{xy'^2}{y'+2}$ 4. $y = xy' - y'^2$

5. $y = xy' - a\sqrt{1+y'^2}$ 6. $y = xy' + \frac{1}{2y'^2}$

I-боб бўйича мисоллар

I. Бир жинсли ёки унга келтирилувчи дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимларини топинг.

1. $(x^2 - y^2)y' = 2xy$ 2. $xy' = y\ln\frac{y}{x}$
3. $xy' + xe^{\frac{y}{x}} - y = 0$ 4. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$
5. $xy' + y = \sqrt{x^2 + y^2}$ 6. $xy' + y = x$
7. $y - xy' = 2(x + yy')$ 8. $xy'(\ln y - \ln) = y$
9. $y'\sqrt{x} = \sqrt{y - x} + \sqrt{x}$ 10. $x^2y' = y(x + y)$
11. $(x + y)^2 \cdot y' = xy$ 12. $xyy' = x^2 - y^2$
13. $(2x - y)y' = y - x - 1$ 14. $2y' + x = 4\sqrt{y}$
15. $(x - y + 1)y' = y - x + 3$

II. Биринчи тартибли, чизиқли ёки чизиқлига келтирилувчи дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимини топинг.

1. $y' + y = xy^3$
2. $yy' + y^2\mathrm{ctg}x = \cos x$
3. $(2x + 1)y' + y = \frac{x}{y}$
4. $x^2 \cdot y' - 2xy + y^3 = 0$
5. $xy' + y = \frac{1}{y}$
6. $xy' + y = (x + 1)y^2$
7. $(1 - x^2)y' - xy = 2x^2$

8. $3y^2y'+y^3 = x-1$

9. $(1+x^2)y'-2xy = (1+x^2)^2$

10. $y'+y-y^2 = 1-x-x^2,\ y_0 = x+1$

11. $y'+xyy^2 = -2x-3,\ y_0 = x+2$

12. $y'+4xy-4y^2 = 12x-5,\ \ y_0 = x-3$

13. $y'-3x^2y+xy^2 = 1-2x^3, \quad y_0 = x$

14. $y'-xy+4y^2 = 5x^2-1, \quad y_0 = -x$

15. $xy'-y+y^2 = x^2, \quad y_0 = x$

III. Қуйидаги тўла ёки тўлага келтирилувчи дифференциал тенгламаларни ечинг.

1. $2xydx+(x^2-y^2)dy = 0$
2. $(2-9xy^2)xdx+(4y^2-6x^3)ydy = 0$
3. $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy = 0$
4. $\dfrac{x}{y}dx+(y^3+\ln x)dy = 0$
5. $(1+y^2\sin 2x)dx-2y\cos^2 xdy = 0$
6. $3x^2(1+\ln y)dx = (2y-\dfrac{x^3}{y})dy$
7. $(1-x^2)dy-xydx = 0$
8. $3dy+ydx = 0$
9. $(2x+1)dy+ydx = 0$
10. $\cos xdy = (y+1)\sin xdx$
11. $(3+2xy)dx-x^2dy = 0$
12. $(x+1-y)dx = xdy$
13. $(2y-x)dy-ydx = 0$
14. $dy+yctgxdx = 0$
15. $xdy-ydx = 0$

IV. Ҳосилага нисбатан ечилмаган қуйидаги дифференциал тенгламаларни ечинг.

1. $y = y'^2+y'^3$ 2. $y = 2y'x+\dfrac{x^2}{2}+y'^2$

3. $y = y'x + \frac{1}{x}$

4. $y = xy' + y' + y'^2$

5. $y = xy' - (2 + y')$

6. $y = xy' + y'^2$

7. $y = 4\sqrt{y'} - xy'$

8. $y = 2xy' - 4y'^3$

9. $2y'^2 (y - xy') = 1$

10. $y'^3 = 3(xy' - y)$

11. $y = xy'^2 - 2y'^3$

12. $2xy' - y = \ln y'$

13. $xy' - y = \ln y'$

14. $xy'(y' + 2) = y$

15. $y'^2 + 4xy' - y^2 - 2x^2 y = x^4 - 4x^2$

I I -боб. Юқори тартибли дифференциал тенглама ва системалар

ξ1. Тартиби пасаядиган юқори тартибли дифференциал тенгламалар

$y^{(n)} = f(x)$ кўринишдаги дифференциал тенгламанинг кетма-кет n-марта интеграллаш ёрамида умумий ечими топилади. Ҳар бир интеграллашда биттадан ўзгармас қўшилади, натижада, умумий ечимда n та ўзгармас қатнашади.

$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$ кўринишаги, номаълум функциянинг ўзи қатнашмайдиган дифференциал тенгламалар $y^{(k)} = z$ янги ўзгарувчи киритиш ёрдамида тартиби пасаяди.

