O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

Sh.A.Ayupov, B.A.Omirov,

A.X.Xudoyberdiyev, F.H.Haydarov

ALGEBRA VA SONLAR NAZARIYASI

(o‘quv qo‘llanma)

Toshkent – 2019

Ushbu o‘quv qo’llanma “Matematika” bakalavr ta’lim yo’nalishi talabalari uchun mo’ljallangan bo’lib, “Algeba va sonlar nazariyasi” fanining chiziqli algebra va sonlar nazariyasiga doir mavzularni o’z ichiga oladi.

O‘quv qo‘llanma yangi dasturga mos ravishda tayyorlangan. Qo‘llanmada chizigli tenglamalar sistemalari va ularnunig yechish usullari, *n*-tartibli determinantlar, kompleks sonlar, matritsalar va ular ustida amallar, ko‘phadlar va ularning ildizlari, chiziqli fazo, chiziqli va bishiziqli akslantirishlar, chiziqli almashtirishlar va ularning matritsalari normal shakli, bo‘linish nazariyasi, taqqoslamalar nazariyasi, multiplikativ funksiyalar kabi mavzular bayon qilingan.

Mualliflar:

Ayupov Shavkat Abdullayevich
fizika matematika fanlari doktori, professor, akademik

Omirov Baxrom Abdazovich
fizika matematika fanlari doktori, professor

Xudoyberdiyev Abror Xakimovich
fizika-matematika fanlari doktori

Haydarov Farhod Halimjonovich
o’qituvchi

Taqrizchilar:
fizika-matematika fanlari doktori,
professor Rozikov O’tkir Abdullayevich,

fizika-matematika fanlari doktori
Raximov Abdug’ofur Abdumajidovich.

O’zbekiston Milliy universiteti Ilmiy Kengashining 2018 yil 28 noyabr 3-sonli bayonnomasiga asosan nashr etishga ruxsat etilgan.

MUNDARIJA

SO‘Z BOSHI

Algebra va sonlar nazariyasi kursi bakalavriatning Matematika ta’lim yo‘nalishi dastlabki kurslarida o‘qitiladigan asosiy fanlardan biri hisoblanadi. Algebra va sonlar nazariyasi kursi chiziqli algebra, gruppalar va halqalar nazariyasi, hamda sonlar nazariyasi bo‘limlarini o‘z ichiga oladi. Ushbu o‘quv qo‘llanma kursning chiziqli algebra, bir o‘zgaruvchili ko‘phadlar nazariyasi va sonlar nazariyasi bo‘limlarini qamrab olgan.

Ma’lumki, hozirgi kunda talabalarga zamonaviy fanlardan bilim berish bilan bir qatorda, fundamental fanlarni yangi pedagogik metod va texnologiyalar asosida o‘qitishga katta e’tibor qaratilmoqda. Buning natijasida o‘quv reja va fan dasturlariga bir qancha o‘zgartirishlar kiritildi. O‘qitiladigan fanlarning dolzarbligi va mazmuniga, hamda talabalarning mustaqil ta’lim olishlariga alohida urg‘u berilmoqda.

O‘quv qo‘llanma yangi dasturga mos ravishda tayyorlangan bo‘lib, qo‘llanmada chizigli tenglamalar sistemalari va ularnunig yechish usullari, *n*-tartibli determinantlar, kompleks sonlar, matritsalar va ular ustida amallar, ko‘phadlar va ularning ildizlari, chiziqli fazo, chiziqli va bishiziqli akslantirishlar, chiziqli almashtirishlar va ularning matritsalari normal shakli, bo‘linish nazariyasi, taqqoslamalar nazariyasi, multiplikativ funksiyalar kabi mavzular bayon qilingan.

Qo‘llanma ma’ruza darslariga mo‘ljallab yozilgan bo‘lib, undan “Matematika” ta’lim yo‘lnalishi talabalariga o‘qitiladigan “Algebra va sonlar nazariyasi” kursida foydalanish mumkin. Bundan tashqari, “Amaliy matematika va informatika”, “Mexanika”, hamda boshqa texnik yo‘nalishlar talabalari “Chiziqli algebra va analitik geometriya” kursini o‘rganishda ham foydalanishlari mumkin. Zero qo‘llanmaning chiziqli algebra bo‘limi “Chiziqli algebra va analitik geometriya” kursining birinchi qismida oqitilishi rejalashtirilgan barcha mavzularni o‘z ichiga oladi.

I BOB. TO‘PLAMLAR VA AKSLANTIRISHLAR

1 - §. To‘plamlar va ular ustida amallar

To‘plam tushunchasi matematikaning boshlang‘ich tushunchalaridan biri bo‘lib, bu tushunchani o‘zidan soddaroq tushunchalar orqali ta’riflanmay, balki misollar orqali tushuntiriladi. Masalan, kutubxonadagi kitoblar to‘plami, sinf xonasidagi o‘quvchilar to‘plami, qandaydir shartni qanoatlantiruvchi sonlar to‘plami, to‘g‘ri chiziqlar to‘plami, ko‘phadlar to‘plami va hokazo.

Umuman aytganda, to‘plam deganda biror umumiy xususiyatga ega bo‘lgan narsalar (buyumlar) guruhi, majmuasi tushuniladi. To‘plamni tashkil etgan predmetlar uning elementlari deyiladi. Odatda to‘plamlar A, B, C kabi katta harflar bilan, ularning elementlari esa a, b, c, x, y, z kabi kichik harflar bilan belgilanadi. Agar x element A to‘plamga tegishli bo‘lsa, $x \in A$ kabi, aks holda, ya’ni tegishli bo‘lmasa $x \notin A$ kabi belgilanadi.

To‘plamni tashkil etuvchi elementlar soni chekli yoki cheksiz bo‘lishiga qarab, to‘plam *chekli* yoki *cheksiz* to‘plam deyiladi. Chekli A to’plamning elementlar soni $|A|$ kabi belgilanadi.

Birorta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam *bo‘sh to‘plam* deyiladi va $\varnothing$ kabi belgilanadi.

1.1-ta’rif. Agar A to‘plamning xar bir elementi B to‘plamga ham tegishli bo‘lsa, A to‘plam B to‘plamning qism to‘plami deyiladi va $A \subset B$ bilan belgilanadi.

Ushbu ta’rifni qisqacha $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$ tarzida ifodalash mumkin.

A to‘plamning elementlari B to‘plamga tegishli va aksincha, B to‘plamning elementlari A to‘plamga tegishli bo‘lsa, A va B to‘plamlar teng to‘plamlar deyiladi, ya’ni

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ va } B \subset A.$$

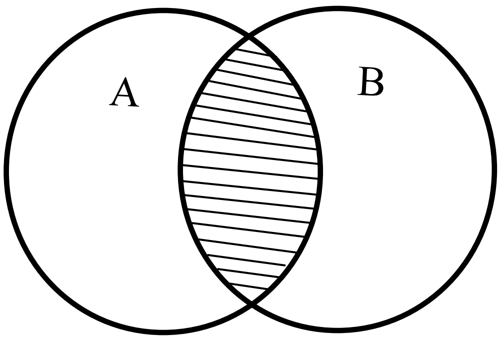
Ta’kidlash joizki, bo‘sh to‘plam ixtiyoriy to‘plamga qism bo‘ladi va xar qanday to‘plam o‘z-o‘ziga qism to‘plam bo‘ladi, ya’ni $\varnothing \subset A$ va $A \subset A$.

Agar $A \subset B$ bo‘lib, $A \neq \varnothing$ va $A \neq B$ bo‘lsa, u holda, A to‘plamga B to‘plamning xos qism to‘plami deyiladi. $\varnothing$ va A to‘plamlarga *xosmas qism to‘plamlar* deyiladi. Ma’lumki, bo‘sh to‘plam va bitta elementdan iborat to‘plam xos qism to‘plamlarga ega emas.

Elementlari to‘plamlardan tashkil topgan to‘plamlarga *to‘plamlar sistemasi* deyiladi.

Misol 1.1. Tekislikdagi barcha to‘g‘ri chiziqlar to‘plami to‘g‘ri chiziqlar sistemasi bo‘lib, to‘g‘ri chiziq o‘z navbatida nuqtalardan iborat bo‘lgan to‘plamdir.

1.2-ta’rif. A va B to‘plamlarning umumiy elementlaridan tashkil topgan to‘plam A va B to‘plamlarning *kesishmasi* deyiladi va $A \cap B$ kabi belgilanadi (1-chizma).



$A \cap B$

1-chizma.

Misol 1.2. $A = \{0, 1, 5, 7\}$ va $B = \{-6, 0, 1, 8\}$ to‘plamlar uchun $A \cap B = \{0, 1\}$ bo‘ladi.

1.3-xossa. Ixtiyoriy A, B, C to‘plamlar uchun quyidagi munosabatlar o‘rinli:

a) $A \cap A = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing$;

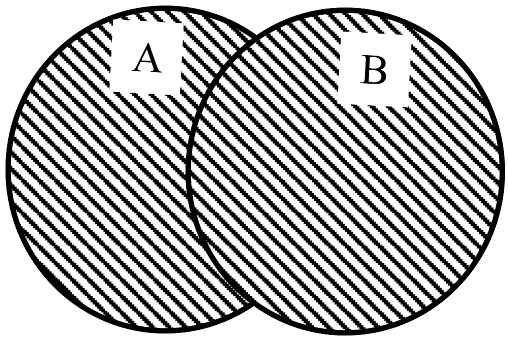
b) $A \cap B = B \cap A$ (kommutativlik xossasi);

c) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (assotsiativlik xossasi);

d) $A\bigcap B\subset A$ va $A\bigcap B\subset B$;

e) Agar $C\subset A$ va $C\subset B$ bo‘lsa, u holda $C\subset A\bigcap B$.

1.4-ta’rif. A va B to‘plamlarning barcha elementlaridan tashkil topgan to‘plam A va B to‘plamlarning birlashmasi deyiladi va $A\bigcup B$ kabi belgilanadi (2-chizma).



$A\bigcup B$

2-chizma.

Misol 1.3. $A=\{0,1,5,7\}$ va $B=\{-6,0,1,8\}$ to‘plamlar uchun $A\bigcup B=\{-6,0,1,5,7,8\}$.

1.5-xossa. Ixtiyoriy A,B,C to‘plamlar uchun quyidagi munosabatlar o‘rinli:

a) $A\bigcup A=A,\ A\bigcup\varnothing=\varnothing\bigcup A$;

b) $A\bigcup B=B\bigcup A$(kommutativlik xossasi);

c) $(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$ (assotsiativlik xossasi);

d) $A\subset A\bigcup B$ va $B\subset A\bigcup B$;

e) Agar $A\subset C$ va $B\subset C$ bo‘lsa, $A\bigcup B\subset C$ bo‘ladi.

To‘plamlarning kesishmasi va birlashmasi uchun yuqorida keltirilgan 1.3 va 1.5 xossalaridan tashqari $\forall A,B,C$ to‘plamlar uchun kesishma va yig‘indini bog‘lovchi quyidagi xossalar o‘rinli.

1.6-xossa.

a) $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$;

b) $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$.

Isbot. Ushbu xossaning a) qismini isbotini keltirish bilan chegaralanamiz. Buning uchun, tenglikning chap tomoni o‘ng tomoniga va aksincha, o‘ng tomoni chap tomoniga qism ekanligini ko‘rsatamiz:

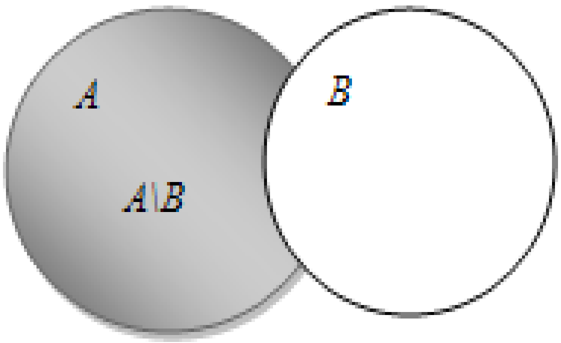
$\forall x \in A \bigcup (B \bigcap C) \Rightarrow x \in A$ yoki $x \in B \bigcap C$, bundan $x \in B$ va $x \in C$ hosil bo‘ladi. Demak, $x \in A \bigcup B$ va $x \in A \bigcup C$ bo‘lib, $x \in (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$ ekanligini hosil qilamiz.

Xuddi shu usulda o‘ngdan chapga qarab, mulohaza yuritilsak:

$\forall x \in (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C) \Rightarrow x \in A \bigcup B$ va $x \in A \bigcup C$, bundan esa $x \in A$ yoki $x \in B$ va $x \in C$ hosil bo‘ladi. Demak, $x \in A \bigcup (B \bigcap C)$.

$\square$

1.7-ta’rif. A to‘plamning B to‘plamga tegishli bo‘lmagan barcha elementlaridan tashkil topgan to‘plam A to‘plamdan B to‘plamning ayirmasi deyiladi va $A \setminus B$ kabi belgilanadi (3-chizma)



3-chizma.

Misol 1.4. $A = \{0, 1, 5, 7\}$ va $B = \{-6, 0, 1, 8\}$ to‘plamlar uchun $A \setminus B = \{5, 7\}$ va $B \setminus A = \{-6, 8\}$.

To’plamlarning ayirmasi, kesishma va birlashma amallari bilan quyidagi xossa orqali bog‘langan.

1.8-xossa.

a) $A \setminus (B \bigcup C) = (A \setminus B) \bigcap (A \setminus C)$;

b) $A \setminus (B \bigcap C) = (A \setminus B) \bigcup (A \setminus C)$;

Agar $B \subset A$ bo‘lsa, u holda $A \setminus B$ ayirma B ning A gacha bo‘lgan to‘ldiruvchisi deb ham ataladi.

1.9-ta’rif. A va B to‘plamlarning simmetrik ayirmasi deb $(A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$ to‘plamga aytiladi va $A \Delta B$ kabi belgilanadi.

Quyida simmetrik ayirmaning asosiy xossalarini keltiramiz.

1.10-xossa.

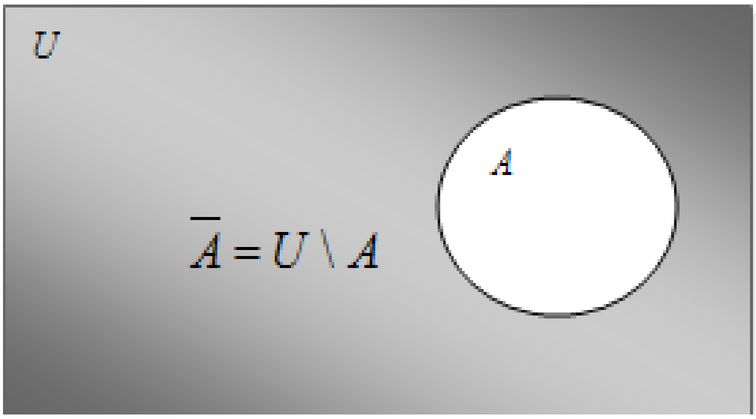
a) $A \Delta B = B \Delta A$;

b) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$;

c) $A \bigcap (B \Delta C) = (A \bigcap B) \Delta (A \bigcap C)$.

Muayyan vaziyatdan chiqish uchun biror U to‘plam (odatda U universal to‘plam deyiladi) olinib, uning qism to‘plamlari ustida amallar bajariladi.

1.11-ta’rif. Ushbu $U \setminus A$ to‘plam A to‘plamni U to‘plamgacha to‘ldiruvchi to‘plami deyiladi va $\overline{A}$ kabi yoziladi (4-chizma).



4-chizma.

1.12-xossa.

a) $A \bigcup \overline{A} = U$;

b) $A \bigcap \overline{A} = \varnothing$;

c) $\overline{\overline{A}} = A$;

d) $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$ (birlashma uchun de Morgan qonuni);

e) $\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$ (kesishma uchun de Morgan qonuni);

f) $A \setminus B = A \bigcap \overline{B}$.

2 - §. Binar munosabatlar

Ikkita bo‘sh bo‘lmagan A va B to‘plamlar berilgan bo‘lsin. A to‘plamga tegishli bo‘lgan biror a elementni va B to‘plamga tegishli bo‘lgan biror b elementni olamiz. Birinchi elementi a, ikkinchi elementi b bo‘lgan tartiblangan (a,b) juftlikni hosil qilamiz.

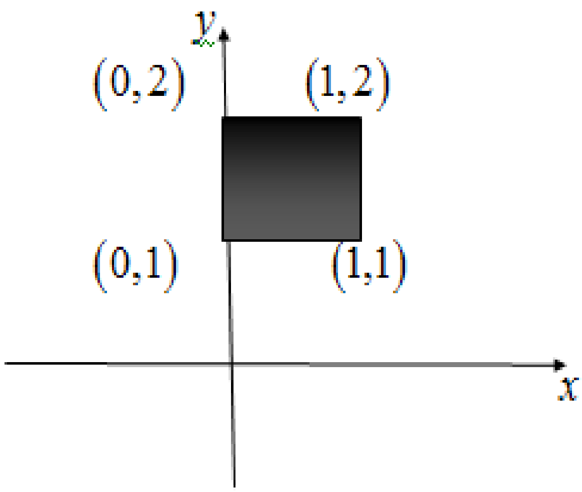
Barcha (a,b) ko‘rinishdagi juftliklardan tashkil topgan $\{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ to‘plam A va B to‘plamlarning dekart (to‘g‘ri) ko‘paytmasi deyiladi va $A \times B$ kabi belgilanadi.

Misol 2.5. $A = B = \mathbb{R}$ bo‘lsa, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dekart ko‘paytma tekislikdagi barcha nuqtalar to‘plamidan iboratdir.

Misol 2.6. $A = [0,1]$ va $B = [1,2]$ segment nuqtalaridan iborat to‘plamlarni olaylik. Bu to‘plamlarning dekart ko‘paytmasi

$$A \times B = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 1 \le y \le 2\}$$

to‘plam 5-chizmada tasvirlangan kvadrat nuqtalaridan iborat to‘plam bo‘ladi:



5-chizma.

Shuni ta’kidlash lozimki, ikkita (a,b) va (c,d) juftliklar $a = c$, va $b = d$ bo‘lgandagina teng deb qaraladi.

Xuddi shunday bir nechta to‘plamlarning dekart ko‘paytmasini $A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_n$ kabi qarashimiz mumkin. Agar $A_1 = A_2 = ... = A_n$ bo‘lsa, u holda ularning dekart ko‘paytmasini qisqacha $A^n = A \times A \times ... \times A$ shaklda yozish mumkin va uni n-darajali dekart ko‘paytma deb yuritiladi. A^n ning elementlari uzunligi n ga teng bo‘lgan $(x_1, x_2, ..., x_n)$, $x_i \in A$ satrli elementdan iborat bo‘ladi.

2.12-ta’rif. $A \times B$ to‘plamning ixtiyoriy R qism to‘plami $(R \subset A \times B)$ A va B to‘plamlar orasidagi *binar munosabat* deyiladi.

Xususan, $A = B$ bo‘lsa, $R \subset A \times A$ binar munosabat A da aniqlangan binar munosabat deyiladi. Binar munosabatlar, odatda R, P, Q kabi xarflar bilan belgilanadi.

Agar $R \subset A \times A$ binar munosabat aniqlangan bo‘lib, $(x, y) \in R$ bo‘lsa, u holda x element y element bilan R munosabatda deyiladi va xRy kabi belgilanadi.

Misol 2.7. Haqiqiy sonlar to‘plami $\mathbb{R}$ da $x = y$ tenglik munosabati binar munosabat bo‘ladi.

Misol 2.8. $A = \{2, 5, 4, 6\}$ bo‘lsin, $R = \{(x, y) \mid x < y\}$ to‘plam binar munosabat bo‘ladi. Ravshanki, bu holda

$$R = \{(2,4), (2,5), (2,6), (4,5), (4,6), (5,6)\}.$$

2.13-ta’rif. A to‘plamda aniqlangan R binar munosabati uchun quyidagi shartlar bajarilsa, A to‘plamda ekvivalentlik munosabati aniqlangan deyiladi:

1. $\forall x \in A$ uchun xRx munosabat o‘rinli (refleksivlik);
2. xRy munosabatdan yRx munosabatning o‘rinliligi kelib chiqsa (simmetrik);
3. xRy va yRz munosabatlardan xRz munosabat o‘rinli ekanligi kelib chiqsa (tranzitivlik).

A to‘plamning x va y elementlari orasida R ekvivalentlik munosabati qisqacha $x \overset{R}{\sim} y$ shaklda yoziladi.

Masalan, haqiqiy sonlar to‘plamidagi tenglik munosabatlari ekvivalentlik munosabatlari bo‘ladi.

2.14-teorema. Bo‘sh bo‘lmagan A to‘plamda aniqlangan ixtiyoriy R ekvivalentlik munosabati A to‘plamni o‘zaro kesishmaydigan sinflarga ajratadi va aksincha, A to‘plam o‘zaro kesishmaydigan sinflarga bo‘lingan bo‘lsa, u holda A to‘plamda berilgan bo‘linishlarga mos keluvchi ekvivalentlik munosabati aniqlash mumkin.

Isbot. Aytaylik, A to‘plamda R ekvivalentlik munosabati aniqlangan bo‘lsin. Ixtiyoriy $a \in A$ element uchun $R[a] = \{x \in A \mid (a,x) \in R\}$ to‘plamni aniqlaymiz. R refleksiv bo‘lganligi uchun $a \in R[a]$ ya’ni aniqlangan to‘plam bo‘sh emas. Ushbu to‘plamlar A to‘plamda o‘zaro kesishmaydigan sinflarni hosil qilishini ko‘rsatamiz. Aytaylik, $R[a]$ va $R[b]$ to‘plamlar umumiy elementga ega bo‘lsin. U holda $z \in R[a] \cap R[b]$, ya’ni $z \in R[a]$ va $z \in R[b]$. Bundan esa, $(a,z) \in R$ va $(b,z) \in R$ ekanligini hosil qilamiz.

Ixtiyoriy $x \in R[a]$ element olaylik, u holda $(a,x) \in R$. Agar $(a,z) \in R$ ekanligi, hamda R munosabatning simmetrik va tranzitivligidan foydalanib, $(z,x) \in R$ bo‘lishini hosil qilamiz. So‘ngra, $(b,z) \in R$ ni hisobga olib $(b,x) \in R$ ni olamiz. Bu esa, $x \in R[b]$ ekanligini anglatadi. Demak, $R[a] \subseteq R[b]$.

Xuddi shunga o‘xshab $R[b] \subseteq R[a]$ ekanligini hosil qilib, $R[a] = R[b]$ tenglikka ega bo‘lamiz. Bu esa $R[a]$ o‘zaro kesishmaydigan sinflar ekanligini anglatadi.

Va aksincha, agar A to‘plam o‘zaro kesishmaydigan sinflarning birlashmasi shaklida ifodalangan bo‘lsa, R munosabatni quyidagicha aniqlaymiz. Agar a va b elementlar bitta sinfga tegishli bo‘lsa, ularni R binar munosabat orqali bo‘g‘langan deymiz. Ravshanki, bu R munosabat ekvivalentlik munosabati bo‘ladi. $\square$

Agar biror A to‘plam R ekvivalentlik munosabati yordamida o‘zaro kesishmaydigan qism to‘plamlarga bo‘lingan bo‘lsa, hosil bo‘lgan qism to‘plamlarni ekvivalent sinflar deb ataymiz. A ning bu ekvivalentlik sinflar to‘plami A/R kabi belgilanadi va u faktor-to‘plam deb ataladi.

Masalan, $\mathbb{Z}$ to‘plamda barcha juft sonlar $\mathbb{Z}_0 = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ va toq sonlar $\mathbb{Z}_1 = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ko’rinishida ikkita sinfga ajratsak, ushbu bo‘linishga mos keluvchi ekvivalentlik munosabati

$$R = \{(x, y) \mid x - y \text{ juft son}\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

ko‘rinishida bo‘ladi.

3 - §. Akslantirishlar

Ushbu paragrafda A va B to‘plamlar orasidagi akslantirishlar va ularning turlari haqida ma’lumotlar beriladi.

3.1-ta’rif. A to`plamdan olingan xar bir $x$ elementga biror-bir $f$ qoidaga ko‘ra $B$ to‘plamdan yagona $y = f(x)$ element mos qo`yilgan bo`lsa, bu f qoidaga *akslantirish* deyiladi.

Akslantirishlar odatda $f : A \to B$ kabi belgilanadi. Shuningdek, agar $A = B$ bo‘lsa, f akslantirishga *almashtirish* deb ataladi.

$f : A \to B$ akslantirish uchun A to‘plam f akslantirishning *aniqlanish sohasi*, B to`plam esa *qiymatlar sohasi* deyiladi. f akslantirishning *obrazi* (aksi) deb quyidagi to‘plamga aytiladi:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Akslantirishning obrazi adatda $\operatorname{Im} f$ kabi belgilanadi, ya’ni $\operatorname{Im} f = f(A)$. Ixtiyoriy $y \in B$ *elementning proobrazi* (asli) deb

$$f^{-1}(y) = \{x \in A \mid f(x) = y\}$$

to‘plamga aytiladi.

B to‘plamning barcha elementlari proobrazlari to‘plami esa akslantirishning *proobrazi* deyiladi.

Misol 3.1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ qoida bilan berilgan moslik akslantirish bo‘lib, $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}_+$ barcha musbat haqiqiy sonlar to‘plami bo‘ladi, xususan $f^{-1}(9)=\{-3, 3\}$.

3.2-ta’rif. $f:A\to B$ va $g:A\to B$ akslantirishlar berilgan bo‘lib, barcha $x\in A$ elementlar uchun $f(x)=g(x)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda f va g akslantirishlar *teng* deyiladi, hamda $f=g$ kabi belgilanadi.

3.3-ta’rif. Agar $f:A\to B$ akslantirish uchun $\operatorname{Im} f=B$ bo‘lsa, ya’ni ixtiyoriy $y\in B$ element uchun $x\in A$ element topilib, $f(x)=y$ bo‘lsa, f akslantirishga *syuryektiv* deyiladi.

3.4-ta’rif. Agar $f:A\to B$ akslantirish uchun $x_1\neq x_2$ ekanligidan $f(x_1)\neq f(x_2)$ kelib chiqsa, f akslantirish *inyektiv* deyiladi.

3.5-ta’rif. Bir vaqtning o‘zida ham syuryektiv, ham inyektiv bo‘lgan akslantirishga *biyektiv* (*o‘zaro bir qiymatli*) akslantirish deyiladi.

Agar bizga $f:A\to B$ va $g:A'\to B'$ akslantirishlar berilgan bo‘lib, $A\subset A'$, $B\subset B'$ va $\forall x\in A$ uchun $f(x)=g(x)$, bo‘lsa g akslantirishga f akslantirishning *davomi* deyiladi.

Misol 3.2. a) $f(\mathrm{x})=x^2$ qoida bilan berilgan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ akslantirishlar syuryektiv ham, inyektiv ham emas;

b) $g(\mathrm{x})=x^2$ qoida bilan berilgan $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ akslantirishlar syuryektiv, lekin inyektiv emas;

c) $p(\mathrm{x})=x^2$ qoida bilan berilgan $p:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ akslantirishlar inyektiv, lekin syuryektiv emas;

d) $h(\mathrm{x})=x^2$ qoida bilan berilgan $h:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ akslantirish biyektiv bo‘ladi.

Bundan tashqari, g akslantirish h akslantirishning davomi, o‘z navbatida f akslantirish esa g akslantirishning davomi bo‘ladi.

Ta’kidlash joizki, agar A to‘plam chekli to‘plam bo‘lsa, $f: A \to A$ akslantirish inyektiv bo‘lishi uchun uning syuryektiv bo‘lishi zarur va yetarlidir. Demak, A chekli to‘plamni o‘zini o‘ziga akslantiruvchi ixtiyoriy syurektiv aklantirish ham, inyektiv akslantirish ham biyektiv bo‘ladi.

3.6-ta’rif. Agar $f: A \to B$ va $g: B \to C$ akslantirishlar uchun shunday $h: A \to C$ akslantirish mavjud bo‘lib, $\forall x \in A$ uchun $h(x) = g(f(x))$ bo‘lsa, h akslantirish f va g akslantirishlarning kompozitsiyasi (ko‘paytmasi) deyiladi va $h = g \circ f$ kabi yoziladi.

Akslantirishlarning kompozitsiyasini aniqlanishidan ma’lumki, $g \circ f$ akslantirish aniqlangan bo‘lsa, $f \circ g$ akslantirish har doim ham aniqlanavermaydi.

Agar $A = B = C$ bo‘lsa, u holda $f \circ g$ va $g \circ f$ akslanirishlar aniqlanadi, lekin ular har doim ham teng bo‘lavermaydi, ya’ni umuman aytganda, $f \circ g \neq g \circ f$.

Masalan, agar $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ va $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$ akslantirishlar berilgan bo‘lsa, u holda $f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$ va $(g \circ f)(x) = g(x^2) = x^2 + 1$ bo‘ladi, ya’ni $f \circ g \neq g \circ f$.

Demak, akslantirishlar kompozitsiyasi amali kommutativlik qoidasiga bo‘ysunmaydi.

Quyidagi xossa akslantirishlarning kompozitsiyasi assotsiativlik xossasiga ega bo‘lishini ko‘rsatadi.

3.7-xossa. Xar qanday $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$ akslantirishlar uchun $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ tenglik o‘rinli.

Endi birlik va teskari akslantirish tushunchalarini kiritamiz.

3.8-ta’rif. $e(x) = x$ ko‘rinishida aniqlangan $e: A \to A$ akslantirishga birlik (ayniy) akslantirish deyiladi. Birlik akslantirish odatda e_A kabi belgilanadi.

Ravshanki, birlik akslantirish biyektivdir va ixtiyoriy $f: A \to B$ akslantirish uchun $f \circ e_A = e_B \circ f = f$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

3.9-ta'rif. Agar $f: A \to B$ akslantirish uchun $g: B \to A$ akslantirish topilib, $g \circ f = e_A$ va $f \circ g = e_B$ o'rinli bo'lsa, g akslantirishga f akslantirishning *teskarisi* deyiladi va $g = f^{-1}$ kabi belgilanadi. Teskarisi mavjud bo'lgan akslantirishga *teskarilanuvchi* akslantirish deyiladi.

3.10-teorema. Agar f akslantirishga teskari akslantirish mavjud bo'lsa, u yagonadir.

Isbot. Faraz qilaylik, g va g' akslantirishlar f akslantirishning teskarisi bo'lsin, ya'ni

$$g \circ f = e_A,\ f \circ g = e_B \quad \text{va} \quad f \circ g' = e_A,\ g' \circ f = e_B.$$

U holda

$$g' = e_A \circ g' = (g \circ f) \circ g' = g \circ (f \circ g') = g \circ e_B = g.$$

□

3.11-teorema. Agar $f: A \to B$ va $g: B \to A$ akslantirishlar uchun $g \circ f = e_A$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $f -$inyektiv, $g -$ syurektiv akslantirishlar bo'ladi.

Isbot. Haqiqatan ham, $x_1, x_2 \in A$ va $f(x_1) = f(x_2)$ bo'lsin. U holda

$$x_1 = e_A(x_1) = (g \circ f)x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = e_A(x_2) = x_2$$

ekanligi kelib chiqadi, demak, $f -$inyektiv.

Ixtiyoriy $x \in A$ element uchun

$$x = e_A(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

ekanligidan esa g akslantirishning syuryektivligi kelib chiqadi. □

3.12-teorema. Xar qanday biyektiv akslantirish teskarilanuvchidir.

Isbot. Aytaylik, $f: A \to B$ biyektiv akslantirish bo'lsin. U holda ihtiyoriy $y \in B$ uchun yagona $x \in A$ element topilib, $f(x) = y$ bo'ladi.

$g(y)=x$ ko‘rinishida aniqlangan $g:B\to A$ akslantirish f akslantirishga teskari akslantirish bo‘ladi. □

3.13-natija. Biyektiv f akslantirishning teskarisi ham biyektiv bo‘ladi va $(f^{-1})^{-1}=f$ tenglik o‘rinlidir.

3.14-natija. $f:A\to B,\ \ g:B\to C$ biyektiv akslantirishlarning $g\circ f$ kompozitsiyasi ham biyektiv bo‘ladi va $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

II BOB. KOMPLEKS SONLAR

4 - §. Kompleks sonlar va ular ustida amallar

Bizga $\mathbb{R}$ haqiqiy sonlar to‘plami berilgan bo‘lsin. $\mathbb{C}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ to‘plamda qo‘shish va ko‘paytirish amallarini quyidagicha aniqlaymiz:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,bc+ad).$$

Ravshanki, $\mathbb{C}$ da aniqlangan qo‘shish va ko‘paytirish amallari uchun quyidagi shartlar bajariladi:

a) qo‘shishning kommutativligi: $(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b),$

b) qo‘shishning assotsiativligi:

$$[(a,b)+(c,d)]+(e,f)=(a,b)+[(c,d)+(e,f)],$$

c) ko‘paytirishning kommutativligi $(a,b)\cdot(c,d)=(c,d)\cdot(a,b),$

d) ko‘paytirishning assotsiativligi:

$$[(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,f)=(a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)].$$

Ushbu qonunning o‘rinli ekanligi quyidagi tengliklardan kelib chiqadi:

$$[(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,f)=(ac-bd,ad+bc)\cdot(e,f)=$$
$$=ace-bde-adf-bcf+acf-bdf+ade+bcf\ ,$$

$$(a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)]=(a,b)\cdot(ce-df,cf+de)=$$
$$=ace-bde-adf-bcf+acf-bdf+ade+bcf\,.$$

e) distributivlik qonuni:

$$[(a,b)+(c,d)]\cdot(e,f)=(a,b)\cdot(e,f)+(c,d)\cdot(e,f);$$

Qo‘shish va ko‘paytirish amallarini bog‘lovchi ushbu distributivlik qonuni ham o‘rinli bo‘lishini tekshirish qiyin emas:

$$[(a,b)+(c,d)]\cdot(e,f)=(a+c,b+d)\cdot(e,f)=$$
$$=(ae+ce-bf-df,af+cf+be+de),$$

$$(a,b)\cdot(e,f)+(c,d)\cdot(e,f)=(ae-bf,af+be)+(ce-df,cf+df)=$$
$$=(ae+ce-bf-df,af+cf+be+de).$$

Ta’kidlash joizki, $(0,0)$ element $\mathbb{C}$ to‘plamning trivial (nol) elementi, $(1,0)$ element esa birlik elementi bo‘ladi, ya’ni:

$$(a,b)+(0,0)=(0,0)+(a,b)=(a,b),$$
$$(a,b)\cdot(1,0)=(1,0)\cdot(a,b)=(a,b).$$

Ma’lumki, ixtiyoriy $(a,b)\in\mathbb{C}$ element qarama-qarshi $(-a,-b)$ elementga ega.

Endi biz $\mathbb{C}$ to‘plamdagi ixtiyoriy noldan farqli (a,b) elementning teskarilanuvchi ekanligini ya’ni $(a,b)\cdot(x,y)=(1,0)$ tenglama yechimga ega ekanligini ko‘rsatamiz. Ushbu tenglamadan quyidagiga ega bo‘lamiz

$$(ax-by,ay+by)=(1,0).$$

Bu tenglikdan quyidagi ikki noma’lumli tenglamalar sistemasi hosil bo’ladi

$$\begin{cases} ax-by=1, \\ bx+ay=0. \end{cases}$$

Ma’lumki, bu sistema $(a,b)\neq(0,0)$ bo‘lganda yechimga ega bo’lib, $x=\dfrac{a}{a^2+b^2}$, $y=\dfrac{-b}{a^2+b^2}$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, (a,b) element uchun teskari element

$$(a,b)^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

4.1-ta’rif Qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish va bo‘lish amallari aniqlangan $\mathbb{C}$ to‘plamga *kompleks sonlar to’plami*, uning elementlari esa kompleks sonlar deb ataladi.

Kompleks sonlar to‘plamining $(a,0)$ ko‘rinishidagi elementlari to‘plamini $\mathbb{R}_1$ orqali belgilaymiz. $\mathbb{C}$ da kiritilgan qo‘shish va ko‘paytirish amallarini $\mathbb{R}_1$ da qaraymiz:

$$(a,0)+(c,0)=(a+c,0),$$

$$(a,0)\cdot(c,0)=(ac,0).$$

Ushbu tengliklardan ko‘rinadiki, $\mathbb{R}_1$ to‘plamdagi qo‘shish va ko‘paytirish amallari, haqiqiy sonlar to‘plamidagi amallar kabi aniqlanadi.

$\mathbb{R}_1$ va $\mathbb{R}$ to‘plamlar orasida $f\big((a,0)\big)=a$ kabi $f:\mathbb{R}_1\to\mathbb{R}$ moslik o’rnatsak, yuqoridagi tengliklardan ushbu moslik ko‘paytma va yig‘indi amallarini saqlashi kelib chiqadi. Demak, $(a,0)=a$ deb olish mumkin.

Agar $(0,1)$ elementni i orqali belgilasak,

$$i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$$

bo‘ladi. Ushbu $i\in\mathbb{C}$ elementga *mavhum birlik* deyiladi. Ixtiyoriy $(a,b)\in\mathbb{C}$ uchun

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)\cdot(0,1)=a+bi$$

tenglikni yozishimiz mumkin. Shunday qilib, $\mathbb{C}$ kompleks sonlar to‘plamining ixtiyoriy elementini $z=a+bi$ shaklda yozish mumkin. Bu shaklga kompleks sonning *algebraik shakli* deyiladi.

Kompleks sonning algebraik shaklidagi a songa kompleks sonnning haqiqiy qismi deyiladi va $\mathrm{Re}(z)$ orqali belgilanadi. Undagi b soni esa z kompleks sonning mavhum qismi deyiladi va $\mathrm{Im}(z)$ orqali belgilanadi. Mavhum qismi nolga teng bo‘lgan kompleks sonlar haqiqiy sonlar bo‘lsa, haqiqiy qismi nol bo‘lgan kompleks sonlar mavhum kompleks sonlar deyiladi.

Ushbu $\overline{z}=a-bi$ kompleks soni $z=a+bi$ kompleks soniga qo‘shma kompleks son deyiladi. Qo‘shma kompleks sonlar uchun

$$z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a,$$

$$z\cdot\overline{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2$$

tengliklar o‘rinli, ya’ni kompleks sonning o‘z qo‘shmasiga yig‘indisi va ko‘paytmasi haqiqiy son bo‘ladi.

4.2-xossa. Kompleks sonlarning qo‘shmasi quyidagi xossalarga ega:

a) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$;

b) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$;

c) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$;

d) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Kompleks sonning teskarisini topishda uning qo‘shmasidan foydalanish juda qulay hisoblanadi:

$$\left(a+bi\right)^{-1}=\frac{1}{a+bi}=\frac{1}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i.$$

4.3-tasdiq. Bizga $z=a+bi$ kompleks son berilgan bo‘lib, $u+vi$ uning kvadrat ildizi bo‘lsin, u holda

$$u=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)},$$

$$v=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}.$$

Isbot. Aytaylik, $\sqrt{a+bi}=u+vi$ bo‘lsin. U holda bu tenglikni ikkala tomonini kvadratga ko‘tarsak,

$$(u+vi)^2=a+bi$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan

$$\begin{cases}u^2-v^2=a,\\ 2uv=b.\end{cases}\tag{4.1}$$

tenglamalar sistemasi kelib chiqadi. Bu sistemadagi tenglamalarning har birining ikkala tomonini kvadratga ko‘tarib, so‘ngra ularni qo‘shsak, quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz:

$$(u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2 = a^2 + b^2.$$

So‘nggi tenglikdan $u^2 + v^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ (ildiz musbat ishorali, chunki tenglikning chap tomoni musbat sondir). Bu tenglikdan va tenglamalar sistemasi birinchi tenglamasidan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$u^2 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right),$$

$$v^2 = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right).$$

Kvadrat ildizdan chiqarib,

$$u = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)},$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}$$

u va v larni topamiz. (4.1) tenglamalar sistemasning ikkinchi tengligiga ko‘ra uv ko‘paytmaning ishorasi b ning ishorasi bilan bir xil bo‘ladi, ya’ni agar $b > 0$ bo‘lsa, u va v lar bir vaqtning o‘zida musbat yoki manfiy ishorali, agar $b < 0$ bo‘lsa, u va v lar turli ishorali bo‘ladi.

$\square$

Shunday qilib, ixtiyoriy kompleks sonnning ikkita kvadrat ildizi mavjud va ular bir-biridan ishorasi bilan farq qiluvchi sonlar bo‘ladi. Xususan, manfiy haqiqiy sonlardan ham kvadrat ildiz chiqarish mumkin. Haqiqatan ham, agar $a < 0$ va $b = 0$ bo‘lsa, u holda $\sqrt{a^2 + b^2} = -a$ (bu ildiz musbat) va $u^2 = \frac{1}{2}(a - a) = 0$, ya’ni $u = 0$ bo‘ladi. Demak, $\sqrt{u} = \pm\sqrt{-a} \cdot i$ bo‘ladi.

Misol 4.1. $z=-35-12i$ kompleks sonning kvadrat ildizlarini toping. Bu yerda $a=-35,\ b=-12$ ekanligi uchun

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1225+144}=\sqrt{1369}=37.$$

Shuning uchun

$$u^2=\frac{1}{2}(35+37)=36,$$

$$v^2=\frac{1}{2}(-35+37)=1.$$

Demak, $u=\pm 6,\ v=\pm 1$, xamda $b<0$ bo‘lganligi sababli, u va v larning ishoralari turli xil bo‘ladi, shuning uchun

$$\sqrt{-35-12i}=\pm(6-i).$$

Misol 4.2. $(2+4i)z^2+2z+6-6i=0$ kvadrat tenglamani kompleks sonlar maydonida yeching.

Kvadrat tenglamaning diskriminanti $D=2\sqrt{-35-12i}=2(6-i)$ bo‘lib,

$$z_1=\frac{-2-2(6-i)}{2(2+4i)}=\frac{-7+i}{2+4i}\cdot\frac{2-4i}{2-4i}=\frac{-10+30i}{4+16}=\frac{-10+30i}{20}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i.$$

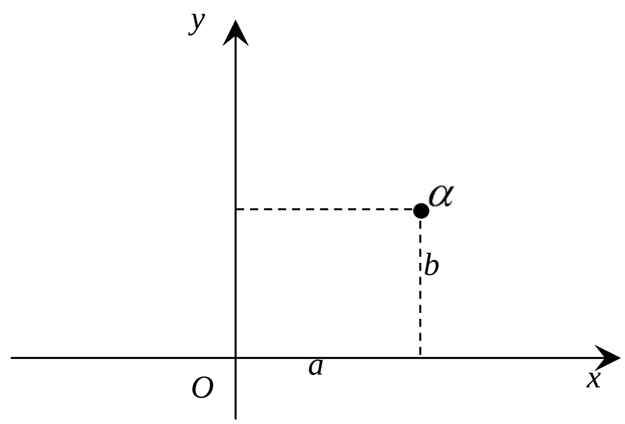
$$z_2=\frac{-2+2(6-i)}{2(2+4i)}=\frac{5-i}{2+4i}\cdot\frac{2-4i}{2-4i}=\frac{6-22i}{4+16}=\frac{6-22i}{20}=\frac{3}{10}-\frac{11}{10}i.$$

5 - §. Kompleks sonlarning geometrik tasviri va trigonometrik shakli

Ma’lumki, haqiqiy sonlar to‘plaminining geometrik talqini to‘g‘ri chiziqdan iborat bo’ladi. Ya’ni, haqiqiy sonlar to‘plami bilan to‘g‘ri chiziq o‘rtasida o’zaro bir qiymatli moslik mavjud. Shuning ushun $\mathbb{R}$ to’plamni to‘ri chiziq deb qarashimiz mumkin. Bundan esa, $\mathbb{R}^2$ to’plamni tekislik deb qarash mumkinligi kelib chiqadi.

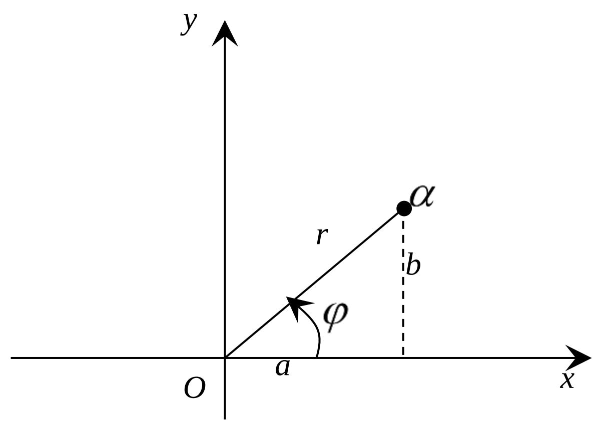
Kompleks sonlar to’plami bilan $\mathbb{R}^2$ to‘plam orasida bir qiymatli moslik mavjudligini hisobga olsak, kompleks sonlar to‘plamining geometrik talqini tekislikdan iborat bo‘lishini payqash qiyin emas.

Kompleks sonlar mos qo‘yilgan tekislik kompleks tekislik deyilib, kompleks tekislikning abssissa o‘qi nuqtalariga haqiqiy sonlar, ordinata o‘qi nuqtalariga esa sof mavhum sonlar mos keladi. Shuning uchun kompleks tekislikning abssissa o‘qiga haqiqiy o‘q, ordinata o‘qiga esa mavhum o‘q deyiladi. Demak, $z = a + ib$ kompleks sonning kompleks tekislikdagi o‘rni quyidagi shakldа tasvirlanadi:



6-chizma.

Tekislikdagi z nuqta bilan koordinatalar boshini tutashtiruvchi kesma uzunligini r orqali, bu kesmaning OX o‘qi bilan soat strelkasiga qarama-qarshi yo‘nalishda hosil qilgan burchagini φ orqali belgilaymiz.



7-chizma.

Endi $z = a + ib$ kompleks sonning trigonometrik shaklini ifodalaymiz. 2-chizmadagi to‘g‘ri burchakli uchburchakdan Pifagor teoremasiga asosan

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{5.1}$$

tenglik kelib chiqadi. Burchak kosinusi, sinusi va tangenslarining ta’rifidan φ burchak aniqlanadi:

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \ \sin\varphi = \frac{b}{r} \tag{5.2}$$

yoki

$$tg\varphi = \frac{b}{a}. \tag{5.3}$$

Kesma uzunligi r ga kompleks sonning moduli deyiladi va $|z|$ orqali belgilanadi. Ya’ni, $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Kompleks sonning argumenti deb, φ burchakka aytiladi va $\arg z$ orqali belgilanadi. (5.2) tengliklardan a va b larni topamiz:

$$a = r\cos\varphi, \ b = r\sin\varphi.$$

Ushbu tengliklarni kompleks sonning algebraik shakliga qo‘ysak,

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{5.4}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikka z kompleks sonning *trigonometrik shakli* deyiladi.

Tabiiyki, kompleks son qo‘shmasining trigonometrik shakli:

$$\overline{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$

bo‘ladi.

5.1-teorema. Trigonometrik shaklda berilgan ikkita kompleks sonlar ko‘paytmasining moduli, ko‘paytuvchilar modullarining ko‘paytmasiga, argumenti esa ko‘paytuvchilar argumentlarining yig‘indisiga teng, ya’ni

$$|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|,$$

$$\arg(\alpha\cdot\beta)=\arg\alpha+\arg\beta.$$

Isbot. Bizga $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ va $\beta=\rho(\cos\psi+i\sin\psi)$ kompleks sonlari berilgan bo‘lsin. U holda

$$\alpha\cdot\beta=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\rho(\cos\psi+i\sin\psi)=$$

$$=r\cdot\rho(\cos\varphi\cdot\cos\psi-\sin\varphi\cdot\sin\psi+i(\sin\varphi\cdot\cos\psi+\cos\varphi\cdot\sin\psi))=$$

$$=r\cdot\rho(\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)).$$

Demak,

$$|\alpha\cdot\beta|=\rho\cdot r=|\alpha|\cdot|\beta| \text{ va } \arg(\alpha\cdot\beta)=\varphi+\psi=\arg\alpha+\arg\beta$$

bo‘ladi. ∎

Bu teoremadan bevosita quyidagi natijani hosil qilamiz.

5.2-natija. Bir nechta $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ sonlar ko‘paytmasining moduli

$$|\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot...\cdot\alpha_n|=|\alpha_1|\cdot|\alpha_2|\cdot...\cdot|\alpha_n|$$

va argumenti

$$\arg(\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot...\cdot\alpha_n)=\arg\alpha_1+\arg\alpha_2+...+\arg\alpha_n$$

bo‘ladi.

Misol 5.1. $\alpha=1-i$ kompleks sonini trigonometrik shaklga keltiring. $a=1,\ b=-1$ ekanligidan $r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, hamda

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

tengliklardan $\varphi=\dfrac{7\pi}{4}$ ga ega bo‘lamiz. Natijada

$$\alpha=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Misol 5.2. $\alpha = 1 - i$ va $\beta = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8})$ kompleks sonlarning ko'paytmasini toping. $\alpha = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ ekanligini hisobga oslak,

$$\alpha \cdot \beta = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) \cdot \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}) =$$

$$2\left(\cos\frac{15\pi}{8} + i\sin\frac{15\pi}{8}\right).$$

6 - §. Muavr formulasi, kompleks sondan ildiz chiqarish. Birning ildizlari

Ushbu paragrafda trigonometrik shaklda berilgan kompleks sondan n darajali ildiz chiqarish formulasini keltiramiz. Bizga

$$\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

ko'rinishidagi kompleks son berilgan bo'lsin.

6.1-tasdiq (Muavr formulasi). Har qanday $n \in \mathbb{Z}$ butun son uchun quyidagi tengliklar o'rinli:

$$\alpha^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{6.1}$$

ya'ni, $|\alpha^n| = |\alpha|^n$, $\arg(\alpha^n) = n\arg\varphi.$

Isbot. 5.2-natijada

$$r_1 = r_2 = ... = r_n = r, \ \varphi_1 = \varphi_2 = ... = \varphi_n = \varphi$$

deb olsak, (6.1) formulaning natural sonlar uchun o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Endi ushbu formulani manfiy butun sonlar uchun o‘rinli ekanligini ko‘rsatamiz.

$$\alpha^{-1}=\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)}\cdot\frac{\cos\varphi-i\sin\varphi}{\cos\varphi-i\sin\varphi}=$$

$$=\frac{\cos\varphi-i\sin\varphi}{r(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}=r^{-1}(\cos\varphi-i\sin\varphi)=r^{-1}(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi))$$

tenglik formulani $n=-1$ da o‘rinli ekanligini ko‘rsatadi.

Endi ixtiyoriy n manfiy butun son uchun $n=-m$, $m\in\mathbb{N}$ deb olib,

$$(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^{-m}=$$

$$=((r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^{-1})^m=(r^{-1}(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)))^m=$$

$$=r^{-m}(\cos(-m\varphi)+i\sin(-m\varphi))=r^n(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)),$$

ya’ni (6.1) tenglik manfiy butun sonlar uchun ham o‘rinli.

□

Misol 6.1. Muavr formulasi yordamida $(1-i)^{10}$ ifodani soddalashtiring.

$$(1-i)^{10}=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right)^{10}=2^5\left(\cos\frac{35\pi}{4}+i\sin\frac{35\pi}{4}\right)=$$

$$32\left(\cos\left(16\pi+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(16\pi+\frac{3\pi}{2}\right)\right)=$$

$$32\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=32\cdot(-i)=-32i.$$

6.2-natija. Ikkita kompleks son nisbatining moduli modullar nisbatiga, argumenti esa argumentlar ayirmasiga teng.

Isbot. $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ va $\beta=\rho(\cos\psi+i\sin\psi)$ va kompleks sonlar berilgan bo‘lsin. U holda

$$\frac{\alpha}{\beta}=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\rho^{-1}(\cos(-\psi)+i\sin(-\psi))=$$

$$= r \cdot \rho^{-1}(\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi))$$

bo‘lib, bundan

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = r \cdot \rho^{-1} = \frac{r}{\rho} = \frac{|\alpha|}{|\beta|}.$$

Shuningdek,

$$\arg\frac{\alpha}{\beta} = \varphi - \psi = \arg\varphi - \arg\psi$$

kelib chiqadi.

6.3-ta’rif. α va ω kompleks sonlari va n natural son uchun $\omega^n = \alpha$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, ω kompleks son α sonning n-darajali ildizi deyiladi.

Quyidagi teoremada kompleks sondan n-darajali ildiz chiqazish formulasini keltiramiz.

6.4-teorema. Ixtiyoriy kompleks son n ta turli n-darajali ildizga ega bo‘lib, ular quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right),\ k = \overline{0, n-1}..$$

Isbot. α sonining n-darajali ω kompleks ildizini $\omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ ko‘rinishida izlaymiz. Muavr formulasiga asosan

$$\omega^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Bundan $\rho^n = r,\ n\theta = \varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ kelib chiqadi. Bu tengliklardan $\rho = \sqrt[n]{r},\ \theta = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n},\ k \in \mathbb{Z}$ ni olamiz. Demak, α ning har bir n-darajali ildizi ushbu

$$\omega = \omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

ko‘rinishga keladi, va aksincha, bunday ko‘rinishga ega bo‘lgan har qanday kompleks son α ning n-darajali ildizidir.

Endi k ga 0, 1, 2, ..., $n-1$ qiymatlar berib, $\omega_0, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_{n-1}$ larni topamiz, bularning hammasi turlicha bo‘ladi, chunki k ni bittaga orttirish argumentning $\frac{2\pi}{n}$ ga ortishiga olib keladi. Endi $k \geq n$ bo‘lgan holni ko‘ramiz. k ni n ga qoldiqli bo‘lsak,

$$k = nq + r, \ 0 \leq r \leq n-1,$$

bo‘lib,

$$\frac{\varphi + 2\pi k}{n} = \frac{\varphi + 2\pi nq + 2\pi r}{n} = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + 2\pi q$$

kelib chiqadi. Natijada,

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + 2\pi q\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + 2\pi q\right)\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi r}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi r}{n}\right)\right) = \omega_r$$

bo‘ladi, ya’ni $\omega_0, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_{n-1}$ larning biriga teng bo‘ladi. □

Misol 6.2.

$$\sqrt[3]{1-i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)} =$$

$$= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right),$$

hosil bo‘ladi, bu yerda $k = 0,1,2$. Bundan

$$\omega_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right),$$

$$\omega_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right),$$

$$\omega_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$$

uchta turli ildizlari hosil bo‘ladi.

Endi bir sonning n-darajali kompleks ildizlari ustida to‘xtalamiz. Agar $\alpha = 1 = \cos 0 + i\sin 0$ deb olsak, u holda 1 ning n-darajali ildizlari

$$\varepsilon_k = \sqrt[n]{1} = \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right),\ k = \overline{0, n-1}$$

bo‘ladi va birning barcha n darajali ildizlari n ta $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{n-1}$ kompleks sonlar to‘plamidan iboratdir. Ushbu to‘plamni $< \varepsilon >_n$ kabi belgilab olamiz.

6.5-teorema. Birning barcha ildizlari uchun quyidagi xossalar o‘rinli.

a) $\varepsilon_k, \varepsilon_m \in < \varepsilon >_n$ uchun $\varepsilon_k \cdot \varepsilon_m \in < \varepsilon >_n$;

b) $\varepsilon_k \in < \varepsilon >_n$ uchun $(\varepsilon_k)^{-1} \in < \varepsilon >_n$.

Isbot. a) Haqiqatan, agar $\varepsilon_k, \varepsilon_m \in < \varepsilon >_n$, $0 \le k, m \le n-1$ bo‘lsa,

$$(\varepsilon_k \cdot \varepsilon_m)^n = \varepsilon_k^n \cdot \varepsilon_m^n = 1 \cdot 1 = 1.$$

b) ε_k ning teskarisi ε_k^{-1} bo‘lsa, $\left(\varepsilon_k^{-1}\right)^n = \left(\frac{1}{\varepsilon_k}\right)^n = \frac{1}{\varepsilon_k^n} = 1$ bo‘ladi.

Muavr formulasiga asosan $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$. Demak, $< \varepsilon >_n$ to‘plam ε_1 ildizning darajalari orqali ifodalanadi.

6.6-ta’rif. Agar birning n-darajali ildizi ε_k uchun

$$\{\varepsilon_k, \varepsilon_k^2, \varepsilon_k^3 ..., \varepsilon_k^n\} = < \varepsilon >_n$$

shart o‘rinli bo‘lsa, u holda ε_k birning n-darajali boshlang‘ich ildizi deyiladi.

6.7-tasdiq. $\varepsilon_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$ ildiz birning boshlang‘ich ildizi bo‘lishi uchun k va n sonlari o‘zaro tub bo’lishi zarur va yetarli.

Isbot. Aytaylik, k va n sonlari o‘zaro tub bo‘lsin. U holda ε_k boshlang‘ich ildiz ekanligini ko’rsatamiz. Teskarisini faraz qilaylik, ya’ni shunday n_1 va n_2, $(0 \le n_1 < n_2 \le n-1)$ sonlari topilib, $\varepsilon_k^{n_1} = \varepsilon_k^{n_2}$ bo‘lsin. U holda $\varepsilon_k^{n_2-n_1} = 1$ bo’lib, bundan esa, $\dfrac{2\pi k(n_2 - n_1)}{n} = 2\pi t$, ya’ni $k \cdot (n_2 - n_1) = t \cdot n$ hosil bo‘ladi. Ushbu tenglikdan k va n o‘zaro tub va $n_2 - n_1 < n$ ekanligini hisobga olsak, $n_2 = n_1$ kelib chiqadi. Demak, ε_k boshlang‘ich ildiz.

Aytaylik, ε_k boshlang‘ich ildiz bo’lsin, u holda k va n sonlari o‘zaro tub ekanligini ko’rsatamiz. $(k,n) = d$ bo‘lsin, ya’ni $n = n_1 \cdot d$, $k = k_1 \cdot d$. U holda

$$\varepsilon_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) = \cos\left(\frac{2\pi k_1}{n_1}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k_1}{n_1}\right).$$

Bundan esa, $\varepsilon_k^{n_1} = 1$ ekanligi kelib chiqadi. ε_k boshlang‘ich ildiz ekanligi uchun $n_1 = n$, ya’ni $d = 1$. □

Yuqoridagi tasdiqdan ko’rinadiki, agar $n = p$ tub son bo‘lsa, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{p-1}$ larning hammasi boshlang‘ich ildiz bo‘ladi.

Misol 6.3. Birning 3-darajali ildizlarini toping. $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2\pi k}{3} + i\sin\dfrac{2\pi k}{3}$, $k = 0,1,2$ ekanligidan:

$$\varepsilon_0 = 1,$$

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

kelib chiqadi. $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ lar birning 3-darajali boshlang‘ich ildizlaridir.

III BOB. MATRITSALAR VA DETERMINANTLAR

7 - §. O‘rin almashtirishlar va o‘rniga qo‘yishlar

Bizga dastlabki n ta natural sonlar $(1,2,...,n)$ berilgan bo‘lsin. Bu sonlarni o‘sish tartibida joylashishdan tashqari boshqa usullar bilan ham tartiblash mumkin. Masalan, $n=3$ bo‘lgan holda $(1,2,3)$ uchlikni $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,2,1)$ va $(3,1,2)$ kabi tartiblarda joylashtirishimiz mumkin.

7.1-ta’rif. $1, 2, ..., n$ sonlarning ma’lum bir tartibdagi joylashishiga n ta sondan tuzilgan *o‘rin almashtirish* deyiladi.

n ta sondan iborat barcha o‘rin almashtirishlar to‘plami S_n kabi belgilanadi.

7.2-tasdiq. n ta sondan iborat barcha o‘rin almashtirishlar soni $n!$ ga teng, ya’ni $|S_n| = n!$.

Isbot. Ushbu tasdiqni isbotlashda matematik induksiya usulidan foydalanamiz. Ravshanki, $n=1$ da o‘rin almashtirish soni bitta bo‘ladi, ya’ni $1!=1$. Shuningdek, $n=2$ bo‘lgan holda o‘rin almashtirishlar soni ikkita bo‘ladi, ya’ni $(1,2)$ va $(2,1)$.

Tasdiqni $n-1$ ta sonli o‘rin almashtirishlar uchun o‘rinli deb faraz qilib, n ta sonli o‘rin almashtirish uchun ko‘rsatamiz.

$n-1$ ta sondan iborat barcha o‘rin almashtirishlarning har biriga unga kirmagan n sonini joylashtirib chiqish natijasida barcha n ta sondan tuzilgan o‘rin almashtirish hosil qilamiz. Xar bir o‘rin almashtirishda n soni n hil usulda joylashadi.

$n-1$ ta sondan iborat barcha o‘rin almashtirishlar $(n-1)!$ ta ekanligidan, n ta sondan tuzilgan o‘rin almashtirishlar soni $(n-1)!\cdot n = n!$ ekanligi kelib chiqadi. □

7.3-ta’rif. O‘rin almashtirishning ixtiyoriy ikkita elementini o‘rnini almashtirishga transpozitsiya deyiladi.

Misol 7.1. $(1,2,3,4)$ o‘rin almashtirishni 2 va 4-o‘rinlarini almashtirishdan quyidagi $(1,4,3,2)$ o‘rin almashtirish hosil bo‘ladi.

7.4-teorema. n ta elementdan iborat barcha $n!$ ta o‘rin almashtirishlarni shunday tartibda joylashtirish mumkinki, bunda xar bir keyingi o‘rin almashtirish oldingisidan birgina transpozitsiya yordamida hosil qilinadi. Shuningdek, transpozitsiyalashni ixtiyoriy o‘rin almashtirishdan boshlash mumkin.

Isbot. Teoremani isbotlashda induksiya metodidan foydalanamiz. Ravshanki, $n=2$ bo‘lganda teorema o‘rinli. Teoremani $n-1$ uchun o‘rinli deb faraz qilib, n uchun isbotlaymiz. Bizga

$$(i_1, i_2, ..., i_n) \tag{7.1}$$

o‘rin almashtirish berilgan bo‘lsin. Birinchi o‘rinda i_1 turgan n ta elementdan iborat barcha o‘rin almashtirishlarni qarab chiqamiz. Bunday o‘rin almashtirishlar $(n-1)!$ ta va ularni teoremaning talablariga moslab tartiblash mumkin.

Bu tartiblashni induktiv farazga muvofiq ixtiyoriy o‘rin almashtirishdan, xususan, $(i_2, ..., i_n)$ o‘rin almashtirishdan boshlash mumkin, n ta simvoldan ana shunday yo‘l bilan hosil qilingan o‘rin almashtirishlarning oxirgisida i_1 simvolni ixtiyoriy boshqa bir simvol bilan, masalan, i_2 bilan transpozitsiyalaymiz va yangi hosil qilingan o‘rin almashtirishdan boshlab, birinchi o‘rinda i_2 turgan barcha o‘rin almashtirishlarni keraklicha tartiblashtiramiz va hokazo. Bunday yo‘l bilan, n ta simvoldan iborat barcha o‘rin almashtirishlarni saralab chiqish mumkin. □

Misol 7.2. S_3 to‘plamning elementlarini quyidagi tartibda joylashtirib chiqamiz:

1,2,3; 1,3,2; 3,1,2; 3,2,1; 2,3,1; 2,1,3;

Bundan tashqari biz o‘rin almashtirishda bir nechta transpozitsiyalar bajarib, boshqa o‘rin almashtirishga o‘tishimiz mumkin. O‘rin almashtirishda ikki elementni transpozitsiyalash quyidagicha ko‘rinishda ham tasvirlashimiz mumkin:

$$...,i,...,j,... \xrightarrow{tr(i,j)} ...,j,...,i,...$$

7.5-ta’rif. Agar berilgan o‘rin almashtirishda $i > j$ bo‘lib, o‘rin almashtirishda i soni j dan oldin turgan bo‘lsa, i va j sonlar *inversiya tashkil etadi* deyiladi va $inv(i, j)$ shaklda belgilanadi.

O‘rin almashtirishdagi inversiya tashkil etuvchi juftliklar soniga o‘rin almashtirishning *inversiyasi* deyiladi va $inv(i_1,i_2,...,i_n)$ kabi belgilanadi. Inversiyasi toq va juft son bo‘lgan o‘rin almashtirishlar mos ravishda toq va juft o‘rin almashtirishlar deb ataladi. Berilgan $(i_1,i_2,...,i_n)$ o‘rin almashtirishning *signaturasi* deb,

$$sign(i_1,i_2,...,i_n) = (-1)^{inv(i_1,i_2,...,i_n)}$$

miqdorga aytiladi. Ma’lumki, o‘rin almashtirishning signaturasi uning toq va juftligiga qarab, -1 yoki 1 ga teng bo‘ladi.

7.6-teorema. O‘rin almashtirishda har qanday bajarilgan transpozitsiya uning toq-juftligini o‘zgartiradi.

Isbot. Dastlab, transpozitsiyalanayotgan i va j sonlar yonma-yon turgan holni ko‘raylik, ya’ni

$$(k_1,...,k_{s-1},i, j, k_{s+2},...,k_n) \text{ va } (k_1,...,k_{s-1}, j,i, k_{s+2},...,k_n)$$

ko‘rinishidagi o‘rin almashtirishlarni qaraymiz. Ma’lumki, bu o‘rin almashtirishlarning inversiyalar soni faqat i va j qa bog‘liq holda farqlanadi. Ya’ni agar $i > j$ bo‘lsa birinchi o‘rin almashtirishning inversiyalar soni ikkinchisidan bittaga ortiq, aks holda bittaga kam bo‘ladi. Ya’ni, transpozitsiyalangandan so‘ng o‘rin almashtirishning toq-juftligini o‘zgaradi.

Endi umumiy holni, transpozitsiyalanayotgan i va j sonlar orasida $k_1,k_2,...,k_s - s$ ta son joylashgan holni qaraymiz

$$(...,i,k_1,k_2,...,k_s, j,...).$$

Bu o‘rin almashtirishda i ni j dan keyingi o‘ringa joylashtirish uchun $s+1$ ta transpozitsiya bajarib, o‘rin almashtirishni $(..., k_1, k_2, ..., k_s, j, i, ...)$ ko‘rinishga keltiramiz. Endi j ni k_1 dan oldin joylashtirish uchun s ta transpozitsiya bajarishimiz kerak va o‘rin almashtirish $(..., j, k_1, k_2, ..., k_s, i, ...)$ ko‘rinishiga keladi. Demak, $2s+1$ ta transpozitsiya bajarildi. Natijada birinchi o‘rin almashtirish bilan hosil bo‘lgan ikkinchi o‘rin almashtirishlarning inversiyasi toq son martaga o‘zgaradi. Demak, birinchi o‘rin almashtirishning inversiyasi toq bo‘lsa, transpozitsiyalash natijasida juft o‘rin almashtirishga va aksincha, juft bo‘lsa, toq o‘rin almashtirishga o‘tadi. □

Ushbu teoremadan quyidagi natijaga ega bo‘lamiz.

7.7-natija. $n \geq 2$ bo‘lganda n ta simvoldan tuzilgan juft o‘rin almashtirishlar soni toq o‘rin almashtirishlar soniga, ya’ni $\frac{n!}{2}$ ga teng.

Endi biz o‘rniga qo‘yish tushunchasi va uning xossalarini o‘rganamiz. Bizga $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ birinchi n ta natural sondan iborat to‘plam berilgan bo‘lsin.

7.8-ta’rif. A to‘plamning o‘zini o‘ziga akslantiruvchi o‘zaro bir qiymatli akslantirishga n-*darajali o‘rniga qo‘yish* deyiladi.

$A = \{1, 2, \ldots, n\}$ to‘plamda aniqlangan barcha $f : A \to A$ biyektiv akslantirishlarni quyidagi ustun shaklida yozib chiqamiz:

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & \ldots & n \\ f: & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow \\ & f(1) & f(2) & \ldots & f(n) \end{array}$$

Agar $f(1) = \alpha_1, f(2) = \alpha_2, ..., f(n) = \alpha_n$ deb olsak, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ o‘rin almashtirish bo‘lib, bu moslikni quyidagi sxema yordamida tasvirlab olamiz:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Demak, bu n-darajali o‘rniga qo‘yish bo‘ladi.

Misol 7.3. $n=4$ da $f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=4, f(4)=1$ bo‘lsa, bu to‘rtinchi tartibli o‘rniga qo‘yish quyidagicha yoziladi:

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

Sxemadan ko‘rinib turibdiki, xar bir o‘rniga qo‘yishlarga aniq bir o‘rin almashtirish mos qo‘yiladi. Demak, o‘rin almashtirishlar uchun kiritilgan tushunchalar va xossalar to‘g‘ridan-to‘g‘ri o‘rniga qo‘yishlar uchun ham o‘rinli bo‘ladi. Masalan, hamma o‘rniga qo‘yishlar soni $n!$ ta bo‘ladi.

Bundan tashqari, tuzilgan sxema orqali akslantirishlarning kompozitsiyasini quyidagicha tasvirlaymiz:

Agar $f:A\to A$ va $g:A\to A$ bo‘lsa, u holda ularning $g\circ f:A\to A$ kompozitsiyasi quyidagicha sxema ko‘rinishida ifodalanadi:

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & \ldots & n\\ f: & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow\\ & f(1) & f(2) & \ldots & f(n)\end{array}\qquad \begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & \ldots & n\\ g: & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow\\ & g(1) & g(2) & \ldots & g(n)\end{array}$$

Demak,

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & \ldots & n\\ g\circ f: & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow\\ & g(f(1)) & g(f(2)) & \ldots & g(f(n))\end{array}$$

Shunday qilib, ushbu sxemadan

$$\begin{pmatrix}f(1) & f(2) & \ldots & f(n)\\ g\big(f(1)\big) & g\big(f(2)\big) & \ldots & g\big(f(n)\big)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ f(1) & f(2) & \ldots & f(n)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ g\big(f(1)\big) & g\big(f(2)\big) & \ldots & g\big(f(n)\big)\end{pmatrix}=g\circ f$$

hosil bo‘ladi.

Misol 7.4. $n=4$ da $f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$ va $g=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ o‘rin almashtirishlarning ko‘paytmasini sxematik ko‘rinishi quyidagicha:

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ g\circ f: & 2 & 1 & 4 & 3 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 3 & 4 & 1 & 2. \end{array}$$

Algebraik ifodasi esa,

$$g\circ f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

bo‘ladi.

n-darajali o‘rniga qo‘yishning barcha simvollari o‘z o‘rnida qoladigan bo‘lsa, bunday o‘rniga qo‘yishga *aynan o‘rniga qo‘yish* deyiladi, ya’ni:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix}.$$

$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n\end{pmatrix}$ o‘rniga qo‘yishga teskari f^{-1} o‘rniga qo‘yish

$$f^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix}$$

shaklda bo‘ladi. Quyidagi tenglik o‘rinli ekanini tekshirib ko‘rish qiyin emas:

$$f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=E=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix}.$$

Ta’kidlash joizki,

$$f: \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots & n \\ \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow \\ f(1) & f(2) & \ldots & f(n) \end{array}$$

qoidani qaysi tartibda yozilishi ahamiyatga ega emas, shuning uchun f^{-1} o‘rniga qo‘yishning ustunlari bo‘yicha shunday joylashtiramizki, uni birinchi satrida tartiblangan $1, 2, \ldots, n$ o‘rin almashtirish joylashtiriladi.

Misol 7.7.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ bo‘lsa,}$$

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ bo‘ladi.}$$

Ravshanki, n-darajali o‘rniga qo‘yishlarni ko‘paytirish assosiativlik qoidasiga bo‘ysunadi, ya’ni $\forall f,\ g,\ h$ o‘rniga qo‘yishlar uchun

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Ammo o‘rniga qo‘yishlar kommutativlik qoidasiga bo‘ysunmaydi.

Misol 7.8. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ o‘rniga qo‘yishlar berilgan bo‘lsa, u holda

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bundan $f \circ g \neq g \circ f$ ekanligi kelib chiqadi.

8 - §. Matritsalar va ular ustida amallar

8.1-ta'rif. m ta satr va n ta ustundan iborat bo'lgan quyidagi to'rtburchakli jadvalga

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

matritsa deyiladi.

Odatda A matritsani quyidagi ko'rinishda ham yozish mumkin:

$$A = (a_{i,j}),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \tag{8.2}$$

Bu yerda $a_{i,j}$ sonlar matritsaning *elementlari* deb ataladi. Agar $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ $(a_{i,j} \in \mathbb{C})$ bo'lsa A matritsa *haqiqiy* (*kompleks*) *elementli matritsa* deyiladi.

Satrlari soni ustunlari soniga teng bo'lgan, ya'ni $m = n$ bo'lgan matritsa *n-tartibli kvadrat matritsa* deb ataladi. m ta satr va n ta ustundan iborat barcha matritsalar to'plamini $M_{m,n}(\mathbb{K})$ orqali belgilanadi, bu yerda matritsa elementlari haqiqiy yoki kompleks bo'lishiga qarab, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ yoki $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ bo'ladi. Barcha n-tartibli kvadrat matritsalar to'plami esa $M_n(\mathbb{K})$ orqali belgilanadi.

Mos satr va ustun elementlari teng bo'lgan bir hil tartibli matritsalar teng matritsalar deyiladi.

8.2-ta'rif. Berilgan A matritsaning satrlarini ustunlari, ustunlarini satrlari bilan almashtirishdan hosil bo'lgan matritsa A matritsaga *transponirlangan matritsa* deyiladi va A^T kabi belgilanadi, ya'ni

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \text{ bo‘lsa, } A^T=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{m,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Endi matritsalar ustida amallarni aniqlaymiz. Matritsalarni qo‘shish amali bir hil tartibli matritsalar uchun aniqlanadi.

8.3-ta’rif. $A,B\in M_{m,n}(\mathbb{K})$ matritsalarning yig‘indisi deb, bu matritsalarning mos satr va ustun elementlarini qo‘shish natijasida hosil bo‘lgan $m\times n$-tartibli matritsasiga aytiladi. Agar

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \dots & b_{m,n} \end{pmatrix}$$

ko‘rinishda bo‘lsa, u holda

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \dots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \dots & a_{2,n}+b_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1}+b_{m,1} & a_{m,2}+b_{m,2} & \dots & a_{m,n}+b_{m,n} \end{pmatrix}. \qquad (8.3)$$

8.4-xossa. Ixtiyoriy $A,B,C\in M_{m,n}(\mathbb{K})$ matritsalar uchun quyidagilar o‘rinli:

a) $A+B=B+A$;

b) $(A+B)+C=A+(B+C)$.

Barcha elementlari nollardan iborat bo‘lgan matritsa *neytral* (*nol*) *matritsa* deyiladi. $A\in M_{m,n}(\mathbb{K})$ matritsa uchun qarama-qarshi matritsa quyidagi matritsadan iborat:

$$-A=\begin{pmatrix} -a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & -a_{2,2} & \dots & -a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m,1} & -a_{m,2} & \dots & -a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

8.5-ta'rif. Ixtiyoriy $A\in M_{m,n}(\mathbb{K})$ matritsani $\lambda\in\mathbb{K}$ soniga ko'paytmasi deb quyidagi matritsaga aytiladi:

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \dots & \lambda a_{1,n} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \dots & \lambda a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m,1} & \lambda a_{m,2} & \dots & \lambda a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Endi matritsalarni ko'paytirish amalini kiritamiz. Ikkita matritsaning ko'paytmasi faqat birinchi matritsaning ustunlari soni ikkinchi matritsaning satrlari soniga teng bo'lgan holdagina aniqlanadi.

8.6-ta'rif. $A\in M_{m,n}(\mathbb{K})$ va $B\in M_{n,s}(\mathbb{K})$ matritsalarning ko'paytmasi deb, shunday $A\cdot B$ matritsaga aytiladiki, uning $i-$satr va $j-$ustunida turgan elementi A matritsaning $i-$satridagi va B matritsaning $j-$ustunidagi mos elementlari ko'paytmalarining yig'indisiga teng, ya'ni $A\cdot B$ matritsaning elementlari

$$a_{i1}b_{1j}+a_2b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj},\ 1\le i\le m,\ 1\le j\le s \qquad (8.4)$$

yig'indidan iborat.

Berilgan ta'rifdan ko'rinib turibdiki, $A\in M_{m,n}(\mathbb{K})$ va $B\in M_{n,s}(\mathbb{K})$ matritsalarni ko'paytirish natijasida hosil bo'lgan $A\cdot B$ matritsa $m\times s$-tartibli matritsa bo'ladi, ya'ni $A\cdot B\in M_{m,s}(\mathbb{K})$.

8.7-xossa. Ixtiyoriy $\lambda\in\mathbb{K}$, A va B matritsalar uchun quyidagilar o'rinli:

a) $\lambda\cdot A=A\cdot\lambda$;

b) $(\lambda+\mu)\cdot A=\lambda\cdot A+\mu\cdot A$;

c) $(\lambda\cdot\mu)\cdot A=\lambda\cdot(\mu\cdot A)$;

d) $1\cdot A = A\cdot 1 = A$;

e) $\lambda\cdot(A+B) = \lambda\cdot A + \lambda\cdot B$;

f) $(\lambda\cdot A)\cdot B = A\cdot(\lambda\cdot B) = \lambda\cdot(A\cdot B)$.

Quyidagi xossada matritsalarni ko‘paytirish amali assosiativlik qonuniga bo‘ysunishini ko‘rsatamiz. Ko‘paytmaning ta’rifidan ma’lumki, A, B va C matritsalar uchun $(A\cdot B)\cdot C$ ko‘paytma ma’noga ega bo‘lishi uchin birinchi matritsaning ustunlari soni ikkinchi matritsaning satrlari soniga, ikkinchi matritsaning ustunlari soni esa uchunchi matritsaning satrlari soniga teng bo‘lishi kerak. Ushbu holatda $A\cdot(B\cdot C)$ ko‘paytma ma’noga ega ekanligini ham ko’rish qiyin emas.