Эркин ўзгарувчи x қатнашмаган $F(y, y^{I}, y^{II}, ..., y^{(n)}) = 0$ кўринишдаги дифференциал тенгламалар $y^{I} = p(y), \quad y^{II} = pp^{I}$ алмаштиришлар ёрдамида тартиби пасаяди.

Агар тенглама функция ва унинг ҳосилаларига нисбатан бир жинсли бўлса ($(y, y^{I}, y^{II}, ..., y^{(n)})$ лар $(ky, ky^{I}, ky^{II}, ..., ky^{(n)})$ лар билан алмаштирганда тенглама ўзгармаса), $y^{I} = yz$ янги ўзгарувчи киритиш ёрдамида тартиби пасайиши мумкин.

Агар тенглама томонлари тўла дифференциаллар бўлса, интеграллаш ёрдамида тартиби пасаяди.

1.1. $y^{III} = \frac{6}{x^3}$ тенгламанинг $x = 1$ да $y = 2, \quad y^{I} = 1, \quad y^{II} = 1$ шартларга бўйсунувчи ечимини топинг.

Кетма-кет интеграллаб қуйидагиларни топамиз

$$y^{II} = -\frac{3}{x^2} + C, \quad y^{I} = \frac{x}{3} + C_1 x + C_{1,} \quad y = 3\ln x + C\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$x = 1$ да ўзгармасларни топиш учун қуйидаги системага эга бўламиз

$$\begin{cases} 1 = -3 + C \\ 1 = 3 + C + C_1 \\ 2 = \frac{C}{2} + C_1 + C_2 \end{cases}$$

Бундан эса $C = 4, \quad C_1 = -6, \quad C_2 = 6$. Хусусий ечим $y = 3\ln x + 2x^2 - 6x + 6$ кўринишида экан.

1.2. $x^2 \cdot y^{II} = y^{I^2}$ тенгламани ечинг.

$y^I = z, \; y^{II} = z^I$ алмаштириш ёрдамида $x^2 \cdot z^I = z^2$ ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламага эга бўламиз. Унинг ечими қуйидаги кўринишда бўлади $z \neq 0, \; \frac{1}{z} = \frac{1}{x} - C,$ яъни $\frac{1}{y^I} = \frac{1}{x} - C$.

Бундан $y^I = \frac{x}{1-Cx}, \; Cy \neq C^2 x + \ln|1-Cx| = C_1$ умумий ечимни топамиз. Агар $z = 0$ бўлса, $y^I = 0, \; y = C.$

1.3. $2yy^{II} - 1 = y^{I^2}$ тенгламани ечинг.

$y^I = p, \; y^{II} = pp^I$ алмаштиришлардан $2ypp^I - 1 = p^2, \; \frac{2pdp}{p^2+1} = \frac{dy}{y}$ ва $\ln\left|p^2+1\right| = \ln y + \ln C.$ Бундан $p^2 + 1 = C \cdot y,$ ёки $y^I = \pm\sqrt{Cy-1}$.

Бундан, $4(Cy-1) = C^2(x+C_2)$ умумий ечимини оламиз.

1.4. $y^I \cdot y^{III} = 2y^{II^2}$ тенглама томонларини тўла ҳосилалар кўринишида келтириб ечинг.

Томонларни $y^I \cdot y^{II}$ га бўлиб, $\frac{y^{III}}{y^{II}} = 2\frac{y^{II}}{y^I}$ ёки $(\ln y^{II})^I = (2\ln y^I)^I$ дан $y^{II} = C \cdot y^{I^2}$ га эга бўламиз. Бу тенгламани ҳам $\frac{y^{II}}{y^I} = Cy^I$ ёки $(\ln y^I)^I = (C \cdot y)^I$ кўринишда ёзиш мумкин. Демак, $\ln y^I = Cy + LnC_1$ ёки $y^I = C_1 e^{Cy}$ лардан $-\frac{1}{c}e^{-Cy} = C_1 x + C_2$ ёки $y = -\frac{1}{C}\ln|CC_2 - CC_1 x|$ келиб чиқади.

1.5. Бир жинслилигидан фойдаланиб таркибини пасайтиринг ва ечинг.
$xyy^{II} - xy^{I^2} = yy^!$

$y^I = y \cdot z; \; y^{II} = y^I \cdot z + y \cdot z^I = yz^2 + yz^I$ алмаштиришлар ўтказамиз: $xy(yz^2 + yz^I) - xy^2 \cdot z^2 = y \cdot yz. \quad y^2 \neq 0$ деб томонларни қисқартирсак, $xz^2 + xz^I - xz^2 = z$ ёки $xz^I = z$ тенглама ҳосил бўлади. Бундан $z = Cx$ ёки $y^I = C \cdot yx.$ Бу тенглама ечими эса $y = c_1 \cdot e^{\frac{1}{2}cx^2}$ кўринишда бўлади.

1.6. Тенгламаларни ечинг.

1. $y^{II} = 4\cos 2x$ 2. $y^{II} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

3. $y^{II} = \dfrac{1}{1+x^2}$ 4. $x^3 \cdot y^{II} + x^2 \cdot y^I = 1$

5. $yy^{II} + y^{I^2} = 0$ 6. $y^{II} + y^I tgx = \sin 2x$

7. $y^{II} + 2y \cdot y^{I^3} = 0$ 8. $y^{II} x \ln x = y^I$

9. $y^{II} \cdot y^3 = 1$ 10. $2yy^{II} = y^{I^2}$

11. $2yy^{II} = 1 + y^{I^2}$ 12. $y^{II} tgx = y^I + 1$

13. $xy^{II} - y^I = e^x \cdot x^2$

1.7. Тенглама томонларини тўла ҳосилага келтириб ечинг.

1. $yy^{III} + 3y^I y^{II} = 0$ 2. $yy^{II} = y^I(y^I + 1)$

3. $yy^{II} + y^{I^2} = 1$ 4. $y^{II} = xy^I + y + 1$

5. $xy^{II} + y^I = 2yy^I$ 6. $xy^{II} - y^I = x^2 \cdot yy^I$

1.8. Бир жинслилигидан фойдаланиб ечинг:

1. $yy^{II} = y^{I^2} + 15y^2 \cdot \sqrt{x}$ 2. $(x^2+1)(y^{I^2} - yy^{II}) = xyy^I$

3. $xyy^{II} + xy^{I^2} = 2yy^I$ 4. $x^2 yy^{II} = (y - xy^I)^2$

5. $x^2 yy^{II} + y^{I^2} = 0$ 6. $xyy^{II} = y^I(y + y^I)$

7. $x^2(y^{I^2} - 2yy^{II}) = y^2$

ξ2. Ўзгармас коэффициентли, чизиқли, бир жинсли дифференциал тенгламалар

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$ (1) тенгламада $y = e^{kx}$ алмаштириш ёрдамида $k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n = 0$ (2) характеристик тенгламага эга бўламиз.

1) Агар (2) тенглама ўзаро тенгмас k_1, k_2, ...k_n- ҳақиқий илдизларга эга бўлса, $e^{k_1 x}$, $e^{k_2 x}$, ... $e^{k_n x}$ функциялар (1) нинг хусусий, $y_0 = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + ... + c_n e^{k_n x}$ эса умумий ечим бўлади.

2) Агар (2) тенглама $k_1 = k_2 = ... = k_m, \quad k_{m+1}, \ ..., k_n$-ҳақиқий илдизларга эга бўлса, яқни k_1-m каррали илдиз бўлса, у ҳолда дастлабки m та илдизга мос хусусий ечимлар $e^{k_1 x}$, $xe^{k_1 x}$, $\ldots x^{m-1} \ e^{k_1 x}$, уларга мос умумий ечим эса

$y_0 = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + ... + c_n x^{n-1}) e^{k_1 x}$ кўринишда бўлади.

3) Ҳар бир қўшма комплекс $\alpha \pm \beta i$ илдизларга $(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) e^{\alpha x}$ ечим, агар бу илдизлар m-каррали бўлсалар, $y_0 = \left[(c_1 + c_2 x + ... + c_m x^{m-1}) \cos \beta x + (c_1 + c_2 x + ... + c_m x^{m-1}) \sin \beta x \right] e^{\alpha x}$ ечим мос келади.

2.1. $y^{II} - 4y^{I} + 3y = 0$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Характеристик тенглама $k^2 - 4k + 3 = 0$ бўлиб, $k_1 = 1, \ k_2 = 3$ дир. Демак, $y_0 = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$ умумий ечим.

2.2. $y^{III} - 3y^{II} + 3y^{I} - y = 0$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.
$k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$ тенглама $(k-1)^3 = 0$ га эквивалент тенгламадир. Демак, $k_{1,2,3} = 1$ ва $y_0 = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x$.

2.3. $y^{II} - 2y^{I} + 5 = 0$тенгламанинг умумий ечимини топинг.
$k^2 - 2k + 5 = 0$ характеристик тенглама $k_{1,2} = 1 \pm 2i$ илдизларга эга. Умумий ечим эса $(c_1 \cos 2x + c_2 \sin x) e^x$ кўринишда бўлади.

2.4. $y^{IV} + 8y^{II} + 16 = 0$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.
Характеристик тенглама $k^4 + 8k^2 + 16 = (k^2 + 4)^2 = 0$ кўринишда бўлиб, $k_{1,2} = 2i$, $k_{3,4} = -2i$ илдизларга эга. Умумий ечим

$y_0 = \left[(c_1 + c_2 x) \cos 2x + (c_3 + c_4 x) \sin 2x \right] e^{0x}$ кўринишда бўлади.