8.8-xossa. $A\in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B\in M_{n,s}(\mathbb{K})$ va $C\in M_{s,t}(\mathbb{K})$ matritsalar uchun

$$(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$$

munosabat o‘rinlidir.

Isbot. Aytaylik, $A=(a_{i,j})$, $B=(b_{i,j})$ va $C=(c_{i,j})$ bo‘lsin, u holda

$$AB = U = (u_{i,j}),\ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,s};$$

$$BC = V = (v_{i,j}),\ i=\overline{1,n},\ \ j=\overline{1,t}.$$

$$(AB)C = P = (p_{i,j}),\ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,t};$$

$$A(BC) = Q = (q_{i,j}),\ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,t}.$$

ko‘rinishida yozib olamiz. Ta’rifdan quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$u_{i,l} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,l},\ \ v_{k,j} = \sum_{l=1}^{s} b_{k,l}c_{l,j}.$$

Natijada

$$P = UC, \quad Q = AV$$

tengliklarga ko‘ra

$$p_{i,j}=\sum_{l=1}^{s}u_{i,l}c_{l,j}=\sum_{l=1}^{s}\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,l}c_{l,j},$$

$$q_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}v_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{s}a_{i,k}b_{k,l}c_{l,j}.$$

Demak, barcha $i=j=\overline{1,n}$ lar uchun $p_{i,j}=q_{i,j}$ tenglik o‘rinli ekan, ya’ni

$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C).$$

Misol 8.1. Quyidagi matritsalar berilgan bo‘lsin:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -5 & 7\end{pmatrix} \quad va \quad B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 6 & 5\end{pmatrix}.$$

U holda

$$A+B=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 1 & 12\end{pmatrix};$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2\cdot3+3\cdot6 & 2\cdot4+3\cdot5\\ -5\cdot3+7\cdot6 & -5\cdot4+7\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24 & 23\\ 27 & 15\end{pmatrix}.$$

Matritsalarni ko‘paytirish qoidasidan ma’lumki, $A\in M_{mn}(\mathbb{K})$, $B\in M_{n,s}(\mathbb{K})$ bo‘lib, $m\neq s$ bo‘lsa, u holda $A\cdot B$ ko‘paytmani aniqlash mumkin, lekin $B\cdot A$ ko‘paytmani aniqlab bo‘lmaydi. Agar $m=s\neq n$ bo‘lsa, $A\cdot B$ va $B\cdot A$ ko‘paytmalar aniqlanadi, lekin ularning tartiblari xar hil, ya’ni $A\cdot B\in M_{m,s}(\mathbb{K})$, $B\cdot A\in M_{n,n}(\mathbb{K})$ bo‘lganligi uchun ular teng bo‘lmaydi. $m=s=n$ bo‘lgan holda $A\cdot B$ va $B\cdot A$ matritsalar bir hil tartibli bo‘lishiga qaramasdan, umuman olganda ular teng bo‘lishi shart emas.

Misol 8.2. Bizga $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -5 & 7\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 6 & 5\end{pmatrix}$ matritsalar berilgan bo‘lsin.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2\cdot 3+3\cdot 6 & 2\cdot 4+3\cdot 5\\ -5\cdot 3+7\cdot 6 & -5\cdot 4+7\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 24 & 23\\ 27 & 15\end{pmatrix},$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 3\cdot 2+4\cdot(-5) & 3\cdot 3+4\cdot 7\\ 6\cdot 2+5\cdot(-5) & 6\cdot 3+5\cdot 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -14 & 37\\ -13 & 53\end{pmatrix}.$$

Demak, matritsalarni ko‘paytirish amali kommutativ emas, ya’ni $A\cdot B\neq B\cdot A.$

Endi $A,B\in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $C\in M_{k,s}(\mathbb{K})$ matritsalar uchun kiritilgan qo‘shish va ko‘paytirish amallarini bog‘lovchi distributivlik shartini o‘rinli ekanligini ko‘rsatamiz.

8.9-xossa. $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$.

Isbot. Haqiqatdan ham,

$$\sum_{l=1}^{n}(a_{i,l}+b_{i,l})c_{l,j}=\sum_{l=1}^{n}(a_{i,l}c_{l,j}+b_{i,l}c_{l,j})=\sum_{l=1}^{n}a_{i,l}c_{l,j}+\sum_{l=1}^{n}b_{i,l}c_{l,j}$$

tenglikning chap tomoni $(A+B)\cdot C$ matritsaning $i-$satri va $j-$ ustunida turgan elementini, o‘ng tomoni esa $A\cdot C+B\cdot C$ matritsalarning xuddi shu yerda turuvchi elementini ifodalaydi. □

Shuningdek, $A\in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B,C\in M_{n,s}(\mathbb{K})$ matritsalar uchun $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ tenglikning o‘rinli ekanligi ham yuqoridagi yo‘l bilan ko‘rsatiladi.

8.10-ta’rif. Bosh diagonali elementlari 1 ga teng bo‘lib, qolgan barcha elementlari 0 ga teng bo‘lgan n-tartibli kvadratik matritsa *birlik matritsa* deyiladi va birlik matritsa E kabi belgilanadi, ya’ni

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}.$$

Ma’lumki, ixtiyoriy $A\in M_n(\mathbb{K})$ uchun $A\cdot E=E\cdot A=A$ munosabat o‘rinli.

8.10-ta’rif. Agar $A \in M_n(\mathbb{K})$ matritsa uchun $\exists B \in M_n(\mathbb{K})$ matritsa topilib, $A \cdot B = B \cdot A = E$ tenglik bajarilsa, B matritsa A matritsaning teskarisi deyiladi, A matritsa esa teskarilanuvchi matritsa deyiladi.

Teskarilanuvchi A matritsaning teskarisi A^{-1} kabi belgilanadi. Matritsaning teskarilanuvchanlik sharti va teskarisini topish usulini keyingi mavzularda keltiramiz.

9 - §. Determinant va uning xossalari

Bizga $A \in M_n(\mathbb{K})$ kvadrat matritsa berilgan bo‘lsin:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \tag{9.1}$$

bu yerda $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ yoki $\mathbb{C}$.

Bu matritsaning ixtiyoriy satr va ustunidan bittadan olingan n ta elementlarining ko‘paytmasini qaraymiz:

$$a_{1,\alpha_1} \cdot a_{2,\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n,\alpha_n}.$$

Ko‘paytmaning ko‘paytuvchilaridagi indekslaridan

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

o‘rniga qo‘yishni tuzib olamiz.

Demak, har bir ko‘paytuvchiga bitta o‘rniga qo‘yishni mos qo‘yish mumkin. Aksincha, har bir n-tartibli o‘rniga qo‘yishga matritsadan yuqoridagi kabi olingan ko‘paytmani mos qilib qo‘yishimiz mumkin.

Ko‘paytmaning ishorasini o‘rniga qo‘yishni signaturasi bilan aniqlaymiz, ya’ni

$$\operatorname{sgn}(\alpha)=(-1)^{inv\alpha}.$$

Quyidagi ko‘paytmani hosil qilamiz:

$$\operatorname{sgn}(\alpha)\cdot a_{1,\alpha_1}\cdot a_{2,\alpha_2}\cdot\ldots\cdot a_{n,\alpha_n}.$$

Hamma o‘rniga qo‘yishlar soni $n!$ bo‘lganligi uchun, tuzilgan ko‘paytmalar soni ham $n!$ ta bo‘ladi. Bu elementlarning

$$\sum_{\alpha\in S_n}\operatorname{sgn}(\alpha)\cdot a_{1,\alpha_1}\cdot a_{1,\alpha_2}\cdot\ldots\cdot a_{n,\alpha_n} \tag{9.2}$$

yig‘indisini qaraymiz.

9.1-ta’rif. Yuqorida hosil bo‘lgan (9.2) yig‘indiga berilgan n-tartibli A kvadrat matritsaning determinanti deyiladi. Determinant odatda $\det A$ yoki $|A|$ kabi belgilanadi.

Shunday qilib, determinantni quyidagicha yozib olishimiz mumkin:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{\alpha\in S_n}\operatorname{sgn}(\alpha)a_{1\alpha_1}\cdot a_{2\alpha_2}\cdot\ldots\cdot a_{n\alpha_n}. \tag{9.3}$$

Agar (9.3) ifodada $n=1,2,3$ deb olsak, mos ravishda quyidagi ifodalarni olamiz:

$$\det(a_{11})=a_{11},\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Masalan, uchinchi tartibli determinantning to‘rtinchi ko‘paytmasini olsak, unga $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ uchinchi tartibli o‘rniga qo‘yish mos qo‘yilgan bo‘lib, bu o‘rniga qo‘yishning inversiyasi 3 ga teng. Shuning uchun ko‘paytma manfiy ishora bilan ishtirok etadi.

Misol 9.1. a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 4\cdot 5 - 2\cdot(-3) = 20 + 6 = 26;$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & -5 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 18 - 50 - 12 + 60 + 4 - 45 = -25.$

Endi determinantlarni hisoblashda asosiy vazifalarni bajaruvchi xossalarni keltiramiz.

9.2-xossa. Matritsani transponirlash natijasida determinantning qiymati o‘zgarmaydi, yani $|A| = |A^T|$.

Isbot. Ma’lumki, A matritsaning determinantini hisoblashda har bir satr va ustunlardan bittadan element olinadi. Transponirlangan matritsaning determinantida ham aynan shu ko‘paytmalar ishtirok etadi. Demak, transponirlash natijasida yig‘indidagi ko‘paytmalar o‘zgarishsiz qoladi.

Bu ko‘paytmalarning ishorasini aniqlovchi o‘rniga qo‘yish esa $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ dan $\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ ga o‘zgaradi.

Chunki, A determinantdagi $a_{1,\alpha_1}\cdot a_{2,\alpha_2}\cdot\ldots\cdot a_{n,\alpha_n}$ element A^T determinantda $a_{\alpha_{1,1}}\cdot a_{\alpha_{2,2}}\cdot\ldots\cdot a_{\alpha_{n,n}}$ kabi o‘rinda keladi. $\operatorname{sgn}(\alpha) = \operatorname{sgn}(\alpha^{-1})$ ekanligidan, hosil bo‘lgan ko‘paytmalarning ishoralari ham bir hil bo‘lishi kelib chiqadi. Shunday qilib, A^T matritsaning determinanti A matritsaning determinantiga teng ekan. □

Ushbu xossadan determinantning satrlari uchun o‘rinli bo‘ladigan barcha xossalari ustunlari uchun ham o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

Shuning uchun determinantning qolgan xossalarini faqat satrlar uchun keltirish kifoya.

Quyidagi ikkita xossa determinantning istalgan satrlari bo‘yicha chiziqli ekanligini anglatadi.

9.3-xossa. Agar determinantning biror satri ikkita qo‘shiluvchilardan iborat bo‘lsa, u holda bu determinant satrlari shu qo‘shiluvchilardan iborat bo‘lgan ikkita determinantning yig‘indisidan iborat bo‘ladi, ya’ni:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i,1}+c_{i,1} & \dots & b_{i,n}+c_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots. & \dots \\ b_{i,1} & \dots. & b_{i,n} \\ \dots & \dots. & \dots \\ a_{n,1} & \dots. & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots. & \dots \\ c_{i,1} & \dots. & c_{i,n} \\ \dots & \dots. & \dots \\ a_{n,1} & \dots. & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Isbot.

$$\Delta = \sum_{\alpha\in S_n} \operatorname{sgn}(\alpha)\cdot a_{1,\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(b_{i,\alpha_i}+c_{i,\alpha_i})\cdot\ldots\cdot a_{n,\alpha_n} =$$

$$= \sum_{\alpha\in S_n} \operatorname{sgn}(\alpha)\cdot a_{1,\alpha_1}\cdot\ldots\cdot b_{i,\alpha_i}\cdot\ldots\cdot a_{n,\alpha_n} + \sum_{\alpha\in S_n} \operatorname{sgn}(\alpha)\cdot a_{1,\alpha_1}\cdot\ldots\cdot c_{i,\alpha_i}\cdot\ldots\cdot a_{n,\alpha_n}$$

bo‘lib, bu qo‘shiluvchilar mos ravishda

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots. & \dots \\ b_{i,1} & \dots. & b_{i,n} \\ \dots & \dots. & \dots \\ a_{1,n} & \dots. & a_{n,n} \end{vmatrix} \text{ va } \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots. & \dots \\ c_{i,1} & \dots. & c_{i,n} \\ \dots & \dots. & \dots \\ a_{1,n} & \dots. & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

ga teng bo‘ladi. □

Isbotlangan xossa determinantning satri bir nechta qo‘shiluvchilardan iborat bo‘lgan holda ham o‘rinlidir.

9.4-xossa. Agar determinantning biror-bir satri umumiy ko‘paytuvchiga ega bo‘lsa, u holda bu umumiy ko‘paytuvchini determinant belgisidan tashqariga chiqarib yozish mumkin, ya’ni

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots. & \dots \\ ka_{i,1} & \dots. & ka_{i,n} \\ \dots & \dots. & \dots \\ a_{1,n} & \dots. & a_{n,n} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots. & \dots \\ a_{i,1} & \dots. & a_{i,n} \\ \dots & \dots. & \dots \\ a_{1,n} & \dots. & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Isbot. Haqiqatan,

$$\Delta = \sum_{\alpha \in S_n} \operatorname{sgn}(\alpha) \cdot a_{1,\alpha_1} \cdot \ldots \cdot ka_{i,\alpha_i} \cdot \ldots \cdot a_{n,\alpha_n} =$$

$$k \sum_{\alpha \in S_n} \operatorname{sgn}(\alpha) \cdot a_{1,\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a_{i,\alpha_i} \cdot \ldots \cdot a_{n,\alpha_n} = k \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots. & \dots \\ a_{i,1} & \dots. & a_{i,n} \\ \dots & \dots. & \dots \\ a_{1,n} & \dots. & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

9.5-xossa. Agar determinantning biror satri nollardan iborat bo‘lsa, u holda determinantning qiymati nolga teng bo‘ladi.

Isbot. Haqiqatan, determinant ta’rifiga asosan yig‘indidagi har bir ko‘paytmada barcha satrlardan bittadan element ishtirok etadi. Xususan, barcha elementlari nolga teng bo‘lgan satrdan ham albatta bitta element, ya’ni nol olinadi. Demak, ko‘paytmalar nolga teng bo‘lib, ularning yig‘indisi bo‘lgan determinantning qiymati ham nolga teng bo‘ladi. □

9.6-xossa. Determinantning ixtiyoriy ikkita satri o‘rnini almashtirish natijasida uning faqat ishorasigina o‘zgaradi, ya’ni

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j,1} & \dots & a_{j,n} \\ \dots & \dots & .. \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j,1} & \dots & a_{j,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & .. \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Isbot. Agar birinchi determinantning umumiy hadi $a_{1,\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a_{i,\alpha_i} \cdot \ldots \cdot a_{j,\alpha_j} \cdot \ldots \cdot a_{n,\alpha_n}$ bo‘lsa, satrlarni almashtirishdan so‘ng hosil bo‘lgan determinantning umumiy hadi

$$a_{1,\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a_{j,\alpha_j} \cdot \ldots \cdot a_{i,\alpha_i} \cdot \ldots \cdot a_{n,\alpha_n}$$

bo‘ladi. Bu hadlarga mos keluvchi o‘rniga qo‘yishlar esa,

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \text{va} \begin{pmatrix} 1 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

bo‘lib, ularning ishoralari o‘zaro qarama-qarshi bo‘ladi.

Demak, determinantlarning umumiy hadlari qarama-qarshi ishorali bo‘lganligi uchun determinantlarning qiymatlari ham faqat ishorasi bilan farq qiladi. □

Bu xossadan to‘g‘ridan-to‘g‘ri quyidagi xossani hosil qilamiz.

9.7-xossa. Bir hil satrlarga ega bo‘lgan determinantning qiymati nolga teng.

Isbot. Faraz qilaylik, determinantning $i-$satri $j-$satr bilan bir hil bo‘lsin. U holda oldingi xossaga asosan bu satrlarni o‘rinlarini almashtirish natijasi unga ishorasi qarama-qarshi bo‘lgan determinantni hosil qilamiz va ular aynan tengdir, ya’ni $\Delta = -\Delta$ bo‘lib, bundan $2\Delta = 0,\ \Delta = 0$ hosil bo‘ladi. □

9.4 va 9.7-xossalardan quyidagi xossaga ega bo‘lamiz:

9.8-xossa. Proporsional satrlarga ega bo‘lgan determinantning qiymati nolga teng.

Isbot.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ ka_{i,1} & \ldots & ka_{i,n} \\ \ldots & \ldots & .. \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,n} \\ \ldots & \ldots & .. \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = 0.$$

Endi biz determinantlarni hisoblashda muhim ahamiyatga ega bo‘lgan xossani keltiramiz.

9.9-xossa. Agar determinantning biror satrini λ soniga ko‘paytirib, boshqa bir satriga qo‘shsak, determinantning qiymati o‘zgarmaydi.

Isbot. Determinantni $i-$satrini λ ga ko‘paytirib, $j-$satriga qo‘shamiz:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda a_{i,1} + a_{j,1} & \ldots & \lambda a_{i,n} + a_{j,n} \\ \ldots & \ldots & .. \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda a_{i,1} & \ldots & \lambda a_{i,n} \\ \ldots & \ldots & .. \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j,1} & \ldots & a_{j,n} \\ \ldots & \ldots & .. \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & .. \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j,1} & \dots & a_{j,n} \\ \dots & \dots & .. \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \lambda \cdot 0 + \Delta = \Delta.$$

Misol 9.2. Ushbu determinantni xossalardan foydalanib hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 11 & -8 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 13 & -12 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 27 = -54.$$

10 - §. Minorlar va algebraik to‘ldiruvchilar

Endi biz determinantlarni hisoblashda muhim vositachi vazifasini bajaruvchi minor va algebraik to‘ldiruvchi tushunchalarini kiritamiz. Minorlar va algebraik to‘ldiruvchilar determinantlarning tartibini pasaytirib hisoblashda asosiy rol o‘ynaydi.

Bizga quyidagi n-tartibli determinant berilgan bo‘lsin

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Determinantning ixtiyoriy $a_{i,j}$ elementining *algebraik to'ldiruvchisi* deb, $a_{i,j}$ elementni 1 bilan, i-satr va j-ustun qolgan elementlarini nollar bilan almashtirishdan hosil bo'lgan determinantga aytiladi, ya'ni $a_{i,j}$ elementning algebraik to'ldiruvchisi quyidagi ko'rinishga ega:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & 0 & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & 0 & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Berilgan $a_{i,j}$ elementning algebraik to'ldiruvchisi $A_{i,j}$ kabi belgilanadi.

10.1-xossa. Determinantning qiymati uning ixtiyoriy satri elementlari bilan mos algebraik to'ldiruvchilari ko'paytmalarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$\det(A) = a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + \dots + a_{i,n}A_{i,n}. \qquad (10.1)$$

Isbot. Tasdiqni isbotlash uchun determinantni qiyudagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i,1}+0+\ldots+0 & \ldots & 0+\ldots+a_{i,j}+\ldots+0 & \ldots & 0+\ldots+0+a_{i,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

9.3-xossaga ko‘ra ushbu determinantni n ta determinantlar yig‘indisi shaklida ifodalash mumkin:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i,1} & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & a_{i,j} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} +$$

$$+ \ldots + \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & a_{i,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Hosil bo‘lgan determinantlarning i-satrlaridan mos ravishda $a_{i,1}$, $a_{i,2}$, …, $a_{i,n}$ sonlarini determinantlar tashqarisiga chiqazib yozamiz:

$$\det(A) = a_{i,1} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$+a_{i,j}\begin{vmatrix} a_{1,1} & ... & a_{1,j} & ... & a_{1,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n,1} & ... & a_{n,j} & ... & a_{n,n} \end{vmatrix} + ... + a_{i,n}\begin{vmatrix} a_{1,1} & ... & a_{1,j} & ... & a_{1,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n,1} & ... & a_{n,j} & ... & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Ushbu determinantlarni algebraik to‘ldiruvchilarga teng ekanligini ko‘rish qiyin emas. Buning uchun birinchi determinantning i-satrini $-a_{1,1}$ ga ko‘raytirib birinchi satrga, $-a_{2,1}$ ga ko‘paytirib ikkinchi satrga, va hokazo $-a_{n,1}$ ga ko‘raytirib oxirgi satrga qo‘shsak $A_{i,1}$ algebraik to‘ldiruvchi hosil bo‘ladi.

Xuddi shunday qolgan determinantlar $A_{i,2}$, …, $A_{i,n}$ algebraik to‘ldiruvchilarni beradi, Demak,

$$\det(A) = a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + ... + a_{i,n}A_{i,n}.$$

□

Determinantning ushbu xossasi uni biror satri bo‘yicha yoyish xossasi deyiladi.

Agar $\det(A) = a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + ... + a_{i,n}A_{i,n}$ yoyilmada i-satrining elementlarini ixtiyoriy n ta sonlar sistemasi $b_1, b_2, ..., b_n$ bilan almashtirsak, hosil bo‘ladigan

$$b_1A_{i,1} + b_2A_{i,2} + ... + b_nA_{i,n} \tag{10.2}$$

ifoda determinantning i-satrini shu sonlar bilan almashtirish natijasida hosil bo‘ladigan ushbu

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & ... & a_{1,j} & ... & a_{1,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ b_1 & ... & b_j & ... & b_n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n,1} & ... & a_{n,j} & ... & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

determinantga teng bo‘ladi.

Demak, biror satr algebraik to‘ldiruvchilarini berilgan n *ta* $b_1, b_2, ..., b_n$ *sonlarga ko‘paytmalarining yig‘indisi shu satr elementlarini berilgan sonlar bilan almashtirishdan hosil bo‘lgan matritsaning determinantiga teng.*

Bu xulosadan quyidagi xossa osongina kelib chiqadi.

10.2-xossa. Determinantning biror satri elementlarini boshqa bir satr algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytmalari yig‘indisiga nolga teng, ya’ni

$$a_{i,1}A_{k,1} + a_{i,2}A_{k,2} + ... + a_{i,n}A_{k,n} = 0, \text{ bu yerda } i \neq k. \qquad (10.3)$$

Isbot. Ma’lumki,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & ... & a_{1,j} & ... & a_{1,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i,1} & ... & a_{i,j} & ... & a_{i,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{k,1} & ... & a_{k,j} & ... & a_{k,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n,1} & ... & a_{n,j} & ... & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{k,1}A_{k,1} + a_{k,2}A_{k,2} + ... + a_{k,n}A_{k,n}.$$

Ushbu tenglikning o‘ng tomonidagi $a_{k,1}, a_{k,2}, ..., a_{k,n}$ elementlarni mos ravishda $a_{i,1}, a_{i,2}, ..., a_{i,n}$ lar bilan almashtirsak,

$$a_{i,1}A_{k,1} + a_{i,2}A_{k,2} + ... + a_{i,n}A_{k,n} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & ... & a_{1,j} & ... & a_{1,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i,1} & ... & a_{i,j} & ... & a_{i,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i,1} & ... & a_{i,j} & ... & a_{i,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n,1} & ... & a_{n,j} & ... & a_{n,n} \end{vmatrix} = 0$$

ekanligini hosil qilamiz. □

Endi minor tushunchasini kiritamiz. Ushbu mavzuda faqat $n-1$-tartibli minorni aniqlash bilan chegaralanib, ixtiyoriy tartibli minor ta’rifini keyingi mavzuda keltiramiz.

Determinantning $n-1$-tartibli *minori* deb, uning i-satr va j-ustunini o‘chirishdan hosil bo‘lgan $n-1$-tartibli determinantga aytiladi va $\Delta_{i,j}$ kabi belgilanadi, ya’ni

$$\Delta_{i,j}=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

10.3-tasdiq. $A_{i,j}=(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$, ya’ni algebraik to‘ldiruvchi unga mos $n-1$ tartibli minor bilan faqat ishoragagina farq qilishi mumkin.

Isbot. Tasdiq isbotini dastlab, $i=j=1$ bo‘lgan hol uchun ko‘rsatamiz:

$$A_{1,1}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Determinant ta’rifiga ko‘ra

$$A_{1,1}=\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}(-1)^{inv(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}a_{1,\alpha_1}\cdot a_{2,\alpha_2}\cdot\ldots\cdot a_{n,\alpha_n}.$$

Lekin, $a_{1,1}=1$ va $a_{1,k}=a_{k,1}=0,\ \ 2\le k\le n$ bo‘lganligi uchun, $\alpha_1=1$ bo‘lib, $\alpha_2,\dots,\alpha_n$ sonlari esa $2,\dots,n$ sonlaridan hosil bo‘lgan o‘rin almashtirish bo‘ladi. Bundan tashqari

$$inv(1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=inv(\alpha_2,\dots,\alpha_n)$$

ekanligini hisobga olsak,

$$A_{1,1} = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} (-1)^{inv(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{1,\alpha_1} \cdot a_{2,\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n,\alpha_n} =$$

$$\sum_{(\alpha_2,\dots,\alpha_n)} (-1)^{inv(\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{2,\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n,\alpha_n} = \begin{vmatrix} a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \Delta_{1,1}$$

kelib chiqadi.

Endi tasdiqni ixtiyoriy i va j uchun isbotlaymiz:

$$A_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Determinantning 9.6-xossasidan foydalanib, ushbu determinantdagi 1 sonini chap yuqori burchakka ko‘chiramiz. Buning uchun i-satrni ketma-ket o‘zidan oldingi starlar bilan, so‘nga j-ustinni o‘zidan oldingi ustunlar bilan almashtirish kifoya. Bu almashtirishlar natijasida determinantning qiymati faqat $(-1)^{i-1+j-1} = (-1)^{i+j}$ ga o‘zgarishini hisobga olsak,

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Yuqorida isbotlangan $i=j=1$ holdan foydalansak, $A_{i,j}=(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ ekanligini hosil qilamiz. □

11 - §. Laplas teoremasi

Biz avvalgi mavzuda $A_{i,j}$ algebraik to‘ldiruvchi va $n-1$-tartibli $\Delta_{i,j}$ minor tushunchalarini kiritgan edik. Ushbu mavzuda ixtiyoriy k-tartibli minor tushunchasini kiritamiz.

Berilgan n-tartibli determinantning ixtiyoriy k ta satr va k ta ustunining kesishgan joylaridagi elementlardan hosil qilingan k-tartibli determinantga *k-tartibli minor* deyiladi. Determinantning $i_1, i_2, ..., i_k$ satrlari va $j_1, j_2, ..., j_k$ ustunlari kesishmasidan tuzilgan minor $M_{i_1,i_2,...,i_k}^{j_1,j_2,...,j_k}$ kabi belgilanadi. Xususan, determinantning elementlarini ham birinchi tartibli minorlar deb qarash mumkin.

Tanlab olingan k ta satr va k ta ustunlarni o‘chirib tashlash natijasida hosil bo‘lgan $(n-k)$-tartibli determinantga, berilgan minorning *to‘ldiruvchi minori* deyiladi. $M_{i_1,i_2,...,i_k}^{j_1,j_2,...,j_k}$ minorning to‘ldiruvchi minori $\overline{M}_{i_1,i_2,...,i_k}^{j_1,j_2,...,j_k}$ kabi belgilanadi.

k-tartibli $M_{i_1,i_2,...,i_k}^{j_1,j_2,...,j_k}$ minorning *algebraik to‘ldiruvchisi deb*

$$\overline{A}_{i_1,i_2,...,i_k}^{j_1,j_2,...,j_k}=(-1)^{S_M}\,\overline{M}_{i_1,i_2,...,i_k}^{j_1,j_2,...,j_k} \tag{11.1}$$

ifodaga aytiladi, bu yerda

$$S_M=(i_1+i_2+...+i_k)+(j_1+j_2+...+j_k).$$

Ta’kidlash joizki, algebraik to‘ldiruvchi tushunchasi minor birinchi tartibli bo‘lgan holda 10-mavzuda kiritilgan tushuncha bilan ustma-ust tushadi, ya’ni $A_{i,j}=\overline{A}_i^j$. $n-1$-tartibli $\Delta_{i,j}$ minor esa birinchi tartibli $a_{i,j}$ minorning to‘ldiruvchi minori bo‘ladi.

Misol 11.1. Ushbu $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ determinant uchun

$$M_{1,3} = 2,\ M_{1,3}^{2,3} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 24,\ M_{1,2,3}^{1,3,4} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -86.$$

Berilgan matritsaning bosh diagonalida joylashgan

$$a_{1,1},\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{12,} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}, ...,\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,k} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{k,1} & a_{k,2} & ... & a_{k,k} \end{vmatrix}$$

minorlar matritsaning *bosh minorlari* deb ataladi.

Minor, hamda unga mos keluvchi to‘ldiruvchi minor va algebraik to‘ldiruvchilarni qulaylik uchun M, $\overline{M}$ va $\overline{A}$ lar bilan belgilab olamiz.

11.1-lemma. $M \cdot \overline{A}$ ko‘paytmaning hadlari $|A|$ determinantning hadlari bo‘lib, ular bir hil ishorali bo‘ladi.

Isbot. Lemma isbotini dastlab, berilgan M minor k-tartibli bosh minor bo‘lgan hol uchun ko‘rsatamiz:

$$M \cdot \overline{A} = M \cdot (-1)^{S_M} \cdot \overline{M} = (-1)^{S_M} \cdot M \cdot \overline{M}.$$

U holda

$$S_M = (1+2+...+k)+(1+2+...+k) = 2(1+2+...+k)$$

juft son bo‘ladi. Demak,

$$M \cdot \overline{A} = M \cdot \overline{M}.$$

Ma’lumki, M va $\overline{M}$ minorlarning hadlari mos ravishda

$$\operatorname{sgn}(\alpha) \cdot a_{1,\alpha_1} \cdot a_{2,\alpha_2} \cdot ... \cdot a_{k,\alpha_k} \text{ va } \operatorname{sgn}(\beta) \cdot a_{k+1,\beta_{k+1}} \cdot a_{k+2,\beta_{k+2}} \cdot ... \cdot a_{n,\beta_n}$$

ko‘rinishda bo‘ladi, bu yerda

$$\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & ... & k\\ \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_k\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix}k+1 & k+2 & ... & n\\ \beta_{k+1} & \beta_{k+2} & ... & \beta_n\end{pmatrix}$$

va $\operatorname{sgn}(\alpha)=(-1)^{inv\alpha}$, $\operatorname{sgn}(\beta)=(-1)^{inv\beta}$.

Ushbu hadlarning ko‘paytmasi

$$\operatorname{sgn}(\alpha)\cdot\operatorname{sgn}(\beta)\cdot a_{1,\alpha_1}\cdot a_{2,\alpha_2}\cdot...\cdot a_{k,\alpha_k}\cdot a_{k+1,\beta_{k+1}}\cdot a_{k+2,\beta_{k+2}}\cdot...\cdot a_{n,\beta_n}$$

bo‘lib, bu ko‘paytma determinantning turli satr va ustunlaridan bittadan olingan n ta elementlarning ko‘paytmasidan iborat, ya’ni n-tartibli determinantning hadi bo‘ladi. Endi n-tartibli determinantning ushbu hadi ishorasi $\operatorname{sgn}(\alpha)\cdot\operatorname{sgn}(\beta)$ ga teng ekanligini ko‘rsatamiz.

Haqiqatan ham, bu hadning indekslaridan tuzilgan

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k & \beta_{k+1} & \dots & \beta_n\end{pmatrix}$$

o‘rniga qo‘yishning $inv\alpha+inv\beta$ ta inversiyasi bor, chunki hech qaysi α_i hech bir β_j bilan inversiya tashkil qilmaydi, ya’ni barcha α_i sonlari β_j lardan kichik.

Shunday qilib, biz M minor k-tartibli bosh minor bo‘lgan holda $M\cdot\bar{A}$ ko‘paytmaning hadlari $|A|$ determinantning hadlari bo‘lishini ko‘rsatdik.

Endi umumiy holni, ya’ni M minor $M_{i_1,i_2,...,i_k}^{j_1,j_2,...,j_k}$ bo‘lgan holni qaraymiz. Ma’limki, $i_1<i_2<...<i_k$, $j_1<j_2<...<j_k$ deb olish mumkin.

U holda $|A|$ determinantning $i_1, i_2, ..., i_k$ satrlari va $j_1, j_2, ..., j_k$ ustunlarini mos ravishda o‘zidan oldingi satrlar va ustunlar bilan $i_1-1, i_2-2, ..., i_k-k$ va $j_1-1, j_2-2, ..., j_k-k$ marotaba almashtirsak, hosil bo‘lgan determinantda berilgan M minor bosh minor bo‘ladi.

Hosil bo‘lgan $|A'|$ determinant oldingi $|A|$ determinant bilan faqat $(-1)^z$ ishora bilangina farq qiladi, ya’ni

$$|A| = (-1)^z \cdot |A'|,$$

bu yerda

$$z = (i_1 - 1) + (i_2 - 2) + ... + (i_k - k) + (j_1 - 1) + (j_2 - 2) + ... + (j_k - k) =$$

$$= (i_1 + i_2 + ... + i_k) + (j_1 + j_2 + ... + j_k) - 2(1 + 2 + ... + k) =$$

$$= S_M - 2(1 + 2 + ... + k).$$

Demak,

$$|A| = (-1)^{S_M - 2(1+2+..+k)} \cdot |A'| = (-1)^{S_M} \cdot |A'|.$$

Bu yerdagi $|A'|$ determinantda M minor bosh minor bo‘lganligi uchun $M \cdot \overline{M}$ ko‘paytmasining hadlari $|A'|$ determinantning hadlari bo‘lishi kelib chiqadi. $M \cdot \overline{A} = (-1)^{S_M} M \cdot \overline{M}$ ekanligidan $M \cdot \overline{A}$ ko‘paytmaning hadlari $|A|$ determinantning hadlari bo‘lishi kelib chiqadi. □

Endi biz determinantni bir nechta satri yoki ustuni bo‘yicha yoyish haqidagi Laplas teoremani keltiramiz.

11.2-teorema. (Laplas teoremasi). Determinantning tanlab olingan k ta $(1 \le k \le n-1)$ satri bo‘yicha barcha k-tartibli minorlarining o‘z algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytmalari yig‘indisi determinantning qiymatiga teng.

Isbot. Teoremaning shartiga asosan biz

$$|A| = M_1 A_1 + M_2 A_2 + ... + M_z A_z \tag{11.2}$$

yoyilmaning to‘g‘ri ekanligini ko‘rsatishimiz kerak. Bu yerda M_i lar tanlab olingan $i_1, i_2, ..., i_k$ satrlar bo‘yicha olingan barcha minorlar va A_i lar minorlarga mos keluvchi algebraik to‘ldiruvchilardir.

Yuqoridagi lemmaga asosan $M_i A_i,\ i = \overline{1, z}$ ko‘paytmalarning xar bir hadi determinantning hadi bo‘lib, ular bir hil ishorali bo‘ladi.

Aytaylik,

$$a_{1,\alpha_1} \cdot a_{2,\alpha_2} \cdot ... \cdot a_{n,\alpha_n}$$

determinantning ixtiyoriy hadi bo‘lsin. Bu ko‘paytmadan tanlab olingan $i_1, i_2, ..., i_k$ satrlarga tegishli bo‘lgan elementlarning ko‘paytmasini olamiz:

$$a_{i_1,\alpha_{i_1}} \cdot a_{i_2,\alpha_{i_2}} \cdot ... \cdot a_{i_k,\alpha_{i_k}}.$$

Bu ko‘paytma $i_1, i_2, ..., i_k$ satrlar va $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_k}$ ustunlarning kesishmasida turuvchi k-tartibli M minorning umumiy hadi bo‘lib, olinmay qolgan ko‘paytuvchilar $(n-k)$-tartibli $\overline{M}$ to‘ldiruvchi minorning umumiy hadi bo‘ladi.

Shunday qilib, determinantning xar qanday hadi tanlab olingan satrlar bo‘yicha M minor bilan to‘ldiruvchi $\overline{M}$ minorining tarkibiga kiradi. Determinantda bo‘lgan hadni hosil qilish uchun esa, to‘ldiruvchi minorni algebraik to‘ldiruvchi bilan almashtirish kifoya.

Endi biz (11.2) tenglikning o‘ng tomonidagi hadlar soni chap tomonida hadlar soniga teng ekanligini ko‘rsatamiz. Bizga ma’lumki, M_i minorda $k!$ ta had bo‘lib, A_i algebraik to‘ldiruvchida esa $(n-k)!$ ta had mavjud. Demak, $M_i A_i$ ko‘paytmada $k!(n-k)!$ ta had ishtirok etadi. Ma’lumki, tanlab olingan k ta satrdan hosil qilinadikan barcha k-tartibli minorlar soni n ta sondan k ta sonni tanlab olishlar soniga, ya’ni C_n^k ga teng. Demak, o‘ng tomondagi barcha hadlar soni

$$C_n^k \cdot k! \cdot (n-k)! = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot k! \cdot (n-k)! = n!$$

ga teng. Bu esa chap tomondagi hadlar soni bilan o‘ng tomondagi hadlar soni teng ekanligini bildiradi. Chunki, n-tartibli determinantning $n!$ ta hadi mavjud. Demak, biz determinantning barcha hadi o‘ng tomonda ham aynan bir marotaba ishtirok etishini ko‘rsatdik.

□

Misol 11.2. Ushbu 4-tartibli determinantni Laplas teoremasidan foydalanib hisoblang:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}.$$

Bu determinantni birinchi va uchinchi satrlari bo‘yicha yoyib hisoblaymiz, ya’ni $i_1 = 1$, $i_2 = 3$ bo‘lgan holni tanlaymiz. $k = 2$ bo‘lganligi uchun $z = C_4^2 = \dfrac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$ bo‘ladi.

Determinantning qiymati esa quyidagiga tengdir:

$$d = M_{1,3}^{1,2}A_{1,3}^{1,2} + M_{1,3}^{1,3}A_{1,3}^{1,3} + M_{1,3}^{1,4}A_{1,3}^{1,4} + M_{1,3}^{2,3}A_{1,3}^{2,3} + M_{1,3}^{2,4}A_{1,3}^{2,4} + M_{1,3}^{3,4}A_{1,3}^{3,4} =$$

$$= (-1)^{1+3+1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3+1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+3+1+4} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3+2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+3+2+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3+3+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+3+1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = (-3-2)\cdot(-25-6) = -5\cdot(-31) = 155.$$

Yuqoridagi misoldan ko‘rinib turibdiki, Laplas teoremasini qo‘llashda tarkibida nol ishtirok etgan satr yoki ustunlarni tanlab olish, hisob kitoblarni ancha yengillashtiradi. Demak, determinantda yetarlicha nollar ishtirok etgan holda, aynan noli ko‘p satrlar uchun Laplas teoremasini qo‘llash orqali determinantni tez va oson hisoblash mumkin.

12 - §. Teskari matritsa va determinantninq qo‘shimcha xossalari

Ushbu paragrafda biz n-tartibli matritsaning determinanti bilan bog‘liq masalalar bilan shug‘ullanamiz.

12.1-ta’rif. Determinanti nolga teng bo‘lgan matritsa *xos* matritsa, noldan farqli bo‘lgan matritsa esa *xosmas* matritsa deyiladi.

Bizga A va B n-tartibli kvadrat matritsalar berilgan bo‘lsin. Ma’lumki, ushbu matritsalar ko‘paytmasi $A\cdot B$ ham n-tartibli kvadrat matritsa bo‘ladi.

12.2-teorema. Ixtiyoriy A va B kvadrat matritsalar uchun

$$\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$$

tenglik o‘rinli, ya’ni matritsalarning ko‘paytmasining determinanti determinantlarning ko‘paytmasiga teng.

Isbot. Aytaylik, $A=(a_{i,j})$ va $B=(b_{i,j})$ bo‘lib, ularning ko‘paytmasi $A\cdot B=C=(c_{i,j})$ bo‘lsin. A va B matritsalar yordamida quyidagi $2n$-tartibli determinantni tuzib olamiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Laplas teoremasiga ko‘ra

$$\Delta=\det(A)\cdot\det(B). \tag{12.1}$$

Ikkinchi tomondan Δ determinantni determinant xossalaridan foydalanib hisoblaymiz. Buning uchun Δ determinantni $1,2,\dots,n$ ustunlarini mos ravishda $b_{1,1},\, b_{2,1},\, \dots,\, b_{n,1}$ larga ko‘paytirib, $(n+1)$-ustuniga qo‘shamiz, so‘ngra $b_{1,2}, b_{2,2}, \ldots, b_{n,2}$ larga ko‘paytirib, $(n+2)$-ustuniga qo‘shamiz va hokazo, $b_{1,n}, b_{2,n}, \ldots, b_{n,n}$ larga ko‘paytirib, $2n$-ustuniga qo‘shamiz. Natijada, Δ determinantning $b_{i,j}$ elementlari turgan elementlar nolga aylanadi. Yuqori o‘ng burchagida turgan nollar o‘rniga esa

$$a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \ldots + a_{i,n}b_{n,j}, \ (i, j = \overline{1,n})$$

elementlar joylashib, bu element $C = A \cdot B$ ko‘paytmaning aynan $c_{i,j}$ elementlaridan iboratdir. Demak, determinant quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & c_{1,1} & c_{1,2} & \ldots & c_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & c_{2,1} & c_{2,2} & \ldots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} & c_{n,1} & c_{n,2} & \ldots & c_{n,n} \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Laplas teoremasini yana bir bor qo‘llab, determinantni uning oxirgi n ta ustuni bo‘yicha yoyamiz. $|C|$ minor uchun to‘ldiruvchi minori $\begin{vmatrix} -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -1 & ... & 0 \\ .. & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -1 \end{vmatrix}$ bo‘lib, uning qiymati $(-1)^n$ ga teng. $|C|$ minor $1, 2, \ldots, n$ satrlarda va $n+1, n+2, \ldots, 2n$ ustunlarda joylashganligi sababli

$$\Delta = (-1)^{S_C} \cdot (-1)^n \, |C|,$$

$$S_C = (1+2+\ldots+n)+(n+1+n+2+\ldots+2n) = \frac{1+2n}{2}\cdot 2n = n+2n^2$$

bo‘ladi. Demak,

$$\Delta = (-1)^{n+2n^2}(-1)^n\,|C| = (-1)^{2n+2n^2}\,|C| = (-1)^{2(n+n^2)}\,|C| = |C|.$$

Bundan esa $|C| = |A|\cdot|B|$ kelib chiqadi, ya’ni $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$.

□

Ushbu teorema bir nechta matritsalarning ko‘paytmalari uchun ham o‘rinlidir, ya’ni

$$\det(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_s) = \det A_1\cdot\det A_2\cdot\ldots\cdot\det A_s,$$

bu yerda $A_i \in M_n(\mathbb{K})$.

12.2.-teoremadan xos va xosmas matritsalar uchun quyidagi xossalar kelib chiqadi.

12.3-xossa. a) Xos matritsalar ko‘paytmasi ham xosdir;

b) Xosmas matritsalar ko‘paytmasi ham xosmasdir;

c) Agar matritsalar ko‘paytmasida biror ko‘paytuvchisi xos matritsa bo‘lsa, u holda ko‘paytma ham xosdir.

Biz 8-mavzuda berilgan A kvadrat matritsaning teskarisi tushunchasini kiritgan edik. Endi teskari matritsani topish usulini keltiramiz.

12.4-teorema. A matritsa teskarilanuvchi bo‘lishi uchun uning xosmas bo‘lishi zarur va yetarli.

Isbot. *Zaruriyligi.* A matritsa teskarilanuvchi bo‘lsin, u holda A^{-1} teskari matritsa mavjud va

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E.$$

12.2-teoremaga ko‘ra,

$$\det(A\cdot A^{-1}) = \det(E),$$

$$\det(A)\cdot\det(A^{-1}) = 1.$$

Ushbu tenglikdan $\det(A)\neq 0$ kelib chiqadi.

Yetarliligi. A matritsa xosmas bo‘lsin. A matritsaning barcha $a_{i,j}$ elementlari $A_{i,j}$ algebraik to‘ldiruvchilardan n-tartibli

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \dots & A_{n,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \dots & A_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1,n} & A_{2,n} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} \qquad (12.2)$$

matritsani tuzib olamiz. A^* matritsaga A matritsaning biriktirilgan matritsasi deyiladi. Endi AA^* va A^*A ko‘paytmalarni topamiz.

Ravshanki,

$$AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix} \qquad (12.3)$$

bo‘ladi, bu yerda $d = \det A$.

Haqiqatan ham, A matritsani i-satrini A^* matritsaning i-ustunining mos elementlariga ko‘paytirib qo‘shsak, AA^* matritsaning i-satr va i-ustunida

$$a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + \dots + a_{i,n}A_{i,n} = d$$

element hosil bo‘ladi.

Xuddi shunday A matritsaning i-satrini A^* matritsaning j-ustuniga mos ravishda ko‘paytirib qo‘shishdan hosil bo‘lgan quyidagi element:

$$a_{i,1}A_{j,1} + a_{i,2}A_{j,2} + \dots + a_{i,n}A_{j,n}, \ i \neq j$$

nolga teng bo‘ladi.

A^*A ko‘paytmani ham yuqoridagi kabi hisoblash mumkin.

A matritsa xosmas matritsa bo‘lganligi uchun quyidagi ko‘paytmani qaraymiz.

$$A\left(\frac{1}{d}A^*\right)=\frac{1}{d}\left(AA^*\right)=\frac{1}{d}\begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}=E.$$

Demak, A matritsaga teskari matritsa

$$A^{-1}=\frac{1}{d}A^*=\begin{pmatrix} \frac{A_{1,1}}{d} & \frac{A_{2,1}}{d} & \dots & \frac{A_{n,1}}{d} \\ \frac{A_{1,2}}{d} & \frac{A_{2,2}}{d} & \dots & \frac{A_{n,2}}{d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1,n}}{d} & \frac{A_{2,n}}{d} & \dots & \frac{A_{n,n}}{d} \end{pmatrix}$$

bo‘ladi. □

Teskari matritsa qiyudagi sodda xossalarga ega

12.5-xossa. a) $\det(A^{-1})=\det(A)^{-1}$;

b) $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$;

c) $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$;

d) $\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}$

Misol 12.1. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaning teskarisini toping.

Bu matritsaning determinanti $|A|=-1$ ekanligini hisoblash qiyin emas. Demak, A xosmas matritsa bo‘lib, uning teskarisi mavjud. A ning algebraik to‘ldiruvchilari

$$A_{1,1}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1, \qquad A_{1,2}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{1,3}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1, \qquad A_{2,1}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{2,2}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=3, \qquad A_{2,3}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{3,1}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix}=3, \qquad A_{3,2}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=3,$$

$$A_{3,3}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-4.$$

Demak, biriktirilgan matritsa

$$A^{*}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ -1 & 3 & 3\\ 1 & -3 & -4\end{pmatrix}$$

bo‘lib, teskari matritsa esa $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 1 & -3 & -3\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$ bo‘ladi.

13 - §. Chiziqli tenglamalar sistemasi

Bizga m ta tenglamadan iborat n ta noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\ldots+a_{1,n}x_n=b_1,\\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\ldots+a_{2,n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ a_{m,1}x_1+a_{m,2}x_2+\ldots+a_{m,n}x_n=b_m. \end{cases} \qquad (13.1)$$

bu yerda, $x_1, x_2, ..., x_n$ noma'lumlar. Tenglamalarni birinchi, ikkinchi, va hokazo m-tenglama deb nomerlab chiqilgan deb hisoblaymiz. $a_{i,j}$ koeffitsient i-tenglamadagi x_j noma'lumning koeffitsientini, b_i esa i-tenglamaning ozod hadi.

Noma'lumlar oldidagi koeffitsientlarni *m* ta satr va *n* ta ustundan iborat matritsa ko'rinishida yozish mumkin:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \qquad (13.2)$$

Ushbu matritsa chiziqli tenglamalar sistemasining asosiy matritsasi deyiladi. Quyidagi $\tilde{A}$ matritsa esa chiziqli tenglamalar sistemasining kengaytirilgan matritsasi deyiladi:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}.$$

Agar (13.1) sistemaning barcha ozod hadlari 0 ga teng bo'lsa, u holda (13.1) sistema *bir jinsli tenglamalar sistemasi* deb ataladi.

Agar (13.1) sistemada $m = n$ bo'lsa, u holda ushbu sistema n-tartibli sistema deyiladi. Yechimga ega bo'lgan chiziqli tenglamalar sistemasi *birgalikda* deyiladi.

Masalan, ixtiyoriy bir jinsli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'ladi, chunki barcha noma'lumlarni 0 ga teng qilib olinsa, u bir jinsli tenglamalar sistemasining yechimi bo'ladi.

Yagona yechimga ega bo'lgan sistema *aniq* sistema, bittadan ortiq yechimga ega bo'lgan sistema aniqmas sistema deyiladi.

(13.1) sistemani qulaylik uchun qisqacha

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k = b_i, \ (i = \overline{1,m})$$

yig‘indilar ko‘rinishida yozish mumkin.

Berilgan matrtsaning satrlarini $u_1, u_2, ..., u_m$, ustunlarini esa $v_1, v_2, ..., v_n$ orqali belgilab olamiz.

Kvadrat matritsaning bosh diagonaldan pastda turgan barcha elementlari nollardan iborat bo‘lsa, bunday matritsaga *uchburchak ko‘rinishidagi* matritsa deyiladi, ya’ni

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Agar matritsaning to‘g‘ri burchakli trapesiyali shaklida joylashgan elementlaridan boshqa elementlari nollardan iborat bo‘lsa, bunday matritsaga *trapesiya ko‘rinishidagi* matritsa deyiladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usuli. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usuli sistemadagi tenglamalar soni noma’lumlar soniga teng bo‘lgan hol uchun o‘rinli bo‘ladi.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n = b_2, \\ ...., \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,n}x_n = b_n. \end{cases} \tag{13.3}$$

ko‘rinishdagi tenglamalar sistemalarini qaraymiz.

Tenglamalar sistemasi koeffitsientlaridan tuzilgan matritsa determinantini d harfi bilan belgilaylik:

$$d = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

10-mavzuda berilgan determinantni satr yoki ustun bo‘yicha yoyish xossalaridan quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$d = a_{1,j}A_{1,j} + a_{2,j}A_{2,j} + \dots + a_{1,j}A_{n,j}. \qquad (13.4)$$

Bundan tashqari,

$$a_{1,i}A_{1,j} + a_{2,i}A_{2j} + \dots + a_{n,i}A_{n,j} = 0, \; i \neq j. \qquad (13.5)$$

Ya’ni, determinantning birorta ustunidagi hamma elementlarini boshqa ustunning algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytmalari yig‘indisi nolga teng.

Agar $d = a_{1,j}A_{1,j} + a_{2,j}A_{2,j} + \dots + a_{1,j}A_{n,j}$ yoyilmada j-ustunning elementlarini ixtiyoriy n ta sonlar sistemasi $b_1, b_2, \dots, b_n$ bilan almashtirsak, hosil bo‘ladigan

$$b_1A_{1,j} + b_2A_{2,j} + \dots + b_nA_{n,j} \qquad (13.6)$$

ifoda d determinantning j-ustunini shu sonlar bilan almashtirish natijasida hosil bo‘ladigan ushbu

$$d_j = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & b_1 & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & b_2 & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & b_n & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

determinantning j-ustun bo‘yicha yoyilmasi bo‘ladi.

13.1.-teorema. Agar (13.3) sistemaning determinanti d noldan farqli bo‘lsa, u holda bu sistema yagona yechimga ega bo‘lib, uning ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$x_1 = \frac{d_1}{d},\ x_2 = \frac{d_2}{d},\ \ldots,\ x_n = \frac{d_n}{d}. \qquad (13.7)$$

Isbot. Aytalylik, $d \neq 0$ bo‘lsin.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

sistemadagi birinchi tenglamaning ikkala tomonini $A_{1,j}$ ga, ya’ni $a_{1,j}$ elementning algebraik to‘ldiruvchisiga ko‘paytiramiz. Ikkinchi tenglamaning ikkala tomonini $A_{2,j}$ ga va hokazo, oxirgi tenglamani $A_{n,j}$ ga ko‘paytiramiz. Bu tengliklarning chap va o‘ng tomonlarini alohida-alohida qo‘shib, quyidagi tenglikka kelamiz:

$$\begin{gathered} (a_{1,1}A_{1,j} + a_{2,1}A_{2,j} + \ldots + a_{n,1}A_{n,j})x_1 + \ldots + \\ +(a_{1,j}A_{1,j} + a_{2,j}A_{2,j} + \ldots + a_{n,j}A_{n,j})x_j + \ldots + \\ +(a_{1,n}A_{1,j} + a_{2,n}A_{2,j} + \ldots + a_{n,n}A_{n,j})x_n = \\ = b_1A_{1,j} + b_2A_{2,j} + \ldots + b_nA_{n,j}. \end{gathered}$$

Yuqorida qayd qilingan (13.4), (13.5) va (13.6) munosabatlardan, ushbu tenglikda x_j oldidagi koeffitsient d ga, qolgan koeffitsientlarning barchasi nolga teng ekanligini, ozod had esa d_j determinantga teng bo‘lishini hosil qilamiz. Demak, yuqoridagi tenglik quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$dx_j = d_j,\ 1 \leq j \leq n.$$

$d \neq 0$ bo‘lganligi uchun, $x_j = \dfrac{d_j}{d},\ 1 \leq j \leq n$ kelib chiqadi.

Endi $\alpha_1 = \dfrac{d_1}{d},\ \alpha_2 = \dfrac{d_2}{d},\ \ldots,\ \alpha_n = \dfrac{d_n}{d}$ sonlar haqiqatdan ham (13.3) tenglamalar sistemasini qanoatlantirishini ko‘rsatamiz. Buning uchun sistemaning i-tenglamasiga $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ noma'lumlarning qiymatlarini qo'yamiz. i-tenglamaning chap tomonini $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$ ko'rinishda yozish mumkinligi va $d_j = \sum_{k=1}^{n} b_k A_{i,j}$ bo'lganligi uchun:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot \frac{d_j}{d} = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k A_{k,j} \right) = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{n} b_k \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} A_{k,j} \right).$$

Bu almashtirishlarga $\frac{1}{d}$ soni barcha qo'shiluvchilarda umumiy ko'paytuvchi bo'lib kelganligi uchun uni yig'indi tashqarisiga chiqarishimiz mumkin. Bundan tashqari, qo'shish tartibi o'zgartirilgandan so'ng, b_k ko'paytuvchi ichki yig'indi belgisi tashqarisiga chiqarildi, chunki u ichki yig'indi indeksi j ga bog'liq emas.

Ma`lumki, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} A_{k,j} = a_{i,1} A_{k,1} + a_{i,2} A_{k,2} + ... + a_{i,n} A_{k,n}$ ifoda $k = i$ bo'lganda d ga, qolgan barcha k larda esa 0 ga teng. Shunday qilib, k bo'yicha tashqi yig'indida faqat bitta qo'shiluvchi qoladi va u $b_i d$ ga teng bo'ladi, ya'ni

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot \frac{d_j}{d} = \frac{1}{d} \cdot b_i d = b_i.$$

Bundan $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sonlar haqiqatdan ham (13.3) tenglamalar sistemasi uchun yechim bo'lishi kelib chiqadi. □

Chiziqli tenglamalar sistemsini yechishning ushbu usuliga *Kramer usuli* deyiladi.

Demak, Kramer usuli determinanti noldan farqli bo'lgan n ta noma'lumli n ta tenglamadan iborat chiziqli tenglamalar sistemasini yechimini topish imkonini beradi.

Sistema determinanati nolga teng bo'lgan hollarda Kramer usulini qo'llash maqsadga muvofiq emas. Chunki bu holatda tenglamalar sistemasi yoki yechimga ega emas yoki cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli. Bizga bir hil tartibli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k = b_i,\ i = \overline{1,m} \qquad (13.8)$$

va

$$\sum_{k=1}^{n} c_{i,k} x_k = d_i,\ i = \overline{1,m}. \qquad (13.9)$$

13.2-ta'rif. Agar (13.8) sistemaning ixtiyoriy ikkita tenglamasini o'rinlari almashtirish natijasida (13.9) sistema hosil qilinsa, (13.9) sistemani (13.8) dan $I-$tur elementar almashtirish natijasida hosil qilingan deyiladi.

13.3-ta'rif. Agar (13.8) sistemaning biror tenglamasini biror songa ko'paytirib, boshqa biror tenglamasiga qo'shish natijasida (13.9) sistema hosil qilinsa, (13.9) sistema (13.8) sistemadan $II-$tur elementar almashtirish natijasida hosil qilingan deyiladi.

I tur va II tur elementar almashtirishlarni qisqacha elementar almashtirish deb yuritiladi.

Xar bir chiziqli tenglamalar sistemasiga uning kengaytirilgan matritsasini mos qo'ysak, u holda chiziqli tenglamalar sistemasi ustidagi elementar almashtirishlarga uning kengaytirilgan matritsasi ustida mos elementar almashtirishlar bajarilgan deb qarash mumkin. Aksincha, kengaytirilgan matritsa ustidagi elementar almashtirishlarga (elementar almashtirishlar ta'rifini to'g'ridan-to'g'ri matritsalar uchun ham aytishimiz mumkin) tenglamalar sistemasi ustidagi elementar almashtirishlar mos keladi.

13.4-ta'rif. Agar (13.8) va (13.9) sistemalar bir vaqtning o'zida birgalikda bo'lmasa, yoki bir vaqtda birgalikda bo'lib, bir hil yechimlarga ega bo'lsa, (13.8) va (13.9) sistemalar teng kuchli sistemalar deyiladi va $(9.8)\Leftrightarrow(9.9)$ ko'rinishda yoziladi.

13.5-teorema. Agar (13.9) sistemaga (13.8) sistemadan elementar almashtirishlar natijasida hosil bo'lgan bo'lsa, ular teng kuchlidir.

Isbot. I tur elementar almashtirishlar uchun teoremaning isboti to'g'ridan to'g'ri ko'rinib turibdi. Endi (13.8) sistemaga II tur elementar almashtirishlarni qo'llaymiz, ya'ni (13.8) sistemaning biror-bir i-tenglamasini λ ga ko'paytirib, j-tenglamaga qo'shsak, yangi sistemaning j satrida qolganlari o'zgarmagan holda

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{j,k}+\lambda a_{i,k})x_k=b_j+\lambda b_i$$

tenglama hosil bo'ladi. Agar $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$ sonlar (13.8) sistemaning yechimlari bo'lsa, u holda

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{j,k}+\lambda a_{i,k})x_k^0=\sum_{k=1}^{n}a_{j,k}x_k^0+\lambda\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}x_k^0=b_j+\lambda a_i$$

tenglamaning ham yechimi bo'ladi va aksincha. Elementar almashtirishlar natijasida hosil bo'lgan (13.9) tenglamalar sistemasining yechimi (13.8) tenglamalar sistemasining ham yechimi bo'ladi. □

Endi biz sistemani yechishning eng qulay va ko'p qo'llanadigan usullaridan biri bo'lgan, noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usulini ya'ni, *Gauss usulini* keltiramiz.

1) Faraz qilaylik, (13.8) sistemada $a_{11}\neq 0$ bo'lsin. U holda sistemaning birinchi tenglamasini $-\dfrac{a_{i,1}}{a_{1,1}},\ i=\overline{2,m}$ ga ko'paytirib mos ravishda boshqa tenglamalarga qo'shsak, hosil bo'lgan sistemaning birinchi tenglamasidan boshqa tenglamalarida x_1 noma'lumi oldidagi koeffitsientlari nolga aylanadi.

2) Agar $a_{1,1}=0$ bo‘lsa, x_1 ning $a_{i,1}$ koeffisientlari orasida noldan farqli bo‘lgan tenglamasini izlaymiz va I tur elementar almashtirish yordamida sistemaning birinchi tenglamasi bilan o‘rnini almashtirib, birinchi holatga kelamiz.

3) Agar x_1 oldidagi hamma $a_{i,1}$ koeffitsientlar nollardan iborat bo‘lsa, biz birinchi yoki ikkinchi holatlarni x_2 noma’lum uchun qo‘llaymiz va hokazo, bu jarayonni davom ettirish natijasida biz (13.8) sistemaga teng kuchli bo‘lgan sistemaga kelamiz. Hosil bo‘lgan sistemaga qarab, quyidagi xulosalarni chiqazishimiz mumkin:

1. Agar sistemaning zinapoyali shaklida chap tomonida nol va o‘ng tomonida noldan farqli hadlar qatnashuvchi tenglamalar hosil bo‘lsa, bunday sistema birgalikda bo‘lmaydi.

2. Agar sistema uchburchaksimon

$$\begin{cases} a'_{1,1}x_1+a'_{1,2}x_2+...+a'_{1,n}x_n=b'_1, \\ a'_{2,2}x_2+...+a'_{2,n}x_n=b'_2, \\ ...., \\ a'_{n-1,n-1}x_{n-1}+a'_{n-1,n}x_n=b'_{n-1} \\ a'_{n,n}x_n=b_n \end{cases}$$

shaklga kelib $a'_{1,1}\neq 0,\, a'_{2,2}\neq 0,\, ...,\, a'_{n,n}\neq 0$ bo‘lsa, sistema birgalikda bo‘lib, yechim quyidagi algoritm bo‘yicha topiladi.

Hosil bo‘lgan sistemaning oxirgi $a'_{n,n}x'_n=b'_n$ tenglamasidan $x_n^0=\dfrac{b'_n}{a'_{nn}}$ noma’lumni topib, topilgan noma’lumni bitta yuqoridagi tenglamaga qo‘yamiz. So‘ngra, x_{n-1}^0 noma’lumni topib, uni yuqoridagi tenglamaga qo‘yamiz. Bu jarayonni davom ettirish natijada barcha $x_1^0,\, x_2^0,\, ...,\, x_n^0$ noma’lumlarni aniqlaymiz.

3. Sistema zinapoyali shaklga kelib, zinapoya uchlarida turuvchi noma’lumlar soni r ta $1\le r\le \min(m,n)$ bo‘lsin. U holda ularni tenglamalarning chap tomonida qoldirib, qolgan $n-r$ ta noma’lumni

tenglamalarning o‘ng tomoniga o‘tkaziladi va ularni ozod o‘zgaruvchilar sifatida qabul qilinadi. Natijada tenglamalar sistemasi r ta noma’lumli uchburchak shaklidagi sistemaga keladi. Endi tenglamalarni o‘ng tomoniga o‘tgan $n-r$ ta noma’lumga qiymatlar berib, qolgan r ta noma’lumni topamiz. Demak, bu holatda sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi. Ya’ni, bunday tenglamalar sistemasi birgalikda aniqmas sistema bo‘ladi.

Bundan tashqari, qaralayotgan sistemada tenglamalar soni noma’lumlar sonidan kichik bo‘lsa, u holda sistemani uchburchak shakliga keltirish mumkin emas, chunki Gauss metodi bo‘yicha o‘zgartirish jarayonida tenglamalar soni kamayishi mumkin, ammo ortishi mumkin emas. Demak, bunday holatda sistema zinapoyasimon shaklga keltiriladi va u aniqmas sistema bo‘ladi.

Misol 13.1. Ushbu tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Bu sistemaning kengaytirilgan matritsasini yozib, uni elementar almashtirishlar yordamida o‘zgartiramiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -8 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

$0=6$ tenglamaga ega bo‘lgan sistemaga keldik, demak, berilgan sistema yechimga ega emas.

Misol 13.2. Ushbu tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 23. \end{cases}$$

Sistemaning kengaytirilgan matritsasi uchun elementar almashtirishlarni qo‘llab,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & -9 \\ 2 & -5 & -4 & 23 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 0 & -3 & -10 & 19 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right)$$

sistemaning matritsasini uchburchak shaklga keltiramiz. Demak, bu sistema yagona yechimga ega va quyidagi tenglamalar sistemasiga teng kuchli bo‘ladi:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_2 + 2x_3 = -11, \\ -8x_3 = 8. \end{cases}$$

Bu sistemada pastdan yuqoriga qarab harakat qilib, $x_3 = -1,\ x_2 = -3,\ x_1 = 2$ yagona yechimni topamiz.

Misol 13.3. Ushbu tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 7x_4 = -4. \end{cases}$$

Sistemaning kengaytirilgan matritsasini qaraymiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -7 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 11 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 11 & -6 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 11 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sistemaning matritsasi zinapoyasimon shaklga kelganligi uchun birgalikda va cheksiz ko‘p yechimga ega. x_1 va x_3 noma’lumlar oldidagi koeffitsientlar uchburchak shaklni berganligi uchun x_1, x_4 noma'lumlarini o'ng tomonga o'tkazib, ozod o'zgaruvchilar sifatida qabul qilamiz.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = -2 + 2x_2 + 4x_4, \\ \quad -5x_3 = 6 \qquad -11x_4. \end{cases}$$

Bu yerdan $x_3 = \dfrac{6 - 11x_4}{-5}$ hosil bo'ladi. Bu ifodani yuqoridagi tenglamaga olib borib qo'ysak,

$$x_1 = \frac{8 + 10x_2 - 13x_4}{5}$$

hosil bo'ladi. Shunday qilib,

$$x_1 = \frac{8 + 10x_2 - 13x_4}{5}, \quad x_3 = \frac{-6 + 11x_4}{5}$$

berilgan tenglamalar sistemasi yechimlarining umumiy ko'rinishi bo'ladi.

Bu formulada x_2 va x_4 larga ixtiyoriy qiymatlar berib, x_1, x_3 larni topish orqali xususiy yechimlarni hosil qilish mumkin. Masalan, $x_2 = 1$, $x_4 = 1$ qiymatlar bersak, $x_1 = 1$, $x_3 = 1$ topilib, $(1, 1, 1, 1)$ xususiy yechimga ega bo'lamiz.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning teskari matritsa usuli. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning teskari matritsa usuli ham tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng bo'lgan hol uchun o'rinli bo'ladi.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

ko'rinishdagi tenglamalar sistemasini qaraymiz.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Natijada yuqoridagi tenglamalar sistemasi quyidagi matritsaviy tenglamaga teng kuchli bo‘ladi

$$A\cdot X=B.$$

Kramer usulidan ma’lumki, agar $\det(A)\neq 0$ bo‘lsa, sistema yagona yechimga ega. Bundan tashqari, $\det(A)\neq 0$ ekanligi A matritsaning teskarilanuvchi bo‘lishini bildiradi. Yuqoridagi matritsaviy tenglamaning ikkala tomonini chapdan A^{-1} ga ko‘paytirsak,

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B \Rightarrow E\cdot X=A^{-1}\cdot B \Rightarrow X=A^{-1}\cdot B$$

ekanligi kelib chiqadi.

Demak, tenglamalar sistemasining yechimi $X=A^{-1}\cdot B$ ko‘rinishida bo‘ladi. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning ushbu usuli teskari matritsa usuli deb ataladi.

14 - §. Matritsaning rangi

Bizga

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

matritsa berilgan bo‘lsin. Bu matritsaning satrlarini $u_1, u_2, ..., u_m$ kabi ustunlarini esa $v_1, v_2, ..., v_n$ kabi belgilaymiz. Satrlarning *chiziqli kombinatsiyasi* deb, $c_1u_1 + c_2u_2 + ... + c_mu_m$ satrga aytiladi, bu yerda c_i koeffitsientlar berilgan maydondan olingan sonlar. Ko‘rinib turibdiki, agar bu koeffitsientlar nolga teng bo‘lsa, bu chiziqli kombinatsiya ham nol satrga teng bo‘ladi.

Agar bir vaqtning o‘zida nolga teng bo‘lmagan $c_1, c_2, ..., c_m$ koeffitsientlar mavjud bo‘lib, $c_1u_1 + c_2u_2 + ... + c_mu_m = 0$ bo‘lsa, $u_1, u_2, ..., u_m$ satrlar *chiziqli bog‘liq* deyiladi.

Agarda bunday koeffitsientlar mavjud bo‘lmasa, ya’ni $c_1u_1 + c_2u_2 + ... + c_mu_m = 0$ tenglikdan barcha $c_1, c_2, ..., c_m$ koeffitsient-larning nolga tengligi kelib chiqsa, u holda $u_1, u_2, ..., u_m$ satrlar *chiziqli erkli* deyiladi.

Misol 14.1. $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (-1, 2, 1)$, $u_3 = (1, 4, 3)$ satrlar chiziqli bog‘liq. Chunki, $2u_1 + u_2 - u_3 = (0, 0, 0)$.

$u_1 = (1, 1, 1)$ va $u_2 = (-1, 2, 1)$ satrlar esa chiziqli erkli, chunki $c_1u_1 + c_2u_2 = 0$ tenglikdan

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = 0, \\ c_1 + 2c_2 = 0, \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

shartlar kelib chiqadi, ya’ni $c_1 = c_2 = 0$.

14.1-tasdiq. Berilgan satrlarning chiziqli bog‘liq bo‘lishi uchun bitta satrning qolgan satrlar orqali ifodalanishi zarur va yetarli.

Isbot. *Zaruriyligi.* $u_1, u_2, ..., u_m$ satrlar chiziqli bog‘liq bo‘lsin. Demak, bir vaqtning o‘zida nolga teng bo‘lmaydigan shunday $c_1, c_2, ..., c_m$ koeffitsientlar mavjudki, $c_1u_1 + c_2u_2 + ... + c_mu_m = 0$ bo‘la-di. Aytaylik, $c_i \neq 0$ bo‘lsin. U holda

$$u_i = -\frac{c_1}{c_i}u_1 - ... - \frac{c_{i-1}}{c_i}u_{i-1} - \frac{c_{i+1}}{c_i}u_{i+1} - ... - \frac{c_m}{c_i}u_m,$$

ya'ni u_i satr qolgan satrlar orqali chiziqli ifodalanadi.

Yetarliligi. Aytaylik, $u_i = c_1u_1 + ... + c_{i-1}u_{i-1} + c_{i+1}u_{i+1} + ... + c_mu_m$ bo'lsin. U holda $c_1u_1 + ... + c_{i-1}u_{i-1} + (-1)u_i + c_{i+1}u_{i+1} + ... + c_mu_m = 0$, ya'ni $u_1, u_2, ..., u_m$ satrlar chiziqli bog'liq. □

Berilgan $u = (a_1, a_2, ..., a_k, ..., a_n)$ satrni dastlabki k ta elementidan iborat $\tilde{u} = (a_1, a_2, ..., a_k)$ satrga berilgan satrning *uzunligi* k *bo'lgan kesmasi* deb ataladi.

14.2-tasdiq. Agar $u_1, u_2, ..., u_m$ satrlar chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda ixtiyoriy uzunlikdagi $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, ..., \tilde{u}_m$ kesmalar ham chiziqli bo'g'liqdir.

Isbot. $c_1u_1 + c_2u_2 + ... + c_mu_m = 0$ tenglik $c_1u_1 + c_2u_2 + ... + c_mu_m$ satrning barcha komponentalari nolga tengligini anglatadi. Bundan esa, $c_1\tilde{u}_1 + c_2\tilde{u}_2 + ... + c_m\tilde{u}_m = 0$ ekanligi kelib chiqadi. □

Yuqoridagi tasdiq kabi $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, ..., \tilde{u}_m$ kesmalarning chiziqli erkli ekanligidan $u_1, u_2, ..., u_m$ satralarning ham chiziqli erkli bo'lishini kelib chiqadi.

Aytaylik, A matritsaning k ta satri chiziqli erkli bo'lib, qolgan satrlar ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsin. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda, $u_1, u_2, ..., u_k$ satrlar chiziqli erkli va $u_{k+1}, u_{k+2}, ..., u_m$ satrlar ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat deb olish mumkin. Matritsaning $v_1, v_2, ..., v_n$ ustunlarining uzunligi k bo'lgan $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, ..., \tilde{v}_n$ kesmalarini qaraymiz.

14.3-tasdiq. Agar qandaydir $c_1, c_2, ..., c_n$ sonlari uchun $c_1\tilde{v}_1 + c_2\tilde{v}_2 + ... + c_n\tilde{v}_n = 0$ bo'lsa, u holda $c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = 0$ bo'ladi.

Isbot. $u_{k+1}, u_{k+2}, ..., u_m$ satrlar $u_1, u_2, ..., u_k$ satrlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lganligi uchun

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= b_{k+1,1}u_1 + b_{k+1,2}u_2 + \ldots + b_{k+1,k}u_k\,, \\ u_{k+2} &= b_{k+2,1}u_1 + b_{k+2,2}u_2 + \ldots + b_{k+2,k}u_k\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m &= b_{m,1}u_1 + b_{m,2}u_2 + \ldots + b_{m,k}u_k\,. \end{aligned} \tag{14.1}$$

Aytaylik, $c_1\tilde{v}_1 + c_2\tilde{v}_2 + \ldots + c_n\tilde{v}_n = 0$ bo‘lsin. Bu tenglikdan $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n$ ustunning dastlabki k ta komponentasi nolga teng ekanligi to‘g‘ridan to‘g‘ri kelib chiqadi. Ustunning $(k+1)$-komponentasini qaraylik:

$$c_1a_{k+1,1} + c_2a_{k+1,2} + \ldots + c_na_{k+1,n}\,.$$

Bu ifodani qiymatini topish uchun (14.1) tenglikning birinchisidan foydalanamiz.

$u_{k+1} = b_{k+1,1}u_1 + b_{k+1,2}u_2 + \ldots + b_{k+1,k}u_k$ ekanligidan

$$\begin{aligned} a_{k+1,1} &= b_{k+1,1}a_{1,1} + b_{k+1,2}a_{2,1} + \ldots + b_{k+1,\mathrm{k}}a_{k,1}, \\ a_{k+1,2} &= b_{k+1,1}a_{1,2} + b_{k+1,2}a_{2,2} + \ldots + b_{k+1,\mathrm{k}}a_{k,2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k+1,\mathrm{n}} &= b_{k+1,1}a_{1,n} + b_{k+1,2}a_{2,n} + \ldots + b_{k+1,\mathrm{k}}a_{k,n} \end{aligned}$$

kelib chiqadi. Bundan esa,

$$\begin{aligned} & c_1a_{k+1,1} + c_2a_{k+1,2} + \ldots + c_na_{k+1,n} = \\ & = c_1(b_{k+1,1}a_{1,1} + b_{k+1,2}a_{2,1} + \ldots + b_{k+1,\mathrm{k}}a_{k,1}) + \\ & + c_2(b_{k+1,1}a_{1,2} + b_{k+1,2}a_{2,2} + \ldots + b_{k+1,\mathrm{k}}a_{k,2}) + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + c_n(b_{k+1,1}a_{1,n} + b_{k+1,2}a_{2,n} + \ldots + b_{k+1,\mathrm{k}}a_{k,n}) = \\ & = b_{k+1,1}(c_1a_{1,1} + c_2a_{1,2} + \ldots + c_na_{1,n}) + \\ & + b_{k+1,2}(c_1a_{2,1} + c_2a_{2,2} + \ldots + c_na_{2,n}) + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + b_{k+1,\mathrm{k}}(c_1a_{k,1} + c_2a_{k,2} + \ldots + c_na_{k,n}). \end{aligned}$$

Qavslar ichidagi ifodalar $c_1\tilde{v}_1 + c_2\tilde{v}_2 + ... + c_n\tilde{v}_n$ ustunning komponentalarini beradi. Ularning barchasi nolga teng bo‘lganligi uchun $c_1a_{k+1,1} + c_2a_{k+1,2} + ... + c_na_{k+1,n} = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Qolgan komponentalarining nolga tengligi ham xuddi shunday ko‘rsatiladi. Demak, $c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = 0.$ □

14.4-tasdiq. Aytaylik, $u_1, u_2, ..., u_m$ va $w_1, w_2, ..., w_n$ satrlar jamlanmalari berilgan bo‘lib, ikkinchi jamlanma satrlari birinchi jamlanma satrlarining chiziqli kombinatsiyasi bo‘lsin. Agar $n > m$ bo‘lsa, u holda $w_1, w_2, ..., w_n$ satrlar chiziqli bog‘liq bo‘ladi.

Isbot. Isbotni m ga nisbatan matematik induksiya usuli bilan olib boramiz. $m = 1$ bo‘lganda $w_1 = c_1u_1, w_2 = c_2u_1, ..., w_n = c_nu_1$ bo‘lib, $c_1 = 0$ bo‘lganida ular chiziqli bo‘g‘liq bo‘lishi ravshan. Agar $c_1 \neq 0$ bo‘lsa, $(-c_2)w_1 + c_1w_2 + 0 \cdot w_3 + ... + 0 \cdot w_n = 0$ ekanligidan ularning chiziqli bog‘liqligi kelib chiqadi.

Tasdiqni $m-1$ uchun o‘rinli deb, m uchun to‘g‘ri ekanligini ko‘rsatamiz. Tasdiq shartiga ko‘ra,

$$\begin{aligned} &w_1 = c_{1,1}u_1 + c_{1,2}u_2 + ... + c_{1,m}u_m, \\ &w_2 = c_{2,1}u_1 + c_{2,2}u_2 + ... + c_{2,m}u_m, \\ &......................................, \\ &w_n = c_{n,1}u_1 + c_{n,2}u_2 + ... + c_{n,m}u_m. \end{aligned}$$

Agar $c_{1,1} = c_{2,1} = ... = c_{k,1} = 0$ bo‘lsa, tasdiq o‘rinli, chunki bu holda $w_1, w_2, ..., w_n$ satrlar $m-1$ ta $u_2, ..., u_m$ satrlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘ladi.

Aytaylik, biror $c_{i,1}$ noldan farqli bo‘lsin. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda, $c_{11} \neq 0$ deb olish mumkin. U holda qiyudagi satrlarni qaraymiz:

$$w_2' = w_2 - \frac{c_{2,1}}{c_{1,1}} w_1 = c_{2,2}' u_2 + ... + c_{2,m}' u_m ,$$

$$.. \qquad (14.2)$$

$$w_n' = w_n - \frac{c_{n,1}}{c_{1,1}} w_1 = c_{n,2}' u_2 + ... + c_{n,m}' u_m .$$

Ushbu satrlar $n-1$ ta bo‘lib, ular $m-1$ ta $u_2, ..., u_m$ satrlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat. $n > m$ bo‘lganligi sababli, $n-1 > m-1$, hamda induksiya faraziga ko‘ra, $w_2', ..., w_n'$ satrlar chiziqli bog‘liq. Demak, kamida bittasi noldan farqli bo‘lgan $b_2, ..., b_k$ koeffitsientlar topilib,

$$b_2 w_2' + ... + b_n\, w_n' = 0.$$

Bu munosabatga $w_2', ..., w_n'$ satrlarning $w_1, w_2, ..., w_n$ satrlar orqali yozilgan ifodasini olib borib qo‘ysak,

$$b_2 \left(w_2 - \frac{c_{2,1}}{c_{1,1}} w_1 \right) + ... + b_k \left(w_k - \frac{c_{n,1}}{c_{1,1}} w_1 \right) = 0$$

kelib chiqadi, ya’ni,

$$-\frac{b_2 c_{2,1} + ... + b_n c_{n,1}}{c_{11}} w_1 + b_2 w_2 + ... + b_n w_n = 0.$$

$b_2, ..., b_k$ koeffitsientning kamida bittasi noldan farqli ekanligidan, $w_1, w_2, ..., w_n$ satrlarning chiziqli bog‘liqligi kelib chiqadi.

□

14.5-natija. Uzunligi n ga teng bo‘lgan n tadan ko‘p satrlar chiziqli bog‘liq.

Isbot. Haqiqatdan ham, uzunligi n ga teng bo‘lgan ixtiyoriy $(a_1, a_2, ..., a_n)$ satrni quyidagicha ifodalash mumkin

$$a_1(1,0,...,0) + a_2(0,1,...,0) + ... + a_n(0,0,...,1) .$$

Demak, ixtiyoriy satr n ta satrning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanadi. Yuqorida isbotlangan 14.4-tasdiqqa ko‘ra, satrlar soni n tadan ko‘p bo‘lsa, ular chiziqli bog‘liq. □

Bizga uzunlikdagi n ga teng bo‘lgan satrlar berilgan bo‘lsin. Bu satrlar ichida qandaydir k ta satr chiziqli erkli bo‘lib, ixtiyoriy k tadan ko‘p satrlar chiqizli bo‘gliq bo‘lsin. Ya’ni, chiziqli erkli satrlarning maksimal soni k ga teng bo‘lsin.

14.6-ta’rif. Berilgan satrlar jamlanmasidagi chiziqli ekrli vektorlarning maksimal soniga bu satrlar jamlanmasining *rangi* deyiladi. Maksimal sondagi chiziqli erkli satrlar esa, satrlar jamlanmasining *bazisi* deb ataladi.

Tabiiyki, chiziqli erklilik, chiziqli bog‘liqlik, rang va bazis tushunchalarini ustunlar uchun ham kiritish mumkin. U holda yuqorida keltirilgan tasdiqlar ham ustunlar jamlanmasi uchun o‘rinli bo‘ladi.

Demak, berilgan A matritsaning $u_1, u_2, ..., u_m$ satrlar jamlanmasining rangini va o‘z navbatida $v_1, v_2, ..., v_n$ ustunlar jamlanmasining rangini ham aniqlash mumkin.

14.7-teorema. Matritsaning satrlari jamlanmasi rangi uning ustunlari jamlanmasi rangiga teng.

Isbot. Aytaylik,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

matritsaning satrlar jamlanmasi rangi k va ustunlar jamlanmasining rangi r ga teng bo‘lsin.

Satrlar rangi k ekanligidan shunday chiziqli erkli k ta satr mavjud bo‘lib, qolgan satrlar ularning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanishi kelib chiqadi. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda, dastlabki k ta satrni bazis deb olish mumkin.

Bu satrlardan iborat quyidagi

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,n} \end{pmatrix}$$

matritsani qaraymiz. $\tilde{A}$ matritsaning ustunlari A matritsa ustun-larining uzunligi k ga teng bo‘lgan kesmalaridan iborat bo‘ladi.

Aytaylik, $\tilde{A}$ matritsaning ustunlari jamlanmasi rangi $\tilde{r}$ bo‘lsin. $\tilde{A}$ matritsaning ustunlari uzunliklari k ga teng ekanligidan 14.5-natijaga ko‘ra, uning chiziqli erkli ustunlar soni k dan oshmaydi. Demak, $\tilde{r} \le k$.

Ikkinchi tomondan esa, $\tilde{A}$ matritsada $\tilde{r}$ ta chiziqli erkli ustunlari mavjud bo‘lib, undan ko‘p sondagi ixtiyoriy ustunlar chiziqli bog‘liq. Ushbu ustunlarni A matritsaning ustunlarigacha to‘ldirsak, ular ham chiziqli erkli bo‘ladi. 14.3-tasdiqqa ko‘ra esa, A matritsaning $\tilde{r}$ tadan ko‘p ixtiyoriy ustunlari chiziqli bog‘liq. Bundan A matritsaning ustunlar jamlanmasi rangi ham $\tilde{r}$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $r = \tilde{r} \le k$.

Endi ushbu mulohazalarni ustunlar va satrlarning o‘rnini almashtirgan holda qo‘llasak, $k \le r$ ekanligini hosil qilamiz. Bundan esa, $r = k$ kelib chiqadi. □

14.8-ta’rif. Matritsaning satrlari (ustunlari) jamlanmasining rangi *matritsaning rangi* deyiladi.

Endi kvadrat matritsaning rangi va determinanti orasidagi bog‘liqlikni beruvchi teoremani keltiramiz.

14.9-teorema. Kvadrat matritsaning satrlari chiziqli bog‘liq bo‘lishi uchun uning determinanti nolga teng bo‘lishi zarur va yetarli.

Isbot. *Zaruriylik.* Berilgan

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

matritsaning satrlari chiziqli bog‘liq bo‘lib, determinanti noldan farqli bo‘lsin. $u_1, u_2, ..., u_n$ satrlar chiziqli bog‘liq ekanligidan $c_1u_1 + c_2u_2 + ... + c_nu_n = 0$ tenglikka ega bo‘lamiz. Bu tenglik esa, quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasiga teng kuchlidir:

$$\begin{cases} a_{1,1}c_1 + a_{2,1}c_2 + ... + a_{1,n}c_n = 0, \\ a_{1,2}c_1 + a_{2,2}c_2 + ... + a_{2,n}c_n = 0, \\ \text{.......................................}, \\ a_{1,n}c_1 + a_{2,n}c_2 + ... + a_{n,n}c_n = 0. \end{cases}$$

Matritsaning determinanti noldan farqli bo‘lganligi uchun, ushbu bir jinsli tenglamalar sistemasi yagona nol yechimga ega. Ya’ni $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$. Bu esa, satrlarning chiziqli erkli ekanligiga zid. Demak, $\det A = 0$.

Yetarlilik. Yetarlilik isbotini A matritsaning tartibi bo‘yicha matematik induksiya usuli bilan keltiramiz. $m = 1$ uchun teorema tasdig‘i o‘rinli, chunki $\det A = 0$ tenglik A nol elementdan iborat ekanligini bildiradi.

$n-1$-tartibli matritsa uchun teorema isbotlangan deb, n-tartibli matritsalar uchun isbotlaylik. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda $a_{11} \neq 0$ deb olishimiz mumkin. Matritsaning $u_1, u_2, ..., u_n$ satrlari orqali quyidagi satrlarni hosil qilamiz:

$$w_2 = u_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}u_1 = (0, a'_{2,2}, ..., a'_{2,n}),$$

$$\text{...},$$

$$w_n = u_n - \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}}u_1 = (0, a'_{n,2}, ..., a'_{n,n}).$$

Determinantlar xossasiga ko‘ra

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a'_{2,2} & \dots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{n,2} & \dots & a'_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a'_{2,2} & \dots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n,2} & \dots & a'_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Ushbu determinant nolga tengligi va $a_{1,1} \neq 0$ ekanligidan

$$\begin{vmatrix} a'_{2,2} & \dots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n,2} & \dots & a'_{n,n} \end{vmatrix} = 0$$

kelib chiqadi. Induksiya faraziga ko‘ra $(a'_{2,2},...,a'_{2,n}),...,(a'_{n,2},...,a'_{n,n})$ satrlar chiziqli bog‘liq. Bu esa, $w_2, ..., w_n$ satrlarning ham chiziqli bog‘liqligini bildiradi.

Demak, kamida bittasi noldan farqli bo‘lgan $c_2, ..., c_n$ koeffitsientlar topilib, $c_2w_2 + c_3w_3 + ... + c_nw_n$. Bundan esa,

$$-\left(\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} c_2 + ... + \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}} c_n \right) u_1 + c_2u_2 + ... + c_nu_n = 0$$

kelib chiqadi. Ya’ni, $u_1, u_2, ..., u_n$ satrlar chiziqli bog‘liq. □

Yuqoridagi teoremadan n-tartibli kvadrat matritsaning rangi n ga teng bo‘lishi uchun uning determinant noldan farqli bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi kelib chiqadi.

Ma’lumki, ixtiyoriy noldan farqli matritsadan qandaydir noldan farqli minor tanlab olish mumkin. Quyidagi teorema matritsaning rangini minorlar orqali topish imkonini beradi.

14.10-teorema. Matritsaning rangi uning noldan farqli minorlarining eng katta tartibiga teng.

Isbot. Aytaylik, matritsaning rangi k ga teng bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $(k+1)$ yoki undan katta tartibli minorda chiziqli bog‘liq satrlarlar mavjud bo‘lib, 14.9-teoremaga asosan bunday minorlar nolga teng bo‘ladi.

Bundan tashqari, matritsaning rangi k bo‘lganligi uchun unda k ta satrdan va o‘z navbatida k ta ustundan iborat bazislar mavjud. Bu ustun va satrlar elementlaridan tuzilgan minorni qaraylik.

Ushbu minor satrlari chiziqli erkli, aks holda, 14.3-tasdiqqa ko‘ra avvalgi matritsaning butun satrlari chiziqli bog‘liq bo‘lar edi. Demak, tanlab olingan k-tartibli minor noldan farqli. □

Biz chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usulini keltirganimizda sistema ustida elementar almashtirishlarni keltirib o‘tgan edik. Matritsaning satrlari ustidagi elementar almashtirishlar ham huddi shu kabi aniqlanadi. Ya’ni, matritsaning satrlari o‘rnini almashtirish, satrlarni noldan farqli songa ko‘paytirish va bir satrni ikkinchi satrga proporsional satrga qo‘shish elementar almashtirishlar hisoblanadi.

Ko‘rinib turibdiki, elementar almashtirishlarning xar birida satrlar jamlanmasi chiziqli ekvivalent satrlar jamlanmasiga aylanadi. Shuning uchun elementar almashtirishlar natijasida matritsaning rangi o‘zgarmaydi.

Bizga ma’lumki, trapetsiyasimon matritsa quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,k} & c_{1,k+1} & \dots & c_{1,n} \\ 0 & c_{2,2} & \dots & c_{2,k} & c_{2,k+1} & \dots & c_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{k,k} & c_{\mathrm{k},k+1} & \dots & c_{k,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

bu yerda $c_{1,1} \neq 0, c_{2,2} \neq 0, \dots, c_{k,k} \neq 0.$

Trapetsiyasimon matritsaning rangi k ga teng ekanligini ko‘rish qiyin emas. Haqiqatdan ham,

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,k} \\ 0 & c_{2,2} & \dots & c_{2,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{kk} \end{vmatrix} = c_{1,1} \cdot c_{2,2} \cdot \ldots \cdot c_{k,k}$$

minor noldan farqli. Bundan tashqari, tartibi k dan katta minorlarda kamida bitta nolga teng satr mavjudligi uchun, bu minorlarning qiymati nolga teng.

14.11-tasdiq. Ixtiyoriy matritsani satrlari ustidagi elementar almashtirishlar bajarish va ustunlar o‘rnini almashtirish orqali trapetsiyasimon matritsa ko‘rinishiga keltirish mumkin.

Isbot. Agar matritsa nol matritsa bo‘lmasa, uning noldan farqli elementi mavjud. Bu elementni matritsaning satrlari va ustunlari o‘rnini almashtirish orqali yuqori chap burchagiga ko‘chirish mumkin.

Demak,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

matritsada $a_{1,1} \neq 0$ deb olish mumkin.

Endi ushbu matritsada qiyudagi almashtirishlarni bajaramiz.

Birinchi satrni $-\dfrac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$ ga ko‘paytib, i-satrga qo‘shamiz. Bu almashtirishlardan keyin A matritsa quyidagi ko‘rinishga keladi

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a'_{2,2} & \dots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{m,2} & \dots & a'_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Agar $\begin{pmatrix} a'_{2,2} & \dots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{m,2} & \dots & a'_{m,n} \end{pmatrix}$ matritsa nolga teng bo‘lsa, jarayon tugatiladi. Noldan farqli bo‘lgan, holda satrlarini va ustunlarini almashtirish hisobiga $a'_{2,2} \neq 0$ deb olish mumkin.

Endi ikkinchi satrni $-\dfrac{a'_{i,2}}{a'_{2,2}}$ ga ko‘paytirib, qolgan satrlarga qo‘shish orqali berilgan matritsani quyidagi ko‘rinishga keltiramiz

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} & \dots & a'_{2,n} \\ 0 & 0 & a''_{3,3} & \dots & a''_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a''_{m,3} & \dots & a''_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Ushbu jarayonni chekli marotaba davom ettirish natijasida, matritsaning ma’lum satrlaridan tashqari qolgan satrlari nolga aylantiriladi. Natijada matritsa trapetsiyasimon shaklga ega bo‘ladi.

□

15 - §. Bir jinsli tenglamalar sistemasi. Kroneker-Kapelli teoremasi

Ushbu mavzuda chiziqli tenglamalar sistemasini umumiy yechimini topish usulini beramiz. Dastlab, bir jinsli tenglamalar sistemasini qaraymiz.

Bizga

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n = 0, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n = 0, \\ ...., \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + ... + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

bir jinsli tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin. Ma’lumki, ushbu sistemaning matritsasini A va matritsaning ustunlarini $v_1, v_2, ..., v_n$ deb olsak, sistemani

$$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = 0$$

yoki

$$A \cdot X = 0$$

ko‘rinishlarda ham yozish mumkin, bu yerda $X-$noma’lumlardan iborat bo‘lgan ustun vektor.

15.1-tasdiq. Agar $Z_1, Z_2, ..., Z_k$ ustunlar bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi bo‘lsa, u holda ularning ixtiyoriy chiziqli kombinatsiyasi ham yechim bo‘ladi.

Isbot. Haqiqatdan ham, $A \cdot Z_i = 0$ ekanligidan

$$A \cdot (c_1Z_1 + c_2Z_2 + ... + c_kZ_k) = c_1A \cdot Z_1 + c_2A \cdot Z_2 + ... + c_kA \cdot Z_k = 0$$

kelib chiqadi. □

15.2-teorema. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining ixtiyoriy yechimi $n-r$ ta chiziqli erkli yechimlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘ladi, bu yerda $n-$noma’lumlar soni, $r = rank(A)$.

Isbot. Sistemani

$$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = 0$$

ko‘rinishida yozib olaylik.

$r = rank(A)$ ekanligi uchun $v_1, v_2, ..., v_n$ ustunlar jamlanmasida r ta ustun bazis bo‘ladi. Umimiylikka ziyon yetkazmagan holda, dastladki r ta $v_1, v_2, ..., v_r$ ustunni bazis deb olish mumkin. Bu holda qolgan $v_{r+1}, v_{r+2}, ..., v_n$ ustunlar $v_1, v_2, ..., v_r$ ustunlarning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanadi, ya'ni

$$\begin{aligned} v_{r+1} &= b_{r+1,1}v_1 + b_{r+1,2}v_2 + ... + b_{r+1,r}v_r, \\ v_{r+2} &= b_{r+2,1}v_1 + b_{r+2,2}v_2 + ... + b_{r+2,r}v_r, \\ &.., \\ v_n &= b_{n,1}v_1 + b_{n,2}v_2 + ... + b_{n,r}v_r. \end{aligned}$$

Bu tengliklardan quyidagi $n-r$ ta ustunning yechim ekanligini ko'rish qiyin emas,

$$Z_{r+1} = \begin{pmatrix} b_{r+1,1} \\ .... \\ b_{r+1,r} \\ -1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \; Z_{r+2} = \begin{pmatrix} b_{r+2,1} \\ .... \\ b_{r+2,r} \\ 0 \\ -1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \; \ldots, \; Z_n = \begin{pmatrix} b_{n,1} \\ .... \\ b_{n,r} \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bu yechimlar chiziqli erkli ekanligi osongina kelib chiqadi, chunki bu ustunlarning oxirgi $n-r$ ta komponentalaridan tuzilgan minorni qarasak, ushbu minor noldan farqli bo'ladi.

Endi ixtiyoriy yechim bu yechimlar orqali chiziqli ifodalanilishini ko'rsatamiz. Aytaylik, $X = (x_1^*, ..., x_r^*, x_{r+1}^*, ..., x_n^*)^T$ ustun sistemaning boshqa bir yechimi bo'lsin. U holda

$$Y = X + x_{r+1}^* Z_{r+1} + ... + x_n^* Z_n$$

ustun ham sistemaning yechimi bo'ladi. Ma'lumki, bu yechimda $(r+1)$ -komponentadan boshlab barcha komponentalar nolga teng, ya'ni $Y = (y_1^*, ..., y_r^*, 0, ..., 0)^T$.

Ushbu ustun sistemaning yechimi bo'lganligi uchun

$$y_1^* v_1 + y_2^* v_2 + ... + y_r^* v_r = 0.$$

Ammo, $v_1, v_2, ..., v_r$ ustunlar chiziqli erkli ekanligidan $y_1^* = y_2^* = ... = y_r^* = 0$ kelib chiqadi. Demak, $Y = 0,$ ya'ni

$$X = -x_{r+1}^* Z_{r+1} - ... - x_n^* Z_n.$$

Shunday qilib, $Z_{r+1}, Z_{r+2}, ..., Z_n$ chiziqli erkli yechimlar bo'lib, barcha yechimlar ularning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanadi.

□

Teorema isbotida keltirilgan $Z_{r+1}, Z_{r+2}, ..., Z_n$ yechimlar jamlanmasi *bazis* yoki *fundamental yechim* deb ataladi.

Sistemaning *umumiy yechimi* deb fundamental yechimning umuniy chiziqli kombinatsiyasiga aytiladi. Ularning biror aniq chiziqli kombinatsiyasi esa xususiy yechim bo'ladi.

Bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasi yechimini ham bir jinsli sistema yechimi orqali berish mumkin. Aytaylik, bir jinsli bo'lmagan

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ...., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

sistema berilgan bo'lsin. Bu sistemaning asosiy va kengaytirilgan matritsalarini qaraymiz, ya'ni

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m,1} & a_{m,2} & ... & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m,1} & a_{m,2} & ... & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}$$

Quyidagi teorema bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasi yechimi mavjudligini uning matritsalari ranglari orqali beruvchi teorema hisoblanadi.

15.3-teorema. (Kroneker–Kapelli teoremasi) Chiziqli tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lishi uchun uning asosiy matritsasining rangi kengaytirilgan matritsasining rangiga teng (ya'ni, $rank(A) = rank(\tilde{A})$) bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Tenglamalar sistemasini quyidagicha yozib olamiz:

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = B,$$

bu yerda B ozod hadlardan tuzilgan ustun.

Sistema yechimga ega bo'lishi uchun B ustun $v_1, v_2, ..., v_n$ ustunlarning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanishi zarur. Bundan esa, matritsalarning ranglari tengligi kelib chiqadi.

Agar matritsalarning ranglari bir hil bo'lsa, $v_1, v_2, ..., v_n$ dagi bazis $v_1, v_2, ..., v_n, B$ ustunlar uchun ham bazis bo'la oladi. Bundan esa B ustun $v_1, v_2, ..., v_n$ ustunlarning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanishi kelib chiqadi. □

15.4-teorema. Bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi, uning biror xususiy yechimi va xuddi shu koeffitsientlardan tuzilgan bir jinsli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi yig'indisiga teng.

Isbot. Aytaylik, X_0 ustun $A \cdot X = B$ bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasining biror yechimi bo'lsin. U holda $A \cdot X = B$ va $A \cdot X_0 = B$ ekanligidan, $A \cdot X = A \cdot X_0$ sistemaga ega bo'lamiz.

Demak, berilgan sistema $A \cdot (X - X_0) = 0$ bir jinsli sistemaga teng kuchli. Bir jinsli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi $X^* = X - X_0$ ekanligidan $X = X^* + X_0$ kelib chiqadi. Ya'ni berilgan tenglamaning umumiy yechimi biror xususiy yechim va bir jinsli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi yig'indilaridan iborat.

□

IV BOB. KO‘PHADLAR

16 - §. Ko‘phadlar va ular ustida amallar

Biz ushbu mavzuda $\mathbb{K}$ orqali haqiqiy sonlar to‘plami $\mathbb{R}$ yoki kompleks sonlar to‘plami $\mathbb{C}$ ni belgilaymiz.

16.1-ta’rif. Ixtiyoriy $a_i \in \mathbb{K}$, $i \in \{0\} \bigcup \mathbb{N}$ uchun

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \tag{16.1}$$

ifoda haqiqiy (kompleks) koeffitsientli ko‘phad deyiladi.

(16.1) ifodadagi x noma’lum o‘zgaruvchi, $a_i \in \mathbb{K}$ lar ko‘phadning koeffitsientlari, $a_i x^i$ lar esa *ko‘phadning hadlari* deyiladi.

Agar $a_n \neq 0$ bo‘lsa, a_n ga bosh koeffitsient $a_n x^n$ esa *bosh had* deyiladi, ko‘phadning a_0 hadiga *ozod had* deyiladi.

Ko‘phadda qatnashgan noma’lumning eng katta darajasiga ko‘phadning darajasi deyiladi va $\deg f(x)$ kabi belgilanadi, ya’ni $a_n \neq 0$ bo‘lsa $\deg f(x) = n$.

Barcha koeffitsientlari nolga teng bo‘lgan ko‘phad *nol ko‘phad* deyiladi. Bir hil darajalari oldidagi koeffitsientlari teng bo‘lgan ko‘phadlar o‘zaro *teng ko‘phadlar* deyiladi.

$\mathbb{K}$ da berilgan barcha ko‘phadlar to‘plamini $\mathbb{K}[x]$ orqali belgilaymiz. Shuningdek, $f(\alpha)$ bilan $f(x)$ ko‘phadning $x = \alpha$ nuqtadagi qiymati belgilanadi.

Endi $\mathbb{K}[x]$ to‘plamda algebraik amallarni aniqlaymiz.

Ko‘phadlarni qo‘shish. $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarning yig‘indisi deb, ularning mos darajalari oldidagi koeffitsientlarni qo‘shishdan hosil bo‘lgan ko‘phadga aytiladi, ya’ni

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i, \tag{16.2}$$

bu yerda $c_i = a_i + b_i$ bo‘lib, a_i va b_i lar mos ravishda $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarning koeffitsientlaridir.

Ko‘phadlarni songa ko‘paytirish. $f(x)$ ko‘phadni λ soniga ko‘paytmasi deb, berilgan ko‘phadning barcha koeffitsientlarini shu λ soniga ko‘paytirishdan hosil bo‘lgan ko‘phadga aytiladi, ya’ni

$$\lambda f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_i x^i.$$

Ko‘phadlarni ko‘paytirish. $\mathbb{K}[x]$ to‘plamda ko‘paytirish amalini quyidagicha kiritamiz: $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$ ko‘phadlarning ko‘paytmasi sifatida koeffitsientlari

$$d_j = \sum_{k+l=0}^{j} a_k b_l \in K, \ 1 \le j \le n+m.$$

tenglik bilan aniqlangan

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{n+m} d_j x^j$$

ko‘phadga aytiladi, bu yerda

$$d_0 = a_0 b_0, \ d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \ d_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \ldots.$$

Ma’lumki, ko‘phadlar ko‘paytmalarining darajasi berilgan ko‘phadlar darajalarining yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\deg \varphi(x) = \deg f(x) + \deg g(x).$$

Misol 16.1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ va $g(x) = 3x^2 - x + 2$ ko‘phadlarni yig‘indisi va ko‘paytmasini toping.

$$g(x) + f(x) = (3x^2 - x + 2) + (x^3 - 2x^2 + 3x - 5) =$$

$$= x^3 + (3-2)x^2 + (-1+3)x + (2-5) = x^3 + x^2 + 2x - 3.$$

Ushbu ko‘phadlarning ko‘paytmasi quyidagiga teng:

$$g(x) \cdot f(x) = (3x^2 - x + 2)(x^3 - 2x^2 + 3x - 5) =$$

$$=3x^5-6x^4+9x^3-15x^2-x^4+2x^3-3x^2+5x+$$

$$+2x^3-4x^2+6x-10=3x^5-7x^4+13x^3-22x^2+11x-10.$$

Kop'hadlar ustida aniqlangan amallar quyidagi xossalarga ega.

16.2-xossa. a) $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$;

b) $\left(f(x)+g(x)\right)+h(x)=f(x)+\left(g(x)+h(x)\right)$;

c) $f(x)\cdot g(x)=g(x)\cdot f(x)$;

d) $\left(f(x)\cdot g(x)\right)\cdot h(x)=f(x)\cdot\left(g(x)\cdot h(x)\right)$;

e) $\left(f(x)+g(x)\right)\cdot h(x)=f(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h(x)$.

Isbot. Dastlabki ikkita xossaning isboti sodda bo‘lganligi uchun biz ularning isbotini keltirmaymiz.

c) $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ va $g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$ bo‘lsin. U holda

$$f(x)\cdot g(x)=\sum_{j=0}^{n+m}\sum_{k+l=0}^{j}a_kb_lx^j=\sum_{j=0}^{n+m}\sum_{k+l=0}^{j}b_la_kx^j=g(x)\cdot f(x).$$

d) Ko‘phadlarni ko‘paytirish assotsiativ ekanligini ko‘rsatamiz. Aytaylik,

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,\ g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j,\ h(x)=\sum_{k=0}^{p}c_kx^k$$

bo‘lsin. U holda $\left(f(x)\cdot g(x)\right)\cdot h(x)$ ko‘phadning x^t hadi oldidagi koeffitsienti

$$\sum_{l+k=0}^{t}\left(\sum_{i+j=0}^{l}a_ib_j\right)c_k=\sum_{i+j+k=0}^{t}a_ib_jc_k$$

bo‘lib, $f(x)(g(x)\cdot\varphi(x))$ ko‘phadning x^i hadi oldidagi koeffitsienti esa,

$$\sum_{i+l=0}^{t}a_i\left(\sum_{j+k=0}^{l}b_jc_k\right)=\sum_{i+j+k=0}^{t}a_ib_jc_k$$

bo‘ladi. Bu ikki yig‘indining tengligiga ko‘ra ko‘phadlar ko‘paytmasining assotsiativligi kelib chiqadi.

e) $\sum\limits_{k+l=0}^{n+m}(a_k+b_k)c_l=\sum\limits_{k+l=0}^{n+m}a_kc_l+\sum\limits_{k+l=0}^{n+m}b_kc_l$ ekanligigidan ko‘phadlar to‘plami ustida qo‘shish va ko‘paytrish amallari distributiv ekanligi kelib chiqadi. □

Endi ko‘phadlar to‘plamlari ustida ko‘paytirish amaliga teskari bo‘lgan bo‘lish amalini o‘rganamiz.

16.3-ta’rif. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ ko‘phadlar uchun

$$f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x) \tag{16.3}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $\psi(x)\in\mathbb{K}[x]$ ko‘phad mavjud bo‘lsa, $f(x)$ ko‘phad $\varphi(x)$ ko‘phadga bo‘linadi deyiladi.

Agar $f(x)$ ko‘phad $\varphi(x)$ ko‘phadga bo‘linsa, $f(x)$ bo‘linuvchi, $\varphi(x)$ esa bo‘luvchi ko‘phad deyiladi, hamda $\varphi(x)\,|\,f(x)$ yoki $f(x)\,\vdots\,\varphi(x)$ kabi belgilanadi.

16.4-xossa. Ko‘phadlar uchun quyidagilar o‘rinli:

a) agar $g(x)\,|\,f(x)$ va $h(x)\,|\,g(x)$ o‘rinli bo‘lsa u holda $h(x)\,|\,f(x)$;

b) agar $\varphi(x)\,|\,f(x)$ va $\varphi(x)\,|\,g(x)$ o‘rinli bo‘lsa, u holda $\varphi(x)\,|\,(f(x)\pm g(x))$.

c) agar $\varphi(x)\,|\,f(x)$ o‘rinli bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $g(x)$ uchun $\varphi(x)\,|\,f(x)\cdot g(x)$.

Agar $\varphi(x)\,|\,f_1(x)$, $\varphi(x)\,|\,f_2(x)$, ..., $\varphi(x)\,|\,f_s(x)$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $g_1(x), g_2(x), ..., g_s(x)$ ko‘phadlar uchun

$$\varphi(x)\,|\,(f_1(x)\cdot g_1(x)+f_2(x)\cdot g_2(x)+...+f_s(x)\cdot g_s(x)).$$

d) xar qanday $f(x)$ ko‘phad istalgan nolinchi darajali ko‘phadga bo‘linadi.

e) agar $\varphi(x)\,|\,f(x)$ bo‘lsa, $c\varphi(x)\,|\,f(x)$, bu yerda $c\in\mathbb{K}$, $c\neq 0$.

f) agar $g(x) \mid f(x)$ va $f(x) \mid g(x)$ bo‘lsa, u holda $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlar bir-biridan o‘zgarmas $c \in \mathbb{K}$ ko‘paytuvchi bilan farq qiladi.

Isbot. a) shartga ko‘ra, $f(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$ va $g(x) = h(x) \cdot \varphi(x)$ ko‘rinishda yozib olsak,

$$f(x) = h(x) \cdot \left(\varphi(x) \cdot \psi(x)\right).$$

b) $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ va $g(x) = \varphi(x) \cdot h(x)$ ekanligidan

$$f(x) \pm g(x) = \varphi(x) \cdot \left(\psi(x) \pm h(x)\right)$$

kelib chiqadi.

c) agar $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $g(x)$ uchun

$$f(x) \cdot g(x) = \varphi(x) \cdot \left(\psi(x) \cdot g(x)\right)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

d) $f(x) = c \cdot c^{-1} \cdot f(x) = c \cdot (c^{-1} \cdot f(x))$ tenglikdan xar qanday ko‘phad nolinchi darajali ko‘phadga bo‘linishi kelib chiqadi.

e) $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ tenglik o‘rinli ekanligidan

$$f(x) = \left(c \cdot \varphi(x)\right) \cdot \left(c^{-1} \cdot \psi(x)\right)$$

tenglik kelib chiqadi.

f) shartga ko‘ra $f(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$ va $g(x) = f(x) \cdot \psi(x)$, demak, $f(x) = f(x) \cdot \left(\varphi(x) \cdot \psi(x)\right)$. Bundan $1 = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ tenglik hosil bo‘ladi. Bu esa $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ ko‘phadlarning xar biri nolinchi darajali ko‘phadlar bo‘lgandagina o‘rinli bo‘ladi. □

Agar $f(x)$ ko‘phad $g(x)$ ko‘phadga bo‘linmasa qoldiqli bo‘lishni amalga oshirish mumkin.

16.5-ta’rif. Agar $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlar uchun ga $q(x)$ va $r(x)$, $\deg r(x) < \deg g(x)$ ko‘phadlar topilib,

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x), \tag{16.4}$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa $f(x)$ ko‘phad $g(x)$ ko‘phadga qoldiqli bo‘lingan deyiladi.

Bu yerdagi $q(x)$ ko‘phadga *bo‘linma*, $r(x)$ ga *qoldiq* deyiladi, (16.4) tenglikka esa qoldiqli bo‘lish formulasi deb ataladi.

16.6-teorema. Ixtiyoriy $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlar uchun

$$f(x) = g(x)\cdot q(x) + r(x), \ \deg r(x) < \deg g(x),$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $q(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$ ko‘phadlar mavjud va yagonadir.

Isbot: Dastlab (16.4) tenglikni qanoatlantiruvchi ko‘phadlar mavjud ekanligini ko‘rsatamiz. Agar $\deg f(x) < \deg g(x)$ bo‘lsa, u holda (16.3) tenglik o‘rinli bo‘ladi. Chunki, bu holatda $q(x) = 0$ va $r(x) = f(x)$ deb olamiz.

Faraz qilaylik, $\deg f(x) \geq \deg g(x)$ bo‘lsin. $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlar

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}, \ g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^{m-j}, \ a_0 \neq 0, \ b_0 \neq 0.$$

ko‘rinishlarda bo‘lsin. U holda quyidagi ayirmani qaraymiz:

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} g(x).$$

Bu ayirmadan ko‘rinib turibdiki, $n_1 = \deg f_1(x) < \deg f(x)$. Agar $\deg f_1(x) < \deg g(x)$ bo‘lsa, u holda (16.4) tenglik to‘g‘ri bo‘ladi, aks holda bu jarayonni davom ettirib, quyidagi ayirmani qaraymiz:

$$f_2(x) = f_1(x) - \frac{a_{1,0}}{b_0} x^{n_1 - m} g(x),$$

bu yerda $a_{1,0}$ koeffitsient $f_1(x)$ ko‘phadning bosh koeffitsienti.

Ma’lumki,

$$n_2 = \deg f_2(x) < \deg f_1(x) = n_1$$

bo‘lib, yuqoridagi mulohazani yana bir bor qo‘llash mumkin. Bu jarayonni davom ettirish natijasida darajalari kamayib boruvchi $n > n_1 > n_2 > \ldots$ sonlariga teng bo‘lgan $f(x), f_1(x), f_2(x), \ldots$

ko‘phadlarni hosil qilamiz. $f(x)$ ko‘phadning darajasi chekli bo‘lganligi uchun, chekli qadamdan so‘ng shunday $f_k(x)$ ko‘phad topilib, $n_k = \deg f_k(x) < \deg g(x)$ bo‘ladi. Ya’ni quyidagi tenglik o‘rinli

$$f_k(x) = f_{k-1}(x) - \frac{a_{k-1,0}}{b_0} x^{n_{k-1}-m} g(x),$$

bu yerda $a_{k-1,0}$ element $f_{k-1}(x)$ ning bosh koeffitsientidir. Endi hosil bo‘lgan hamma tengliklarni qo‘shsak,

$$f(x) - \left(\frac{a_0}{b_0} x^{n-m} + \frac{a_{1,0}}{b_0} x^{n_1-m} + \ldots + \frac{a_{k-1,0}}{b_0} x^{n_{k-1}-m} \right) g(x) = f_k(x)$$

hosil bo‘ladi. Bundan

$$q(x) = \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} + \frac{a_{1,0}}{b_0} x^{n_1-m} + \ldots + \frac{a_{k-1,0}}{b_0} x^{n_{k-1}-m}$$

va $r(x) = f_k(x)$ deb olsak,

$$f(x) - q(x)g(x) = r(x)$$

ekanligini hosil qilamiz.

Endi (16.4) tenglikni qanoatlantiruvchi $q(x)$ va $r(x)$ ko‘phadlar yagona ekanligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik, (16.4) tenglik yana boshqa qandaydir $q_1(x), r_1(x) \in \mathbb{K}[x]$ ko‘phadlar uchun ham o‘rinli bo‘lsin, ya’ni

$$f(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x), \ \deg r_1(x) < \deg g(x) \qquad (16.5)$$

bo‘lsin. (16.4) va (16.5) tengliklarning chap tomonlari tengligidan

$$g(x) \cdot q(x) + r(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x),$$

$$g(x) \cdot (q(x) - q_1(x)) = r_1(x) - r(x)$$

kelib chiqadi. Bu tenglikdan quyidagiga ega ni bo‘lamiz:

$$\deg(r_1(x) - r(x)) = \deg\big(g(x) \cdot (q(x) - q_1(x))\big).$$

Lekin $\deg(r_1(x)-r(x))<\deg g(x)$ bo‘lganligi uchun $q(x)=q_1(x)$ bo‘ladi, bundan $r_1(x)=r(x)$ tenglik o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

□

Misol 16.2. $f(x)=3x^3-2x^2+x+4$ ko‘phadni $g(x)=x^2+3x+1$ ko‘phadga qoldiqli bo‘lish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$\begin{array}{l|l} 3x^3-2x^2+x+4 & x^2+3x+1 \\ \cline{2-2} \underline{3x^3+9x^2+3x} & 3x-11 \\ \quad -11x^2-2x+4 & \\ \quad \underline{-11x^2-33x-11} & \\ \qquad\qquad 31x+15 & \end{array}$$

Bundan $q(x)=3x-11$ va $r(x)=31x+15$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak,

$$f(x)=g(x)\cdot(3x-11)+(31x+15)$$

tenglikni hosil qilamiz.

17 - §. Ko‘phadlar uchun Yevklid algoritmi

Bizga $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlar berilgan bo‘lsin.

17.1-ta’rif. Agar $\varphi(x)$ ko‘phad uchun $\varphi(x)\,|\,f(x)$ va $\varphi(x)\,|\,g(x)$ o‘rinli bo‘lsa, u holda $\varphi(x)$ ko‘phad $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarning *umumiy bo‘luvchisi* deyiladi.

Ma’lumki, agar $\varphi(x)$ ko‘phad $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarning umumiy bo‘luvchisi bo‘lsa, $c\varphi(x)$ ko‘phad ham bu ko‘phadlarning umumiy bo‘luvchisi bo‘ladi. Bundan tashqari, $\varphi(x)$ ko‘phadning bo‘luvchilari ham $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarning umumiy bo‘luvchilari bo‘ladi.

17.2-ta’rif. $d(x)$ ko‘phad $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarning umumiy bo‘luvchisi bo‘lib, uning o‘zi ham $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarning istalgan boshqa bir $\varphi(x)$ umumiy bo‘luvchilariga bo‘linsa, $d(x)$ ko‘phad $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarning *eng katta umumiy bo‘luvchisi* deyiladi va $\text{EKUB}(f(x), g(x))$ kabi belgilanadi.

Ta’kidlash joizki, $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarning eng katta umumiy bo‘luvchisi darajasi qolgan umumiy bo‘luvchilar darajalaridan kichik bo‘lmaydi.

Ushbu mavzuda ko‘phadlarning eng katta umumiy bo‘luvchisini topish usuli bo‘lgan Yevklid algoritmini keltiramiz.

Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda $\deg f(x) \geq \deg g(x)$ deb olamiz.

$f(x)$ ni $g(x)$ ga bo‘lib, $q_1(x)$ bo‘linma va $r_1(x)$ qoldiqni hosil qilamiz

$$f(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x).$$

Ma’lumki, $\deg g(x) > \deg r_1(x)$, so‘ngra $g(x)$ ni $r_1(x)$ ga bo‘lib, $q_2(x)$ bo‘linma va $r_2(x)$ qoldiqni olamiz:

$$g(x) = r_1(x) \cdot q_2(x) + r_2(x).$$

So‘ngra $r_1(x)$ ni $r_2(x)$ bo‘lib, bu jarayonni shu tarzda davom ettiramiz. Qoldiqlarning darajalari

$$\deg g(x) > \deg r_1(x) > \deg r_2(x) > ...$$

tartibda pasayib borganligi va $\deg g(x)$ chekli bo‘lganligi uchun tengsizliklar zanjiri ma’lum joyga kelib tugaydi, ya’ni $\deg r_{n+1}(x) = 0$. Demak, biz qiyidagi tengliklarga ega bo‘lamiz:

$$\begin{aligned}
&f(x) = g(x)\cdot q_1(x) + r_1(x),\\
&g(x) = r_1(x)\cdot q_2(x) + r_2(x),\\
&r_1(x) = r_2(x)\cdot q_3(x) + r_3(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad (17.1)\\
&r_{n-3}(x) = r_{n-2}(x)\cdot q_{n-1}(x) + r_{n-1}(x),\\
&r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x)\cdot q_n(x) + r_n(x),\\
&r_{n-1}(x) = r_n(x)\cdot q_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

Endi bu tengliklarning oxirgisidan yuqoriga qarab harakat qilsak,

$$r_n(x)\,|\,r_{n-1}(x) \Rightarrow r_n(x)\,|\,r_{n-2}(x) \Rightarrow r_n(x)\,|\,r_{n-3}(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow r_n(x)\,|\,r_1(x) \Rightarrow r_n(x)\,|\,g(x) \Rightarrow r_n(x)\,|\,f(x)$$

hosil bo‘ladi.

Ravshanki, $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlar uchun tuzilgan Yevklid algoritmidagi $r_n(x)$ qoldiq bu ko‘phadlarning umumiy bo‘luvchisi bo‘ladi. Demak, Yevklid algoritmi $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarni umumiy bo‘luvchilarini topish usulini berar ekan.

17.3-teorema. $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlar uchun tuzilgan Yevklid algoritmidagi oxirgi noldan farqli qoldiq $r_n(x)$ ularning eng katta umumiy bo‘luvchisiga teng, ya’ni $\text{EKUB}(f(x), g(x)) = r_n(x)$.

Isbot. Yuqorida $r_n(x)$ qoldiq $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarning umumiy bo‘luvchisi ekanligini aytib o‘tdik. Faraz qilaylik, $d(x)$ ko‘phad $f(x)$ va $g(x)$ larning boshqa bir umumiy bo‘luvchisi bo‘lsin. U holda Yevklid algoritmidan ko‘rish mumkinki, $d(x)\,|\,r_1(x)$ o‘rinli bo‘ladi, shuningdek, $d(x)\,|\,r_2(x)$ munosabat ham o‘rinli ekanligini tekshirish qiyin emas. Bu jarayonni davom attirish natijasida $d(x)\,|\,r_n(x)$ ekanligini hosil qilamiz. □

17.3-teoremadan shuni xulosa qilish mumkinki, berilgan ko‘phadlarning eng katta umumiy bo‘luvchisini Yevklid algoritmi yordamida topish mumkin. Shuningdek, agar $d(x)$ berilgan ko‘phadlarning EKUBi bo‘lsa, u holda ixtiyoriy c nolinchi darajali ko‘phad uchun $cd(x)$ ko‘phad ham berilgan ko‘phadlarning EKUBi bo‘ladi.

Misol 17.1. Yevklid algoritmi yordamida $f(x)=x^3+x^2-x-1$ va $g(x)=x^3-1$ ko‘phadlarning EKUBini topaylik.

$$f(x)=g(x)\cdot 1+(x^2-x),$$

$$g(x)=(x^2-x)(x+1)+(x-1),$$

$$(x^2-x)=(x-1)\cdot x.$$

Demak, $\text{EKUB}(f(x),g(x))=x-1$.

17.4-ta’rif. Agar $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlar nolinchi darajali ko‘phadlardan boshqa umumiy bo‘luvchilarga ega bo‘lmasa, ushbu ko‘phadlar o‘zaro tub ko‘phadlar deyiladi.

Bundan keyin berilgan ko‘phadlarning EKUBining bosh koeffitsientini hamma vaqt 1 ga teng deb olamiz va shunga asosan o‘zaro tub ko‘phadlarning EKUBi 1 ga teng bo‘ladi. O‘zaro tub ko‘phadlar $(f(x),g(x))=1$ kabi yoziladi.

Endi Yevklid algoritmidan foydalanib, quyidagi teoremani isbot qilamiz.

17.5-teorema. Ixtiyoriy $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlar uchun $\deg u(x)<\deg g(x)$ va $\deg v(x)<\deg f(x)$ shartni qanoatlantiruvchi shunday $u(x)$, $v(x)$ ko‘phadlar topiladiki,

$$f(x)\cdot u(x)+g(x)\cdot v(x)=\text{EKUB}(f(x),g(x)) \qquad (17.2)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. Teoremani isbotlash uchun $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarga Yevklid algoritmini qo‘llaymiz. Yevklid algoritmidagi oxiridan bitta oldingi tengligini qaraymiz:

$$r_{n-2}(x)=r_{n-1}(x)\cdot q_n(x)+r_n(x).$$

Bundan

$$r_n(x) = r_{n-2}(x) - r_{n-1}(x) \cdot q_n(x)$$

tenglik hosil bo‘ladi. Bu tenglikda $r_n(x) = \text{EKUB}(f(x), g(x))$ ekanligini hisobga olib, $u_1(x) = 1,\ v_1(x) = -q_n(x)$ deb olsak,

$$r_n(x) = r_{n-2}(x) \cdot u_1(x) + r_{n-1}(x) \cdot v_1(x)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bu yerga $r_{n-1}(x)$ ning $r_{n-3}(x)$ va $r_{n-2}(x)$ orqali ifodasini Yevklid algoritmidagi tenglikdan foydalanib soddalashtirsak,

$$r_n(x) = r_{n-3}(x) \cdot u_2(x) + r_{n-2}(x) \cdot v_2(x)$$

tenglik hosil bo‘ladi, bu yerda

$$u_2(x) = v_1(x),\ v_2(x) = u_1(x) - v_1(x) \cdot q_{n-1}(x).$$

Yevklid algoritmidagi tengliklar bo‘ylab yuqoriga tomon harakatlanib borsak, (17.2) tenglikka kelamiz.

Endi teoremani ikkinchi shartini isbot qilamiz. Buning uchun teskarisini faraz qilamiz, ya’ni $\deg u(x) > \deg g(x)$ deb olamiz. U holda $u(x)$ ni $g(x)$ ga qoldiqli bo‘lib

$$u(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x),\ \deg r(x) < \deg g(x)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bu tenglikni (17.2) ga olib borib ihchamlasak

$$f(x) \cdot r(x) + g(x) \cdot \big(v(x) + f(x) \cdot q(x)\big) = r_n(x) \tag{17.3}$$

hosil bo‘ladi.

Bu tenglikda $u_1(x) = r(x)$, deb olsak, $\deg u_1(x) < \deg g(x)$.

Bundan tashqari, $v_1(x) = v(x) + f(x) \cdot q(x)$ deb belgilasak, $\deg v_1(x) < \deg f(x)$ bo‘ladi. Aks holda (17.3) tenglikning chap tomonidagi ikkinchi qo‘shiluvchining darajasi $g(x) \cdot f(x)$ ko‘paytmaning darajasidan katta yoki teng bo‘lib, chap tomondagi yig‘indining darajasi ham $g(x) \cdot f(x)$ ning darajasidan katta yoki teng bo‘ladi. Vaholanki, $\deg r_n(x) < \deg g(x) \cdot f(x)$. □

(17.2) tenglikdagi ifodaga $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarning eng katta umumiy bo‘luvchisi orqali chiziqli ifodasi deb ataladi.

Teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

17.6-natija. Agar $(f(x), g(x)) = 1$ bo‘lsa, u holda

$$f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot v(x) = 1$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $u(x)$, $v(x)$ ko‘phadlar mavjud, bu yerda $\deg u(x) < \deg g(x)$, $\deg v(x) < \deg f(x)$.

Misol 17.2. $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ va $g(x) = x^3 - 1$ ko‘phadlar uchun $u(x)$ va $v(x)$ ko‘phadlarni aniqlang.

Yuqoridagi 17.1-misoldagi $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlar uchun tuzilgan Yevklid algoritmidagi tengliklardan

$$x - 1 = g(x) - (x^2 - x)(x+1) = g(x) - (f(x) - g(x))(x+1) =$$

$$= g(x) - f(x) + g(x)(x+1) = f(x)(-1) + g(x)(x+2)$$

hosil bo‘lib, bundan $u(x) = -1$, $v(x) = x + 2$ ko‘phadlarni topamiz.

Natijadan foydalanib, o‘zaro tub ko‘phadlar uchun muhim xossalarni olish mumkin.

17.7-xossa. a) agar $(f(x), g(x)) = 1$ va $(f(x), \varphi(x)) = 1$ bo‘lsa, u holda $(f(x), \varphi(x) \cdot g(x)) = 1$ bo‘ladi;

b) agar $\varphi(x) \mid (f(x) \cdot g(x))$ bo‘lib, $(f(x), \varphi(x)) = 1$ bo‘lsa, u holda $\varphi(x) \mid g(x)$ bo‘ladi;

c) agar $\varphi(x) \mid f(x)$ va $\psi(x) \mid f(x)$ bo‘lib, $(\varphi(x), \psi(x)) = 1$ bo‘lsa, u holda $(\varphi(x) \cdot \psi(x)) \mid f(x)$ bo‘ladi.

Isbot: a) haqiqatdan ham,

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$$

tenglikni $\varphi(x)$ ga ko‘paytirsak,

$$f(x) \cdot \big(u(x) \cdot \varphi(x)\big) + \big(g(x) \cdot \varphi(x)\big) \cdot v(x) = \varphi(x)$$

hosil bo‘ladi.

Agar $h(x)$ ko‘phad $f(x)$ va $g(x)\cdot\varphi(x)$ ko‘phadlarning umumiy bo‘luvchisi bo‘lsa, yuqoridagi tenglikdan $h(x)\,|\,\varphi(x)$ munosabatni hosil qilamiz. Bu esa $h(x)$ ko‘phad $f(x)$ va $\varphi(x)$ ko‘phadlarning umumiy bo‘luvchilari ekanligini anglatadi. Shartga asosan, $h(x)=1$ bo‘ladi, bundan esa $f(x)$ va $\varphi(x)\cdot g(x)$ ko‘phadlar o‘zaro tub ekanligi kelib chiqadi.

b) shartga asosan

$$f(x)\cdot u(x)+\varphi(x)\cdot v(x)=1$$

o‘rinli bo‘ladi. Tenglikning ikkala tomonini $g(x)$ ko‘phadga ko‘paytiramiz.

$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)\cdot u(x)+\varphi(x)\cdot\big(g(x)\cdot v(x)\big)=g(x).$$

Bu tenglikning chap tomondagi yig‘indi $\varphi(x)$ ko‘phadga bo‘lingani uchun o‘ng tomonining ham bo‘linishi kelib chiqadi. Demak, $\varphi(x)\,|\,g(x)$.

c) shartga asosan $f(x)=\varphi(x)\cdot\varphi_1(x)$, bo‘lib u $\psi(x)$ ko‘phadga bo‘linadi, ya’ni $\psi(x)\,|\,(\varphi(x)\cdot\varphi_1(x))$, hamda $(\varphi(x),\psi(x))=1$ bo‘lganligi uchun $\psi(x)\,|\,\varphi_1(x)$. Demak, $\varphi_1(x)=\psi(x)\cdot\varphi_2(x)$ bo‘ladi, bu yerdan

$$f(x)=\varphi(x)\cdot\varphi_1(x)=(\varphi(x)\cdot\psi(x))\cdot\varphi_2(x)$$

hosil bo‘ladi. Bundan esa

$$(\varphi(x)\cdot\psi(x))\,|\,f(x)$$

ekanligini kelib chiqadi. □

Eng katta umumiy bo‘luvchi ta’rifini ixtiyoriy $f_1(x),\ f_2(x),\ldots,\ f_s(x)$ ko‘phadlar uchun ham berish mumkin, ya’ni agar $d(x)\,|\,f_i(x),\ 1\le i\le s$ bo‘lib, $f_i(x)$ ko‘phadlarning boshqa ixtiyoriy $h(x)$ umumiy bo‘luvchisi uchun $h(x)\,|\,d(x)$ bo‘lsa, $d(x)$ ko‘phad $f_1(x),\ f_2(x),\ldots,\ f_s(x)$ ko‘phadlarning eng katta umumiy bo‘luvchi deyiladi.

Berilgan $f_i(x)$ ko'phadlarning EKUBini topish uchun avval $(f_1(x), f_2(x)) = d_2(x)$, so'ngra $(d_2(x), f_3(x)) = d_3(x)$ va hokazo $(d_{s-1}(x), f_s(x)) = d_s(x)$ topiladi. Topilgan $d_s(x)$ ko'phad $f_i(x)$ larning EKUBi bo'ladi.

Xususan, agar $d_s(x) = 1$ bo'lsa, u holda $f_i(x)$ ko'phadlarga o'zaro tub ko'phadlar deyiladi.

Agar $\forall i \neq j$ uchun $(f_i(x), f_j(x)) = 1$ bo'lsa, $f_1(x), f_2(x), ..., f_s(x)$ ko'phadlarga juft-jufti bilan o'zaro tub ko'phadlar deyiladi.

18 - §. Bezu teoremasi va Gorner sxemasi. Algebraning asosiy teoremasi

Ko'phadlarning ildizlarini topish juda muhim ahamiyat kasb etadi. Chunki, ko'plab matematik masalalarni yechish ko'phadning ildizlarini o'rganish masalasiga olib kelinadi. Shu sababli biz ko'phadlarning ildizlarini o'rganish masalasini keltiramiz.

18.1-ta'rif. $f(x)$ ko'phad uchun $f(\alpha) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi α soniga $f(x)$ ko'phadning ildizi deyiladi.

Avvalgi mavzudan ma'lumki, $f(x)$ ko'phadni $x - \alpha$ ko'phadga qoldiqli bo'lish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x) + r. \qquad (18.1)$$

Ta'kidlash joizki, $x - \alpha$ ko'phadning darajasi 1 ga teng bo'lganligi sababli, qoldiqning darajasi nolga teng bo'ladi. Shuning uchun qoldiqli bo'lishdagi qoldiq ko'phad $r(x)$ o'rniga r sonini yozish mumkin.

18.2-teorema (Bezu teoremasi). $f(x)$ ko'phad $x - \alpha$ ko'phadga qoldiqsiz bo'linishi uchun $f(\alpha) = 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. *Zaruriyligi.* Agar $f(x)$ ko'phad $x - \alpha$ ko'phadga qoldiqsiz bo'linsa, u holda $f(x) = (x - \alpha) \cdot \varphi(x)$ o'rinli bo'ladi. Demak,

$$f(\alpha) = (\alpha - \alpha) \cdot \varphi(\alpha) = 0.$$

Yetarliligi. Faraz qilaylik, $x = \alpha$ nuqtada $f(x)$ ko‘phad nolga aylansin, ya’ni $f(\alpha) = 0$ bo‘lsin. U holda $f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x) + r$ tenglikdan

$$r = f(\alpha) - (\alpha - \alpha) \cdot q(\alpha) = 0$$

ekanligini hosil qilamiz. Demak, $f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x)$ tenglik o‘rinlidir. $\square$

Shunday qilib, $f(x)$ ko‘phadning ildizlarini izlash, uning chiziqli bo‘luvchilarini izlash masalasiga teng kuchlidir. $f(x)$ ko‘phadni $x - \alpha$ chiziqli ko‘phadga qoldiqli bo‘lishda keng qo‘llanadigan Gorner usulini keltiramiz.

Kompleks sonlar maydonida berilgan quyidagi ko‘phadni qaraylik:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_n,$$

$f(x)$ ko‘phadni $x - \alpha$ chiziqli ko‘phadga qoldiqli bo‘lganda bo‘linma $q(x)$ ni quyidagicha yozib olaylik:

$$q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + ... + b_{n-1}.$$

$q(x)$ ko‘phadni (18.1) tenglikka qo‘yib, x ning bir hil darajalari oldidagi koeffitsientlarini tenglasak,

$$a_0 = b_0,$$

$$a_1 = b_1 - \alpha b_0,$$

$$a_2 = b_2 - \alpha b_1,$$

$$......................,$$

$$a_{n-1} = b_{n-1} - \alpha b_{n-2},$$

$$a_n = r - \alpha b_{n-1}$$

tengliklarni hosil qilamiz. Ya’ni

$$b_0 = a_0,\ b_k = \alpha b_{k-1} + a_k,\ 1 \le k \le n-1$$

tengliklar kelib chiqadi. Oxirgi

$$r = \alpha b_{n-1} + a_n$$

tenglikdan r qoldiq yoki $f(x)$ ko‘phadning $x = \alpha$ nuqtadagi qiymati topiladi.

Bu usul *Gorner sxemasi* deb atalib, quyidagicha jadval orqali ifodalanadi:

a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{n-1}	a_n
a_0	$a_1+\alpha b_0$	$a_2+\alpha b_1$	$\dots$	$a_{n-1}+\alpha b_{n-2}$	$a_n+\alpha b_{n-1}$
b_0	b_1	b_2	$\dots$	b_{n-1}	r

Misol 18.1. $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 4x^2 - 5x + 7$ ko‘phadni $x-3$ ga bo‘lishdagi $q(x)$ bo‘linmani va r qoldig‘ini Gorner sxemasi yordamida toping.

α	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
	2	-3	0	4	-5	7
3	2	3	9	31	88	271
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	r

Shunday qilib, bo‘linma $q(x) = 2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 31x + 88$, qoldiq esa $r = f(3) = 271$ ga teng bo‘ldi.

Algebraning asosiy teoremasi. Kompleks koeffitsientli barcha ko‘phadlar to‘plamini $\mathbb{C}[x]$ orqali belgilaylik. Algebraning asosiy teoremasi deb ataluvchi quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz:

18.3-teorema (Algebraning asosiy teoremasi). Darajasi nolga teng bo‘lmagan ixtiyoriy $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ ko‘phad kamida bitta kompleks ildizga ega.

Teoremadan quyidagi natijaga ega bo‘lamiz:

18.4-natija. Darajasi $n(n \ge 1)$ ga teng bo‘lgan xar qanday $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ ko‘phad $\mathbb{C}$ maydonda n ta ildizga ega bo‘lib,

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)$$

yoyilma ko‘rinishida ifodalanadi. Bu yoyilma ko‘paytuvchilarining tartibi aniqligida yagonadir.

Isbot. Bizga darajasi n ga teng bo‘lgan $f(x)\in\mathbb{C}[x]$ ko‘phad berilgan bo‘lsin:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n.$$

Algebraning asosiy teoremasiga asosan, $f(x)$ ko‘phad kamida bitta ildizga ega bo‘lib, bu ildiz α_1 bo‘lsin. U holda

$$f(x)=(x-\alpha_1)\cdot\varphi(x),$$

bu yerda $\deg\varphi(x)=n-1.$ Agar $\varphi(x)$ ko‘phadning darajasi ham 1 dan katta bo‘lsa, u holda algebraning asosiy teoremaga ko‘ra $\varphi(x)$ ko‘phad ham qandaydir α_2 ildizga ega, ya’ni $\varphi(x)=(x-\alpha_2)\cdot\varphi_1(x)$. Demak,

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\varphi_1(x).$$

Bu jarayonni davom ettirib, $(n-1)$ ta qadamdan so‘ng $f(x)$ ko‘phadning chiziqli ko‘paytuvchilar ko‘paytmasi shaklida yozish mumkin

$$f(x)=(x-\alpha)q(x)+r. \tag{18.2}$$

Endi ushbu yoyilmaning yagonaligini ko‘rsatamiz. Teskarisini faraz qilaylik, ya’ni (18.2) yoyilmadan farqli yana bir

$$f(x)=a_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdot\ldots\cdot(x-\beta_n) \tag{18.3}$$

yoyilma mavjud bo‘lsin. Ushbu tengliklardan quyidagini hosil qilamiz

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdot\ldots\cdot(x-\beta_n). \tag{18.4}$$

Agar chap tomonda ishtirok etgan biror α_i ildiz o‘ng tomonda ishtirok etmasa, ya’ni $\alpha_i\neq\beta_j,\ 1\le j\le n$ bo‘lsa, u holda (18.4) tenglikning xar ikkala tomonida $x=\alpha_i$ qo‘yamiz. Natijada chap tomoni nolga teng bo‘lib, o‘ng tomonida esa noldan farqli son hosil bo‘ladi. Bu esa ziddiyat. Demak, barcha α_i ildizlar o'ng tomonda ham ishtirok etishi kerak. Xuddi shunday barcha β_j ildizlarning chap tomonda ham ishtirok etishi kelib chiqadi.

Endi bu ildizlarning aynan bir hil sonda (tartibda) ishtirok etishini ko'rsatamiz.

Aytaylik, α_1 ildiz chap tomonda s marotaba va o'ng tomonda t marotaba ishtirok etib, $s \neq t$ bo'lsin. U holda (18.4) tenglikning ikkala tomonini $(x-\alpha_1)^{\min\{s,t\}}$ ko'phadga qisqartirib yuboramiz. Natijada, hosil bo'lgan tenglikning bitta tomonida $x-\alpha_1$ ko'paytuvchi qatnashmaydi, ikkinchi tomonida esa, u $(x-\alpha_1)^{|s-t|}$ shaklda qatnashadi. Yuqoridagi mulohaza kabi yana ziddiyayga duch kelamiz. Bu esa yoyilmani ko'paytuvchilarning tartibi aniqligida yagona ekanligini bildiradi. □

Bir hil ko'paytuvchilarni jamlab, (18.2) yoyilmani

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_s)^{k_s} \qquad (18.5)$$

shaklga olib kelish mumkin, bu yerda $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$ va $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ ildizlar orasida o'zaro tenglari yo'q.

Hosil bo'lgan (18.5) tenglikda α_i ildiz $f(x)$ ko'phadning k_i karrali ildizi bo'ladi.

Yuqoridagi mulohazalardan quyidagi natijani hosil qilamiz:

18.5-natija. Agar darajalari n dan oshmaydigan $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlar noma'lumning turli hil $n+1$ ta qiymatida teng qiymatlarga ega bo'lsa, u holda $f(x) = g(x)$ bo'ladi.

Isbot. Haqiqatdan ham, $f(x) - g(x) = h(x)$ ko'phad farazimizga ko'ra $n+1$ ta ildizga ega bo'lib, $\deg h(x) \leq n$ bo'lganligi sababli $h(x)$ ko'phad $n+1$ ta ildizga ega bo'lsa, $h(x) = 0$ bo'ladi. □

Bu natijadan istalgan n-darajali ko'phadning koeffitsientlari $n+1$ ta qiymat orqali yagona ravishda aniqlanishi mumkin degan xulosaga kelamiz.

Shuni ta'kidlaymizki, agar bizga ikkita

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}\cdot(x-\alpha_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_s)^{k_s},$$

$$g(x)=b_0(x-\alpha_1)^{m_1}\cdot(x-\alpha_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_s)^{m_s}$$

ko‘phadlarning yoyilmalari berilgan bo‘lsa, u holda ularning EKUBi va EKUKi quyidagi ko‘rinishlarga ega bo‘ladi:

$$\text{EKUB}\big(f(x),g(x)\big)=(x-\alpha_1)^{\beta_1}\cdot(x-\alpha_2)^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_s)^{\beta_s},$$

$$\text{EKUK}\big(f(x),g(x)\big)=(x-\alpha_1)^{\gamma_1}\cdot(x-\alpha_2)^{\gamma_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_s)^{\gamma_s},$$

bu yerda

$$\beta_i=\min(k_i,m_i),\ \ \gamma_i=\max(k_i,m_i).$$

Shunday qilib, biz ko‘phadlarni kanonik yoyilmasidan foydalanib, ularning eng katta umumiy bo‘luvchisi va eng kichik umumiy karralilarini hisoblay olishimiz mukin.

Misol 18.2. $f(x)=(x+1)^4(x-2)^3(x-7)^2(x+12)(x+5)^2$ va $g(x)=(x+1)^3(x-2)(x-7)^2(x+12)^3(x+5)^6$ ko‘phadlarning EKUB va EKUK lari topamiz:

$$\text{EKUB}\big(f(x),g(x)\big)=(x+1)^3(x-2)(x-7)^2(x+12)(x+5)^2.$$

Shuningdek,

$$\text{EKUK}\big(f(x),g(x)\big)=(x+1)^4(x-2)^3(x-7)^2(x+12)^3(x+5)^6.$$

18.6-ta’rif. Agar $f(x)$ ko‘phad notrivial bo‘luvchilarga ega bo‘lmasa, u holda u keltirilmas ko‘phad deyiladi.

Algebraning asossiy teoremasidan ma’lumki, kompleks sonlar maydonida keltirilmas ko‘phadlar faqat $x-\alpha$ shaklidagi chiziqli ko‘phadlardan iborat bo‘ladi.

Haqiqiy sonlar maydonida esa $x-\alpha$ shaklidagi chiziqli ko‘phadlardan tashqari x^2+px+q, $p^2-4q<0$ ko‘rinishidagi kvadrat uchhadlar ham keltirilmas ko‘phad bo‘lishi ravshan. Quyidagi tasdiqda haqiqiy sonlar maydonida darajasi ikkidan katta bo‘lgan keltirilmas ko‘phad mavjud emasligini ko‘rsatamiz.

18.7-tasdiq. Haqiqiy sonlar maydonidagi keltirilmas ko‘phadlar faqat $x-\alpha$ shaklidagi chiziqli ko‘phadlar va x^2+px+q, $p^2-4q<0$ ko‘rinishidagi kvadrat uchhadlardan iborat bo‘ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, $f(x)$ ko‘phad darajasi ikkidan katta va haqiqiy sonlar maydonida keltirilmas ko‘phad bo‘lsin. U holda u haqiqiy ildizga ega emas, lekin algebraning asosiy teoremasiga ko‘ra $f(x)$ ko‘phad $x_0=a+ib,\ \ b\neq 0$ kompleks izldizga ega. Quyidagi ko‘phadni qaraymiz:

$$\varphi(x)=(x-x_0)(x-\overline{x}_0)=(x-a-ib)(x-a+ib)=(x-a)^2+b^2.$$

Ushbu $\varphi(x)$ ko‘phad haqiqiy koeffitsiyentli keltirilmas ko‘phad bo‘lib, $f(x)$ ko‘phad bilan umumiy kompleks ildizga ega. Shuning uchun $f(x)$ va $\varphi(x)$ ko‘phadlar o‘zaro tub emas. Demak, $f(x)$ ko‘phad $\varphi(x)$ ga bo‘linadi. Bu esa $f(x)$ ko‘phadning keltirilmas ekanligiga zid. □

18.4-natijaning isboti kabi ixtiyoriy haqiqiy koeffitsientli ko‘phadni keltirilmas ko‘phadlarning ko‘paytmasi shaklida yagona ravishda ifodalanilishini ko‘rsatish qiyin emas. Ya’ni haqiqiy koeffitsientli $f(x)$ ko‘phad uchun

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)^{k_n}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}$$

yoyilma o‘rinli, bu yerda $p_i^2-4q_i<0$.

Viyet formulasi. Bizga bosh koeffitsienti 1 ga teng bo‘lgan n-darajali

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

ko‘phad berilgan bo‘lib, $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\alpha_n$ uning ildizlari bo‘lsin. U holda

$$f(x)=(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)$$

yoyilmaga ega bo‘ladi. Bu yoyilmaning o‘ng tomonidagi qavslarini ochib chiqib, o‘xshash hadlarini ixchamlagandan so‘ng bir hil hadlari oldidagi koeffitsientlarini tenglashtirsak, quyidagi tengliklarni olamiz:

$$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n),$$

$$a_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + ... + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + ... + \alpha_{n-1}\alpha_n,$$

$$a_3 = -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + ... + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n),$$

$$...,$$

$$a_{n-1} = (-1)^{n-1}(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_{n-1} + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_{n-2} \cdot \alpha_n + ... + \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot ... \cdot \alpha_n),$$

$$a_{n-1} = (-1)^n \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_n.$$

Ushbu tengliklar ko‘phad koeffisentlarini uning ildizlari orqali ifodalovchi formula hisoblanib, *Viyet formulasi* deb ataladi. Tengliklarning o‘ng tomonidagi ifodalar *simmetrik ko‘phadlar* deyiladi.

19 - §. Ratsional kasrlar

Ushbu mavzuda haqiqiy yoki kompleks sonlar maydoni ustida berilgan ratsional kasrlar haqida gap boradi. Biror maydon ustida berilgan $f(x)$ va $g(x), g(x) \neq 0$ ko‘phadlarning $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ nisbatiga *ratsional kasrli funksiya* yoki qisqacha *ratsional kasr* deyiladi.

19.1-ta’rif. Agar $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ va $\dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}$ ratsional kasrlar uchun $f_1(x)g_2(x) = f_2(x)g_1(x)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, bu ratsional kasrlar teng deyiladi.

Masalan, $\dfrac{1}{x-1}$ va $\dfrac{x+1}{x^2-1}$ ratsional kasrlar tengdir.

Ratsional kasrlar to‘plamida qo‘shish va ko‘paytirish amallarini quyidagicha aniqlaymiz:

1. $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} + \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)} = \dfrac{f_1(x) \cdot g_2(x) + f_2(x) \cdot g_1(x)}{g_1(x) \cdot g_2(x)};$

2. $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}\cdot\dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}=\dfrac{f_1(x)\cdot f_2(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)}$.

Berilgan $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ratsional kasrda xar doim $(f(x),g(x))=1$ deb olishimiz mumkin. Chunki, $(f(x),g(x))=d(x)$ bo‘lsa, u holda $f(x)=d(x)\cdot f_1(x)$ va $g(x)=d(x)\cdot g_1(x)$ ekanligidan $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ kelib chiqadi, bu yerda $(f_1(x),g_1(x))=1$.

Bunday kasrlarga *normallashgan* kasrlar deb ataladi.

19.2-ta’rif. Agar $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ratsional kasrda $\deg(f(x))<\deg(g(x))$ bo‘lsa, u holda u to‘g‘ri ratsional kasr, aks holda noto‘g‘ri ratsional kasr deyiladi.

19.3-tasdiq. Xar qanday ratsional kasr ko‘phad va to‘g‘ri ratsional kasrlarning yig‘indisi orqali ifodalanadi.

Isbot: Agar $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ to‘g‘ri ratsional kasr bo‘lsa, teorema o‘rinli ekanligi ravshan.

Faraz qilaylik, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ noto‘g‘ri ratsional kasr bo‘lsin. U holda $f(x)$ ko‘phadni $g(x)$ ga qoldiqli bo‘lib,

$$f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x),\ \deg r(x)<\deg g(x)$$

tenglikni hosil qilamiz, bundan esa,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{g(x)\cdot q(x)+r(x)}{g(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{g(x)}$$

kelib chiqadi. □

19.4-tasdiq. To‘g‘ri ratsional kasrlarning yig‘indisi va ko‘paytmasi to‘g‘ri ratsional kasr bo‘ladi.

Isbot. Haqiqatdan ham, agar $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ va $\dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}$ to‘g‘ri ratsional kasrlar bo‘lsa,

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}+\frac{f_2(x)}{g_2(x)}=\frac{f_1(x)\cdot g_2(x)+f_2(x)\cdot g_1(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)}$$

to‘g‘ri ratsional kasr bo‘ladi, chunki

$$\deg(f_1(x)\cdot g_2(x)+f_2(x)\cdot g_1(x))<\deg(g_1(x)\cdot g_2(x)).$$

Xuddi shunday, ularning ko‘raytmasi ham to‘g‘ri ratsional kasr bo‘ladi. □

19.5-teorema. Agar $\dfrac{f(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)}$ to‘g‘ri ratsional kasrda $(g_1(x),g_2(x))=1$ bo‘lsa, u holda bu ratsional kasrni ikkita to‘g‘ri ratsional kasrlarning yig‘indisi ko‘rinishida yagona ravishda ifodalash mumkin.

Isbot. Ratsional kasr maxrajidagi $g_1(x)$ va $g_2(x)$ ko‘phadlar o‘zaro tub bo‘lganligi uchun shunday $u(x)$ va $v(x)$ ko‘phadlar mavjudki, $u(x)g_1(x)+v(x)g_2(x)=1$, bo‘ladi. Demak,

$$\frac{f(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)}=f(x)\cdot\frac{u(x)g_1(x)+v(x)g_2(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)}=\frac{f(x)u(x)}{g_2(x)}+\frac{f(x)v(x)}{g_1(x)}.$$

Endi $f(x)\cdot u(x)$ ni $g_2(x)$ ga qoldiqli bo‘lamiz:

$$f(x)\cdot u(x)=g_2(x)\cdot q_2(x)+r_2(x),\ \deg r_2(x)<\deg g_2(x).$$

Demak,

$$\frac{f(x)\cdot u(x)}{g_2(x)}=q_2(x)+\frac{r_2(x)}{g_2(x)}.$$

Hosil bo‘lgan $q_2(x)$ ko‘phadni $\dfrac{f(x)\cdot v(x)}{g_1(x)}$ kasrga kiritsak,

$$\frac{f(x)\cdot v(x)}{g_1(x)}+q_2(x)=\frac{f(x)\cdot v(x)+g_2(x)\cdot q_2(x)}{g_2(x)}$$

ratsional kasr hosil bo‘ladi. Bu ratsional kasr $\dfrac{f(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)}$ va $\dfrac{r_2(x)}{g_2(x)}$ to‘gri ratsional kasrlarning ayirmasi bo‘lganligi uchun, u ham to‘g‘ri ratsional kasr bo‘ladi. Demak,

$$\frac{f(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)}=\frac{r_1(x)}{g_1(x)}+\frac{r_2(x)}{g_2(x)}.$$

□

Bu teoremani umumlashtirib, quyidagi natijani hosil qilamiz.

19.6-natija. Agar $\dfrac{f(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)\cdot\ldots\cdot g_k(x)}$ to‘g‘ri ratsional kasrda $(g_i(x),g_j(x))=1,\ \ i\neq j$ bo‘lsa, u holda bu kasr to‘g‘ri ratsional kasrlarning

$$\frac{r_1(x)}{g_1(x)}+\frac{r_2(x)}{g_2(x)}+\ldots+\frac{r_k(x)}{g_k(x)}$$

yoyilmasi orqali yagona ravishda ifodalanadi.

Ma’lumki, ixtiyoriy $g(x)$ ko‘phadni keltirilmas ko‘phadlarning ko‘paytmasi $g(x)=p_1^{k_1}(x)\cdot p_2^{k_2}(x)\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s}(x)$ shaklida yagona ravishda ifodalash mumkin. Bunga asosan, biz yuqoridagi natijani umumlashtirib,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{p_1^{k_1}(x)\cdot p_2^{k_2}(x)\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s}(x)}=\frac{f_1(x)}{p_1^{k_1}(x)}+\frac{f_2(x)}{p_2^{k_2}(x)}+\ldots+\frac{f_s(x)}{p_s^{k_s}(x)}$$

yoyilmani hosil qilamiz.

Ushbu yoyilmadagi $\dfrac{f_1(x)}{p_1^{k_1}(x)}$ to‘g‘ri kasrlarga *primar kasrlar* deb ataladi. Agar primar kasrda $\deg f_i(x)<\deg p_i(x)$ bo‘lsa, bu primar kasrga *sodda kasr* deyiladi.

19.7-teorema. Xar qanday primar to‘g‘ri kasr sodda kasrlarning yig‘indisi shaklida ifodalanadi.

Isbot. Bizga $\dfrac{f(x)}{p^k(x)}$ primar kasr berilgan bo‘lsin. $f(x)$ ko‘phadni $p(x)$ ga qoldiqli bo‘lsak, $f(x)=p(x)\cdot q_1(x)+f_1(x)$ bo‘ladi. U holda

$$\frac{f(x)}{p^k(x)}=\frac{f_1(x)}{p^k(x)}+\frac{q_1(x)}{p^{k-1}(x)}.$$

Agar $\deg(q_1(x))<\deg(p(x))$ bo‘lsa teorema isboti kelib chiqadi. $\deg(q_1(x))\geq\deg(p(x))$ bo‘lganda esa, $q_1(x)$ ko‘phadni $p(x)$ ga qoldiqli bo‘lib, $q_1(x)=p(x)\cdot q_2(x)+f_2(x)$ ekanligidan

$$\frac{f(x)}{p^k(x)}=\frac{f_1(x)}{p^k(x)}+\frac{f_2(x)}{p^{k-1}(x)}+\frac{q_2(x)}{p^{k-2}(x)}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bu jarayonni chekli marotaba davom ettirsak, berilgan ratsional kasr sodda kasrlarning yig‘indisi shaklida ifodalanishi kelib chiqadi:

$$\frac{f(x)}{p^k(x)}=\frac{f_1(x)}{p^k(x)}+\frac{f_2(x)}{p^{k-1}(x)}+\ldots+\frac{f_k(x)}{p(x)}.$$

Ushbu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

19.8-natija. Ixtiyoriy to‘g‘ri ratsional kasrni yagona ravishda sodda kasrlarning yig‘indisi shakliga ifodalash mumkin.

Kompleks sonlar maydonida ixtiyoriy ko‘phad

$$g(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_s)^{k_s}$$

ko‘rinishida ifodalanganligi uchun, sodda ratsional kasrlar $\dfrac{A}{(x-\alpha)^k}$ ko‘rinishida bo‘ladi. To‘g‘ri kasrning sodda ratsional kasrlarga yoyilmasi esa,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_{1,1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}}+\frac{A_{1,2}}{(x-\alpha_1)^{k_1-1}}+\ldots+\frac{A_{1,k}}{x-\alpha_1}+$$

$$\frac{A_{2,1}}{(x-\alpha_2)^{k_2}}+\frac{A_{2,2}}{(x-\alpha_2)^{k_2-1}}+\ldots+\frac{A_{2,k}}{x-\alpha_2}+$$

$$+\ldots+\frac{A_{s,1}}{(x-\alpha_s)^{k_s}}+\frac{A_{s,2}}{(x-\alpha_s)^{k_s-1}}+\ldots+\frac{A_{s,k}}{x-\alpha_s}.$$

ko‘rinishida bo‘ladi.

Haqiqiy sonlar maydonida sodda ratsional kasrlarning umumiy ko‘rinishi $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$ va $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}$, $p^2-4q<0$ shaklda bo‘ladi.

Misol 19.2. $\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$ to‘g‘ri kasrni haqiqiy sonlar maydonida sodda kasrlarga yoying.

Ushbu kasr $\frac{A}{x-1}$ va $\frac{Bx+C}{x^2+1}$ sodda kasrlarning yig‘indisiga yoyiladi, ya’ni

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Bu tenglikni ikkala tomonini $(x-1)(x^2+1)$ ko‘phadga ko‘paytirsak, $1=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$ tenglik hosil bo‘ladi. Bu yerdan $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$ va $C=-\frac{1}{2}$ ekanligini topish qiyin emas.