2.5. Берилган дифференциал тенглама характеристик тенгламаси $k_1 = 2; \ k_2 = 3; \ k_{3,4} = 4; \ k_{5,6} = -1 \pm 5i; \ k_{7,8,9,10} = 2 \pm 7i$ илдизларга эга. Умумий ечим кўринишини ёзинг.
Илдизлар барча хусусий ҳолларни ўз ичига олади. Умумий ечим эса

$$y_0 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + (c_3 + c_4 x) e^{4x} + (c_5 \cos 5x + c_6 \sin 5x) e^{-x} +$$
$$+ \left[(c_7 + c_8 x) \cos 7x + (c_9 + c_{10} x) \sin 7x \right] e^{2x}$$

2.6. Тенгламаларнинг умумий ечимларини топинг.

1. $y^{II} - 4y^{I} = 0$ 2. $y^{II} - 4y^{I} + 4y = 0$

3. $y^{II} - 4y^{I} + 13y = 0$ 4. $y^{II} - 4y^{I} = 0$

5. $y^{II} + 4y = 0$ 6. $y^{II} + 4y^{I} = 0$

7. $y^{II} + 3y^{I} - 4y = 0$ 8. $y^{II} + 2ay^{I} + a^2 y = 0$

9. $y^{III} - 5y^{II} + 8y^{I} - 4y = 0$ 10. $y^{III} - 3y^{II} + 4y = 0$

11. $y^{III} + 3ay^{II} + 3a^2 y^{I} + a^3 y = 0$ 12. $y^{IV} + 4y = 0$

13. $4y^{IV} - 3y^{II} - y = 0$ 14. $y^{IV} - 3y^{II} - 4y = 0$

15. $y^{IV} + 8y^{II} + 16y = 0$

ξ3. Ўзгармас коэфициентли, чизиқли, бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламалар

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x)$ (1) ва $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$ (2) тенгламаларни қараймиз.

Агар y_1 (1) тенглама хусусий ечими, y_0 эса (2) тенглама умумий ечими бўла, (1) тенгламанинг умумий ечими $y = y_0 + y_1$ кўринишда бўлади.

(1) тенгламанинг хусусий ечими икки хил усулда топилиши мумкин:

I. Аниқмас коэффициент методи.

(1) тенгламанинг хусусий ечими, бу метод ёрдамида қуйидаги ҳолларда топилади:

1) $f(x) = P_n(x)e^{mx} -$ кўпҳад

2) $f(x) = e^{mx}(a\cos nx + b\sin nx)$

3) Функция юқоридагиларнинг йиғиндиси ёки кўпайтмаси.

Бу ҳолларда y_1 хусусий ечим ҳам номаълум коэффициентли $f(x)$ функция кўринишида изланади.

Агар 1) ҳолда $k = m,$ 2) ҳолда $k = m \pm ni$ характеристик тенгламанинг r-каррали илдизлари бўлса, изланаётган номаълум коэффициентли функция $x^k \cdot f(x)$ кўринишда бўлади.

Кўп ҳолларда $f(x)$ таркибида синус ва косинус қатнашганда Эйлернинг $\cos\beta x = \frac{1}{2}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}),\quad \sin\beta x = \frac{1}{2i}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x})$ формулалар ёрдамида юқоридаги ҳолларга келтирилади.

II. Лагранжнинг ўзгармасни вариациялаш усули.

Агар $y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$ бир жинсли (2) тенгламанинг умумий ечими бўлса, (1)-тенгламанинг умумий ечими $y_0 = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + ... + C_n(x)y_n$ кўринишда изланади. Номаълум $C_i(x)$

функциялар

$$\begin{aligned}
&C_1^1 y_1 + ... + C_n^1 y_n = 0\\
&C_1^1 y_1 + ... + C_n^1 y_n^1 = 0\\
&..................................\\
&C_1^1 y_1^{(n-2)} + ... + C_n^1 y_n^{(n-2)} = 0\\
&C_1^1 y_1^{(n-1)} + ... + C_n^1 y_n^{(n-1)} = f(x)
\end{aligned}$$

системадан топилади.

3.1. $y'''-3y''+3y'-y = e^x + x$ тенгламани аниқмас коэффициентлар методи билан ечинг.

Бир жинсли тенгламанинг характеристик тенгламаси илдизлари $k_{1,2,3} = 1$ эканлигидан $y_0 = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^x$.

a) $y'''-3y''+3y'-y = e^x$ тенгламанинг хусусий ечим $y = Ax^3e^x$ кўринишда изланади.

$y_1' = A[3x^2e^x + x^3e^x] = A(3x^2 + x^3)e^x$.

$y_1'' = A[6x + 3x^2 + 3x^2 + x^3]e^x = A[6x + 6x^2 + x^3]e^x$.

$y_1''' = A[6 + 12x + 3x^2 + 6x + 6x^2 + x^3]e^x = A[6 + 18x + 9x^2 + x^3]e^x$.