Demak,

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{x+1}{2(x^2+1)}.$$

20- §. Uchinchi va to‘rtinchi darajali algebraik tenglamalarni yechish

Ushbu mavzuda uchinchi va to‘rtinchi darajali tenglamalarni yechish usullarini keltiramiz. Dastlab, uchunchi darajali tenglamani qaraymiz. Ma’lumki, uchinchi darajali tenglamalarning umumiy ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0.$$

Bu tenglamaning koeffitsiyentlari kompleks sonlardan iborat bo‘lib, tenglamani ham kompleks yechimlarini topish masalasini qaraymiz. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda, $a_0 = 1$ deb olish mumkin. $x = y - \frac{a_1}{3}$ kabi almashtirish bajarib, teglamani quyidagi ko‘rinishga keltirib olamiz:

$$\left(y - \frac{a_1}{3}\right)^3 + a_1\left(y - \frac{a_1}{3}\right)^2 + a_2\left(y - \frac{a_1}{3}\right) + a_3 = 0.$$

Ushbu tenglamaning qavslarini ochib, o‘xshash hadlarini ixchamlasak:

$$y^3 + \left(a_2 - \frac{a_1^2}{3}\right)y + \left(a_3 - \frac{a_1a_2}{3} + \frac{2}{27}a_1^3\right) = 0.$$

Endi $p = a_2 - \frac{a_1^2}{3}$, $q = a_3 - \frac{a_1a_2}{3} + \frac{2}{27}a_1^3$ belgilashlarni kiritsak, berilgan tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$y^3 + py + q = 0.$$

Demak, 3-darajali tenglamani yechish masalasi yuqoridagi tenglamani yechishga keltirildi. Ushbu tenglamada $y = \alpha + \beta$ deb olsak,

$$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 + p(\alpha + \beta) + q = 0,$$

yoki,

$$\alpha^3+\beta^3+(3\alpha\beta+p)(\alpha+\beta)+q=0.$$

Ma'lumki, agar $\alpha^3+\beta^3+q=0$ va $3\alpha\beta+p=0$ bo'lsa, u holda $y=\alpha+\beta$ soni $y^3+py+q=0$ tenglamaning yechimi bo'ladi. Shunday qilib, biz quyidagi sistemani hosil qildik:

$$\begin{cases}\alpha^3+\beta^3=-q,\\ 3\alpha\beta=-p,\end{cases}$$

Ushbu sistemani yechish uchun ikkinchi tenglikni kubga ko'tarsak, $\alpha^3\beta^3=-\dfrac{p^3}{27}$. Bundan esa, α^3 va β^3 sonlarini quyidagi kvadrat tenglamaning yechimlari sifatida qarash mumkinligi kelib chiqadi:

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0,$$

bu yerdan,

$$\alpha^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},\ \beta^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

va

$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},\ \beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Demak, y uchun quyidagi ifoda hosil bo'ladi:

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Ushbu ifodaga *Kardano formulasi* deyiladi.

Har bir sonning uchta kubik kompleks ildizi mavjudligini hisobga olsak, ikkala ildiz uchun jami to‘qqizta kombinatsiya kelib chiqadi, ya’ni y ning qiymati to‘qqiz hil aniqlanadi. Lekin, ulardan faqatgina $\alpha\beta = -\frac{p}{2}$ shatrni qanoatlantiruvchilarigina tenglamaning yechimi bo‘ladi.

Aytaylik, α_1 va β_1 – izlanayotgan juftliklardan biri bo‘lsin. Qolgan α ga mos qiymatlar $\alpha_1\omega_1$ va $\alpha_1\omega_2$ bo‘lib, β ga mos qiymatlar esa $\beta_1\omega_2$ va $\beta_1\omega_1$ bo‘ladi. Bu yerda $\omega_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\omega_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, ya’ni 1 ning boshlang‘ich kub ildizlari.

Demak, Kardano formulasi orqali tenglamaning barcha

$$y_1 = \alpha_1 + \beta_1,$$

$$y_2 = \alpha_1\omega_1 + \beta_1\omega_2,$$

$$y_3 = \alpha_1\omega_2 + \beta_1\omega_1$$

yechimlarini aniqlash mimkin.

Misol 20.1. $y^3 + (3-3i)y + (-2+i) = 0$ tenglamani yeching.

Kardano formulasiga ko‘ra

$$y = \sqrt[3]{1 - \frac{i}{2} + \sqrt{\left(1-\frac{i}{2}\right)^2 + (1-i)^3}} + \sqrt[3]{1 - \frac{i}{2} - \sqrt{\left(1-\frac{i}{2}\right)^2 + (1-i)^3}} =$$

$$= \sqrt[3]{1 - \frac{i}{2} + \sqrt{-\frac{5}{4} - 3i}} + \sqrt[3]{1 - \frac{i}{2} - \sqrt{-\frac{5}{4} - 3i}} =$$

$$= \sqrt[3]{1 - \frac{i}{2} + \left(\frac{3}{2}i - 1\right)} + \sqrt[3]{1 - \frac{i}{2} - \left(\frac{3}{2}i - 1\right)} = \sqrt[3]{i} + \sqrt[3]{2-2i}.$$

Kub ildizlarni chiqarganda ularning ko‘paytmasi $-\frac{p}{3}$ ga ya’ni $-1+i$ ga teng bo‘lishini hisobga olish lozim. Shuning uchun birinchi ildiz uchun $-i$ qiymatni olganda ikkinchisi uchun $-1-i$ qiymat olinadi. Demak, berilgan tenglamaning ildizlari:

$$y_1 = -i + (-1-i) = -1-2i,$$

$$y_2 = -i\omega_1 + (-1-i)\omega_2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)i,$$

$$y_3 = -i\omega_2 + (-1-i)\omega_1 = \frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)i.$$

Endi $y^3 + py + q = 0$ kubik tenglamaning p va q koeffitsiyentlari haqiqiy sonlar bo‘lganda Kardano formulasini qo‘llash qanday natija berishini tahlil qilamiz.

Kardano formulasidan ko‘rinadiki, $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ ifodaning ishorasi tenglamaning yechimlari xarakteriga sezilarli ta’sir qiladi. Uchta holatni alohida ko‘rib chiqadiz.

1-hol. Aytaylik $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ bo‘lsin. Bu holda $-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ va $-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ sonlarning ikkalasi ham haqiqiy va turli hil bo‘lib, birinchi kub ildizning qiymati α_1 haqiqiy qiymat olinganida β_1 ning ham haqiqiy qiymati olinadi. Shunday qilib, bu holatda yechimlar quyidagicha bo‘ladi:

$$y_1 = \alpha_1 + \beta_1,$$

$$y_2 = \alpha_1\omega_1 + \beta_1\omega_2 = -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} + \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} i\sqrt{3},$$

$$y_3 = \alpha_1\omega_2 + \beta_1\omega_1 = -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} - \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} i\sqrt{3}.$$

Demak, $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$ bo‘lganda berilgan kubik tenglama bitta haqiqiy ildizga va ikkita o‘zaro qo‘shma kompleks ildizlarga ega bo‘ladi.

2-hol. $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$ bo‘lsin. Bu holda $-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ va $-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ ifodalar haqiqiy va o‘zaro teng bo‘lib, α_1 va β_1 kub ildizlar ham haqiqiy va o‘zaro teng bo‘ladi, ya’ni $\alpha_1=\beta_1$. U holda berilgan kubik tenglama quyidagi ildizlarga ega bo‘ladi

$$y_1=\alpha_1+\beta_1=2\alpha_1,$$

$$y_2=\alpha_1\omega_1+\beta_1\omega_2=-\alpha_1,$$

$$y_3=\alpha_1\omega_2+\beta_1\omega_1=-\alpha_1.$$

Demak, bu holda uchchala ildiz ham haqiqiy bo‘lib, bitta ildizi ikki karrali ildiz bo‘ladi.

3-hol. $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ bo‘lsin. Ravshanki, bu holat faqatgina p manfiy bo‘lgandagina o‘rinli. $p_1=-p$ deb belgilasak, $p_1>0$ bo‘lib, kub ildizlar ostida quyidagi o‘zaro qo‘shma kompleks sonlar hosil bo‘ladi:

$$-\frac{q}{2}+i\sqrt{\frac{p_1^3}{27}-\frac{q^2}{4}} \text{ va } -\frac{q}{2}-i\sqrt{\frac{p_1^3}{27}-\frac{q^2}{4}}.$$

Kub ildizdan qutulish uchun $-\frac{q}{2}+i\sqrt{\frac{p_1^3}{27}-\frac{q^2}{4}}$ kompleks sonni trigonometrik shaklga o‘tkazamiz:

$$r=\sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{p_1^3}{27}-\frac{q^2}{4}}\right)^2}=\sqrt{\frac{p_1^3}{27}},$$

$$\cos\varphi = -\frac{q}{2r}, \ \sin\varphi > 0.$$

Demak,

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + i\sqrt{\frac{p_1^3}{27} - \frac{q^2}{4}}} = r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{p_1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right),$$

bu yerda $k = 0,1,2.$

$\alpha\beta = \frac{p_1}{3}$ ekanligidan esa

$$\beta = \frac{\frac{p_1}{3}}{\sqrt{\frac{p_1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{p_1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} - i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right).$$

Shunday qilib, β soni α soniga qo‘shma kompleks son bo‘ladi. Demak, kubik tenglamaning qiyidagi ildizlarini hosil qilamiz

$$y = \sqrt{\frac{p_1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right) +$$

$$+\sqrt{\frac{p_1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} - i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right) = 2\sqrt{\frac{p_1}{3}}\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3},$$

bu yerda $k = 0,1,2.$

Bundan ko‘rinadiki, $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ bo‘lgan holda kubik tenglamaning uchchala ildizi ham haqiqiy bo‘lib, ular turli hil bo‘ladi.

Misol 20.2. Tenglamani yeching: $y^3 - 9y + 8 = 0.$

Kardano formulasidan foydalansak,

$$y=\sqrt[3]{-4+\sqrt{16-27}}+\sqrt[3]{-4-\sqrt{16-27}}=\sqrt[3]{-4+i\sqrt{11}}+\sqrt[3]{-4-i\sqrt{11}}.$$

$-4+i\sqrt{11}=\left(\frac{1-i\sqrt{11}}{2}\right)^3$ va $-\frac{p}{3}=3$ ekanligini hisobga olsak,

$$y_1=\frac{1-i\sqrt{11}}{2}+\frac{1+i\sqrt{11}}{2}=1,$$

$$y_2=\frac{1-i\sqrt{11}}{2}\omega_1+\frac{1+i\sqrt{11}}{2}\omega_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2},$$

$$y_3=\frac{1-i\sqrt{11}}{2}\omega_2+\frac{1+i\sqrt{11}}{2}\omega_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}.$$

Demak, tenglamaning uchchala ildizi ham haqiqiy son bo‘ladi.

Misol 20.3. Tenglamani yeching: $x^3+3x-4=0.$

Bu yerda ham Kardano formulasini qo‘llasak:

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{4+1}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{4+1}}=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$$

Kub ildiz ostidagi ifodalar uchun

$$2+\sqrt{5}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 \text{ va } 2-\sqrt{5}=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3$$

ekanligidan foydalansak, tenglamaning ildizlarini hosil qilamiz:

$$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1,$$

$$x_2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\omega_1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\omega_2=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{15}}{2},$$

$$x_3=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\omega_2+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\omega_1=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{15}}{2}.$$

Endi to‘rtinchi darajali tenglamalarni yechishning L.Ferrariga tegishli bo‘lgan usulni keltirib o‘tamiz.

Keltiriladigan usulning maqsadi

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

tenglamaning chap tomonini kvadratlar ayirmasi ko‘rinishida yozib olishdan iborat. U holda tenglamani ikkita ikkinchi darajali hadlar ko‘paytmasi sifatida yozish mumkin. Shu yo‘l bilan berilgan tenglamani yechish masalasi ikkita kvadrat tenglamani yechishga olib kelinadi. Buning uchun tenglama chap tomonini quyidagicha yozib olamiz:

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{y}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}x^2-\frac{ayx}{2}-\frac{y^2}{4}-yx^2+bx^2+cx+d=$$

$$=\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{y}{2}\right)^2-\left[\left(\frac{a^2}{4}+y-b\right)x^2+\left(\frac{ay}{2}-c\right)x+\left(\frac{y^2}{4}-d\right)\right].$$

Bu yerda y yordamchi noma’lum bo‘lib, kvadrat qavsdagi ifoda chiziqli ikkihadning kvadrati bo‘ladigan qilib tanlanadi. Ma’lumki, $Ax^2+Bx+C=0$ kvadrat uchhad chiziqli ikkihadning kvadrati bo‘lishi uchun $B^2-4AC=0$ bo‘lishi zarur va yetarli. Bunga ko‘ra

$$\left(\frac{ay}{2}-c\right)^2-4\left(\frac{a^2}{4}+y-b\right)\left(\frac{y^2}{4}-d\right)=0.$$

Bu shart y ga nisbatan uchinchi darajali tenglama bo‘lib, qavslarni ochgandan so‘ng quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$y^3-by^2+(ac-4d)y-(c^2+a^2d-4bd)=0.$$

Bu tenglamaning ildizlaridan biri y_1 bo‘lsa, u holda yuqoridagi kvadrat uchhad to‘la kvadrat shaklida ifodalanadi, ya’ni

$$\left(\frac{a^2}{4}-y_1+b\right)x^2+\left(\frac{ay_1}{2}-c\right)x+\left(\frac{y_1^2}{4}-d\right)=(kx+l)^2.$$

Berilgan tenglamaning ko‘rinishi esa

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{y_1}{2}\right)^2-(kx+l)^2=0,$$

yoki

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{y_1}{2}+kx+l\right)\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{y_1}{2}-kx-l\right)=0$$

holatlarga keladi.

Har bir ko‘paytuvchilarni nolga tenglab, tenglamaning 4 ta ildizini topamiz. Agar x_1 va x_2 birinchi ko‘paytuvchining, x_3 va x_4 ikkinchi ko‘paytuvchining ildizlari bo‘lsa, u holda

$$x_1x_2=\frac{y_1}{2}+l,\ x_3x_4=\frac{y_1}{2}-l.$$

Bu tengliklarni qo‘shib, $y_1=x_1x_2+x_3x_4$ munosabatni hosil qilamiz. Demak, berilgan to‘rtinchi darajali tenglama ildizlari orqali uchinchi darajali yordamchi tenglamaning y_1 ildizining ifodasini topish mumkin.

Misol 20.4. Tenglamani yeching: $x^4+2x^3-6x^2-5x+2=0.$

Yuqorida keltirilgan usulga ko‘ra chap tomonni o‘zgartiramiz:

$$x^4+2x^3-6x^2-5x+2=$$

$$=\left(x^2+x+\frac{y}{2}\right)^2-yx^2-x^2-xy-\frac{y^2}{4}-6x^2-5x+2=$$

$$=\left(x^2+x+\frac{y}{2}\right)^2-\left[(y+7)x^2+(y+5)x+\left(\frac{y^2}{4}-2\right)\right].$$

Demak, $(y+5)^2-4(y+7)\left(\frac{y^2}{4}-2\right)=0$ bo‘lib, bu tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$y^3+6y^2-18y-81=0.$$

Ushbu tenglamaning ildizlaridan biri $y_1 = -3$ ekanligini ko‘rish qiyin emas. Berilgan tenglamaning chap tomoniga bu ildizni qo‘ysak:

$$x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 2 = \left(x^2 + x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left[4x^2 + 2x + \frac{1}{4}\right] =$$

$$= \left(x^2 + x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 = (x^2 + 3x - 1)(x^2 - x - 2).$$

Hadlarni nolga tenglab, quyidagi yechimlarni hosil qilamiz:

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2},\ x_2 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2},\ x_3 = 2,\ x_4 = -1.$$

21 - §. Ildiz chegaralari, Shturm teoremasi

Ushbu mavzuda berilgan ko‘phadning ildizlarini topmasdan turib, ular qaysi oraliqqa tegishli bo‘lishini topish usullarini keltiramiz.

Bizga $f(x)$ ko‘phad berilgan bo‘lib, uning musbat ildizlari (a,b) intervalga, manfiy ildizlari esa (c,d) intervalga tegishli bo‘lsin. Ya’ni a va b sonlari ko‘phad musbat ildizlarining, c va d sonlari esa manfiy ildizlarning quyi va yuqori chegaralari bo‘lsin.

Umuman olganda ko‘phad ildizlari chegaralarini topish masalasi uning musbat ildizlarining yuqori chegarasini topishga keltiriladi. Buning uchun quyidagi ko‘phadlarni qaraymiz:

$$\varphi_1(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\varphi_2(x) = f(-x),$$

$$\varphi_3(x) = x^n f\left(-\frac{1}{x}\right).$$

Aytaylik, $f(x)$ ko‘phadning musbat ildizlari yuqori chegarasi N_0 va $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ ko‘phadlar musbat ildizlari yuqori chegaralari N_1, N_2, N_3 bo‘lsin. U holda $\frac{1}{N_1}$ soni $f(x)$ ko‘phadning musbat ildizlari quyi chegarasi, $-N_2$ va $-\frac{1}{N_3}$ sonlar esa $f(x)$ ko‘phadning manfiy ildizlari quyi va yuqori chegaralari bo‘ladi.

Shunday qilib, $f(x)$ ko‘phadning barcha musbat ildizlari $\frac{1}{N_1} < x < N_0$ tengsizlikni, manfiy ildizlar esa $-N_2 < x < -\frac{1}{N_3}$ tengsizlikni qanoatlantiradi.

Quyidagi tasdiqda ko‘phadning musbat ildizlari yuqori chegarasini aniqlashning usullaridan birini keltiramiz.

21.1-tasdiq. Bizga haqiqiy koeffitsientli

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n,\ a_0 > 0.$$

ko‘phad berilgan bo‘lsin. Aytaylik, $f(x)$ ko‘phadning dastlabki manfiy koeffitsienti a_k bo‘lib, B soni ko‘phad manfiy koeffitsientlari absolyut qiymatlari maksimumi bo‘lsin. U holda $1+\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}$ soni $f(x)$ ko‘phadning musbat ildizlari yuqori chegarasi bo‘ladi.

Isbot. Ko‘phadda manfiy koeffitsient har doim mavjud, aks holda $f(x)$ ko‘phad umuman musbat yechimga ega bo‘lmaydi.

Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda $x > 1$ deb olib, $a_0, a_1, ..., a_{k-1}$ koeffitsientlarlarni nol bilan $a_k, a_{k+1}, ..., a_n$ koeffitsientlarni $-B$ bilan almashtirsak, $f(x)$ ko‘phadning qiymati kichiklashadi, ya’ni

$$f(x) \geq a_0x^n - B(x^{n-k} + x^{n-k-1} + ... + x + 1) = a_0x^n - B\frac{x^{n-k+1} - 1}{x-1}.$$

$x > 1$ ekanligini hisobga olsak,

$$f(x) > a_0 x^n - \frac{Bx^{n-k+1}}{x-1} = \frac{x^{n-k+1}}{x-1}\left[a_0 x^{k-1}(x-1) - B\right].$$

Agarda $x > 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}$ bo‘lsa, u holda

$$f(x) > \frac{x^{n-k+1}}{x-1}\left[a_0 x^{k-1}(x-1) - B\right] \geq \frac{x^{n-k+1}}{x-1}\left[a_0 (x-1)^k - B\right] > 0,$$

ya’ni, $f(x)$ ning qiymati qat’iy musbat bo‘ladi. Demak, $x > 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}$ tengsizlikni qanoatlantiradigan x soni $f(x)$ ko‘phadning ildizi bo‘la olmaydi. □

Misol 21.1. $h(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x -$ ko‘phad uchun $a_0 = 1$, $k = 2$ va $B = 7$ ekanligidan, uning musbat ildizlari yuqori chegarasi $1 + \sqrt{7}$ bo‘ishini hosil qilamiz.

Musbat ildizlarning yuqori chegarasini izlashning yana bir usuli bo‘lgan *Nyuton usulini* keltiramiz.

21.2-tasdiq. Bizga haqiqiy koeffitsientli

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n, \ a_0 > 0.$$

ko‘phad berilgan bo‘lsin. Agar $x = c$ nuqtada $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ musbat qiymatlar qabul qilsa, u holda c soni musbat ildizlarning yuqori chegarasi bo‘ladi.

Isbot. Haqiatdan ham, Teylor formulasiga ko‘ra,

$$f(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + (x-c)^2 \frac{f'(c)}{2!} + ... + (x-c)^n \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

Bundan ko‘rinib turibdiki, x ning c dan katta barcha qiymatlarida $f(x)$ ko‘phad faqat musbat qiymatlarni qabul qiladi. Demak, c soni musbat ildizlarning yuqori chegarasi bo‘ladi. □

Berilgan $f(x)$ ko‘phad uchun mos keluvchi c sonini topish uchun quyidagicha yo‘l tutamiz. $f^{(n)}(x)=n!a_0$ musbat son bo‘lganligi uchun $f^{(n-1)}(x)$ funksiya o‘suvchi funksiya bo‘ladi. Demak, shunday c_1 son mavjudki, $x \geq c_1$ lar uchun $f^{(n-1)}(x)>0$ bo‘ladi.

Endi $x \geq c_1$ holatda $f^{(n-2)}(x)$ funksiya o‘suvchi ekanligidan foydalanib, $x \geq c_2$ lar uchun $f^{(n-2)}(x)>0$ bo‘livchi c_2, $(c_2 \geq c_1)$ sonini topamiz. Bu jarayonni chekli marotaba davom ettirish natijasida topilgan oxirgi c_n soni bizga kerakli bo‘lgan c sonini, ya’ni musbat ildizlarning yuqori chegarasini beradi.

Misol 21.2. $h(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-$ ko‘phad uchun Nyuton usulini qo‘llab, uning musbat ildizlari yuqori chegarasini topamiz:

$$h(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3,$$

$$h'(x)=5x^4+8x^3-15x^2+16x-7,$$

$$h''(x)=20x^3+24x^2-30x+16,$$

$$h'''(x)=60x^2+48x-30,$$

$$h^{(4)}(x)=120x+48,$$

$$h^{(5)}(x)=120.$$

Ketirilgan barcha ko‘phadlar $x=2$ qiymatda musbat ekanligini ko‘rish qiyin emas. Shunday qilib, 2 soni berilgan $h(x)$ ko‘phad musbat ildizlari yuqori chegarasi bo‘ladi. Bu natija 21.1-misoldagi natijaga qaraganda aniqroqdir.

Misol 21.3. Yuqoridagi $h(x)$ ko‘phadning manfiy ildizlari quyi chegarasini topamiz. Buning uchun $\varphi_2(x)=-h(-x)$ ko‘phadni qarab, uning hosilalarini topib chiqamiz:

$$\varphi_2(x)=x^5-2x^4-5x^3-8x^2-7x+3,$$

$$\varphi_2'(x)=5x^4-8x^3-15x^2-16x-7,$$

$$\varphi_2''(x) = 20x^3 - 24x^2 - 30x - 16,$$
$$\varphi_2'''(x) = 60x^2 - 48x - 30,$$
$$\varphi_2^{(4)}(x) = 120x - 48,$$
$$\varphi_2^{(5)}(x) = 120.$$

Bu ko‘phadlarning barchasi $x = 4$ qiymatda musbat bo‘lganligi uchun 4 soni $\varphi_2(x)$ ko‘phadning musbat ildizlari yuqori chegarasi bo‘la oladi. Shunung uchun -4 soni $h(x)$ ko‘phadning manfiy ildizlari quyi chegarasi bo‘ladi.

Endi biz haqiqiy koeffitsientli $f(x)$ ko‘phadning haqiqiy ildizlari sonini topuvchi usullardan biri bo‘lgan Shturm usilini keltiramiz. Bu usul yordamida ko‘phadning barcha ildizlari soni, yoki musbat va manfiy ildizlari soni, yoki biror oraliqdagi ildizlar sonini aniqlash mumkin.

Aytaylik, $f(x)$ ko‘phad karrali ildizlarga ega bo‘lmasin. Aks holda, bu ko‘phadni o‘zining hosilasi bilan eng katta umumiy bo‘luvchisiga bo‘lib yuborish natijasida karrali ildizlarga ega bo‘lmagan ko‘phad hosil qilish mumkin.

21.3-ta’rif. Haqiqiy koeffitsientli noldan farqli chekli

$$f(x) = f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x), \dots,\ f_s(x) \qquad (21.1)$$

ko‘phadlar sistemasi uchun quyidagi shartlar o‘rinli bo‘lsa, u holda bu ko‘phadlar $f(x)$ ko‘phad uchun Shturm sistemasi deyiladi:

1) ko‘phadlar sistemasining qo‘shni ko‘phadlari umumiy ildizlarga ega emas;

2) Oxirgi $f_s(x)$ ko‘phad haqiqiy ildizga ega emas;

3) Agar α soni biror $f_k(x),\ 1 \le k \le s-1$ ko‘phadning haqiqiy ildizi bo‘lsa, u holda $f_{k-1}(\alpha)$ va $f_{k+1}(\alpha)$ ko‘phadlar turli ishorali bo‘ladi;

4) Agar α soni $f(x)$ ko‘phadning haqiqiy ildizi bo‘lsa, u holda $f(x)\cdot f_1(x)$ ko‘paytma x o‘sib α nuqtadan o‘tganda ishorasini manfiydan musbatga o‘zgartiradi.

21.4-teorema. Karrali ildizlarga ega bo‘lmagan haqiqiy koeffitsiyentli ihtiyoriy $f(x)$ ko‘phad Shturm sistemasiga ega.

Isbot. Teorema isbotini 21.3-ta’rif shartlarini qanoatlantiruvchi $f(x)=f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ldots,\ f_s(x)$ ko‘phadlar sistemasini qurish usuli yordamida keltiramiz. Buning uchun $f_1(x)=f'(x)$ deb olamiz. Ta’kidlash joizki, $f(x)$ va $f_1(x)$ ko‘phadlar uchun 21.3-ta’rifning 4) sharti bajariladi. Haqiqatdan ham, agar α soni berilgan $f(x)$ ko‘phadning haqiqiy ildizi bo‘lsa, u holda $f'(\alpha)\neq 0.$ Agar $f'(\alpha)>0$ bo‘lsa, u holda α nuqtaning biror atrofida ham $f'(x)>0$ bo‘ladi. Demak, $f(x)$ ko‘phad α nuqtaning atrofida o‘zuvchi bo‘ladi. Bundan $f(x)\,f_1(x)$ ko‘paytma x dan o‘tganda manfiy ishorani musbatga almashtirishi kelib chiqadi. Huddi shunga o‘xshab, agar $f'(\alpha)<0$ bo‘lsa, α nuqtaning biror atrofida $f'(x)<0$ va $f(x)$ ko‘phad kamayuvchi bo‘ladi. Demak, bu holatda ham $f(x)\,f_1(x)$ ko‘paytma x dan o‘tganda manfiy ishorani musbatga almashtiradi.

$f_2(x)$ ko‘phadni aniqlash uchun $f(x)$ ni $f_1(x)$ ga qoldiqli bo‘lib, qoldiqni –1 ga ko‘paytmasini olamiz. Ya’ni,

$$f(x)=f_1(x)\cdot q_1(x)-f_2(x).$$

Bu jarayonni davom ettirib, $f_{k-1}(x)$ ko‘phadni $f_k(x)$ ko‘phadga qoldiqli bo‘lib, qoldiqni –1 ga ko‘paytmasini $f_{k+1}(x)$ kabi belgilaymiz, ya’ni

$$f_{k-1}(x)=f_k(x)\cdot q_k(x)-f_{k+1}(x). \tag{21.2}$$

$f(x)$ va $f'(x)$ ko‘phadlarga qo‘llangan usul Yevklid algoritmidan faqat qoldiqning manfiy ishorasi bilan olinishigagina farq qiladi. Yevklid algoritmida ishorani almashtirish EKUB topishga ta’sir qilmaganligi uchun, biz bu jarayon orqali $f(x)$ va $f'(x)$

ko‘phadlarning EKUBini hosil qilamiz. Bu ko‘phadlar o‘zaro tub bo‘lganligi sababli, $f_s(x)$ ko‘phad noldan farqli bo‘lgan qandaydir son bo‘ladi. Demak,

$$f(x) = f_0(x),\ f'(x) = f_1(x),\ f_2(x), ...,\ f_s(x)$$

ko‘phadlar sistemasi 21.3-ta’rifning 2) shartini qanoatlantiradi, ya’ni $f_s(x)$ ko‘phad haqiqiy ildizga ega emas.

Bu ko‘phadlar uchun 1) shart bajarilishini ko‘rsatish uchun $f_k(x)$ va $f_{k+1}(x)$ qo‘shni ko‘phadlar umumiy α ildizga ega bo‘lsin deb faraz qilamiz. U holda (21.2) tenglikdan α ildiz $f_{k-1}(x)$ ko‘phad uchun ham ildiz bo‘lishi kelib chiqadi. Quyidagi

$$f_{k-2}(x) = f_{k-1}(x) \cdot q_{k-1}(x) - f_k(x)$$

tenglikdan esa, α soni $f_{k-2}(x)$ ko‘phad uchun ham ildiz bo‘lishini hosil qilamiz. Bu jarayonni davom ettirsak, α soni $f(x)$ va $f'(x)$ ko‘phadlarining umumiy ildizi bo‘ladi. Bu esa tasdiq shartiga zid. Demak, $f_k(x)$ va $f_{k+1}(x)$ qo‘shni ko‘phadlar umumiy ildizga ega emas.

Nihoyat, 3) shartning bajarilishi (21.2) tenglikdan bevosita kelib chiqadi, chunki, agar $f_k(\alpha) = 0,$ u holda $f_{k-1}(\alpha) = -f_{k+1}(\alpha).$ □

Endi $f(x)$ ko‘phadning Shturm sistemasi uning haqiqiy ildizlari sonini topishda qanday qo‘llanilishini ko‘rsatamiz. Buning uchun dastlab berilgan sonlar ketma-ketligi uchun ishora almashishlar soni tushunchasini kiritib olamiz. Ya’ni noldan farqli bo‘lgan chekli tartiblangan sonlar sistemasida necha marotaba turli hil ishorali sonlar yonma-yon kelishini sanab, bu sonni *ishora almashishlar soni* deb olamiz.

Masalan,

$$1, 3, -2, 1, -4, -8, -3, 4, 1$$

Tartib bilan bu sonlarning ishoralarini yozib olamiz:

$$+, +, -, +, -, -, -, +, +.$$

Bu sistemada 4 marotaba o‘zaro qarama-qarshi ishoralar yonma-yon kelganini ko‘rish qiyin emas. Demak, tartiblangan sonlar sistemada 4 ta ishora almashishi bor.

Aytaylik, $f(x)$ ko‘phadning Shturm sistemasi berilgan bo‘lib, c haqiqiy soni ko‘phadning ildizi bo‘lmasin. Quyidagi haqiqiy sonlar sistemasini olib,

$$f(c),\ f_1(c),\ f_2(c), ...,\ f_s(c),$$

bu sonlar ketma-ketligidan nolga teng bo‘lgan sonlarni o‘chirib tashlaymiz. Hosil bo‘lgan sonlar ketma-ketligining ishora almashishlari sonini $W(c)$ kabi belgilaymiz

Ushbu $W(c)$ soni $f(x)$ ko‘phad uchun $x=c$ holatda berilgan Shturm sistemasidagi *ishora almashishlar soni* deb ataladi.

21.5-teorema (Shturm teoremasi). Agar a va b, $a<b$ haqiqiy sonlar karrali ildizlarga ega bo‘lmagan $f(x)$ ko‘phadning ildizlari bo‘lmasa, u holda $W(a)\geq W(b)$ bo‘lib, $W(a)-W(b)$ ayirma $f\left(x\right)$ ko‘phadning (a,b) oraliqdagi haqiqiy ildizlari soniga teng bo‘ladi.

Isbot. Teoremani isbotlash uchun $W(x)$ soni x ortib borishi bilan qanday o‘zgarishini aniqlab chiqamiz. Ravshanki, x ning qiymati ortib borganda (21.1) Shturm sistemasi ko‘phadlaridan birining ildizi uchramaguncha bu sistemaning ishoralari o‘zgarmaydi. Demak, $W(x)$ soni ham ko‘phadlardan birining ildizi uchramaguncha o‘zgarmaydi.

Buni e’tiborga olgan holda, x ning qiymati biror $f_k(x)$, $1\leq k\leq s-1$ ko‘phadning ildizidan va berilgan $f(x)$ ko‘phadning ildizidan o‘tgan hollarni qaraymiz.

Aytaylik, α soni $f_k(x)$, $1\leq k\leq s-1$ ko‘phadning ildizi bo‘lsin. U holda, 1) shartga ko‘ra $f_{k-1}(\alpha)$ va $f_{k+1}(\alpha)$ ko‘phadlar noldan farqli. Demak, α sonining biror $(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$ atrofida ham $f_{k-1}(x)$ va $f_{k+1}(x)$ ko‘phadlar ildizlarga ega emas. Shuning uchun bu ko‘phadlar berilgan atrofda o‘z ishoralarini saqlaydi, hamda 3) shartga ko‘ra ular turli ishorali bo‘ladi. Bu yerdan quyidagi sonli sistemalar

$$f_{k-1}(\alpha-\varepsilon),\ f_k(\alpha-\varepsilon),\ f_{k+1}(\alpha-\varepsilon) \qquad (21.3)$$

va

$$f_{k-1}(\alpha+\varepsilon),\ f_k(\alpha+\varepsilon),\ f_{k+1}(\alpha+\varepsilon) \qquad (21.4)$$

bitta ishora almashishga ega ekanligi kelib chiqadi.

Haqiqatdan ham, agar $f_{k-1}(\alpha-\varepsilon)>0$ bo‘lsa $f_{k+1}(\alpha-\varepsilon)<0$ bo‘lib, $f_k(\alpha-\varepsilon)$ sonining ishorasidan qat’iy nazar (21.3) sistemaning ishora almashishlar soni birga teng bo‘ladi. Huddi shunday, (21.4) sistemaning ishora almashishlar soni ham birga teng.

Demak, x soni ko‘phadning Shturm sistemasidagi birorta oraliq ko‘phadning ildizidan o‘tganda ishora almashishlar soni o‘zgarmaydi. Shuning uchun, bunday o‘tishda $W(x)$ soni ham o‘zgarmaydi.

Endi x ning qiymati berilgan $f(x)$ ko‘phadning ildizidan o‘tgan holni qaraymiz. Aytaylik, α soni berilgan $f(x)$ ko‘phadning ildizi bo‘lsin. 1) shartga ko‘ra α soni $f_1(x)$ ko‘phadning ildizi emas. Shuning uchun biror $(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$ oraliqda $f_1(x)$ ko‘phad ildizga ega emas. Demak, bu oraliqda $f_1(x)$ ko‘phadning ishorasi o‘zgarmaydi. Agar bu ishora musbat bo‘lsa, 4) shartga ko‘ra $f(x)$ ko‘phadning argumenti α dan o‘tganda uning ishorasi manfiydan musbatga o‘zgaradi, ya’ni $f(\alpha-\varepsilon)<0$ va $f(\alpha+\varepsilon)>0$.

U holda quyidagi

$$f(\alpha-\varepsilon),\ f_1(\alpha-\varepsilon),$$

va

$$f(\alpha+\varepsilon),\ f_1(\alpha+\varepsilon)$$

sonlar sistemalar ishoralari

$$-,+ \text{ va } +,+,$$

ko‘rinishlarda bo‘ladi. Demak, bu holatda Shturm sistemasida bitta ishora almashish yo‘qoladi.

Huddi shunday, agarda $(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$ oraliqda $f_1(x)$ koʻphadning ishorasi manfiy boʻlsa, u holda yana 4) shartga koʻra $f(\alpha-\varepsilon)>0$ va $f(\alpha+\varepsilon)<0$. Bu holatda quyidagi ishoralar sistemasi hosil boʻlib,

$$+, -\ \text{va}\ -, -,$$

bunda ham Shturm sistemasida bitta ishora almashishi yoʻqoladi.

Shunday qilib, $W(x)$ soni, uning argumenti ortib borib, $f(x)$ koʻphadning ildizidan oʻtganidagina oʻzgarib, bittaga kamayadi, qolgan hollarda esa, oʻzgarishsiz qoladi. □

Shturm teoremasidan koʻrinadiki, karrali ildizlarga ega boʻlmagan $f(x)$ koʻphadning haqiqiy ildizlari sonini topish uchun a sifatida manfiy ildizlarning quyi chegarasini, b sifatida esa musbat ildizlarning yuqori chegarasini olish yetarli.

Ammo, berilgan koʻphadning ildizlari chegalararini topmasdan turib, a va b sonlari oʻrniga mos ravishda yetarlicha kichik manfiy va yetarlicha katta musbat sonlarni olish tezroq natija beradi. Chunki, yetarlicha katta musbat sonda Shturm sistemasining barcha koʻphadlari ishoralari ularning katta hadlari ishoralari bilan ustma-ust tushadi.

Shartli ravishda yetarlicha kichik manfiy va yetarlicha katta musbat sonlarni $-\infty$ va ∞ kabi belgilaymiz. Demak, $(-\infty,\infty)$ oraliqda Shturm teoremasini qoʻllab, $f(x)$ koʻphadning haqiqiy ildizlari sonini aniqlaymiz. Teoremani $(-\infty,0)$ va $(0,\infty)$ oraliqlarga qoʻllab esa, berilgab koʻphadning musbat va manfiy ildizlari sonini topish mumkin.

Misol 21.4. $h(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3$ koʻphad uchun Shturm usulini qoʻllab, uning ildizlari sonini toping.

Shturm teoremasini qoʻllash uchun $h(x)$ koʻphad karrali ildizlarga ega boʻlmasligi kerak. Lekin biz buni alohida tekshirib oʻtirmaymiz, chunki, Shturm sistemasini qurish jarayonida ushbu koʻphad va uning hosilasi oʻzaro tubligini ham tekshiriladi. Shuning uchun berilgan koʻphad uchun Shturm sistemasini quramiz:

$$h(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3,$$

$$h_1(x) = 5x^4 + 8x^3 - 15x^2 + 16x - 7,$$

$$h_2(x) = 66x^3 - 150x^2 + 172x + 61,$$

$$h_3(x) = -464x^2 + 1135x + 723,$$

$$h_4(x) = -32599457x - 8486093,$$

$$h_5(x) = -1.$$

$h_5(x) = -1$ bo‘lganligi uchun $h(x)$ va $h'(x)$ ko‘phadlar o‘zaro tub. Demak, $h(x)$ ko‘phad karrali ildizlarga ega emas. Ushbu ko‘phadlarning $x = -\infty$ va $x = \infty$ holatlardagi ishoralarini aniqlaymiz. Buning uchun faqatgina ko‘phadlarning katta koeffitsientlari ishoralariga va ko‘phadlarning darajalariga qarash yetarli:

	$h(x)$	$h_1(x)$	$h_2(x)$	$h_3(x)$	$h_4(x)$	$h_5(x)$	Ishora almashish soni
$-\infty$	–	+	–	–	+	–	4
∞	+	+	+	–	–	–	1

Demak, berilgan $h(x)$ ko‘phad 3 ta haqiqiy ildizga ega. Bundan tashqari

	$h(x)$	$h_1(x)$	$h_2(x)$	$h_3(x)$	$h_4(x)$	$h_5(x)$	Ishora almashish soni
0	–	–	+	+	–	–	2

ekanligidan $h(x)$ ko‘phadning ikkita manfiy va bitta musbat ildizlarga egaligi kelib chiqadi.

Misol 21.5. Shturm teoremasidan foydalanib quyidagi ko‘phadning haqiqiy ildizlari sonini, shuningdek, bu ildizlar joylashgan oraliqlarni aniqlaymiz:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1.$$

ko‘phad uchun Shturm sistemasi quyidagicha bo‘ladi:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1,$$
$$f_1(x) = 3x^2 + 6x,$$
$$f_2(x) = 2x + 1,$$
$$f_3(x) = 1.$$

$x = -\infty$ va $x = \infty$ holatlarda bu sistemadagi ishora almashishlarni topamiz:

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Ishora almashish soni
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3
∞	$+$	$+$	$+$	$+$	0

Shunday qilib, $f(x)$ ko‘phad uchta haqiqiy ildizga ega. Ildizlarning joylashishini aniq bilish uchun quyidagi jadvalni keltiramiz:

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Ishora almashish soni
$x = -3$	$-$	$+$	$-$	$+$	3
$x = -2$	$+$	0	$-$	$+$	2
$x = -1$	$+$	$-$	$-$	$+$	2
$x = 0$	$-$	0	$+$	$+$	1
$x = 1$	$+$	$+$	$+$	$+$	0

Demak, berilgan ko‘phadning α_1, α_2 va α_3 ildizlari mos ravishda $(-3, -2)$, $(-1, 0)$ va $(0, 1)$ oraliqlarda joylashadi.

V BOB. CHIZIQLI (VEKTOR) FAZO

22 - §. n-o‘lchamli chiziqli fazolar

Bizga V to‘plam berilgan bo‘lsin. Ixtiyoriy $x, y \in V$ elementlarga ularning yig‘indisi deb ataluvchi $z \in V$ elementni mos qo‘yib, uni $z := x + y$ ko‘rinishda belgilab olamiz. Shuningdek, biror $\mathbb{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ maydondan olingan ixtiyoriy $\lambda \in \mathbb{K}$ sonini $x \in V$ elementga ko‘paytmasi sifatida $y \in V$ elementni mos qo‘yamiz va uni $y := \lambda \cdot x$ ko‘rinishda belgilaymiz.

22.1-ta’rif. Agar V to‘plamda aniqlangan qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari quyidagi shartlarni qanoatlantirsa, V to‘plam *chiziqli fazo* yoki *vektor fazo* deyiladi:

1) $x + y = y + x$ (kommutativ sharti);

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (assosiativlik sharti);

3) shunday $0 \in V$ element mavjud bo‘lib, har qanday $x \in V$ uchun $x + 0 = 0 + x = x$, bu yerdagi 0 element *nol element* deyiladi;

4) har qanday $x \in V$ uchun $-x \in V$ bilan belgilanadigan shunday element mavjud bo‘lib, $x + (-x) = (-x) + x = 0$;

5) $1 \cdot x = x$;

6) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = \alpha\beta \cdot x = \beta \cdot (\alpha \cdot x)$;

7) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;

8) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;

bu yerda, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in V$.

Misol 22.1. a) Haqiqiy (kompleks) sonlar maydoni $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ o‘z ustida chiziqli fazo tashkil etadi.

b) Tekislikdagi (fazodagi) vektorlar to‘plami vektorlarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil etadi.

c) Darajasi n dan oshmaydigan haqiqiy (kompleks) koeffitsientli barcha ko‘phadlar to‘plami ko‘phadlarni qo‘shish va ko‘phadni songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil etadi.

d) Barcha $n \times m-$tartibli matritsalar to‘plami matritsalarni qo‘shish va matritsani songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil etadi.

Chiziqli fazo elementlarini *vektorlar* deb atash qabul qilingan. Agar chiziqli fazo haqiqiy (kompleks) sonlar maydonida berilgan bo‘lsa *haqiqiy (kompleks) chiziqli fazo* deyiladi.

Bizga V chiziqli fazo berilgan bo‘lib, $x_1, x_2, ..., x_n$ vektorlar chiziqli fazoning elementlari bo‘lsin. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$ yig‘indi vekrorlarning chiziqli kombinatsiyasi deyiladi, bu yerda $\alpha_i \in \mathbb{K}$.

22.2-ta’rif. Agar kamida bittasi noldan farqli bo‘lgan $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sonlar mavjud bo‘lib,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda $x_1, x_2, ..., x_n$ vektorlar chiziqli bog‘liq vektorlar deyiladi.

Chiziqli bog‘liq bo‘lmagan vektorlar chiziqli *erkli vektorlar* deyiladi. Ya’ni,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0$$

tenglik $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ bo‘lgan holdagina o‘rinli bo‘lsa, $x_1, x_2, ..., x_n$ vektorlar chiziqli erkli vektorlar deyiladi.

22.3-tasdiq. Agar $x_1, x_2, ..., x_n$ vektorlar chiziqli bog‘liq bo‘lsa, u holda ulardan kamida bittasi qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalaniladi. Va aksincha, agar vektorlarning bittasi qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalansa, bu vektorlar chiziqli bog‘liq bo‘ladi.

Isbot. Aytaylik, $x_1, x_2, ..., x_n$ vektorlar chiziqli bog‘liq bo‘lsin. U holda

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0$$

chiziqli kombinatsiyadagi koeffitsientlarning kamida bittasi noldan farqli. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda, $\alpha_1 \neq 0$ deb olishimiz mumkin. U holda $\alpha_1 x_1 = -\alpha_2 x_2 - \alpha_3 x_3 - ... - \alpha_n x_n$ tenglikdan

$$x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} x_3 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n$$

kelib chiqadi. $\lambda_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_1}$, $2 \leq i \leq n$ kabi belgilasak, x_1 vektor $x_1, x_2, ..., x_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi shaklida

$$x_1 = \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + ... + \lambda_n x_n$$

kabi ifodalanishini hosil qilamiz.

Aksincha, agar x_1 vektor $x_1, x_2, ..., x_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi shaklida $x_1 = \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + ... + \lambda_n x_n$ kabi ifodalansa, $x_1 - \lambda_2 x_2 - \lambda_3 x_3 - ... - \lambda_n x_n = 0$ tenglikdan $x_1, x_2, ..., x_n$ vektorlarning chiziqli bog‘liq ekanligi kelib chiqadi. □

Misol 22.2. Agar $x_1, x_2, ..., x_n$ vektorlar orasida nol vektor bo‘lsa, u holda bu vektorlar chiziqli bog‘liq bo‘ladi.

Endi fazoning o‘lchami tushunchasini kiritamiz.

22.4-ta’rif. Agar V chiziqli fazoda n ta chiziqli erkli vektorlar mavjud bo‘lib, bundan ortiq sondagi chiziqli erkli vektorlar mavjud bo‘lmasa, V chiziqli fazo n o‘lchamli fazo deyiladi. Chiziqli fazoning o‘lchami $\dim(V)$ kabi belgilanadi.

Agar V fazoda cheksiz ko‘p chiziqli erkli vektorlar mavjud bo‘lsa, u holda V fazo *cheksiz o‘lchamli fazo* deyiladi.

22.5-ta’rif. n o‘lchamli V fazodagi n ta chiziqli erkli $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlar V fazoning *bazisi* deb ataladi.

Misol 22.3. a) To‘g‘ri chiziqdagi vektorlar to‘plamida har qanday ikki vektor proporsional, ya’ni chiziqli bog‘liqdir. Demak, to‘g‘ri chiziq bir o‘lchamli fazoga misol bo‘ladi.

b) Tekislikda ikkita chiziqli erkli vector mavjud, ammo xar qanday uchta vektor chiziqli bog‘liq bo‘ladi. Bundan esa, tekislik ikki o‘lchamli chiziqli fazo ekanligi kelib chiqadi.

Bizga n o‘lchamli V chiziqli fazo va uning biror bazisi berilgan bo‘lsin.

22.6-teorema. n o‘lchamli V chiziqli fazoning ixtiyoriy elementini bazis vektorlarining chiziqli kombinatsiyasi orqali yagona ravishda ifodalash mumkin.

Isbot. Bizga $x \in V$ element va $e_1, e_2, ..., e_n$ bazis berilgan bo‘lsin. Chiziqli fazo n o‘lchamli bo‘lganligi uchun $n+1$ ta vektordan iborat x $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlar chiziqli bo‘g‘liq bo‘ladi. Demak, kamida bittasi noldan farqli bo‘lgan $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sonlar topilib,

$$\alpha_0 x + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n = 0,$$

bo‘ladi. Agar $\alpha_0 = 0$ bo‘lsa, $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n = 0$ tenglikdan va $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlarning chiziqli erkli ekanligidan $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Bu esa yuqoridagi mulohazaga zid. Demak, $\alpha_0 \neq 0$ bo‘lib,

$$x = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} e_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_0} e_2 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_0} e_n$$

ekanligi kelib chiqadi, ya’ni $x \in V$ vektor $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanadi.

Endi hosil qilingan ifodaning yagona ekaniligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik, x vektorning bazis vektorlar orqali ikki hil ifodasi mavjud bo‘lsin, ya’ni:

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n \text{ va } x = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + ... + \eta_n e_n.$$

Bu ifodalarni tenglab,

$$(\xi_1 - \eta_1) e_1 + (\xi_2 - \eta_2) e_2 + ... + (\xi_n - \eta_n) e_n = 0$$

tenglikni hosil qilamiz.

$e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlar chiziqli erkli bo‘lgani uchun, bu tenglik $\xi_1 = \eta_1,\ \xi_2 = \eta_2,\ ...,\ \xi_n = \eta_n$ bo‘lgandagina o‘rinlidir. □

22.7-ta’rif. $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlar n o‘lchamli fazoning bazisi bo‘lib,

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n$$

bo‘lsa, u holda $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ sonlar x vektorning $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisdagi koordinatalari deb ataladi.

22.5-teoremaga muvofiq, ma'lum $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisda xar bir vektor bir qiymatli aniqlanadigan koordinatalarga ega.

Agar x va y vektor $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisda mos ravishda $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ va $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n$ koordinatalarga ega bo‘lsa, ya’ni,

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n,\ \ y = \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2 + ... + \nu_n e_n.$$

U holda $x + y$ vektor $\xi_1 + \nu_1, \xi_2 + \nu_2, ..., \xi_n + \nu_n$ koordinatalarga ega bo‘ladi, ya’ni

$$x + y = (\xi_1 + \nu_1)e_1 + (\xi_2 + \nu_2)e_2 + ... + (\xi_n + \nu_n)e_n,$$

Shunday qilib, x va y vektorlarni qo‘shishda ularning bir hil bazisdagi koordinatalari yig‘indisi olinadi.

x vektorni λ soniga ko‘paytirishda esa uning xar bir koordinatasi shu songa ko‘paytiriladi.

Misol 22.4. a) Bizga $V = \mathbb{R}^3$ uch o‘lchamli haqiqiy vektor fazo berilgan bo‘lsin. Bu fazoda $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ vektorlar bazis tashkil qiladi va ixtiyoriy $x = (x_1, x_2, x_3)$ vektorning ushbu bazisdagi koordinatalari x_1, x_2, x_3 bo‘ladi.

b) $V = P_n(t)$ darajasi n dan oshmaydigan ko‘phadlardan iborat bo‘lgan fazo bo‘lsin. Bu fazoda $e_1 = 1, e_2 = t, ..., e_{n+1} = t^n$ vektorlar to‘plami bazis tashkil qiladi, ya’ni $\dim P_n(t) = n + 1$. Ushbu bazisda ixtiyoriy $f(t)=a_0t^n+a_1t^{n-1}+...+a_n$ ko‘phad koordinatalari uning $a_0, a_1, ..., a_n$ koeffitsientlaridan iborat bo‘ladi.

Agar $P_n(t)$ fazoda boshqa bazis $e_1'=1, e_2'=t-a, ..., e_{n+1}'=(t-a)^n$ tanlasak, u holda $f(t)$ ko‘phadning bu bazisdagi koordinatalarini topish uchun uni Teylor qatoriga yoyiladi:

$$f(t)=f(a)+f'(a)(t-a)+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n.$$

Demak, $f(t)$ ko‘phadning

$$e_1'=1, e_2'=t-a, ..., e_{n+1}'=(t-a)^n$$

bazisdagi koordinatalari $f(a),\ f'(a), ..., \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ ko‘rinishida bo‘ladi.

Endi chiziqli fazolar izomorfizmi tushunchasini kiritamiz.

22.8-ta’rif. Bizga V va V' chiziqli fazolar berilgan bo‘lsin. Agar $x\in V$ va $x'\in V'$ vektorlar orasida shunday o‘zaro bir qiymatli $x\leftrightarrow x'$ moslik o‘rnatish mumkin bo‘lib, x va x', hamda y va y' vektorning mosligidan

1) $x+y$ vektor $x'+y'$ vektorga mosligi;

2) λx vektor $\lambda x'$ vektorga mosligi

kelib chiqsa, u holda V va V' chiziqli fazolar izomorf fazolar deyiladi.

22.9-teorema. Bir hil o‘lchamga ega bo‘lgan barcha chiziqli fazolar bir-birlariga izomorfdir.

Isbot. Aytaylik, V va V' chiziqli fazolar n o‘lchamli fazolar bo‘lsin. V va V' fazolar mos ravishda $e_1, e_2, ..., e_n$ va $e_1', e_2', ..., e_n'$ bazislarni tanlab olamiz. V fazodan olingan ixtiyoriy

$$x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+...+\xi_ne_n$$

vektorga V' fazodagi $x'=\xi_1e_1'+\xi_2e_2'+...+\xi_ne_n'$ vektorni mos qo‘yamiz.

Bu moslik o‘zaro bir qiymatli bo‘ladi. Haqiqatan ham, har bir x vektor $x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+...+\xi_ne_n$ ko‘rinishida yagona ravishda tasvirlangani uchun x' vektor ham bir qiymatli aniqlanadi. V va V'

fazolarning teng o‘lchamli ekanligini e’tiborga olsak, xar bir $x' \in V'$ vektorga V ning faqat bittagina elementi to‘g‘ri keladi. Demak, bu moslik bir qiymatli moslik ekan.

Agar $x \leftrightarrow x'$ va $y \leftrightarrow y'$ bo‘lib, $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n$ va $y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + ... + \eta_n e_n$ bo‘lsa, u holda

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1)e_1 + (\xi_2 + \eta_2)e_2 + ... + (\xi_n + \eta_n)e_n$$

ekanligidan $x + y \leftrightarrow x' + y'$ moslik o‘rinli ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shunday $\lambda x \leftrightarrow \lambda x'$ moslik ham osongina kelib chiqadi. □

Endi vektor vazoning bazisi o‘zgarganda vektorning koordinatalarini qanday o‘zgarishi keltiramiz.

Aytaylik, n o‘lchamli V vektor fazoda $e_1, e_2, ..., e_n$ va $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ bazislar berilgan bo‘lib, x vektorning birinchi bazisdagi koordinatalari $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ ikkinchi bazisdagi koordinatalari $\xi'_1, \xi'_2, ..., \xi'_n$ bo‘lsin. U holda

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n = \xi'_1 e'_1 + \xi'_2 e'_2 + ... + \xi'_n e'_n .$$

Xar bir e'_i vektor $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlar orqali quyidagicha ifodalansin:

$$\begin{cases} e'_1 = a_{1,1}e_1 + a_{2,1}e_2 + ... + a_{n,1}e_n, \\ e'_2 = a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2 + ... + a_{n,2}e_n, \\ ...., \\ e'_n = a_{1,n}e_1 + a_{2,n}e_2 + ... + a_{n,n}e_n \end{cases}$$

U holda birinchi bazisdan ikkinchi bazisga o‘tish matritsasi $A = (a_{i,j})$ orqali ifodalanadi. Ma’lumki, ushbu matritsaning determinanti noldan farqli.

Yuqoridagi tenglikdan

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n = \xi'_1(a_{1,1}e_1 + a_{2,1}e_2 + ... + a_{n,1}e_n) +$$

$$+\xi'_2(a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2 + ... + a_{n,2}e_n) +$$

$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots+$$
$$+\xi_1'(a_{1,n}e_1 + a_{2,n}e_2 + \dots + a_{n,n}e_n)$$

hosil bo‘ladi. $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorlarning chiziqli erkli ekanligidan, bu tenglikning o‘ng va chap tomonidagi bazis vektorlar oldidagi koeffitsientlar teng bo‘ladi, ya’ni

$$\begin{cases} \xi_1 = a_{1,1}\xi_1' + a_{1,2}\xi_2' + \dots + a_{1,n}\xi_n', \\ \xi_2 = a_{2,1}\xi_1' + a_{2,2}\xi_2' + \dots + a_{2,n}\xi_n', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \xi_n = a_{n,1}\xi_1' + a_{n,2}\xi_2' + \dots + a_{n,n}\xi_n'. \end{cases}$$

Demak, berilgan x vektorning koordinatalari orasida quyidagi munosabat o‘rinli:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \dots \\ \xi_n' \end{pmatrix}.$$

Bundan esa,

$$\begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \dots \\ \xi_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

hosil bo‘ladi.

Shunday qilib, x vektorning ikkinchi bazisdagi koordinatalari, birinchi bazisdan ikkinchi bazisga o‘tish matritsasi teskarisi bilan birinchi bazisdagi koordinatalari ko‘paytmasiga teng.

23 - §. Chiziqli fazoning qism fazosi

Bizga $\mathbb{K}$ maydon ustida aniqlangan V chiziqli fazo va unda $V_1 \subset V$ qism to‘plam berilgan bo‘lsin.

23.1-ta’rif. V_1 qism to‘plam V fazoda aniqlangan qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil etsa, V_1 to‘plam V fazoning qism fazosi deyiladi.

Tabiiyki, $V_1 \subset V$ qism to‘plamni qism fazoga tekshirish uchun fazoda berilgan shartlarni hammasini tekshirish lozim bo‘ladi, ammo quyida keltiriladigan teorema bu shartlarning hammasini tekshirish umuman olganda zarur emasligini ko‘rsatadi.

23.2-teorema. $V_1 \subset V$ qism to‘plam V fazoning qism fazosi bo‘lishi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi zarur va yetarli:

1) Ixtiyoriy $x, y \in V_1$ elementlar uchun $x + y \in V_1$;

2) Ixtiyoriy $x \in V_1$, $\lambda \in \mathbb{K}$ uchun $\lambda x \in V_1$.

Isbot: Agar V_1 qism fazo bo‘lsa, teoremadagi shartlar o‘rinli bo‘lishi to‘g‘ridan-to‘g‘ri kelib chiqadi.

Aksincha, ya’ni teoremadagi shartlar o‘rinli bo‘lsin. U holda $V_1 \subset V$ qism to‘plamda qo‘shish amaliga nisbatan kommutativlik va assosiativlik shartlari o‘rinli bo‘ladi. Aks holda, bu shartlar V fazoda ham o‘rinli bo‘lmas edi.

$\lambda x \in V_1$ ekanligidan $\lambda = 0$ deb olsak, $0 \cdot x = 0 \in V_1$ ekanligini, $\lambda = -1$ deb olsak, $-x \in V_1$ ni hosil qilamiz.

Xuddi shunday fazoda skalyarlar uchun keltirilgan shartning V_1 qism to‘plam uchun ham o‘rinliligini ko‘rish qiyin emas. □

23.3-natija. $V_1 \subset V$ qism fazo bo‘lishi uchun ixtiyoriy $x, y \in V_1$ va ixtiyoriy $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ uchun $\lambda x + \mu y \in V_1$ bo‘lishi zarur va yetarli.

Endi qism fazolarga doir misollarni keltirib o‘tamiz.

Misol 23.1 a) Faqat nol vektordan iborat bo‘lgan qism to‘plam va V fazoning o‘zi V da qism fazo bo‘ladi. Bu qism fazolar V ning xosmas qism fazolari deyiladi;

b) $\mathbb{R}^2$ tekislikda koordinata boshidan o‘tuvchi ixtiyoriy to‘g‘ri chiziqdagi vektorlar to‘plami qism fazo tashkil etadi;

c) $\mathbb{R}^3$ uch o‘lchamli fazoda koordinata boshidan o‘tuvchi ixtiyoriy tekislikda joylashgan vektorlar to‘plami qism fazo tashkil qiladi;

d) Darajasi n dan oshmaydigan ko‘phadlar fazosi $P_n(x)$ da darajasi $k(k<n)$ dan oshmaydigan ko‘phadlar to‘plami $P_k(x)$ qism fazo tashkil qiladi;

Yuqoridagi misollardan ko‘rinib turibdiki, biror fazoning qism fazolari cheksiz ko‘p bo‘lishi mumkin.

V fazoning ixtiyoriy M qism to‘plami uchun, M dan olingan vektorlarning chiziqli kombinatsiyalari orqali hosil qilingan barcha vektorlar to‘plamini $\langle M\rangle$ kabi belgilaymiz. Hosil bo‘lgan to‘plamga M to‘plamning *chiziqli qobig‘i* deyiladi.

Ravshanki, M to‘plamning chiziqli qobig‘i V fazoning qism fazosi bo‘ladi. $\langle M\rangle$ fazoning o‘lchami M to‘plamning rangi deb ataladi.

Yuqoridagi mulohazadan kelib chiqadiki, agar $\dim V = n$ bo‘lsa, u holda V fazo $m(m\le n)$ o‘lchamli qism fazolarga ega. Xususan, agarda V fazoning $e_1, e_2, ..., e_n$ bazis vektorlaridan tuzilgan $M=\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ qism to‘plam uchun, $\langle M\rangle = \langle e_1, e_2, ..., e_m\rangle$ chiziqli qobiqni qarasak, u m o‘lchamli qism fazo bo‘ladi.

Bundan tashqari V chiziqli fazonining o‘zini $e_1, e_2, ..., e_n$ bazis vektorlaridan tuzilgan qobiq deb qarashimiz mumkin.

23.4-ta’rif. Bizga V fazoning qandaydir V' qism fazosi berilgan bo‘lsin. Ixtiyoriy $a\in V$ vektor uchun, ushbu

$$V'_a = a + V' = \{a + x \mid x\in V'\}\subset V$$

qism to‘plamga V' qism fazoni a vektorga siljitishdan hosil bo‘lgan *gipertekisligi* deb ataladi.

Aytaylik, $L_1, L_2 \subset V$ qism fazolar berilgan bo‘lib, $L_1 \bigcap L_2$ ularning to‘plam ma’nosidagi kesishmasi bo‘lsin. Ravshanki, $L_1 \bigcap L_2$ qism to‘plam bo‘sh emas, chunki nol vektor har bir qism fazoga tegishli.

23.5-teorema. L_1, L_2 qism fazolarning kesishmasi $L_1 \bigcap L_2$ qism fazo bo‘ladi.

Isbot. Ixtiyoriy λ, μ sonlar va $x, y \in L_1 \bigcap L_2$ vektorlarni olaylik. Ma’lumki, $x, y \in L_1$ va $x, y \in L_2$. L_1 va L_2 qism fazo bo‘lganligi uchun $\lambda x + \mu y \in L_1$ va $\lambda x + \mu y \in L_2$. Demak, $\lambda x + \mu y \in L_1 \bigcap L_2$ bo‘ladi.

□

Endi qism fazolarning to‘plam sifatida birlashmasi $L_1 \bigcup L_2$ ni qaraymiz. Bu to‘plam xar doim ham qism fazo bo‘lavermaydi. Masalan, tekislikda L_1 sifatida OX o‘qida yotuvchi vektorlar to‘plamini, L_2 sifatida OY o‘qida yotuvchi vektorlar to‘plamini olsak, L_1 va L_2 qism fazolar bo‘lib, ularning birlashmasi qism fazo bo‘lmaydi.

Endi qism fazolarning yig‘indisi tushunchasini kiritamiz. L_1, L_2 qism fazolarning yig‘indisi deb $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ ko‘rinishidagi vektorlar to‘plamiga aytiladi va $L_1 + L_2$ kabi belgilanadi, ya’ni

$$L_1 + L_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in L_1,\, x_2 \in L_2\}.$$

23.6-teorema. L_1, L_2 qism fazolarning yig‘indisi $L_1 + L_2$ yana qism fazo bo‘ladi.

Isbot. Haqiqatan ham, agar ixtiyoriy $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ va $x, y \in L_1 + L_2$ bo‘lsa, u holda $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, $x_1, y_1 \in L_1$, $x_2, y_2 \in L_2$ bo‘lib, bundan

$$\lambda x + \mu y = \lambda(x_1 + x_2) + \mu(y_1 + y_2) = (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) \in L_1 + L_2$$

ekanligi kelib chiqadi. □

Endi qism fazolar kesishmasi va yig‘indisini o‘lchamlari orasidagi munosabatni beruvchi teoremani keltiramiz.

23.7-teorema. V fazoning chekli o‘lchamli L_1, L_2 qism fazolarining o‘lchamlari yig‘indisi ularning kesishmasi va yig‘indisi o‘lchamlarining yig‘indisiga tengdir, ya’ni

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim L_1 \cap L_2 + \dim(L_1 + L_2).$$

Isbot. Faraz qilaylik, $\dim L_1 \cap L_2 = k$ bo‘lib, $e_1, e_2, ..., e_k$ uning qandaydir bazisi bo‘lsin. $L_1 \cap L_2 \subset L_1$ va $L_1 \cap L_2 \subset L_2$ bo‘lganligi uchun, $\dim L_1 = k + s$ $\dim L_2 = k + t$ deb olishimiz mumkin. Tanlangan $e_1, e_2, ..., e_k$ bazisni L_1 va L_2 qism fazolarning bazislarigacha to‘ldiramiz, ya’ni

$$e_1, e_2, ..., e_k, f_1, f_2, ..., f_s$$

vektorlar L_1 qism fazoning bazisi

$$e_1, e_2, ..., e_k, g_1, g_2, ..., g_t$$

vektorlar esa L_2 qism fazoning bazisi bo‘lsin. Biz

$$f_1, f_2, ..., f_s, e_1, e_2, ..., e_k, g_1, g_2, ..., g_t \tag{23.1}$$

vektorlarni $L_1 + L_2$ fazoda bazis bo‘lishini ko‘rsatamiz. Dastlab, ularning chiziqli erkli ekanligini aniqlaymiz. Faraz qilaylik,

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + ... + \lambda_s f_s + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 ... + \mu_k e_k + \nu_1 g_1 + \nu_2 g_2 + ... + \nu_t g_t = 0$$

bo‘lsin. U holda

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + ... + \lambda_s f_s + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 ... + \mu_k e_k = -\nu_1 g_1 - \nu_2 g_2 - ... - \nu_t g_t$$

bo‘lib, tenglikning chap tomoni L_1 ga o‘ng tomoni esa L_2 ga tegishli ekanligi kelib chiqadi. Demak, tenglikning chap va o‘ng tomonlari $L_1 \cap L_2$ qism fazoga tegishli. $e_1, e_2, ..., e_k$ vektorlar $L_1 \cap L_2$ da bazis bo‘lganligi uchun $-\nu_1 g_1 - \nu_2 g_2 - ... - \nu_t g_t$ vektorni ular bazis orqali chiziqli ifodalash mimkin, ya’ni qandaydir $c_1, c_2, ..., c_k$ lar uchun

$$-\nu_1 g_1 - \nu_2 g_2 - ... - \nu_t g_t = c_1 e_1 + c_2 e_2 + ... + c_k e_k .$$

tenglik o‘rinli. Bundan

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + ... + c_k e_k + \nu_1 g_1 + \nu_2 g_2 + ... + \nu_t g_t = 0$$

hosil bo‘ladi, bu vektorlarning chiziqli erkli ekanligidan

$$c_1 = c_2 = ... = c_k = \nu_1 = \nu_2 = ... = \nu_t = 0$$

kelib chiqadi. Bularni yuqoridagi tenglikka olib borib qo‘ysak,

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + ... + \lambda_s f_s + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 ... + \mu_k e_k = 0$$

tenglik hosil bo‘ladi. $e_1, e_2, ..., e_k, f_1, f_2, ..., f_s$ vektorlarning chiziqli erkli ekanligidan $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_s = 0, \quad \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_s = 0$ kelib chiqadi. Demak, (23.1) vektorlar sistemasi chiziqli erkli ekan.

Endi ixtiyoriy $x \in L_1 + L_2$ vektorni (23.1) vektorlar sistemasi orqali chiziqli ifodalanishini ko‘rsatamiz. Ta’rifga asosan, $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$, bo‘lib, x_1 va x_2 vektorlarni bazis vektorlar orqali yoysak,

$$x_1 = a_1 e_1 + a_2 e_2 + ... + a_k e_k + a_{k+1} f_1 + ... + a_{k+s} f_s$$

va

$$x_2 = b_1 e_1 + b_2 e_2 + ... + b_k e_k + b_{k+1} g_1 + ... + b_{k+t} g_t$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Bundan esa

$$x = x_1 + x_2 = (a_1 + b_1) e_1 + (a_2 + b_2) e_2 + ... + (a_k + b_k) e_k +$$

$$a_{k+1} f_1 + a_{k+2} f_2 + ... + a_{k+s} f_s + b_{k+1} g_{k+1} + b_{k+2} g_{k+2} + ... + b_{k+t} g_t$$

hosil bo‘ladi.

Demak, ixtiyoriy $x \in L_1 + L_2$ vektorni (23.1) vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin. Shunday qilib, biz (23.1) vektorlar sistemasi $L_1 + L_2$ qism fazoning bazisi ekanligini ko‘rsatdik. Bundan esa, $\dim(L_1+L_2)=s+k+t$ ekanligi kelib chiqadi, ya’ni

$$\dim(L_1+L_2)=\dim L_1+\dim L_2-\dim(L_1\bigcap L_2)$$

□

23.8-ta’rif. Agar $L_1\bigcap L_2=\{0\}$ bo‘lsa, L_1 va L_2 qism fazolarning yig‘indisiga to‘g‘ri yig‘indi deyiladi va $L_1\oplus L_2$ ko‘rinishida yoziladi.

Ravshanki, L_1 va L_2 qism fazolarning to‘g‘ri yig‘indilari uchun

$$\dim(L_1\oplus L_2)=\dim L_1+\dim L_2$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

23.9-teorema. $L_1\oplus L_2$ to‘g‘ri yig‘indining ixtiyoriy vektori L_1 va L_2 qism fazolar vektorlarining yig‘indisi shaklida yagona ravishda ifodalanadi.

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz, ya’ni

$$x=x_1+x_2,\ x_1\in L_1,\ x_2\in L_2$$

va

$$x=y_1+y_2,\ y_1\in L_1,\ y_2\in L_2$$

bo‘lsin. U holda bu tengliklardan $y_1-x_1=x_2-y_2$ hosil bo‘ladi.

$$y_1-x_1\in L_1,\ x_2-y_2\in L_2 \text{ va } L_1\bigcap L_2=\{0\}$$

ekanligidan

$$y_1-x_1=x_2-y_2=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=y_1,\ x_2=y_2$$

kelib chiqadi. □

Shuni ta’kidlash joizki, V fazoning bir nechta $L_1,L_2,\dots,L_s$, qism fazolari uchun ham $\bigcap_{i=1}^{s}L_i$ qism fazolarning kesishmasi va $\sum_{i=1}^{s}L_i$ yig‘indisini aniqlash mumkin.

24 - §. Yevklid fazolari. Ortogonal va ortonormal sistemalar

Avvalgi mavzularda chiziqli fazoni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari bajariladigan vektorlar to‘plami sifatida ta’riflagan edik. Ammo faqat qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari yordamida vektorlarning uzunligi, vektorlar orasidagi burchak tushunchalarini ta’riflab bo‘lmaydi. Buning uchun chiziqli fazoda skalyar ko‘paytma tushunchasini kiritish kerak. Vektorlarni qo‘shish, ularni songa ko‘paytirish va vektorlarning skalyar ko‘paytmasi terminlari yordamida Yevklid geometriyasini bayon qilish mumkin.

Bizga haqiqiy sonlar maydonida aniqlangan V chiziqli fazo berilgan bo‘lsin.

24.1-ta’rif. Agar $x, y \in V$ vektorlarning xar bir juftiga $(x, y) \in \mathbb{R}$ haqiqiy son mos qo‘yilgan bo‘lib, bu moslik quyidagi aksiomalarni qanoatlantirsa, V chiziqli fazoda skalyar ko‘paytma aniqlangan deyiladi:

1) $(x, y) = (y, x)$;

2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;

3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;

4) $(x, x) \geq 0,\ (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Skalyar ko‘paytma aniqlangan chiziqli fazo Yevklid fazosi deb ataladi.

Misol 24.1. a) V fazo sifatida elementar geometriyada o‘rganiladigan uch o‘lchamli fazoni olaylik. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasini ularning uzunliklari va ular orasidagi burchak kosinusi ko‘paytmasi sifatida aniqlaymiz, ya’ni;

$$(x, y) = |x| \cdot |y| \cdot \cos\alpha.$$

Bu aniqlangan ko‘paytma 1) – 4) aksiomalarni qanoatlantiradi.

b) V fazo sifatida n ta haqiqiy sonlardan iborat bo‘lgan $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ ko‘rinishidagi elementlar to‘plamni olaylik.

Ma'lumki, vektorlarni qo'shish va songa ko'paytirish quyidagicha aniqlanadi:

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,...,\xi_n+\eta_n),\ \ \lambda x=(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,...,\lambda\xi_n),$$

bu yerda $y=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n)$.

Endi $x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ va $y=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n)$ vektorlar uchun quyidagi ko'paytmani qaraymiz;

$$(x,y)=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+...+\xi_n\eta_n$$

Bunday aniqlangan ko'paytma ham 1) – 4) aksiomalarini qanoatlantiradi, ya'ni skalyar ko'paytma bo'ladi.

c) darajasi n dan oshmaydigan haqiqiy koeffitsientli ko'phadlar fazosi $P_n(\mathbb{R})$ ni qaraymiz. $f(x),g(x)\in P_n(x)$ ko'phadlarning uchun aniqlangan quyidagi ko'paytma;

$$(f(x),g(x))=\int_0^1 f(x)g(x)dx$$

1) – 4) aksiomalarini qanoatlantiradi, ya'ni skalyar ko'paytma bo'ladi.

Kiritilgan skalyar ko'paytma tushunchasi yordamida biz vektorning uzunligini va vektorlar orasidagi burchakni aniqlashimiz mumkin.

24.2-ta'rif. Yeklid fazosidagi x vektorning uzunligi deb

$$\sqrt{(x,x)}$$

songa aytiladi va $|x|$ kabi belgilanadi.

24.3-ta'rif. x va y vektorlar orasidagi burchak deb $\varphi=\arccos\dfrac{(x,y)}{|x||y|}$ songa aytiladi, ya'ni

$$\cos\varphi=\frac{(x,y)}{|x||y|}\ .$$

Agar x va y vektorlar orasidagi burchak $\frac{\pi}{2}$ ga teng bo‘lsa, ya’ni $(x, y) = 0$ bo‘lsa, x va y vektorlar ortogonal vektorlar deyiladi.

Yuqoridagi ta’rifda x va y vektorlar orasidagi φ burchakni $\cos\varphi = \frac{(x, y)}{|x||y|}$ formula yordamida aniqladik. Aslida tenglikning o‘ng tomonida turgan ifodaning moduli 1 dan katta emasligini ko‘rsatishimiz kerak, ya’ni $\frac{(x, y)^2}{|x|^2|y|^2} \leq 1$ yoki

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y) \tag{24.1}$$

ekanligini ko‘rsatamiz.

Buning uchun $x - ty$ vektorni qaraymiz, by yerda t ixtiyoriy haqiqiy son. Skalyar ko‘paytmaning 4)-aksiomasiga asosan: $(x - ty, x - ty) \geq 0,$ ya’ni har qanday t uchun:

$$t^2(y, y) - 2t(x, y) + (x, x) \geq 0.$$

Bu tengsizlikning chap tomonidagi t ga nisbatan kvadrat uchhad faqat manfiy bo‘lmagan qiymatlarni qabul qilishi uchun bu uchhadning diskriminanti musbat bo‘lmasligi kerak. Chunki t^2 oldidagi (y, y) ifoda xar doim musbat son. Demak,

$$D = 4(x, y)^2 - 4(x, x)(y, y) \leq 0.$$

Bundan esa, $(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$ ekanligi kelib chiqadi. Yuqorida keltirilgan (24.1) tengsizlik *Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi* deb ataladi.

Kiritilgan tushunchalar yordamida elementar geometriyaning qator teoremalarini Yevklid fazosiga ko‘chirish mumkin.

Agar x va y vektorlar ortogonal vektorlar bo‘lsa, u holda $x + y$ vektorni tomonlari x va y bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak diagonali deb hisoblash tabiiydir. Quyidagi misolni ko‘rib chiqaylik.

24.4-xossa. $|x+y|^2=|x|^2+|y|^2$, ya'ni to'g'ri to'rtburchak diagonali uzunligining kvadrati uning parallel bo'lmagan ikki tomoni uzunliklari kvadratlari yig'indisiga teng.

Isbot. Vektor uzunligi kvadratining ta'rifiga muvofiq: $|x+y|^2=|x|^2+|y|^2$. Skalyar ko'paytmaning distributivligiga asosan:

$$(x+y,x+y)=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y).$$

x va y vektorlarning ortogonalligidan esa:

$$(x,y)=(y,x)=0.$$

Demak, $|x+y|^2=(x,x)+(y,y)=|x|^2+|y|^2$. □

Yuqoridagi xossani umumlashtirsak, juft-jufti bilan ortogonal bo'lgan $x_1,x_2,x_3,...,x_n$ vektorlar uchun

$$|x_1+x_2+x_3+...+x_n|^2=|x_1|^2+|x_2|^2+|x_3|^2+...+|x_n|^2$$

tenglik kelib chiqadi.

Endi Yevklid fazosida eng qulay bazis hisoblangan ortogonal bazis tushunchasini kiritamiz. Yevklid fazosidagi ortogonal bazislar analitik geometriyadagi to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi kabi rol o'ynaydi.

Bizga n o'lchamli V Yevklid fazosi berilgan bo'lib, $e_1, e_2, ..., e_n \in V$ vektorlar o'zaro ortogonal vektorlar bo'lsin.

24.5-ta'sdiq. n-o'lchamli Yevklid fazosida berilgan o'zaro ortogonal bo'lgan va hech biri nolga teng bo'lmagan $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlar chiziqli erkli bo'ladi.

Isbot. Tasdiqni isbotlash uchun

$$\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+...+\lambda_n e_n=0$$

chiziqli kombinatsiyani qaraymiz.

Yuqoridagi tenglikning ikkala tomonini e_1 ga skalyar ko'paytirsak,

$$\lambda_1(e_1,e_1)+\lambda_2(e_2,e_1)+...+\lambda_n(e_n,e_1)=0$$

tenglik hosil bo‘ladi. Berilgan vektorlar o‘zaro ortogonal va noldan farqli bo‘lganligi uchun $(e_1,e_1)\neq 0$ va $(e_1,e_k)=0,\ 2\le k\le n.$ Bundan esa $\lambda_1=0$ ekanligi kelib chiqadi.

Shunga o‘xshab, chiziqli kombinatsiyani e_j ga skalyar ko‘paytirib, $\lambda_j=0$ ekanligini olamiz. Demak, $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_n=0$ va $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlar chiziqli erkli. □

24.6-ta’rif. Agar hech biri nolga teng bo‘lmagan $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlar o‘zaro ortogonal bo‘lsa, u holda ular n o‘lchamli Yevklid fazosining *ortogonal* bazisi deyiladi.

Agar $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlar o‘zaro ortogonal bo‘lib, xar birining uzunligi 1 ga teng bo‘lsa, ya’ni

$$(e_i,e_j)=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j,\end{cases}$$

tengliklar bajarilsa, u holda ular *ortonormal* bazis deyiladi.

24.7- teorema. Ixtiyoriy n o‘lchamli Yevklid fazosida ortogonal bazis mavjud.

Isbot. Ma’lumki, n o‘lchamli fazoning ta’rifiga muvofiq unda qandaydir $f_1, f_2, ..., f_n$ bazis mavjud. Bu $f_1, f_2, ..., f_n$ vektorlardan o‘zaro ortogonal bo‘lgan n ta vektor yasaymiz.

Dastlab, $e_1=f_1$ deb olib, e_2 vektorni $e_2=f_2+\alpha e_1$ ko‘rinishda izlaymiz. α sonini shunday tanlab olamizki, $(e_2,e_1)=0,$ ya’ni $(f_2+\alpha e_1,e_1)=0$ bo‘lsin. Bundan

$$\alpha=-\frac{(f_2,e_1)}{(e_1,e_1)}$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, α sonni tanlash hisobiga e_1 va e_2 ortogonal vektorlar topish mumkin.

Aytaylik, o‘zaro ortogonal va noldan farqli bo‘lgan $e_1, e_2, ..., e_{k-1}$ vektorlar topilgan bo‘lsin. U holda e_k vektorni

$$e_k = f_k + \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_{k-1} e_{k-1}$$

shaklida izlaymiz, ya'ni e_k vektorni $e_1, e_2, ..., e_{k-1}$ va f_k vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi yordamida hosil qilamiz. $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{k-1}$ koeffitsientlarni e_k vektor bilan $e_1, e_2, ..., e_{k-1}$ vektorlarning ortogonalligi shartidan topamiz:

$$(f_k + \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_{k-1} e_{k-1}, e_1) = 0;$$

$$(f_k + \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_{k-1} e_{k-1}, e_2) = 0;$$

....

$$(f_k + \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_{k-1} e_{k-1}, e_{k-1}) = 0.$$

$e_1, e_2, ..., e_{k-1}$ vektorlar o‘zaro ortogonal bo‘lganliklari uchun, bu tengliklar ushbu ko‘rinishga keladi:

$$(f_k, e_1) + \lambda_1 (e_1, e_1) = 0;$$

$$(f_k, e_2) + \lambda_2 (e_2, e_2) = 0;$$

....

$$(f_k, e_{k-1}) + \lambda_{k-1} (e_{k-1}, e_{k-1}) = 0.$$

Bulardan,

$$\lambda_1 = -\frac{(f_k, e_1)}{(e_1, e_1)},\ \lambda_2 = -\frac{(f_k, e_2)}{(e_2, e_2)},\ ...,\ \lambda_{k-1} = -\frac{(f_k, e_{k-1})}{(e_{k-1}, e_{k-1})},$$

qiymatlar kelib chiqadi.

Demak, juft-jufti bilan ortogonal bo‘lgan $e_1, e_2, ..., e_k$ vektorlarni hosil qilamiz. Endi e_k vektorni noldan farqli ekaniligini ko‘rsatamiz. Hosil qilingan e_k vektor $e_1, e_2, ..., e_{k-1}, f_k$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat. O‘z navbatida e_{k-1} vektor $e_1, e_2, ..., e_{k-2}$ va f_{k-1} vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan va hokazo, e_2 vektor e_1 va f_2 vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat. Bundan esa e_k quyidagi ko‘rinishda yozilish mumkinligi kelib chiqadi:

$$e_k = f_k + \alpha_{k-1} f_{k-1} + ... + \alpha_1 f_1.$$

$f_1,\ f_2, ...,\ f_k$ vektorlarning chiziqli erkli ekanligidan esa, $e_k \neq 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Biz $e_1, e_2, ..., e_{k-1}$ hamda f_k vektorlardan e_k vektorni qurdik. Xuddi shunday qilib, $e_1, e_2, ..., e_k$ hamda f_{k+1} larga ko‘ra e_{k+1} ni quramiz. Bu jarayonni berilgan $f_1,\ f_2, ...,\ f_n$ vektorlargacha davom ettiriramiz. Natijada noldan faqli va o‘zaro ortogonal bo‘lgan n ta $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlarni, ya’ni ortogonal bazisni hosil qilamiz.

□

Ortogonal bazislar topishning yuqoridagi teorema isbotida keltirilgan jarayon *ortogonallashtirish jarayoni* deb ataladi. Bu jarayon ixtiyoriy $f_1,\ f_2, ...,\ f_n$ bazis bo‘yicha $e_1, e_2, ..., e_n$ ortogonal bazis yasash usulini beradi.

Agar e_k vektorlarni $e'_k = \dfrac{e_k}{|e_k|}$ vektorlar bilan almashtirsak, u holda uzunligi 1 ga teng bo‘lgan o‘zaro ortogonal vektorlar hosil bo‘lishini ko‘rish qiyin emas. Bu amal bilan ortonormal bazis hosil qilamiz.

Misol 24.2. $P_2(x)$ fazoda $(f(x), g(x)) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$ kabi aniqlangan skalyar ko‘paytmaga nisbatan ortogonal bazis quramiz. Ma’lumki, $P_2(x)$ fazoda $f_1 = 1,\ f_2 = x,\ f_3 = x^2$ bazis tashkil qiladi. Bu bazisdan ortogonallashtirish jarayoni yordamida e_1, e_2, e_3 ortogonal bazis hosil qilamiz:

$e_1 = f_1 = 1$ deb olib $e_2 = f_2 - \dfrac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1$ ekanligidan e_2 vektorni aniqlaymiz.

$(f_2, e_1) = \int\limits_0^1 x dx = \dfrac{1}{2},\ (e_1, e_1) = \int\limits_0^1 dx = 1$ ekanligidan $e_2 = x - \dfrac{1}{2}$ hosil bo‘ladi.

Endi $e_3 = f_3 - \frac{(f_3,e_2)}{(e_2,e_2)}e_2 - \frac{(f_3,e_1)}{(e_1,e_1)}e_1$, hamda

$$(f_3,e_2) = \int_0^1 x^2(x-\frac{1}{2})dx = \frac{1}{12},$$

$$(e_2,e_2) = \int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2 dx = \frac{1}{12},$$

$$(f_3,e_1) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

ekanligidan $e_3 = x^2 - x + \frac{1}{6}$ hosil bo'ladi. Demak, $P_2(x)$ fazoda ortogonal bazis $e_1 = 1,\ e_2 = x - \frac{1}{2},\ e_3 = x^2 - x + \frac{1}{6}$ ko'phadlardan iborat.

Yevklid fazosida $e_1, e_2, ..., e_n$ ortonormal bazis berilgan bo'lsin. Shu bazisdagi koordinatalari bilan berilgan $x, y \in V$ vektorlaring skalyar ko'paytmasi qanday ifodalanishini topaylik.

Aytaylik,

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n,\ \ y = \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2 + ... + \nu_n e_n$$

bo'lsin, ya'ni x vektorning koordinatalari $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, hamda y vektorning koordinatalari esa $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n$ bo'lsin, u holda

$$(x, y) = \xi_1\nu_1 + \xi_2\nu_2 + ... + \xi_n\nu_n$$

bo'ladi.

Demak, ortonormal bazisda ikki vektorning skalyar ko'paytmasi ularning mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng.

Endi x vektorning ortonormal $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisdagi koordinatalarini bazis vektorlar bilan qanday bog'lanishga ega ekanligini ko'rsatamiz.

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n$$

tenglikning ikkala tomonini e_1 ga skalyar ko'paytirib,

$$(x,e_1)=\xi_1(e_1,e_1)+\xi_2(e_2,e_1)+...+\xi_n(e_n,e_1)=\xi_1$$

ekanini va xuddi shunday,

$$\xi_2=(x,e_2),\ \xi_3=(x,e_3),\ ...,\ \xi_n=(x,e_n)$$

ekanligini topamiz.

Shunday qilib, berilgan vektorning ortonormal bazisdagi koordinatalari shu vektor bilan mos bazis vektorlarining skalyar koʻpaytmalaridan iboratligini hosil qildik.

Ortogonal proyeksiya va ortogonal toʻldiruvchi. Endi berilgan vektorning qandaydir qism fazoga ortogonal proyeksiyasi va ortogonal toʻldiruvchisi tushunchalarini kiritamiz.

24.8-ta’rif. Bizga V fazoning qandaydir V' qism fazosi berilgan boʻlsin. Agar $x\in V$ vektor V' qism fazoning ixtiyoriy vektoriga ortogonal boʻlsa, u holda x vektor V' qism fazoga ortogonal deyiladi.

Ravshanki, agar x vektor $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlarga ortogonal boʻlsa, u holda x bu vektorlarning istalgan chiziqli kombinatsiyasiga ham ortogonal boʻladi. Haqiqatdan ham, $(x,e_i)=0,\quad 1\le i\le n$ ekanligidan $(x,\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+...+\lambda_ne_n)=0$ boʻlishi osongina kelib chiqadi. Shuning uchun berilgan x vektor V' qism fazoga ortogonal boʻlishi uchun uning bazis vektorlarga ortogonal boʻlishi zarur va yetarli.

Aytaylik, ixtiyoriy $z\in V$ vektor berilgan boʻlib, bu vektor uchun shunday $y\in V'$ vektor topilsinki, natijada $z-y$ vektor V' qism fazoga ortogonal boʻlsin. Ya’ni $z\in V$ vektorni $z=x+y,\ \ x\in V,\ \ y\in V'$ koʻrinishida yozilsin, bu yerda x vektor V' qism fazoga ortogonal vektor.

24.9-ta’rif. Agar $z=x+y,\ \ x\in V,\ \ y\in V'$ koʻrinishida ifodalangan boʻlib, x vektor V' qism fazoga ortogonal boʻlsa, y vektor z vektorning *ortogonal proyeksiyasi* x esa *ortogonal toʻldiruvchisi* deyiladi.

Quyidagi tasdiqda ortogonal proyeksiya va ortogonal to‘ldiruvchi har doim mavjud va yagona ekanligini ko‘rsatamiz. Umuman olganda berilgan vektorning ortogonal proyeksiyasi mavjudligidan ortogonal to‘ldiruvchining mavjudligi ham o‘z-o‘zidan kelib chiqadi.

24.10-tasdiq. $z \in V$ vektorning chekli o‘lchamli V' qism fazoga ortogonal proyeksiyasi mavjud va yagona.

Isbot. Aytaylik, $\dim V' = n$ bo‘lib, V' qism fazonig bazisi $e_1, e_2, ..., e_n$ bo‘lsin. Ortogonal proyeksiyani $y = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$ ko‘rinishida izlaymiz.

$z - y$ vektor V' qism fazoga ortogonal bo‘lishi uchun, uning bazis vektorlarga ortogonal bo‘lishi zarur va yetarli ekanligidan

$$(z - y, e_i) = 0, \ 1 \le i \le n$$

tenglikka ega bo‘lamiz, ya’ni

$$(z, e_i) = (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n, e_i), \ 1 \le i \le n.$$

Bu tenglikdan ko‘rinadiki, ortogonal proyeksiyani topish masalasi, biror bazisda $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ noma’lumlarga nisdatan quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini yechish masalasiga keltirildi:

$$\begin{cases} \lambda_1(e_1, e_1) + \lambda_2(e_2, e_1) + ... + \lambda_n(e_n, e_1) = (z, e_1), \\ \lambda_1(e_1, e_2) + \lambda_2(e_2, e_2) + ... + \lambda_n(e_n, e_2) = (z, e_2), \\ \text{...}, \\ \lambda_1(e_1, e_n) + \lambda_2(e_2, e_n) + ... + \lambda_n(e_n, e_n) = (z, e_n), \end{cases} \qquad (24.2)$$

Ixtiyoriy n-o‘lchamli fazoda ortonormal bazis mavjud ekanligidan foydalanib, $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisni ortonormal deb faraz qilishimiz mumkin. U holda (24.2) sistemaning yechimi $\lambda_i = (z, e_i)$, $1 \le i \le n$ ko‘rinishida bo‘ladi. Ya’ni sistema yagona yechimga ega. Demak, $y = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$ ortogonal proyeksiya ham mavjud va yagona. □

Ta’kidlash joizki, yuqoridagi tasdiqning isbotida biz $e_1, e_2, ..., e_n$ ortonormal bazisdan foydalandik. Umuman olganda ixtiyoriy bazis uchun ham (24.2) sistema yagona yechimga ega bo‘ladi. Chunki, ushbu sistemaning asosiy determinanti quyidagicha bo‘lib,

$$\begin{vmatrix} (e_1,e_1) & (e_2,e_1) & \dots & (e_n,e_1) \\ (e_1,e_2) & (e_2,e_2) & \dots & (e_n,e_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (e_1,e_n) & (e_2,e_n) & \dots & (e_n,e_n) \end{vmatrix}$$

bu determinant noldan farqli. Ushbu determinantga *Gram determinanti* deb ataladi.

Demak, V' qism fazo berilgan bo‘lib, $e_1, e_2, ..., e_n$ uning bazisi bo‘lsa, $z \in V$ vektorning V' qism fazoga ortogonal proyeksiyasi $y = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$ ko‘rinishida bo‘ladi, bu yerda $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ (24.2) chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi. $x = z - y$ vektor esa ortogonal to‘ldiruvchi bo‘ladi.

Yevklid fazolarining izomorfizmi. Endi Yevklid fazolarining izomorfizmi tushunchasini keltiramiz.

24.11-ta’rif. Bizga V va V' Yevklid fazolari berilgan bo‘lsin. Agar ularning elementlari orasida shunday $x \leftrightarrow x' \, (x \in V, x \in V')$ o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin bo‘lib, bu moslik quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

1) agar $x \leftrightarrow x'$ va $y \leftrightarrow y'$ ekanligidan, $x + y \leftrightarrow x' + y'$ bo‘lsa, ya’ni $x, y \in V$ vektorlarning $x', y' \in V'$ vektorlarga mosligidan, $x + y$ yig‘indining $x' + y'$ yig‘indiga mosligi kelib chiqsa;

2) agar $x \leftrightarrow x'$ bo‘lsa, u holda $\lambda x \leftrightarrow \lambda x'$;

3) agar $x \leftrightarrow x'$ va $y \leftrightarrow y'$ bo‘lganda $(x, y) = (x', y')$ bo‘lsa, ya’ni mos vektorlar juftligining skalyar ko‘paytmalari o‘zaro teng bo‘lsa, u holda V va V' fazolar izomorf Yevklid fazolari deyiladi.

Agar biror n o‘lchamli Yevklid fazosida qo‘shish, songa ko‘paytirish va vektorlarning skalyar ko‘paytmasi tushunchalari bilan berilgan tasdiq isbot qilingan bo‘lsa, u holda shu tasdiqning o‘zi bu fazoga izomorf bo‘lgan xar qanday fazo uchun ham o‘z kuchini saqlaydi. Darhaqiqat, bunday teoremaning tasdig‘ida ham, isbotida ham V ning vektorlarini V' ning ularga mos bo‘lgan vektorlari bilan almashtirilsa, u holda izomorfizm ta’rifidagi 1) – 3) xossalarga asosan hamma mulohazalar o‘rinli bo‘lib qolaveradi, ya’ni mos teoremalar V' uchun ham o‘z kuchini saqlaydi.

24.12-teorema. Barcha n o‘lchamli Yevklid fazolari o‘zaro izomorfdir.

Isbot. Barcha n o‘lchamli Yevklid fazolarini maxsus tanlab olingan "standart" n o‘lchamli fazoga izomorf ekanligini isbot qilamiz. Shunda barcha n o‘lchamli Yevklid fazolarining o‘zaro izomorf ekanligi kelib chiqadi.

Standart V' fazo sifatida biz odatdagi n o‘lchamli fazoni qaraymiz: bu fazoda vektorlar quyidagicha olinib, $x' = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ va $y' = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$ ularning skalyar ko‘paytmasi esa

$$(x', y') = \xi_1\nu_1 + \xi_2\nu_2 + ... + \xi_n\nu_n$$

formula shaklida aniqlanadi.

Bizga biror n o‘lchamli Yevklid fazosi V berilgan bo‘lsin. Bu fazoda $e_1, e_2, ..., e_n$ ortonormal bazis tanlab olamiz. Ushbu bazisdagi koordinatalari bilan berilgan ixtiyoriy

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n$$

vektorga n ta $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ sonlar to‘plamini, ya’ni V' ning $x' = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ vektorini mos qo‘yamiz. Endi bu moslikning izomorfizm ekanligini ko‘rsatamiz.

Bu moslikning o‘zaro bir qiymatli ekanligi ravshandir. Izomorfizm ta’rifining 1) va 2) shartlarining bajarilishi o‘z-o‘zidan ko‘rinib turibdi. 3) shartning bajarilishini tekshiramiz. Ortonormal bazisda skalyar ko‘paytma uchun avval isbotlangan formuladan foydalanib,

$$(x, y) = \xi_1\nu_1 + \xi_2\nu_2 + ... + \xi_n\nu_n$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Ikkinchi tomondan, V' fazoda skalyar ko‘paytma ta’rifiga ko‘ra,

$$(x', y') = \xi_1 \nu_1 + \xi_2 \nu_2 + ... + \xi_n \nu_n .$$

Shunday qilib, $(x, y) = (x', y')$, ya’ni skalyar ko‘paytmalar tengligi isbot qilindi. □

25 - §. Bichiziqli va kvadratik formalar

Chiziqli funksiya. Vektor fazoda aniqlanadigan eng sodda funksiyalardan biri chiziqli funksiyadir.

25.1-ta’rif. Agar vektor fazoda xar bir x vektorga $f(x)$ son mos qo‘yilib, bu moslik uchun quyidagi shartlar o‘rinli bo‘lsa;

1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$;

2) $f(\mu x) = \mu f(x)$;

vektor fazoda *chiziqli funksiya* (chiziqli forma) berilgan deyiladi.

Demak, f chiziqli funksiya V fazoni $\mathbb{K}$ maydonga mos qo‘yadi, ya’ni $f : V \to \mathbb{K}$.

Bizga n o‘lchamli chiziqli fazo va uning ixtiyoriy $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisi berilgan bo‘lsin. Xar bir x vektorni

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n$$

ko‘rinishda tasvirlash mumkin bo‘lganligi uchun, chiziqli funksiya xossalariga asosan:

$$f(x) = f(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n) = \xi_1 f(e_1) + \xi_2 f(e_2) + ... + \xi_n f(e_n).$$

Demak, muayyan bazisga ega bo‘lgan n o‘lchamli fazoda chiziqli funksiyani

$$f(x) = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + ... + x_n \xi_n$$

ko‘rinishda tasvirlanish mumkin. Bunda $x_i = f(e_i)$ bazisning tanlab olinishigagina bog‘liq bo‘lgan o‘zgarmaslar $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ sonlar esa x vektorning bu bazisdagi koordinatalari.

Shunday qilib, chiziqli funksiyaga yuqorida berilgan ta’rif, chiziqli funksiyaning algebrada qabul qilingan ta’rifi bilan bir hil bo‘ladi, bu yerda faqat x_i koeffitsientlar bazisning tanlab olinishiga bog‘liq ekanligini e’tiborga olish zarur.

Bir bazis boshqasiga almashtirilganda chiziqli funksiya koeffitsientlarining qanday o‘zgarishini ko‘rib chiqaylik.

Aytaylik, V chiziqli fazoda $e_1, e_2, ..., e_n$ va $e_1', e_2', ..., e_n'$ bazislar tanlab olingan bo‘lib, e_i' vektorlar $e_1, e_2, ..., e_n$ bazis orqali

$$\begin{gathered} e_1' = a_{1,1}e_1 + a_{2,1}e_2 + ... + a_{n,1}e_n, \\ e_2' = a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2 + ... + a_{n,2}e_n, \\ ...., \\ e_n' = a_{1,n}e_1 + a_{2,n}e_2 + ... + a_{n,n}e_n \end{gathered}$$

kabi ifodalangan bo‘lsin. Birinchi $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisda chiziqli funksiya

$$f(x) = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + ... + x_n\xi_n$$

ko‘rinishida, $e_1', e_2', ..., e_n'$ bazisda esa

$$f(x) = x_1'\xi_1' + x_2'\xi_2' + ... + x_n'\xi_n'$$

ko‘rinishida ifodalansin.

$x_i = f(e_i)$, $x_k' = f(e_k')$ bo‘lgani uchun

$$\begin{gathered} x_k' = f(a_{1,k}e_1 + a_{2,k}e_2 + ... + a_{n,k}e_n) = \\ = a_{1,k}f(e_1) + a_{2,k}f(e_2) + ... + a_{n,k}f(e_n) = \\ = a_{1,k}x_1 + a_{2,k}x_2 + ... + a_{n,k}x_n. \end{gathered}$$

tenglik kelib chiqadi.

Agar bu ifodani matritsalar ko‘rinishida yozsak:

$$(x'_1, x'_2, ..., x'_n) = (x_1, x_2, ..., x_n)\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & .... & a_{2,n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n,1} & a_{n,2} & ... & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

hosil bo‘ladi.

Bichiziqli formalar. Endi bichiziqli va kvadratik funksiyalar (formalar) tushunchalarini kiritamiz. Bu tushunchani dastlab, haqiqiy sonlar maydonida aniqlangan vektor fazo uchun kiritamiz.

25.2-ta’rif. Agar $V \times V$ to‘plamni $\mathbb{R}$ maydonga o‘tkazuvchi $A: V \times V \to \mathbb{R}$ akslantirish aniqlangan bo‘lib, quyidagi shartlar o‘rinli bo‘lsa,

1) $A(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda A(x_1, y) + \mu A(x_2, y);$

2) $A(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda A(x, y_1) + \mu A(x, y_2)$

ya’ni, bitta o‘zgaruvchining tayinlangan qiymatida ikkinchi o‘zgaruvchiga nisbatan chiziqli funksiya bo‘lsa, u holda $A(x, y)$ *bichiziqli forma* deb ataladi.

Misol 25.1. V chiziqli fazo sifatida uzluksiz funksiyalar to‘plamini qaraylik. $K(s,t)$ funksiya ikki o‘zgaruvchi uzluksiz funksiya bo‘lsin. Agar

$$A(f, g) = \int_a^b \int_a^b K(s,t) f(s) g(t) dsdt$$

bo‘lsa, $A(f, g)$ funksiya V fazoda aniqlangan bichiziqli forma bo‘ladi.

25.3-ta’rif. Agar ixtiyoriy x, y vektorlar uchun

$$A(x, y) = A(y, x)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, bichiziqli forma *simmetrik* bichiziqli forma deyiladi.

Yevklid fazosidagi (x, y) skalyar ko‘paytma simmetrik bichiziqli formaga misol bo‘ladi.

Bichiziqli formaning matritsasi. Biz bichiziqli formaning aksiomatik ta'rifini berdik. Endi n o'lchamli fazoda biror $e_1, e_2, ..., e_n$ bazis tanlab olamiz, hamda $A(x,y)$ bichiziqli formani x va y vektorlarning bu bazisdagi $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ va $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ koordinatalari orqali ifodalaymiz. Bu holda:

$$A(x,y) = A(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n,\ \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + ... + \eta_n e_n).$$

Bichiziqli formaning xossalariga asosan:

$$A(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n,\ \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + ... + \eta_n e_n) =$$

$$+\xi_1\eta_1 A(e_1, e_1) + \xi_1\eta_2 A(e_1, e_2) + ... + \xi_1\eta_n A(e_1, e_n) +$$

$$+\xi_2\eta_1 A(e_2, e_1) + \xi_2\eta_2 A(e_2, e_2) + ... + \xi_2\eta_n A(e_2, e_n) +$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+\xi_n\eta_1 A(e_n, e_1) + \xi_n\eta_2 A(e_n, e_2) + ... + \xi_n\eta_n A(e_n, e_n).$$

yoki qisqacha:

$$A(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} A(e_i, e_j)\xi_i\eta_j.$$

$A(e_i, e_j)$ o'zgarmaslarni $a_{i,j}$ kabi belgilasak, n o'lchamli fazodagi xar qanday bichiziqli forma berilgan $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisda

$$A(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\xi_i\eta_j$$

ko'rinishida yozilishini hosil qilamiz, bu yerda $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ va $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ sonlar mos ravishda x va y vektorlarning shu bazisdagi koordinatalari.

Ma'lumki, $a_{i,j}$ sonlar bazisning tanlab olinishigagina bog'liq bo'lib,

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots. & a_{2,n} \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

matritsa $A(x,y)$ bichiziqli formaning $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisdagi matritsasi deyiladi.

Shunday qilib, ixtiyoriy $A(x,y)$ bichiziqli forma berilgan bazisda $A=(a_{i,j})$ matritsa bilan aniqlanadi.

Endi bazis o‘zgarganda bichiziqli forma matritsasining o‘zgarishi ko‘rib chiqamiz. Bizga n o‘lchamli fazoda ikkita $e_1, e_2, ..., e_n$ va $f_1, f_2, ..., f_n$ bazislar berilgan bo‘lsin. $A(x,y)$ bichiziqli formaning $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisdagi matritsasini $A=(a_{i,j})$ va $f_1, f_2, ..., f_n$ bazisdagi matritsasi esa $B=(b_{i,j})$ kabi belgilaylik. Bundan tashqari, $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisdan $f_1, f_2, ..., f_n$ bazisga o‘tish matritsasi

$$C=\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,n} \end{pmatrix}$$

bo‘lsin, ya’ni

$$\begin{cases} f_1 = c_{1,1}e_1 + c_{2,1}e_2 + ... + c_{n,1}e_n, \\ f_2 = c_{1,2}e_1 + c_{2,2}e_2 + ... + c_{n,2}e_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n = c_{1,n}e_1 + c_{2,n}e_2 + ... + c_{n,n}e_n, \end{cases}$$

25.4-teorema. Agar A va B matritsalar $A(x,y)$ bichiziqli formaning mos ravishda $e_1, e_2, ..., e_n$ va $f_1, f_2, ..., f_n$ bazislardagi matritsalari bo‘lib, $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisdan $f_1, f_2, ..., f_n$ bazisga o‘tish matritsasi C bo‘lsa, u holda

$$B = C^T AC$$

bo‘ladi, bu yerda, C^T matritsa C matritsaning transponirlangan matritsasi.

Isbot. Ta’rifga ko‘ra $b_{i,j} = A(f_i, f_j)$ ekanligi ma’lum. Endi

$$f_i = c_{1,i}e_1 + c_{2,i}e_2 + ... + c_{n,i}e_n,$$

$$f_j = c_{1,j}e_1 + c_{2,j}e_2 + ... + c_{n,j}e_n$$

tenglikdan foydalanib,

$$b_{i,j} = A(f_i, f_j) = A\left(\sum_{p=1}^{n} c_{p,i}e_p, \sum_{q=1}^{n} c_{q,j}e_q\right) =$$

$$= \sum_{p,q=1}^{n} c_{p,i}c_{q,j}A(e_p, e_q) = \sum_{p,q=1}^{n} c_{p,i}c_{q,j}a_{p,q}$$

formulani hosil qilamiz.

Bu tenglikni matritsa shaklida yozish uchun $c'_{i,p} = c_{p,i}$ deb delgilash kiritamiz. Natijada, $c'_{i,p}$ lar C^T matritsaning elementlaridan iborat bo‘ladi. Demak,

$$b_{i,j} = \sum_{p,q=1}^{n} c'_{i,p}a_{p,q}c_{q,j}.$$

Matritsa shaklida esa, bu tenglik $B = C^T AC$ ko‘rinishiga keladi.

□

Endi biz kvadratik forma ta’rifini keltiramiz. Bizga $A(x, y)$ simmetrik bichiziqli forma berilgan bo‘lsin.

25.4-ta’rif. Simmetrik bichiziqli formada $y = x$ deb olganda hosil bo‘ladigan $A(x, x)$ funksiyaga kvadratik forma deyiladi.

$A(x, y)$ simmetrik bichiziqli forma $A(x, x)$ kvadratik formaga nisbatan *qutbiy bichiziqli forma* deyiladi.

25.5-teorema. $A(x, y)$ qutbiy forma o‘zining $A(x, x)$ kvadratik formasi bilan bir qiymatli aniqlanadi.

Isbot. Bichiziqli forma ta'rifidan osongina ko'rish mumkinki,

$$A(x+y,x+y)=A(x,x)+A(x,y)+A(y,x)+A(y,y).$$

$A(x,y)=A(y,x)$ ekanligidan

$$A(x,y)=\frac{1}{2}\left[A(x+y,x+y)-A(x,x)-A(y,y)\right]$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bu tenglikning o'ng tomonida faqat kvadratik formaning qiymatlari ishtirok etganligi uchun, $A(x,y)$ bichiziqli forma o'zining kvadratik formasi bilan aniqlanishi kelib chiqadi. □

Yuqorida biz ixtiyoriy $A(x,y)$ bichiziqli forma x va y vektorlarning koordinatalari orqali

$$A(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}\xi_i\eta_j$$

ko'rinishda yozilishini ko'rsatgan edik. Demak, $A(x,x)$ kvadratik forma ham berilgan bazisda

$$A(x,x)=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\xi_i\xi_k$$

formula bilan ifodalanadi, bunda $a_{i,k}=a_{k,i}$.

25.5-ta'rif. Agar xar qanday $x\neq 0$ vektor uchun $A(x,x)>0$ bo'lsa, $A(x,x)$ kvadratik forma musbat aniqlangan kvadratik forma deyiladi.

Misol 25.1. $A(x,x)$ kvadratik forma biror bazisda $A(x,x)=\xi_1^2+\xi_2^2+...+\xi_n^2$ ko'rinishga ega bo'lsa, bunday kvadratik forma musbat aniqlangan kvadratik forma bo'ladi.

$A(x,x)$ musbat aniqlangan kvadratik forma va $A(x,y)$ uning qutbiy bichiziqli formasi bo'lsin. Yuqorida berilgan ta'riflarga muvofiq quyidagilarga ega bo'lamiz:

1) $A(x,y)=A(y,x)$;

2) $A(x_1+x_2,y)=A(x_1,y)+A(x_2,y)$;

3) $A(\mu x,y)=\mu A(x,y)$;

4) $A(x,x)\geq 0$ va $A(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Bu shartlar skalyar ko‘paytmaning aksiomalari bilan bir hil ekanligini ko‘rish qiyin emas. Demak, musbat aniqlangan kvadratik formaga mos bo‘lgan bichiziqli forma skalyar ko‘paytma bo‘ladi.

Kompleks sonlar maydoni ustida berilgan vektor fazoda bichiziqli forma qiyidagicha aniqlanadi.

25.6-ta’rif. Agar $V\times V$ to‘plamni $\mathbb{C}$ maydonga o‘tkazuvchi $A:V\times V\to\mathbb{C}$ akslantirish aniqlangan bo‘lib, $A(x,y)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsa,

1) $A(\lambda x_1+\mu x_2,y)=\lambda A(x_1,y)+\mu A(x_2,y)$;

2) $A(x,\lambda y_1+\mu y_2)=\overline{\lambda}A(x,y_1)+\overline{\mu}A(x,y_2)$,

u holda $A(x,y)$ funksiya bichiziqli forma deb ataladi.

26 - §. Kvadratik formaning kanonik shakli

Biz avvalgi mavzuda $A(x,x)$ kvadratik formaning aniqlanishi x vektorning berilgan bazisdagi koordinatalariga bog‘liq ekanligini keltirib o‘tdik. Bu mavzuda kvadratik formani kvadratlar yig‘indisi shakliga keltirish, ya’ni kvadratik formani

$$A(x,x)=\lambda_1\xi_1^2+\lambda_2\xi_2^2+\ldots+\lambda_n\xi_n^2 \qquad (26.1)$$

ko‘rinishga keltiradigan bazisni topish masalasini qaraymiz.

26.1-ta’rif. Kvadratik formaning (26.1) ko‘rinishidagi shakli uning kanonik (normal) shakli deb ataladi.

26.2-teorema. n o‘lchamli V fazoda berilgan ixtiyoriy $A(x,x)$ kvadratik forma uchun shunday $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazis mavjudki, bu bazisda kvadratik forma

$$A(x,x)=\lambda_1\xi_1^2+\lambda_2\xi_2^2+\ldots+\lambda_n\xi_n^2,$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Isbot. Aytaylik, $A(x,x)$ kvadratik forma biror $f_1,\ f_2, ..., f_n$ bazisda quyidagi

$$A(x,x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}\eta_i\eta_j \tag{26.2}$$

ko‘rinishga ega bo‘lsin. Bunda $\eta_1,\eta_2,...,\eta_n$ lar x vektorning ushbu bazisdagi koordinatalari.

Bazisni (26.2) formulada turli indeksli koordinatalarning ko‘paytmalari yo‘qolib boradigan qilib almashtiramiz. Bazisning xar bir almashtirilishiga ma'lum koordinatalarning xosmas almashtirilishi, va aksincha, koordinatalarning xosmas almashtirilishiga ma'lum bazis almashtirishlari to‘g‘ri kelgani uchun koordinatalarni almashtirish formulalarini yozish bilan chegaralanamiz.

$A(x,x)$ kvadratik formani kanonik shaklga keltirish uchun, bizga $a_{i,i}$ koeffitsientlardan kamida bittasi noldan farqli bo‘lishi kerak. Bunga hamma vaqt erishish mumkin. Haqiqatan ham, nolga aynan teng bo‘lmagan $A(x,x)$ kvadratik formada o‘zgaruvchining birorta ham kvadrat bo‘lmasin deb faraz qilaylik, u holda kamida bitta noldan farqli ko‘paytma, masalan, $2a_{1,2}\eta_1\eta_2$ mavjud bo‘ladi. η_1 va η_2 koordinatalarni

$$\eta_1=\eta_1'+\eta_2',\ \ \eta_2=\eta_1'-\eta_2'$$

kabi almashtirib, boshqa o‘zgaruvchilarni o‘zgartirishsiz qoldirsak, bunday almashtirishda $2a_{1,2}\eta_1\eta_2$ hadning ko‘rinishi $2a_{1,2}(\eta_1'^2-\eta_2'^2)$ bo‘lib qoladi. Farazga muvofiq, $a_{1,1}=a_{2,2}=0$ bo‘lgani uchun, bu hech qanday had bilan qisqarmaydi, ya’ni $\eta_1'^2$ ning koeffitsienti noldan farqli bo‘ladi.

Demak, umumiylikka ziyon yetkazmagan holda (26.2) formulada $a_{1,1}\neq 0$ deb olish mumkin. Kvadratik formada η_1 qatnashgan hadlarni ajratib yozamiz:

$$a_{1,1}\eta_1^2+2a_{1,2}\eta_1\eta_2+...+2a_{1,n}\eta_1\eta_n.$$

Bu yig‘indini to‘la kvadratgacha to‘ldiramiz, ya’ni uni

$$a_{1,1}\eta_1^2 + 2a_{1,2}\eta_1\eta_2 + \ldots + 2a_{1,n}\eta_1\eta_n = \frac{1}{a_{1,1}}(a_{1,1}\eta_1 + \ldots + a_{1,n}\eta_n)^2 - B \qquad (26.3)$$

ko‘rinishda yozamiz, bu yerda B ifoda faqat $a_{1,2}\eta_2, \ldots, a_{1,n}\eta_n$ hadlar kvadratlari va ularning ko‘paytmalarini o‘z ichiga olgan haddir.

(26.3) ifodani (26.2) tenglikga qo‘ygandan so‘ng qaralayotgan kvadratik forma

$$A(x,x) = \frac{1}{a_{1,1}}(a_{1,1}\eta_1 + \ldots + a_{1,n}\eta_n)^2 + \ldots$$

ko‘rinishga keladi, bunda yozilmagan hadlar $\eta_2, \ldots, \eta_n$ o‘zgaruvchilardangina tashkil topgan. Quyidagicha o‘zgartirish kiritamiz

$$\eta_1^* = a_{1,1}\eta_1 + a_{1,2}\eta_2 + \ldots + a_{1,n}\eta_n,$$

$$\eta_2^* = \eta_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\eta_n^* = \eta_n.$$

U holda kvadratik forma

$$A(x,x) = \frac{1}{a_{1,1}}\eta_1^{*2} + \sum_{i,j=2}^{n} a_{i,j}^*\eta_i^*\eta_j^*$$

ko‘rinishiga keladi.

$\sum\limits_{i,j=2}^{n} a_{i,j}^*\eta_i^*\eta_j^*$ ifoda (26.2) formulaning o‘ng tomoniga juda o‘xshash bo‘lib, bunda faqat birinchi koordinata ishtirok etmaydi. $a_{2,2}^*$ koeffitsientni noldan farqli deb faraz qilib, o‘zgaruvchilarni yuqoridagi usulda,

$$\eta_1^{**} = \eta_1^*,$$

$$\eta_2^{**} = a_{2,2}^{*}\eta_2^{*} + a_{2,3}^{*}\eta_3^{*} + \ldots + a_{2,n}^{*}\eta_n^{*},$$

$$\eta_3^{**} = \eta_3^{*},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\eta_n^{**} = \eta_n^{*},$$

formulalarga muvofiq yangidan almashtirishimiz mumkin.

Bunday almashtirishdan so‘ng kvadratik forma

$$A(x,x) = \frac{1}{a_{1,1}}\eta_1^{**2} + \frac{1}{a_{2,2}}\eta_2^{**2} + \sum_{i,j=3}^{n} a_{i,j}^{**}\eta_i^{**}\eta_j^{**}$$

ko‘rinishga keladi. Bu jarayonni davom ettirib, o‘zgaruvchilarni bir necha bor almashtirgandan keyin $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ o‘zgaruvchilarga ega bo‘lamiz. Ya’ni, $A(x,x)$ kvadratik forma bu o‘zgaruvchilar orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$A(x,x) = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \ldots + \lambda_m\xi_m^2,$$

bu yerda $m \le n.$

Ravshanki, $m < n$ bo‘lgan holda $\lambda_{m+1} = \ldots = \lambda_n = 0$ deb faraz qilish mumkin. □

Kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltirishning yuqoridagi teorema isbotida bayon qilingan usuli *Lagranj usuli* deb ataladi.

Misol 26.1. Bizga uch o‘lchamli fazodagi biror f_1, f_2, f_3 bazisda

$$A(x,x) = 2\eta_1\eta_2 + 4\eta_1\eta_3 - \eta_2^2 - 8\eta_3^2$$

kvadratik forma berilgan bo‘lsin.

$\eta_1 = \eta_2', \ \eta_2 = \eta_1', \ \eta_3 = \eta_3'$ almashtirish bajarsak, u holda

$$A(x,x) = (\eta_1')^2 + 2\eta_1'\eta_2' + 4\eta_2'\eta_3' - 8(\eta_3')^2.$$

So‘ngra $\eta_1^* = -\eta_1' + \eta_2', \quad \eta_2^* = \eta_2', \quad \eta_3^* = \eta_3'$ almashtirish qilib, kvadratik forma uchun yangi ifoda hosil qilamiz:

$$A(x,x) = -(\eta_1^*)^2 + (\eta_2^*)^2 + 4\eta_2^*\eta_3^* - 8(\eta_3^*)^2.$$

Shunday qilib, $\xi_1=\eta_1^*$, $\xi_2=\eta_2^*+2\eta_3^*$, $\xi_3=\eta_3^*$ almashtirish kvadratik formani $A(x,x)=-\xi_1^2+\xi_2^2-12\xi_3^2$ kanonik shaklga keltiradi..

Ta’kidlash joizki, kvadratik formani Lagranj usuli bilan kanonik ko‘rinishiga keltirishda qo‘llaniladigan $\eta_1^*, \eta_2^*, ..., \eta_n^*$ koordinatalar $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ orqali, o‘z navbatida $\eta_1^{**}, \eta_2^{**}, ..., \eta_n^{**}$ koordinatalar esa $\eta_1^*, \eta_2^*, ..., \eta_n^*$ va shu tarzda oxirgi $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ koordinatalar o‘zidan oldingi koordinatalar orqali ifodalanadi. Bundan foydalanib, $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ koordinatalarni dastlabki $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ koordinatalar orqali ifodalash mumkin:

$$\xi_1=c_{1,1}\eta_1+c_{2,1}\eta_2+...+c_{n,1}\eta_n,$$

$$\xi_2=c_{1,2}\eta_1+c_{2,2}\eta_2+...+c_{n,2}\eta_n,$$

$$...,$$

$$\xi_n=c_{1,n}\eta_1+c_{2,n}\eta_2+...+c_{n,n}\eta_n.$$

Koordinatalarni almashtirish matritsasi bazis almashtirish matritsasi teskarisining transponirlanganiga teng bo‘lishini hisobga olib, yangi $e_1, e_2, ..., e_n$ bazis vektorlarini eski $f_1, f_2, ..., f_n$ bazis vektorlari orqali ifodalashimiz mumkin, ya’ni

$$e_1=d_{1,1}f_1+d_{2,1}f_2+...+d_{n,1}f_n,$$

$$e_2=d_{1,2}f_1+d_{2,2}f_2+...+d_{n,2}f_n,$$

$$...,$$

$$e_n=d_{1,n}f_1+d_{2,n}f_2+...+d_{n,n}f_n.$$

Agar kvadratik formani kanonik shaklga keltirish jarayonida ikki koordinatani birdaniga o‘zgartiradigan almashtirishni bajarishga to‘g‘ri kelmasa, u holda almashtirish formulalarining ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$\xi_1=c_{1,1}\eta_1+c_{2,1}\eta_2+...+c_{n,1}\eta_n,$$

$$\xi_2 = c_{2,2}\eta_2 + \ldots + c_{n,2}\eta_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\xi_n = c_{n,n}\eta_n$$

ya'ni almashtirish matritsasi uchburchak ko'rinishiga keladi. U holda bazisni almashtirish matritsasi ham

$$e_1 = d_{1,1} f_1,$$

$$e_2 = d_{1,2} f_1 + d_{2,2} f_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$e_n = d_{1,n} f_1 + d_{2,n} f_2 + \ldots + d_{n,n} f_n$$

ko'rinishda bo'ladi.

Endi kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltirishning yana bir usulini keltiramiz. Avvalgi usuldan farqli ravishda bu usul izlanayotgan $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisni to'g'ridan-to'g'ri boshlang'ich bazis orqali ifodasini beradi.

Aytaylik,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

matritsa $A(x,x)$ kvadratik formaning $f_1, f_2, ..., f_n$ bazisdagi matritsasi bo'lsin. Ushbu matritsaning quyidagi bosh minoralarini qaraymiz:

$$\Delta_1 = a_{11};\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};\ \ldots;\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

26.3-teorema. Aytaylik, $A(x,x)$ kvadratik formaning $f_1,\ f_2, ...,\ f_n$ bazisdagi matritsasi $A=(a_{i,j})$ bo‘lsin. Agar A matritsaning $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ bosh minorlari noldan farqli bo‘lsa, u holda shunday $e_1, e_2, ..., e_n$ bazis mavjudki, bu bazisda $A(x,x)$ forma kanonik ko‘rinishga kelib, uning kanonik ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$A(x,x)=\frac{1}{\Delta_1}\xi_1^2+\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\xi_2^2+...+\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\xi_n^2,$$

bunda ξ_k lar x vektorning $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisdagi koordinatalari.

Isbot. Teorema shartiga asosan $A(x,x)$ kvadratik forma $f_1,\ f_2, ...,\ f_n$ bazisda

$$A(x,x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\eta_i\eta_j$$

ko‘rinishiga ega, bu yerda $a_{i,j}=A(f_i, f_j)$.

Bizning maqsadimiz $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlarni $A(e_i,e_j)=0,\ i\neq j$ shartni qanoatlantiradigan qilib tanlashdan iborat. Bu bazislarni

$$\begin{cases} e_1=\alpha_{1,1}f_1, \\ e_2=\alpha_{2,1}f_1+\alpha_{2,2}f_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_n=\alpha_{n,1}f_1+\alpha_{n,2}f_2+...+\alpha_{n,n}f_n \end{cases} \tag{26.2}$$

ko‘rinishida izlaymiz.

$\alpha_{i,j}$ koeffitsientlarni $e_1, e_2, ..., e_n$ bazis elementlari o‘rniga ularning (26.2) tenglikdagi ifodalarini $A(e_i,e_j)=0$ shartlarga qo‘yish yo‘li bilan ham topish mumkin. Ammo bu usul hisoblash uchun noqulay bo‘lib, bunda $\alpha_{i,j}$ koeffitsientlarga nisbatan 2-darajali tenglamalar sistemasini yechishga to‘gri keladi.

Shuning uchun hisoblashni birmuncha yengillashtiradigan boshqa yo‘lni tanlaymiz.

Ta’kidlash joizki, $A(e_k, f_i) = 0, \quad 1 \le i \le k-1$ tengliklardan $A(e_k, e_i) = 0, \; 1 \le i \le k-1$ tenkliklar kelib chiqadi. Haqiqatan ham, agar e_i o‘rniga $\alpha_{i,1} f_1 + \alpha_{i,2} f_2 + ... + \alpha_{i,i} f_i$ ifodani qo‘ysak,

$$A(e_k, e_i) = A(e_k, \alpha_{i,1} f_1 + \alpha_{i,2} f_2 + ... + \alpha_{i,i} f_i) =$$

$$= \alpha_{i,1} A(e_k, f_1) + \alpha_{i,2} A(e_k, f_2) + ... + \alpha_{i,i} A(e_k, f_i) = 0$$

bo‘ladi.

Demak, ixtiyoriy k va $i < k$ uchun $A(e_k, f_i) = 0$ bo‘lsa, u holda $A(e_k, e_i) = 0$ bo‘ladi. Ko‘rinib turibdiki, qaralayotgan masala $e_k = \alpha_{k,1} f_1 + \alpha_{k,2} f_2 + ... + \alpha_{k,k} f_k$ munosabatdagi $\alpha_{k,1}, \alpha_{k,2}, ..., \alpha_{k,k}$ koef-fitsientlarni

$$A(e_k, f_i) = 0, \; 1 \le i \le k-1 \tag{26.5}$$

shartlarni qanoatlantiradigan qilib tanlash masalasiga keltirildi.

Agar e_k vektor yuqoridagi shartlar bilan bir qatorda quyidagi

$$A(e_k, f_k) = 1 \tag{26.6}$$

shartni qanotlantiradigan qilib izlansa, u holda u bir qiymatli aniqlanadi.

(26.5) va (26.6) shartlarga e_k ning ifodasini qo‘yib, $\alpha_{k,i}$ koeffisiyentlarga nisbatan birinchi darajali quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} \alpha_{k,1} A(f_1, f_1) + \alpha_{k,2} A(f_1, f_2) + ... + \alpha_{k,k} A(f_1, f_k) = 0, \\ \alpha_{k,1} A(f_2, f_1) + \alpha_{k,2} A(f_2, f_2) + ... + \alpha_{k,k} A(f_2, f_k) = 0, \\ ...., \\ \alpha_{k,1} A(f_k, f_1) + \alpha_{k,2} A(f_k, f_2) + ... + \alpha_{k,k} A(f_k, f_k) = 0, \\ \alpha_{k,1} A(f_k, f_1) + \alpha_{k,2} A(f_k, f_2) + ... + \alpha_{k,k} A(f_k, f_k) = 1 \end{cases} \tag{26.7}$$

Bu tenglamalar sistemasi matritsasining determinanti:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} A(f_1,f_1) & A(f_1,f_2) & \dots & A(f_1,f_k) \\ A(f_2,f_1) & A(f_2,f_2) & \dots & A(f_2,f_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A(f_k,f_1) & A(f_k,f_2) & \dots & A(f_k,f_k) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,k} \end{vmatrix}$$

ko‘rinishida bo‘lib, bu determinantning qiymati noldan farqli. Shuning uchun (26.7) sistema yagona yechimga ega. Demak, yuqoridagi tenglikni qanoatlantiruvchi $\alpha_{k,i}$ koeffitsientlar mavjud va yagondir. Bundan esa e_k vektor yagona ravishda aniqlanishi kelib chiqadi. Endi $A(x,x)$ kvadratik formaning $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisdagi $b_{i,k}$ koeffitsientlarini topamiz.

Ma’lumki, $b_{i,k} = A(e_i, e_k)$ bo‘lib, bu bazisning qurilishiga ko‘ra, $A(e_i, e_k) = 0,$ $k \neq i$, ya’ni $b_{i,k} = 0.$ Demak, $b_{k,k} = A(e_k, e_k)$ koeffitsientlarni aniqlash kifoya. (26.5) va (26.6) shartlarning bajarilishidan foydalanib,

$$A(e_k, e_k) = A(e_k, \alpha_{k,1} f_1 + \alpha_{k,2} f_2 + ... + \alpha_{k,k} f_k) =$$

$$= \alpha_{k,1} A(e_k, f_1) + \alpha_{k,2} A(e_k, f_2) + ... + \alpha_{k,k} A(e_k, f_k) = \alpha_{k,k}$$

ya’ni $b_{k,k} = \alpha_{k,k}$ ekanligini hosil qilamiz. Bu esa $b_{i,k}$ koeffisiyentlarni aniqlash uchun (26.7) tenglamalar sistemasidan faqat $\alpha_{k,k}$ no‘malumni aniqlash kifoya ekanligini bildiradi.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer qoidasigadan foydalanamiz. Tenglamalar sistemasining asosiy determinanti Δ_k ekanligini yuqorida ko‘rsatdik, $\alpha_{k,k}$ no‘malumga mos keluvchi determinant esa

$$\Delta_{\alpha_{k,k}} = \begin{vmatrix} A(f_1, f_1) & A(f_1, f_2) & \dots & A(f_1, f_{k-1}) & 0 \\ A(f_2, f_1) & A(f_2, f_2) & \dots & A(f_2, f_{k-1}) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A(f_{k-1}, f_1) & A(f_{k-1}, f_2) & \dots & A(f_{k-1}, f_{k-1}) & 0 \\ A(f_k, f_1) & A(f_k, f_2) & \dots & A(f_k, f_{k-1}) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} A(f_1, f_1) & A(f_1, f_2) & \dots & A(f_1, f_{k-1}) \\ A(f_2, f_1) & A(f_2, f_2) & \dots & A(f_2, f_{k-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A(f_{k-1}, f_1) & A(f_{k-1}, f_2) & \dots & A(f_{k-1}, f_{k-1}) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,k-1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \dots & a_{k-1,k-1} \end{vmatrix} = \Delta_{k-1}$$

bo‘ladi. Bundan

$$\alpha_{k,k} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, $A(e_i, e_j) = 0, \ i \neq j$ va $A(e_k, e_k) = \dfrac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}$ ekanligiga ega bo‘lamiz. □

Kvadratik formani kvadratlar yig‘indisiga keltirishning yuqorida keltirib o‘tilgan usuli *Yakobi usuli* deb ataladi.

Takidlash joizki, yuqoridagi teoremani isbot qilish jarayonida $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisning aniq ko‘rinishi mavjudligi ko‘rsatildi. Lekin bundan kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltiruvchi bazis yagona degan hulosa chiqazish noto‘g‘ri. Ya’ni, boshqa bir bazisda ham kvadratik forma kanonik ko‘rinishga kelishi mumkin. Masalan, boshlang‘ich $f_1, f_2, ..., f_n$ bazislarni o‘zgartirsak, ularga mos ravishda $e_1, e_2, ..., e_n$ bazislar ham o‘zgaradi.

Bundan tashqari 26.2-teoremani isbot qilish jarayonida berilgan kvadratik formani kanonik ko‘rinishi

$$\frac{1}{\Delta_1}\xi_1^2+\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\xi_2^2+...+\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\xi_n^2$$

bo‘lishini aniqladik.

Bu bilan kvadratik forma kanonik ko‘rinishining musbat va manfiy koeffitsientlari sonini topish imkoni kelib chiqadi. Masalan, agar Δ_{i-1} va Δ_i larning ishorasi bir hil bo‘lsa, u holda ξ_i^2 ifoda musbat koeffitsientga, aks holda esa manfiy koeffitsientga ega bo‘ladi. Bu esa kvadratlar oldidagi manfiy koeffitsientlarning soni

$$1, \Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$$

qatordagi ishora almashishlar soniga teng ekanligini anglatadi.

Xususiy holda $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0$ bo‘lsa, u holda kvadratik formaning kanonik ko‘rinishi

$$A(x,x)=\lambda_1\xi_1^2+\lambda_2\xi_2^2+...+\lambda_n\xi_n^2$$

kabi bo‘lib, $\lambda_i > 0$ bo‘ladi. Bu esa x ning xar qanday qiymatida $A(x,x)\geq 0$ ekanligini, shu bilan birga, faqatgina $\xi_1=\xi_2=...=\xi_n=0$ bo‘lgandagina $A(x,x)=0$ bo‘lishini bildiradi.

26.4-teorema. $A(x,x)$ kvadratik forma musbat aniqlangan bo‘lishi uchun $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0$ bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Teoremaning yetarlik isboti yuqoridagi mulohazadan kelib chiqadi. Shuning uchun uning zaruriyligini isbot qilish bilan chegaralanamiz.

Aytaylik, $A(x,x)$ kvadratik forma musbat aniqlangan bo‘lsin. Dastlab $\Delta_k \neq 0$ ekaniligini ko‘rsataylik. Teskarisini faraz qilaylik, ya’ni

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} A(f_1, f_1) & A(f_1, f_2) & \dots & A(f_1, f_k) \\ A(f_2, f_1) & A(f_2, f_2) & \dots & A(f_2, f_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A(f_k, f_1) & A(f_k, f_2) & \dots & A(f_k, f_k) \end{vmatrix} = 0$$

bo‘lsin. Bundan determinantning satrlari chiziqli bog‘liq ekanligi kelib chiqadi, ya’ni, kamida bittasi noldan farqli bo‘lgan $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ lar topilib,

$$\mu_1 A(f_1, f_i) + \mu_2 A(f_2, f_i) + \dots + \mu_k A(f_k, f_i) = 0, \ 1 \le i \le k$$

o‘rinli bo‘ladi. Yuqoridagi tenglikdan

$$A(\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \dots + \mu_k f_k, f_i) = 0, \ 1 \le i \le k$$

ekanligi kelib chiqadi. Bundan esa

$$A(\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \dots + \mu_k f_k, \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \dots + \mu_k f_k) = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu kvadratik formaning musbat aniqlangan ekanligiga zid, chunki $\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \dots + \mu_k f_k \ne 0.$

Demak, $\Delta_k \ne 0$ bo‘lib, k ning ixtiyoriyligidan $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ larning barchasi noldan farqli ekanligi kelib chiqadi. U holda 26.2-teoremaga ko‘ra $A(x, x)$ kvadratik formaning kanonik ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi

$$A(x, x) = \frac{1}{\Delta_1}\xi_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\xi_2^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\xi_n^2.$$

Agar biror i uchun $\Delta_i < 0$ bo‘lsa, u holda bu shartni qanoatlantiruvchi eng kichik i uchun $A(e_i, e_i) = \dfrac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} < 0$ bo‘ladi. Bu esa $A(x, x)$ kvadratik formaning musbat aniqlangan ekanligiga zid, demak, $\Delta_i > 0, \ 1 \le i \le n.$ □

27 - §. Inersiya qonuni

Avvalgi mavzuda $A(x,x)$ kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltirish usullari bilan tanishdik. Ma’lumki, kvadratik formani turli hil usullar bilan kanonik ko‘rinishga keltirish mumkin bo‘lib, uni kanonik ko‘rinishga olib keluvchi bazislar ham turlicha bo‘lishi mumkin.

Kvadratik formani

$$A(x,x) = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \ldots + \lambda_n\xi_n^2 \tag{27.1}$$

ko‘rinishga keltiruvchi basis vektorlarni ularga proporsional vektorlar bilan almashtirish orqali noldan farqli λ_i koeffitsientlarni 1 yoki –1 ga teng qilib olish mumkin. Demak, kvadratik formaning kanonik ko‘rinishini mos tartibda 0, 1 va –1 ga teng bo‘lgan koeffitsientlar soni bilan xarakterlash mumkin.

Tabiiyki, bazisni turlicha tanlab olish mumkinligi uchun, 0, 1 va –1 ga teng bo‘lgan koeffitsientlar soni bazisni tanlab olishga bog‘liqmi yoki yo‘qmi degan savol tug‘iladi.

Masalan, $A(x,x)$ kvadratik forma biror $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisda $A=(a_{i,j})$ matritsaga ega bo‘lib, matritsaning $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ bosh minorlari noldan farqli bo‘lsa, kvadratik formaning kanonik ko‘rinishidagi barcha λ_i koeffitsientlar noldan farqli va manfiy koeffisientlar soni $1, \Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ determinantlar qatoridagi ishora almashishlar soniga teng bo‘ladi.

Ammo boshqa bir $f_1, f_2, ..., f_n$ boshlang‘ich bazis olib, bu bazisga mos keluvchi matritsani $A'=(a'_{i,j})$ orqali belgilab, $\Delta'_1, \Delta'_2, ..., \Delta'_n$ determinantlarni topsak, hamda kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltirsak, nima uchun bu holda ham ishora almashinishlar soni yuqoridagi holat bilan bir hil bo‘lishi bir qarashda tushunarli emas.

Biz ushbu paragrafda *kvadratik formaning inersiya qonuni* deb ataluvchi quyidagi teoremani isbot qilamiz.

27.1-teorema. Agar kvadratik forma ikki hil usul bilan kanonik ko‘rinishga keltirilgan bo‘lsa, u holda bu kanonik ko‘rinishlarda musbat, manfiy va nolga teng koeffitsientlarning soni ikkala holatda ham bir hil bo‘ladi.

Dastlab quyidagi lemmani isbot qilamiz.

27.2-lemma. n o‘lchamli V fazoda mos tartibda k va l o‘lchamli ikkita V_1 va V_2 qism fazolar berilgan bo‘lib, $k+l>n$ bo‘lsin. U holda bu qism fazolarning ikkalasiga ham tegishli bo‘lgan noldan farqli x vektor mavjud.

Isbot. Berilgan V_1 va V_2 qism fazo larda mos ravishda $e_1, e_2, ..., e_k$ va $f_1, f_2, ..., f_l$ bazislar olaylik. $k+l>n$ ekanligi uchun $e_1, e_2, ..., e_k$, $f_1, f_2, ..., f_l$ vektorlar chiziqli bog‘liq bo‘ladi. Demak, kamida bittasi noldan farqli bo‘lgan $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_l$ sonlari topilib,

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_k e_k + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + ... + \mu_l f_l = 0$$

ya’ni

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_k e_k = -\mu_1 f_1 - \mu_2 f_2 - ... - \mu_l f_l.$$

Agar

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_k e_k = -\mu_1 f_1 - \mu_2 f_2 - ... - \mu_l f_l$$

deb faraz qilsak, x vektor bir tomondan $e_1, e_2, ..., e_k$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi, ikkinchi tomondan esa $f_1, f_2, ..., f_l$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi sifatida tasvirlanishini ko‘rishimiz mumkin. Demak, x vektor V_1 va V_2 qism-fazolarning ikkalasiga ham tegishli bo‘ladi.

Endi ushbu x vektorni noldan farqli ekanligini ko‘rsatamiz. Agar $x=0$ bo‘lsa,

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_k e_k = 0, \ \ \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + ... + \mu_l f_l = 0.$$

$e_1, e_2, ..., e_k$ va $f_1, f_2, ..., f_l$ vektorlar sistemalari mos ravishda V_1 va V_2 qism fazolarning bazislari bo‘lganligi uchun, bu vektorlar sistemalari chiziqli erkli. Bundan esa $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$ va $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_l = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Bu esa $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_l$ sonlarining kamida bittasi noldan farqli ekanligiga ziddir. Demak, $x \neq 0$. □

Endi 27.1-teoremaning isbotiga o‘tamiz. Aytaylik, $A(x,x)$ kvadratik forma $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisda

$$A(x,x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_p^2 - \xi_{p+1}^2 - \xi_{p+2}^2 - ... - \xi_{p+q}^2 \qquad (27.2)$$

ko‘rinishga, $f_1, f_2, ..., f_n$ bazisda esa

$$A(x,x) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + ... + \eta_{p'}^2 - \eta_{p'+1}^2 - \eta_{p'+2}^2 - ... - \eta_{p'+q'}^2 \qquad (27.3)$$

ko‘rinishga ega bo‘lsin, bu yerda $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ va $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ lar mos ravishda x vektorning $e_1, e_2, ..., e_n$ va $f_1, f_2, ..., f_n$ bazislardagi koordinatalari.

$p = p'$ va $q = q'$ ekanligini isbot qilishimiz kerak. Faraz qilaylik, $p > p'$ bo‘lsin.

$e_1, e_2, ..., e_p$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lgan V_1 va $f_{p'+1}, f_{p'+2}, ..., f_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lgan V_2 qism fazolarni qaraymiz. Ma’lumki, $\dim(V_1) = p$, $\dim(V_2) = n - p'$ bo‘lib, $n - p' + p > n$ ekanligi uchun 27.2-lemmaga asosan V_1 va V_2 qism fazolarning kesishmasida noldan farqli $x \in V_1 \bigcap V_2$ vektor mavjud. U holda

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_p e_p$$

va

$$x = \eta_{p'+1} f_{p'+1} + \eta_{p'+2} f_{p'+2} + ... + \eta_n f_n$$

bo‘ladi, ya’ni x vektor $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisda $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_p, 0, ..., 0)$ koordinatalarga, $f_1, f_2, ..., f_n$ bazisda esa $(0, ..., 0, \eta_{p'+1}, \eta_{p'+2}, ..., \eta_n)$ koordinatalarga ega bo‘ladi.

Bu koordinatalarni (27.2) va (27.3) tengliklarga qo‘yib, bir tomondan

$$A(x,x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_p^2 > 0,$$

ikkinchi tomondan esa

$$A(x,x) = -\eta_{p'+1}^2 - \eta_{p'+2}^2 - ... - \eta_{p'+q'}^2 < 0$$

munosabatni hosil qilamiz. Bu esa $p > p'$ deb olingan farazga zid.

Xuddi shu usul bilan $p < p'$, $q > q'$ va $q < q'$ tengsizliklarning o‘rinli emasligi ham ko’rsatiladi. Demak, $p = p'$, $q = q'$. □

27.3-ta’rif. Kvadratik formaning kanonik shaklidagi noldan farqli koeffitsientlar soni kvadratik formaning rangi deyiladi.

Yuqorida isbot qilingan inersiya qonunidan kvadratik formaning rangi faqat uning o‘ziga bog‘liq bo‘lib, kanonik shaklga keltirish usuliga bog‘liq emasligi to‘g‘ridan-to‘g‘ri kelib chiqadi.

Amalda kvadratik formaning rangini kvadratik formaning kanonik shaklidan foydalanmay turib aniqlash usuli mavjud. Buning uchun kvadratik forma rangi bilan uning biror bazisdagi matritsasi rangi orasidagi bog’lanishni o’rnatish kifoya.

27.4-ta’rif. Quyidagi to‘plam

$$V_0 = \{y \in V \mid \forall x \in V, A(x,y) = 0\}$$

berilgan bichiziqli formaning nol qism fazosi deb ataladi.

Ya’ni, V_0 to‘plam ixtiyoriy $x \in V$ vektor uchun $A(x,y) = 0$ shartini qanoatlantiruvchi y vektorlar to‘plamidir.

V_0 to‘plam qism fazo ekanligini ko‘rish qiyin emas, haqiqatdan ham, $y_1, y_2 \in V_0$ vektorlar uchun $A(x,y_1) = 0$ va $A(x,y_2) = 0$ ekanligidan,

$$A(x,\lambda y_1) = \lambda A(x,y_1) = 0,$$

$$A(x,y_1 + y_2) = A(x,y_1) + A(x,y_2) = 0$$

tengliklarni hosil qilamiz, demak, $\lambda y_1,\ y_1 + y_2 \in V_0$.

V_0 fazoni topish uchun V fazoda biror $f_1,\ f_2, ...,\ f_n$ bazis olib, V_0 fazoning elementlarini

$$y = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + ... + \mu_n f_n$$

ko‘rinishida izlaymiz. $A(f_i, y) = 0,\ 1 \le i \le n$ ekanligidan

$$A(f_1, \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + ... + \mu_n f) = 0,$$

$$A(f_2, \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + ... + \mu_n f) = 0,$$

$$..,$$

$$A(f_n, \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + ... + \mu_n f) = 0$$

tengliklarni hosil qilamiz. Agar $A(f_i, f_j) = a_{i,j}$ kabi belgilash kiritsak,

$$\begin{cases} a_{1,1}\mu_1 + a_{1,2}\mu_2 + ... + a_{1,n}\mu_n = 0, \\ a_{2,1}\mu_1 + a_{2,2}\mu_2 + ... + a_{2,n}\mu_n = 0, \\ ...., \\ a_{n,1}\mu_1 + a_{n,2}\mu_2 + ... + a_{n,n}\mu_n = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi. Bu tenglamalar sistemasining $\mu_1,\ \mu_2, ...,\ \mu_n$ yechimlari to‘plami V_0 fazoning elementlarini aniqlaydi, ya’ni koordinatalari yechimlar to‘plamidan olingan vektorlar V_0 nol qism fazoni tashkil qiladi.

Ma’lumki, agar chiziqli tenglamalar sistemasi matritsasining rangi r ga teng bo‘lsa, qism fazo ning o‘lchami $n - r$ ga teng bo‘ladi. Demak, V_0 nol qism fazoning o‘lchami kvadratik formaning biror bazisdagi matritsasi rangiga bo‘gliq ekan.

Ikkinchi tomondan esa, nol qism fazo o‘lchami bazisga bog‘liq emasligidan, kvadratik forma matritsasining rangi ham bazisning tanlanishiga bog‘liq emasligi kelib chiqadi.

Endi kvadratik forma matritsasi rangini kvadratik forma rangi bilan bog‘lanishini keltiramiz. Ma’lumki, kvadratik formaning kanonik bazisdagi matritsasi

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ko‘rinishga ega bo’lib, bu matritsaning rangi noldan farqli koeffitsientlar soniga teng. Bu esa kvadratik forma rangining o‘zginasidir. Yuqorida ko‘rsatilgani kabi kvadratik forma matritsasining rangi tanlangan bazisga bog‘liq bo‘lmaganligi uchun, ixtiyoriy bazisda ham kvadratik forma matritsasining rangi kvadratik formaning rangiga teng ekanligi kelib chiqadi. Ya’ni quyidagi teorema o‘rinli.

27.5-teorema. Turli bazislarda kvadratik formaning matritsasi bir hil r rangga ega bo‘lib, bu r soni kvadratik formaning kanonik shaklidagi noldan farqli koeffitsientlar soniga teng.

Bu teoremadan kvadratik formaning rangini topish uchun uni qandaydir bazisdagi matritsasining rangini hisoblash yetarli ekanligi kelib chiqadi.

VI BOB. CHIZIQLI ALMASHTIRISHLAR

28 - §. Chiziqli almashtirishlar va ularning matritsalari

Ushbu mavzuda biz chiziqli fazoda aniqlangan akslantirishlar ichida muhim o‘rin egallaydigan chiziqli almashtirish tushunchasi kiritamiz.

28.1-ta’rif. n o‘lchamli V fazoda aniqlangan $A:V \to V$ akslantirish uchun

1) $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$;

2) $A(\lambda x) = \lambda A(x)$

shartlar bajarilsa, u holda A akslantirish chiziqli almashtirish deyiladi.

Odatda A chiziqli almashtirishning qiymati $A(x)$ o‘rniga Ax yoziladi.

Misol 28.1. a) uch o‘lchamli $\mathbb{R}^3$ Yevklid fazosida vektorni koordinata boshidan o‘tadigan biror o‘q atrofida burishdan iborat bo‘lgan almashtirishni qaraymiz. Bunda xar bir x vektorga uni burishdan so‘ng hosil bo‘lgan Ax vektorni mos qo‘yamiz. Bu moslik 1) va 2) shartlarni qanoatlantirishini tekshirish qiyin emas.

Masalan, 1) shartni tekshirib ko‘raylik: $A(x_1 + x_2)$ ifoda avval x_1 hamda x_2 vektorlarning qo‘shilishini, so‘ngra hosil bo‘lgan vektorning burilishini bildiradi. $Ax_1 + Ax_2$ esa avval x_1 hamda x_2 vektorlarning burilishini, so‘ngra ularning qo‘shilishini bildiradi. O‘z-o‘zidan ravshanki, ikkala holda ham natija bir hil bo‘ladi. Demak, A akslantirish chiziqli almashtirish bo‘ladi.

b) Bizga $\mathbb{R}^3$ Yevklid fazosi va uning koordinatalar boshidan o‘tuvchi biror tekisligi bo‘lgan V_1 qism fazosi berilgan bo‘lsin. Ixtiyoriy $x \in \mathbb{R}^3$ vektorga uning bu tekislikdagi $x_1 = Ax$ proeksiyasini mos qilib qo‘yamiz. Bu moslik ham chiziqli almashtirish bo‘ladi.

c) [0,1] segmentda uzluksiz funksiyalardan iborat fazoni qaraylik. Bu fazoda aniqlangan $Af(t)=\int_0^t f(s)ds$ akslantirish chiziqli almashtirish bo‘ladi. Haqiqatdan ham,

$$A(f_1(t)+f_2(t))=\int_0^t [f_1(s)+f_2(s)]ds=$$

$$=\int_0^t f_1(s)ds+\int_0^t f_2(s)ds=Af_1(t)+Af_2(t),$$

$$A(\lambda f(t))=\int_0^t \lambda f(s)ds=\lambda\int_0^t f(s)ds=\lambda Af(t).$$

Endi chiziqli almashtirishlar ichida alohida ro‘l o‘ynovchi quyidagi 2 ta sodda almashtirishlarni keltiramiz. Ixtiyoriy vektorga shu vektorning o‘zini mos qo‘yuvchi E almashtirish, birlik almashtirish deyiladi, ya’ni

$$Ex=x.$$

Ixtiyoriy x vektorga nol vektorni mos qo‘yuvchi Θ almashtirish nol almashtirish deyiladi, ya’ni

$$\Theta(x)=0.$$

n o‘lchamli V chiziqli fazoda A chiziqli almashtirish berilgan bo‘lib, $e_1, e_2, ..., e_n$ chiziqli fazo bazisi bo‘lsin.

28.2-tasdiq. Berilgan $g_1, g_2, ..., g_n$ vektorlar uchun

$$Ae_1=g_1,\ Ae_2=g_2,\ ...,\ Ae_n=g_n$$

shartni qanoatlantiruvchi A chiziqli almashtirish mavjud va yagona.

Isbot. Dastlab, A chiziqli almashtirish $Ae_1, Ae_2, ..., Ae_n$ vektorlar orqali bir qiymatli aniqlanishini ko‘rsatamiz. Haqiqatdan ham, V fazodan olingan ixtiyoriy

$$x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+...+\xi_ne_n$$

vektor uchun

$$Ax=A(\xi_1e_1+\xi_2e_2+...+\xi_ne_n)=\xi_1Ae_1+\xi_2Ae_2+...+\xi_nAe_n$$

bo‘ladi. Demak, Ax vektor $g_1, g_2, ..., g_n$ vektorlar orqali bir qiymatli aniqlanadi.

Endi xar qanday $g_1, g_2, ..., g_n$ vektorlar uchun $Ae_i = g_i$ tenglikni qanoatlantiradigan A chiziqli almashtirish mavjudligini ko‘rsatamiz.

Buning uchun ixtiyoriy $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n$ vektorga $\xi_1 g_1 + \xi_2 g_2 + ... + \xi_n g_n$ vektorni mos qilib qo‘yamiz. x vektor e_i bazis vektorlar orqali bir qiymatli ifoda etilgani uchun, unga muayyan bir Ax vektor mos qo‘yiladi. Bunday aniqlangan akslantirish chiziqli almashtirish bo‘ladi. □

Chiziqli almashtirishlar va matritsalar orasidagi bog‘lanishni aniqlaymiz. Yuqoridagi tasdiqdan ixtiyoriy $g_1, g_2, ..., g_n$ vektorlar uchun $Ae_1 = g_1, Ae_2 = g_2, ..., Ae_n = g_n$ shartni qanoatlantiruvchi chiziqli almashtirish yagona ravishda aniqlanishiga ega bo‘ldik. g_k vektorning $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisdagi koordinatalarini $a_{1,k}, a_{2,k}, ..., a_{n,k}$ orqali belgilaylik, ya’ni

$$g_k = Ae_k = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} e_i .$$

Ushbu $a_{i,k}$ koeffitsientlar orqali $(a_{i,k})$ matritsani hosil qilamiz. Hosil qilingan matritsa A chiziqli almashtirishning $e_1, e_2, ..., e_n$ *bazisdagi matritsasi* deb aytiladi.

Shunday qilib, berilgan $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisda xar bir A chiziqli almashtirishga $(a_{i,k})$ matritsa bir qiymatli mos qo‘yilishiga ega bo‘ldik. Demak, chiziqli almashtirishlarni matritsalar yordamida tasvirlash mumkin. Lekin ushbu matritsa bazisga bog‘liq ekanligini, bazis o‘zgarganda esa matritsaning ham o‘zgarishini ta’kidlab o‘tish joiz.

Misol 28.2. Aytaylik, $V = \mathbb{R}^3$ uch o‘lchamli Yevklid fazosi bo‘lsin. A chiziqli almashtirish sifatida x vektorni OXY tekisligiga proeksiyalashdan iborat bo‘lgan akslantirishni olamiz. Bazis sifatida koordinatalar o‘qlari bo‘yicha yo‘nalgan birlik e_1, e_2, e_3 vektorlarni qabul qilamiz. U holda

$$Ae_1 = e_1,\ Ae_2 = e_2,\ Ae_3 = 0,$$

ya’ni, bu bazisda A almashtirishning matritsasi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Endi chiziqli almashtirishlar ustida amallarni aniqlaymiz. Chiziqli almashtirishlar ustida qo‘shish, songa ko‘paytirish va ko‘paytirish amallarini aniqlash mumkin.

28.3-ta’rif. A va B chiziqli almashtirishlar yig‘indisi deb, x vektorga $Ax + Bx$ vektorni mos qo‘yuvchi C almashtirishga aytiladi. Boshqacha aytganda, $C = A + B$ ifoda xar qanday x uchun $Cx = Ax + Bx$ ekanligini bildiradi.

Aytaylik, A va B chiziqli almashtirishlar $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisda mos ravishda $(a_{i,k})$ va $(b_{i,k})$ matritsalarga ega bo‘lsin. U holda $C = A + B$ chiziqli almashtirishning matritsasini topish uchun $e_1, e_2, ..., e_n$ bazis elementlarning ushbu almashtirishdagi qiymatlarini qaraymiz, ya’ni

$$Ce_k = Ae_k + Be_k = \sum_{i=1}^{n} (a_{i,k} + b_{i,k}) e_i .$$

Bu esa C chiziqli almashtirishning $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisdagi $(c_{i,k})$ matritsasi uchun $c_{i,k} = a_{i,k} + b_{i,k}$ tenglik bajarilishini anglatadi.

Shunday qilib, A va B chiziqli almashtirishlar yig‘indisining berilgan bazisdagi matritsasi chiziqli almashtirishlarning shu bazisdagi matritsalari yig‘indisiga teng ekanligini ko‘rsatdik.

28.4-ta'rif. A chiziqli almashtirishning λ soniga ko'paytmasi deb, x vektorga λAx vektorni mos qo'yuvchi $C=\lambda A$ almashtirishga aytiladi, ya'ni $(\lambda A)x=\lambda(Ax)$.

$C=\lambda A$ chiziqli almashtirishning berilgan bazisdagi matritsasi $\lambda\cdot(a_{i,k})$ ekanligini ko'rish qiyin emas.

28.5-ta'rif. A va B almashtirishlarning ko'paytmasi deb, avval B almashtirishni so'ngra esa A almashtirishni ketma-ket bajarishdan iborat bo'lgan C almashtirishga aytiladi, ya'ni $C=AB$ ifoda x vektor uchun $Cx=A(Bx)$ ekanligini bildiradi.

Dastlab, chiziqli almashtirishlarning ko'paytmasi yana chiziqli almashtirish bo'lishini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham,

$$C(x_1+x_2)=A(B(x_1+x_2))=A(Bx_1+Bx_2)=$$

$$=A(Bx_1)+A(Bx_2)=Cx_1+Cx_2,$$

$$C(\lambda x)=A(B(\lambda x))=A(\lambda Bx)=\lambda A(Bx)=\lambda Cx.$$

Endi chiziqli almashtirishlar yig'indisining matritsasini aniqlaganimiz kabi ko'paytmaning ham matritsasini aniqlaymiz. A va B chiziqli almashtirishlar matritsalari $(a_{i,k})$ va $(b_{i,k})$ ekanligidan foydalanib,

$$Ce_k=A(Be_k)=A\left(\sum_{j=1}^{n}b_{j,k}e_j\right)=\sum_{j=1}^{n}b_{j,k}Ae_j=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}b_{j,k}\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}e_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}b_{j,k}\right)e_i$$

tenglikni hosil qilamiz. Ikkinchi tomondan

$$Ce_k=\sum_{i=1}^{n}c_{i,k}e_i$$

ekanligidan

$$c_{i,k}=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}b_{j,k}$$

kelib chiqadi. Bundan ko‘rinib turibdiki, $(c_{i,k})$ matritsaning $c_{i,k}$ elementlari $(a_{i,k})$ matritsaning i-qator elementlari bilan $(b_{i,k})$ matritsaning k-ustunining mos elementlari ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng.