Топилганларни ўрнига қўйиб

$A[6 + 18x + 9x^2 + x^3 - 18x - 18x^2 - 3x^3 + 9x^2 + 3x^3 - 3x^2 - x^3]e^x = e^x$ ни ҳосил киламиз. $A[6 - 3x^2] = 1$ дан $A = \frac{1}{6}$ ва $y_1 = \frac{x^3}{6} \cdot e^x$ бўлади.

b) $y'''-3y''+3y'-y = x$ тенгламанинг хусусий ечими $y_2 = Ax + B$ тарзида изланади. $y_2' = A,\ y_2'' = 0$. Бундан $3A - Ax - B = x$, яъни $A = -1, B = -3$ *ва* $y_2 = -x - 3.$

Умумий ечим эса $y = (c_1 + c_2 x + cx^2)e^x + \frac{x^3}{6}e^x - x - 3$ кўринишда бўлади.

3.2. $y''-3y'+2y = \frac{e^{3x}}{1 + e^{2x}}$ тенгламани ўзгармасни вариациялаш ёрдамида ечинг.

$k^2 - 3k + 2 = 0$ тенгламанинг ечимлари $k_1 = 1,\ k_2 = 2$ эканлигидан тенглама хусусий ечимлари e^x ва e^{2x} дир. Бундан $y_0 = C_1e^x + C_2e^{2x}$ ва

$$\begin{cases} C_1' + C_2' e^{2x} = 0 \\ C_1' e^{x} + 2C_2' e^{2x} = \dfrac{e^{3x}}{1+e^{2x}} \end{cases}$$

системага эга бўламиз. $C_1' = -C_2' e^{x}$ ни иккинчи тенгламага қўйиб

$C_2^1 e^{2x} = \dfrac{e^{3x}}{1+e^{2x}}$, яъни $C_2^1 = \dfrac{e^{x}}{1+e^{2x}}$ га эга бўламиз. Бундан

$C_2 = \operatorname{arctg} e^{x}$.

$C_1^1 = -\dfrac{e^{2x}+1-1}{1+e^{2x}}$ дан $C_1^1 = -1 + \dfrac{1}{1+e^{2x}}$ ва $C_1 = -\ln\sqrt{1+e^{2x}}$.

Демак, умумий ечим $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} - \ln\sqrt{1+e^{2x}} \cdot e^{x} + e^{2x} \operatorname{arctg} e^{x}$.

3.3. Тенгламаларни ечинг.

1. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$
2. $y'' - 4y = 8x^3$
3. $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + 2\cos 2x$
4. $y'' + y = x + 2e^{x}$
5. $y'' + 3y' = 9x$
6. $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$
7. $y'' - 3y' + 2y = e^{x}$
8. $y'' - 2y = x \cdot e^{-x}$
9. $y'' - 2y' = x^2 - x$
10. $y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}$
11. $y''' + y'' = 6x + e^{-x}$
12. $y^{IV} - 81y = 27e^{-3x}$
13. $y''' + 8y = e^{-2x}$
14. $y^{IV} - 3y'' + 4y = 3\sin x$
15. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^{x}$.

3.4. Ўзгармасни вариациялаш ёрдамида ечинг:

1. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}$

2. $y''-4y'-5y=\dfrac{e^{2x}}{\cos x}$

3. $y''-2y'+y=x^{-2}\cdot e^{x}$

4. $y''+y=\operatorname{tg}x$

5. $y''+y'=\dfrac{1}{1+e^{x}}$

6. $y''+4y'+4=\dfrac{e^{-2x}}{x^{3}}$

7. $y''+4y'+4y=e^{-2x}\cdot \ln x$

8. $y''+y=\dfrac{1}{\cos^{3}x}$

9. $y''-2y'+y=\dfrac{e^{x}}{\sqrt{4-x^{2}}}$

10. $y''+4y=\dfrac{1}{\sin^{2}x}$

§4. Ўзгармас коэффициентли, чизиқли дифференциал тенгламалар системалари

Номаълумларни кетма-кет йўқотиш ёрдамида мураккаб бўлмаган системаларни ечиш мумкин.

4.1. $\begin{cases} \overset{\circ}{x}=2x+y \\ \overset{\circ}{y}=3x+4y \end{cases}$ системани ечинг, бунда $\overset{\circ}{x}=\dfrac{dx}{dt},\quad \overset{\circ}{y}=\dfrac{dy}{dt}.$

Биринчи тенгламадан $y=\overset{\circ}{x}-2x$ эканлигидан, уни иккинчи тенгламага қўйиб $\overset{\circ\circ}{x}-2\overset{\circ}{x}=3x+4(\overset{\circ}{x}-2x)$ ёки $\overset{\circ\circ}{x}-6\overset{\circ}{x}+5x=0$ тенгламага эга бўламиз. Характеристик тенглама илдизлари $k_1=1,\ k_2=5$ эканлигидан $x=c_1e^{t}+c_2e^{5t}$. $\overset{\circ}{x}=c_1e^{t}+5c_2e^{5t}$ бўлганлиги учун $y=c_1e^{t}+5c_2e^{2t}-2c_1e^{t}-2c_2e^{5t}=-c_1e^{t}+3c_2e^{5t}$ келиб чиқади.

Демак, $\begin{aligned} x&=c_1e^{t}+c_2e^{5t} \\ y&=-c_1e^{t}+3c_2e^{5t}. \end{aligned}$

4.2. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 8t \\ \dot{y} = 5x - y \end{cases}$ бир жинсли бўлмаган системани ечинг.

Иккинчи тенгламадан $x = \frac{\dot{y}}{5} + \frac{y}{5}$, $\dot{x} = \frac{\ddot{y}}{5} + \frac{\dot{y}}{5}$ ларни топиб биринчи тенгламага қўямиз.

$$\frac{\ddot{y}}{5} + \frac{\dot{y}}{5} = \frac{\dot{y}}{5} + \frac{y}{5} - y + 8t$$

$\ddot{y} + 4y = 40t$ тенглама ҳосил бўлади.

$k^2 + 4 = 0$ дан $k_{1,2} = \pm 2i$, яъни $y_0 = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$. Ҳусусий ечим $y_1 = At + B$ кўринишда изланади. $4At + 4B = 40t$ дан $A = 10$, $B = 0$.

Демак,

$$y = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + 10t,$$

$$x = \frac{1}{5}(-2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t + 10 + c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + 10t).$$

4.3. Дифференциал тенгламалар системасини ечинг.

1. $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = y - 4x \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 0 \\ \dot{y} - x - y = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 3y - 2x \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x + z - y \\ \dot{y} = x + y - z \\ \dot{z} = 2x - y \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z \\ \dot{y} = y - x + z \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$

4.4. Дифференциал тенгламалар системасини ечинг.

1. $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = y + 2e^{t} \\ \overset{\circ}{y} = x + t^{2} \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = y - 5\cos t \\ \overset{\circ}{y} = 2x + y \end{cases}$

3. $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = 3x + 2y + 4e^{5t} \\ \overset{\circ}{y} = x + 2y \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t} \\ \overset{\circ}{y} = 2x - 2y \end{cases}$

5. $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = 4x + y - e^{2t} \\ \overset{\circ}{y} = y - 2x \end{cases}$ 6. $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = 2y - x + 1 \\ \overset{\circ}{y} = 3y - 2x \end{cases}$

I I-боб бўйича мисоллар

I. Қуйидаги дифференциал тенгламаларни тартибини пасайтиринг ва ечинг.

1. $2x'y'' = y'^2 - 2$ 2. $y'^2 + 4yy'' = 0$
3. $yy'' + 3 = y'^2$ 4. $y''' = 4y''^2$
5. $y''' = 2(y'' - 5)\mathrm{ctg}x$ 6. $y''^3 + xy'' = 6y'$
7. $y'' + y'^2 = 7e^{-y}$ 8. $y''^2 = y'^2 + 8$
9. $y'' - xy''' + y'''^2 = 0$ 10. $y^4 - y^3 \cdot y'' = 10$
11. $y''(2y' + x) = 11$ 12. $(1 - x^2)y'' + xy' = 12$
13. $(y' + 13y)y'' = y'^2$ 14. $y''' \cdot y'^2 = 4y''^3$
15. $xy'' = y' + x(y'^2 + x^2)$

II. Бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламаларни ечинг.

1. $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x$ 2. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$
3. $y'' + 4y' = e^{-2x}$ 4. $y'' - 2y' + 5y = xe^{2x}$
5. $y'' + 5y' + 6y = \cos 2x$ 6. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$
7. $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5$ 8. $y'' - 2y' + y = 16e^{x}$
9. $y'' - 4y' = 6x^2 + 1$ 10. $y'' + 6y' + 9y = 10 \cdot e^{-3x}$
11. $y'' + 4y' = e^{x} + x$ 12. $y'' - 3y = x^2 + 5$

13. $y''+y'+y = e^{x}$

14. $y''+2y'+4y = e^{2x}$

15. $y''-4y = e^{2x}$.