Shunday qilib, $C=AB$ chiziqli almashtirishning $(c_{i,k})$ matritsasi A va B chiziqli almashtirishlar $(a_{i,k})$ va $(b_{i,k})$ matritsalari ko‘paytmasidan iborat ekanligini hosil qildik.

Xulosa o‘rnida shuni aytishimiz mumkinki, chiziqli almashtirishlarni qo‘shish va ko‘paytirish amallari matritsalarni qo‘shish va ko‘paytirish kabi amalga oshirilib, quyidagi xossalar o‘rinli bo‘ladi:

1) $A+B=B+A$;

2) $(A+B)+C=A+(B+C)$;

3) $A(BC)=(AB)C$;

4) $(A+B)C=AC+BC,\ C(A+B)=CA+CB.$

Aytaylik, ixtiyoriy A chiziqli almashtirish va E birlik almashtirish berilgan bo‘lsin, u holda

$$AE=EA=A$$

ekanini osongina tekshirish mumkin.

A almashtirishning darajasini odatdagidek

$$A^2=A\cdot A,\ A^3=A^2\cdot A,\ ...$$

kabi aniqlaymiz. Sonlar uchun o‘rinli bo‘lganidek, $A^0=E$ deb faraz qilamiz.

Yuqoridagilardan foydalangan holda A chiziqli almashtirishdan tuzilgan ko‘phadni ham qarash mumkin, ya’ni ixtiyoriy $P(t)=a_0t^m+a_1t^{m-1}+...+a_m$ ko‘pxad berilgan bo‘lsa, $P(A)$ deb

$$P(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + ... + a_m E$$

formula bilan aniqlangan chiziqli almashtirishni tushunamiz.

Endi teskari almashtirish tushunchasini kiritamiz.

28.6-ta’rif. Agar $AB = BA = E$ bo‘lsa, B almashtirishga A ning teskari almashtirishi deyiladi, bu yerda E birlik almashtirishdir.

A almashtirishga teskari almashtirish A^{-1} kabi belgilanadi. Ta’rifdan ko‘rinadiki, agar B almashtirish A ga teskari bo‘lsa $B(Ax) = x,$ bo‘ladi.

Xar qanday almashtirish uchun teskari almashtirish mavjud bo‘lavermaydi. Masalan, uch o‘lchamli fazoni OXY tekislikgiga proyeksiyalash almashtirishi teskari almashtirishga ega emas.

Teskari almashtirish tushunchasi bilan teskari matritsa tushunchasi bog‘liqdir. Ma’lumki, berilgan matritsa teskarilanuvchi bo‘lishi uchun uning determinanti noldan farqli bo‘lishi zarur va yetarli.

Berilgan bazisda matritsalar bilan chiziqli almashtirishlar orasida barcha amallarni saqlovchi o‘zaro bir qiymatli moslik mavjud bo‘lganligi uchun, A almashtirish uning biror bazisdagi matritsasi determinanti noldan farqli bo‘lgandagina teskarilanuvchi bo‘lishi kelib chiqadi. Teskarisi mavjud bo‘lgan almashtirish *xosmas almashtirish* deyiladi.

Ixtiyoriy A chiziqli almashtirish uchun almashtirishning yadrosi va obrazi deb ataluvchi fazolarni aniqlaymiz.

28.7-ta’rif. A almashtirishning obrazi deb Ax ko‘rinishidagi vektorlar jamlanmasiga aytiladi, bu yerda $x \in V$.

Almashtirishning obrazi $\mathrm{Im}(A)$ kabi belgilanadi, ya’ni

$$\mathrm{Im}(A) = \{y \in V \mid \exists x \in V, Ax = y\}.$$

Ko‘rinib turibdiki, teskarilanuvchi almashtirishning obrazi butun fazo bilan ustma-ust tushadi.

28.8-tasdiq. Ixtiyoriy chiziqli almashtirishning obrazi qism fazo tashkil qiladi.

Isbot. Aytaylik, $y_1, y_2 \in \mathrm{Im}(A)$ bo‘lsin, u holda $x_1, x_2 \in V$ vektorlar uchun $y_1 = Ax_1$ va $y_2 = Ax_2$. Ixtiyoriy λ soni uchun

$$\lambda y_1 = \lambda A x_1 = A(\lambda x_1),$$

$$y_1 + y_2 = Ax_1 + Ax_2 = A(x_1 + x_2)$$

ekanligidan $\lambda y_1 \in \mathrm{Im}(A)$ va $y_1 + y_2 \in \mathrm{Im}(A)$ kelib chiqadi. □

Mazkur qism fazoning o‘lchami A almashtirishning *rangi* deyiladi.

28.9-ta’rif. A almashtirishning yadrosi deb $Ax = 0$ bo‘ladigan vektorlar jamlanmasiga aytiladi va $\mathrm{Ker}(A)$ kabi belgilanadi, ya’ni

$$\mathrm{Ker}(A) = \{x \in V \mid Ax = 0\}.$$

28.10-tasdiq. Ixtiyoriy chiziqli almashtirishning yadrosi qism fazo tashkil qiladi.

Isbot. Haqiqatdan ham, $Ax_1 = 0$ va $Ax_2 = 0$ bo‘lsa, u holda

$$A\left(x_1 + x_2\right) = Ax_1 + Ax_2 = 0.$$

Xuddi shunga o‘xshab, agar $Ax = 0$ bo‘lsa, $A\lambda x = \lambda A x = 0$, ya’ni $\mathrm{Ker}(A)$ qism fazo. □

Agarda A xosmas almashtirish bo‘lsa, uning yadrosi faqat noldan iborat bo‘ladi.

Misol 28.3. V fazo darajasi n dan oshmaydigan ko‘phadlar fazosi bo‘lsin. A almashtirish esa differesiallash bo‘lsin. Ya’ni

$$AP(x) = P'(x).$$

Bu alamshtirishning yadrosi konstantalardan, obrazi esa, darajasi $n-1$ dan oshmaydigan ko‘phadlardan iborat bo‘ladi. Ularning o‘lchamlari esa, mos ravishda birga va n ga teng.

28.10-tasdiq. n o‘lchamli V chiziqli fazodagi ixtiyoriy A almashtirishning obrazi va yadrosi o‘lchamlari yig‘indisi butun fazo o‘lchamiga teng, ya’ni $\dim(\mathrm{Im}(A)) + \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n$.

Isbot. Aytaylik, A almashtirish yadrosining o‘lchami k ga teng bo‘lsin. U holda $\mathrm{Ker}(A)$ da $e_1, e_2, ..., e_k$ bazis tanlab, uni butun fazodagi $e_1, e_2, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_n$ bazisgacha to‘ldiramiz.

$Ae_{k+1}, ..., Ae_n$ vektorlarni qaraylik. Bu vektorlar almashtirishning obraziga tegishli bo‘lib, ular $\mathrm{Im}(A)$ da bazis tashkil qiladi.

Darhaqiqat, ixtiyoriy $y \in \mathrm{Im}(A)$ vektor berilgan bo‘lsa, ta’rifga ko‘ra shunday x vektor mavjudki, $y = Ax$. $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlar V da bazis bo‘lganligi sababli $x = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + ... + \gamma_n e_n$. Lekin, $Ae_1 = ... = Ae_k = 0$ bo‘lgani uchun $y = Ax = \gamma_{k+1} Ae_{k+1} + ... + \gamma_n Ae_n$. Ya’ni ixtiyoriy $y \in \mathrm{Im}(A)$ vektor $Ae_{k+1}, ..., Ae_n$ vektorlar orqali chiziqli ifodalanadi.

Endi $n-k$ ta $Ae_{k+1}, ..., Ae_n$ vektorlarning chiziqli erkli ekanligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik, ular chiziqli bog‘liq bo‘lsin. U holda hech bo‘lmaganda bittasi noldan farqli bo‘lgan α_j sonlar topilib,

$$\alpha_1 Ae_{k+1} + ... + \alpha_{n-k} Ae_n = 0$$

bo‘ladi.

$x = \alpha_1 e_{k+1} + ... + \alpha_{n-k} e_n$ vektorni qaraylik. U holda $Ax = A\left(\alpha_1 e_{k+1} + ... + \alpha_{n-k} e_n\right) = \alpha_1 Ae_{k+1} + ... + \alpha_{n-k} Ae_n = 0$ ekanligidan, $x \in \mathrm{Ker}(A)$ kelib chiqadi. Bu esa ziddiyat, chunki bir tomondan x yadroning elementi sifatida $e_1, e_2, ..., e_k$ bazis vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi, ikkinchi tomondan esa, $e_{k+1}, ..., e_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lib qoldi. Bu esa, x vektorning bazis vektorlar yordamida berilishiga zid. Bundan esa, $Ae_{k+1}, ..., Ae_n$ vektorlar chiziqli erkli ekanligi kelib chiqadi.

Demak, $\mathrm{Im}(A) = n-k$, ya’ni chiziqli almashtirish obrazining fazo o‘lchami butun fazo o‘lchami bilan chiziqli fazo yadrosi o‘lchami ayirmasiga teng. □

Turli bazislarda chiziqli almashtirish matritsalari orasidagi bog‘lanish. Yuqorida ta’kidlaganimizdek, chiziqli almashtirishning matritsasi berilgan chiziqli fazoning bazisiga bog‘liq, ya’ni turli bazislarda chiziqli almashtirish turli matritsalarga ega bo‘ladi. Endi bir bazisdan boshqa bazisga o‘tganda A chiziqli almashtirishning matritsasi qanday o‘zgarishini keltiramiz.

V chiziqli fazoda ikkita $e_1, e_2, ..., e_n$ va $f_1, f_2, ..., f_n$ bazislar berilgan bo‘lsin. $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisdan $f_1, f_2, ..., f_n$ bazisga o‘tish matritsasini $(c_{i,j})$ bilan belgilaymiz, ya’ni

$$\begin{cases} f_1 = c_{1,1}e_1 + c_{2,1}e_2 + ... + c_{n,1}e_n, \\ f_2 = c_{1,2}e_1 + c_{2,2}e_2 + ... + c_{n,2}e_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n = c_{1,n}e_1 + c_{2,n}e_2 + ... + c_{n,n}e_n. \end{cases} \tag{28.1}$$

A chiziqli almashtirishning $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisdagi matritsasini $A = (a_{i,j})$, $f_1, f_2, ..., f_n$ bazisdagi matritsasini esa $B = (b_{i,j})$ orqali belgilaymiz. Boshqacha aytganda

$$Ae_k = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}e_i, \tag{28.2}$$

$$Af_k = \sum_{i=1}^{n} b_{i,k} f_i. \tag{28.3}$$

Bizning maqsadimiz $(b_{i,j})$ matritsani $(a_{i,j})$ va $(c_{i,j})$ matritsalar orqali ifodalashdan iboratdir.

28.1-teorema. Agar biror chiziqli almashtirishning $e_1, e_2, ..., e_n$ va $f_1, f_2, ..., f_n$ bazislardagi matritsalari mos ravishda A va B bo‘lib, birinchi bazisdan ikkinchi bazisga o‘tish matritsasi C ga teng bo‘lsa,

$$B = C^{-1}AC$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. Aytaylik, berilgan A chiziqli almashtirish va $e_1, e_2, ..., e_n$ hamda $f_1, f_2, ..., f_n$ bazislar uchun yuqoridagi (28.1), (28.2) va (28.3) shartlar o‘rinli bo‘lsin.

$e_1, e_2, ..., e_n$ basis elementlarni $f_1, f_2, ..., f_n$ elementlarga mos ravishda o‘tkazuvchi C chiziqli almashtirish quramiz, ya’ni $Ce_i = f_i$.

28.1-tasdiqqa ko‘ra bunday almashtirish mavjud va yagona bo‘lib, qurilgan C chiziqli almashtirishning $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisdagi matritsasi $(c_{i,j})$ matritsa bilan ustma-ust tushadi. Bundan tashqari, bu chiziqli almashtirish bazis vektorlarni bazis vektorlarga o‘tkazganligi uchun, u teskarilanuvchi almashtirish bo‘ladi.

Berilgan (28.3) formulalarning o‘ng va chap tomonlarida f_k ni Ce_k bilan hamda f_i ni Ce_i bilan almashtirsak,

$$ACe_k = \sum_{i=1}^{n} b_{ik} Ce_i$$

hosil bo‘ladi.

Bu tenglikning ikkala tomoniga C^{-1} almashtirishni tatbiq qilib,

$$C^{-1}ACe_k = C^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{i,k} Ce_i \right) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,k} C^{-1}(Ce_i) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,k} e_i$$

tengligni hosil qilamiz.

Bu tenglikdan esa $(b_{i,j})$ matritsa $C^{-1}AC$ almashtirishning $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisdagi matritsasi ekanligi ko‘rinib turibdi. Almashtirishlarni ko‘paytirganda ularning berilgan $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisdagi matritsalari ko‘paytirilishidan $B = C^{-1}AC$ tenglik kelib chiqadi. □

29 - §. Invariant qism fazolar.
Chiziqli almashtirishning xos son va xos vektorlari

Invariant qism fazolar. Agar V chiziqli fazoda biror chiziqli yoki bichiziqli funksiya berilgan bo‘lib, bu funksiya faqat V fazoning biror V_1 qism fazosidagina aniqlangan bo‘lsa, u holda biz uni V_1 da berilgan deb hisoblashimiz, ya’ni V o‘rniga faqat V_1 ni qarashimiz mumkin.

Chiziqli almashtirishlarga keladigan bo‘lsak, bu yerda holat butunlay boshqacha bo‘ladi. Darhaqiqat, chiziqli almashtirish V_1 qism fazoning biror vektorini V_1 ga tegishli bo‘lmagan vektorga o‘tkazib yuborishi ham mumkin. Bunday holatda biz faqat V_1 qism fazo bilan chegaralanib qola olmaymiz.

29.1-ta’rif. V chiziqli fazo va A chiziqli almashtirish berilgan bo‘lsin. Agar V_1 qism fazoning ixtiyoriy x elementi uchun Ax vektor ham V_1 ga tegishli bo‘lsa, u holda V_1 qism fazo A chiziqli almashtirishga nisbatan invariant qism fazo deyiladi.

Ta’rifdan ko‘rinakigi, A chiziqli almashtirishni biror qism fazoda qarashimiz uchun, u invariant qism fazo bo‘lishi kerak.

Misol 29.1. a) Faqat noldangina iborat bo‘lgan qism fazo va butun fazo invariant qism fazolardir. Bu qism fazolar *trivial invariant qism fazolar* deyiladi.

b) $\mathbb{R}^3$ uch o‘lchamli fazoda vektorni noldan o‘tgan biror o‘q atrofida burishdan iborat bo‘lgan chiziqli almashtirishni qaraylik. Bu holda aylanish o‘qi bir o‘lchamli invariant qism fazo, koordinatalar boshidan o‘tib, bu o‘qqa ortogonal bo‘lgan tekislik esa ikki o‘lchamli invariant qism fazo bo‘ladi.

c) $\mathbb{R}^2$ tekislikda (ikki o‘lchamli fazo) A chiziqli almashtirish tekislikni X o‘q bo‘yicha λ_1 marta, Y o‘q bo‘yicha λ_2 marta cho‘zishdan iborat bo‘lsin. Boshqacha aytganda, agar $z = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$ uchun $Az = \lambda_1 \xi_1 e_1 + \lambda_2 \xi_2 e_2$, bu yerda e_1, e_2 o‘qlardagi birlik vektorlar.

Bu holda X hamda Y koordinata o‘qlari bir o‘lchamli invariant qism fazolar bo‘ladi. Agar $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ bo‘lsa, u holda koordinatalar boshidan o‘tgan ixtiyoriy to‘g‘ri chiziq invariant qism fazo bo‘ladi.

Xos son va xos vektorlar. V fazo va undagi biror $x \neq 0$ vektordan hosil bo‘lgan bir o‘lchamli V_1 qism fazo berilgan bo‘lsin. Ma’lumki, V_1 fazo λx ko‘rinishidagi elementlardan tashkil topadi. V_1 fazo invariant bo‘lishi uchun Ax vektor ham V_1 da yotishi, ya’ni

$$Ax = \lambda x$$

bo‘lishi zarur va yetarlidir.

29.2-ta’rif. $Ax = \lambda x$ munosabatni qanoatlantiruvchi $x \neq 0$ vektor A chiziqli almashtirishning xos vektori, unga mos keluvchi λ son esa xos son deyiladi.

Shunday qilib, agar x vektor xos vektor bo‘lsa, u holda αx vektorlar to‘plami bir o‘lchamli invariant qism fazoni tashkil qiladi. Aksincha, bir o‘lchamli invariant qism fazoning noldan farqli barcha vektorlari xos vektorlardir.

29.3-teorema. V kompleks fazoda xar qanday A chiziqli almashtirish kamida bitta xos vektorga ega.

Isbot. V fazoda biror $e_1, e_2, ..., e_n$ bazis tanlab olamiz. Bu bazisda A chiziqli almashtirishning matritsasi $(a_{i,j})$ bo‘lsin. Ixtiyoriy $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n \in V$ vektor uchun Ax vektorni qarasak,

$$Ax = \xi_1 A(e_1) + \xi_2 A(e_2) + ... + \xi_n A(e_n) =$$

$$\xi_1 (a_{1,1} e_1 + a_{2,1} e_2 + ... + a_{n,1} e_n) + \xi_2 (a_{1,2} e_1 + a_{2,2} e_2 + ... + a_{n,2} e_n) +$$

$$+ ... + \xi_n (a_{1,n} e_1 + a_{2,n} e_2 + ... + a_{n,n} e_n) =$$

$$(a_{1,1}\xi_1 + a_{1,2}\xi_2 + ... + a_{1,n}\xi_n) e_1 + (a_{2,1}\xi_1 + a_{2,2}\xi_2 + ... + a_{2,n}\xi_n) e_n +$$

$$+ ... + (a_{n,1}\xi_1 + a_{n,2}\xi_2 + ... + a_{n,n}\xi_n) e_n,$$

bo‘ladi. Demak, $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n$ vektor xos vektor bo‘lishi, ya’ni $Ax = \lambda x$ shart bajarilishi uchun

$$\begin{cases} a_{1,1}\xi_1 + a_{1,2}\xi_2 + ... + a_{1,n}\xi_n = \lambda\xi_1, \\ a_{2,1}\xi_1 + a_{2,2}\xi_2 + ... + a_{2,n}\xi_n = \lambda\xi_2, \\ ...., \\ a_{n,1}\xi_1 + a_{n,2}\xi_2 + ... + a_{n,n}\xi_n = \lambda\xi_n \end{cases}$$

tengliklar o‘rinli bo‘lishi kerak. Boshqacha aytganda, agar

$$\begin{cases} (a_{1,1} - \lambda)\xi_1 + a_{1,2}\xi_2 + ... + a_{1,n}\xi_n = 0, \\ a_{2,1}\xi_1 + (a_{2,2} - \lambda)\xi_2 + ... + a_{2,n}\xi_n = 0, \\ ...., \\ a_{n,1}\xi_1 + a_{n,2}\xi_2 + ... + (a_{n,n} - \lambda)\xi_n = 0, \end{cases} \qquad (29.1)$$

bir jinsli tenglamalar sistemasi noldan farqli yechimga ega bo‘lsa, x xos vektor mavjud bo‘ladi.

Shunday qilib, teoremani isbot qilish uchun (29.1) sistemani qanoatlantiradigan λ sonini va bir vaqtning o‘zida nolga teng bo‘lmaydigan $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ sonlarning mavjud ekanligini ko‘rsatish kerak.

Ma’lumki, bir jinsli tenglamalar sistemaning noldan farqli yechimi mavjud bo‘lishi uchun uning determinanti nolga teng bo‘lishi zarur va yetarli, demak

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & ... & a_{2,n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n,1} & a_{n,2} & ... & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (29.2)$$

Ushbu determinantdan biz λ ga nisbatan n-darajali tenglama hosil qilamiz. Algebraning asosiy teoremasiga ko‘ra, kompleks sonlar maydonida xar qanday ko‘phad kamida bitta ildizga ega bo‘lganligi uchun, bu tenglama ham λ_0 ildizga ega.

(29.1) sistemada λ ning o‘rniga λ_0 ildizni qo‘ysak, hosil bo‘lgan bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi noldan farqli yechimga ega bo‘ladi. Ushbu noldan farqli yechimni $\xi_1^0, \xi_2^{(0)}, ..., \xi_n^{(0)}$ deb olsak,

$$x^0 = \xi_1^{(0)} e_1 + \xi_2^{(0)} e_2 + ... + \xi_n^{(0)} e_n$$

xos vektorni va unga mos keluvchi λ_0 xos sonni hosil qilamiz, chunki $Ax^0 = \lambda_0 x^0$ tenglik bajariladi. □

Eslatma. Agar A chiziqli almashtirishni butun fazoda emas, balki uning biror invariant qism fazosida qaralsa, u holda teoremaning isboti o‘z kuchini saqlaydi. Demak, ixtiyoriy invariant qism fazoda ham A chiziqli almashtirish kamida bitta xos vektorga ega.

(29.2) tenglama A chiziqli almashtirish matritsasining *xarakteristik tenglamasi*, uning chap tomonida hosil bo‘ladigan ko‘phad esa *xarakteristik ko‘phadi* deyiladi.

Teoremani isbotlash jarayonida biz xarakteristik ko‘phadning ildizlari A chiziqli almashtirishning xos sonlari ekanligini, va aksincha, A chiziqli almashtirishning xos sonlari xarakteristik tenglamaning ildizlari ekanligini ko‘rsatdik.

Endi xarakteristik ko‘phad bazisning tanlab olinishiga bog‘liq emasligini ko‘rsatamiz. Yuqorida A almashtirishning xarakteristik ko‘phadini $A-\lambda E$ matritsaning determinanti sifatida aniqladik. Bazis o‘zgarganda chiziqli almashtirishning A matritsasi $C^{-1}AC$ ko‘rinishni oladi, bu yerda C eski bazisdan yangi bazisga o‘tish matritsasi. Yangi bazisda xarakteristik ko‘pxad $C^{-1}AC-\lambda E$ matritsaning determinantiga teng bo‘ladi. Ammo

$$|C^{-1}AC-\lambda E| = |C^{-1}AC-\lambda C^{-1}EC| = |C^{-1}(A-\lambda E)C| =$$

$$= |C^{-1}|\cdot|A-\lambda E|\cdot|C| = |A-\lambda E|\cdot|C^{-1}|\cdot|C| = |A-\lambda E|$$

tenglikdan bazis o‘zgarganda xarakteristik ko‘phad o‘zgarmasligi kelib chiqadi.

Demak, kelgusida chiziqli almashtirish matritsasining xarakteristik ko‘phadi emas, balki chiziqli almashtirishning xarakteristik ko‘phadi deb yuritishimiz mumkin.

n-o‘lchamli chiziqli fazoda berilgan chiziqli almashtirishlar orasida n ta chiziqli erkli xos vektorlarga ega bo‘lgan chiziqli almashtirishlar ma’lum ma’noda eng sodda chiziqli almashtirishlar hisoblanadi. Agar A shunday chiziqli almashtirish bo‘lsa, u holda $e_1, e_2, ..., e_n$ chiziqli erkli xos vektorlarni V fazoning bazisi deb qabul qilish mumkin. U holda

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1,$$
$$Ae_2 = \lambda_2 e_2,$$
$$................,$$
$$Ae_n = \lambda_n e_n$$

ekanligidan A almashtirishning bu bazisdagi matritsasi

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ko‘rinishga keladi. Bundan quyidagi teorema kelib chiqadi.

29.4-teorema. Agar A chiziqli almashtirish n ta chiziqli erkli xos vektorlarga ega bo‘lsa, u holda A almashtirish matritsasini diagonal shaklga keltirish mumkin. Aksincha, agar biror bazisda almashtirish matritsasi diagonal shaklda bo‘lsa, u holda bu bazisning vektorlari xos vektorlardan iboratdir.

Quyidagi tasdiqda turli xos sonlarga mos keluvchi xos vektorlar chiziqli erkli ekanligini ko‘rsatamiz.

29.5-tasdiq. Agar $e_1, e_2, ..., e_k$ vektorlarlar A chiziqli almashtirishning xos vektorlari bo‘lib, ularga mos keluvchi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ xos sonlar turli xil bo‘lsa, u holda $e_1, e_2, ..., e_k$ vektotlar chiziqli erklidir.

Isbot. Buni ko‘rsatish uchun induksiya usulidan foydalanamiz. $k=1$ uchun bu tasdiq o‘z-o‘zidan ravshan. Endi ushbu tasdiqni $k-1$ ta xos vektor uchun o‘rinli deb, uni k ta xos vektor uchun isbot qilamiz.

Teskarisini faraz qilaylik, ya’ni

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_k e_k = 0 \tag{29.3}$$

tenglik $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ koeffitsientlardan kamida bittasi noldan farqli bo‘lganda o‘rinli bo‘lsin. Aytaylik, $\alpha_1 \neq 0$ bo‘lsin, u holda yuqoridagi tenglikning xar ikkala tomoniga A almashtirishni tadbiq qilamiz:

$$A(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_k e_k) = 0,$$

ya’ni

$$\alpha_1 \lambda_1 e_1 + \alpha_2 \lambda_2 e_2 + ... + \alpha_k \lambda_k e_k = 0. \tag{29.4}$$

(29.3) tenglikni λ_k ga ko‘paytirib (29.4) tenglikdan ayirsak, ushbu ifodani hosil qilamiz:

$$\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_k)e_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k)e_2 + ... + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_1)e_{k-1} = 0.$$

Induksiya faraziga ko‘ra, $e_1, e_2, ..., e_{k-1}$ vektorlarning chiziqli erkliligi va $\lambda_i \neq \lambda_j$ ekanligidan biz $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{k-1} = 0$ tenglikni hosil qilamiz. Bu esa $\alpha_1 \neq 0$ degan farazga zid. Demak $e_1, e_2, ..., e_k$ vektorlar chiziqli erkli. □

Yuqoridagi tasdiqdan bevosita quyidagi natija kelib chiqadi.

29.5-natija. Agar A chiziqli almashtirishning xarakteristik ko‘phadi n ta xar hil ildizga ega bo‘lsa, u holda A almashtirish matritsasini diagonal shaklga keltirish mumkin.

Haqiqatdan ham, xarakteristik tenglamaning xar bir λ_k ildiziga kamida bitta xos vektor to‘g‘ri keladi. Bu vektorlarga mos bo‘lgan xos qiymatlarning hammasi turlicha bo‘lganligi uchun, yuqoridagi tasdiqqa muvofiq n ta chiziqli erkli $e_1, e_2, ..., e_n$ xos vektorlarga ega bo‘lamiz. Bu vektorlarni bazis sifatida olsak, A almashtirishning matritsasi diagonal ko‘rinishga keladi.

Agar xarakteristik ko‘phad karrali ildizlarga ega bo‘lsa, u holda chiziqli erkli xos vektorlarning soni n dan kichik bo‘lishi mumkin.

Masalan, darajasi n dan oshmaydigan ko‘phadlar fazosida har bir ko‘phadga uning hosilasini mos qo‘yuvchi A almashtirish faqat bitta $\lambda = 0$ xos qiymatga va bitta $P(t) = const$ xos vektorga ega.

Haqiqatdan ham, darajasi $k > 0$ bo‘lgan xar qanday $P(t)$ ko‘phad uchun $P'(t)$ ko‘phadning darajasi $k-1$ ga teng va shuning uchun $P'(t) = \lambda P(t)$ tenglik faqat $\lambda = 0$ va $P(t) = const$ bo‘lgan holdagina bajariladi.

30 - §. Chiziqli almashtirishga qo‘shma almashtirish

Yevklid fazosida chiziqli almashtirishlar bilan bichiziqli formalar orasidagi bog‘lanish. Biz avvalgi mavzularda chiziqli fazoda bichiziqli formalar va chiziqli almashtirishlarni o‘rganib chiqdik. Ushbu mavzuda Yevklid fazosidagi bichiziqli formalar va chiziqli almashtirishlar orasidagi bog‘lanishni keltiramiz.

V kompleks Yevklid fazosi va $A(x, y)$ bichiziqli forma berilgan bo‘lsin. V fazoda biror $e_1, e_2, ..., e_n$ ortonormal bazis tanlab olamiz.

Agar

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n \text{ va } y = \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2 + ... + \nu_n e_n$$

bo‘lsa, u holda $A(x, y)$ bichiziqli formani quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\begin{aligned} A(x, y) = a_{1,1}\xi_1\bar{\nu}_1 + a_{1,2}\xi_1\bar{\nu}_2 + ... + a_{1,n}\xi_1\bar{\nu}_n + \\ + a_{2,1}\xi_1\bar{\nu}_1 + a_{2,2}\xi_1\bar{\nu}_2 + ... + a_{2,n}\xi_1\bar{\nu}_n + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ + a_{n,1}\xi_1\bar{\nu}_1 + a_{n,2}\xi_1\bar{\nu}_2 + ... + a_{n,n}\xi_n\bar{\nu}_n. \end{aligned} \tag{30.1}$$

Biz $A(x,y)$ bichiziqli formani biror skalyar ko‘paytma ko‘rinishida ifodalashga harakat qilamiz. Buning uchun uni quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$A(x,y)=(a_{1,1}\xi_1+a_{2,1}\xi_2+...+a_{n,1}\xi_n)\overline{v}_1+$$

$$+(a_{1,2}\xi_1+a_{2,2}\xi_2+...+a_{n,2}\xi_n)\overline{v}_2+$$

$$+...+$$

$$(a_{1,n}\xi_1+a_{2,n}\xi_2+...+a_{n,n}\xi_n)\overline{v}_n.$$

Endi $A:V\to V$ chiziqli almashtirishni aniqlaymiz. Buning uchun berilgan $x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+...+\xi_ne_n$ vektorga

$$z=(a_{1,1}\xi_1+a_{2,1}\xi_2+...+a_{n,1}\xi_n)e_1+(a_{1,2}\xi_1+a_{2,2}\xi_2+...+a_{n,2}\xi_n)e_2+$$

$$+...+(a_{1,n}\xi_1+a_{2,n}\xi_2+...+a_{n,n}\xi_n)e_n$$

vektorni mos qo‘yamiz. Natijada matritsasi $A(x,y)$ bichiziqli forma matritsasining transponirlanganiga teng bo‘lgan $A:V\to V$ chiziqli almashtirish hosil bo‘ladi. Demak, biz quyidagi tenglikni hosil qildik:

$$A(x,y)=\varsigma_1\overline{v}_1+\varsigma_2\overline{v}_2+...+\varsigma_n\overline{v}_n=(z,y)=(Ax,y),$$

bu yerda $\varsigma_k=a_{1,k}\xi_1+a_{2,k}\xi_2+...+a_{n,k}\xi_n$.

Shunday qilib, Yevklid fazosida xar qanday $A(x,y)$ bichiziqli formaga

$$A(x,y)=(Ax,y)$$

shartni qanoatlantiruvchi A chiziqli almashtirish to‘g‘ri keladi, va aksincha xar qanday A chiziqli almashtirishga $A(x,y)$ bichiziqli forma mos keladi.

Haqiqatdan ham, $A(x,y)=(Ax,y)$ kabi aniqlangan funksiya bichiziqli formaning shartlarini qanoatlantiradi.

$$A(x_1+x_2,y)=(A(x_1+x_2),y)=(Ax_1+Ax_2,y)=$$

$$=(Ax_1,y)+(Ax_2,y)=A(x_1,y)+A(x_2,y),$$

$$A(\lambda x, y) = (A(\lambda x), y) = (\lambda Ax, y) = \lambda(Ax, y) = \lambda A(x, y),$$

$$A(x, y_1 + y_2) = (Ax, y_1 + y_2) = (Ax, y_1) + (Ax, y_2) = A(x, y_1) + A(x, y_2),$$

$$A(x, \mu y) = (Ax, \mu y) = \overline{\mu}(Ax, y) = \overline{\mu}A(x, y).$$

Endi A chiziqli almashtirishga $A(x, y)$ bichiziqli formani mos qo‘yish o‘zaro-bir qiymatli moslik ekanligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik,

$$A(x, y) = (Ax, y) \text{ va } A(x, y) = (Bx, y)$$

bo‘lsin. U holda ixtiyoriy y vektor uchun

$$(Ax - Bx, y) = 0$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Ammo bu, $Ax - Bx = 0$ ekanligini bildiradi, demak, $Ax = Bx.$ Qaralayotgan x vektorning ixtiyoriyligidan $A = B$ kelib chiqadi.

Xulosa sifatida ushbu teoremani keltiramiz.

30.1-teorema. Yevklid fazosida bichiziqli formalar bilan chiziqli almashtirishlar orasida aniqlangan

$$A(x, y) = (Ax, y)$$

ko‘rinishida moslik bir qiymatli moslik bo‘ladi.

Bichiziqli formalar bilan chiziqli almashtirishlar orasida boshqa usul bilan ham moslik o‘rnatish mumkin. Masalan, $A(x, y) = (x, A^* y)$ ko‘rinishidagi moslik o‘rnatamiz. Buning uchun $A(x, y)$ bichiziqli formaning berilgan bazisdagi ko‘rinishini quyidagicha ifodalaymiz:

$$A(x, y) = A(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n, \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2 + ... + \nu_n e_n) =$$

$$= a_{1,1}\xi_1\overline{\nu}_1 + a_{1,2}\xi_1\overline{\nu}_2 + ... + a_{1,n}\xi_1\overline{\nu}_n +$$

$$+ a_{2,1}\xi_2\overline{\nu}_1 + a_{2,2}\xi_2\overline{\nu}_2 + ... + a_{2,n}\xi_2\overline{\nu}_n +$$

$$+ .... +$$

$$+ a_{n,1}\xi_n\overline{\nu}_1 + a_{n,2}\xi_n\overline{\nu}_2 + ... + a_{n,n}\xi_n\overline{\nu}_n.$$

Endi yuqoridagidan farqli ravishda, bu ifodani $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ o‘zgaruvchilar bo‘yicha yig‘ib ixchamlasak, berilgan ifoda

$$A(x,y)=\xi_1(a_{1,1}\bar{v}_1+a_{1,2}\bar{v}_2+...+a_{1,n}\bar{v}_n)+$$

$$+\xi_1(a_{2,1}\bar{v}_1+a_{2,2}\bar{v}_2+...+a_{2,n}\bar{v}_n)+$$

$$+...+$$

$$+\xi_n(a_{n,1}\bar{v}_1+a_{n,2}\bar{v}_2+...+a_{n,n}\bar{v}_n)=$$

$$=\xi_1\overline{(\bar{a}_{1,1}v_1+\bar{a}_{1,2}v_2+...+\bar{a}_{1,n}v_n)}+$$

$$+\xi_2\overline{(\bar{a}_{2,1}v_1+\bar{a}_{2,2}v_2+...+\bar{a}_{2,n}v_n)}+$$

$$+...+$$

$$+\xi_n\overline{(\bar{a}_{n,1}v_1+\bar{a}_{n,2}v_2+...+\bar{a}_{n,n}v_n)}$$

ko‘rinishga keladi.

Endi $y=v_1e_1+v_2e_2+...+v_ne_n$ vektorga

$$z=(\bar{a}_{1,1}v_1+\bar{a}_{1,2}v_2+...+\bar{a}_{1,n}v_n)e_1+(\bar{a}_{2,1}v_1+\bar{a}_{2,2}v_2+...+\bar{a}_{2,n}v_n)e_2+$$

$$+...+(\bar{a}_{n,1}v_1+\bar{a}_{n,2}v_2+...+\bar{a}_{n,n}v_n)e_n$$

vektorni mos qo‘yuvchi $A^*:V\to V$ chiziqli almashtirishni qaraymiz. A^* almashtirishning matritsasi A almashtirish matritsasini transponirlab, xar bir elementining qo‘shmasini olish natijasida hosil bo‘ladi. Ya’ni,

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ ... & .... & ... & ... \\ a_{n,1} & a_{n,2} & ... & a_{n,n} \end{pmatrix} \text{ bo‘lsa, } A^*=\begin{pmatrix} \bar{a}_{1,1} & \bar{a}_{2,1} & ... & \bar{a}_{n,1} \\ \bar{a}_{1,2} & \bar{a}_{2,2} & ... & \bar{a}_{n,2} \\ ... & .... & ... & ... \\ \bar{a}_{1,n} & \bar{a}_{2,n} & ... & \bar{a}_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Shuni ta’kidlab o‘tish joizki, ortogonal bo‘lmagan bazisda berilgan A va A^* almashtirishlarning matritsalari orasidagi munosabat ancha murakkab bo‘ladi.

30.2-ta’rif. Kompleks Yevklid fazosida berilgan A chiziqli almashtirishning qo‘shmasi deb,

$$(Ax, y) = (x, A^* y),$$

shartni qanoatlantiruvchi A^* almashtirishga aytiladi.

30.3-teorema. Yevklid fazosida xar qanday chiziqli almashtirishning yagona qo‘shma almashtirishi mavjud.

Isbot. 30.1-teoremaga ko‘ra xar qanday chiziqli A chiziqli almashtirish $A(x, y) = (Ax, y)$ shartni qanoatlantiruvchi bichiziqli formaga mos kelib, bu moslik bir qiymatlidir. Ikkinchi tomondan esa, $A(x, y)$ bichiziqli formani $A(x, y) = (x, A^* y)$ ko‘rinishida ham ifodalash mumkin. Bundan esa,

$$(Ax, y) = A(x, y) = (x, A^* y)$$

tenglikka ega bo‘lamiz. □

30.4-xossa. Chiqiziqli almashtirishning qo‘shma almashtirishi chiziqli almashtirishlarni qo‘shish va ko‘paytirish amallari bilan quyidagi xossalarga ega bo‘ladi:

a) $(AB)^* = B^* A^*$;

b) $(A^*)^* = A$;

c) $(A + B)^* = A^* + B^*$;

d) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$;

e) $E^* = E$.

Bu xossalarning ikkitasini isbotini keltiraylik.

Isbot. a) $(ABx, y) = (Bx, A^* y) = (x, B^* A^* y)$. Ammo ikkinchi tomondan $(AB)^*$ ta’rifiga muvofiq $(ABx, y) = (x, (AB)^* y)$.

Chiziqli almashtirishning mos bichiziqli forma bilan bir qiymatli aniqlanishini hisobga olib, bu tengliklarning o‘ng tomonlarini taqqoslasak $(AB)^* = B^* A^*$ kelib chiqadi.

b) Qo‘shma almashtirish ta’rifiga muvofiq $(Ax, y) = (x, A^* y)$. A^* ni vaqtincha C bilan belgilaymiz. U holda $(Ax, y) = (x, Cy)$, bundan

$$(y, Ax) = \overline{(Ax, y)} = \overline{(x, Cy)} = (Cy, x).$$

tenglik kelib chiqadi. Ushbu tenglikda y ni x bilan, x ni esa y bilan almashtirsak

$$(Cx, y) = (x, Ay)$$

ifoda hosil bo‘ladi. Demak, $C^* = A$ va $C = A^*$ bo‘lganligi uchun $(A^*)^* = A.$ □

31 - §. O‘z-o‘ziga qo‘shma, unitar va normal chiziqli almashtirishlar

O‘z-o‘ziga qo‘shma almashtirishlar. Biz avvalgi mavzuda qo‘shma chiziqli almashtirish tushunchasini kiritib, A chiziqli almashtirishga qo‘shma almashtirishni A^* kabi belgiladik. Chiziqli almashtirishni uning qo‘shmasiga o‘tkazuvchi * operatsiyasi, ma’lum darajada berilgan kompleks sonni uning qo‘shmasiga o‘tkazuvchi operatsiyasiga o‘xshashdir.

Bu o‘xshashlik tasodifiy bo‘lmasdan, kompleks sonlar maydonida birinchi tartibli matritsalar uchun, ya’ni kompleks sonlar uchun * operatsiyasi berilgan sonni qo‘shma kompleks son bilan almashtirishning xuddi o‘zidan iborat.

Barcha kompleks sonlar orasida haqiqiy sonlar $\bar{\alpha} = \alpha$ xossa bilan xarakterlangani kabi, chiziqli almashtirishlar uchun ham shunga o‘xshash tushunchani aniqlash mumkin.

31.1-ta’rif. Agar A chiziqli almashtirish uchun $A^* = A$ shart bajarilsa, u holda A o‘z-o‘ziga qo‘shma chiziqli almashtirish deyiladi.

31.2-tasdiq. A chiziqli almashtirish o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘lishi uchun, $A(x, y) = (Ax, y)$ bichiziqli forma uchun $A(x, y) = \overline{A(y, x)}$ bo‘lishi zarur va yetarli.

Isbot. Haqiqatan, ham

$$(Ax, y) = A(x, y) = \overline{A(y, x)} = \overline{(Ay, x)} = (x, Ay).$$

□

Ma’lumki ixtiyoriy kompleks sonni $\nu=\alpha+i\beta$ ko‘rinishida tasvirlash mumkin. Shunga o‘xshab, ixtiyoriy A chiziqli almashtirishni o‘z-o‘ziga qo‘shma A_1 va A_2 almashtirishlar orqali

$$A=A_1+iA_2$$

ko‘rinishida tasvirlash mumkin.

Buning uchun

$$A=\frac{A+A^*}{2}+i\frac{A-A^*}{2i}$$

deb olib, $A_1=\dfrac{A+A^*}{2}$, $A_2=\dfrac{A-A^*}{2i}$ kabi belgilasak, A_1 va A_2 almashtirishlar o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘ladi. Haqiqatan ham,

$$A_1^*=\left(\frac{A+A^*}{2}\right)^*=\frac{1}{2}(A+A^*)^*=\frac{1}{2}(A^*+A^{**})=\frac{1}{2}(A^*+A)=A_1$$

va

$$A_2^*=\left(\frac{A-A^*}{2i}\right)^*=-\frac{1}{2i}(A-A^*)^*=-\frac{1}{2i}(A^*-A^{**})=-\frac{1}{2i}(A^*-A)=A_2.$$

Shunday qilib, haqiqiy sonlar maydoni kompleks sonlar orasida qanday rol o‘ynaydigan bo‘lsa, o‘z-o‘ziga qo‘shma almashtirishlar ham barcha chiziqli almashtirishlar orasida xuddi shunday rol o‘ynashini ko‘rsatdik.

Ammo, kompleks sonlar maydonidagi xossalarga o‘xshash hamma xossalar xam o‘z-o‘ziga qo‘shma chiziqli almashtirishlar uchun o‘rinli bo‘lavermaydi. Masalan, ikkita o‘z-o‘ziga qo‘shma chiziqli almashtirishlarning ko‘paytmasi xar doim ham o‘z-o‘ziga qo‘shma almashtirish emas. Quyidagi teoremada bu savolga to‘liq javob beramiz.

31.3-teorema. A va B o‘z-o‘ziga qo‘shma chiziqli almashtirishlar bo‘lsin. AB almashtirish ham o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘lishi uchun $AB = BA$ tenglik bajarilishi zarur va yetarlidir.

Isbot. A va B chiziqli almashtirishlar o‘z-o‘ziga qo‘shma ekanligidan

$$(AB)^* = B^* A^* = BA.$$

Demak, $(AB)^* = AB$ tenglik faqat $AB = BA$ bo‘lgan holdagina bajariladi. □

Endi n-o‘lchamli V kompleks Yevklid fazosidagi o‘z-o‘ziga qo‘shma almashtirishlarning xos son va xos vektorlarini o‘rganamiz.

31.4-lemma. O‘z-o‘ziga qo‘shma almashtirishning xos qiymatlari haqiqiy sonlardir.

Isbot. Aytaylik, $x \neq 0$ vektor o‘z-o‘ziga qo‘shma A almashtirishning xos vektori va λ soni xos qiymati bo‘lsin, ya’ni $Ax = \lambda x.$

$A^* = A$ bo‘lganligi uchun,

$$(Ax, x) = (x, A^* x) = (x, Ax)$$

ya’ni,

$$(\lambda x, x) = (x, \lambda x).$$

Bundan esa $\lambda(x, x) = \overline{\lambda}(x, x)$ tenglik hosil bo‘ladi. $(x, x) \neq 0$ bo‘lganligi uchun, $\lambda = \overline{\lambda}.$ □

31.5-lemma. Aytaylik, e vektor o‘z-o‘ziga qo‘shma A chiziqli almashtirishning xos vektori bo‘lsin. $V_1 = \{x \in V \mid (x, e) = 0\}$ to‘plam A almashtirishga nisbatan $(n-1)$ o‘lchamli invariant qism fazo bo‘ladi.

Isbot. Ma’lumki, e ga ortogonal bo‘lgan vektorlardan tashkil topgan V_1 to‘plam $n-1$ o‘lchamli qism fazo tashkil qiladi. Endi V_1 qism fazoni A ga nisbatan invariant ekanligini ko‘rsatamiz.

Aytaylik, $x \in V_1$ bo‘lsin, ya’ni $(x, e) = 0.$ Berilgan e vektor xos vektor bo‘lganligi uchun $Ae = \lambda e.$ Bularni hisobga olib, A chiziqli almashtirishning o‘z-o‘ziga qo‘shma ekanligidan foydalansak,

$$(Ax,e) = (x, A^*e) = (x, Ae) = (x, \lambda e) = \lambda(x,e) = 0$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, $(Ax,e) = 0$ ya'ni $Ax \in V_1$. □

31.6-teorema. n o'lchamli Yevklid fazosidagi o'z-o'ziga qo'shma A chiziqli almashtirish n ta juft-jufti bilan ortogonal bo'lgan xos vektorlarga ega.

Isbot. Bizga 29.3-teoremadan ma'lumki, ixtiyoriy chiziqli almashtirish n o'lchamli V Yevklid fazosida kamida bitta xos vektorga ega. Aytaylik, $e_1 \in V$ vektor A almashtirishning xos vektori bo'lsin. 31.5-lemmaga asosan, $V_1 = \{x \in V \mid (x, e_1) = 0\}$ to'plam $(n-1)$ o'lchamli invariant qism fazoni tashkil qiladi. Endi A almashtirishni faqat V_1 fazoda qaraymiz. Yuqoridagi mulohaza orqali V_1 fazoda e_2 xos vektor mavjud. V_1 dagi e_2 ga ortogonal vektorlar to'plamini $V_2 = \{x \in V_1 \mid (x, e_2) = 0\}$ orgali belgilasak, bu to'plam $(n-2)$ o'lchamli invariant qism fazoni tashkil qiladi. Bu jarayonni davom ettirish natijasida

$$V \supset V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_{n-1}$$

invariant qism fazolarni hosil qilamiz.

Bu invariant qism fazolarning $e_1, e_2, \ldots, e_n$ xos vektorlari juft-jufti bilan ortogonal bo'lgan n ta xos vektorlarni beradi. □

Demak, n o'lchamli Yevklid fazosidagi o'z-o'ziga qo'shma A chiziqli almashtirish n ta juft-jufti bilan ortogonal bo'lgan xos vektorlarga ega. Bundan tashqari, 31.1-lemmaga asosan, ularga mos keluvchi xos sonlar haqiqiydir. Xos vektor bilan noldan farqli xar qanday sonning ko'paytmasi yana xos vektor bo'lganligi uchun, e_i vektorlarning uzunliklarini 1 ga teng qilib tanlab olish mumkin.

31.7-teorema. Aytaylik, A almashtirish n o'lchamli fazoda o'z-o'ziga qo'shma chiziqli almashtirish bo'lsin. U holda shunday ortonormal bazis mavjudki, bu bazisda A almashtirishning matritsasi diagonal shaklga kelib, elementlari haqiqiy sonlardan iborat bo'ladi. Va aksincha, agar biror ortonormal bazisda A almashtirishning matritsasi diagonal shakldda va elementlari haqiqiy sonlar bo‘lsa, u holda A o‘z-o‘ziga qo‘shma chiziqli almashtirish bo‘ladi.

Isbot. Dastlab, teoremaning birinchi qismini isbotlaymiz. 31.3-teoremaga ko‘ra, o‘z-o‘ziga qo‘shma chiziqli almashtirish juft-jufti bilan ortogonal bo‘lgan $e_1, e_2, ..., e_n$ xos vektorlarga ega. Bu xos vektorlarni bazis sifatida tanlab olsak,

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1,$$

$$Ae_2 = \lambda_2 e_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$Ae_n = \lambda_n e_n$$

bo‘lganligi uchun A almashtirishning ushbu bazisda matritsasi

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{31.1}$$

ko‘rinishga keladi. O‘z-o‘ziga qo‘shma chiziqli almashtirishning xos sonlari haqiqiy sonlar bo‘lganligi uchun λ_i lar haqiqiydir.

Aksincha, biror ortonormal bazisda A almashtirishning matritsasi (31.1) ko‘rinishda bo‘lsin. Ma’lumki ortonormal bazisda o‘z-o‘ziga qo‘shma A^* almashtirishning matritsasi A almashtirish matritsasidan uni transponirlash va xar bir elementini qo‘shma kompleks son bilan almashtirish orqali hosil bo‘ladi.

Bu operatsiyalarni (31.1) ko‘rinishdagi matritsaga qo‘llasak, barcha λ_i sonlarning haqiqiy ekanligidan shu matritsaning o‘zini hosil qilamiz. Demak, A hamda A^* almashtirishlarga bitta matritsaning o‘zi to‘g‘ri keladi, ya’ni $A = A^*$. □

O‘z-o‘ziga qo‘shma almashtirish xos vektorlarining yana bir xossasini keltiramiz.

31.8-tasdiq. O‘z-o‘ziga qo‘shma almashtirishning turli xos qiymatlariga mos bo‘lgan xos vektorlari o‘zaro ortogonaldir.

Isbot. Darhaqiqat, agar $Ae_1 = \lambda_1 e_1$, $Ae_2 = \lambda_2 e_2$ bo‘lib, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ bo‘lsa,

$$(Ae_1, e_2) = (e_1, A^* e_2) = (e_1, Ae_2)$$

tenglikdan

$$\lambda_1 (e_1, e_2) = \lambda_2 (e_1, e_2)$$

yoki

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(e_1, e_2) = 0$$

kelib chiqadi. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ bo‘lganligi uchun $(e_1, e_2) = 0$. □

Unitar almashtirishlar. Endi moduli bo‘yicha 1 ga teng bo‘lgan kompleks sonlarning analogi hisoblangan unitar almashtirish tushunchasini kiritamiz.

31.9-ta’rif. Agar A chiziqli almashtirish uchun $AA^* = A^* A = E$ bo‘lsa, u holda A almashtirish unitar chiziqli almashtirish deyiladi.

Boshqacha aytganda, unitar almashtirishlar $A^* = A^{-1}$ shart bilan aniqlanadi.

O‘z-o‘ziga qo‘shma almashtirishlardan farqli ravishda, ikkita unitar almashtirishlarning ko‘paytmasi yana unitar almashtirish bo‘ladi. Haqiqatan ham,

$$(AB)(AB)^* = (AB)(B^* A^*) = A(BB^*)A^* = AEA^* = AA^* = E.$$

Xuddi shu kabi $(AB)^*(AB) = E$ tenglik ham o‘rinli.

Unitar almashtirishlar quyidagicha geometrik ma’noga ega. Xar qanday U unitar almashtirish n o‘lchamli V Yevklid fazosida skalyar ko‘paytmani saqlaydi, ya’ni ixtiyoriy $x, y \in V$ uchun $(Ux, Uy) = (x, y)$.

Aksincha, skalyar ko‘paytmani saqlovchi xar qanday U chiziqli almashtirish unitar almashtirish bo‘ladi.

Haqiqatdan ham, agar $U^* U = E$ bo‘lsa, u holda

$$(Ux,Uy) = (x,U^{*}Uy) = (x,Ey) = (x,y).$$

Agar xar qanday x va y vektorlar uchun

$$(Ux,Uy) = (x,y)$$

bo‘lsa, u holda

$$(x,Ey) = (x,y) = (Ux,Uy) = (x,U^{*}Uy).$$

Bichiziqli formalarning tengligidan mos almashtirishlar tengligi kelib chiqadi, shuning uchun $U^{*}U = E,$ ya’ni U unitar almashtirish.

Xususiy holda $x = y$ bo‘lganda, $(U^{*}x,Ux) = (x,x)$ tenglik unitar, almashtirishlar vektorning uzunligini o‘zgartirmasligini bildiradi.

Chiziqli almashtirishning unitar almashtirish bo‘lish shartini uning matritsasi orqali ifodalaymiz. Buning uchun biror $e_1, e_2, ..., e_n$ ortonormal bazis olib, bu bazisda U almashtirishning matritsasini yozamiz:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots. & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \tag{31.2}$$

U holda U^{*} qo‘shma almashtirishning $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisdagi matritsasi

$$\begin{pmatrix} \overline{a}_{1,1} & \overline{a}_{2,1} & \dots & \overline{a}_{n,1} \\ \overline{a}_{1,2} & \overline{a}_{2,2} & \dots & \overline{a}_{n,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{a}_{1,n} & \overline{a}_{2,n} & \dots & \overline{a}_{n,n} \end{pmatrix} \tag{31.3}$$

ko‘rinishida bo‘ladi.

Chiziqli almashtirishning $UU^{*} = E$ unitarlik sharti (31.2) va (31.3) matritsalar ko‘paytmasi birlik matritsaga teng bo‘lishini bildiradi. Agar ularni ko‘paytirib, ko‘paytma elementlarini birlik matritsaning mos elementlariga tenglasak,

$$\sum_{s=1}^{n} a_{i,s}\bar{a}_{i,s} = 1, \ \sum_{s=1}^{n} a_{i,s}\bar{a}_{k,s}, \ (i \neq k) \tag{31.4}$$

munosabatlarga ega bo‘lamiz. Demak, ortonormal bazisda $UU^* = E$ shart chiziqli almashtirish matritsasining biror satr elementlari bilan boshqa yo‘l elementlari qo‘shma elementlariga ko‘paytmalarining yig‘indisi nolga teng, har qanday satr elementlari modullarining kvadratlari yig‘indisi esa 1 ga teng ekanligini bildiradi.

Ikkinchi tomondan esa, $U^*U = E$ shartdan

$$\sum_{s=1}^{n} a_{s,i}\bar{a}_{s,i} = 1, \ \sum_{s=1}^{n} a_{s,i}\bar{a}_{s,k}, \ (i \neq k) \tag{31.5}$$

tengliklarga ega bo‘lamiz. Bu tengliklar (31.4) tenglikka o‘xshash bo‘lib, bunda matritsaning yo‘llari o‘rnida uning ustunlari qatnashadi.

Unitar almashtirishlarning geometrik ma’nosi shundan iboratki, chiziqli almashtirish unitar almashtirish bo‘lishi uchun u ortonormal bazisni yana ortonormal bazisga o‘tkazishi zarur va yetarlidir.

Haqiqatan ham, $e_1, e_2, ..., e_n$ ortonormal basizda

$$Ue_i = a_{1,i}e_1 + a_{2,i}e_2 + ... + a_{n,i}e_n, \ 1 \leq i \leq n$$

bo‘lsin. U holda

$$(Ue_i, Ue_k) = (a_{1,i}e_1 + ... + a_{n,i}e_n, \ a_{1,k}e_1 + ... + a_{n,k}e_n) = \sum_{s=1}^{n} a_{s,i}\bar{a}_{s,j}.$$

Yuqoridagi (31.5) tengliklardan esa,

$$(Ue_i, Ue_i) = 1, \ (Ue_i, Ue_k) = 0, (i \neq k)$$

kelib chiqadi.

31.10-lemma. Unitar almashtirishning xos sonlari moduli 1 ga teng.

Isbot. Aytaylik, x vektor U unitar almashtirishning xos vektori va λ esa unga mos keluvchi xos son bo‘lsin, ya’ni

$$Ux = \lambda x, \ \ x \neq 0.$$

Bu holda

$$(x, x) = (Ux, Ux) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda\overline{\lambda}(x, x),$$

ya’ni $\lambda\overline{\lambda} = 1$, demak, $|\lambda| = 1$. □

31.11-lemma. Aytaylik, e vektor U unitar chiziqli almashtirishning xos vektori bo‘lsin. $V_1 = \{x \in V \mid (x, e) = 0\}$ to‘plam U almashtirishga nisbatan $(n-1)$ o‘lchamli invariant qism fazo bo‘ladi.

Isbot. Aytaylik, e vektor U unitar chiziqli almashtirishning xos vektori va $x \in V_1$ bo‘lsin. U holda $Ue = \lambda e$ va $(x, e) = 0.$ Unitar almashtirishning xos soni moduli 1 ga teng ekanligidan $\lambda \neq 0$ ga ega bo‘lamiz va quyidagi tengliklardan

$$(Ux, Ue) = (Ux, \lambda e) = \lambda(Ux, e),$$

$$(Ux, Ue) = (x, U^*Ue) = (x, e) = 0$$

$(Ux, e) = 0$ ekanligi kelib chiqadi, ya’ni $Ux \in V_1$. Demak, V_1 qism fazo U ga nisbatan invariant qism fazo ekan. □

31.12-teorema. n o‘lchamli Yevklid fazosidagi U unitar chiziqli almashtirish n ta juft-jufti bilan ortogonal bo‘lgan xos vektorlarga ega.

Isbot. Avvalgi mavzulardan ma’lumki, U unitar almashtirish ham hech bo‘lmaganda bitta xos vektorga ega. Aytaylik, e_1 xos vektor bo‘lsin, u holda 31.11-lemmaga ko‘ra, V chiziqli fazoning e_1 ga ortogonal vektorlaridan iborat bo‘lgan $(n-1)$ o‘lchamli V_1 qism fazo U ga nisbatan invariant bo‘ladi.

Bu V_1 qism fazoda ham U almashtirish kamida bitta $e_2 \in V_1$ xos vektorga ega. V_2 orqali V_1 qism fazoning e_2 ga ortogonal barcha vektorlaridan iborat bo‘lgan invariant qism fazoni belgilaymiz. Bu jarayonni davom ettirish natijasida

$$V \supset V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_{n-1}$$

invariant qism fazolarni va bu qism fazolarda yotuvchi juft-jufti bilan ortogonal $e_1, e_2, ..., e_n$ xos vektorlarni hosil qilamiz. □

31.13-teorema. n o‘lchamli V fazoda ixtiyoriy U unitar almashtirish uchun shunday ortonormal bazis mavjudki, bu bazisda U almashtirishning matritsasi diagonal shaklda bo‘lib, dioganal elementlari modullari 1 ga teng bo‘lgan sonlardan iborat bo‘ladi.

Isbot. Aytaylik, U unitar almashtirish bo‘lsin. Avvalgi teoremada hosil qilingan n ta juft-jufti bilan ortogonal bo‘lgan vektorlarni bazis sifatida olaylik. U holda,

$$Ue_1 = \lambda_1 e_1,$$

$$Ue_2 = \lambda_2 e_2,$$

$$.................,$$

$$Ue_n = \lambda_n e_n.$$

Demak, $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisda U almashtirishning matritsasi dioganal ko‘rinishga keladi. 31.5-lemmaga muvofiq $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sonlarning modullari 1 ga tengdir. □

Ta’kidlash joizki, 31.13-teoremaning teskarisi ham o‘rinlidir, ya’ni, agar biror ortonormal bazisda U almashtirishning matritsasi dioganal ko‘rinishga kelib, dioganalda turgan sonlarning moduli birga teng bo‘lsa, u holda U unitar almashtirishdir.

O‘rin almashuvchi almashtirishlar. Biz yuqorida ixtiyoriy o‘z-o‘ziga qo‘shma yoki unitar chiziqli almashtirishlar uchun ularning matritsasini diagonal shaklga keltiruvchi ortonormal bazis mavjud ekanligini ko‘rsatdik.

Bir necha o‘z-o‘ziga qo‘shma almashtirishlar uchun ularni bir vaqtning o‘zida dioganal ko‘rinishga keltiruvchi bitta umumiy bazis mavjudmi degan savol tug‘ilishi tabiiy. Qanday shartlar bajarilganda bir nechta chiziqli almashtirishning matritsasini diagonal shaklga keltirishni o‘rganaylik. Birinchi navbatda almashtirishlar ikkita bo‘lgan holni qaraymiz.

31.15-lemma. Agar A va B chiziqli almashtirishlar o‘rin almashuvchi (ya’ni $AB = BA$) bo‘lsa, u holda A almashtirishning berilgan λ xos soniga mos bo‘lgan barcha xos vektorlariga tortilgan qism fazo B almashtirishga nisbatan invariant qism fazo bo‘ladi.

Isbot. Aytaylik, λ xos son va x xos vektor bo‘lsin, ya’ni $Ax = \lambda x$. U holda Bx vektorni ham shu λ xos soniga mos keluvchi xos vektor ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun $AB = BA$ ekanligidan foydalanib,

$$A(Bx) = ABx = BAx = B(Ax) = B(\lambda x) = \lambda Bx$$

ekanligini hosil qilamiz. Bu esa Bx vektor ham A chiziqli almashtirishning λ xos songa mos keluvchi xos vektori ekanligini bildiradi.

□

31.16-lemma. O‘rin almashuvchi A va B chiziqli almashtirishlar umumiy xos vektorga ega.

Isbot. Aytaylik, A va B o‘rin almashuvchi chiziqli almashtirishlar bo‘lsin, ya’ni $AB = BA$. A chiziqli almashtirishning biror λ xos soniga mos bo‘lgan barcha xos vektorlarga tortilgan qism fazoni V_λ orqali belgilaylik.

31.15-lemmaga asosan, V_λ qism fazo B almashtirishga nisbatan invariant. Shu sababli V_λ qism fazoda B chiziqli almashtirishning kamida bitta xos vektori mavjud. Aytaylik, $x_0 \in V_\lambda$ vektor B chiziqli almashtirishning xos vektori bo‘lsin. Bu vektor A uchun ham xos vektor bo‘ladi, chunki V_λ ning barcha vektorlari A uchun xos vektordir.

□

Eslatma. Umuman olganda, $AB = BA$ ekanligidan, A chiziqli almashtirishning ixtiyoriy xos vektori, B uchun ham xos vektor bo‘lishi kelib chiqmaydi. Masalan, A sifatida birlik E almashtirishni olsak, u holda bu almashtirish uchun xar qanday x vektor xos vektor bo‘ladi. Lekin, x vektor barcha o‘rin almashtirishlar uchun ham xos vektor bo‘lavermaydi.

31.17-teorema. Aytaylik, A va B chiziqli almashtirishlar n o‘lchamli V kompleks fazoda o‘z-o‘ziga qo‘shma chiziqli almashtirishlar bo‘lsin. A va B chiziqli almashtirishlarni bir vaqtning o‘zida diagonal shaklga keltiruvchi ortogonal bazis mavjud bo‘lishi uchun, ularning o‘rin almashuvchi bo‘lishi zarur va yetarli.

Isbot. *Yetarliligi*. Aytaylik, $AB = BA$ bo‘lsin, u holda, 31.16-lemmaga ko‘ra A va B chiziqli almashtirishlar umumiy e_1 vektorga ega, ya’ni

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1, \ Be_1 = \mu_1 e_1.$$

Bu e_1 vektorga ortogonal bo‘lgan $(n-1)$ o‘lchamli V_1 qism fazo A uchun ham, B uchun ham invariant bo‘ladi. A hamda B almashtirishlarni faqat V_1 fazoda qarab, yana 31.16-lemmani qo‘llasak, V_1 fazoda yotuvchi umumiy e_2 xos vektorni hosil qilamiz, ya’ni

$$Ae_2 = \lambda_2 e_2, \ Be_2 = \mu_2 e_2.$$

Bu jarayonni davom ettirib, V_1 ning e_2 vektorga ortogonal bo‘lgan vektorlardan iborat $(n-2)$ o‘lchamli qism fazoni V_2 kabi belgilaymiz. V_2 fazo ham A va B ga nisbatan invariant bo‘lganligi uchun umumiy e_3 xos vektor mavjud.

Jarayonni n marotaba takrorlash natijasida, A va B chiziqli almashtirishlar xar ikkalasining xos vektori bo‘lgan, juft-jufti bilan ortogonal $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlarni hosil qilamiz, ya’ni

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \ Be_i = \mu_i e_i, \ 1 \le i \le n.$$

Ushbu $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlarni V fazoning bazisi sifatida qabul qilsak, u holda A va B chiziqli almashtirishlarning xar ikkalasi bu bazisda diagonal shaklga keladi.

Zaruriyligi. Biror ortogonal bazisda A va B chiziqli almashtirishlarning matritsalari diagonal shaklda bo‘lsin. Xar qanday diagonal matritsalarning o‘zaro o‘rin almashuvchi ekanligidan va biror bazisda almashtirishlarning matritsalari o‘rin almashuvchi bo‘lsa, u holda almashtirishlarning o‘zlari ham o‘rin almashuvchi bo‘lishidan $AB = BA$ tenglik kelib chiqadi. □

Ta’kidlash joizki, yuqoridagi kabi U_1 va U_2 o‘rin almashuvchi unitar almashtirishlar uchun ham ularning matritsalarini birdaniga diagonal shaklga keltiruvchi umumiy bazis mavjud.

Eslatma. 31.17-teoremani juft-jufti bilan o‘rin almashuvchi o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘lgan bir nechta chiziqli almashtirishlar uchun umumlashtirish mumkin. Buning uchun 31.17-teorema isbotini so‘zma-so‘z takrorlash kifoya, faqat 31.16-lemma o‘rniga quyidagi lemmadan foydalaniladi.

31.18-lemma. Juft-jufti bilan o‘rin almashuvchi chiziqli almashtirishlar to‘plami umumiy xos vektorga ega.

Isbot. Isbotni vektor fazoning o‘lchamiga nisbatan induksiya usulini qo‘llash orqali ko‘rsatamiz. Bir o‘lchamli $(n=1)$ fazo uchun lemmaning to‘g‘riligi o‘z-o‘zidan ravshan. O‘lchami n dan kichik bo‘lgan fazolar uchun lemma isbot etilgan deb faraz qilib, uni n o‘lchamli fazo uchun isbotlaymiz.

Agar V fazoning ixtiyoriy vektori $A_1, A_2, ..., A_p$ chiziqli almashtirishlar uchun xos vektor bo‘lsa, u holda lemma shu bilan isbot bo‘ladi.

Shuning uchun, hech bo‘lmaganda bitta vektor qaralayotgan almashtirishlardan birontasi uchun, masalan, A_1 uchun xos vektor emas deb faraz qilamiz. A_1 almashtirishning biror λ xos soniga mos bo‘lgan barcha xos vektorlardan tashkil topgan fazoni V_1 bilan belgilaylik. 31.15-lemmaga muvofiq, V_1 qism fazo $A_2, ..., A_p$ chiziqli almashtirishlarga nisbatan invariant. Shu bilan birga $V_1 \neq 0$ va V dan farqli bo‘lganligi uchun, $\dim(V_1) \leq n-1$. Induksiya faraziga ko‘ra, o‘lchami n dan kichik fazolar uchun teorema o‘rinli. Demak, V_1 fazoda $A_1, A_2, ..., A_p$ almashtirishlarning umumiy xos vektori mavjud.

□

Normal almashtirishlar. Yuqorida biz o‘z-o‘ziga qo‘shma va unitar almashtirishlarni biror ortonormal bazisda diagonal shaklga keltirish mumkinligini ko‘rsatdik. Shu bilan birga o‘z-o‘ziga qo‘shma almashtirishlar matritsalarining diagonal shaklida diagonalda faqat haqiqiy sonlar, unitar almashtirishlarda esa moduli birga teng bo‘lgan kompleks sonlar bo‘lishini isbot qildik. O‘z-o‘zidan ma’lumki, matritsasi diagonal ko‘rinishga kelib, lekin diagonalida haqiqiy bo‘lmagan, moduli birdan farqli kompleks sonlar ishtirok etsa, bunday chiziqli almashtirish unitar ham o‘z-o‘ziga qo‘shma ham bo‘lmaydi.

22.19-ta’rif. Agar A chiziqli almashtirish uchun $AA^* = A^*A$ shart bajarilsa, A normal chiziqli almashtirish deyiladi.

Ta’kidlash joizki, unitar va o‘z-o‘ziga qo‘shma chiqizli almashtirishlar ham normal almashtirishning xususiy holi bo‘ladi.

31.20-teorema. A chiziqli almashtirishning matritsasi biror ortonormal bazisda diagonal ko‘rinishiga kelishi uchun uning normal bo‘lishi zarur va yetarli.

Isbot. *Zaruriylik.* Biror ortonormal bazisda A almashtirish matritsasi diagonal shaklda bo‘lsin:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Bazis ortonormal bo‘lganligi uchun, A^* almashtirishning matritsasi

$$\begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

A va A^* almashtirishlarning matritsalari diagonal shaklda bo‘lganligi uchun ular o‘rin almashinuvchidir. Shuning uchun A hamda A^* almashtirishlarning o‘zlari ham o‘rin almashuvchi bo‘ladi, ya’ni $AA^* = A^*A$.

Yetarlilik. Aytaylik, A normal chiziqli almashtirish bo‘lsin, ya’ni $AA^* = A^*A$. A va A^* almashtirishlar o‘rin almashuvchi bo‘lgani uchun 31.16-lemmaga ko‘ra ular umumiy e_1 xos vektorga ega, ya’ni

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1,\ A^* e_1 = \mu_1 e_1.$$

Ushbu e_1 vektorga ortogonal bo‘lgan vektorlardan iborat $(n-1)$ o‘lchamli V_1 qism fazo A ga nisbatan ham, A^* ga nisbatan ham invariantdir. Haqiqatan ham, $x \in V_1$ ya’ni $(x, e_1) = 0$ bo‘lsin. U holda

$$(Ax, e) = (x, A^* e) = (x, \mu_1 e_1) = \overline{\mu_1}(x, e_1) = 0,$$

$$(A^* x, e) = (x, Ae) = (x, \lambda_1 e_1) = \overline{\lambda_1}(x, e_1) = 0,$$

ya’ni $Ax, A^* x \in V_1$.

Bu invariant V_1 qism fazoga yana 31.16-lemmani tatbiq qilsak, bir vaqtning o‘zida A va A^* almashtirishlar uchun xos vektor bo‘lgan $e_2 \in V_1$ mavjud ekanligini topamiz.

V_2 orqali V_1 qism fazoning e_2 ga ortogonal bo‘lgan vektorlaridan iborat $(n-2)$ o‘lchamli qism fazoni belgilab, bu jarayonni n marotaba takrorlasak, A va A^* chiziqli almashtirishlarning xar ikkalasi uchun xos vektor bo‘lgan n ta juft-jufti bilan ortogonal $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlarni hosil qilamiz. Bu $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlar A ni ham, A^* ni ham diagonal shaklga keltiradigan ortogonal bazisni tashkil qiladi.

□

32 - §. Haqiqiy Yevklid fazosida chiziqli almashtirishlar

Biz ushbu mavzuda haqiqiy fazodagi chiziqli almashtirishlarni batafsil o‘rganamiz. Biror V haqiqiy chiziqli fazo va A chiziqli almashtirish berilgan bo‘lsin.

32.1-teorema. Haqiqiy chiziqli fazodagi xar qanday chiziqli almashtirish uchun bir yoki ikki o‘lchamli invariant qism fazo mavjud.

Isbot. Aytaylik, V chiziqli fazoda $e_1, e_2, ..., e_n$ bazis berilgan bo‘lib, A chiziqli almashtirishning ushbu bazisdagi matritsasi $(a_{i,k})$ bo‘lsin.

Quyidagi tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\begin{cases} a_{1,1}\xi_1 + a_{1,2}\xi_2 + ... + a_{1,n}\xi_n = \lambda\xi_1, \\ a_{2,1}\xi_1 + a_{2,2}\xi_2 + ... + a_{2,n}\xi_n = \lambda\xi_2, \\ ...., \\ a_{n,1}\xi_1 + a_{n,2}\xi_2 + ... + a_{n,n}\xi_n = \lambda\xi_n. \end{cases} \qquad (32.1)$$

Bu sistemaning noldan farqli $(\xi_1^0, \xi_2^0, ..., \xi_n^0)$ yechimini izlaymiz. Ma’lumki, sistemaning noldan farqli yechimi

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & ... & a_{2,n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n,1} & a_{n,2} & ... & a_{n,n}-\lambda \end{vmatrix}$$

determinant faqat nolga teng bo‘lgan holdagina mavjud.

Bu determinantni nolga tenglab, λ ga nisbatan n-darajali, haqiqiy koeffitsientli tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama haqiqiy ildizga ega bo‘lishi yoki ega bo‘lmasligi mumkin. Agar tenglama haqiqiy ildizga ega bo‘lmasa, ixtiyoriy ko‘phad kamida bitta kompleks ildizga ega bo‘lganligi uchun bu tenglama ham kompleks ildizga ega bo‘ladi. Demak, biz quyidagi ikkita holni ko‘rib chiqamiz.

a) $P(\lambda)$ ko‘phad haqiqiy ildizga ega bo‘lib, λ_0 uning haqiqiy ildizi bo‘lsin. Bu holda (32.1) sistemaning noldan farqli $(\xi_1^0, \xi_2^0, ..., \xi_n^0)$ yechimi mavjud bo‘ladi.

Koordinatalari $\xi_1^0, \xi_2^0, ..., \xi_n^0$ sonlardan iborat bo‘lgan $x = \xi_1^0 e_1 + \xi_2^0 e_2 + ... + \xi_n^0 e_n$ vektorni tanlasak, bu vektor uchun

$$Ax = \lambda_0 x$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Demak, $V_1 =< x >$ fazo bir o‘lchamli invariant qism fazo bo‘ladi.

b) $P(\lambda)$ ko‘phad haqiqiy ildizga ega bo‘lmasin, u holda bu ko‘phad $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ kompleks ildizga ega. U holda (32.1) chiziqli tenglamalar sistemasi ham noldan farqli kompleks ildizga ega bo‘ladi. Aytaylik,

$$\xi_1 + i\nu_1,\ \xi_2 + i\nu_2, ..., \xi_n + i\nu_n$$

kompleks sonlar (32.1) sistemaning noldan farqli yechimi bo‘lsin. Bu sonlarni sistemaga qo‘yib, sistemadagi xar bir tenglamaning haqiqiy va mavhum qismlarini ajratsak, mos ravishda quyidagi sistemalarga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} a_{1,1}\xi_1 + a_{1,2}\xi_2 + ... + a_{1,n}\xi_n = \alpha\xi_1 - \beta\nu_1, \\ a_{2,1}\xi_1 + a_{2,2}\xi_2 + ... + a_{2,n}\xi_n = \alpha\xi_2 - \beta\nu_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,1}\xi_1 + a_{n,2}\xi_2 + ... + a_{n,n}\xi_n = \alpha\xi_n - \beta\nu_n \end{cases} \tag{32.2}$$

va

$$\begin{cases} a_{1,1}\nu_1 + a_{1,2}\nu_2 + ... + a_{1,n}\nu_n = \alpha\nu_1 + \beta\xi_1, \\ a_{2,1}\nu_1 + a_{2,2}\nu_2 + ... + a_{2,n}\nu_n = \alpha\nu_2 + \beta\xi_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n,1}\nu_1 + a_{n,2}\nu_2 + ... + a_{n,n}\nu_n = \alpha\nu_n + \beta\xi_n. \end{cases} \tag{32.3}$$

Endi koordinatalari mos ravishda $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ va $(\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$ lardan iborat bo‘lgan x va y vektorlarni qaraymiz. U holda (32.2) va (32.3) munosabatlarni quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} Ax &= \alpha x - \beta y, \\ Ay &= \alpha y + \beta x. \end{aligned} \tag{32.4}$$

Bu tenglikdan x va y vektorlardan tashkil topgan ikki o‘lchamli qism fazo A ga nisbatan invariant ekanligini ko‘rish mumkin. □

Yuqoridagi teoremadan o‘lchami toq songa teng bo‘lgan haqiqiy fazoda ixtiyoriy chiziqli almashtirish bir o‘lchamli invariant qism fazoga ega ekanligi kelib chiqadi.

Endi haqiqiy Yevklid fazosida o‘z-o‘ziga qo‘shma almashtirish tushunchasini kiritamiz.

32.2-ta’ rif. Agar ixtiyoriy x va y vektorlar uchun

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

shart bajarilsa, A haqiqiy chiziqli almashtirish o‘z-o‘ziga qo‘shma almashtirish deyiladi.

Haqiqiy Yevklid fazosida $e_1, e_2, ..., e_n$ ortonormal bazis berilgan bo‘lib, bu bazisda A o‘z-o‘ziga qo‘shma chiziqli almashtirishning matritsasi $(a_{i,k})$ bo‘lsin.

Yevklid fazosidan

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n, \;\; y = \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2 + ... + \nu_n e_n$$

vektorlarni olib, quyidagi skalyar ko‘paytmani qaryamiz,

$$(Ax, y) = (\sum_{k=1}^{n} a_{1,k}\xi_k e_1 + ... + \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}\xi_k e_n,\, \nu_1 e_1 + ... + \nu_n e_n) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1,k}\xi_k \nu_1 + \sum_{k=1}^{n} a_{2,k}\xi_k \nu_2 + ... + \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}\xi_k \nu_n = \sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k}\xi_k \nu_i.$$

Xuddi shunga o‘xshab,

$$(x, Ay) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k}\xi_i \nu_k$$

tenglikni hosil qilamiz. $(Ax,y)=(x,Ay)$ shartdan esa

$$a_{i,k}=a_{k,i}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Demak, chiziqli almashtirish o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘lishi uchun uning ortonormal bazisdagi matritsasi simmetrik bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Bizga $A(x,y)$ simmetrik bichiziqli forma berilgan bo‘lib, biror bazisda quyidagi ko‘rinishga ega bo‘lsin

$$A(x,y)=\sum_{i,k=1}^{n}a_{i,k}\xi_i\nu_k.$$

Bichiziqli formaning simmetrikligidan $a_{i,k}=a_{k,i}$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan esa, ixtiyoriy $A(x,y)$ simmetrik bichiziqli forma uchun

$$A(x,y)=(Ax,y)$$

munosabatni qanoatlantiradigan o‘z-o‘ziga qo‘shma almashtirish mavjud degan xulosaga kelishimiz mumkin.