III. Дифференциал тенгламалар системасини ечинг.

1. $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = 4x + 6y \\ \overset{\circ}{y} = 4x + 2y \end{cases}$

2. $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = -5x - 4y \\ \overset{\circ}{y} = -2x - 3y \end{cases}$

3. $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = 3x + y \\ \overset{\circ}{y} = 8x + y \end{cases}$

4. $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = 6x + 3y \\ \overset{\circ}{y} = -8x - 5y \end{cases}$

5. $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = -x + 5y \\ \overset{\circ}{y} = x + 3y \end{cases}$

6. $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = 3x - 2y \\ \overset{\circ}{y} = 2x + 5y \end{cases}$

7. $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = -4x - 6y \\ \overset{\circ}{y} = -4x - 2y \end{cases}$

8. $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = 5x - 8y \\ \overset{\circ}{y} = -3x - 3y \end{cases}$

9. $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = -x - 5y \\ \overset{\circ}{y} = -7x - 3y \end{cases}$

10. $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = -7x + 5y \\ \overset{\circ}{y} = 4x - 8y \end{cases}$

11. $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = 2x - y \\ \overset{\circ}{y} = x + 2e^{t} \end{cases}$

12. $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = 2x - 4y \\ \overset{\circ}{y} = x - 3y + 3e^{t} \end{cases}$

13. $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = x + 2y \\ \overset{\circ}{y} = x - 5\sin t \end{cases}$

14. $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = 2x - y \\ \overset{\circ}{y} = y - 2x + 18t \end{cases}$

15. $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = 5x - 3y + 2e^{3t} \\ \overset{\circ}{y} = x + y + 5e^{-t} \end{cases}$

Мустақил ечиш учун мисоллар

Дифференциал тенгламаларнинг умумий интеграллари топилсин.

1. $4xdx-3ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$
2. $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$
3. $\sqrt{4+y^2}dx-ydy=x^2ydy$
4. $\sqrt{3+y^2}dx-ydy=x2ydy$
5. $ydx-6ydy=2x^2ydy+3y^2dx$
6. $x\sqrt{3+y^2}dx+y\sqrt{2+x^2}dy=0$
7. $(e^{2x}+5)dy+y\ell^{3x}dx=0$
8. $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^{\;2}}{1-y^2}}+1=0$
9. $6xdx-6ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$
10. $y\left(4+e^x\right)dy-e^xdx=0$
11. $x\sqrt{5+y^2}dx+y\sqrt{4+x^2}dy=0$
12. $\sqrt{4+x^2}y'+xy^2+x=0$
13. $2xdx-2ydy=x^2ydy-2xy^2dx$
14. $(e^x+8)\,dy-y\ell^xdx=0$
15. $x\sqrt{5+y^2}+y'y\sqrt{1-x^2}=0$
16. $x\sqrt{4+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0$
17. $6xdx-ydy=yx^2dy-3x^2y^2dx$
18. $y\ln y+xy'=0$
19. $(1+e^x)\,y'=ye^x$

20. $\sqrt{1-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$

21. $(3+\ell^x)y \cdot y' = \ell^x$

22. $y(1+\ell ny) + xy' = 0$

23. $xdx - ydy = yx'dy - xy^2 dx$

24. $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2}\,yy' = 0$

25. $\sqrt{5+y^2}\,dx + 4(x^2 y + y + y)dy = 0$

26. $(1+\ell^x)y \cdot y' = \ell^x$

27. $3(x^2 y + y)dy + \sqrt{2+y^2}\,dx = 0$

28. $6xdx - ydy = yx^2 dx - 3xy^2 dx$

29. $2xdx - ydy = yx^2 dy - xy^2 dx$

30. $2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2}\,y' = 0$

31. $Y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 4\dfrac{y}{x} + 2$

32. $xy' = \dfrac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$

33. $Y' = \dfrac{x+y}{x-y}$

34. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$

35. $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 3$

36. $xy' = \dfrac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 3x^2}$

37. $Y' = \dfrac{x+2y}{2x-y}$

38. $xy' = \dfrac{3y^3 + 6x^2 y}{2y^2 + 3x^2}$

39. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4$

40. $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$

41. $Y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - 2xy}$

42. $xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}$

43. $Y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$

44. $xy' = \frac{3y^3 + 10yx^3}{2y^2 + 5x^2}$

45. $Y' - \frac{y}{x} = x^2, y(1) = 1$

46. $Y' - yctgx = 2x\sin x$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$

47. $Y' + y\cos x = \frac{\sin 2x}{2}$, $y(0) = 0$

48. $Y' + ytgx = \cos^2 x$, $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$

49. $Y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x$, $y(-1) = \frac{3}{2}$