32.3-lemma. Ixtiyoriy o‘z-o‘ziga qo‘shma almashtirish uchun bir o‘lchamli invariant qism fazo mavjud.

Isbot. Lemmani isbotlash uchun $P(\lambda)$ xarakteristik ko‘phadning haqiqiy ildizi mavjud ekanligini ko‘rsatish kifoya. Chunki, 32.l-teoremaga muvofiq, λ haqiqiy xos songa bir o‘lchamli invariant qism fazo mos keladi.

Faraz qilaylik, $P(\lambda)$ xarakteristik ko‘phad faqat kompleks ildizlarga ega bo‘lib, $\lambda=\alpha+i\beta$ uning kompleks ildizlaridan biri bo‘lsin.

32.1-teoremani isbot qilishda λ uchun ikkita x va y vektorlar hosil qilinib, bu vektorlar uchun

$$Ax=\alpha x-\beta y,$$

$$Ay=\beta x+\alpha y$$

tengliklar o‘rinli bo‘lishi ko‘rsatilgan edi.

Quyidagi tengliklarni qaraylik.

$$(Ax, y) = \alpha(x, y) - \beta(y, y),$$

$$(x, Ay) = \beta(x, x) + \alpha(x, y).$$

$(Ax, y) = (x, Ay)$ ekanligini hisobga olib, bu tengliklarning ikkinchisidan birinchisini ayirsak,

$$0 = 2\beta[(x, x) + (y, y)]$$

hosil bo‘ladi. $(x, x) + (y, y) \neq 0$ bo‘lganligi uchun $\beta = 0$ ekanligi kelib chiqadi, bu esa λ ildiz haqiqiy son ekanligini bildiradi. □

32.4-lemma. A o‘z-o‘ziga qo‘shma almashtirish, e esa uning xos vektori bo‘lsin. U holda $V' = \{x \in V \mid (x, e) = 0\}$, ya’ni e ga ortogonal bo‘lgan vektorlar to‘plami $(n-1)$ o‘lchamli invariant qism fazo tashkil qiladi.

Isbot. Berilgan e xos vektorga ortogonal bo‘lgan V' vektorlar to‘plami $(n-1)$ o‘lchamli qism fazo tashkil etishi ravshan. Biz V' qism fazo A almashtirishga nisbatan invariant ekanligini ko‘rsatamiz.

Aytaylik, $x \in V'$, ya’ni $(x, e_1) = 0$ bo‘lsin, u holda

$$(Ax, e_1) = (x, Ae_1) = (x, \lambda e_1) = \lambda(x, e_1) = 0,$$

ya’ni $Ax \in V'$. □

32.5-teorema. Ixtiyoriy o‘z-o‘ziga qo‘shma chiziqli almashtirish uchun shunday ortonormal bazis mavjudki, bu bazisda almash-tirishning matritsasi diagonal shaklda bo‘ladi.

Isbot. Aytaylik, A o‘z-o‘ziga qo‘shma chiziqli almashtirish bo‘lsin. 32.3-lemmaga asosan, A almashtirish kamida bitta $e_1 \in V$ xos vektorga ega. e_1 xos vektorga ortogonal bo‘lgan vektorlardan iborat V' qism fazo A almashtirishga nisbatan invariant bo‘lgaligi uchun, bu qism fazoda yotuvchi $e_2 \in V'$ xos vektor mavjud. Bu jarayonni n marotaba davom ettirish natijasida, juft-jufti bilan ortogonal bo‘lgan

$e_1, e_2, ..., e_n$ xos vektorlarni hosil qilamiz. Ularni V fazodagi bazis sifatida olsak, u holda

$$Ae_i = \lambda_i e_i,\ 1 \le i \le n$$

bo‘lgaligi uchun, bu bazisda A almashtirish matritsasi

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. □

Ortogonal bazisda kvadratik formani kvadratlar yig‘indisiga keltirish. Bizga n o‘lchamli V Yevklid fazosida $A(x, y)$ simmetrik bichiziqli forma berilgan bo‘lsin. Yuqorida ko‘rsatilganidek, xar bir $A(x, y)$ simmetrik bichiziqli formaga $A(x, y) = (Ax, y)$ munosabatni qanoatlantiruvchi o‘z-o‘ziga qo‘shma A chiziqli almashtirish mos keladi.

32.5-teoremaga asosan, A almashtirishning xos vektorlaridan iborat bo‘lgan $e_1, e_2, ..., e_n$ ortonormal bazis mavjud. Bu bazisda simmetrik bichiziqli forma quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$A(x, y) = (Ax, y) = (A(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n), \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2 + ... + \nu_n e_n) =$$

$$= (\lambda_1 \xi_1 e_1 + \lambda_2 \xi_2 e_2 + ... + \lambda_n \xi_n e_n, \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2 + ... + \nu_n e_n) =$$

$$= \lambda_1 \xi_1 \nu_1 + \lambda_2 \xi_2 \nu_2 + ... + \lambda_n \xi_n \nu_n.$$

Agar $y = x$ deb olsak,

$$A(x, x) = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + ... + \lambda_n \xi_n^2$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Demak, biz quyidagi xulosaga kelishimiz mumkin.

32.6-teorema. Yevklid fazosida berilgan ixtiyoriy $A(x,x)$ kvadratik forma uchun shunday ortonormal bazis mavjudki, bu bazisda kvadratik forma quyidagi koʻrinishga keladi:

$$A(x,x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i^2.$$

Ushbu kanonik koʻrinishdagi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ koeffitsientlar A chiziqli almashtirishning xos qiymatlari boʻlgaligi uchun, ularni $(a_{i,k})$ matritsa xarakteristik tenglamasining ildizlaridan iborat boʻladi. Demak, kvadratik formani kanonik koʻrinishga keltirish uchun uning matritsasi xarakteristik tenglamasi ildizlarini topish yetarli ekan.

Endi ikkita kvadratik formani bir vaqtning oʻzida kanonik koʻrinishga keltiruvchi bazis haqida gaplashamiz. n oʻlchamli V fazoda ikkita $A(x,x)$ va $B(x,x)$ kvadratik formalar berilgan boʻlsin.

32.7-teorema. Agar $A(x,x)$ va $B(x,x)$ kvadratik formalarning bittasi musbat aniqlangan boʻlsa, bu kvadratik formalarni xar ikkalasini bir vaqtda kanonik koʻrinishga keltiruvchi bazis mavjud.

Isbot. Faraz qilaylik, $B(x,x)$ kvadratik forma musbat aniqlangan boʻlsin. Bu kvadratik formaga mos boʻlgan $B(x,y)$ simmetrik bichiziqli formani qarab,

$$(x,y)=B(x,y)$$

formula orqali V fazoda skalyar koʻpaytma aniqlaymiz.

32.7-teoremagaga koʻra, V da shunday $e_1, e_2, ..., e_n$ ortonormal bazis mavjudki, bu bazisda $A(x,x)$ kvadratik forma kanonik koʻrinishga keladi, ya’ni

$$A(x,x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i^2.$$

Ortonormal bazisda skalyar koʻpaytma

$$(x,x)=B(x,x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$$

ko‘rinishga ega bo‘lganligi uchun $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisda ikkala kvadratik forma ham kanonik ko‘rinishda yoziladi. □

32.8-ta’rif. Agar n o‘lchamli haqiqiy Yevklid fazosidagi A chiziqli almashtirish vektorlarning skalyar ko‘paytmasini saqlasa, ya’ni ixtiyoriy $x, y \in V$ uchun

$$(Ax, Ay) = (x, y)$$

bo‘lsa, A chiziqli almashtirish ortogonal almashtirish deyiladi.

Agar yuqoridagi tenglikda $x = y$ deb olsak

$$|Ax|^2 = |x|^2$$

hosil bo‘ladi, ya’ni ortogonal almashtirish vektorlar uzunligini saqlaydi.

Bundan tashqari, vektorlar orasidagi burchak

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{|x||y|}$$

kabi aniqlangani va bu ifodaning surati ham, maxraji ham ortogonal almashtirish natijasida o‘zgarmaganligi uchun, ortogonal almashtirish vektorlar orasidagi burchakni ham saqlaydi.

Bundan esa, A ortogonal almashtirish ortonormal bazisni ortonormal bazizga o‘tkazishi kelib chiqadi, ya’ni ortogonal almashtirish vektorlar orasidagi burchakni hamda ularning uzunliklarini saqlaganligi uchun $e_1, e_2, ..., e_n$ ortonormal bazis $Ae_1, Ae_2, ..., Ae_n$ ortonormal bazisga o‘tadi. Demak,

$$(Ae_i, Ae_k) = \begin{cases} 1, \text{ agar } i = k, \\ 0, \text{ agar } i \neq k. \end{cases} \tag{32.5}$$

Aytaylik, A chiziqli almashtirishning biror $e_1, e_2, ..., e_n$ ortonormal bazisdagi matritsasi $A = (a_{i,k})$ bo‘lsin. Bu matritsaning ustunlari Ae_i vektorlar koordinatalaridan iborat bo‘lganligi uchun (32.5) shart quyidagicha yoziladi:

$$\sum_{s=1}^{n} a_{s,i} a_{s,k} = \begin{cases} 1, \text{ agar } i = k, \\ 0, \text{ agar } i \neq k. \end{cases} \qquad (32.6)$$

Agar (32.6) shartni matritsa shaklida yozadigan bo‘lsak, $\sum_{s=1}^{n} a_{s,i} a_{s,k}$ yig‘indi matritsa bilan uni transponirlash natijasida hosil bo‘lgan matritsa ko‘paytmasining elementlarini beradi. Demak, (32.6) shartdan ortogonal almashtirish matritsasi bilan uni transponirlashdan hosil bo‘lgan matritsaning ko‘paytmasi birlik matritsaga teng ekanligi kelib chiqadi, ya’ni

$$A \cdot A^T = E.$$

Matritsalar ko‘paytmasining determinanti ularning determinantlari ko‘paytmasiga teng bo‘lgani uchun, ortogonal almashtirish matritsasi determinantining kvadrati 1 ga teng bo‘lishiga, ya’ni ortogonal almashtirish matritsasining determinanti ± 1 ekanligiga ega bo‘lamiz.

Determinanti 1 ga teng bo‘lgan ortogonal almashtirishlar xos ortogonal almashtirishlar, –1 ga teng bo‘lgan almashtirishlar esa xosmas ortogonal almashtirishlar deyiladi.

Endi ortogonal almashtirishni bir va ikki o‘lchamli fazolarda tekshiraylik.

Aytaylik, e vektor bir o‘lchamli fazoni vujudga keltiruvchi vektor, A esa bu fazoda berilgan ortogonal almashtirish bo‘lsin. U holda $Ae = \lambda e$ va A almashtirishning ortogonal ekanligidan $(Ae, Ae) = (e, e)$ kelib chiqadi, demak,

$$\lambda^2 (e, e) = (e, e), \text{ ya'ni } \lambda = \pm 1.$$

Bundan esa bir o‘lchamli fazoda faqat ikkitagina $Ax = x$ va $Ax = -x$ ortogonal almashtirish mavjud ekanligi kelib chiqadi.

Ikki o‘lchamli V fazodagi ortogonal almashtirishlarni o‘rganishga o‘tamiz. Aytaylik, ikki o‘lchamli V fazoda e_1, e_2 bazis va bu bazisdagi matritsasi

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

bo‘lgan A almashtirish berilgan bo‘lsin.

Dastlab, xos ortogonal almashtirishni ko‘rib chiqamiz, ya’ni $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} = 1$ deb faraz qilamiz. Almashtirishning ortogonallik shartidan,

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix}.$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Matritsaning determinanti 1 ga teng bo‘lganligi uchun,

$$\begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

ya’ni, $a_{1,1} = a_{2,2}$, $a_{1,2} = -a_{2,1}$ ekanligi, bundan esa $a_{1,1}^2 + a_{1,2}^2 = 1$ kelib chiqadi. Demak, ikki o‘lchamli fazodagi xos ortogonal almashtirishning matritasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lar ekan:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ -a_{1,2} & a_{1,1} \end{pmatrix},$$

bu yerda $a_{1,1}^2 + a_{1,2}^2 = 1.$

Agar $a_{1,1} = \cos\varphi,$ $a_{1,2} = \sin\varphi$ deb belgilasak, ikki o‘lchamli fazodagi xos ortogonal almashtirishning ortonormal bazisdagi matritsasi quyidagi ko‘rinishga keladi

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Endi A almashtirish xosmas, ya'ni $a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1}=-1$ bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ matritsaning xarakteristik tenglamasi

$$\lambda^2-(a_{1,1}+a_{2,2})\lambda-1=0$$

ko'rinishda bo'ladi. Ushbu tenglama haqiqiy ildizlarga ega bo'lganligi uchun, A almashtirishning e_1 xos vektori mavjud, ya'ni $Ae_1=\lambda_1 e_1$.

Aytaylik, e_2 vektor e_1 vektorga ortogonal bo'lsin. Ortogonal almashtirish vektorlar orasidagi burchakni saqlashidan, $(Ae_2, Ae_1)=0$ ekanligini hosil qilamiz.

$$0=(Ae_2, Ae_1)=(Ae_2, \pm e_1)=\pm(Ae_2, e_1)$$

tenglikdan $(Ae_2, e_1)=0$ kelib chiqadi, $Ae_2=\lambda_2 e_2$.

Demak, ikki o'lchamli fazodagi A xosmas ortogonal almashtirishning e_1, e_2 bazisdagi matritsasi

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \ \lambda_1\lambda_2=-1$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bundan esa matritsani faqat ushbu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kanonik ko'rinishlardagina tasvirlanishi mumkinligi kelib chiqadi.

32.9-teorema. A almashtirish n o'lchamli V Yevklid fazosida ortogonal almashtirish bo'lsin. V da shunday $e_1, e_2, ..., e_n$ ortonormal bazis mavjudki, bu bazisda A almashtirishning matritsasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & & & & \\ & \cdot & & & & & & & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & & & & \\ & & & & -1 & & & & & & & & & \\ & & & & & \cdot & & & & & & & & \\ & & & & & & \cdot & & & & & & & \\ & & & & & & & -1 & & & & & & \\ & & & & & & & & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & & & \\ & & & & & & & & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & & & \\ & & & & & & & & & & \cdot & & & \\ & & & & & & & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & & & & & & & \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\ & & & & & & & & & & & & \sin\varphi_k & \cos\varphi_k \end{pmatrix},$$

bu yerda yozilgan elementlardan boshqa barcha elementlar nolga teng.

Isbot. 32.1-teoremaga muvofiq, V fazodan bir yoki ikki o‘lchamli V' invariant qism fazoni tanlab olish mumkin. Agar bir o‘lchamli V' invariant qism fazo mavjud bo‘lsa, u holda e_1 orqali undagi uzunligi 1 ga teng bo‘lgan vektorni belgilaymiz va A almashtirish uchun $Ae_1 = \pm e_1$ o‘rinli bo‘ladi.

Agar bir o‘lchamli invariant qism fazo mavjud bo‘lmasa, ikki o‘lchamli qism fazoni olamiz va e_1, e_2 vektorlar orqali undagi ortonormal bazisni belgilaymiz. Ma’lumki, ikki o‘lchamli V' qismfa-zodagi ortogonal almashtirish xos almashtirish bo‘ladi, aks holda V' da bir o‘lchamli invariant qism fazo mavjud bo‘ladi.

Demak, V' da A almashtirishning matritsasi

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

ko‘rinishga keladi.

Ushbu V' qism fazoning barcha vektorlariga ortogonal bo‘lgan vektorlardan tuzilgan $\tilde{V}'$ to‘plami yana invariant qism fazo bo‘ladi. Buni ko‘rsatish uchun V' ikki o‘lchamli bo‘lgan holni ko‘rsatish kifoya. Bir o‘lchamli bo‘lgan hol 32.4-lemmaga asosan kelib chiqadi.

Ixtiyoriy $x \in \tilde{V}'$ va $y \in V'$ vektorlar $(x, y) = 0$ ekanligidan

$$(Ax, Ay) = (x, y) = 0$$

kelib chiqadi.

Ixtiyoriy $z \in V'$ elementni $z = Ay,\ \ y \in V'$ ko‘rinishida yozish mumkinligi uchun, barcha $z \in V'$ lar uchun $(Ax, z) = 0$ ekanligiga ega bo‘lamiz, ya’ni $Ax \in \tilde{V}'$. Demak, $\tilde{V}'$ invariant qism fazo.

Ma’lumki, $\tilde{V}'$ fazo o‘lchami $\dim(V') = 1$ bo‘lganida $n-1$ ga, $\dim(V') = 2$ bo‘lganda esa, $n-2$ ga teng bo‘ladi. $\tilde{V}'$ fazo invariant qism fazo bo‘lganligi uchun, u ham yana bir yoki ikki o‘lchamli invariant qism fazoga ega. Endi yuqorida V fazo uchun yuritilgan mulohazalarni $\tilde{V}'$ fazo uchun takrorlaymiz.

Bu jarayonni davom ettirib, chekli qadamdan so‘ng n ta juft-jufti bilan ortogonal, uzunliklari 1 ga teng bo‘lgan vektorlarni hosil qilamiz. Ularni V fazoning bazisi deb qabul qilsak, ushbu bazisdagi almashtirish matritsasi quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$
\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&&&&& \\
& \cdot &&&&&&&&&&&& \\
&& \cdot &&&&&&&&&&& \\
&&& 1 &&&&&&&&&& \\
&&&& -1 &&&&&&&&& \\
&&&&& \cdot &&&&&&&& \\
&&&&&& \cdot &&&&&&& \\
&&&&&&& -1 &&&&&& \\
&&&&&&&& \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 &&&& \\
&&&&&&&& \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 &&&& \\
&&&&&&&&&& \cdot &&& \\
&&&&&&&&&&& \cdot && \\
&&&&&&&&&&&& \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\
&&&&&&&&&&&& \sin\varphi_k & \cos\varphi_k
\end{pmatrix}.
$$

Bunda diagonaldagi 1 va -1 ko‘rinishidagi kataklar bir o‘lchamli invariant qism fazoga,

$$
\begin{pmatrix}
\cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\
\sin\varphi_i & \cos\varphi_i
\end{pmatrix}
$$

ko‘rinishdagi kataklar esa ikki o‘lchamli invariant qism fazoga mos keladi. □

33 - §. Chiziqli almashtirishning normal shakli

Ushbu mavzuda kompleks fazoda berilgan ixtiyoriy almashtirish uchun uning matritsasini birmuncha sodda ko‘rinishga keltiruvchi bazisni ko‘rsatamiz.

Aytaylik n o‘lchamli kompleks fazoda A chiziqli almashtirish berilgan bo‘lsin. Agar A chiziqli almashtirish n ta chiziqli erkli xos vektorlarga ega bo‘lsa, bu xos vektorlani bazis sifatida tanlab, chiziqli almashtirish matritsasi diagonal shaklga keltiriladi. Chiziqli almashtirishning chiziqli erkli xos vektorlari soni n dan kichik bo‘lsa, uning matritsasi diagonal shaklga yaqin bo‘lgan normal shaklga keltiriladi.

Ta’kidlash joizki, n o‘lchamli kompleks fazodagi A chiziqli almashtirish turli hil k ta $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ xos qiymatlarga ega bo‘lsa, u holda A almashtirish k tadan kam bo‘lmagan chiziqli erkli xos vektorlarga ega. Umuman olganda, chiziqli erkli xos vektorlar soni turli xos qiymatlar sonidan katta bo‘lishi mumkin.

33.1-teorema. n o‘lchamli kompleks fazoda ixtiyoriy A chiziqli almashtirish berilgan bo‘lib, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ uning xos sonlari va bu xos sonlarga mos keluvchi $m(m \geq k)$ ta $e_1,\ f_1, ..., h_1$ xos vektorlar bo‘lsin.

U holda

$$e_1, e_2, ..., e_p;\ f_1,\ f_2, ...,\ f_q; ....; h_1, h_2, ..., h_s \qquad (33.1)$$

vektorlardan iborat bazis mavjudki, A almashtirish

$$\begin{aligned}
&Ae_1 = \lambda_1 e_1,\ Ae_2 = e_1 + \lambda_1 e_2,\ ...,\ Ae_p = e_{p-1} + \lambda_1 e_p,\\
&Af_1 = \lambda_2 f_1,\ Af_2 = f_1 + \lambda_2 f_2,\ ...,\ Af_q = f_{q-1} + \lambda_2 f_q,\\
&...,\\
&Ah_1 = \lambda_k h_1,\ Ah_2 = h_1 + \lambda_k h_2,\ ...,\ Ah_s = h_{s-1} + \lambda_k h_s
\end{aligned} \qquad (33.2)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Bu teoremani isbotlashdan avval (33.2) ko‘rinishidagi chiziqli almashtirishlarning xossalarini o‘rganib chiqamiz. Ravshanki, (33.2) ko‘rinishidagi chiziqli almashtirish $e_1, e_2, ..., e_p$ vektorlarni yana shu vektorlarga o‘tkazadi. Xuddi shunday boshqa bazis vektorlar jamlanmasi ham shu vektorlarga o‘tkazadi. Demak, bazis vektorlarning xar bir jamlanmasi A almashtirishga nisbatan invariant qism fazo tashkil qiladi.

Bundan tashqari, xar bir qism fazoda bittadan xos vektor bor. Masalan, $e_1, e_2, ..., e_p$ vektorlarga tortilgan qism fazoda e_1 vektor xos vektor bo‘ladi. Endi bu qism fazolarning xar birida faqat bitta xos vektor bor ekanligini ko‘rsataylik. Haqiqatdan ham, agar $e_1, e_2, ..., e_p$ bazis vektorlardan tuzilgan qism fazoda biror $c_1e_1 + c_2e_2 + ... + c_pe_p$ vektor xos vektor bo‘lsa, u holda

$$A(c_1e_1 + c_2e_2 + ... + c_pe_p) = \lambda(c_1e_1 + c_2e_2 + ... + c_pe_p).$$

Bu tenglikning chap tomoniga (33.2) formuladagi ifodalarini qo‘ysak,

$$c_1\lambda_1e_1 + c_2(e_1 + \lambda_1e_2) + ... + c_p(e_{p-1} + \lambda_1e_p) = c_1\lambda e_1 + c_2\lambda e_2 + ... + c_p\lambda e_p$$

tenglik hosil bo‘ladi. Bundan bazis vektorlarning mos koeffitsientlarini tenglashtirib,

$$\begin{cases} c_1\lambda_1 + c_2 = \lambda c_1, \\ c_2\lambda_1 + c_3 = \lambda c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ c_{p-1}\lambda_1 + c_p = \lambda c_{p-1}, \\ c_p\lambda_1 = \lambda c_p \end{cases}$$

tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz.

Dastlab, $\lambda = \lambda_1$ ekanligini ko‘rsatamiz. Chindan ham, agar $\lambda \neq \lambda_1$ bo‘lsa, $c_p = 0,$ undan yuqoridagi tenglikdan esa $c_{p-1} = 0$ va hokazo, qolgan tengliklardan $c_{p-2} = ... = c_2 = c_1 = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Bu esa $c_1e_1 + c_2e_2 + ... + c_pe_p$ xos vektorning noldan farqli ekanligiga zid. Demak, $\lambda = \lambda_1.$

Endi $\lambda = \lambda_1$ ekanligidan foydalanib, sistemaning birinchi tenglamasidan $c_2 = 0,$ ikkinchidan $c_3 = 0$ va shu tarzda davom etib oxirgi tenglamasidan $c_p = 0$ ekanligini hosil qilamiz. Bundan esa xos vektor c_1e_1 ga teng ekanligi kelib chiqadi. Demak, $e_1, e_2, ..., e_p$ vektorlardan qurilgan qism fazo ko‘paytuvchining aniqligida yagona xos vektorga ega. Xuddi shunday qolgan qism fazolar ham ko‘paytuvchining aniqligida yagona xos vektorga ega eganligi ko‘rsatiladi.

Endi (33.2) ko‘rinishidagi almashtirishning matritsasini yozib olamiz. Xar bir qism fazo invariant qism fazo ekanligidan, chiziqli almashtirish matritsasining birinchi p ta ustunida faqat birinchi p ta satr elementlarigina noldan farqli bo‘lishi kelib chiqadi. Xuddi shunday, keyingi q ta ustunning shu ustunlar nomerlari bilan bir hil nomerli satrlarida turgan elementlarigina noldan farqli bo‘lishi va oxirgi s ta ustun uchun ham shu munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Shunday qilib, berilgan bazisda (33.2) ko‘rinishidagi almashtirish matritsasi bosh diagonal bo‘yicha joylashgan m ta katakdan iborat bo‘lib, bu kataklarning hech biriga tegishli bo‘lmagan elementlarning hammasi nolga teng bo‘ladi.

Bu kataklarda qanday elementlar turishini bilish uchun esa, xar bir vektorlar jamlanmasining qanday almashtirilishini yana bir marta yozish kifoya, masalan,

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1,$$
$$Ae_2 = e_1 + \lambda_1 e_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$Ae_{p-1} = e_{p-2} + \lambda_1 e_{p-1},$$
$$Ae_p = e_{p-1} + \lambda_1 e_p.$$

Bazisning ma’lum almashtirilishiga javob beradigan matritsaning qanday tuzilishini yodga olsak, berilgan vektorlar jamlanmasiga mos bo‘lgan katagi

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \qquad (33.3)$$

ko‘rinishida bo‘lishini topamiz. Ushbu ko‘rinishidagi matritsalarga *Jordan kataklari* deb ataladi.

Butun matritsa esa, mos tartibda, $p, q, ..., s$ tartibli shunga o‘xshash kataklardan tuzilgan, quyidagi ko‘rinishdagi matritsa bo‘ladi

$$\begin{pmatrix}
\lambda_1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\
0 & \lambda_1 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\
0 & 0 & \lambda_1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
0 & 0 & 0 & ... & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\
0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\
0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & ... & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\
0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & ... & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_2 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & ... & \lambda_k & 1 & 0 & ... & 0 \\
0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & \lambda_k & 1 & ... & 0 \\
0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 & \lambda_k & ... & 0 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_k
\end{pmatrix}.$$

Chiziqli almashtirish matritsasining ushbu ko‘rinishiga uning *normal shakli* yoki *Jordan normal shakli* deyiladi. Demak, matritsaning Jordan normal shaklida uning dioganali bo‘ylab bir nechta Jordan kataklari joylashib, qolgan elementlari nolga teng bo‘ladi.

Endi biz 33.1-teoremaning isbotida kerak bo‘ladigan qiyidagi lemmani keltiramiz.

33.2-lemma. n o‘lchamli V kompleks fazoda ixtiyoriy A chiziqli almashtirish uchun kamida bitta $n-1$ o‘lchamli invariant qism fazo mavjud.

Isbot. Berilgan chiziqli almashtirishning qo‘shmasi bo‘lgan A^* almashtirishni qaraylik. Xar qanday almashtirishning xos vektori bo‘lgani kabi, A^* ham *e* xos vektorga ega, ya’ni

$$A^* e = \lambda e.$$

Ushbu *e* vektorga ortogonal vektorlardan tuzilgan $n-1$ o‘lchamli V' qism fazo A almashtirishga nisbatan invariant ekanligini ko‘rsatamiz. Ixtiyoriy $x \in V'$ uchun $(x,e)=0$ ekanligidan

$$(Ax,e)=(x,A^* e)=(x,\lambda e)=\overline{\lambda}\,(x,e)=0$$

kelib chiqadi. Demak, $Ax \in V'$, ya’ni V' qism fazo A almashtirishga nisbatan invariant. □

Endi biz ixtiyoriy chiziqli almashtirishni Jordan normal shaklga keltirish mumkinligi haqidagi 33.1- teoremaning isbotiga o‘tamiz.

33.1-teoremaning isboti. Biz teorema isbotini chiziqli fazoning o‘lchamiga nisbatan induksiya usulini bo‘yicha olib boramiz. Chiziqli fazo bir o‘lchamli bo‘lganda teorema sharti o‘rinli bo‘lishi ravshan.

Chiziqli almashtirish uchun n o‘lchamli fazoda bunday bazis mavjud deb faraz qilib, $n+1$ o‘lchamli fazoda kerakli bazisni topish mumkin ekanligini isbot qilamiz.

A almashtirish $n+1$ o‘lchamli V fazoda ixtiyoriy chiziqli almashtirish bo‘lsin. 33.2-lemmaga asosan, V fazoda A almashtirishga nisbatan invariant bo‘lgan n o‘lchamli V' qism fazo mavjud. Induksiya faraziga ko‘ra, n o‘lchamli fazoda teorema o‘rinli bo‘lgani uchin, V' fazoda chiziqli almashtirishni normal shaklga keltiradigan bazis mavjud. Bu bazisni

$$e_1, e_2, ..., e_p;\ f_1,\ f_2, ...,\ f_q; ....; h_1, h_2, ..., h_s$$

kabi belgilaylik, bu yerda $p+q+...+s=n.$ Ushbu bazisda chiziqli almashtirish quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1,$$
$$Ae_2 = e_1 + \lambda_1 e_2,$$

$$\text{.........................,}$$
$$Ae_p = e_{p-1} + \lambda_1 e_p,$$

$$Af_1 = \lambda_2 f_1,$$
$$Af_2 = f_1 + \lambda_2 f_2,$$
$$\text{.........................,}$$
$$Af_q = f_{q-1} + \lambda_2 f_q,$$

.
.
.

$$Ah_1 = \lambda_k h_1,$$
$$Ah_2 = h_1 + \lambda_k h_2,$$
$$\text{.........................,}$$
$$Ah_s = h_{s-1} + \lambda_k h_s.$$

Bu bazisni $e_1, e_2, ..., e_p;\ f_1,\ f_2, ...,\ f_q; ....; h_1, h_2, ..., h_s$ vektorlar bilan birgalikda V fazoda bazis tashkil qiladigan biror e vektor bilan to‘ldiraylik. Ushbu e vektorga A almashtirishni ta’sir qildirib, Ae vektorni bazis vektorlar bo‘yicha yoyib yozamiz:

$$Ae = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_p e_p + \beta_1 f_1 + ... + \beta_q f_q + ... + \delta_1 h_1 + ... + \delta_s h_s + \tau e.$$

Umimiylikka ziyon yetkazmagan holda, $\tau = 0$ deb olish mumkin. Haqiqatdan ham, agar biror bazisda A chiziqli almashtirish normal shaklda bo‘lsa, u holda $A - \tau E$ almashtirish ham bu bazisda normal shaklda bo‘ladi. Shuning uchun, $\tau \neq 0$ holda A almashtirish o‘rniga $A - \tau E$ almashtirishni qarash mumkin. Demak,

$$Ae = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_p e_p + \beta_1 f_1 + ... + \beta_q f_q + ... + \delta_1 h_1 + ... + \delta_s h_s. \quad (33.4)$$

Endi e vektorni e' vektor bilan Ae' vektor mumkin qadar sodda ko‘rinishda bo‘ladigan qilib almashtiramiz. Buning uchun e' vektorni ushbu ko‘rinishda izlaymiz:

$$e' = e - \chi_1 e_1 - ... - \chi_p e_p - \mu_1 f_1 - ... - \mu_q f_q - ... - \omega_1 h_1 - ... - \omega_s h_s. \quad (33.5)$$

Bundan

$$\begin{aligned} Ae' = Ae - A(\chi_1 e_1 + \ldots + \chi_p e_p) - \\ A(\mu_1 f_1 + \ldots + \mu_q f_q) - \ldots - A(\omega_1 h_1 + \ldots + \omega_s h_s) = \\ = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_p e_p + \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_q f_q + \ldots + \delta_1 h_1 + \ldots + \delta_s h_s - \\ - A(\chi_1 e_1 + \ldots + \chi_p e_p) - \ldots - A(\omega_1 h_1 + \ldots + \omega_s h_s) \end{aligned} \tag{33.6}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Endi $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_p, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q, \ldots, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ koeffitsientlarni tenglikning o‘ng tomoni mumkin qadar kam qo‘shiluvchilar qoladigan qilib tanlashga harakat qilamiz.

Buning uchun $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ xos qiymatlarning hech biri no‘lga teng bo‘lmagan va xos qiymatlarning ba’zilari nolga teng bo‘lgan hollarni alohida ko‘rib chiqamiz.

Aytaylik, xos qiymatlarning hech biri nolga teng bo‘lmasin, ya’ni $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \ldots, \lambda_k \neq 0$. Bu holda e' vektorni $Ae' = 0$ bo‘ladigan qilib tanlab olish mumkin. Haqiqatan ham, A almashtirish V' fazodagi xar bir vektorlar jamlanmasidan tuzilgan qism fazoni shu qism fazoga o‘tkazganligi uchun, $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_p$ koeffitsientlarni tanlash kifoya. Bu vektorlarni o‘z ichiga olgan hadlarni alohida yozib olaylik.

$$\begin{aligned} \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_p e_p - A(\chi_1 e_1 + \ldots + \chi_p e_p) = \\ \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_p e_p - \chi_1 \lambda_1 e_1 - \chi_2 (e_1 + \lambda_1 e_2) - \ldots - \chi_p (e_{p-1} + \lambda_1 e_p) = \\ (\alpha_1 - \chi_1 \lambda_1 - \chi_2) e_1 + (\alpha_2 - \chi_2 \lambda_1 - \chi_3) e_2 + \ldots + \\ + (\alpha_{p-1} - \chi_{p-1} \lambda_1 - \chi_p) e_{p-1} + (\alpha_p - \chi_p \lambda_1) e_p. \end{aligned}$$

Agar $\chi_p = \dfrac{\alpha_p}{\lambda_1}, \chi_{p-1} = \dfrac{\alpha_{p-1} + \chi_p}{\lambda_1}, \ldots, \chi_1 = \dfrac{\alpha_1 + \chi_2}{\lambda_1}$ deb olsak, tenglikning o‘ng tomoni nolga aylanadi. Bu holda (33.6) tenglikning o‘ng tomonida $e_1, e_2, \ldots, e_p$ basis vektorlar ishtirok etmaydi.

Qolgan xos vektorlar ham noldan farqli bo‘lganligi uchun, xuddi shunga o‘xshab, (33.6) tenglikning o‘ng tomonidagi barcha hadlarini qisqarib ketadigan $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_q, ..., \omega_1, \omega_2, ..., \omega_s$ koeffitsientlarni tanlash mumkin. Natijada biz

$$Ae' = 0$$

shartni qanoatlantiruvchi vektorni hosil qiamiz. Bu vektorni mavjud basis vektorlar tarkibiga qo‘shib, $n+1$ o‘lchamli V fazoda

$$e', e_1, e_2, ..., e_p;\ f_1,\ f_2, ...,\ f_q; ....; h_1, h_2, ..., h_s$$

bazisni hosil qilamiz. Bu bazisda chiziqli almashtirish kanonik ko‘rinishga kelib, e' xos vektorga mos kelivchi xos qiymat nolga teng bo‘ladi. Biz yuqorida $\tau = 0$ deb olish uchun A almashtirish o‘rniga $A - \tau E$ almashtirishni qaragan edik. Agar to‘g‘ridan to‘gri $\tau \neq 0$ holni qaralsa, xuddi shunga oxshab e' xos vektorni hosil qilish mumkin, lekin bu xos vektorga mos kelivchi xos qiymat τ ga teng bo‘ladi.

Endi ikkinchi holni ya’ni xos sonlarning ba’zilari nolga teng bo‘lgan holni qaraymiz. Bu holda (33.6) tenglikning o‘ng tomonidagi ifodaning xos qiymati nolga teng va xos qiymatlari noldan farqli vektorlar jamlanmasiga ajratish orqali ikki hil qo‘shiluvchilar ko‘rinishida yozib olamiz.

Xos qiymatlari noldan farqli bo‘lgan vektorlarga mos keluvchi qo‘shiluvchilarni birinchi holdagi kabi, koeffitsientlarni tanlash hisobiga nolga aylantirib yuborish mumkin. U holda (33.6) tenglikning o‘ng tomonida faqat xos qiymatlari nolga teng bo‘lgan vektorlardan iborat qo‘shiluvchilar qoladi.

Aytaylik, $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_t = 0,\ \ (t \leq k)$ bo‘lib, bu xos sonlarga mos keluvchi vektorlar $e_1, e_2, ..., e_p;\ f_1,\ f_2, ...,\ f_q; ....; g_1, g_2, ..., g_r$ bo‘lsin. Bu holda (33.6) tenglik quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\begin{aligned} &Ae' = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_p e_p + \beta_1 f_1 + ... + \beta_q f_q + ... + \gamma_1 g_1 + ... + \gamma_r g_r - \\ &A(\chi_1 e_1 + ... + \chi_p e_p) - A(\mu_1 f_1 + ... + \mu_q f_q) - ... - A(\gamma_1 g_1 + ... + \gamma_r g_r). \end{aligned} \tag{33.7}$$

Ammo $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_t = 0$ bo‘lgani uchun

$$Ae_1 = 0,\ Ae_2 = e_1, ..., Ae_p = e_{p-1},$$

$$Af_1 = 0,\ Af_2 = f_1,\ ...,\ Af_q = f_{q-1},$$

$$..,$$

$$Ag_1 = 0,\ Ag_2 = g_1,\ ...,\ Ag_r = g_{r-1}.$$

Demak $e_1, e_2, ..., e_p$ vektorlarning (33.7) tenglik o‘ng tomonida qatnashayotgan chiziqli kombinatsiyasi ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_p e_p - \chi_2 e_1 - \chi_3 e_2 - ... - \chi_p e_{p-1}.$$

Bu ifodada $\chi_2 = \alpha_1,\ \chi_3 = \alpha_2,\ ...,\ \chi_p = \alpha_p$ faraz qilib, biz $\alpha_p e_p$ haddan boshqa hamma hadlarni yo‘qotib yuborishimiz mumkin. Shu operatsiyani qolgan $f_1,\ f_2, ...,\ f_q; ......; g_1, g_2, ..., g_r$ vektorlar jamlanmasi uchun ham qo‘llasak,

$$Ae' = \alpha_p e_p + \beta_q f_q + ... + \gamma_r g_r$$

tenglikni qanoatlantiruvchi vektorni hosil qilamiz.

Agar $\alpha_p = \beta_q = ... = \gamma_r = 0$ bo‘lib qolsa, u holda

$$Ae' = 0$$

tenglik hosil bo‘lib,

$$e', e_1, e_2, ..., e_p;\ f_1,\ f_2, ...,\ f_q; ....; h_1, h_2, ..., h_s$$

bazisda chiziqli almashtirish normal shaklga keladi.

Agar $\alpha_p, \beta_q, ..., \gamma_r$ koeffitsientlardan kamida bittasi noldan farqli bo‘lsa, chiziqli almashtirishni normal shaklga keltirish uchun V' qism fazodagi bazisni o‘zgartirishga tog‘ri keladi. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda, $p \ge q \ge ... \ge r$ deb olaylik. Bu holda

$$e'_{p+1} = e',\ e'_p = Ae'_{p+1},\ e'_{p-1} = Ae'_p,\ ...,\ e'_1 = Ae'_2$$

deb olsak,

$$e'_{p+1} = e' = \alpha_p e_p + \beta_q f_q + ... + \gamma_r g_r,$$

$$e'_p = Ae'_{p+1} = \alpha_p e_{p-1} + \beta_q f_{q-1} + ... + \gamma_r g_{r-1},$$

....,

$$e'_{p-r+2} = Ae'_{p-r+3} = \alpha_p e_{p-r+1} + \beta_q f_{q-r+1} + ... + \gamma_r g_1,$$

....,

$$e'_1 = Ae'_2 = \alpha_p e_1$$

hosil bo‘ladi.

Tanlangan $e'_1, e_1, e_2, ..., e_p$ vektorlarni $e'_1, e'_2, ..., e'_p, e'_{p+1}$ vektorlar bilan almashtirib qolgan vektorlarni o‘zgarishsiz qoldirsak, berilgan chiziqli almashtirish ushbu bazisda normal shakga keladi. $\square$

VII BOB. BO‘LINISH NAZARIYASI

34 - §. Bo‘linish belgilari. Sonlarning umumiy bo‘luvchisi va karralisi

34.1-ta’rif. Agar noldan farqli a va b butun sonlar uchun $a = bq$ tenglikni qanoatlantiruvchi q butun son mavjud bo‘lsa, u holda a son b songa qoldiqsiz bo‘linadi (qisqacha bo‘ladi) yoki b son a sonni bo‘ladi deyiladi, hamda $b \mid a$ kabi belgilanadi.

$a = bq$ tenglikdagi a son bo‘linuvchi, b son a sonining bo‘luvchisi, q son esa bo‘linma deb ataladi.

Ravshanki, ikkita son umumiy bo‘luvchiga ega bo‘lsa, ularning yig‘indisi va ayirmasi ham shu bo‘luvchiga ega.

x, y va z butun sonlar bo‘lsa, u holda quyidagi sodda xossalar o‘rinli:

a) $x \mid x$ (refleksivlik hossasi);

b) agar $x \mid y$ va $y \mid z$ bo‘lsa, u holda $x \mid z$ (tranzitivlik hossasi);

c) agar $x \mid y$ va $y \mid x$ bo‘lsa, u holda $y = \pm x$;

d) agar $x \mid y$ va $y \neq 0$ bo‘lsa, u holda $|x| \leq |y|$;

e) agar $x \mid y$ va $x \mid z$ bo‘lsa, u holda barcha butun α, β sonlar uchun $x \mid (\alpha y + \beta z)$;

f) $x \mid y$ bo‘lishi uchun $|x| \mid |y|$ bo‘lishi zarur va yetarli.

Izoh. Shuni aytish joizki, ohirgi f) hossa bo‘linish bilan bog‘liq mulohazalarni butun sonlar uchun emas, balki natural sonlar uchun yuritishga imkon yaratadi.

34.2-teorema. Agar $a \neq 0$ va $b \neq 0$ uchun $a = bq$ tenglikni qanoatlantiruvchi q son mavjud bo‘lsa, u yagonadir.

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz, ya’ni $a = bq$ tenglikni qanoatlantiruvchi kamida ikkita xar hil q_1 va q_2 sonlar mavjud bo‘lsin:

$$a = bq_1, \; a = bq_2.$$

U holda bu tengliklardan

$$b(q_1 - q_2) = 0$$

kelib chiqadi. $b \neq 0$ ekanligi $q_1 - q_2 = 0$, ya’ni $q_1 = q_2$ bo‘ladi.

□

34.3-teorema. (qoldiqli bo‘lish) Xar qanday $a \in \mathbb{Z}$ va $b \in \mathbb{N}$

$$a = bq + r \tag{34.1}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi q va $r\,(0 \leq r < b)$ butun sonlari mavjud va ular yagona ravishda aniqlanadi.

Isbot. Mavjudligi. bq son a dan katta bo‘lmagan, b ga bo‘linuvchi eng katta natural son bo‘lsin, u holda

$$bq \leq a < b(q+1).$$

Bu tenglikning ikkala qismiga $-bq$ ni qo‘shsak,

$$0 \leq a - bq < b$$

hosil bo‘ladi. Agar

$$r = a - bq$$

deb olsak, $a = bq + r$ ni hosil qilamiz.

Yagonaligi. Faraz qilaylik,

$$a = bq_1 + r_1,\ 0 \leq r_1 < b,$$

$$a = bq_2 + r_2,\ 0 \leq r_2 < b$$

munosabatlar o‘rinli bo‘lsin. U holda bu tengliklarning ayirmasidan

$$0 = b(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$$

kelib chiqadi.

Bundan, $r_1 - r_2 = b(q_2 - q_1)$ hosil bo‘ladi, demak, $b \mid (r_1 - r_2)$ kelib chiqadi. Lekin $|r_1 - r_2| < b$ bo‘lgani uchun $b \mid (r_1 - r_2)$ shart faqatgina $r_1 - r_2 = 0,$ ya’ni $r_2 = r_1$ bo‘lgandagina bajariladi. Bundan esa $q_2 = q_1$ ekanligi kelib chiqadi. □

Teoremadagi tenglikka sonlarni qoldiqli bo‘lish va undagi q songa bo‘linma, r songa esa qoldiq deyiladi.

Misol 34.1. –197 ni 11 ga qoldiqli bo‘lsak, $-197 = 11\cdot(-18)+1$, bu yerda $q = 18$, $r = 1$.

Qoldiqli bo‘lish haqidagi teoremaga asosan quyidagi tenglikliklari yozish mumkin.

$$\begin{array}{ll} a = bq_1 + r_1, & 0 < r_1 < b, \\ b = r_1 q_2 + r_2, & 0 < r_2 < r_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1}, \\ r_{n-1} = r_n q_n. & \end{array} \tag{34.2}$$

Bu tengliklarning o‘ng tomonidagi tengsizliklarga e’tibor bersak, quyidagi tengsizliklar bog‘lanishi ko‘zga tashlanadi:

$$b > r_2 > r_3 > r_4 > \dots > r_n > 0,$$

bu yerda barcha $r_i\,(\overline{2,n})$ lar natural sonlardir. Natural sonlar quyidan chegaranganligi tufayli biror-bir n nomerdan boshlab $r_{n+1} = 0$ bo‘ladi.

(34.2) tengliklar sistemasiga *Yevklid algoritmi* deb yuritiladi.

Misol 34.2. 2576 va 154 sonlar uchun Yevklid algoritmini tuzamiz:

$$2576 = 154\cdot 16 + 112,$$

$$154 = 112\cdot 1 + 42,$$

$$112 = 42\cdot 2 + 21,$$

$$42 = 28\cdot 1 + 14,$$

$$28 = 14\cdot 2.$$

34.4-ta’rif. $a, b \in \mathbb{Z}$ butun sonlarning har birini bo‘ladigan songa shu sonlarning *umumiy bo‘luvchisi* deyiladi.

34.5-ta’rif. Kamida biri noldan farqli bo‘lgan a va b butun sonlarning umumiy bo‘luvchilari ichida eng kattasi ularning eng katta umumiy bo‘luvchisi deyiladi va EKUB(a,b) yoki qisqacha (a,b) kabi belgilanadi.

34.6-ta’rif. Agar $(a,b)=1$ bo‘lsa, a va b sonlar o‘zaro tub sonlar deyiladi.

34.7-tasdiq. a va b butun sonlarning EKUBi Yevklid algoritidagi oxirgi r_n qoldiqqa tengdir, ya’ni $(a,b)=r_n$.

Isbot. a va b butun sonlar uchun Yevklid algoritmini tuzamiz. U holda tengliklarning birinchisiga asosan a va b butun sonlarning ixtiyoriy umumiy bo‘luvchi r_1 ni bo‘ladi, va aksincha $a=r_1+bq_1$ ga asosan r_1 va b larning xar qanday umumiy bo‘luvchisi a sonni bo‘ladi. Demak, $(a,b)=(b,r_1)$.

Bu mulohazalarni Yevklid algoritmiga ikkinchi, uchinchi va undan keyin keladigan tengliklarga qo‘ysak,

$$(b,r_1)=(r_1,r_2),$$

$$(r_1,r_2)=(r_2,r_3),$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

$$(r_{n-2},r_{n-1})=(r_{n-1},r_n),$$

$$(r_{n-1},r_n)=r_n$$

tengliklarni hosil qilamiz, demak, $(a,b)=r_n$. □

Endi sonlarning EKUBi haqidagi muhim xossalarni keltiramiz.

34.8-xossa. Agar berilgan sonlarni biror songa ko‘paytirsak, u holda ularning EKUBi ham shuncha marta ortadi.

Isbot. Yevklid algoritmini ak va bk sonlarga tadbiq etsak, tengliklarni xar bir hadi k marta ortadi. Shuning uchun,

$$(ak,bk)=(a,b)k.$$

34.9-xossa. Agar a va b sonlarning har biri biror d songa bo‘linsa, ularning EKUBi ham shu songa bo‘linadi, ya’ni

$$\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=\frac{(a,b)}{d}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. 34.8-xossaga asosan

$$(a,b)=\left(\frac{a}{d}d,\frac{b}{d}d\right)=\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)d.$$

Bundan

$$\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=\frac{(a,b)}{d}$$

ekanligi kelib chiqadi. □

Xususiy holda $d=(a,b)$ bo‘lsa,

$$\left(\frac{a}{(a,b)},\frac{b}{(a,b)}\right)=\frac{(a,b)}{(a,b)}=1$$

kelib chiqadi, ya’ni agar $a=da_1$ va $b=db_1$ bo‘lib, $d=(a,b)$ bo‘lsa, $(a_1,b_1)=1$ bo‘ladi.

34.10-teorema. Agar $(a,c)=1$ va $c\,|\,ab$ bo‘lsa $c\,|\,b$ bo‘ladi, ya’ni a va c sonlar o‘zaro tub bo‘lib, ab ko‘paytma c ga bo‘linsa, u holda b son c songa bo‘linadi.

Isbot. $(a,c)=1$ tenglikning ikkala tomonini b ga ko‘paytiramiz:

$$(ab,cb)=b.$$

Teorema shartiga asosan, $c\,|\,ab$ va cb son c ga karrali bo‘lganligi uchun, yuqoridagi xossalarga asosan $c\,|\,(ab,cb)$, bundan esa $c\,|\,b$ ekanligi kelib chiqadi. □

34.11-teorema. $\forall a,b\in\mathbb{Z}$ uchun $\exists u,v\in\mathbb{Z}$ topiladiki,

$$au+bv=d$$

bo‘ladi, bu yerda $d=(a,b)$.

Isbot. Quyidagi $f:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{Z}$, $f(x,y)=ax+by$ funksiyani qaraymiz. Agar a va b sonlar bir vaqtda nolga teng bo‘lmasa, bu funksiya musbat qiymatlarni ham, manfiy qiymatlarni ham qabul qiladi. Bundan tashqari a va b sonlari bu funksiyaning qiymatlar sohasi $E(f)$ ga tegishli bo‘ladi. Bu funksiya musbat qiymatlarining eng kichigini d bilan belgilaymiz, ya’ni $d = au + bv$ son noldan katta eng kichik musbat son bo‘lsin.

U holda a sonini d ga qoldiqli bo‘lib, $a = dq + r, 0 \le r < d$ ni hosil qilamiz. Bu yerdan

$$r = a - dq = a - (au + bv)q = a(1 - uq) + b(-qv) = au_1 + bv_1$$

ekanligidan $r \in E(f)$ kelib chiqadi. d soni $E(f)$ ga tegishli bo‘lgan eng kichik musbat son bo‘lganligi uchun $r = 0$ kelib chiqadi, ya’ni a soni d ga bo‘linadi.

Shunga o‘xshash, b sonining ham d ga bo‘linishi ko‘rsatiladi. Ikkinchi tomondan a va b sonlarning xar qanday bo‘luvchisi $d = au + bv$ sonni ham bo‘ladi va shunga ko‘ra d dan katta bo‘lmaydi, demak $d = (a, b)$. □

Shuni ta’kidlaymizki, $d = au + bv$ chiziqli ifodani amalda topish uchun Yevklid algoritmidagi tengliklarda pastdan yuqoriga qarab harakat qilinadi:

$$r_n = r_{n-2} - r_{n-1}q_{n-1} = r_{n-2} - (r_{n-3} - r_{n-2}q_{n-2})q_{n-1} =$$

$$= r_{n-2} - r_{n-3}q_{n-1} + r_{n-2}q_{n-2}q_{n-1} =$$

$$= r_{n-2}(1 + q_{n-2}q_{n-1}) + r_{n-3}(-q_{n-1}) = ... = au + bv.$$

Tabiiyki, a va b sonlar o‘zaro tub bo‘lishi uchun $au + bv = 1$ shartni qanoatlantiruvchi $u, v \in \mathbb{Z}$ sonlarning mavjud bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Misol 34.3. 2576 va 154 sonlarining EKUBini ularning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalang.

34.2-misolda biz $(2576, 154) = 14$ ekanligini ko‘rsatgan edik. Unda keltirilgan Yevklid algoritmidan foydalanib, pastdan yuqoriga qarab yozsak:

$$14 = 42 - 28\cdot 1 = 42 - (112 - 42\cdot 2)\cdot 1 = 42 - 112\cdot 1 + 42\cdot 21 =$$

$$42(1 + 2\cdot 1) + 112(-1) = 42\cdot 3 + 112(-1) = (154 - 112\cdot 1)\cdot 3 + 112(-1) =$$

$$154\cdot 3 - 112\cdot 3 - 112 = 154\cdot 3 - 112\cdot 4 = 154\cdot 3 - (2576 - 154\cdot 16)\cdot 4 =$$

$$154\cdot 3 + 2576\cdot(-4) + 154\cdot 64 = 2576\cdot(-4) + 154\cdot 67$$

hosil bo‘ladi. Demak, $u = -4$, $v = 67$.

Ikkita sonning EKUBini topish tushunchasini bir nechta sonlarning EKUBini topishga ham tadbiq etish mumkin. Faraz qilaylik, n ta $a_1, a_2, ..., a_n$ sonlar ketma-ketligi berilgan bo‘lsin. Bu sonlarning EKUBini topish uchun birinchi bo‘lib $(a_1, a_2) = d_2$, so‘ngra $(d_2, a_3) = d_3$, $(d_3, a_4) = d_4$, ..., $(d_{n-1}, a_n) = d_n$ EKUBlarni topamiz. Hosil bo‘lgan d_n soni berilgan sonlar ketma-ketligining EKUBi bo‘ladi, ya’ni

$$(a_1, a_2, ..., a_n) = d_n.$$

34.12-ta’rif. Agar $a_1, a_2, ..., a_n$ sonlar ketma-ketligida $(a_i, a_j) = 1$, bo‘lsa, bu sonlar ketma-ketligi juft-jufti bilan o‘zaro tub deyiladi.

34.14-ta’rif. a va b sonlarning xar biriga bo‘linadigan son shu sonlarning umumiy karralisi deyiladi.

Masalan, 12 va 18 sonlarning umumiy karralisi 36, 72, 108, ... bo‘ladi.

34.15-ta’rif. a va b sonlarning umumiy karralilari ichida eng kichigiga bu sonlarning eng kichik umumiy karralisi (EKUK) deyiladi va $[a,b]$ orqali belgilanadi.

Ikkita sonning EKUKi quyidagi oddiy xossalarga ega.

34.16-xossa.

a) ikkita sonning EKUKi shu sonlar ko‘paytmasini ularning EKUBiga bo‘lgan nisbatiga teng, ya’ni $[a,b] = \dfrac{a\cdot b}{(a,b)}$;

b) $\dfrac{[a,b]}{a}$ va $\dfrac{[a,b]}{b}$ sonlar o‘zaro tubdir, ya’ni $\left(\dfrac{[a,b]}{a}, \dfrac{[a,b]}{b}\right) = 1$;

c) a va b sonlarning umumiy karralisi, ularning EKUKiga karralidir;

d) agar $k>0$ bo‘lsa, $[ka,kb]=k[a,b]$ bo‘ladi.

e) agar $k\,|\,a$ va $k\,|\,b$ bo‘lsa, u holda $\left[\frac{a}{k},\frac{b}{k}\right]=\frac{[a,b]}{k}$ bo‘ladi.

Isbot. Ushbu xossalardan faqat birinchisini ko‘rsatish bilan chegaralanamiz. Aytaylik, M soni a va b sonlarning biror umumiy karralisi bo‘lsin. U holda $a\,|\,M$ va $b\,|\,M$, ya’ni

$$M=ak,\ M=bs.$$

Bundan ak soni b ga bo‘linishi kelib chiqadi.

Agar $(a,b)=d$ bo‘lsa, u holda $a=a_1d,\ b=b_1d$ va $(a_1,b_1)=1$ deb olib, $b\,|\,ak$ ekanligidan $b_1\,|\,a_1k$ munosabatni, $(a_1,b_1)=1$ bo‘lganligi uchun $b_1\,|\,k$ bo‘lishini hosil qilamiz. Demak, k soni b_1 ga bo‘linadi, ya’ni

$$k=b_1t=\frac{b}{d}t$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Buni M ga olib borib qo‘ysak, $M=\frac{ab}{d}t$ hosil qilamiz. Demak, a va b sonlarning ixtiyoriy umumiy karralisi yuqoridagi formula orgali ifodalanadi. Agar $t=1$ bo‘lsa, a va b sonlarning EKUKini topish formulasi hosil bo‘ladi, ya’ni $[a,b]=\frac{ab}{d}$. □

Misol 34.4. $(12,18)=6$ bo‘lib, $[12,18]=\frac{12\cdot 18}{6}=36$ bo‘ladi.

Ikkitadan ortiq sonlarning EKUKini topish masalasi ikkita sonning EKUKini topish kabi hal qilinadi.

Agar bizga $a_1,a_2,...,a_n$ sonlar berilgan bo‘lib, $[a_1,a_2]=m_2$, $[m_2,a_3]=m_3$, ..., $[m_{n-1},a_n]=m_n$ bo‘lsa, u holda topilgan m_n soni berilgan sonlarning EKUKi bo‘ladi, ya’ni

$$[a_1, a_2, ..., a_n] = [m_2, a_3, ..., a_n] = [m_3, a_4, ..., a_n] = ... = [m_{n-1}, a_n] = m_n.$$

Agar berilgan sonlar ketma-ketligi juft-jufti bilan o‘zaro tub bo‘lsa, u holda

$$[a_1, a_2, ..., a_n] = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$$

bo‘ladi.

35 - §. Uzluksiz va munosib kasrlar

Bizga a va b butun sonlar berilgan bo‘lsin. Bu sonlar uchun Yevklid algoritmini qo‘llasak, quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{r_1}{b} = q_1 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}},$$

$$\frac{b}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}},$$

$$\frac{r_1}{r_2} = q_3 + \frac{r_3}{r_2} = q_3 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}},$$

....

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}} = q_{n-1} + \frac{1}{q_n}.$$

Natijada $\frac{a}{b}$ nisbatni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}}.$$

Berilgan $\frac{a}{b}$ nisbatning yuqoridagi ko‘rinishiga uning *uzluksiz kasrga yoyilmasi* deyiladi. Odatda uzluksiz kasr quyidagicha belgilanadi:

$$\frac{a}{b} = (\overline{q_1, q_2, ..., q_n}).$$

Uzluksiz kasrda quyidagi uch hil holat bo‘lishi mumkin:

1) $a > b,$ bu holda $q_1 > 0$ bo‘ladi;

2) $0 \le a < b,$ bu holda $q_1 = 0$ bo‘ladi;

3) $a < 0$ bo‘lsa, $\frac{a}{b}$ nisbatni

$$\frac{a}{b} = -m + \frac{r_1}{b}, \ \ m > 0$$

shakldа yozib olamiz. Bu yerda $\frac{r_1}{b}$ to‘g‘ri musbat kasr bo‘lib, natijada quyidagi yoyilma hosil bo‘ladi:

$$\frac{a}{b} = -m + \frac{r_1}{b} = (\overline{-m, q_2, q_3, ..., q_n}).$$

Misol 35.1. $\frac{2576}{154}$ kasrni uzluksiz kasrga yoying.

$$\frac{2576}{154} = 16 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} = \overline{(16,1,2,1,2)}.$$

Berilgan $\frac{a}{b}$ ratsional sonning *munosib kasrlari* deb,

$$\delta_1 = q_1,\ \delta_2 = q_1 + \frac{1}{q_1},\ \delta_3 = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3}},\ \ldots, \delta_n = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}}$$

kasrlarga aytiladi. Bu munosib kasrlarning eng ohirgisi berilgan ratsional kasrga teng bo‘ladi.

Munosib kasrlarni hisoblash uchun $P_0 = 1,\ Q_0 = 0,\ P_1 = q_1,\ Q_1 = 1$ deb quyidagilarni yozib olamiz:

$$\delta_1 = \frac{q_1}{1} = \frac{P_1}{Q_1},$$

$$\delta_2 = q_1 + \frac{1}{q_2} = \frac{q_2 \cdot q_1 + 1}{q_2} = \frac{q_2 \cdot P_1 + P_0}{q_2 \cdot Q_1 + Q_0} = \frac{P_2}{Q_2},$$

$$\delta_3 = \frac{\left(q_2 + \frac{1}{q_3}\right) \cdot P_1 + P_0}{\left(q_2 + \frac{1}{q_3}\right) \cdot Q_1 + Q_0} = \frac{q_3(q_2 P_1 + P_0) + P_1}{q_3\left(q_2 Q_1 + Q_0\right) + Q_1} = \frac{q_3 P_2 + P_1}{q_3 Q_2 + Q_1} = \frac{P_3}{Q_3}.$$

Matematik induksiyaga asosan

$$\delta_k = \frac{P_k}{Q_k} = \frac{q_k P_{k-1} + P_{k-2}}{q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}}$$

tenglikni olamiz.

Bu yerda

$$P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2},\ Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}.$$

Ushbu bog‘lanish δ_k munosib kasrni hisoblash uchun xizmat qiladigan rekkurent formuladir. Quyidagi sxema istalgan P_k va Q_k sonlarni hisoblash imkonini beradi.

		q_1	q_2	q_3	q_4	$\ldots$	q_n
P_k	1	q_1	$q_2 \cdot P_1 + P_0$	$q_3 \cdot P_2 + P_1$	$q_4 \cdot P_3 + P_2$	$\ldots$	$q_n \cdot P_{n-1} + P_{n-2}$
Q_k	0	1	$q_2 \cdot Q_1 + Q_0$	$q_3 \cdot Q_2 + Q_1$	$q_4 \cdot Q_3 + Q_2$	$\ldots$	$q_n \cdot Q_{n-1} + Q_{n-2}$
k	0	1	2	3	4	$\ldots$	n

Ushbu P_k va Q_k sonlar orasida quyidagi bog‘liqlik mavjud:

$$P_k Q_{k-1} - Q_k P_{k-1} = (-1)^k.$$

Bu formuladan $(P_k, Q_k) = 1$ ekanligi osongina kelib chiqadi.

Misol 35.2. $(\overline{16,1,2,1,2})$ ga mos ratsional son topilsin.

		$q_1 = 16$	$q_2 = 1$	$q_3 = 2$	$q_4 = 1$	$q_5 = 2$
P_k	$P_0 = 1$	16	17	50	67	184
Q_k	$Q_0 = 0$	1	1	3	4	11

Demak, berilgan uzluksiz kasr uchun

$$\delta_1 = \frac{16}{1} = 16;\ \delta_2 = \frac{17}{1} = 17;\ \delta_3 = \frac{50}{3};\ \delta_4 = \frac{67}{4};\ \delta_5 = \frac{184}{11}.$$

36 - §. Tub sonlar. Arifmetikaning asosiy qonuni

36.1-ta’rif. O‘zidan va birdan boshqa bo‘luvchilari bo‘lmagan, birdan katta natural son tub son deyiladi. Natural bo‘luvchilari soni ikkitadan ortiq bo‘lgan birdan farqli natural songa murakkab son deyiladi.

36.2-teorema. Agar $a\,(a > 1)$ butun sonning birdan katta bo‘lgan bo‘luvchilari ichida eng kichigi p bo‘lsa, u holda p tub sondir.

Isbot. Haqiqatdan, agar $d \in N$ soni p ning bo‘luvchisi bo‘lib, $1 < d < p$ bo‘lsa, u holda d soni a ning ham bo‘luvchisi bo‘ladi. Bu esa p ning eng kichik bo‘luvchi ekanligiga zid. Demak, $d = 1$ yoki $d = p$ bo‘ladi, ya’ni $p -$ tub son. □

36.3-teorema. Har qanday a son va p tub son uchun $(a, p) = 1$ yoki $p \mid a$.

Isbot. p tub sonning bo‘luvchilari 1 va p bo‘lganligi uchun a va p sonlari umumiy bo‘luvchilari 1 yoki p bo‘ladi. Agar, p soni ularning umumiy bo‘luvchisi bo‘lsa, $p \mid a$ bo‘ladi, aks holda $(a, p) = 1$. □

36.4-teorema. Agar $a \cdot b$ ko‘paytma biror p tub songa bo‘linsa, bu ko‘paytuvchilardan kamida bittasi shu tub songa bo‘linadi, ya’ni $p \mid a \cdot b$ bo‘lsa, u holda $p \mid a$ yoki $p \mid b$.

Isbot. Haqiqatan, agar a soni p ga bo‘linmasa, $(a, p) = 1$ bo‘lib, $p \mid a \cdot b$ ekanligidan $p \mid b$ kelib chiqadi.

36.5-teorema. Tub sonlar soni cheksiz ko‘pdir.

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz, ya’ni tub sonlar cheklita bo‘lib, ular $p_1, p_2, ..., p_n$ bo‘lsin. Ushbu $a = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$ sonni qaraymiz. a soni $p_1, p_2, ..., p_n$ tub sonlarning hech biriga bo‘linmaydi. Agar a tub son bo‘lsa, demak, u berilgan $p_1, p_2, ..., p_n$ tub sonlardan farqli tub son bo‘ladi. Agar a tub son bo‘lmasa, bu son $p_1, p_2, ..., p_n$ tub sonlardan farqli boshqa bir tub songa bo‘linadi. Demak, xar ikkala holda ham $p_1, p_2, ..., p_n$ tub sonlardan farqli bo‘lgan tub son topiladi. Bu farazimizga ziddir. □

Endi arifmetikaning asosiy teoremasi deb yuritiladigan quyidagi teoremani keltiramiz.

36.6-teorema. Xar qanday birdan katta butun son tub sonlarning ko‘paytmasi shaklida yoziladi va ko‘paytma ko‘paytuvchilarning yozilish tartibi aniqligida yagonadir.

Isbot. Isbotni matematik induksiya metodi yordamida ko‘rsatamiz. $a=2$ tub son bo‘lganligi uchun teorema sharti o‘rinli.

Aytaylik, $a>2$ bo‘lsin. Agar a tub son bo‘lsa, teorema sharti o‘rinli. Agar a tub son bo‘lmasa, shunday p_1 tub son mavjudki, $p_1 \mid a$ ya’ni $a=p_1a_1$ bo‘ladi. Matematik induksiya faraziga asosan, a_1 soni tub sonlar ko‘paytmasi shaklida ifodalanadi, ya’ni $a_1=p_2\cdot\ldots\cdot p_n$, demak

$$a=p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n$$

yoyilmani hosil qilamiz.

Endi yoyilmaning yagonaligini ko‘rsatamiz. Buning uchun teskarisini faraz qilamiz, ya’ni a son boshqa

$$a=q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_m$$

yoyilmaga ega bo‘lsin. Bu ikki yoyilmadan

$$p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n=q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_m$$

hosil bo‘ladi. Bu tenglikning chap tomonidan o‘ng tomoniga qarab mulohaza yuritib, 36.4-teoremani qo‘llasak, chap tomondagi biror-bir p_i tub son o‘ng tomondagi biror-bir q_j tub songa bo‘linadi. Bundan esa $p_i=q_j$ ekanligi kelib chiqadi. □

Ma’lumki, a sonining tub sonlarga yoyilmasidagi ko‘paytuvchilar orasida o‘zaro tenglari ham bo‘lishi mumkin. Faraz qilaylik, a sonining yoyilmasida p_i tub son α_i marotaba ishtirok etsin. U holda yoyilma

$$a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$$

ko‘rinishga keladi. Bu yoyilmaga a sonining kanonik ko‘rinishi deb ataladi.

Sonlarning kanonik yoyilmasi berilgan sonlarning EKUB va EKUKlarini topishda qo‘llaniladi. Bizga a va b sonlarning kanonik shakllari berilgan bo‘lsa,

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k},$$

$$b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot ... \cdot p_k^{\beta_k}$$

u holda

$$(a,b) = p_1^{\varphi_1} \cdot p_2^{\varphi_2} \cdot ... \cdot p_k^{\varphi_k} \text{ va } [a,b] = p_1^{\theta_1} \cdot p_2^{\theta_2} \cdot ... \cdot p_k^{\theta_k}$$

bo‘lib, bu yerda $\varphi_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$ va $\theta_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$.

Misol 36.1. 24 va 50 sonlarni EKUB va EKUK larini toping. Buning uchun ularning kanonik shaklga keltiramiz:

$$24 = 2^3 \cdot 3, \; 50 = 2 \cdot 5^2.$$

$$\varphi_1 = \min(3,1) = 1, \; \varphi_2 = \min(1,0) = 0, \; \varphi_3 = \min(0,2) = 0 \text{ bo‘lib,}$$

$$(24,50) = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 2$$

bo‘ladi. Xuddi shunday

$$\theta_1 = \max(3,1) = 3, \; \theta_2 = \max(1,0) = 1, \; \theta_3 = \max(0,2) = 2$$

bo‘lib,

$$[24,50] = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 = 600$$

natijaga ega bo‘lamiz.

VIII BOB. TAQQOSLAMALAR

37 - §. Taqqoslamalar va ularning xossalari

Bizga a va b butun sonlar va qandaydir m natural son berilgan bo‘lsin.

37.1-tarif. Agar a va b sonlarini m ga bo‘lgandagi qoldiqlari teng bo‘lsa, a va b sonlar m modul bo‘yicha taqqoslanuvchi deyiladi va $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$ shakldа yoziladi.

Masalan, $a = 22$ va $b = 27$ sonlari $m = 5$ modul bo‘yicha taqqoslanadi, ya’ni $22 \equiv 27 (\operatorname{mod} 5)$.

37.2-xossa. a va b sonlari m modul bo‘yicha taqqoslanuvchi bo‘lishi uchun $a - b$ soni m ga bo‘linishi zarur va yetarli.

Isbot. Haqiqatdan, a va b sonlarni m ga qoldiqli bo‘lsak,

$$a = m \cdot q_1 + r,\ b = mq_2 + r,\ 0 \le r \le m - 1$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Bu yerdan $a - b = m(q_1 - q_2)$ ekanligi kelib chiqadi, ya’ni $a - b$ soni m ga bo‘linadi. □

Demak, a va b sonlarining m modul bo‘yicha taqqoslanuv-chanligi $a = b + m \cdot t$ ekanligiga teng kuchlidir. Bundan esa quyidagi xossaning o‘rinli ekanligi bevosita kelib chiqadi.

37.3-xossa. Agar $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$ va $b \equiv c (\operatorname{mod} m)$ bo‘lsa, u holda $a \equiv c (\operatorname{mod} m)$.

Endi taqqoslamaning asosiy xossalarini keltiramiz.

37.4-xossa. Bir hil modulli taqqoslamalarni hadma-had qo‘shish mumkin, ya’ni $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$ va $c \equiv d (\operatorname{mod} m)$ bo‘lsa,

$$a + c \equiv b + d (\operatorname{mod} m).$$

Isbot. Aytaylik, $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$ va $c \equiv d (\operatorname{mod} m)$ bo‘lsin. U holda $a - b$ va $c - d$ sonlari m ga bo‘linadi.

$$(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d)$$

ekanligidan $(a+c)-(b+d)$ sonining m ga bo‘linishi kelib chiqadi, demak, $a+c \equiv b+d \pmod m$. □

37.5-xossa. Bir xil modulli taqqoslamalarni hadma-had ko‘paytirish mumkin, ya’ni $a \equiv b \pmod m$ va $c \equiv d \pmod m$ bo‘lsa,

$$a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod m.$$

Isbot. Haqiqatdan, $a-b$ va $c-d$ sonlari m ga bo‘linishidan, $ac-bd=(a-b)c+b(c-d)$ sonining ham m ga bo‘linishi kelib chiqadi. Demak, $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod m$. □

37.6-xossa. Taqqoslamaning xar bir hadini va modulini bir hil songa ko‘paytirish mumkin, ya’ni $a \equiv b \pmod m$ bo‘lsa, $a \cdot k \equiv b \cdot k \pmod{m \cdot k}$ bo‘ladi.

Isbot. $a \equiv b \pmod m$ ekanligidan $a=b+m \cdot t$ tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikni ikkala tomonini k ga ko‘paytirsak, $a \cdot k = b \cdot k + m \cdot k \cdot t$ kelib chiqadi, ya’ni $a \cdot k \equiv b \cdot k \pmod{m \cdot k}$. □

37.7-xossa. Taqqoslamaning har bir hadini va modulini bir hil songa bo‘lish mumkin.

Isbot. Aytaylik, $a \equiv b \pmod m$ bo‘lib, $a = a_1 \cdot d$, $b = b_1 \cdot d$ va $m = m_1 \cdot d$ bo‘lsin. U holda $a = b + m \cdot t$ tenglikdan

$$a_1 \cdot d = b_1 \cdot d + m_1 \cdot d \cdot t,$$

$$a_1 = b_1 + m_1 \cdot t$$

hosil bo‘ladi, ya’ni $a_1 \equiv b_1 \pmod{m_1}$. □

37.8-xossa. Agar a va b sonlari $m_1, m_2, ..., m_k$ modullar bo‘yicha taqqoslanivchi bo‘lsa, u holda a va b bu sonlarning eng kichik umumiy karralisi bo‘yicha taqqoslanuvchi bo‘ladi.

Isbot. $a \equiv b \pmod{m_1}$, $a \equiv b \pmod{m_2}$, …, $a \equiv b \pmod{m_k}$ ekanligidan $a-b$ sonining $m_1, m_2, ..., m_k$ larning barchasiga bo‘linishi kelib chiqadi. Demak, ularning eng kichik umumiy karralisiga ham bo‘linadi.

□

37.9-xossa. Agar a va b sonlari m modul bo‘yicha taqqoslanuvchi bo‘lsa, u holda ular m ning ixtiyoriy bo‘luvchisi bo‘yicha taqqoslanuvchi bo‘ladi.

Isbot. $a = b + m \cdot t$ ekanligidan $m = m_1 \cdot q$ shartni qanoatlantiruvchi m_1 soni uchun $a = b + m_1 \cdot (q \cdot t)$ kelib chiqadi, demak $a \equiv b (\operatorname{mod} m_1)$. □

37.10-xossa. Agar taqqoslamaning bitta hadi va moduli biror songa bo‘linsa, u holda taqqoslamaning ikkinchi hadi ham shu songa bo‘linadi.

Isbot. Aytaylik $a = b + m \cdot t$ bo‘lib, $a = a_1 \cdot d$, $m = m_1 \cdot d$ bo‘lsin. U holda $b = a_1 \cdot d - m_1 \cdot d \cdot t$ ekanligidan b sonining ham d ga bo‘linishini hosil qilamiz. □

37.11-xossa. Agar $a = b (\operatorname{mod} m)$ bo‘lsa, u holda $(a,m) = (b,m)$ bo‘ladi.

Isbot. $a = b + m \cdot t$ ekanligidan a ning (b,m) ga bo‘linishi kelib chiqadi. a va m sonlarining EKUBini ularning chiziqli ifodasi orqali ifodalasak,

$$au + mv = (a,m)$$

tenglikdan, hamda a va m sonlari (b,m) ga bo‘linishidan (a,m) ning (b,m) ga bo‘linishi kelib chiqadi, ya’ni $(b,m) \mid (a,m)$. Shunga o‘xshab, $(a,m) \mid (b,m)$ munosabat ham ko‘rsatiladi, demak $(a,m) = (b,m)$.

□

Berilgan m soniga karrali bo‘lgan butun sonlar to‘plamini $m\mathbb{Z}$ orqali belgilaymiz, ya’ni

$$m\mathbb{Z} = \{..., -2m, -m, 0, m, 2m, ...\}.$$

Butun sonlar to‘plamida quyidagicha R binar munosabat aniqlaymiz. Agar a va b sonlari uchun $a - b \in m\mathbb{Z}$ bo‘lsa, $(a,b) \in R$ deb qabul qilamiz. Boshqacha aytganda, m modul bo‘yicha taqqoslanivchi sonlar jufti binar munosabatga tegishli bo‘ladi.

37.12-teorema. $\mathbb{Z}$ to‘plamda m modul bo‘yicha kiritilgan binar munosabat ekvivalentlik munosabati bo‘ladi.

Isbot. Teoremani isbotlash uchun ekvivalentlikning uchta shartini o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatamiz:

1) $a \equiv a (\mathrm{mod}\, m)$, chunki $a - a = 0$ soni m ga bo‘linadi, demak $(a, a) \in R.$

2) agar $a \equiv b (\mathrm{mod}\, m)$ bo‘lsa, u holda $a - b$ son m ga bo‘linadi. Bundan esa, $b - a = -(a - b)$ soni ham m ga bo‘linishi, ya’ni $b \equiv a (\mathrm{mod}\, m)$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, agar $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$ kelib chiqadi.

3) agar $a \equiv b (\mathrm{mod}\, m)$ va $b \equiv c (\mathrm{mod}\, m)$ bo‘lsa, u holda $a - b$ va $b - c$ sonlar m ga bo‘linadi, $a - c = (a - b) + (b - c)$ son ham m ga bo‘lingani uchun $a \equiv c (\mathrm{mod}\, m)$ kelib chiqadi. Demak, $(a, b) \in R$ va $(b, c) \in R$ ekanligidan $(a, c) \in R$ kelib chiqadi. □

Ma’lumki, xar qanday ekvivalentlik munosabati berilgan to‘plamni kesishmaydigan sinflarga ajratadi. Yuqorida aniqlangan ekvivalentlik munosabati bo‘yicha hosil qilingan sinflarga *chegirmalar sinflari* deyiladi.

37.2-teoremaga asosan, $a - b$ ayirma m ga bo‘linsa, a va b sonlarni m ga bo‘lgandagi qoldiqlari teng bo‘ladi, demak, m modul bo‘yicha aniqlangan chegirmalar sinfi m ga bo‘linganda bir hil qoldiq qoladigan butun sonlardan iborat bo‘ladi. Butun sonni m ga bo‘lgandagi qoldiqlar $0, 1, ..., m-1$ sonlaridan biriga teng bo‘lishini hisobga olsak, m modul bo‘yicha aniqlangan chegirmalar m ta sinfdan tashkil topadi. Demak, biz quyidagi sinflarga ega bo‘lamiz:

$$\bar{0} = \{..., -2m, -m, 0, m, 2m, ...\},$$

$$\bar{1} = \{..., -m+1, 1, m+1, ...\},$$

$$.....................................,$$

$$\overline{m-1} = \{..., -2m-1, -1, m-1, 2m-1, ...\}.$$

Ta’kidlash joizki, m modul bo‘yicha chegirmalar sinflari-ning ta’rifidan $a \equiv b(\operatorname{mod} m)$ munosabat $\bar{a} = \bar{b}$ munosabatga teng kuchlidir. 37.3-teoremaga asosan, $\mathbb{Z}$ to‘plamnining m modul bo‘yicha turli chegirmalar sinfi faktor to‘plamning elementlari bo‘ladi, ushbu faktor to‘plam $\mathbb{Z}_m$ kabi belgilanadi, ya’ni

$$\mathbb{Z}_m = \left\{\bar{0}, \bar{1}, ..., \overline{m-1}\right\}.$$

Yuqorida keltirilgan xossalar $\mathbb{Z}_m$ faktor to‘plamda qo‘shish va ko‘paytirish amalarini kiritishga imkon beradi, ya’ni $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$ elementlarning yig‘indisi va ko‘paytmasini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\bar{a} + \bar{b} := \overline{a+b},$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} := \overline{a \cdot b}.$$

Bu aniqlangan qo‘shish va ko‘paytirish amallari binar algebraik amallar bo‘ladi. Haqiqatdan ham, 37.4 va 37.5-xossalarga asosan, $\bar{a} + \bar{b}$ yig‘indi va $\bar{a} \cdot \bar{b}$ ko‘paytmalar a va b elementlarning tanlanishiga bog‘liq emas.

Quyidagi jadvalda $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ to‘plamda qo‘shish va ko‘paytirish amallari jadvallarini keltiramiz:

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Ravshanki, $\mathbb{Z}_m$ to‘plamda aniqlangan qo‘shish va ko‘paytirish amallari kommutativlik, assotsiativlik va distributivlik qonunlariga bo‘ysunadi, ya’ni

a) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$;

b) $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$;

c) $\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$;

d) $\overline{a}\cdot(\overline{b}\cdot\overline{c})=(\overline{a}\cdot\overline{b})\cdot\overline{c}$;

e) $\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}$.

Hosil qilingan chegirmalar sinflari uchun quyidagi xossalar o‘rinli.

37.13-xossa. a) agar sinfdagi biror son m bilan o‘zaro tub bo‘lsa, u holda bu sinfdagi barcha sonlar bilan ham o‘zaro tub bo‘ladi;

b) juft-jufti bilan m mo‘dul bo‘yicha taqqoslanmaydigan ixtiyoriy m ta $y_1, y_2, ..., y_m$ sonlari uchun $\mathbb{Z}_m=\left\{\overline{y_1},\overline{y_2},...,\overline{y_m}\right\}$;

c) agar $(a,m)=1$ bo‘lsa, $\left\{\overline{1\cdot a},\overline{2\cdot a},...,\overline{m\cdot a}\right\}=\mathbb{Z}_m$.

38 - §. Mutiplikativ funksiyalar. Eyler va Ferma teoremalari

$[x]$ va $\{x\}$ funksiyalar sonlar nazariyasida muhim o‘rin egallaydigan funksiyalar hisoblanadi.

38.1-ta’rif. Haqiqiy x sonini x dan oshmaydigan eng katta butun songa mos qo‘yuvchi funksiya x ning butun qismi deyiladi va $[x]$ kabi belgilanadi.

38.2-ta’rif. Haqiqiy x sonini $x-[x]$ ga mos qo‘yuvchi funksiya x ning kasr qismi deyiladi va $\{x\}$ kabi belgilanadi.

Misol 38.1. $[2,6]=2;\ [-4,75]=-5; \{2,6\}=0,6;\ \{-4,75\}=0,25.$

$[x]$ funksiyaning foydali jihatlaridan birini quyidagi teorema orqali bilib olamiz.

38.3-teorema. $n!$ ko‘paytmada $p\le n$ tub sonning darajasi quyidagi songa teng:

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+...$$

Isbot. Ravshanki, $n!$ ko‘paytmaning ko‘paytuvchilari orasida $\left[\frac{n}{p}\right]$ tasi p ga, $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ tasi p^2 ga va hakazo $\left[\frac{n}{p^k}\right]$ tasi p^k ga bo‘linadi. Ushbu sonlar yig‘indisi $n!$ ko‘paytmaga bo‘linishi mumkin bo‘lgan p ning eng yuqori darajasiga teng bo‘ladi. □

Misol 38.2. 40! soni ko‘pi bilan 3 ning nechanchi darajasiga bo‘linishini aniqlasak,

$$\left[\frac{40}{3}\right]+\left[\frac{40}{9}\right]+\left[\frac{40}{27}\right]=13+4+1=18.$$

Demak, 40! soni 3^{18} ga qoldiqsiz bo‘linadi.

Multiplikativ funksiyalar ham sonlar nazariyasida muhim o‘rin egallaydi.

38.4-ta’rif. Quyidagi shartlarni qanoatlantirsa $\theta(a)$ funksiya multiplikativ funksiya deyiladi:

1) $\theta(a)$ funksiya barcha musbat butun a lar uchun aniqlanib, ko‘pi bilan bitta qiymati 0 ga teng va barcha qolgan qiymatlari 0 dan farqli;

2) ixtiyoriy o‘zaro tub a_1 va a_2 musbat butun sonlar uchun

$$\theta(a_1a_2)=\theta(a_1)\theta(a_2).$$

Misol 38.3 $\theta(a)=a^s,\ \ s\in\mathbb{R}$ funksiya mutiplikativ funksiya bo‘ladi.

Multiplikativ funksiyalarning ayrim xossalarini keltirib o‘tamiz.

38.5-xossa. Multiplikativ funksiyalar uchun quyidagi xossalar o‘rinli:

a) ixtiyoriy multiplikativ funksiya uchun $\theta(1)=1$;

b) $\theta_1(a)$ va $\theta_2(a)$ mutiplikativ funksiyalar bo‘lsin, u holda $\theta_0(a)=\theta_1(a)\theta_2(a)$ ham multiplikativ funksiya bo‘ladi.

Isbot. a) aytaylik, $\theta(a_0)\neq 0$ bo‘lsin, u holda mutiplikativ funksiyaning ikkinchi shartiga asosan

$$\theta(a_0) = \theta(1\cdot a_0) = \theta(1)\cdot\theta(a_0),$$

ya’ni, $\theta(1) = 1$.

b) ravshanki, $\theta_0(1) = \theta_1(1)\theta_2(1) = 1$. Bundan tashqari, $(a_1, a_2) = 1$ sonlar uchun:

$$\theta_0(a_1a_2) = \theta_1(a_1a_2)\theta_2(a_1a_2) = \theta_1(a_1)\theta_1(a_2)\theta_2(a_1)\theta_2(a_2) =$$

$$= \theta_1(a_1)\theta_2(a_1)\theta_1(a_2)\theta_2(a_2) = \theta_0(a_1)\theta_0(a_2).$$

□

Bizga $\theta(a)$ multiplikativ funksiya va a sonining kanonik ko‘rinishi $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ berilgan bo‘lsin. $\sum_{d|a}\theta(d)$ orqali a soni-ning barcha bo‘luvchilari bo‘yicha olingan yig‘indini belgilaymiz.

38.6-xossa.

$$\sum_{d|a}\theta(d) = (1+\theta(p_1)+...+\theta(p_1^{\alpha_1}))\cdot...\cdot(1+\theta(p_k)+...+\theta(p_k^{\alpha_k})). \quad (38.1)$$

Isbot. Xossani isbotlash uchun (38.1) tenglikning o‘ng tomonini ochib chiqamiz. U holda yig‘indi hadlari quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\theta(p_1^{\beta_1})\cdot\theta(p_2^{\beta_2})\cdot...\cdot\theta(p_k^{\beta_k}) = \theta(p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot...\cdot p_k^{\beta_k}),$$

bu yerda $0 \le \beta_1 \le \alpha_1, 0 \le \beta_2 \le \alpha_2, ..., 0 \le \beta_k \le \alpha_k$.

Ushbu $p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot...\cdot p_k^{\beta_k}$ sonlar a sonining barcha bo‘luvchilarini beradi, hamda yig‘indida hech bir had ikki marta takrorlanmaydi, demak tenglikning o‘ng tomoni aynan chap tomoniga teng. □

Ushbu xossadan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

38.7-natija. $a = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot...\cdot p_k^{\alpha_k}$ sonining bo‘luvchilari soni quyi-dagiga teng:

$$(1+\alpha_1)\cdot(1+\alpha_2)\cdot...\cdot(1+\alpha_k).$$

Isbot. 38.6-xossani $\theta(a)=1$ multiplikativ funksiya uchun qo‘llasak, (38.1) tenglikning chap tomoni a sonining bo‘luvchilari sonini, o‘ng tomoni esa $(1+\alpha_1)\cdot(1+\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(1+\alpha_k)$ ifodani beradi.

□

38.8-natija. $a = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ sonining bo‘luvchilari yig‘indisi quyidagiga teng:

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}.$$

Isbot. 38.6-xossani $\theta(a)=a$ multiplikativ funksiya uchun qo‘llasak, (38.1) tenglikning chap tomoni a sonining bo‘luvchilari yig‘indisini, o‘ng tomoni esa $\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$ ifodani beradi. □

a sonining bo‘luvchilari sonini $\tau(a)$, bo‘luvchilari yig‘indisi esa $S(a)$ kabi belgilanadi.

Misol 38.4. 720 sonining bo‘luvchilari soni va bo‘luvchilari yig‘indisini toping.

$$\tau(720)=\tau(2^4\cdot 3^2\cdot 5)=(4+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1)=30;$$

$$S(720)=S(2^4\cdot 3^2\cdot 5)=\frac{2^{4+1}-1}{2-1}\cdot\frac{3^{2+1}-1}{3-1}\cdot\frac{5^{1+1}-1}{5-1}=2418.$$

38.9-ta’rif. Musbat sonlar ustida aniqlangan, hamda a soniga

$$1, 2, \ldots, a-1$$

sonlar ichida a bilan o‘zaro tub bo‘lgan sonlar sonini mos qo‘yuvchi funksiya *Eyler funksiyasi* deyiladi. Eyler funksiyasi $\varphi(a)$ kabi belgilanadi.

Misol 38.5.

$$\varphi(1)=1,\ \varphi(2)=1,\ \varphi(3)=2,\ \varphi(4)=2,\ \varphi(5)=4,\ \varphi(6)=2.$$

Eyler funksiyasining qiymatini berilgan a sonining $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}$ kanonik yoyilmasidan foydalanib, hisoblaydigan formula keltiramiz.

38.10-tasdiq. $\varphi(a) = a\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot ... \cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$

Isbot. Avval a tub son bo‘lgan holni qaraymiz, ya’ni $a = p$ biror tub songa teng bo‘lsin. U holda p tub son ekanligidan 1, 2, 3, ..., $p-1$ sonlarni xar biri bilan o‘zaro tub bo‘ladi. Demak, $\varphi(p) = p-1$.

Endi a biror tub sonning darajasi ko‘rinishida bo‘lsin ya’ni $a = p^{\alpha}$. U holda

$$\{1, 2, 3, ..., p^{\alpha}-1\} \setminus \{p, 2p, 3p, ..., (p^{\alpha-1}-1)\cdot p\}$$

sonlarning barchasi p^{α} bilan o‘zaro tub, ya’ni $\varphi(p^{\alpha}) = p^{\alpha} - p^{\alpha-1}$.

Aytaylik, $a = p_1 \cdot p_2$ ko‘rinishda bo‘lsin, bu yerda p_1, p_2 tub sonlar. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda $p_1 < p_2$ deb olib,

$$\{1, 2, ..., p_1p_2-1\} \setminus \{p_1, 2p_1, 3p_1, ..., (p_2-1)p_1, p_2, 2p_2, 3p_2, ..., (p_1-1)p_2\}$$

sonlarni qaraymiz. Bu sonlarning barchasi p_1p_2 bilan o‘zaro tub bo‘ladi, ya’ni

$$\varphi(p_1p_2) = p_1p_2 - p_1 - p_2 + 1 = (p_1-1)(p_2-1) = \varphi(p_1)\cdot\varphi(p_2).$$

Demak, o‘zaro tub bo‘lgan ikkita natural son uchun $\varphi(p_1p_2) = \varphi(p_1)\cdot\varphi(p_2)$ ekanligi kelib chiqdi.

Induksiyadan foydalangan holda juft-jufti bilan o‘zaro tub bo‘lgan k ta natural son uchun

$$\varphi(p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k) = \varphi(p_1)\cdot\varphi(p_2)\cdot ... \cdot\varphi(p_k)$$

ekanligini osongina hosil qilish mumkin.

Yuqorida berilganlardan foydalanib,

$$\varphi(p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k})=\varphi(p_1^{\alpha_1})\cdot\varphi(p_2^{\alpha_2})\cdot\ldots\cdot\varphi(p_k^{\alpha_k})=$$
$$(p_1^{\alpha_1}-p_1^{\alpha_1-1})\cdot(p_2^{\alpha_2}-p_2^{\alpha_2-1})\cdot\ldots\cdot(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1})$$

tenglikni hosil qilamiz, ya'ni

$$\varphi(a)=a\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

□

38.11-teorema (Eyler teoremasi). O'zaro tub bo'lgan a va $m(m>1)$ sonlari uchun quyidagi munosabat o'rinli:

$$a^{\varphi(m)}\equiv 1(\operatorname{mod} m). \qquad (38.2)$$

Isbot. Aytaylik, $\varphi(m)=c$ bo'lsin. m dan kichik va m bilan o'zaro tub bo'lgan turli $r_1, r_2, ..., r_c$ sonlari uchun $ar_1, ar_2, ..., ar_c$ sonlarni qaraymiz. U holda

$$ar_1\equiv s_1(\operatorname{mod} m),\ ar_2\equiv s_2(\operatorname{mod} m),\ \ldots,\ ar_c\equiv s_c(\operatorname{mod} m).$$

Bu yerda $s_1, s_2, ..., s_c$ lar o'zaro teng bo'lmagan sonlar. Haqiqatan, $s_i=s_j$ bo'lsa, u holda

$$ar_i\equiv s_i(\operatorname{mod} m),\ ar_j\equiv s_j(\operatorname{mod} m)$$

ekanligidan

$$ar_i-ar_j\equiv(s_i-s_j)(\operatorname{mod} m)\equiv 0(\operatorname{mod} m)$$

kelib chiqadi. $(a,m)=1$ bo'lganligi uchun $r_i-r_j\equiv 0(\operatorname{mod} m)$, ya'ni $r_i=r_j$. Bu esa r_k sonlarining turli ekanligiga zid.

Shuningdek, $s_1, s_2, ..., s_c$ sonlarning barchasi m bilan o'zaro tub ekanligini ko'rish qiyin emas. Bundan esa $r_1\cdot r_2\cdot\ldots\cdot r_c=s_1\cdot s_2\cdot\ldots\cdot s_c$ tenglik kelib chiqadi.

$ar_i\equiv s_i(\operatorname{mod} m)$ taqqoslamalarni hadma-had ko'paytirsak,

$$a^c r_1\cdot r_2\cdot\ldots\cdot r_c\equiv s_1\cdot s_2\cdot\ldots\cdot s_c(\operatorname{mod} m)$$

munosabatga ega bo‘lamiz. Demak, $a^c \equiv 1(\bmod m)$. □

Agar Eyler teoremasida m soni o‘rniga biror p tub olinsa, u holda (38.2) tenglik quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$a^{p-1} \equiv 1(\bmod p).$$

Ushbu teglikning ikkala tomonini a ga ko‘paytirsak,

$$a^p \equiv a(\bmod p)$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bu tenglik *Fermaning kichik teoremasi* deyiladi.

39 - §. Birinchi darajali taqqoslamalar. Qoldiqlar haqidagi Xitoy teoremasi

Biz 37-mavzuda $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ to‘plamni aniqlab, bu to‘plamda qo‘shish va ko‘paytirish amallarini kiritgan edik.

Ushbu mavzuda $\mathbb{Z}_m$ to‘plamda berilgan

$$\overline{a} \cdot \overline{x} = \overline{b}$$

bir noma’lumli birinchi darajali tenglamani yechish masalasi bilan shug‘ullanamiz.

Ma’lumki, $\mathbb{Z}_m$ da keltrilgan bir noma’lumli tenglama

$$ax \equiv b(\bmod m)$$

bir noma’lumli birinchi darajali taqqoslamaga teng kuchlidir, bu yerda $a, b \in \mathbb{Z},\ x -$noma’lum butun son.

Demak, $\mathbb{Z}_m$ dagi bir noma’lumli birinchi darajali tenglamani yechish masalasi bir noma’lumli birinchi darajali taqqoslamani yechish masalasiga ekvivalent.

Bir noma’lumli birinchi darajali taqqoslamalarni quyidagi uchta holatga ajratish mumkin:

a) $(a,m)=1$;

b) $(a,m)=d>0$ bo‘lib, b soni d ga bo‘linmaydi;

c) $(a,m)=d>0$ bo‘lib, b soni d ga bo‘linadi.

39.1-tasdiq. $ax\equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ bir noma’lumli birinchi darajali taqqoslama tenglama uchun quyidagilar o‘rinli:

a) $(a,m)=1$ bo‘lsa, taqqoslamaning yechimi mavjud va yagonadir;

b) $(a,m)=d>0$ bo‘lib, b soni d ga bo‘linmasa, yechim mavjud emas;

c) $(a,m)=d>0$ bo‘lib, b soni d ga bo‘linsa, taqqoslama d ta yechimga ega.

Isbot. Dastlab, $(a,m)=1$ bo‘lgan holni qaraymiz. 37.13-xossaga asosan $\overline{a}\cdot\overline{x}$ ko‘rinishidagi elementlardan tashkil topgan to‘plam $\mathbb{Z}_m$ bilan ustma-ust tushib, $\overline{x}$ ning turli qiymatlarida $\overline{a}\cdot\overline{x}$ ham turli qiymatlarni qabul qiladi. Demak, ixtiyoriy $\overline{b}\in\mathbb{Z}_m$ uchun yagona $\overline{x}$ topiladi, ya’ni taqqoslama yagona yechimga ega.

Aytaylik, $(a,m)=d$ bo‘lsin, ya’ni $a=a_1d$, $m=m_1d$. 37.10-xossaga asosan $ax\equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ yechimga ega bo‘lishi uchun b sonining ham d ga bo‘linishi zarur va yetarli, ya’ni $b=b_1d$.

Taqqoslamaning xar bir hadi va modulini d ga bo‘lib,

$$a_1x\equiv b_1(\mathrm{mod}\, m_1)$$

tenglamani hosil qilamiz. $(a_1,m_1)=1$ bo‘lganligi uchun bu tenglama yagona yechimga ega.

Aytaylik, x_1 soni tenglama yechimining eng kichik nomanfiy elementi bo‘lsin. U holda

$$x=x_1+m_1,\ x_1+2m_1,\ \ldots,\ x_1+(d-1)m_1$$

sonlari ham berilgan tenglamaning yechimi bo‘ladi. Ya’ni, ushbu holda tenglama d ta yechimga ega. □

Bir noma'lumli tenglamalarni yechishning bir qancha usullari mavjud.

Tanlash usuli. $\mathbb{Z}_m$ to'plam chekli bo'lganligi uchun $\overline{a}\cdot\overline{x}=\overline{b}$ tenglamaga $\mathbb{Z}_m$ dagi elementlarini birma-bir olib kelish qo'yish mumkin. Agar ularning birortasida tenglama ayniyatga aylansa, demak bu element tenglamaning yechimi bo'ladi.

Masalan, $\mathbb{Z}_6$ to'plamda $\overline{5}\cdot\overline{x}=\overline{4}$ tenglamani qaraymiz. No'malumning o'rniga $\mathbb{Z}_6$ ning elemetlarini olib borib qo'ysak, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\overline{5}\cdot\overline{1}=\overline{5},\quad \overline{5}\cdot\overline{2}=\overline{4},\quad \overline{5}\cdot\overline{3}=\overline{3},\quad \overline{5}\cdot\overline{4}=\overline{2},\quad \overline{5}\cdot\overline{5}=\overline{1}.$$

Demak, $\overline{5}\cdot\overline{x}=\overline{4}$ tenglamaning yechimi $\overline{x_0}=\overline{2}$ bo'ladi.

Sonlarning EKUBi orqali yechish usuli. Aytaylik, $\overline{a}\cdot\overline{x}=\overline{b}$ tenglamada $(a,m)=1$ bo'lsin. U holda $\exists u,v\in\mathbb{Z}$ sonlari topilib,

$$au+mv=1$$

bo'ladi. Bu tenglikdan $\overline{a}\cdot\overline{u}=\overline{1}$ ekanligini hosil qilamiz.

$\overline{a}\cdot\overline{x}=\overline{b}$ tenglamaning ikkala tomonini $\overline{u}$ ga ko'paytirsak,

$$\overline{u}\cdot\overline{a}\cdot\overline{x}=\overline{u}\cdot\overline{b},$$

$$(\overline{u}\cdot\overline{a})\cdot\overline{x}=\overline{u}\cdot\overline{b},$$

$$\overline{1}\cdot\overline{x}=\overline{u}\cdot\overline{b},$$

$$\overline{x}=\overline{u}\cdot\overline{b}.$$

Demak, $\overline{x}=\overline{u}\cdot\overline{b}$ berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi.

Misol 39.1. $\overline{7}\cdot\overline{x}=\overline{9}$ tenglamani $\mathbb{Z}_{10}$ da yeching. Bu yerda $a=7$, $b=9$ va $m=10$ bo'lib, $(7,10)=1$. Yevklid algoritmidan foydalanib $7\cdot 3+10\cdot(-2)=1$ ekanligini hosil qilamiz, ya'ni $u=3$, $v=-2$.

Demak,

$$\overline{x}=\overline{3}\cdot\overline{9}=\overline{3\cdot 9}=\overline{27}=\overline{7}$$

tenglamaning yechimi bo‘ladi.

Eyler teoremasidan foydalanib yechish usuli. Ma’lumki, $(a,m)=1$ bo‘lsa, $a^{\varphi(m)}\equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$ bo‘ladi. Endi $\overline{a}\cdot\overline{x}=\overline{b}$ tenglamaning ikkala tomonini $a^{\varphi(m)-1}$ ga ko‘paytirsak,

$$\overline{a^{\varphi(m)-1}}\cdot\overline{a}\cdot\overline{x}=\overline{a^{\varphi(m)-1}}\cdot\overline{b},$$

$$\overline{a^{\varphi(m)}}\cdot\overline{x}=\overline{a^{\varphi(m)-1}}\cdot\overline{b},$$

$$\overline{1}\cdot\overline{x}=\overline{a^{\varphi(m)-1}}\cdot\overline{b},$$

$$\overline{x}=\overline{a^{\varphi(m)-1}}\cdot\overline{b}.$$

hosil bo‘ladi. Topilgan $\overline{x}$ element tenglamaning yechimi bo‘ladi.

Misol 39.2. $\overline{3}\cdot\overline{x}=\overline{7}$ tenglamani $\mathbb{Z}_{11}$ da yeching. Ushbu tenglamada $(3,11)=1$ bo‘lganligi uchun yuqorida keltirilgan usuldan foydalanamiz. $\varphi(11)=10$ ekanligi uchun

$$\overline{x}=\overline{3^9}\cdot\overline{7}=\overline{27^3}\cdot\overline{7}=\overline{5^3}\cdot\overline{7}=\overline{125}\cdot\overline{7}=\overline{4}\cdot\overline{7}=\overline{28}=\overline{6}$$

bo‘ladi.

Uzluksiz kasrlardan foydalanish usuli. Ushbu usul bevosita

$$ax\equiv b(\mathrm{mod}\, m)$$

taqqoslama uchun keltiriluvchi usuldir.

Taqqoslamali tenglamada $(a,m)=1$ va $a>0$ bo‘lsin. U holda $\dfrac{m}{a}$ kasrni uzluksiz kasrga yoyib, P_k, Q_k munosib kasrlarni topamiz.

Bu munosib kasrlar uchun

$$P_kQ_{k-1}-P_{k-1}Q_k=(-1)^k$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. $P_n=m,\ Q_n=a$ bo‘lishini inobatga olsak,

$$mQ_{n-1}-P_{n-1}a=(-1)^n$$

tenglikni hosil qilamiz.

Oxirgi tenglikdan $aP_{n-1} = (-1)^{n-1} + mQ_{m-1}$ yoki

$$aP_{n-1} \equiv (-1)^{n-1} (\mathrm{mod}\, m)$$

hosil bo‘ladi. Agar $ax \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ taqqoslamaning ikkala tomonini $(-1)^{n-1} P_{n-1}$ ga ko‘paytirsak,

$$(-1)^{n-1} P_{n-1} \cdot a \cdot x \equiv (-1)^{n-1} P_{n-1} \cdot b(\mathrm{mod}\, m),$$

$$(-1)^{n-1} \cdot (-1)^{n-1} \cdot x \equiv (-1)^{n-1} P_{n-1} \cdot b(\mathrm{mod}\, m),$$

$$x \equiv (-1)^{n-1} P_{n-1} \cdot b(\mathrm{mod}\, m)$$

yechimni hosil qilamiz.

Misol 39.3. $105x \equiv 51(\mathrm{mod} 159)$ taqqoslamani yeching.

$(105,159) = 3$ va $51 = 3 \cdot 17$ bo‘lganligi uchun taqqoslamaning modulini va ikkala tomonini 3 ga bo‘lamiz, ya’ni

$$35x \equiv 17(\mathrm{mod}\, 53)$$

taqqoslama hosil bo‘ladi.

Endi $\frac{53}{35}$ kasrni munosib kasrga yoyamiz. Buning uchun Yevklid algoritmidan foydalanamiz:

$$53 = 35 \cdot 1 + 18,$$

$$35 = 18 \cdot 1 + 17,$$

$$18 = 17 \cdot 1 + 1,$$

$$17 = 1 \cdot 17.$$

$q_1 = 1,\ q_2 = 1,\ q_3 = 1,\ q_4 = 17$ ekanligidan foydalanib, quyidagi jadvaldan P_1, P_2, P_3, P_4 larni topamiz:

q_k	0	1	1	1	17
P_k	1	1	2	3	53

Demak, $P_3 = 3$ bundan

$$x \equiv (-1)^3 \cdot 3 \cdot 17 \pmod{53} \equiv -51 \pmod{53} \equiv 2 \pmod{53}$$

yechim hosil bo‘ladi.

Berilgan $105x \equiv 51 \pmod{159}$ taqqoslamaning yechimlari esa, quyidagilardan iborat bo‘ladi:

$$x \equiv 2 \pmod{159},$$

$$x \equiv 55 \pmod{159},$$

$$x \equiv 108 \pmod{159}.$$

Koeffitsientlarni o‘zgartirish usuli. Amalda taqqoslamali tenglamalarda taqqoslamaning xossalaridan foydalanib, noma’lum oldidagi koeffitsientni yoki b ni o‘zgartirish mumkin. O‘zgartirishni shunday almashtirish kerakki, natijada o‘ng tomonda hosil bo‘lgan son a ga bo‘linsin. Bu usul gohida yuqoridagi usullarni qo‘llamasdan turib, taqqoslamali tenglamalarning yechimini topishga umkon beradi.

Misol 39.4. $9x \equiv 7 \pmod{11}$ taqqoslamani yeching.

$$9x \equiv 7 \pmod{11},$$

$$9x \equiv (7+11) \pmod{11},$$

$$9x \equiv 18 \pmod{11}.$$

$(9,11) = 1$ bo‘lganligi uchun, tenglikni ikki tomonini 9 ga bo‘lib yuborilsa, $x \equiv 2 \pmod{11}$ yechim hosil bo‘ladi.

Misol 39.5. $55x \equiv 35 \pmod{36}$ taqqoslamani yeching.

Taqqoslamaning ikki tomonini 5 ga bo‘lib, so‘ngra koeffitsientini o‘zgartirsak,

$$11x \equiv 7 \pmod{36},$$

$$11x \equiv (7-216) \pmod{36},$$

$$11x \equiv -209 \pmod{36},$$

$$x \equiv -19 \pmod{36},$$

$$x \equiv 17 \pmod{36}$$

kelib chiqadi.

Qoldiqlar haqidagi Xitoy teoremasi. Endi quyidagi taqqoslamalar sistemasini qaraymiz:

$$\begin{cases} x \equiv b_1 (\mathrm{mod}\, m_1), \\ x \equiv b_2 (\mathrm{mod}\, m_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x \equiv b_k (\mathrm{mod}\, m_k), \end{cases}$$

bu yerda, $m_1, m_2, ..., m_k$ sonlari jufti-jufti bilan o‘zaro tub sonlar.

Bu sistema bir no‘malumli *chiziqli taqqoslamalar sistemasi* deyiladi.

39.2-teorema (Qoldiqlar haqidagi Xitoy teoremasi). Bir no‘malumli chiziqli taqqoslamalar sistemasi berilgan bo‘lib, M_s va M'_s sonlari quyidagicha aniqlangan bo‘lsin:

$$m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_s = M_s \cdot m_s, \; M_s \cdot M'_s = 1 (\mathrm{mod}\, m_s).$$

x_0 sonini quyidagicha aniqlaymiz:

$$x_0 = M_1 \cdot M'_1 \cdot b_1 + M_2 \cdot M'_2 \cdot b_2 + ... + M_k \cdot M'_k \cdot b_k.$$

U holda

$$x \equiv x_0 (\mathrm{mod}\, m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k)$$

taqqoslamani qanoatlantiruvchi barcha x lar to‘plami berilgan sistemaning yechimlari to‘plamiga teng bo‘ladi.

Isbot. M_j larning aniqlanishiga ko‘ra, M_s dan farqli barcha M_j lar m_s ga bo‘linadi. Natijada,

$$x_0 \equiv M_s M'_s b_s (\mathrm{mod}\, m_s) \equiv b_s (\mathrm{mod}\, m_s)$$

hosil bo‘ladi. Shu sababli $x = x_0$ yechim sistemani qanoatlantiradi.

Bundan esa, berilgan sistema quyidagi sistemaga ekvivalent ekanligi kelib chiqadi:

$$\begin{cases} x \equiv x_0 (\mathrm{mod}\, m_1), \\ x \equiv x_0 (\mathrm{mod}\, m_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x \equiv x_0 (\mathrm{mod}\, m_k). \end{cases}$$

37.8 va 37.9-xossalarga asosan, bu sistema

$$x \equiv x_0 (\mathrm{mod}\, m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k)$$

taqqoslamaga teng kuchlidir. □

Misol 39.6. Quyidagi sistemani yeching.

$$\begin{cases} x \equiv b_1 (\mathrm{mod}\, 4), \\ x \equiv b_2 (\mathrm{mod}\, 5), \\ x \equiv b_3 (\mathrm{mod}\, 7). \end{cases}$$

Bu yerda $M_1 = 35,\ M_2 = 28,\ M_3 = 20$ bo‘lganligi uchun,

$$35 \cdot 3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4),\ \ 28 \cdot 2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 5),\ \ 20 \cdot 6 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7)$$

ekanligidan $M_1 = 3,\ M_2 = 2,\ M_3 = 6$ bo‘lishini hosil qilamiz. Demak,

$$x_0 = 35 \cdot 3b_1 + 28 \cdot 6b_2 + 20 \cdot 6b_3 = 105b_1 + 56b_2 + 120b_3.$$

Yuqoridagi teoremaga ko‘ra berilgan sistema quyidagi tenglamaga teng kuchli:

$$x \equiv (105b_1 + 56b_2 + 120b_3)(\mathrm{mod}\, 140).$$

Aytaylik, $b_1 = 1,\ b_2 = 3$ va $b_3 = 2$ bo‘lsin, u holda

$$x_0 = 105 \cdot 1 + 56 \cdot 3 + 120 \cdot 2$$

bo‘lib, sistemaning quyidagi yechimi hosil bo‘ladi

$$x \equiv (105 \cdot 1 + 56 \cdot 3 + 120 \cdot 2)(\mathrm{mod}\, 140) = 93 (\mathrm{mod}\, 140)$$

40 - §. Ixtiyoriy modul bo‘yicha berilgan *n*-darajali taqqoslamalar

Ushbu mavzuda n-darajali ixtiyoriy $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$ ko‘phad uchun

$$f(x)\equiv 0(\bmod m), \tag{40.1}$$

taqqoslamali tenglamani o‘rganamiz.

Dastlab m tub son bo‘lgan holni qaraymiz, ya’ni $m=p$.

40.1-tasdiq. $f(x)\equiv 0(\bmod p)$ ko‘rinishidagi taqqoslama darajasi $p-1$ dan oshmaydigan taqqoslamaga teng kuchli.

Isbot. $f(x)$ ko‘phadni x^p-x ko‘phadga qoldiqli bo‘lamiz:

$$f(x)=(x^p-x)q(x)+r(x),\ \deg r(x)\le p-1.$$

p tub son bo‘lganligi uchun Fermaning kichik teoremasiga ko‘ra $x^p-x\equiv 0(\bmod p)$. Demak, $f(x)\equiv r(x)(\bmod p)$. □

40.2-tasdiq. Agar $f(x)\equiv 0(\bmod p)$ taqqoslama n tadan ko‘p yechimga ega bo‘lsa, $f(x)$ ko‘phadning barcha koeffitsiyentlari p ga bo‘linadi, bu yerda $n=\deg f(x)$.

Isbot. Aytaylik, $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$ bo‘lsin. Taqqoslama n tadan ko‘p yechimga ega bo‘lsa, $x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1}$ sonlarni uning yechimi deb olib, $f(x)$ ko‘phadni quyidagi ko‘rinishda ifodalaymiz:

$$\begin{aligned} f(x)= \ & b_0(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot...\cdot(x-x_{n-2})\cdot(x-x_{n-1})\cdot(x-x_n)+\\ & +b_1(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot...\cdot(x-x_{n-2})\cdot(x-x_{n-1})+\\ & +b_2(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot...\cdot(x-x_{n-2})+\\ & +..+\\ & +b_{n-2}(x-x_1)\cdot(x-x_2)+\\ & +b_{n-1}(x-x_1)+\\ & +b_n \end{aligned} \tag{40.2}$$

Buning uchun $b_0 = a_0$ deb olib, b_1 koeffitsiyentni (40.2) ifodada x^{n-1} hadning oldidagi koeffitsiyenti a_1 ga teng bo‘lishidan topamiz, ya’ni b_1 ning ko‘rinishi a_1 va b_0 larning chiziqli ifodasidan iborat bo‘ladi. So‘ngra, x^{n-2} hadning oldidagi koeffitsiyentni tenglash orqali b_2 ning ko‘rinishini a_2, b_1 va b_0 larning chiziqli ifodasi orqali topamiz. Bu jarayonni davom ettirish natijasida ozod hadlarni tenglab, b_n ni a_n, b_{n-1}, …, b_0 orqali chiziqli ifodalaymiz. Demak, $f(x)$ ko‘phadni (40.2) ko‘rinishga keltirish mumkin.

$x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}$ sonlari taqqoslamaning ildizlari ekanligidan $b_n, b_{n-1}, ..., b_1, b_0$ sonlari p ga bo‘linishi kelib chiqadi. $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ sonlari p ga bo‘linadigan sonlar orqali chiziqli ifodalangani uchun ular ham p ga bo‘linadi. □

40.3-tasdiq (Vilson teoremasi). Ixtiyoriy p tub son uchun

$$1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (p-1) + 1 \equiv 0 (\text{mod}\, p).$$

Isbot. $p = 2$ uchun tasdiq to‘g‘ri ekanligi ravshan.

Agar $p > 2$ bo‘lsa, quyidagi taqqoslamani qaraymiz

$$(x-1) \cdot (x-2) \cdot ... \cdot (x-(p-1)) - (x^{p-1} - 1) \equiv 0 (\text{mod}\, p).$$

Ma’lumki, bu taqqoslamaning darajasi $p-1$ dan kichik bo‘lib, $p-1$ ta 1, 2, ..., $p-1$ yechimlarga ega. Demak, 40.2-tasdiqqa ko‘ra bu taqqoslamadagi ko‘phadning barcha koeffitsiyentlari p ga bo‘linadi. Xususan, uning ozod hadi $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (p-1) + 1$ ga teng bo‘lib, u ham p ga bo‘linadi. □

Endi $m = p^{\alpha}$ bo‘lgan holni, ya’ni

$$f(x) \equiv 0 (\text{mod}\, p^{\alpha}) \qquad (40.3)$$

ko‘rinishidagi taqqoslamalarni qaraymiz. Umuman olganda ushbu taqqoslamani yechish masalasi

$$f(x) \equiv 0 (\text{mod}\, p) \qquad (40.4)$$

taqqoslamani yechishga keltiriliadi.

(40.3) taqqoslamaning ixtiyoriy yechimi (40.4) taqqoslamaning ham yechimi bo‘lishi ravshan.

Endi (40.4) taqqoslama yechimi orqali (40.3) taqqoslama yechimini qurishni ko‘rsatamiz. Aytaylik, (40.4) taqqoslamaning biror umumiy yechimi $x \equiv x_1 (\mathrm{mod}\, p)$ bo‘lsin, ya’ni $x = x_1 + p \cdot t_1$ ko‘rinishidagi sonlar yechim bo‘lsin.

$f(x)$ ko‘phadni x_1 nuqta atrofida

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{f''(x_1)}{2!}(x - x_1)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x - x_1)^n \ ,$$

ko‘rinishida Teylor qatoriga yoyib, ushbu $f(x_1 + p \cdot t_1) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p^2)$ taqqoslamani qarasak, bu taqqoslamaning ko‘rinishi quyidagi shaklga keladi

$$f(x_1) + p \cdot t_1 \cdot f'(x_1) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p^2),$$

ya’ni

$$\frac{f(x_1)}{p} + t_1 \cdot f'(x_1) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p).$$

Bu esa, t_1 noma’lumga nisbatan birinchi darajali taqqoslama bo‘lib, $f'(x_1)$ soni p ga bo‘linmasa bu taqqoslama yagona yechimga ega bo‘ladi. Aytaylik, $t_1 \equiv t_1' (\mathrm{mod}\, p)$ uning yechimi bo‘lsin, ya’ni $t_1 = t_1' + p \cdot t_2$. U holda

$$x = x_1 + p \cdot t_1 = x_1 + p \cdot t_1' + p^2 t_2 = x_2 + p^2 t_2$$

Ushbu sonlarni $f(x) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p^3)$ taqqoslamaga qo‘yib, $f(x)$ ko‘phadni x_2 nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyilmasidan foydalansak,

$$f(x_2) + p^2 \cdot t_2 \cdot f'(x_2) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p^3),$$

ya’ni

$$\frac{f(x_2)}{p^2} + t_2 \cdot f'(x_2) \equiv 0 (\bmod p)$$

taqqoslamaga ega bo‘lamiz.

$x_2 = x_1 + p \cdot t_1'$ ekanligidan $f'(x_2) \equiv f'(x_1) (\bmod p)$ kelib chiqadi, ya’ni $f'(x_1)$ soni p ga bo‘linmaganligu uchun $f'(x_2)$ ham p ga bo‘linmaydi. Bundan esa t_2 noma’lumga nisbatan hosil bo‘lgan yuqoridagi birinchi darachali taqqoslama ham yagona yechimga egaligi kelib chiqadi. Agar $t_2 \equiv t_2' (\bmod p)$ uning yechimi, ya’ni $t_2 = t_2' + p \cdot t_3$ bo‘lsa, u holda

$$x = x_1 + p \cdot t_1 = x_2 + p^2 t_2 = x_2 + p^2 t_2' + p^3 t_3 = x_3 + p^3 t_3 .$$

Bu jarayonni p^α gacha davom ettirib, (40.4) taqqoslamaning $f'(x_1)$ soni p ga bo‘linmaydigan x_1 yechimi orqali (40.3) taqqoslamaning $x = x_\alpha + p^\alpha t_\alpha$ yechimini hosil qilamiz.

Misol 40.1. $x^4 + 7x + 4 \equiv 0 (\bmod 27)$ taqqoslamani yeching.

$p = 3^3$ bo‘lganligi uchun, dastlab $x^4 + 7x + 4 \equiv 0 (\bmod 3)$ taqqoslamani qaraymiz. Ma’lumki, bu tenglama yagona yechimga ega bo‘lib, uning yechimi $x \equiv 1 (\bmod 3)$. Bundan tashqari, $f'(1) = 11$ bo‘lib u son 3 ga bo‘linmaydi. Demak, berilgan taqqoslama ham yagona yechimga ega. Bu yechimni topish uchun dastlab, $x = 1 + 3t_1$ ekanligidan foydalanib, quyidagi taqqoslamani qaraymiz:

$$f(1) + 3t_1 f'(1) \equiv 0 (\bmod 9),$$

$$12 + 3t_1 \cdot 11 \equiv 0 (\bmod 9),$$

$$3 + 6t_1 \equiv 0 (\bmod 9),$$

$$1 + 2t_1 \equiv 0 (\bmod 3).$$

Bu taqqoslamadan $t_1 \equiv 1 (\bmod 3)$, ya’ni $t_1 = 1 + 3t_2$ kelib chiqadi. Bundan esa, $x = 1 + 3t_1 = 4 + 9t_2$ eganligini hosil qilamiz. Endi quyidagi taqqoslamani qaraymiz:

$$f(4)+9t_2 f'(4)\equiv 0(\bmod 27),$$

$$288+9t_2\cdot 263\equiv 0(\bmod 27),$$

$$18+9t_2\cdot 20\equiv 0(\bmod 27),$$

$$2+20t_2\equiv 0(\bmod 3),$$

$$2+2t_2\equiv 0(\bmod 3),$$

$$t_2\equiv 2(\bmod 3).$$

Demak, $t_2=2+3t_3$ ya'ni $x=1+3t_1=4+9t_2=22+27t_3$. Shunday qilib, berilgan taqqoslamaning yechimi $x=22+27t_3$ ekanligini hosil qildik.

Endi $f(x)\equiv 0(\bmod m)$, taqqoslamani yechishning umumiy holini qaraymiz. Ya'ni m ixtiyoriy natural son bo'lsin.

40.4-tasdiq. Agar $m=m_1\cdot m_2\cdot\ldots\cdot m_k$ bo'lib, $(m_i,m_j)=1$ bo'lsa, $f(x)\equiv 0(\bmod m)$ taqqoslama quyidagi sistemaga teng kuchli bo'ladi:

$$\begin{cases} f(x)\equiv 0(\bmod m_1), \\ f(x)\equiv 0(\bmod m_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f(x)\equiv 0(\bmod m_k). \end{cases}$$

Bundan tashqari, agar $T_1, T_2, \ldots, T_k$ sonlari sistemaning har bir taqqoslamasi yechimlari soni bo'lsa, u holda $f(x)\equiv 0(\bmod m)$ taqqoslama yechimlari soni $T_1\cdot T_2\cdot\ldots\cdot T_k$ ga teng bo'ladi.

Isbot. Tasdiq birinchi qismining isboti 37.8 va 37.9-xossalardan to'g'ridan-to'g'ri kelib chiqadi.

Ikkinchi qismining isbotini esa quyidagi mulohaza orqali hosil qilamiz. Aytaylik, xar bir

$$f(x)\equiv 0(\bmod m_s)$$

taqqoslama T_s ta yechimga ega bo'lib, ularning yechimlari

$$x \equiv b_{s,1} (\bmod m_s),\ x \equiv b_{s,2} (\bmod m_s),\ \ldots,\ x \equiv b_{s,T_s} (\bmod m_s)$$

ko‘rinishida bo‘lsin. Bundan ko‘rinadiki,

$$x \equiv b_1 (\bmod m_1),$$

$$x \equiv b_2 (\bmod m_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x \equiv b_k (\bmod m_k)$$

ko‘rinishidagi kombinatsiyalar soni aynan $T_1 \cdot T_2 \cdot \ldots \cdot T_k$ ta bo‘lib, ular m modul bo‘yicha turli sinflarni beradi. □

Bu tasdiqdan ko‘rinadiki, $f(x) \equiv 0 (\bmod m)$, $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ ko‘rinishidagi taqqoslamani yechish masalasi $f(x) \equiv 0 (\bmod p_i^{\alpha_i})$ taqqoslamalarni yechish masalasiga keltirildi.

Misol 40.2. $x^4 + 2x^3 + 8x + 9 \equiv 0 (\bmod 35)$ taqqoslamani yeching.

Yuqoridagi tasdiqqa ko‘ra ushbu taqqoslama quyidagi sistemaga teng kuchli

$$\begin{cases} x^4 + 2x^3 + 8x + 9 \equiv 0 (\bmod 5), \\ x^4 + 2x^3 + 8x + 9 \equiv 0 (\bmod 7). \end{cases}$$

Bu sistemaning birinchi taqqoslamasi ikkita $x \equiv 1;\ 4 (\bmod 5)$, ikkinchi taqqoslamasi esa uchta $x \equiv 3;\ 5;\ 6 (\bmod 7)$ yechimlarga ega. Demak, berilgan taqqoslama oltita yechimga ega bo‘ladi. Bu yechimlarni topish uchun esa, quyidagi 6 ta sistemani yechish kerak bo‘ladi:

$$\begin{cases} x \equiv b_1 (\bmod 5), \\ x \equiv b_2 (\bmod 7), \end{cases} \tag{40.5}$$

bu yerda $b_1 \in \{1;\ 4\}$, $b_2 \in \{3;\ 5;\ 6\}$.

39.1-teoremadan foydalanib, bu sistemani yechsak, $m_1 = 5$, $m_2 = 7$ ekanligidan $M_1 = 7$ va $M_2 = 5$ kelib chiqadi. $7 \cdot 3 \equiv 1 (\bmod 5)$ va

$5\cdot 3\equiv 1(\bmod 7)$ bo‘lganligi uchun $M_1'=3$ va $M_2'=3$ hosil bo‘ladi. Demak, (40.5) sistemalarning yechimlari

$$x\equiv 21b_1+15b_2(\bmod 35)$$

ko‘rinishida bo‘ladi.

$b_1\in\{1;\,4\}$, $b_2\in\{3;\,5;\,6\}$ ekanligidan esa, berilgan taqqoslamaning quyidagi yechimlarini hosil qilamiz:

$$x\equiv 6;\,19;\,24;\,26;\,31;\,34(\bmod 35).$$

41 - §. Lejandr va Yakobi simvollari

Ushbu mavzuda yuqori darajali taqqoslamalarni qaraymiz, ya’ni bizga

$$x^n\equiv a(\bmod m) \qquad (41.1)$$

taqqoslama berilgan bo‘lib, $(a,m)=1$ bo‘lsin.

41.1-ta’rif. Agar $x^n\equiv a(\bmod m)$ taqqoslama yechimga ega bo‘lsa, u holda a soniga n-darajali chegirma deyiladi, aks holda a soni n-darajali chegirma emas deyiladi.

Shuningdek, $n=2$, $n=3$ va $n=4$ bo‘lganda chegirmalar mos ravishda kvadratik, kubik va bikvadratik deyiladi.

Dastlab, kvadratik bo‘lgan holga basafsil to‘xtalamiz. Aytaylik, bizga

$$x^2\equiv a(\bmod p) \qquad (41.2)$$

kvadratik taqqoslama berilgan bo‘lsin, bu yerda $p(p>2)-$tub son.

41.2-ta’sdiq. Agar a soni p modul bo‘yicha kvadratik chegirma bo‘lsa, u holda $x^2\equiv a(\bmod p)$ chegirma ikkita yechimga ega.

Isbot. Haqiqatdan, agar a soni p modul bo‘yicha kvadratik chegirma bo‘lsa, u holda (41.2) chegirma kamida bitta yechimga ega.

Aytaylik, $x \equiv x_1 (\bmod p)$ yechim bo‘lsin, u holda $(-x_1)^2 = x_1^2$ ekanligidan ushbu $x \equiv -x_1 (\bmod p)$ ham yechim ekanligi kelib chiqadi.

Bu ikki yechim o‘zaro teng emas, chunki $x_1 \equiv -x_1 (\bmod p)$ bo‘lsa, bundan $2x_1 \equiv 0 (\bmod p)$ kelib chiqadi, ammo bu $(2, p) = (x_1, p) = 1$ ekanligiga zid.

Kvadratik chegirmaning ikkitadan ko‘p yechimi mavjud bo‘lmaganligi uchun bu yechimlar uning barcha yechimlarini beradi.

□

41.3-tasdiq. p modul bo‘yicha keltirilgan sistemalardan $\frac{p-1}{2}$ tasi kvadratik chegirma bo‘lib, ular quyidagi sonlardan biriga teng:

$$1^2,\ 2^2,\ \ldots,\ \left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

Isbot. Haqiqatdan ham, p modul bo‘yicha keltirilgan sistemaning chegirmalari orasida kvadratik chegirma bo‘ladiganlari faqat quyidagi sonlarning kvadratlari bo‘ladi:

$$-\frac{p-1}{2},\ \ldots,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{p-1}{2}.$$

Bu sonlar p ta bo‘lib, ular juft-jufti bilan p modul bo‘yicha taqqoslanmaydigan sonlardir. Bu sonlarning kvadratlari esa aynan

$$1^2,\ 2^2,\ \ldots,\ \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

sonlarni beradi. Bundan tashqari, ushbu kvadratlar ham juft-jufti bilan p modul bo‘yicha taqqoslanmaydigan sonlardir. Chunki,

$$k^2 \equiv l^2 (\bmod p),\ 0 < k < l \le \frac{p-1}{2}$$

bo‘lsa, u holda $x^2 \equiv l^2 (\mathrm{mod}\, p)$ tenglama to‘rtta $x = -l, -k, k, l$ yechimga ega. Bu esa kvadratik tenglamaning yechimi aynan ikkita bo‘lishiga zid. □

41.4-tasdiq. Agar a soni p modul bo‘yicha kvadratik chegirma bo‘lsa, u holda

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p), \tag{41.3}$$

aks holda, ya’ni a soni p modul bo‘yicha kvadratik chegirma bo‘lmasa,

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p). \tag{41.4}$$

Isbot. Ferma teoremasiga ko‘ra, $a^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$. Bundan esa,

$$\left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1 \right) \cdot \left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1 \right) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$$

kelib chiqadi.

Bu ko‘paytmalardan faqat bittasi p ga bo‘linadi. Chunki, ikkalasi ham p ga bo‘linsa, u holda 2 ham p ga bo‘linishiga to‘g‘ri keladi. Shu sababli (41.3) va (41.4) taqqoslamalarning aynan bittasi o‘rinli bo‘ladi.

Agar a kvadratik chegirma bo‘lsa, u holda qandaydir x uchun

$$a \equiv x^2 (\mathrm{mod}\, p)$$

o‘rinli bo‘ladi. Bu tenglikning ikkala tomonini $\frac{p-1}{2}$ darajaga ko‘tarib,

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv x^{p-1} (\mathrm{mod}\, p) \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$$

tenglikni hosil qilamiz. Ya’ni, a kvadratik chegirma uchun (41.3) munosabat o‘rinli.

Bundan tashqari, kvadratik chegirmalar soni $\frac{p-1}{2}$ ta bo‘lganligi va $x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 (\bmod p)$ tenglama $\frac{p-1}{2}$ tadan ko‘p yechimga ega bo‘lmaganligi uchun kvadratik chegirma bo‘lmagan sonlar uchun (41.4) shart o‘rinli ekanligi kelib chiqadi. □

Lejandr simvoli. p ga bo‘linmaydigan a soni berilgan bo‘lsin.

41.5-ta’rif. p ga bo‘linmaydigan barcha a lar uchun quyidagicha aniqlangan songa Lejandr simvoli deyiladi:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{agar } a \text{ kvadratik chegirma bo'lsa,} \\ -1, & \text{aks holda.} \end{cases}$$

Yuqoridagi ifodani 41.4-tasdiqdan foydalanib quyidagicha yozish mumkin:

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} (\bmod p). \qquad (41.5)$$

41.6-xossa. Lejandr simvoli uchun quyidagilar o‘rinli

a) agar $a \equiv a_1 (\bmod p)$ bo‘lsa, u holda $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a_1}{p}\right)$;

b) $\left(\frac{1}{p}\right) = 1$;

c) $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$;

d) $\left(\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k}{p}\right) = \left(\frac{a_1}{p}\right) \cdot \left(\frac{a_2}{p}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a_k}{p}\right)$.

Isbot. Xossaning a) qismi o‘rinli ekanligi ekvivalent sinfdan olingan sonlar bir vaqtda yoki kvadratik chegirma yoki chegirma bo‘lmasligidan kelib chiqadi.

1 kvadratik chegirma bo‘lganligi uchun b) o‘rinli.

Xossaning c) qismi (41.5) munosabatdan $a=-1$ bo‘lganda kelib chiqadi.

Oxirgi d) xossaning o‘rinli ekanligi quyidagi tengliklardan kelib chiqadi:

$$\left(\frac{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k}{p}\right)\equiv(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k)^{\frac{p-1}{2}}(\mathrm{mod}\ p)\equiv$$

$$\equiv(a_1^{\frac{p-1}{2}}\cdot a_2^{\frac{p-1}{2}}\cdot\ldots\cdot a_k^{\frac{p-1}{2}})(\mathrm{mod}\ p)=\left(\frac{a_1}{p}\right)\cdot\left(\frac{a_2}{p}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a_k}{p}\right).\qquad\square$$

41.7-natija. $\left(\frac{ab^2}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)$.

Lejandr simvolining keyingi xossalarini keltrirish uchun quyidagi belgilashlarni kiritib olazmiz.

$p_1=\frac{p-1}{2}$ deb belgilab, quyidagi taqqoslamalarni qaraymiz.

$$\begin{cases} a\cdot 1\equiv\varepsilon_1\cdot r_1(\mathrm{mod}\ p),\\ a\cdot 2\equiv\varepsilon_2\cdot r_2(\mathrm{mod}\ p),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ a\cdot p_1\equiv\varepsilon_{p_1}\cdot r_{p_1}(\mathrm{mod}\ p),\end{cases}\tag{41.6}$$

bu yerda $\varepsilon_k\cdot r_k$ soni $a\cdot k$ sonining p modul bo‘yicha absolyut qiymati eng kichik bo‘lgan chegirmasi, ya’ni $\varepsilon_k=\pm1$ va $1\le r_k\le p_1$.

41.8-xossa. $\left(\frac{a}{p}\right)=\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2\cdot\ldots\cdot\varepsilon_{p_1}$.

Isbot. Ma’lumki, $a\cdot1, -a\cdot1, a\cdot2, -a\cdot2, \ldots, a\cdot p_1, -a\cdot p_1$ sonlari p modul bo‘yicha chegirmalarning to‘la sistemasini beradi. Ularning absolyut qiymati eng kichik bo‘lgan chegirmalari esa,

$$\varepsilon_1\cdot r_1, -\varepsilon_1\cdot r_1, \varepsilon_2\cdot r_2, -\varepsilon_2\cdot r_2, \ldots, \varepsilon_{p_1}\cdot r_{p_1}, -\varepsilon_{p_1}\cdot r_{p_1}$$

bo‘ladi. $r_1, r_2, ..., r_{p_1}$ lar turli hil qiymatlarni qabul qilib, $1 \le r_k \le p_1$ bo‘lganligi uchun

$$r_1 \cdot r_2 \cdot ... \cdot r_{p_1} = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot p_1.$$

Yuqoridagi (41.6) taqqoslamalarni hadma-had ko‘paytirsak,

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot ... \cdot \varepsilon_{p_1} \pmod p$$

hosil bo‘ladi, ya’ni $\left(\dfrac{a}{p}\right) = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot ... \cdot \varepsilon_{p_1}$. □

41.9-xossa. $\varepsilon_k = (-1)^{[\frac{2ak}{p}]}$, ya’ni $\left(\dfrac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{k=1}^{p_1}[\frac{2ak}{p}]}$.

Isbot. Bu xossani isbotlash uchun $\dfrac{2 \cdot a \cdot k}{p}$ sonining butun qismini qaraymiz:

$$\left[\frac{2 \cdot a \cdot k}{p}\right] = \left[2 \cdot \left[\frac{a \cdot k}{p}\right] + 2 \cdot \left\{\frac{a \cdot k}{p}\right\}\right] = 2 \cdot \left[\frac{a \cdot k}{p}\right] + \left[2 \cdot \left\{\frac{a \cdot k}{p}\right\}\right].$$

Bu tenglikdan ko‘rinadiki, ushbu ifodaning juft yoki toq son bo‘lishi $a \cdot k$ sonining p modul bo‘yicha eng kichik musbat chegirmasi $\dfrac{1}{2}p$ dan kichik yoki katta ekanligi bilan aniqlanadi. Ma’lumki, agar eng kichik musbat chegirma $\dfrac{1}{2}p$ dan kichik bo‘lsa $\varepsilon_k = 1$, aks holda $\varepsilon_k = -1$ bo‘ladi. Demak, $\varepsilon_k = (-1)^{[\frac{2ak}{p}]}$. Bundan esa, $\left(\dfrac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{k=1}^{p_1}[\frac{2ak}{p}]}$ kelib chiqadi. □

41.10-natija. $\left(\dfrac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{2}}$.

Isbot.

$$\left(\frac{2}{p}\right)=\left(\frac{2+2p}{p}\right)=\left(\frac{4\cdot\frac{1+p}{2}}{p}\right)=\left(\frac{\frac{1+p}{2}}{p}\right)=$$

$$=(-1)^{\sum\limits_{k=1}^{p_1}[\frac{(1+p)k}{p}]}=(-1)^{\sum\limits_{k=1}^{p_1}[\frac{k}{p}]+\sum\limits_{k=1}^{p_1}k}=(-1)^{\sum\limits_{k=1}^{p_1}k}=(-1)^{\frac{p_1(p_1+1)}{2}}=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

□

Agar 41.10-natija isbotidagi mulohazalarni ixtiyoriy $2a$ (bu yerda a toq son) juft son uchun qo‘llasak, u holda

$$\left(\frac{a}{p}\right)=(-1)^{\sum\limits_{k=1}^{p_1}[\frac{a\cdot k}{p}]} \qquad (41.7)$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

41.11-xossa. p va q juft bo‘lmagan tub sonlar uchun quyidagi tenglik o‘rinli

$$\left(\frac{q}{p}\right)\cdot\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

Isbot. $q_1=\dfrac{q-1}{2}$ kabi belgilab, quyidagi $(q\cdot k, p\cdot t)$ juftliklarni qaraymiz, bu yerda $k=1, 2, ..., p_1$ va $t=1, 2, ..., q_1$.

Ma’lumki, k va t larning hech qanday qiymatida $q\cdot k$ va $p\cdot t$ sonlar teng bo‘lmaydi. Aytaylik, $q\cdot k<p\cdot t$ shartni qanoatlantiruvchi juftliklar soni S_1, $q\cdot k>p\cdot t$ shartni qanoatlantiruvchi juftliklar soni esa S_2 bo‘lsin. S_1 va S_2 sonlarining qiymatini topish qiyin emas, chunki S_1 son $k<\dfrac{p\cdot t}{q}$ bo‘lgan (k,t) juftliklar soniga teng, ya’ni

$$S_1 = \sum_{t=1}^{q_1} [\frac{p \cdot t}{q}].$$

Xuddi shunga o‘xshab, $S_2 = \sum_{k=1}^{p_1} [\frac{q \cdot k}{p}].$ Bundan esa, (41.7) tenglikka ko‘ra,

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{S_1}, \ \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{S_2}.$$

Demak, $\left(\frac{q}{p}\right) \cdot \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{S_1+S_2} = (-1)^{q_1 \cdot p_1} = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}.$ □

Yakobi simvoli. Endi Yakobi simvoli tushunchasini aniqlaymiz. Yakobi simvoli Lejandr simvolining umumlashmasi hisoblanib, quyidagicha aniqlanadi.

41.12-ta’rif. Birdan katta P toq soni uchun $P = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_r$ bo‘lsin, bu yerda $p_1, p_2, ..., p_r$ tub sonlar bo‘lib, ular orasida o‘zaro tenglari bo‘lishi ham mumkin.

Berilgan P soni bilan o‘zaro tub a soni uchun quyidagi tenglik yordamida aniqlangan son Yakobi simvoli deyiladi:

$$\left(\frac{a}{P}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right) \cdot \left(\frac{a}{p_2}\right) \cdot ... \cdot \left(\frac{a}{p_r}\right).$$

Lejandr simvolining yuqoridagi xossalaridan foydalanib, Yakobi simvolining xossalarini keltiramiz.

41.13-xossa.

a) agar $a \equiv a_1 (\mathrm{mod}\, P)$ bo‘lsa, u holda $\left(\frac{a}{P}\right) = \left(\frac{a_1}{P}\right)$;

b) $\left(\frac{1}{P}\right) = 1$;

c) $\left(\frac{-1}{P}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2}}$;

d) $\left(\frac{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k}{P}\right)=\left(\frac{a_1}{P}\right)\cdot\left(\frac{a_2}{P}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a_k}{P}\right)$;

e) $\left(\frac{2}{P}\right)=(-1)^{\frac{P^2-1}{6}}$.

Isbot.

a) $\left(\frac{a}{P}\right)=\left(\frac{a}{p_1}\right)\cdot\left(\frac{a}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a}{p_r}\right)=\left(\frac{a_1}{p_1}\right)\cdot\left(\frac{a_1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a_1}{p_r}\right)=\left(\frac{a_1}{P}\right)$.

b) $\left(\frac{1}{P}\right)=\left(\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{p_r}\right)=1.$

c) quyidagi tenglikni qaraylik:

$$\left(\frac{-1}{P}\right)=\left(\frac{-1}{p_1}\right)\cdot\left(\frac{-1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{-1}{p_r}\right)=(-1)^{\frac{p_1-1}{2}+\frac{p_2-1}{2}+\ldots+\frac{p_r-1}{2}}.$$

Ammo,

$$\frac{P-1}{2}=\frac{p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_r-1}{2}=$$

$$=\frac{\left(1+2\cdot\frac{p_1-1}{2}\right)\cdot\left(1+2\cdot\frac{p_2-1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+2\cdot\frac{p_r-1}{2}\right)-1}{2}=$$

$$=\frac{p_1-1}{2}+\frac{p_2-1}{2}+\ldots+\frac{p_r-1}{2}+2N$$

ekannligidan $\left(\frac{-1}{P}\right)=(-1)^{\frac{P-1}{2}}$ kelib chiqadi.

d) ushbu xossa quyidagi tengliklardan kelib chiqadi:

$$\left(\frac{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k}{P}\right)=\left(\frac{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k}{p_1}\right)\cdot\left(\frac{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k}{p_r}\right)$$

$$=\left(\frac{a_1}{p_1}\right)\cdot\left(\frac{a_2}{p_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a_k}{p_1}\right)\cdot\left(\frac{a_1}{p_2}\right)\cdot\left(\frac{a_2}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a_k}{p_2}\right)\cdot$$

$$\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a_1}{p_r}\right)\cdot\left(\frac{a_2}{p_r}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a_k}{p_r}\right)=\left(\frac{a_1}{P}\right)\cdot\left(\frac{a_2}{P}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a_k}{P}\right).$$

e) ma’lumki, $\left(\frac{2}{P}\right)=\left(\frac{2}{p_1}\right)\cdot\left(\frac{2}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{2}{p_r}\right)=(-1)^{\frac{p_1^2-1}{8}+\frac{p_2^2-1}{8}+\ldots+\frac{p_r^2-1}{8}}$.

Quyidagi tenglikdan

$$\frac{P^2-1}{8}=\frac{p_1^2\cdot p_2^2\cdot\ldots\cdot p_r^2-1}{8}=$$

$$=\frac{\left(1+8\frac{p_1^2-1}{8}\right)\cdot\left(1+8\frac{p_2^2-1}{8}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+8\frac{p_r^2-1}{8}\right)-1}{8}=$$

$$=\frac{p_1^2-1}{8}+\frac{p_2^2-1}{8}+\ldots+\frac{p_r^2-1}{8}+2N,$$

xossaning isboti bevosita kelib chiqadi. □

41.14-xossa. O‘zaro tub P va Q toq sonlari uchun quyidagi tenglik o‘rinli:

$$\left(\frac{P}{Q}\right)\cdot\left(\frac{Q}{P}\right)=(-1)^{\frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2}}.$$

Isbot. Aytaylik, $P=p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_r$ va $Q=q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_s$ bo‘lsin.

$$\left(\frac{Q}{P}\right)=\left(\frac{Q}{p_1}\right)\cdot\left(\frac{Q}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{Q}{p_r}\right)=\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s}\left(\frac{q_j}{p_i}\right)=$$

$$=(-1)^{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{p_i-1}{2}\cdot\frac{q_j-1}{2}}\cdot\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s}\left(\frac{p_i}{q_j}\right)=(-1)^{\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{p_i-1}{2}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{q_j-1}{2}\right)}\cdot\left(\frac{P}{Q}\right).$$

41.13-xossaning c) qismi isboti kabi

$$\frac{P-1}{2}=\sum_{i=1}^{r}\frac{p_i-1}{2}+2N_1,\quad \frac{Q-1}{2}=\sum_{i=1}^{s}\frac{q_i-1}{2}+2N_2$$

ekanligidan xossaning isboti kelib chiqadi. □

Misol 41.1. $\left(\frac{219}{383}\right)$ ni toping.

$$\left(\frac{219}{383}\right)=-\left(\frac{383}{219}\right)=-\left(\frac{164}{219}\right)=-\left(\frac{41\cdot 2^2}{219}\right)=-\left(\frac{41}{219}\right)=$$
$$=-\left(\frac{219}{41}\right)=-\left(\frac{14}{41}\right)=-\left(\frac{2}{41}\right)\cdot\left(\frac{7}{41}\right)=-\left(\frac{7}{41}\right)=$$
$$=-\left(\frac{41}{7}\right)=-\left(\frac{-1}{7}\right)=1.$$

Ushbu misoldan ko‘rinadiki $x^2\equiv 219(\mathrm{mod}\,383)$ tenglama ikkita yechimga ega.

42 - §. p^{α} va $p^{2\alpha}$ modul bo‘yicha boshlang‘ich ildizlar

Boshlang‘ich ildizlar. Ma’lumki, Eyler teoremasiga ko‘ra $(a,m)=1$ shartni qanoatlantiruvchi a va m sonlari uchun $a^{\varphi(m)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,m)$. Demak, $a^{\gamma}\equiv 1(\mathrm{mod}\,m)$ taqqoslama o‘rinli bo‘ladigan γ musbat son xar doim topiladi. Bunday sonlar ichida eng kichigiga a ning m *modul bo‘yicha darajasi* deyiladi.

42.1-xossa. Quyidagi munosabatlar o‘rinli:

a) agar δ soni a ning m modul bo‘yicha darajasi bo‘lsa, u holda $1=a^0,a^1,a^2,...,a^{\delta-1}$ sonlari m modul bo‘yicha taqqoslanuvchi bo‘lmaydi.

b) agar δ soni a ning m modul bo‘yicha darajasi bo‘lsa, $a^{\gamma}\equiv a^{\gamma_1}(\mathrm{mod}\,m)$ bo‘lishi uchun $\gamma\equiv\gamma_1(\mathrm{mod}\,\delta)$ bo‘lishi zarur va yetarli. Shuningdek agar $\gamma_1=0$ bo‘lsa, u holda $a^{\gamma}=1(\mathrm{mod}\,m)$ bo‘lishi uchun γ soni δ ga bo‘linishi zarur va yetarli.

Isbot. a) haqiqatan, agar $0\le k<l<\delta$ sonlari uchun $a^l\equiv a^k(\mathrm{mod}\,m)$ bo‘lsa, u holda $a^{l-k}\equiv 1(\mathrm{mod}\,m)$ bo‘ladi. $0<l-k<\delta$ bo‘lganligi uchun, bu δ soni a ning darajasi ekanligiga zid.

b) aytaylik, r va r_1 sonlar $\gamma \equiv r(\bmod m)$, $\gamma_1 \equiv r_1(\bmod m)$ shartlarni qanoatlantiruvchi manfiy bo‘lmagan eng kichik sonlar bo‘lsin. U holda shunday q va q_1 sonlar mavjudki, bunda

$$\gamma = \delta q + r,\ \gamma_1 = \delta q_1 + r_1.$$

Bu tengliklardan va $a^{\delta} \equiv 1(\bmod m)$ ekanligidan foydalansak,

$$a^{\gamma} = (a^{\delta})^{q} a^{r} \equiv a^{r}(\bmod m),$$

$$a^{\gamma_1} = (a^{\delta})^{q_1} a^{r_1} \equiv a^{r_1}(\bmod m)$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Demak, $a^{\gamma} \equiv a^{\gamma_1}(\bmod m)$ bo‘lishi uchun $a^{r} \equiv a^{r_1}(\bmod m)$ tenglik zarur va yetarli. a) xossadan esa $r = r_1$ kelib chiqadi. □

Yuqoridagi xossani $\gamma = \varphi(m)$ va $\gamma_1 = 0$ uchun qo‘llasak, $\varphi(m)$ ning δ soniga bo‘linishi kelib chiqadi. Demak, ixtiyoriy sonning m modul bo‘yicha darajasi $\varphi(m)$ ning bo‘luvchisi bo‘ladi.

Darajasi $\varphi(m)$ ga teng bo‘lgan sonlar esa m modulning *boshlang‘ich ildizlari* deyiladi. Ta’kidlash joizki, m modulning barcha qiymatida ham boshlang‘ich ildizlar mavjud bo‘lavermaydi.

p^{α} va $2p^{\alpha}$ modul bo‘yicha boshlang‘ich ildizlar. Aytaylik, $p > 2$ tub son va $\alpha \geq 1$ bo‘lsin. Biz p^{α} va $2p^{\alpha}$ modul bo‘yicha boshlang‘ich ildizlar mavjudligini isbotlaymiz.

42.2-xossa. Agar x ning m modul bo‘yicha darajasi ab ga teng bo‘lsa, u holda x^{a} ning daajasi b ga teng bo‘ladi.

Isbot. Aytaylik, x^{a} ning darajasi δ bo‘lsin, ya’ni $x^{a\delta} \equiv 1(\bmod m)$. U holda 42.1-xossaga ko‘ra, $a\delta$ soni ab ga bo‘linishi kelib chiqadi, ya’ni δ soni b ga bo‘linadi. Ikkinchi tomondan, esa $x^{ab} \equiv 1(\bmod m)$, ya’ni $(x^{a})^{b} \equiv 1(\bmod m)$. Bundan b soni δ ga bo‘linishi kelib chiqadi. Demak $\delta = b$. □

42.3-xossa. Aytaylik, x va y ning m modul bo‘yicha darajalari mos ravishda a va b bo‘lsin. Agar $(a,b)=1$ bo‘lsa, u holda xy ning darajasi ab ga teng bo‘ladi.

Isbot. xy ning darajasi δ bo‘lsin, ya’ni $(xy)^{\delta}\equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$. U holda $x^{b\delta}y^{b\delta}\equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$. Bu taqqoslamadan y ning m modul bo‘yicha darajasi b ekanligini hisobga olib, $x^{b\delta}\equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$ ni hosil qilamiz. Demak, $b\delta$ soni a ga bo‘linadi, $(a,b)=1$ bo‘lganligi uchun δ soni a ga bo‘linishi kelib chiqadi.

Xuddi shunga o‘xshab, δ sonining b ga bo‘inishini hosil qilamiz. Bundan esa δ ni ab ga bo‘linishi kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan, $(xy)^{ab}=1(\mathrm{mod}\, m)$ ekanidan, ab ni δ ga bo‘linishi kelib chiqadi. Demak, $\delta = ab$. □

42.4-xossa. p modul bo‘yicha boshlang‘ich ildiz mavjud.

Isbot. Aytaylik, $1, 2, ..., p-1$ sonlarining p modul bo‘yicha barcha darajalari $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_r$ bo‘lsin. τ orqali bu darajalarning eng kichik umumiy karralisini belgilab, uning $\tau = q_1^{\alpha_1}\cdot q_2^{\alpha_2}\cdot ...\cdot q_k^{\alpha_k}$ kanonik yoyilmasini qaraymiz.

U holda xar bir $q_j^{\alpha_j}$ uchun, bu songa bo‘linuvchi δ_{i_j} topiladi, ya’ni, $\delta_{i_j} = a_j q_j^{\alpha_j}$. Darajasi δ_{i_j} bo‘lgan x_j soni uchun $x_j^{a_j}$ ni qarasak, 42.2-xossaga ko‘ra $x_j^{a_j}$ sonining darajasi $q_j^{\alpha_j}$ bo‘ladi.

42.3-xossaga ko‘ra $g = x_1^{a_1}\cdot x_2^{a_2}\cdot ...\cdot x_k^{a_k}$ sonining darajasi esa $q_1^{\alpha_1}\cdot q_2^{\alpha_2}\cdot ...\cdot q_k^{\alpha_k}=\tau$ ga teng. Berilgan $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_r$ sonlar τ ning bo‘luvchilari ekanidan ixtiyoriy $x\in\{1, 2, ..., p-1\}$ soni uchun $x^{\tau}\equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$ taqqoslama o‘rinli bo‘ladi.

Tenglama ildizlari soni uning darajasidan katta bo‘lmaganligi uchun $p-1\le\tau$ kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan ixtiyoriy sonning darajasi $p-1$ ning bo‘luvchisi bo‘lganligi uchun $\tau \le p-1$. Demak, $\tau = p-1$ ya’ni, g boshlang‘ich ildiz. □

42.5-tasdiq. Ixtiyoriy $\alpha > 1$ uchun p^{α} modul bo‘yicha boshlang‘ich ildiz mavjud.

Isbot. Aytaylik, g soni p modul bo‘yicha boshlang‘ich ildiz bo‘lsin. 42.4-xossaga ko‘ra bunday g mavjud. U holda $g^{p-1} = 1 + pT_0$ tenglik o‘rinli. Bundan esa, ixtiyoriy t soni uchun

$$(g + p \cdot t)^{p-1} = 1 + p(T_0 - g^{p-2} \cdot t + p \cdot T) = 1 + p \cdot u \qquad (42.1)$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu yerdagi t va u sonlari p modul bo‘yicha barcha chegirmalarni qabul qilganligi uchun, t ni u soni p ga bo‘linmaydigan qilib tanlash mumkin. Bunday t lar uchun quyidagilarga ega bo‘lamiz.

$$\begin{cases} (g + p \cdot t)^{p(p-1)} = (1 + p \cdot u)^{p} = 1 + p^2 u_2, \\ (g + p \cdot t)^{p^2(p-1)} = (1 + p^2 \cdot u_2)^{p} = 1 + p^3 u_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (g + p \cdot t)^{p^{k-1}(p-1)} = (1 + p^{k-1} \cdot u_2)^{p} = 1 + p^k u_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases} \qquad (42.2)$$

bu yerda $u_2, u_3, \dots, u_k, \dots$ sonlari p ga bo‘linmaydi.

Aytaylik, $g + pt$ sonining p^{α} bo‘yicha darajasi δ bo‘lsin, u holda

$$(g + p \cdot t)^{\delta} \equiv 1 (\operatorname{mod} p^{\alpha}).$$

Bu yerdan $(g + p \cdot t)^{\delta} \equiv 1 (\operatorname{mod} p)$ ekanligi, ya’ni δ ning $p-1$ ga bo‘linishi kelib chiqadi. $\varphi(p^{\alpha}) = p^{\alpha-1}(p-1)$ bo‘lganligi va δ daraja $\varphi(p^{\alpha})$ sonining bo‘luvchisi ekanligidan $\delta = p^{r-1}(p-1)$ kelib chiqadi. (42.1) va (42.2) tengliklarga asosan,

$$(g + p \cdot t)^{\delta} = (g + p \cdot t)^{p^{r-1}(p-1)} = 1 + p^r u_r,$$

bu yerda $u_1 = u$ deb olamiz. Demak, $1 + p^r u_r \equiv 1(\bmod p^\alpha)$, ya'ni $p^r \equiv 0(\bmod p^\alpha)$. Bundan esa $r = \alpha$ kelib chiqadi. Bu esa $\delta = \varphi(p^\alpha)$ ekanligini bildiradi, ya'ni $g + pt$ soni p^α modul bo'yicha boshlang'ich ildiz. □

42.6-tasdiq. Ixtiyoriy $\alpha > 1$ uchun $2p^\alpha$ modul bo'yicha boshlang'ich ildiz mavjud.

Isbot. Aytaylik, g_1 soni p^α modul bo'yicha boshlang'ich ildiz bo'lsin. U holda g_1 va $g_1 + p^\alpha$ sonlaridan toq bo'lgani $2p^\alpha$ modul bo'yicha boshlang'ich ildiz bo'ladi.

Haqiqatan ham, agar g_1 toq bo'lsa, u holda $g_1^\delta \equiv 1(\bmod p^\alpha)$ ekanligidan $g_1^\delta \equiv 1(\bmod 2p^\alpha)$ kelib chiqadi. $\varphi(p^\alpha) = \varphi(2p^\alpha)$ bo'lganligi uchun g_1 soni $2p^\alpha$ modul bo'yicha boshlang'ich ildiz bo'ladi. Agar g_1 juft son bo'lsa, u holda $g_1 + p^\alpha$ toq som bo'ladi, hamda yuqoridagi kabi $g_1 + p^\alpha$ soni $2p^\alpha$ modul bo'yicha boshlang'ich ildiz ekanligi kelib chiqadi. □

INDEXLAR

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YHATI

1. Dixon M.R., Kurdachenko L.A., Subbotin I.Ya., Algeba and Number theory. 2010. – 523 p.
2. Everest G., Ward T. An Introduction to Number Theory. 2006. – 297 p.
3. Kuttler K. Elementary linear algebra. 2012. – 433 p.
4. Strang G. Introduction to Linear algebra. 2016. – 584 p.
5. Бухштаб А.А. Теория чисел. 1966. – 386 с.
6. Веретенников Б.М., Михалева М.М., Алгебра и теория чисел. Учебное пособие. 2014. – 52 с.
7. Виноградов И.М. Основы теории чисел. 1948. – 178 с.
8. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. 1998. – 320 с.
9. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры. 2000. – 272 с.
10. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра. 2000. – 368 с.
11. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. Москва. 1979. –559 с.
12. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. 2008. – 432 с.
13. Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2010. – 480 с.
14. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. 2007. – 416 с.
15. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999. – 304 с.
16. Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.