50. $Y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1)$, $y(0) = 1$

51. $Y' - \frac{y}{x} = x\sin x, y(\frac{\pi}{2}) = 1$

52. $Y' + \frac{y}{2x} = x^2, y(1) = 1$

53. $Y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2}$

54. $Y' - \frac{2x-5}{x^2}y = 5$, $y(2) = 4$

55. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}e^2$, $y(1) = e$

56. $Y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^3$, $y(1) = 3$

57. $Y' + \frac{3y}{x} + \frac{2}{x^3} = 0, y(1) = 1$

58. $Y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}$

59. $Y' - \frac{2y}{x+1} = e^x(x+1)^2$

60. $Y' + 2xy = xe^{-x^2}\sin x$

61. $Y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$

62. $4y^3y'' = y^4 - 1$

63. $y'' + 2\sin y\cos^3 y = 0$

64. $y''y^2 + 16 = 0$

65. $y'' = 8\sin^3 y\cos^3 y$

66. $y'' = 18y^3$

67. $y'' + 32\sin y\cos^2 y = 0$

68. $y''y^3 + 9 = 0$

69. $y'' = 50\sin^3 y\cos y$

70. $y^3y'' = 4(y^4 - 1)$

71. $y''y^3 + 4 = 0$

72. $y^3y'' = y^4 - 16$

73. $y'' = 2y^3$

74. $Y''' + 3Y'' + 2Y' = 1 - x^2$

75. $Y''' - Y'' = 6x^2 + 3x$

76. $Y''' - Y' = x^2 + x$

77. $Y^{IV} - 3Y''' + 3Y'' - Y' = 2x$

78. $Y^{IV} - Y''' = 5(x+2)^2$

79. $Y^{IV} - 2Y''' + Y'' = 2x(1-x)$

80. $Y^{IV} - Y''' = 5(x+2)^2$

81. $Y^{V} - Y^{IV} = 2x+3$

82. $3Y^{IV} + Y''' = 6x^2 - 1$

83. $Y^{IV} + 2Y''' + Y'' = 4x^2$

84. $Y''' + Y'' = 5x^2 - 1$

85. $Y^{IV} + 4Y''' + 4Y'' = x - x^2$

86. $7Y''' + Y'' = 12x$

87. $Y''' + 3Y'' + 2Y' = 3x^2 + 2x$

88. $Y''' - Y' = 3x^2 - 2x + 1$

89. $Y''' - Y'' = 4x^2 - 3x + 2$

90. $Y^{IV} - 3Y''' + 3Y'' - Y' = x - 3$

91. $Y^{IV} + Y''' = x$

92. $Y^{IV} - 2Y''' + Y'' = 12x^2 - 6x$

93. $Y''' - 4Y'' = 32 - 384x^2$

94. $Y^{IV} - 2Y'' = 3x^2 + x - 4$

95. $Y''' - Y'' = 40 - 24x^2$

96. $Y''' - 2Y'' = 3x^2 + x - 4$

97. $Y''' - 13Y'' + 12Y' = x - 1$

98. $Y''' + 3Y'' + 2Y' = x^2 + 2x + 3$

99. $Y''' - Y'' = 6x + 5$

100. $Y''' - 5Y'' + 6Y' = (x-1)^2$

101. $Y^{IV} + Y'' = 12x + 6$

102. $Y''' - 13Y'' + 12Y' = 18x^2 - 39$

103. $Y''' - 5Y'' + 6Y' = 6x^2 + 2x + 5$

104. $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$

105. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 6x$

106. $y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x)$

107. $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$

108. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$

109. $y''-4y'+8y=e^{x}(5\sin z-3\cos x)$

110. $y''+2y'=e^{x}(\sin x+\cos x)$

111. $y''-4y'+4y=e^{2x}\sin 3x$

112. $y''+6y'+13y=e^{-3x}\cos 4x$

113. $y''+y=2\cos 3x-3\sin 3x$

114. $y''+2y'+5y=-5\sin x$

115. $y''-4y'+8y=e^{x}(4\cos x-3\sin x)$

116. $y''+2y'=10e^{x}(\sin x+\cos x)$

117. $y''-4y'+4y=e^{2x}\sin 5x$

118. $y''+y=2\cos 5x+3\sin 5x$

119. $y''+2y'+5y=-17\sin 2x$

120. $y''+6y'+13y=e^{-3x}\cos x$

121. $y''-4y'+8y=e^{x}(3\sin x+5\cos x)$

122. $y''-4y'+4y=-e^{2x}\sin 4x$

123. $y''+6y'+13y=e^{-3x}\cos 5x$

124. $y''+y=2\cos 7x-3\sin 7x$

125. $y''+2y'+5y=-\cos x$

126. $y''-4y'+8y=e^{x}(2\sin x-\cos x)$

127. $y''+2y=3e^{x}(\sin x+\cos x)$

128. $y''-4y'+4y=e^{2x}\sin 4x$

129. $y''+6y'+13y=e^{-3x}\cos 8x$

130. $y''+y=2\cos 4x+3\sin 4x$

131. $y''+2y'+y=e^{x}\cos 2x$

Фойдаланилган адабиётлар

1. Соатов Я.У.	Олий математика. 1992-96 й.
2. Шнейдер В.Е. ва бошқалар	Олий математика қисқа курси. 1985-87 й.
3. Салохитдиов М.С. Насритдинов Ғ.Н.	Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, 1982 й.
3. Рахимов Д.Ф.	Олий математика. Тошкент, 2003 й.
4. Пискунов Н.С.	Дифференциал ва интеграл ҳисоб. Тошкент, 1977й.
5. под редакцией Демидовича Б.П.	Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов. Москва, 1988 г.
6. Берман Г.Н.	Сборник задач по математическому анализу. Москва, 1985 г.

Мундарижа